UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Análise Combinatória e Probabilidade para o Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Rígel Alves Rabelo de Oliveira

Orientador: Almir Rogério Silva Santos

São Cristovão, 2015.

Sumário

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me beneficiado com saúde e inteligência para que esse sonho se tornasse possível; à minha noiva Jéssica por ter aturado todas as manhãs de sábado ausentes e também todo o estresse decorrente da elaboração dessa dissertação; aos meus professores, em particular ao meu orientador Almir e aos Professores Zaqueu, Humberto e Danilo Felizardo, pelo apoio e amplos conhecimentos adquiridos durante o curso; aos meus colegas professores Anselmo e Bergson pelo incentivo em prestar o teste de seleção que culminou em minha aprovação; a toda a equipe de professores, coordenadores e diretores do Colégio Amadeus que me acolheu no início de minha carreira profissional e até hoje me dá oportunidades para crescer cada vez mais; a todos meus colegas de sala, particularmente a Fábio, Jefson, Allisson, Epifânio, Emídio e Simone pelo apoio, incentivo e ajuda em algumas disciplinas; aos meus diretores e ex-diretores da EMEF Sabino Ribeiro pela compreensão das ausências em alguns dias e finalmente ao meu pai por ter me dado desde criança o exemplo de que devemos sempre investir nos estudos para alcançar degraus cada vez mais altos.

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo criar um embasamento teórico sólido do conteúdo Análise Combinatória e Probabilidade ao nível de Ensino Médio e, através da apresentação dos problemas mais comuns do conteúdo, servir de roteiro de aprofundamento para alunos que o estejam estudando bem como para professores que necessitem de uma orientação sobre a melhor forma como o conteúdo pode ser apresentado aos seus alunos. Os exemplos apresentados foram escolhidos entre os principais temas abordados pelos conteúdos, e foram evitadas repetições exaustivas de problemas similares, tornando assim o material resumido em termos de quantidade de exemplos, porém extremamente completo com o intuito de esquematizar seu estudo dividindo os problemas em grupos e apresentando para cada grupo as diversas formas existentes para resolvê-los. O trabalho utiliza para resolução dos problemas tão somente os princípios que fundamentam a Análise Combinatória excluindo quase que por completo o uso de fórmulas prontas que tanto dificultam e confundem os alunos (e também alguns professores) em seus estudos.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Possibilidades, Probabilidade, Educação Básica.

Abstract

This work aims to create a solid theoretical basis of the content Combinatorial Analysis and Probability at the level of secondary education and by presenting the most common problems of the content, serve to deepen roadmap for students who are studying and for teachers need guidance on the best way content can be presented to students. The examples presented were chosen among the main topics addressed by the contents, and were avoided exhaustive repetition of similar problems, thus making the material summarized in terms of number of examples, but extremely thorough in order to lay their study dividing problems into groups and for each group presenting the various existing ways to solve them. The work uses to solve problems as only the principles that underlie Combinatorial Analysis excluding almost completely the use of ready-made formulas that both hinder and confuse students (and some teachers) in their studies.

Keywords: Combinatorial Analysis , Possibilities , Probability , Basic Education

Introdução

Desde a época em que estudava no antigo 2º ano do 2º grau, hoje chamada 2ª série do Ensino Médio, sempre fui apaixonado pela Análise Combinatória e Probabilidade. Foi quiçá o assunto da Matemática do Ensino Médio que eu mais tive paixão em aprender. Sempre achei linda a maneira com que as possibilidades e probabilidades eram calculadas sem a necessidade de uma contagem uma a uma. Entretanto, mesmo tendo um excelente professor quando estudei esse assunto, a forma como ele me foi apresentado (por meio de fórmulas e receitas prontas) não era do meu agrado e eu então optei por resolver "ao meu modo" e muitas vezes era questionado em provas pelo próprio professor sobre o porquê dessa ou daquela multiplicação.

Muito tempo após, já excercendo regularmente a atividade docente em Matemática procurei ensinar essa "minha forma" para os alunos e o insucesso foi imediato com coros entoados pelos alunos ao som de que não estavam entendendo nada. Pois bem, voltei atrás e começei a lecionar esse assunto com a mesma receita que tanto odiava, ou seja, com fórmulas e receitas prontas e foram alguns anos ensinando dessa forma até que recebi a orientação de um professor amigo que ensinava sem o uso de fórmulas e me mostrou o caminhos das pedras. Decidi tentar novamente e, em uma turma apenas, optei por ensinar utilizando apenas os princípios da Análise Combinatória e Probabilidade e, para minha enorme alegria e sentimento de dever cumprido, esta sala foi a que obteve melhores resultados na avaliação que versava sobre esses temas.

Durante todos os demais anos não tive dúvidas: iria ensinar sempre dessa forma, indo na contramão da maioria dos professores que preferiam apresentar fórmulas prontas aos alunos.

A Análise Combinatória é a área da Matemática que se ocupa com o cálculo do número de possibilidades distintas ou o número de elementos existentes em uma determinada situação a que chamaremos *experimento*.

Talvez pelas habilidades que são envolvidas em seu estudo, tais quais capacidade de raciocínio e organização lógica do pensamento, o conteúdo Análise Combinatória aparece sempre listado entre os mais difíceis, especialmente para aqueles que possuem certa dificuldade em Matemática, o que representa uma grande parcela da população. Entretanto, para os amantes da Matemática (e eu me incluo nesse segmento), a Análise Combinatória, quase sempre associada ao estudo das Probabilidades, surgem como os mais belos e atrativos conteúdos aprendidos no Ensino Médio.

Ao contrário do que muitos imaginam devido à sequência com que esses conteúdos são apresentados, a Análise Combinatória, historicamente, evoluiu como uma ferramenta para o cálculo do número de possibilidades que envolviam os cálculos das probabilidades. Estas últimas remontam de épocas muito anteriores vindo desde vários anos antes de Cristo mas que só teve seu papel científico firmado por volta do século XVI.

O estudo das probabilidades, apesar de ser hoje uma ferramenta matemática extremamente avançada e amplamente utilizada nas mais diversas áreas das ciências, indústria, comércio, agricultura, entre outras, frequentemente tem sua importância associada aos jogos de azar. Lançamento de dados e moedas, bem como o sorteio de bolinhas numeradas para uma loteria sempre elencam os exemplos mais utilizados pelos docentes ao lecionar esse conteúdo.

Historicamente essa foi a origem das probabilidades, durante muito tempo associada a tais jogos de azar e às pessoas que deles gostavam, como viciados em jogo, bêbados e outras classes marginais à sociedade.

Esse trabalho foi organizado imaginando uma sequência de ensino dos tópicos sobre Análise Combinatória e Probabilidade ao nível de Ensino Médio em uma tentativa de colocar por escrito tudo aquilo que foi aprendido por mim nesses muitos anos que me dedico a tornar esse assunto entendível e agradável para o professor e especialmente para o aluno que é o objetivo central da aula. Iremos em cada tópico exemplificar as principais situações e formas de abordagem desses dois assuntos tão odiados entre os alunos.

Capítulo 1

A Análise Combinatória e o cálculo de possibilidades

1.1 O princípio fundamental da contagem

Basicamente a Análise Combinatória tem a finalidade da contagem, ou seja, em determinar o número total de possibilidades, ou maneiras, ou formas diferentes que temos para um determinado experimento ocorrer. Citaremos alguns exemplos para que essa ideia fique um pouco mais clara.

Exemplo 1.1: Considere um grupo com 5 homens (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) e 3 mulheres (m_1, m_2, m_3). Desejamos escolher duas dessas pessoas para formar um casal (um homem e uma mulher), de quantas formas distintas podemos fazer isso?

Observe que esse experimento deve ocorrer em duas etapas: a escolha do homem e a escolha da mulher e que cada uma dessas etapas apresenta uma quantidade de possibilidades de escolha. A escolha do homem pode se proceder de 5 formas diferentes e a escolha da mulher de 3 formas. Dessa maneira, representando a escolha do casal por um par ordenado, teremos as seguintes possibilidades: (h_1, m_1), (h_1, m_2), (h_1, m_3), (h_2, m_1), (h_2, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1), (h_3, m_2), (h_3, m_3), (h_4, m_1), (h_4, m_2), (h_4, m_3), (h_5, m_1), (h_5, m_2), (h_5, m_3). Observe que as 15 possibilidades diferentes de escolha do casal é exatamente a multiplicação de 5 por 3 que representa a multiplicação do número de possibilidades de escolha do homem pelo número de possibilidades de escolha da mulher e, a partir daí, podemos enunciar o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) que também é chamado de *Princípio Multiplicativo*:

“Em um experimento que ocorre em várias etapas, o número de possibilidades diferentes que o experimento pode se desenvolver é a multiplicação das quantidades de possibilidades de escolha para cada uma das etapas”.

Nesse exemplo 1.1, observemos que cada uma das escolhas é feita a partir de conjuntos diferentes, a primeira escolha é feita entre o conjunto dos homens e a segunda escolha é feita entre o conjunto das mulheres e estes conjuntos não possuem interseção entre si.

Exemplo 1.2: Três prêmios diferentes (p_1, p_2, p_3) serão sorteados entre 5 pessoas. De quantas maneiras distintas podemos efetuar tal premiação?

Nesse segundo exemplo devemos ficar atentos a alguns detalhes. A nossa primeira ideia seria associar cada prêmio a uma pessoa e, assim, as nossas etapas seriam: escolha da pessoa que irá receber o primeiro prêmio, escolha da pessoa que receberá o segundo prêmio e escolha da pessoa que receberá o terceiro prêmio. Entretanto surge uma dúvida: uma mesma pessoa pode receber mais de um prêmio? O enunciado do exemplo claramente não faz nenhuma ressalva a isso, dando a entender que é sim possível que uma pessoa receba mais de um prêmio e quiçá até receba os três prêmios. Dessa forma, o número de possibilidades será $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Porém, se o enunciado deixasse claro que uma mesma pessoa não possa receber mais de um prêmio ou ainda que venha dito que “três pessoas serão escolhidas de um grupo de 5 pessoas para receberem três prêmios diferentes”, dando a ideia de que devem ser escolhidas realmente três pessoas, então o número de possibilidades resumir-se-ia a $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, pois cada nova escolha teria uma possibilidade a menos que a anterior, haja vista que a pessoa que acabou de ser sorteada não poderia ser sorteada outra vez.

1.2 O princípio da preferência, o princípio das gavetas e o princípio aditivo

Assim observemos que em situações que as escolhas devem ser feitas a partir de um mesmo conjunto é relevante saber se o mesmo elemento desse conjunto pode ser escolhido mais de uma vez ou se cada escolha de um elemento do conjunto impede sua escolha uma segunda vez.

Um clássico exemplo disso é representado pelo problema de formar números escolhidos a partir de alguns algarismos, exemplo esse ilustrado a seguir.

Exemplo 1.3: Com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5 podemos formar quantos números:

a) com 4 algarismos?

b) com 4 algarismos distintos?

c) pares com 4 algarismos?

d) ímpares com 4 algarismos distintos?

e) divisíveis por 5, com algarismos distintos?

Vamos observar como podem ser feitas tais escolhas item a item.

a) Observe que nesse item "a" não há a exigência de que os algarismos escolhidos sejam diferentes, portanto nosso problema resume-se em escolher um a um tais algarismos e cada uma dessas escolhas possui 5 possibilidades. Assim, teremos $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ números.

b) Nesse item "b" há a necessidade de que cada algarismo escolhido seja diferente dos anteriores, assim, em cada nova escolha há uma possibilidade a menos e portanto teremos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ números.

c) O item "c" exige que o número formado seja par, o que pode ser representativamente feito escolhendo como um algarismo par o algarismo das unidades. Assim, devemos primeiramente escolher esse algarismo das unidades, que pode ser feito apenas de 2 maneiras diferentes (2 ou 4) e a seguir escolhemos os demais algarismos que terão 5 possibilidades de escolha cada um. Logo, teremos $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 250$ números.

   Uma grande atenção que devemos levar em conta no item "c" é que nesse item em particular, a escolha primeiramente do algarismo do milhar, em seguida do algarismo da centena, em seguida do algarismo da dezena e por fim, do algarismo da unidade, respectivamente nessa ordem, não alteraria o resultado final pois não há a exigência de que os algarismos sejam distintos, entretanto o mesmo não ocorrerá para o item "d", em que há essa exigência. Dessa forma, podemos enunciar um segundo princípio da Análise Combinatória que é chamado de *Princípio da Preferência*:

"Se em um experimento que é realizado em diversas etapas, uma ou mais dessas etapas apresentarem alguma restrição, daremos preferência de escolha às possibilidades dessas etapas com restrição para, somente após isso, escolhermos as possibilidades das etapas que não apresentam restrição".

d) Seguindo então a ideia apresentada no Princípio da Preferência, no item "d" desejamos que o número formado seja ímpar o que implicará em uma restrição ao algarismo das unidades que deverá ser necessariamente um algarismo ímpar e terá 3 possibilidades de escolha (1, 3 ou 5). Após garantida a restrição, escolhemos os algarismos do milhar, da centena e da dezena que terão respectivamente, 4, 3 e 2 possibilidades de escolha, haja vista que os algarismos devem ser distintos. Assim, teremos $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ números.

e) No item "e", observa-se que não é informado a quantidade de algarismos do número que se deseja formar e, dessa forma, teoricamente esse número poderia ter qualquer quantidade de algarismos. Entretanto, observando que esses algarismos devem ser distintos podemos concluir que o número formado não poderá ter mais que 5 algarismos pois, caso contrário, seríamos obrigados a repeti-los. Esse princípio, chamado de *Princípio das Gavetas* (ou *Princípio da Casa dos Pombos*), que é enunciado a seguir, apesar de não ser um princípio intrínseco da Análise Combinatória, é de vital importância em diversas situações.

"Se n objetos são colocados em m gavetas, com $m < n$, então alguma gaveta conterá necessariamente mais de um objeto"

Por exemplo, se 5 canetas devem ser colocadas em 4 gavetas, necessariamente alguma gaveta terá mais de uma caneta. Notemos que não há condições de dizer qual das gavetas terá mais de uma caneta e nem tão pouco, quantas canetas haverá nessa gaveta pois temos a opção de colocar, por exemplo, todas as 5 canetas na mesma gaveta. Assim seria errado, nessa situação, dizer que em alguma gaveta há 2 canetas.

Afora isso, é importante salientar que esse Princípio das Gavetas pode ter sua aplicação ampliada para mais objetos. Por exemplo, suponha que 9 canetas agora devem ser colocadas em 4 gavetas; necessariamente alguma das gavetas terá mais de duas canetas e, pensando de um modo geral, se temos mais de $4n$ canetas para colocar em 4 gavetas, então alguma das gavetas terá mais de n canetas.

Retornando ao item "e" do nosso problema dos algarismos, concluímos então que o número formado terá no máximo 5 algarismos, ou seja, o número formado poderá ter 1, 2, 3, 4 ou 5 algarismos e isso nos leva a pensar em mais um princípio da Análise Combinatória chamado de *Princípio da Adição*, também chamado informalmente de Regra do "*ou*".

"Se um determinado experimento pode ser realizado de várias formas diferentes, cada uma dessas formas possui uma quantidade de possibilidades diferentes de ocorrência e entre essas possibilidades não há uma interseção, então a quantidade total de possibilidades do experimento é a soma das quantidades de possibilidades em cada uma dessas formas".

Ou seja, devemos calcular quantos números podem ser formados com apenas um algarismo, que seria apenas o número 5 (1 possibilidade), quantos números podem ser formados com dois algarismos ($4 \cdot 1 = 4$ possibilidades), com três algarismos ($4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ possibilidades), com quatro algarismos ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades) e com cinco algarismos ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$ possibilidades) e, em seguida, somar essas possibilidades, o que resultará em $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$ possibilidades. Perceba que esse 1 que aparece no cálculo de cada uma das possibilidades se refere à escolha do algarismo das unidades que deve ser o 5, já que o número formado deve ser divisível por 5. Além disso, perceba também que se o item não exigisse que os algarismos fossem distintos, poderíamos formar infinitos números pois a quantidade de algarismos não seria limitada pelo Princípio das Gavetas.

Esses problemas de formação de números a partir de algarismos tornam-se mais complexos quando temos a disposição o algarismo 0 (zero) devido ao fato de não podermos usá-lo para iniciar o número.

Exemplo 1.4: Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4 podemos formar quantos números:

a) com 4 algarismos?

b) com 4 algarismos distintos?

c) pares com 4 algarismos?

d) pares com 4 algarismos distintos?

e) divisíveis por 5, com 4 algarismos distintos?

Vamos às resoluções:

a) Nesse item "a" iremos escolher primeiramente o algarismo do milhar que não poderá ser o 0 (zero), logo teremos somente 4 possibilidades. Os demais algarismos terão 5 possibilidades cada um, inclusive podendo ser o 0 (zero). Assim, existirão $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ números.

b) No item "b" escolheremos o algarismo do milhar que novamente não pode ser o zero (4 possibilidades). O algarismo da centena não poderá ser o algarismo que foi escolhido no milhar porém pode agora ser o 0 (zero) e assim continuaremos com 4 possibilidades. Para os algarismos da dezena e na unidade teremos, respectivamente, 3 e 2 possibilidades. Assim existirão $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ possibilidades.

c) No item "c" escolheremos o algarismo das unidades que possui a restrição de ser par, logo teremos 3 possibilidades (0, 2 ou 4). Para o algarismo do milhar teremos 4 possibilidades (não pode ser o zero) e para os demais algarismos teremos 5 possibilidades. Assim, existirão $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 300$ números.

d) O item "d" traz um problema que passa despercebido por muitas pessoas. De maneira equivocada poderíamos raciocinar de maneira parecida com o item "c" pensando que o algarismo das unidades terá 3 possibilidades de escolha e o algarismo do milhar também terá 3 possibilidades pois não poderia ser nem o algarismo escolhido na unidade e nem o 0 (zero). Entretanto esse pensamento é equivocado pois o algarismo da unidade pode ser o próprio 0 (zero). Dessa forma, teremos de dividir o problema em dois: calcular os números terminados em 0 (zero) e calcular os números terminados em um outro algarismo par que não seja o 0 (zero).

Números terminados em 0 (zero): teremos uma possibilidade apenas para o algarismo das unidades (que será o próprio zero) e para os algarismos do milhar, centena e dezena teremos, respectivamente, 4, 3 e 2 possibilidades. Assim, existirão $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números terminados com 0 (zero).

Números terminados em 2 ou 4: teremos 2 possibilidades para o algarismo das unidades (2 ou 4), 3 possibilidades para o algarismo do milhar (não pode ser o zero e nem o usado para a unidade), 3 possibilidades para a centena (não pode ser nenhum dos que foram utilizados na unidade e no milhar, porém pode ser o zero) e 2 possibilidades para a dezena. Assim, existirão $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ números terminados em 2 ou 4. Portanto, pelo Princípio da Adição, existirão, ao total, $24 + 36 = 60$ números pares com 4 algarismos distintos.

e) O item “e” não apresentará a mesma problemática do item “d” pois não há a possibilidade de utilizar o 5. Caso houvesse o 5 entre os algarismos que pudessem ser utilizados deveríamos também separar o problema em dois: os números terminados em 0 (zero) e os números terminados em 5. Entretanto, como não é o caso, teremos uma possibilidade apenas para o algarismo das unidades (deve ser o zero) e, para os algarismos do milhar, centena e dezena teremos, respectivamente, 4, 3 e 2 possibilidades. Assim, existirão $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números.

Exemplo 1.5: Cinco casas estão dispostas lado a lado em uma mesma rua. Dispomos de 4 cores distintas para pintar essas casas. Se cada casa será pintada de uma só cor e não podemos misturar as cores disponíveis para formar novas cores, de quantas formas podemos pintar essas casas de forma que casas vizinhas não possuam a mesma cor.

Esse tipo de problema também é bastante comum entre as questões que envolvem

Análise Combinatória e é uma aplicação do Princípio da Preferência. Inicialmente escolhemos uma cor para uma das casas, normalmente a primeira, e teremos 4 possibilidades. No momento em que escolhemos a cor dessa primeira casa criamos uma restrição para a(s) casa(s) vizinhas a essa que não poderão ser pintadas na mesma cor que foi escolhida pela primeira e teremos apenas 3 possibilidades para essa(s) casa(s). Para todas as demais casas a única restrição é que não pode ser pintada da mesma cor da vizinha a ela e assim, teremos $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$ possibilidades.

Perceba de um modo mais genérico que a primeira escolha sempre terá o total de possibilidades e as demais possibilidades terão uma a menos que o total. Assim, de uma forma genérica, se nesse problema existissem m casas e n cores, teríamos $n \cdot (n-1)^m$ formas de pintar as casas desde que duas casas vizinhas não tivessem a mesma cor.

Exemplo 1.6: De quantos modos distintos 4 cartas distintas podem ser colocadas em 3 caixas de correio?

Já vimos através do Princípio das Gavetas que nesse problema existirá alguma caixa de correio com mais de uma carta. Mas quantos modos temos ao total para distribuir essas cartas nas caixas? Esse tipo de problema consiste em uma associação entre os elementos cartas e caixas que pode ser analisada de um modo análogo a uma função. Entretanto há a necessidade de se saber se a partir das cartas iremos escolher as caixas ou se a partir das caixas iremos escolher as cartas. A forma correta é a primeira, escolheremos em que caixa cada carta irá ser colocada devido ao fato de que cada carta terá uma única caixa do mesmo modo que, em uma função, cada x deve ser associado a um único y. Portanto, para cada carta, existem 3 formas diferentes de se escolher a caixa em que ela será colocada e, dessa forma, teremos $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ formas de colocar essas cartas nessas caixas.

Exemplo 1.7: De um baralho de 52 cartas, retiram-se sucessivamente (sem reposição) duas cartas. Quantas são as extrações distintas em que a primeira carta é de copas e a segunda é um rei?

Observe que um erro comum seria imaginar a resposta como $13 \cdot 4 = 52$ extrações (13 possibilidades para a carta de copas e 4 possibilidades para o rei). Realmente se as cartas não fossem retiradas sucessivamente, ou seja, se houvesse a reposição da primeira carta ao baralho antes da retirada da segunda, essa resposta estaria correta.

Entretanto, nessa situação em que não há reposição devemos levar em conta se a primeira carta de copas retirada é ou não o rei de copas, pois isso altera o número de possibilidades da segunda retirada. Assim devemos dividir o problema novamente em dois: possibilidades em que a primeira carta retirada é o rei de copas e possibilidades em que a primeira carta retirada é de copas porém não é o rei.

Para a primeira maneira há apenas uma possibilidade para a primeira retirada (deve ser o rei de copas) e para a segunda haveria apenas 3 possibilidades (os 3 reis restantes). Já na segunda maneira haveria 12 possibilidades para a primeira carta (todas as cartas de copas exceto o rei) e 4 possibilidades para a segunda carta (os 4 reis). Portanto, teremos ao total $1 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = 51$ possibilidades. É importante salientar que a diferença de apenas uma possibilidade se deve à possibilidade das duas cartas retiradas serem reis de copas, o que não é possível sem reposição porém seria possível com reposição.

Exemplo 1.8: Um salão possui 8 lâmpadas que possuem, cada uma, seu interruptor independente. De quantas formas distintas podemos iluminar esse salão?

Essa situação nos dá uma ideia não de escolher elementos a partir de alguns disponíveis, mas sim e saber se um determinado elemento está nessa ou naquela condição; ou ainda se determinado elemento será ou não selecionado. Em particular, esse problema se resume a escolher para cada lâmpada se ela estará ou não apagada (2 possibilidades). Desta forma, teremos $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 256$ formas diferentes de dispor as lâmpadas desse salão em ligadas ou desligadas; entretanto, há uma dessas 256 possibilidades em que todas as lâmpadas estariam apagadas e, como o exemplo nos pede a quantidade de formar de se iluminar o salão, então teríamos apenas 255 possibilidades (excluindo a possibilidade em que todas as lâmpadas estão apagadas).

Observe que essa ideia do exemplo 1.8 seria a mesma de termos o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, em que cada número representaria uma lâmpada e, a partir dele, criar subconjuntos em que cada elemento represente os números das lâmpadas acesas. Por exemplo, o conjunto $\{3, 4, 8\}$ representaria a possibilidade em que as lâmpadas

3, 4 e 8 estariam acesas e as demais estariam apagadas. Nessa simbologia, o conjunto vazio $\{\}$ representaria a possibilidade em que todas as lâmpadas estariam apagadas e o próprio conjunto A representaria a possibilidade em que todas as lâmpadas estariam acesas.

É importante entender que essa é uma das formas de se calcular o número de subconjuntos de um conjunto A com n elementos. Desejamos criar subconjuntos em que cada um dos n elementos do conjunto A possam pertencer ou não, do mesmo modo que cada lâmpada poderia estar acesa ou apagada. Dessa forma, cada elemento do conjunto n teria 2 possibilidades e, portanto, existem $2 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2 = 2^{n(A)}$ subconjuntos, em que *n(A)* representa o número de elementos do conjunto A.

É fato que um conjunto pode até possuir elementos repetidos e, caso isso ocorra, ao invés de escolher se cada elemento irá ou não participar do subconjunto, devemos escolher quantas vezes cada elemento irá participar do subconjunto. Assim, no conjunto $A = \{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$, por exemplo, devemos escolher quantas vezes o número 1 aparecerá, que nos dará 3 possibilidades (nenhuma vez, uma vez ou duas vezes); quantas vezes o número 2 aparecerá que nos dará 4 possibilidades (nenhuma vez, uma vez, duas vezes ou três vezes) e quantas vezes o número 3 aparecerá que nos dará 2 possibilidades (nenhuma vez ou uma vez). Dessa forma, em uma situação que existam vários elementos idênticos que podem ser escolhidos, o número de possibilidades para cada etapa será a quantidade de vezes que escolheremos cada elemento e não se escolheremos ou não o elemento. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 1.9: Quantos números diferentes podem ser formados multiplicando alguns (ou todos) entre os números 1, 5, 6, 7, 7, 9, 9, 9?

Notemos que nesse caso não nos bastaria informar se usaremos ou não o número 7 e se usaremos ou não o número 9. Escolhendo mais de uma vez o 7 ou mais de uma vez o 9 formaremos números diferentes, afora isso a escolha (ou não) do número 1 não influencia o produto final e então optaremos por sempre escolhe-lo para não ferir o conceito de multiplicação que deve ser feita entre dois ou mais números. Dessa forma, ao invés de escolher ou não cada um dos números, iremos escolher quantas vezes esses números aparecerão como fatores do produto. Assim, o número 5 terá duas possibilidades (escolhemos ou não), o número 6 também terá duas possibilidades (escolhemos ou não), o número 7 terá 3 possibilidades (escolhemos duas vezes, uma vez ou não escolhemos) e o número 9 terá 4 possibilidades (escolhemos três vezes, duas vezes, uma vez ou não escolhemos). Portanto, podemos formar $2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 48$ resultados diferentes para o produto de alguns (ou todos) desses números. Observemos que uma dessas 48 possibilidades seria não escolher nenhum dos números o que resultaria em termos apenas o número igual a 1 que fora escolhido em todas as possibilidades.

É a partir dessa ideia que podemos calcular o número de divisores naturais que um número possui através da sua fatoração em números primos. Por exemplo, o número 180 pode ser decomposto (em fatores primos) como $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Assim, qualquer produto formado com alguns (ou todos) entre os números 1, 2, 2, 3, 3, 5 será um divisor natural de 180. Dessa forma, o número 2 e 3 terão três possibilidades cada (escolhemos 2 vezes, uma vez ou nenhuma vez) e o número 5 terá 2 possibilidades (escolhemos ou não). Portanto, o número 180 possui $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ divisores naturais. Mais uma vez notemos que a não escolha de nenhum dos fatores resulta no produto igual a 1 que é realmente um divisor de qualquer número. De fato, o conjunto dos divisores de 180 é $D(180) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180\}$, ou seja, possui 18 elementos.

A partir disso podemos encontrar, de maneira genérica, a quantidade de divisores naturais de um número qualquer N. Fatorando esse número N em $N = (p_1)^{a_1} \cdot (p_2)^{a_2} \cdot \cdots \cdot (p_n)^{a_n}$, com p_1, p_2, ..., p_n, números primos distintos e a_1, a_2, ..., a_n, números naturais, teremos que o número N terá $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \cdots \cdot (a_n + 1)$ divisores naturais, que nada mais são que as quantidades de vezes que podemos usar (ou não) cada um dos primos p_1, p_2, ..., p_n.

É fato que a Análise Combinatória possui uma vasta gama de aplicações e isso se baseia em uma série de princípios tendo o Princípio Fundamental da Contagem como o mais importante deles, entretanto, o Princípio da Preferência, o Princípio Aditivo e o Princípio das Gavetas também possuem uma grande relevância na resolução dos mais diversos problemas. No capítulo 2 iremos apresentar Princípio do Desprezo de Ordem (PDO) que é um divisor de águas nos problemas de contagem, dividindo os problemas em dois grandes tipos: aqueles em que a ordem de escolha dos elementos é importante (permutações e arranjos) e aqueles em que a ordem de escolha dos elementos pode ser desprezada (combinações).

Capítulo 2

O princípio do desprezo de ordem

2.1 Definição

Existem alguns problemas em Análise Combinatória em que a ordem de escolha dos elementos não é importante e pode ser desprezada. Em tais problemas diremos que há um desprezo de ordem entre os elementos escolhidos. Para organizar nosso raciocínio enunciamos o Princípio do Desprezo de Ordem (PDO) a seguir:

"Dizemos que em um experimento existe desprezo de ordem entre n elementos quando, uma vez feita a escolha desses elementos, mudando-se a ordem dos elementos escolhidos, a escolha não se altera".

A seguir citamos alguns exemplos em que ocorre tal desprezo de ordem.

Exemplo 2.1: Oito pontos distintos foram colocados sobre uma circunferência. Quantos segmentos de reta não nulos podem ser formados com extremidades nesses pontos? Quantos triângulos não degenerados podem ser formados com vértices nesses pontos?

Para que seja formado um segmento de reta devemos escolher dois entre os oito pontos. Para o primeiro teremos 8 possibilidades e para o segundo teremos 7 possibilidades, haja vista que não poderia ser o mesmo ponto. Dessa forma, o esperado seria que houvessem $8 \cdot 7 = 56$ segmentos de reta. Entretanto, devemos perceber que, uma vez feita a escolha dos pontos que formarão o segmento, cada segmento é contado duas vezes. Por exemplo, os segmentos AB e BA representam o mesmo segmento e foram contados em duplicidade. Para resolver tal problema devemos dividir o resultado por 2. Portanto, haverão $56/2 = 28$ segmentos.

Um raciocínio similar ocorre para os triângulos que deveriam formar $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ possibilidades. Porém, uma vez escolhidos os três vértices que formarão o triângulo, cada triângulo será contado 6 vezes (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA). Logo, o resultado deverá ser dividido por 6 e haverá somente $336/6 = 56$ triângulos.

Notemos que de um modo geral, se um experimento apresenta desprezo na ordem de escolha de seus elementos, a quantidade total de possibilidades distintas do experimento ocorrer é sempre a quantidade total de possibilidades do experimento caso não houvesse o tal desprezo dividido por um número. Por outro lado, esse número é obtido imaginando quantas possibilidades diferentes temos de mudar a ordem dos elementos na escolha, uma vez que esses elementos já tivessem sido escolhidos. Assim, se a escolha envolver n elementos, haverá $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$ formas de mudar a ordem e a essa expressão chamaremos de fatorial de n, simbolizada por $n!$.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1$$

Outra forma de definir esse $n!$ recursivamente por $n! = n \cdot (n-1)!$. Obviamente, para que essa definição seja válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o valor de $0!$ deve ser definido e será tal que $0! = 1$.

Vamos a mais alguns exemplos em que possamos pôr em prática essa definição.

Exemplo 2.2: De um grupo de 10 empresários, serão escolhidos 4 deles para fazer parte de uma comissão. De quantos modos distintos é possível se fazer isso?

Observemos que o problema apresenta um desprezo de ordem pois uma comissão ABCD (formada pelos empresários A, B, C e D) é igual a uma comissão BCDA, por exemplo. Assim, teríamos $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ possibilidades caso o problema não apresentasse desprezo de ordem porém devemos dividir por $4!$ devido ao fato de tal desprezo estar presente. Assim, podemos formar $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$ comissões distintas.

Devemos abrir um parêntese para um detalhe, em sua maioria, os problemas de comissões e grupos possuem desprezo de ordem entre todos os seus elementos, entretanto, caso um ou mais integrantes da comissão tiverem um papel (ou cargo) específico dentro dela, o desprezo ficará resumido aos que possuírem o mesmo cargo (ou não possuírem cargo algum). Por exemplo, se na comissão formada pelos empresários houvesse um presidente, este presidente não entraria no desprezo de ordem, pois a comissão ABCD (em que A é o presidente) seria diferente da comissão BCDA (em que B é o presidente), entretanto continuaria havendo desprezo de ordem entre os demais elementos da comissão e assim poderíamos formar $10 \cdot \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!} = 840$ comissões distintas.

Por outro lado, citando ainda o mesmo exemplo, se houvesse na comissão 2 presidentes e 2 secretários, o desprezo não seria entre todos os 4 elementos, mas sim entre os 2 presidentes e entre os 2 secretários, o que nos levaria a pensar que o problema seria dividido em duas partes. Na primeira parte escolheríamos os presidentes, que poderia ser feito de $\dfrac{10 \cdot 9}{2!}$ formas e, a seguir, entre os 8 empresários restantes, escolheríamos os secretários, que poderia ser feito de $\dfrac{8 \cdot 7}{2!}$ formas. Como a comissão é única e formada pelos 4 elementos, devemos multiplicar esses resultados, o que nos daria $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2! \cdot 2!} = 1260$ comissões distintas.

Exemplo 2.3: Uma comissão formada por 3 homens e 2 mulheres deve ser escolhida entre um grupo de 13 pessoas (sendo 8 homens e 5 mulheres).

a) Quantas comissões distintas podemos formar?

b) Quantas comissões podemos formar se entre as 13 pessoas há um determinado homem e uma determinada mulher que só podem ser escolhidos ao mesmo tempo?

c) Quantas comissões distintas podemos formar se um dos homens não aceitasse participar da comissão se nela estivesse determinada mulher?

Inicialmente notemos que esse problema difere um pouco do exemplo 2 pois naquele todos os 4 empresários que formariam a comissão seriam escolhidos do mesmo grupo de 10 empresários. Neste exemplo 2.3, as escolhas são separadas; de um grupo de 8 homens são escolhidos 3 e de um grupo de 5 mulheres serão escolhidas 2, o que naturalmente já nos leva a uma divisão do problema em duas partes, cujos resultados serão multiplicados em seguida. Vamos às resoluções:

a) Para escolher os 3 homens do grupo de 8 temos $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!}$ formas e, para escolher as 2 mulheres do grupo de 5 temos $\frac{5 \cdot 4}{2!}$ formas. Assim, ao todo, podemos formar $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 560$ comissões distintas.

b) Nesse item "b" além da divisão natural que o problema possui em primeiramente escolher os homens e após escolher as mulheres, existe uma segunda divisão em que será utilizado o Princípio Aditivo. As possíveis soluções são: escolher o determinado homem e a determinada mulher OU não escolher nem o determinado homem e nem a determinada mulher. Sendo assim, teremos $\frac{1 \cdot 7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{1 \cdot 4}{1!} = 84$ formas de escolher os determinados homem e mulher e $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} = 210$ formas de não escolher nenhum dos dois. Pelo Princípio Aditivo, podemos formar $84 + 210 = 294$ comissões distintas.

   Um detalhe que poderíamos questionar nesse item "b" seria o porquê do fato de, quando escolhidos o determinado homem e a determinada mulher, a divisão ser feita por 2! e 1!, respectivamente, ao invés de dividirmos por 3! e 2!. O nosso raciocínio deve centrar-se no fato de que, na verdade, quando escolhemos 3 homens de um grupo de 8 sendo que um deles deve ser um determinado homem, estamos, em outras palavras, apenas escolhendo os 2 homens restantes de um grupo de 7, haja vista que um dos homens (o determinado) já havia sido escolhido; o mesmo ocorre para as mulheres. Uma outra forma de raciocinar sobre isso seria pensar em fixar o determinado homem como o primeiro escolhido em um pensamento muito parecido ao fixar o presidente da comissão no exemplo dos empresários e, portanto, se esse determinado homem foi fixado nessa posição não haveria mudança na ordem relativo a ele que pudesse ser desprezada (as possibilidades de mudança de ordem seria apenas ABC e ACB, pois o homem A estaria fixado).

   Resumindo, se em uma escolha com desprezo de ordem, um ou mais dos elementos escolhidos devem ser determinados elementos, estes elementos não devem entrar no desprezo de ordem, reservando apenas aos demais elementos a serem escolhidos entre os restantes tal desprezo.

c) O item "c" apresenta-se bastante similar ao item "b" e teremos como possíveis soluções: escolher o homem e não escolher a mulher OU não escolher o homem. Dessa forma, teremos $\frac{1 \cdot 7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2!} = 126$ formas de escolher o homem e não escolher a mulher e $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2!} = 350$ formas de não escolher o homem. Assim, pelo Princípio Aditivo, teremos $126 + 350 = 476$ comissões distintas.

Exemplo 2.4: De um grupo de 10 pessoas, sendo 6 homens e 4 mulheres, deseja-se escolher 4 pessoas de modo que entre elas exista pelo menos duas mulheres?

Um erro muito comum é tentar escolher as duas mulheres do grupo das 4 que existem no grupo e depois escolher as demais 2 pessoas entre as 8 pessoas que restaram. Entretanto, essa contagem está errada pois vários grupos serão contados mais de uma vez. Por exemplo tomemos uma seleção em que existem 3 mulheres e um homem, $M_1M_2M_3H_1$. Essa seleção seria contada 3 vezes pois as seleções $M_1M_3M_2H_1$ e $M_2M_3M_1H_1$ são idênticas a ela e mesmo aplicando o desprezo de ordem entre as duas primeiras mulheres escolhidas e entre as duas outras pessoas, ou seja, dividindo o resultado por $2! \cdot 2!$, as repetições manter-se-iam.

A solução correta é pensar em todos os casos possíveis que são: escolher duas mulheres e dois homens OU escolher três mulheres e um homem OU escolher as quatro mulheres.

Assim, teremos $\frac{4 \cdot 3}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2!} = 90$ formas de escolher 2 mulheres e 2 homens; $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot \frac{6}{1!} = 24$ formas de escolher três mulheres e um homem e $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} = 1$ forma apenas de escolher as quatro mulheres. Logo, pelo Princípio Aditivo, são $90+24+1 = 115$ formas diferentes de escolha.

Observe que existiria uma outra forma de resolver esse problema tomando inicialmente todos os possíveis grupos que poderiam ser formados independentemente de serem homens ou serem mulheres e, a partir desse total, subtrair os grupos formados apenas por homens ou formados por 3 homens e uma mulher. Dessa forma, haveria $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$ formas de escolher o grupo com 4 pessoas independentemente de serem homens ou mulheres, $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!} = 15$ formas de escolher um grupo formado por 4 homens e $\frac{4}{1!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 80$ formas de escolher um grupo formado por 1 mulher apenas e 3 homens. Assim, teríamos $210 - 15 - 80 = 115$ formas de escolher o grupo com pelo menos duas mulheres.

Essa segunda forma de resolução é mais interessante quando temos um grupo grande de pessoas, 5 ou 6, por exemplo, que evitaria muitos cálculos para depois soma-los. Porém é sempre importante avaliar as duas possibilidades e escolher a melhor de modo a tornar a solução mais clara, concisa e elegante.

Exemplo 2.5: De quantos modos é possível dividir 10 pessoas:

a) Em 2 grupos de 5 pessoas?

b) Em 5 grupos de 2 pessoas?

c) Em 2 grupos de 3 pessoas e um grupo de 4 pessoas?

Problemas de divisões de elementos em grupos sempre geram dúvidas quanto à resolução. O importante é perceber que há nesses tipos de problemas duas espécies de desprezo de ordem: um desprezo entre os elementos de cada grupo (que sempre existirá em todo problema desse tipo) e um desprezo entre os grupos (que nem sempre há em todo problema e que explicaremos mais adiante em cada item). Vamos às resoluções:

a) Em situações em que somente existem dois grupos, a resolução se resume a escolher os elementos do primeiro grupo e o segundo já estará automaticamente escolhido. Dessa forma, existem $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$ formas de se escolher as pessoas que integrarão o primeiro grupo e, automaticamente o segundo grupo será formado pelas pessoas restantes. Entretanto, é importante perceber que as escolhas $\{a, b, c, d, e\}\ \{f, g, h, i, j\}$ e $\{f, g, h, i, j\}\ \{a, b, c, d, e\}$ são idênticas, o que nos leva a perceber que existe um outro desprezo de ordem entre os grupos e portanto, apenas $\dfrac{252}{2!} = 126$ formas de dividir as 10 pessoas nessa situação.

b) O item "b" é muito similar ao item "a" porém teremos mais etapas: a primeira etapa seria escolher a primeira dupla, que pode ser feita de $\dfrac{10 \cdot 9}{2!} = 45$ formas distintas; em seguida a segunda dupla deverá ser escolhida entre as 8 pessoas que não foram escolhidas na primeira dupla e terá $\dfrac{8 \cdot 7}{2!} = 28$ formas distintas de escolha; a terceira dupla poderá ser escolhida de $\dfrac{6 \cdot 5}{2!} = 15$ formas distintas; a quarta dupla de $\frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ formas distintas e a última dupla será formada pelos que restaram ainda sem escolher. Entretanto, novamente é importante perceber que as duplas (mantendo os mesmos elementos em cada) podem ter sua ordem de escolha mudada sem prejuízo para a escolha final e assim teremos um desprezo de ordem entre as 5 duplas e, portanto, teremos $\frac{45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{5!} = 945$ formas para separar essas 10 pessoas.

c) O item “c” possui uma diferença em relação aos demais pois há um grupo com uma quantidade diferente de pessoas e, sendo assim, não existirá um desprezo de ordem entre esse grupo (com 4 pessoas) e os demais grupos (com 3 pessoas). Porém, continuará existindo o desprezo de ordem entre os dois grupos com a mesma quantidade de pessoas. Dessa forma, haverá $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210$ formas para escolher o grupo com as 4 pessoas; $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ formas para escolher o primeiro grupo com 3 pessoas e o segundo grupo com 3 pessoas já estará escolhido com as pessoas que restaram. Lembrando que ainda há um desprezo de ordem entre os 2 grupos com a mesma quantidade de pessoas, teremos $\frac{210 \cdot 20}{2!} = 2100$ formas para dividir as 10 pessoas dessa maneira.

Exemplo 2.6: De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times de basquete (com 5 jogadores cada) que serão denominados Time Branco, Time Vermelho e Time Amarelo?

Esse exemplo é bastante similar ao anterior, porém devido ao fato dos times terem denominações específicas (Branco, Vermelho e Amarelo), não existirá o desprezo de ordem entre os times e somente o desprezo de ordem entre os jogadores de cada time. Assim, irão existir $\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!} = 3003$ formas de escolher os jogadores do Time Branco, $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} =$ formas de escolher os jogadores do Time Vermelho e apenas uma forma de escolher os jogadores do Time Amarelo, que será formado pelos jogadores que não haviam sido escolhidos entre os demais. Portanto, teremos $3003 \cdot 252 = 756.756$ formas de dividir essas 15 pessoas dessa maneira.

Exemplo 2.7: Quantos jogos são disputados em um campeonato disputado por 20 clubes se:

a) Cada time joga com todos os outros duas vezes (jogos de ida e volta)?

b) Cada time joga com todos os outros uma única vez (turno único)?

Esse exemplo é clássico em livros, provas e exames de acesso a vestibulares. O item "a" se trata de um problema que utiliza apenas o Princípio Fundamental da Contagem. Cada jogo será realizado entre 2 dos 20 times e, para isso, basta-nos escolher o primeiro time (20 possibilidades) e em seguida o segundo time (19 possibilidades). Assim, realizar-se-ão $20 \cdot 19 = 380$ jogos ao total. Note que, como cada time enfrentará cada um dos demais adversários duas vezes, então um jogo Time A x Time B é diferente do jogo Time B x Time A. Poderíamos pensar, como normalmente ocorre, que o jogo Time A x Time B foi realizado no campo do Time A e o jogo Time B x Time A foi realizado no campo do Time B.

Já no item "b", como cada um dos times jogará contra todos os outros uma única vez, então entre os jogos Time A x Time B e Time B x Time A, só um deles será realizado, ou seja, haverá um desprezo de ordem entre os times e serão jogados somente $\dfrac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ jogos.

Exemplo 2.8: Em uma sorveteria são disponíveis 20 sabores de sorvete. Uma pessoa deseja escolher sabores para que lhe seja preparado um milk-shake. De quantas formas distintas isso será possível escolhendo:

a) Duas bolas de sorvete com sabores distintos?

b) Duas bolas de sorvete (que podem ser ou não do mesmo sabor)?

c) Três bolas de sorvete com sabores distintos?

d) Três bolas de sorvete (que podem ser ou não do mesmo sabor)?

e) Quatro bolas de sorvete (que podem ser ou não do mesmo sabor)?

Evidentemente o problema possui um desprezo de ordem entre os sabores pedidos. Porém, os itens "b" e "d" trazem uma problemática: se os sabores forem iguais, mesmo assim devemos efetuar uma divisão para que não sejam contadas várias possibilidades iguais? Responderemos essa pergunta ao resolver o item "b".

a) O item "a" trata-se de um problema idêntico ao exemplo anterior, inclusive em seus valores, teremos 20 possibilidades de escolha para o primeiro sabor e

19 possibilidades de escolha para o segundo sabor, haja vista que devem ser sabores diferentes. Como preparar um milk-shake com os sabores A e B é idêntico a preparar com os sabores B e A, então há um desprezo de ordem entre os sabores e teremos, portanto, $\frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ formas diferentes de preparo desse milk-shake.

b) O item "b" traz exatamente o problema que foi referido acima. Uma solução que poderia ser pensada (de maneira errada) seria que teríamos $\frac{20 \cdot 20}{2!} = 200$ formas diferentes de preparar o milk-shake. Porém vamos analisar o mesmo caso com menos possibilidades para os sabores afim de entender o porquê dessa solução estar errada.

Suponha que existam apenas 4 sabores (A, B, C e D). Se quisermos combinar dois desses 4 sabores teremos, sem pensar em um desprezo de ordem entre os sabores, 16 possibilidades que são: (A,A), (A,B), (A,C), (A,D), (B,A), (B,B), (B,C), (B,D), (C,A), (C,B), (C,C), (C,D), (D,A), (D,B), (D,C) e (D,D).

Observe que as possibilidades em que os sabores das duas bolas são iguais aparecem nessa lista, cada um, uma única vez: (A,A), (B,B), (C,C) e (D,D). Entretanto, cada possibilidade em que os sabores das duas bolas são diferentes, possui uma possibilidade idêntica, porém com a ordem dos sabores trocada, listada também: (A,B) e (B,A), (A,C) e (C,A), (A,D) e (D,A) e assim sucessivamente. Dessa forma, devemos dividir por 2! a quantidade de possibilidades em que as duas bolas são de sabores distintos, ou seja $\frac{4 \cdot 3}{2!} =$ possibilidades, porém, as possibilidades em que as bolas tem sabores iguais deve ser somada integralmente ($4.1 = 4$ possibilidades). Assim, haveria $6+4 = 10$ formas de se preparar um milk-shake se dispuséssemos apenas de 4 sabores.

Para a quantidade de sabores que o exemplo fornece (20 sabores) teríamos, como já citado, $\frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ formas de preparar o milk-shake com duas bolas de sabores diferentes e mais $20 \cdot 1 = 20$ formas de preparar o milk-shake com duas bolas de mesmo sabor. Assim, ao todo, seriam $190+20 = 210$ formas.

c) O item "c" traz mais um problema bem semelhante aos demais exemplos anteriores a este. Teremos 20 possibilidades para o primeiro sabor, 19 possibilidades para o segundo sabor e 18 possibilidades para o terceiro sabor. Devido ao desprezo de ordem que há entre os três sabores, podemos preparar, ao total, $\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1.140$ tipos diferentes de milk-shake utilizando três bolas, todas de sabores distintos.

d) O item "d" traz o mesmo problema do item "b". Teremos, conforme o item "c", 1140 formas de se preparar o milk-shake com as três bolas de sabores diferentes; teremos ainda $20 \cdot 1 \cdot 1 = 20$ formas de preparar o milk-shake com as três bolas do mesmo sabor. Porém temos um agravante: os milk-shakes com duas bolas de um sabor e uma bola com outro sabor serão contados quantas vezes?

Para entender isso novamente vamos recorrer à contagem com uma quantidade menor de sabores e, novamente, utilizaremos 4 sabores (A, B, C e D). Queremos formar grupos de 3 sabores que tenha dois sabores iguais e um diferentes e assim temos 12 possibilidades: (A,A,B), (A,A,C), (A,A,D), (A,B,B), (A,C,C), (A,D,D), (B,B,C), (B,B,D), (B,C,C), (B,D,D), (C,C,D) e (C,D,D). Note que nenhuma das possibilidades acima aparece em duplicidade; mesmo as possibilidades em que aparecem os mesmo sabores, como (A,A,B) e (A,B,B), as quantidades de bolas de cada sabor é diferente, o que faz com que as possibilidades sejam diferentes.

Dessa forma, para calcular quantas formas diferentes temos de preparar o milk-shake com 3 bolas, sendo duas bolas de um mesmo sabor e uma com sabor diferente; o que precisamos é escolher um sabor que será usado para duas bolas e um sabor que será usado para uma bola. Assim, teremos $20 \cdot 19 = 380$ formas nessa situação.

Portanto, ao total, teremos 1140 (3 sabores diferentes) + 380 (2 sabores iguais e 1 diferente) + 20 (3 sabores iguais) = 1540 formas diferentes de se preparar o milk-shake.

e) Se continuarmos a raciocinar dessa forma, o item "e" trará as seguintes soluções possíveis:

Formas com as 4 bolas de sabores iguais: $20 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 20$ formas.

Formas com 3 bolas com sabores iguais e 1 bola com sabor diferente: escolheremos apenas dois sabores: um para ser usado em 3 bolas (20 possibilidades) e o outro, diferente, para ser usado em apenas uma bola (19 possibilidades). Portanto, $20 \cdot 19 = 380$ formas. Note que não desprezo de ordem nessas 380 formas pois mesmo aquelas formas que possuem os mesmo sabores, (A,A,A,B) e (B,B,B,A) por exemplo, são diferentes no que se refere à quantidade de bolas de cada sabor.

Formas com 2 bolas com sabores iguais e outras 2 bolas também com sabores iguais porém diferentes do primeiro sabor: escolheremos 2 sabores que serão usados cada um em 2 bolas. Assim teremos 20 possibilidades para o primeiro sabor usado nas duas primeiras bolas e 19 possibilidades para o segundo sabor usado nas duas últimas bolas. Porém, observe que como a quantidade de bolas de cada sabor é igual, então as possibilidades (A,A,B,B) e (B,B,A,A) são idênticas e devemos aplicar o Princípio do Desprezo de Ordem que fará que tenhamos $\dfrac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ formas.

Formas com 2 bolas com sabores iguais e outras 2 bolas com sabores diferentes entre si e diferentes do primeiro sabor: escolheremos 3 sabores; um que será usado para as duas primeiras bolas e os outros dois que serão usados para as duas últimas bolas. Haverá um desprezo de ordem somente entre os sabores que serão usados em uma única bola. De fato, as possibilidades (A,A,B,C) e (A,A,C,B) são idênticas, porém, as possibilidades (A,A,B,C), (B,B,A,C) e (C,C,A,B) são distintas. Dessa forma, haverá 20 possibilidades para o primeiro sabor que será usado nas primeiras duas bolas, 19 possibilidades para o segundo sabor que será usado na terceira bola e 18 possibilidades para o terceiro sabor que será usado na última bola. Como há desprezo de ordem entre os dois últimos sabores, teremos $20 \cdot \dfrac{19 \cdot 18}{2!} = 3.420$ formas.

Formas com os 4 sabores diferentes: $\dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = 4.845$ formas

Por fim, analisando todos os resultados, concluímos que existem 20+380+190+3420+4845 = 8855 formas de preparar um milk-shake com 4 bolas nas condições do item "e".

Percebamos que essa maneira de racionar os problemas que possuem desprezo de ordem e em que sejam possíveis repetir os elementos escolhidos é extremamente inviável quando a quantidade de elementos se torna um pouco maior. No capítulo 5, será proposta uma nova forma de análise desses problemas através do que chamaremos de combinações com repetição ou combinações completas.

Exemplo 2.9: Quantas diagonais possui um icoságono (polígono com 20 lados)?

Uma aplicação das ideais da Análise Combinatória associada ao Princípio do Desprezo de Ordem é o cálculo do número de diagonais de um polígono qualquer. Sabemos que as diagonais de um polígono são segmentos de reta que ligam dois vértices do polígono desde que não seja um dos lados. Assim, considerando um polígono com n lados devemos inicialmente escolher dois deles para formar um segmento, o que pode ocorrer de $n \cdot (n-1)$ formas. Entretanto, como há um desprezo de ordem entre as extremidades de um segmento (o segmento AB é o mesmo que o segmento BA), então esse número de formas será reduzido à metade, ou seja, $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2}$. Porém, dessa quantidade de formas devemos excluir as possibilidades em que o segmento formado seja um lado, ou seja, excluir n dessas possibilidades que seriam os n lados do polígono. Portanto, para um polígono com n lados existem $\dfrac{n \cdot (n-1)}{2} - n$ diagonais que, simplificando, resulta na expressão $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Por fim, substituindo n por 20 temos que o icoságono terá $\dfrac{20 \cdot 17}{2} = 170$ diagonais.

Exemplo 2.10: Quantas diagonais possui o icosaedro regular (poliedro regular com 20 faces triangulares)?

Usando uma ideia similar, a diagonal de um poliedro consiste em um segmento formado por dois vértices do poliedro que não estejam em uma mesma face.

O icosaedro é uma figura formada por 20 faces triangulares e, conforme a figura a seguir, de cada vértice partem 5 arestas. Também é sabido que o icosaedro possui 30 arestas e, através da relação de Euler, encontramos que ele possui 12 vértices.

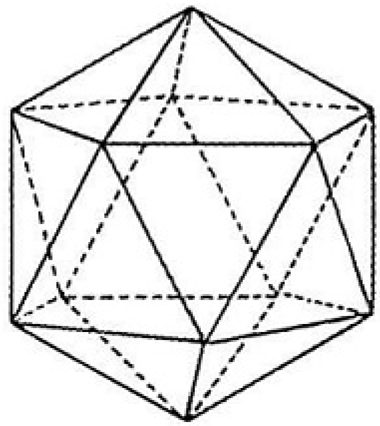

Figura 2.1: https://bibliot3ca.files.wordpress.com/2014/01/parole-22.jpg, acesso em 22-04-2015

Assim, devemos escolher o primeiro vértice que formará a diagonal, o que pode ocorrer de 12 formas e o segundo vértice não poderá ser, obviamente, o primeiro vértice escolhido e nem ser qualquer vértice que possua uma face em comum com ele (5 outras possibilidades a menos). Assim, a escolha do segundo vértice ocorrerá em apenas 6 possibilidades. Novamente, como existe desprezo de ordem entre os vértices que formam a diagonal, teremos $\frac{12 \cdot 6}{2} = 36$ diagonais para o icosaedro.

Observe que não existiria uma fórmula genérica para calcular o número de diagonais de um poliedro como há para calcular o número de diagonais de um polígono. Isso ocorre devido ao fato de que para cada poliedro, o número de possibilidades para a escolha do segundo vértice que forma a diagonal modifica em relação ao primeiro. Por exemplo, no icosaedro o segundo vértice teve 6 possibilidades de escolha a menos que o primeiro (ele e mais 5 vértices que possuem uma face em comum). Porém, por exemplo, no dodecaedro regular, poliedro formado por 12 faces pentagonais regulares, essa quantidade de possibilidades a menos do segundo vértice em relação ao primeiro é 10 (observe a figura 2.2).

Logo, para o dodecaedro, que possui 12 faces pentagonais, 30 arestas e 20 vértices. O número de possibilidades para a escolha do primeiro vértice será 20 e para o segundo vértice serão apenas 10 possibilidades (10 possibilidades a menos que as possibilidades para a escolha do primeiro). Assim, o dodecaedro terá $\frac{20 \cdot 10}{2} = 100$ diagonais.

Um detalhe curioso em relação a esses dois poliedros é que o número de possibilidades para a escolha do segundo vértice é a metade do número de possibilidades para

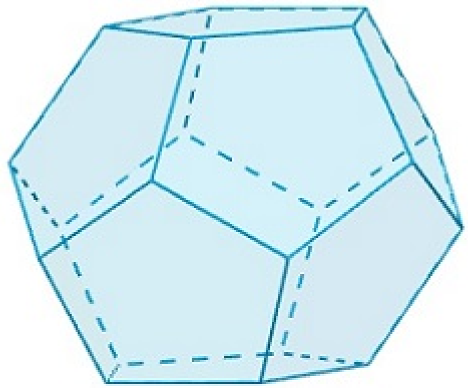

Figura 2.2: http://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/cuerpos-geometricos/, acesso em 22-04-2015

a escolha do primeiro vértice, o que nos levaria a pensar (erroneamente) que existiria a tal fórmula para o cálculo do número de diagonais que seria $\frac{V^2}{4}$, onde V é o número de vértices do poliedro e, de fato, para o dodecaedro e para o icosaedro essa fórmula é verdadeira. Porém, para o octaedro, por exemplo, poliedro formado por 8 faces triangulares, 12 arestas e 6 vértices (observe a figura 2.3), teremos 6 possibilidades para o primeiro vértice que formará a diagonal e apenas uma possibilidade para o segundo vértice de modo que, para esse poliedro há somente $\frac{6 \cdot 1}{2} = 3$ diagonais.

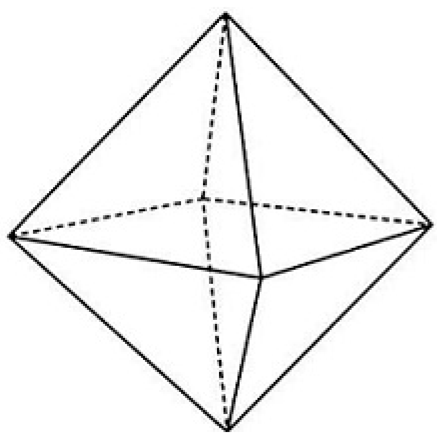

Figura 2.3: http://figurasespacio.blogspot.com.br/, acesso em 22-04-2015

Vamos apresentar dois últimos exemplos de problemas envolvendo desprezo de ordem que foram retirados do livro Análise Combinatória e Probabilidade de Augusto César Morgado [6], para mostrar o quanto a Análise Combinatória (e qualquer conteúdo de Matemática) pode ter o nível de dificuldade aumentado praticamente quanto se queira.

Exemplo 2.11: No início de uma festa há 6 rapazes desacompanhados e 10 moças desacompanhadas. Quantos são os estados possíveis no fim da festa?

Primeiramente vamos supor (de maneira ortodoxa) que possam ser formados apenas casais heterossexuais. Assim, os casos possíveis são:

Não foram formados casais: 1 possibilidade nesse caso.

Formou apenas 1 casal: teremos 6 possibilidades para a escolha do rapaz e 10 possibilidades para a escolha da moça e, assim, $6 \cdot 10 = 60$ possibilidades nesse caso.

Formaram-se dois casais: teremos 6 possibilidades para a escolha do rapaz do primeiro casal, 10 possibilidades para a escolha da moça do primeiro casal, 5 possibilidades para a escolha do rapaz do segundo casal e 9 possibilidades para a escolha da moça do segundo casal. Entretanto, percebemos um desprezo de ordem entre os casais, ou seja, os casais formados $\{h_1, m_1\}$ e $\{h_2, m_2\}$ representam a mesma possibilidade de formação dos casais $\{h_2, m_2\}$ e $\{h_1, m_1\}$. Logo, teremos $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9}{2!} = 1.350$ possibilidades nesse caso.

Formaram-se três casais: 6 possibilidades para o homem do primeiro casal; 10, para a mulher do primeiro casal; 5, para o homem do segundo casal; 9, para a mulher do segundo casal; 4, para o homem do terceiro casal e 8, para a mulher do terceiro casal. Devido ao desprezo de ordem entre os 3 casais formados, teremos $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 14.440$ possibilidades nesse caso.

Formaram-se quatro casais: 6 possibilidades para o homem do primeiro casal; 10, para a mulher do primeiro casal; 5, para o homem do segundo casal; 9, para a mulher do segundo casal; 4, para o homem do terceiro casal ; 8, para a mulher do terceiro casal; 3, para o homem do quarto casal e 7, para a mulher do quarto casal. Devido ao desprezo de ordem entre os 4 casais formados, teremos $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 75.600$ possibilidades nesse caso.

Formaram-se cinco casais: 6 possibilidades para o homem do primeiro casal; 10, para a mulher do primeiro casal; 5, para o homem do segundo casal; 9, para a mulher do segundo casal; 4, para o homem do terceiro casal ; 8, para a mulher do terceiro casal; 3, para o homem do quarto casal; 7, para a mulher do quarto casal; 2, para o homem do quinto casal e 6, para a mulher do quinto casal. Devido ao desprezo de ordem entre os 5 casais formados, teremos $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 181.440$ possibilidades nesse caso.

Formaram-se seis casais: 6 possibilidades para o homem do primeiro casal; 10, para a mulher do primeiro casal; 5, para o homem do segundo casal; 9, para a mulher do segundo casal; 4, para o homem do terceiro casal; 8, para a mulher do terceiro casal; 3, para o homem do quarto casal; 7, para a mulher do quarto casal; 2, para o homem do quinto casal; 6, para a mulher do quinto casal; 1, para o homem do sexto casal e 5, para a mulher do sexto casal. Devido ao desprezo de ordem entre os 6 casais formados, teremos $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6!} = 151.200$ possibilidades nesse caso.

Portanto, existem $1 + 60 + 1.350 + 14.400 + 75.600 + 181.440 + 151.200 = 424.051$ estados possíveis ao final da festa.

Exemplo 2.12: Em uma escola, x professores se distribuem em 8 bancas examinadoras de modo que cada professor participa de exatamente duas bancas e cada duas bancas têm exatamente um professor em comum.

a) Calcule x.

b) Determine quantos professores há em cada banca.

Inicialmente devemos encontrar quantos professores existem em cada banca. Para isso, suponha a i-ésima banca, com $1 \leq i \leq 8$. Essa i-ésima banca terá um e somente um elemento em comum com cada j-ésima banca, sendo $i \neq j$. Como existem 7 outras bancas diferentes da i-ésima, então cada banca deve possuir 7 professores.

Como são 8 bancas com 7 professores cada um e cada professor pertence a somente duas bancas, então teremos $\dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ professores e $x = 28$.

Nos capítulos 3, 4 e 5 iremos debater, individualmente os três grandes tipos de problemas da Análise Combinatória, dividindo-os, didaticamente em Permutações, Arranjos e Combinações.

Capítulo 3

Permutações

Nos três próximos capítulos iremos tentar dividir os problemas de Análise Combinatória em três grandes tipos: permutações, arranjos e combinações.

Dizemos que um problema é de permutação (do prefixo latino per que significa "movimento através" e de mutar que significa "mudar") quando todas as possibilidades possíveis são formadas a partir dos mesmos elementos e a única diferença entre eles é a ordem em que esses elementos se apresentam.

3.1 Permutações simples

O exemplo clássico de problema de permutação são os anagramas que, inclusive, serão amplamente utilizados em outras situações que aparentemente não teriam relação alguma a eles. Um anagrama consiste em uma mudança (ou não) na ordem das letras de uma certa palavra com o intuito de formar novas palavras que possuam, obviamente, as mesmas letras e as mesmas quantidades de letras da palavra original. É importante ressaltar que entendemos por palavra qualquer sequência de letras que tenha ou não significado. Assim, a palavra PORTA, por exemplo, terá muitos anagramas com significado como: PARTO, PRATO, TROPA, TRAPO, OPTAR, TOPAR, RAPTO. Entretanto terá muitos outros anagramas sem significado (ao menos em nossa língua portuguesa) como: TPROA, PTROA, ROATP, entre muitos outros. Salientamos também que a própria palavra é anagrama de si mesma então, ao calcular o número de anagramas de uma palavra não devemos subtrair uma possibilidade (devido à própria palavra) como é o pensamento inicial de muitos alunos.

Continuaremos com a metodologia de exemplificar problemas (cada vez mais complexos) a fim de tornar as explicações mais claras.

Exemplo 3.1: Considere os anagramas da palavra PORTA.

a) Quantos são ao total?

b) Quantos começam por uma vogal?

c) Quantos começam por uma consoante e terminam por uma vogal?

d) Quantos começam e terminam por uma consoante?

e) Quantos não começam com a letra A e não terminam com a letra O?

f) Quantos possuem uma ordem alternada de consoantes e vogais?

g) Quantos possuem as vogais juntas e em ordem alfabética?

h) Quantos possuem as vogais juntas?

i) Quantos possuem as vogais separadas?

j) Quantos possuem as consoantes juntas?

k) Quantos possuem a letra A à esquerda da letra O (não necessariamente juntas)?

l) Quantos possuem a letra P à esquerda da letra R e esta, por sua vez, a esquerda da letra T (não necessariamente juntas)?

Vamos às resoluções:

a) Incialmente devemos perceber que para formar um anagrama da palavra PORTA devemos escolher a ordem de cada uma das suas 5 letras e, obviamente, sem poder repeti-las. Assim, para a escolha da primeira letra teremos 5 possibilidades, para a segunda letra teremos 4 possibilidades (não podemos repetir a letra usada como primeira), para a terceira letra teremos 3 possibilidades, para a quarta letra, 2 possibilidades e a quinta letra já estaria escolhida, ou seja, uma única possibilidade. Dessa forma, teremos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ anagramas ao total.

Note que, tendo uma palavra com n letras, que não possua letras repetidas, o total de anagramas que podemos formar será $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$. Isso pode ser pensado de um modo mais genérico para calcular o número total de formas de mudar a ordem de n elementos, ou seja, permutar n elementos, sem necessariamente serem letras, e teremos o total de permutações possíveis dado por:

$$P_n = n!$$

É importante salientar que, nessa primeira análise, não deve haver elementos repetidos. Casos em que existam elementos repetidos serão analisados mais adiante.

b) No item "b" temos uma restrição, haja vista que o anagrama deve começar por uma vogal. Portanto, pelo Princípio da Preferência, escolhemos primeiro a vogal que irá começar o anagrama e teremos apenas 2 possibilidades (A ou O) e, em seguida, permutamos as demais 4 letras formadas de 4! formas. Assim, teremos $2 \cdot 4! = 48$ anagramas começados por vogal.

c) Nesse item "c" já existem duas restrições. A primeira letra do anagrama deve ser uma consoante e teremos 3 possibilidades (P, R ou T) e a última letra deve ser uma vogal (A ou O). As três letras que restaram serão permutadas entre as três demais posições de 3! maneiras. Logo teremos $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ anagramas começados por uma consoante e terminados por uma vogal.

d) O item "d" assemelha-se bastante ao item "c" porém a primeira e a última letra do anagrama devem ser consoantes e o raciocínio será bastante similar que o item anterior. Teremos 3 possibilidades para a primeira letra (P, R ou T) e apenas 2 possibilidades para a última letra que também deve ser consoante, porém não deve repetir a letra que foi usada na primeira posição. As demais três letras restantes serão permutadas de 3! formas. Assim, teremos $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ anagramas que começam e terminam com uma consoante.

e) Esse item "e" seria aparentemente simples se não fosse por um pequeno deslize que pode ser cometido. Observe que temos duas restrições: a primeira letra não deve ser a letra A e a última letra não deve ser a letra O. Dessa forma, um pensamento plausível (porém equivocado) seria imaginar que haveria 4 possibilidades para a primeira letra (P, O, R ou T) e também haveria 4 possibilidades para a última letra (P, R, T ou A). O problema dessa resolução reside no fato de que, se a primeira letra escolhida for P, R ou T, esta letra escolhida não poderá ser utilizada novamente e isso reduziria o número de possibilidades da última letra para 3; entretanto, se a primeira letra escolhida for a letra O, continuam a existir 4 possibilidades para a última letra. Assim, devemos separar o nosso problema em dois casos: anagramas que começam com a letra O e anagramas que começam com as letras P, R ou T.

Dessa forma, para o primeiro caso, teremos apenas uma possibilidade para a primeira letra (deve ser a letra O), 4 possibilidades para a última letra (P, R, T ou A) e as demais três letras restantes serão permutadas de 3! formas. Assim, teremos $1 \cdot 4 \cdot 3! = 24$ anagramas nesse primeiro caso. Para o segundo caso, termos 3 possibilidades para a escolha da primeira letra (P, R ou T), 3 possibilidades para a última letra e as demais três letras restantes seriam permutadas de 3! formas. Assim, teremos $3 \cdot 3 \cdot 3! = 54$ anagramas nesse segundo caso, totalizando, pelo Princípio Aditivo, $24 + 54 = 78$ anagramas que não começam com a letra A e não terminam com a letra O.

Uma outra forma mais sofisticada de resolver esse problema seria ignorar uma das restrições. Poderíamos, por exemplo, ignorar o fato de que a última letra não pode ser a letra O e calcular todos anagramas que não começam com a letra A. Assim, teríamos 4 possibilidades para a primeira letra e as demais 4 letras serão permutadas de 4! formas, o que nos levaria a ter $4 \cdot 4! = 96$ anagramas. Obviamente, entre esses 96 anagramas temos alguns que terminam com a letra O e assim devemos descontar esses. Portanto, calculando quantos anagramas terminam com a letra O (e não começam com a letra A) teremos 1 possibilidade para a última letra (deve ser a letra O), 3 possibilidades para a primeira letra (não pode ser a letra A e nem a letra O) e as demais três letras restantes são permutadas de 3! formas. Portanto, temos que descontar $1 \cdot 3 \cdot 3! = 18$ anagramas dos 96 que foram calculados, o que nos leva ao mesmo resultado anterior de $96 - 18 = 78$ anagramas que não começam com a letra A e não terminam com a letra O.

f) Nesse item “f” temos uma situação em que é exigido formar um anagrama com uma ordem alternada de vogais e consoantes. Observe que a palavra PORTA possui 3 consoantes e apenas 2 vogais. Portanto, se iniciarmos o anagrama por uma vogal (V), mesmo mantendo um início em que se alternem vogais e consoantes, fatalmente as duas últimas letras apareceriam como duas consoantes, pois há mais consoantes que vogais. Logo, devemos iniciar nosso anagrama por uma consoante (C) e teremos a seguinte ordem consoante, vogal, consoante, vogal, consoante (CVCVC). Podemos escolher uma a uma as consoantes e vogais ou, de um modo mais conciso e elegante, permutar as três consoantes de 3! maneiras e as duas vogais de 2! maneiras entre as posições que lhe cabem. Totalizando assim $3! \cdot 2! = 18$ anagramas que possuem uma ordem alternada de vogais e consoantes.

Observe que não é toda palavra em que é possível alternar consoantes e vogais. Por exemplo, na palavra BRASIL, que possui 4 consoantes e apenas 2 vogais, mesmo que iniciemos o anagrama com uma consoante (C) e formos alternando consoantes e vogais entre as demais letras, fatalmente as duas últimas letras serão consoantes pois a quantidade de vogais não é suficiente.

Por outro lado, existem palavras em que podemos iniciar o anagrama por uma vogal ou por uma consoante, mantendo alternadas as vogais e consoantes até o final. Palavras com essa característica devem ter quantidades iguais de vogais e consoantes. A palavra BONECA por exemplo, que possui 3 vogais e 3 consoantes. Iniciando por uma vogal (V), teremos uma sequência VCVCVC, e serão $3!.3! = 36$ anagramas nessa situação. Já iniciando por uma consoante (C), teremos uma sequência CVCVC, e também serão $3! \cdot 3! = 36$ anagramas nessa situação. Logo, ao total, teremos $36 + 36 = 72$ anagramas da palavra BONECA nessas condições de alternar consoantes e vogais.

Podemos generalizar esse procedimento para uma palavra com n letras distintas e que sejam v vogais e c consoantes:

Se $|v-c| > 1$, não será possível formar nenhum anagrama que tenha uma ordem alternada de vogais e consoantes; em outras palavras, se o número de vogais for duas ou mais unidades maior que o número de consoantes, ou vice-versa, nenhum anagrama será formado nessas condições.

Se $|v-c| = 1$, ou seja, se $v = c+1$ ou $c = v+1$, devemos começar o anagrama que deve possuir ordem alternada de vogais e consoantes por aquele tipo de letra que estiver em maior quantidade. Assim, teremos $\dfrac{n+1}{2}$ vogais e $\dfrac{n-1}{2}$

consoantes, ou vice-versa, que permutar-se-ão de $\left(\frac{n+1}{2}\right)! \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!$ formas. Verifique para o exemplo da palavra PORTA.

Já se $v = c$, haverá os dois modos (com a mesma quantidade de anagramas) para iniciar o anagrama e, portanto, como teremos $\frac{n}{2}$ vogais e $\frac{n}{2}$ consoantes, poderemos formar $2 \cdot \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2$ anagramas. Verifique para o exemplo da palavra BONECA.

g) O item "g" traz uma situação típica entre os problemas de anagramas que é a restrição que duas ou mais letras estejam juntas, em determinada ordem ou não. No caso em que as letras devem estar juntas em uma ordem determinada, que é o caso desse item "g", basta-nos considerar que as letras que devem estar juntas na ordem determinada sejam apenas uma letra. Assim, nesse item, consideraremos as vogais A e O como apenas uma letra "AO", já que não nos é permitido nem modificar a ordem dessas letras. Raciocinando desse modo, a palavra PORTA terá apenas 4 letras e teremos 4! maneiras de permuta-las, o que originará 24 anagramas que possuem as vogais juntas e em ordem alfabética.

h) Para resolver o item "h" devemos tomar a mesma ideia do item "g" entretanto, como é possível modificar a ordem do grupo de letras juntas, devemos escolher também essa ordem que consiste em nada mais que permutar as letras do grupo entre si, o que pode ocorrer de 2! formas. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, como estamos fazendo uma nova escolha, então as possibilidades devem ser multiplicadas e teremos $4! \cdot 2! = 48$ anagramas que possuem as vogais juntas (e em qualquer ordem). Observe que o 4! se refere às formas de permutar as letras da palavra PORTA mantendo o grupo de letras "AO" fazendo o papel de uma única letra e o 2! se refere às formas de modificar a ordem das letras do grupo de letras "AO".

i) Com os resultados dos itens "a" e "h" podemos responder esse item "i" pois se as vogais não estão juntas então devem estar separadas. Logo, teremos $120 - 48 = 72$ anagramas que possuem as vogais separadas. Note que podemos abrir um parêntese nessa situação e perceber que se houvessem mais vogais, três, por exemplo, na palavra PORTA a expressão "vogais separadas" poderia ter um duplo sentido. Estaríamos nos referindo a todas as três vogais separadas, ou seja, que nem duas delas possam estar juntas; ou apenas que as três não podem estar simultaneamente todas juntas. Somente essa segunda situação seria resolvida do modo como solucionamos esse item "i". Mais adiante iremos apresentar um exemplo em que há várias letras que devem estar totalmente separadas, ou seja, nem duas delas podem estar lado a lado.

j) Esse item "j" assemelha-se bastante com o item "h" porém agora o grupo de letras que devem estar juntas possui agora três elementos (P, R e T). Inicialmente consideraremos esse grupo de letra como apenas uma letra e, dessa forma, a palavra PORTA terá somente três letras (PRT, A e O) que podem ser permutadas de 3! maneiras. Entretanto, como não é necessário que as consoantes estejam nessa ordem determinada, haverá também 3! maneiras de permutar, mantendo-as juntas, as letras do grupo PRT. Portanto, teremos $3! \cdot 3! = 36$ anagramas que possuam as consoantes juntas e em qualquer ordem.

k) Um problema muito interessante e de resolução extremamente fácil é esse item "k". Entretanto, se a pessoa que for resolver esse problema quiser tentar "encontrar as posições" possíveis que as letras A e O ficarão dentro do anagrama, o problema terá uma solução extremamente trabalhosa. O raciocínio deve ser o seguinte: Avaliando todos os anagramas da palavra PORTA e observando apenas se a letra A está à direita ou à esquerda da letra O, teremos apenas 2! formas (ou a letra A está à esquerda da letra O ou a letra O está à esquerda da letra A). Assim, em metade $\left(\frac{1}{2!}\right)$ dos anagramas da palavra PORTA, a letra A está à esquerda da letra O e na outra metade $\left(\frac{1}{2!}\right)$ dos anagramas, a letra O está à esquerda da letra A. Portanto, teremos $\left(\frac{1}{2!}\right) \cdot 5! = \frac{5!}{2!} = 60$ anagramas que possuem a letra A à esquerda da letra O.

l) Um raciocínio muito similar ao item "k" será usado nesse item "l". A única alteração é que desejamos avaliar as posições de 3 letras entre si dentro do anagrama. Dessa forma, do total de anagramas da palavra PORTA, observando apenas as posições das letras P, R e T, teremos 3! maneiras possíveis: P à esquerda de R e este à esquerda de T (PRT); P à esquerda de T e este à esquerda de R (PTR); R à esquerda de P e este à esquerda de T (RPT); R à esquerda de T e este à esquerda de P (RTP); T à esquerda de P e este à esquerda de R (TPR); T à esquerda de R e este à esquerda de P (TRP). Cada uma das situações terá $\frac{1}{3!}$ do total de anagramas da palavra PORTA. Assim, teremos $\frac{1}{3!} \cdot 5! = \frac{5!}{3!} = 20$ anagramas em que a letra P está à esquerda da letra R e esta, por sua vez, à esquerda da letra T.

São várias as situações que aparentemente não tem relação alguma com anagramas mas que usarão em sua resolução uma das ideias que vimos nesse primeiro exemplo.

Exemplo 3.2: De quantos modos é possível colocar lado a lado em uma estante 5 livros de Matemática, 4 livros de Física e 3 livros de Química, todos diferentes entre si, de modo que permaneçam juntos os livros de uma mesma disciplina?

Observe que são, ao total, 12 livros (5 de Matemática, 4 de Física e 3 de Química) e que poderíamos arruma-los de 12! formas nessa estante. Entretanto, devido à restrição dos livros de uma mesma disciplina permanecerem juntos, consideraremos todos os 5 livros de Matemática como um só livro, todos os 4 livros de Física como um só livro e o mesmo ocorrendo com os 3 livros de Química. Assim, teremos somente 3 livros que podem ser permutados de 3! formas. Contudo, devido ao fato de podermos modificar a ordem dos livros dentro do grupo que devem estar juntos, teremos 5! maneiras de modificar a ordem dos livros de Matemática (mantendo-os juntos); 4! maneiras de modificar a ordem dos livros de Física e 3! maneiras de modificar a ordem dos livros de Química. Assim, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, teremos $3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 103.680$ modos diferentes de arrumar esses livros na estante do modo desejado.

Perceba que esse problema, apesar de não ter nenhuma relação com anagramas, foi resolvido de uma maneira muito similar aos itens "h" e "j" do exemplo 3.1.

Exemplo 3.3: Após o término de uma aula, 10 alunos do curso de Matemática foram a um cinema e compraram todos os ingressos referentes a cadeiras em uma mesma fila e lado a lado. De quantos modos esses 10 alunos podem ocupar essas cadeiras de maneira que Alan e Bruna, que são namorados, desejam sentar-se juntos e Carlos e Douglas, que não possuem uma grande afeição um pelo outro, não desejam se sentar juntos?

Observe que mais uma vez temos um problema que nada tem relacionado a anagramas, mas que será resolvido de um modo extremamente similar aos problemas que envolvem letras juntos e letras separadas.

Primeiramente vamos raciocinar que os alunos Alan e Bruna são uma só pessoa devido ao fato deles desejarem se sentar lado a lado. Assim, teremos somente 9 pessoas no grupo que podem permutar-se de 9! formas entre as cadeiras. Como Alan e Bruna podem se sentar de qualquer maneira, desde que permaneçam juntos; ou seja, Alan pode se sentar à direita de Bruna ou Bruna pode se sentar à direita de Alan, teremos ainda 2! maneiras de modificar a ordem deles; o que nos leva a ter $9! \cdot 2!$ maneiras de organizar todas as pessoas em cadeiras mantendo Alan e Bruna juntos.

Entretanto, entre essas $9! \cdot 2!$ maneiras, existem algumas em que Carlos e Douglas estão juntos e que devem ser descontadas devido à segunda restrição imposta pelo problema. Assim sendo, vamos calcular quais são essas maneiras, lembrando que devemos manter juntos Alan e Bruna.

Raciocinando dessa maneira, devemos ter dois grupos que devem permanecer juntos: Alan e Bruna; Carlos e Douglas; que devem, cada um, ser considerados como uma pessoa apenas. Dessa forma, teremos apenas 8 pessoas no grupo e 8! maneiras de permuta-las. Como existem 2! maneiras de modificar a ordem de Alan e Bruna e 2! maneiras de modificar a ordem de Carlos e Douglas (mantendo-os juntos), serão $8! \cdot 2! \cdot 2!$ maneiras que devem ser descontadas da quantidade $9! \cdot 2!$. Portanto, temos $9! \cdot 2! - 8! \cdot 2! \cdot 2! = 564.480$ modos para que essas 10 pessoas se coloquem nas cadeiras respeitando as restrições impostas.

Exemplo 3.4: O campeonato brasileiro de futebol de 2015 será disputado por 20 times, dos quais entre eles há três cariocas (Vasco, Flamengo e Fluminense) e dois gaúchos (Internacional e Grêmio). Ao término desse campeonato, quantas possibilidades existem para que na classificação o Internacional fique em uma posição à frente do Grêmio, este por sua vez à frente do Vasco, que por sua vez fique à frente do Flamengo, que por sua vez fique à frente do Fluminense? Entenda "em uma posição à frente" como ficar melhor colocado na classificação final e não como que os times estejam em posições consecutivas.

Mais um exemplo de permutação que será resolvido de maneira muito similar aos problemas de anagramas do primeiro exemplo. Mais especificamente, esse exemplo 3.4 relaciona-se bastante com os itens "k" e "l" do exemplo 3.1.

Sabemos que existem 20! possibilidades diferentes de classificação ao total, envolvendo todos os times. Porém, entre os 5 times citados e imaginando apenas um "campeonato à parte" entre eles, existem 5! possibilidades de classificação e em apenas uma delas a ordem desejada será respeitada (Internacional à frente do Grêmio, por sua vez à frente do Vasco, por sua vez à frente do Flamengo e por sua vez à frente do Fluminense). Assim sendo, teremos $\frac{1}{5!} \cdot 20! = \frac{20!}{5!}$ possibilidades de classificação do campeonato ao seu término, respeitando as condições de restrição previstas.

3.2 Permutações com repetição

Nesse tópico iremos apresentar exemplos em que, entre os elementos a serem permutados, alguns são iguais. Ou seja, teremos exemplos em que há o que chamamos de permutação com repetição ou permutação com elementos repetidos. Inicialmente vamos retomar nossos problemas de anagramas para criar um embasamento das formas de resolução.

Exemplo 3.5: Quantos anagramas possui a palavra CASA?

Observe que se a palavra em questão não possuísse nenhuma letra repetida (se fosse a palavra CASO) por exemplo, teria $4! = 24$ anagramas. Entretanto, as duas letras "A" repetidas fazem com que essa quantidade seja diminuída à metade pois há um desprezo de ordem entre elas. Ou seja, modificando a ordem das letras "A" (e somente delas) o anagrama formado será o mesmo. Assim, a palavra CASA possui apenas $\frac{4!}{2!} = 12$ anagramas.

Exemplo 3.6: Calcule a quantidade de anagramas da palavra:

a) BACANA

b) BANANA

c) PIRACICABA

Notemos que cada letra que se repete na palavra que desejamos calcular a quantidade de anagramas faz com que surja um desprezo de ordem entre essas letras repetidas. Assim, a palavra BACANA, que teria 6! anagramas caso não houvesse letras repetidas terá um desprezo de ordem entre as três letras "A" e, portanto a quantidade de anagramas deve ser dividida por 3! a fim de que não sejam contados anagramas iguais mais de uma vez. Portanto, a palavra BACANA terá $\frac{6!}{3!} = 120$ anagramas.

Observe agora a palavra BANANA que possui duas letras com repetição: a letra "A" que se repete 3 vezes e a letra "N" que se repete 2 vezes. Assim teremos um desprezo de ordem entre essas letras "A", que fará com que a quantidade de anagramas deva ser dividida por 3! e um outro desprezo de ordem entre as letra "N" que fará com que a quantidade de anagramas também tenha de ser dividida por 2!. Dessa forma, dos 6! anagramas que a palavra BANANA teria caso não houvesse letras repetidas, teremos apenas $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ anagramas.

Por fim, na palavra PIRACICABA há três letras que possuem repetição: a letra "A" que se repete 3 vezes, a letra "I" que se repete 2 vezes e a letra "C" que também se repete duas vezes. Assim, teremos três desprezos de ordem entre os seus anagramas. A quantidade de anagramas que a palavra teria caso não houvesse letras repetidas (10!) deve ser dividida por 3!, devido às 3 letras "A", por 2!, devido às 2 letras "I" e novamente por 2!, devido às 2 letras "C". Portanto, a palavra PIRACICABA tem $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151.200$ anagramas.

Essa fórmula representará o número de permutações possíveis para n elementos em que existam, entre eles, elementos repetidos nas quantidades $a, b, c, \cdots$, e será representada por $P_n^{a,b,c,\cdots}$. Assim:

$$P_n^{a,b,c,\cdots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdots}$$

Exemplo 3.7: Considere os anagramas da palavra ARAPIRACA para calcular:

a) Quantos começam com a letra A?

b) Quantos possuem as letras A juntas?

c) Quantos possuem as vogais juntas?

Inicialmente observemos que a palavra ARAPIRACA possui 9 letras sendo que a letra "A" se repete 4 vezes e a letra "R" se repete 2 vezes. Assim, caso quiséssemos calcular a quantidade total de anagramas, seriam $\frac{9!}{4! \cdot 2!} = 7.560$ anagramas.

Entretanto, no item “a” queremos calcular quantos anagramas começam pela letra “A”. Temos duas formas de resolver esse problema: podemos retirar uma letra “A” da palavra ARAPIRACA e fixa-la como a primeira e simplesmente permutar as demais 8 letras (com 3 letras “A” e 2 letras “R” repetidas) ou podemos escolher uma das 4 letras “A” que a palavra ARAPIRACA possui para começar o anagrama e depois dividir o resultado por 4!, por conta das letras “A” e por 2!, por conta das letras “R”. Ou seja, teremos $\frac{1 \cdot 8!}{3! \cdot 2!}$ ou $\frac{4 \cdot 8!}{4! \cdot 2!}$ anagramas. De qualquer uma das formas, o resultado será 3.360 anagramas.

O item “b” possui a restrição de que as 4 letras “A” permaneçam juntas e, conforme vimos anteriormente, devemos considera-las como apenas uma letra. Desse modo, a palavra ARAPIRACA possuirá somente 6 letras (AAAA, R, R, P, I, C) que poderiam ser permutadas de 6! maneiras, entretanto, como há duas letras “R”, essa quantidade deve ser dividida por 2! por conta do desprezo de ordem que há entre elas. Assim, teremos $\frac{6!}{2!} = 360$ anagramas nessas condições.

Observe que nesse item “b” não há necessidade de multiplicar esse resultado pela quantidade de formar que existem para mudar a ordem do grupo de letras que devem estar juntas (como ocorreu nos itens “h” e “j” do exemplo 3.1). Isso ocorre devido ao fato de todas as letras do grupo serem iguais.

Porém, no item “c”, as vogais são as letras que devem estar juntas, ou seja, as 4 letras “A” e a letra “I” devem ser consideradas como apenas uma letra e, dessa forma, a palavra ARAPIRACA possuiria somente 5 letras (AAAAI, R, R, P, C) e haveria 5! maneiras de permuta-las. Contudo, existem duas letras “R” e, dessa forma, há um desprezo de ordem entre elas, o que se traduz em termos que dividir a quantidade de anagramas por 2!. Por outro lado, esse item “c” nos exige que as vogais estejam juntas e não necessariamente nessa ordem AAAAI. Assim, devemos multiplicar a quantidade de anagramas encontrados pelo número de formas distintas de permutar o grupo AAAAI, que são $\frac{5!}{4!} = 5$ formas; ou seja, 5 letras e 4 delas repetidas. Assim, o número de anagramas da palavra ARAPIRACA que possuem as vogais juntas é igual a $\frac{5!}{2!} \cdot 5 = 300$.

Existem diversas aplicações dessas ideias de permutações com elementos repetidos em que são inseridas essas técnicas de contagem dos anagramas de palavras. Vamos ver algumas dessas situações.

Exemplo 3.8: Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.

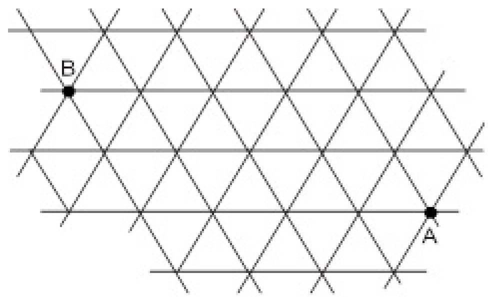

Figura 3.1: Quantos caminhos distintos de menor comprimento possível podemos realizar indo do ponto A ao ponto B?

Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d. Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, qual o valor de X?

Esse problema, que apareceu na prova de admissão para a Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ) em 2011, aparentemente totalmente desconectada com um problema de anagrama, será resolvido exatamente como tal.

Observe que se a formiga deseja ir do ponto A ao ponto B percorrendo a menor distância possível, então ela deve dirigir-se sobre os lados do triângulo somente de duas maneiras: caminhando para a esquerda (E) ou em uma diagonal para cima da direita para a esquerda (C). Note também que em qualquer dos caminhos percorridos dessa forma, a formiga deve ir 4 vezes para a esquerda (E) e duas vezes em uma diagonal para cima da direita para a esquerda (C). Assim, cada anagrama diferente da "palavra" EEEECC será um caminho diferente que pode ser percorrido pela formiga. Assim, teremos $\dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ caminhos distintos e $X = 15$.

Exemplo 3.9: Um projeto piloto desenvolvido em um curso de Engenharia Mecânica prevê a construção do robô "Eddie", cujos movimentos estão limitados apenas a andar para frente (F) e para a direita (D). Suponha que Eddie está na posição A e deseja-se que ele se desloque até chegar à posição B, valendo-se dos movimentos que *lhe são permitidos. Admita que cada movimento feito por Eddie o leve a uma posição consecutiva, conforme ilustra um esquema a seguir, em que foram realizados 10 movimentos (as posições possíveis estão marcadas por pontos e o percurso executado de A até B, é representado pela sequência ordenada de movimentos D F D D F F D F F D).*

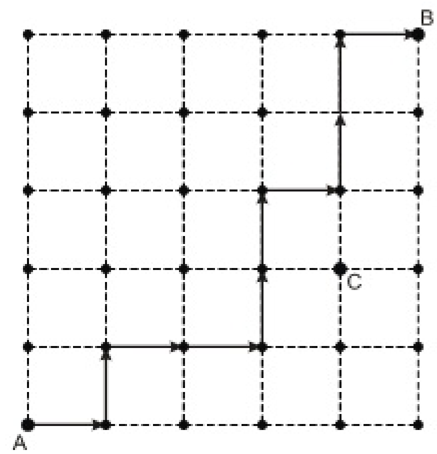

Figura 3.2: Quantos caminhos distintos de menor comprimento podemos realizar partindo do ponto A até o ponto B sem passar pelo ponto C?

Com base nas informações anteriores, qual o número de maneiras possíveis de Eddie se deslocar de A até B, sem passar pelo ponto C?

Esse exemplo 9 fez parte do exame de admissão da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) em 2012 e traz uma dificuldade adicional em relação ao exemplo anterior. Há a necessidade de, no menor percurso possível do ponto A até o ponto B, não se passe pelo ponto C.

Percebemos que para irmos do ponto A ao ponto B no menor percurso possível devemos caminhar 5 vezes para a direita (D) e 5 vezes para a frente (F). Assim, o número de anagramas da palavra DDDDDFFFFF será o número de caminhos possíveis. Ou seja, há $\dfrac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$ caminhos. Entretanto, alguns desses caminhos passam pelo ponto C; o que não deve ocorrer segundo o enunciado da questão; logo, devemos desconta-los dos 252 caminhos.

Observe que, deslocar-se do ponto A para o ponto B passando pelo ponto C pode ser realizado em duas etapas: deslocar-se do ponto A ao ponto C, que consiste em 4 movimentos para a direita (D) e dois movimentos para frente (F); e em seguida deslocar-se do ponto C ao ponto B, que consiste em apenas um movimento para a direita (D) e três movimentos para frente (F). Dessa forma, há $\dfrac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ maneiras de irmos do ponto A ao ponto C e $\dfrac{4!}{3!} = 4$ maneiras de irmos do ponto C ao ponto B; que são, respectivamente, os anagramas das "palavras" DDDDFF e DFFF. Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $15 \cdot 4 = 60$ maneiras de irmos do ponto A ao ponto B e passando pelo ponto C.

Por fim, existem $252 - 60 = 192$ caminhos diferentes de irmos do ponto A ao ponto B sem passar pelo ponto C.

3.3 O sistema paus e bolas

Entre as aplicações dos problemas de permutações com repetição, a mais interessante, na minha opinião, são as situações que são conhecidas como problemas envolvendo o sistema de paus e bolas ou também chamados mais formalmente de combinações completas, ou combinações com repetição. São situações em que a ordem de escolha dos elementos não é importante, ou seja, há desprezo de ordem entre os elementos escolhidos, porém é possível que um mesmo elemento seja escolhido mais de uma vez. Essa situação será descrita no exemplo 10.

Exemplo 3.10: Uma pessoa vai a uma pastelaria que oferece 3 tipos de pastéis: carne, queijo e frango. Ela deseja levar 5 pastéis para casa. Quantas formas distintas há de se fazer isso?

O problema, aparentemente não tem conexão nenhuma com as ideias que estávamos trabalhando até então. Porém, se tivermos uma visão um pouco diferente, podemos perceber que a permutação com elementos repetidos nos ajuda a resolver esse problema.

Um pensamento inicial que algumas pessoas imaginam seria imaginar esse experimento em 5 etapas (as escolhas dos sabores dos 5 pastéis) e que cada etapa teria 3 possibilidades de escolha (carne, queijo e frango). Entretanto essa ideia é equivocada pois, dessa forma, contaríamos diversas possibilidades iguais mais de uma vez. Por exemplo, a escolha CQFCQ, onde C representa carne, Q representa queijo e F representa frango é idêntica à escolha CCQQF. Assim, o que realmente nos importa nesse problema não é a ordem de escolha dos pastéis e sim a quantidade final dos pastéis escolhidos de cada sabor. As escolhas CQFCQ e CCQQF são iguais pois em ambas foram escolhidos 2 pastéis de carne, 2 de queijo e 1 de frango.

Dessa forma, devemos perceber inicialmente que se essa pessoa escolher x pastéis de carne, y pastéis de queijo e z pastéis de frango, devemos ter $x + y + z = 5$, sendo x, y e z, números naturais. Cada solução diferente dessa equação será uma forma diferente de escolha. A grande sacada desse problema é criar uma forma simbólica de representação para cada uma das soluções diferentes. O sistema que é chamado de "sistema de paus de bolas" consiste em representar as soluções naturais dessa equação com traços verticais (paus) e bolas. Por exemplo:

A solução $x = 2$, $y = 2$ e $z = 1$ será representada por $|| \bullet || \bullet |$.

A solução $x = 1$, $y = 3$ e $z = 1$ será representada por $| \bullet ||| \bullet |$.

A solução $x = 1$, $y = 4$ e $z = 0$ será representada por $| \bullet ||||\bullet$.

Ou seja, cada solução diferente é representada por uma combinação de 5 símbolos $|$ (paus) e 2 símbolos $\bullet$ (bolas), onde os paus representam os pastéis e as bolas são os separadores. Cada "anagrama" da sequência $||||| \bullet \bullet$ é uma dessas soluções. Assim, existem $\dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ formas diferentes para uma pessoa escolher para levar para casa 5 pastéis em um local que oferece 3 opções de sabores.

Uma forma alternativa para problemas desse tipo seria ter uma restrição de modo a garantir que algumas escolhas mínimas devem ser feitas. Uma situação semelhante ao exemplo 3.10 será citada no exemplo 3.11.

Exemplo 3.11: Uma pessoa vai a uma pastelaria que oferece 3 tipos de pastéis: carne, queijo e frango. Ela deseja levar 10 pastéis para casa. Quantas formas distintas há de se fazer isso de modo que ele leve no mínimo 1 pastel de cada sabor?

Nesse exemplo, o pensamento que devemos ter será que essa pessoa levou $x + 1$ pastéis de carne, $y + 1$ pastéis de queijo e $z + 1$ pastéis de frango de modo que $x + 1 + y + 1 + z + 1 = 10$, ou seja, $x + y + z = 7$ e resolvemos de modo idêntico ao exemplo 10.

Assim, a quantidade de soluções desse problema será o número de "anagramas" da sequência $||||||| \bullet \bullet$. Ou seja 9 símbolos (7 elementos e 2 separadores) que podem ser permutados de $\dfrac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$ maneiras distintas.

De um modo geral, a quantidade de soluções naturais da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n$ será dado pela formas de permutar uma sequência de n símbolos $|$ e $(p - 1)$ símbolos

$\bullet$, ou seja, é dada por:

$$P_{n+p-1}^{n,p-1} = \frac{(n+p-1)!}{n! \cdot (p-1)!}$$

Observe que essa forma de resolução nos permite solucionar de uma maneira extremamente mais sucinta o exemplo 2.8 que perguntava em seu item "e" (o mais complexo), de quantas formas uma pessoa poderia escolher em uma sorveteria 4 bolas de sorvete, que poderiam ser ou não do mesmo sabor, entre 20 sabores disponíveis, para preparar um milk-shake. Assim, o problema seria encontrar uma solução para a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 4$, onde cada x_i representa a quantidade de bolas do sabor i que foram escolhidas.

Segundo a técnica de resolução que acabamos de ver, cada permutação de uma sequência de 4 | (paus) e 19 $\bullet$ (bolas) será uma solução diferente e, consequentemente, uma forma diferente de escolha dos sabores. Assim, teremos $\dfrac{23!}{19! \cdot 4!} = 8.855$ formas de escolha.

3.4 Permutações circulares

As permutações circulares, também chamadas de permutações cíclicas, são formas de agrupamento em que são escolhidos sempre os mesmos elementos, porém, ao contrário das permutações simples e permutações com repetição, os elementos formam um ciclo (ou um círculo). Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.12: Cinco amigos desejam sentar-se ao redor de uma mesa redonda. De quantas formas é possível fazer isso?

Observe que como as escolhas formam um círculo, então para cada escolha das posições desses amigos ao redor da mesa teremos várias outras escolhas idênticas que serão obtidas simplesmente promovendo a rotação da mesa. Observe a sequência de imagens a seguir.

Todas as 5 formas de disposição das pessoas ao redor da mesa são idênticas e foram obtidas a partir da rotação, no sentido horário, das pessoas que formam o círculo. Ou seja, imaginando que existam 5! maneiras de se formar o círculo inicial, permutando

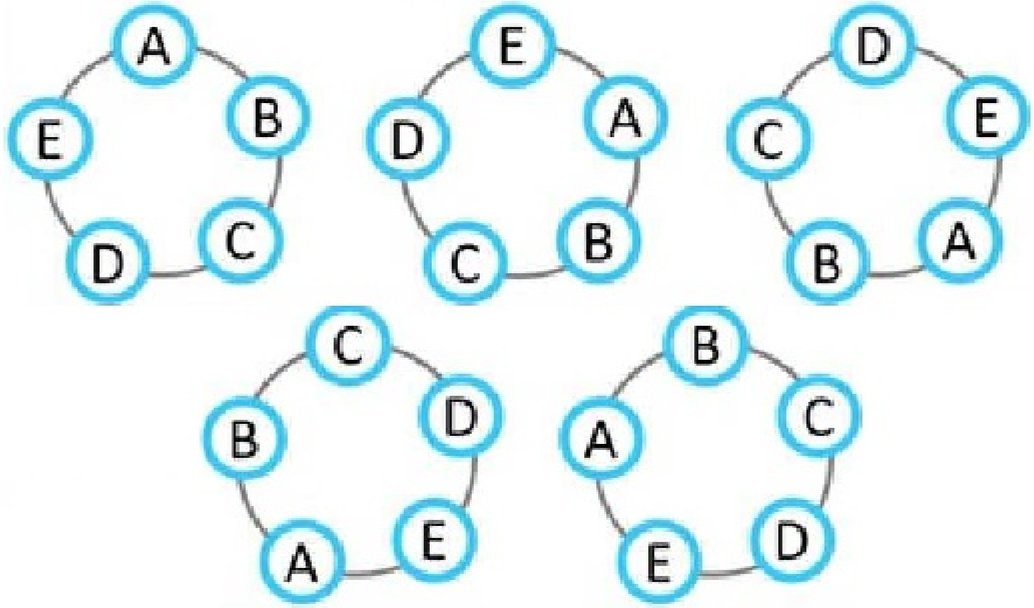

Figura 3.3: As cinco formas são idênticas e obtidas a partir de uma rotação no sentido horário

os 5 amigos, porém cada 5 dessas formas possui somente uma que é distinta, o número total de formas para que esses amigos sentem-se nessa mesa é $\dfrac{5!}{5} = 4! = 24$.

De um modo mais genérico, para uma permutação circular de n elementos poderíamos formar o círculo de $n!$ maneiras, porém, cada círculo formado possui n formas idênticas que são obtidas através de rotações. Portanto, teremos somente $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$ maneiras de organizar esses n elementos em um círculo.

Uma outra forma de raciocinar seria colocando elemento por elemento dentro do círculo. Assim, o primeiro elemento (A) a ser colocado no círculo teria apenas uma possibilidade, ou seja, pode entrar em qualquer lugar do círculo ((1) da Figura 3.4). O segundo elemento (B) a ser colocado também teria apenas uma possibilidade, pois com um único ponto marcado sobre o círculo, há um único arco de circunferência nesse círculo, observe que em (2) da figura 3.4 que os dois círculos representam a mesma disposição e são obtidas através de uma rotação.

O terceiro elemento (C) a ser colocado já terá duas possibilidades, ele pode ser colocado no arco AB formado pelos elementos A e B sobre o círculo e tomados de A para B no sentido anti-horário ou pode ser colocado no arco BA formado pelos elementos A e B sobre o círculo e tomados de B para A, novamente no sentido anti-

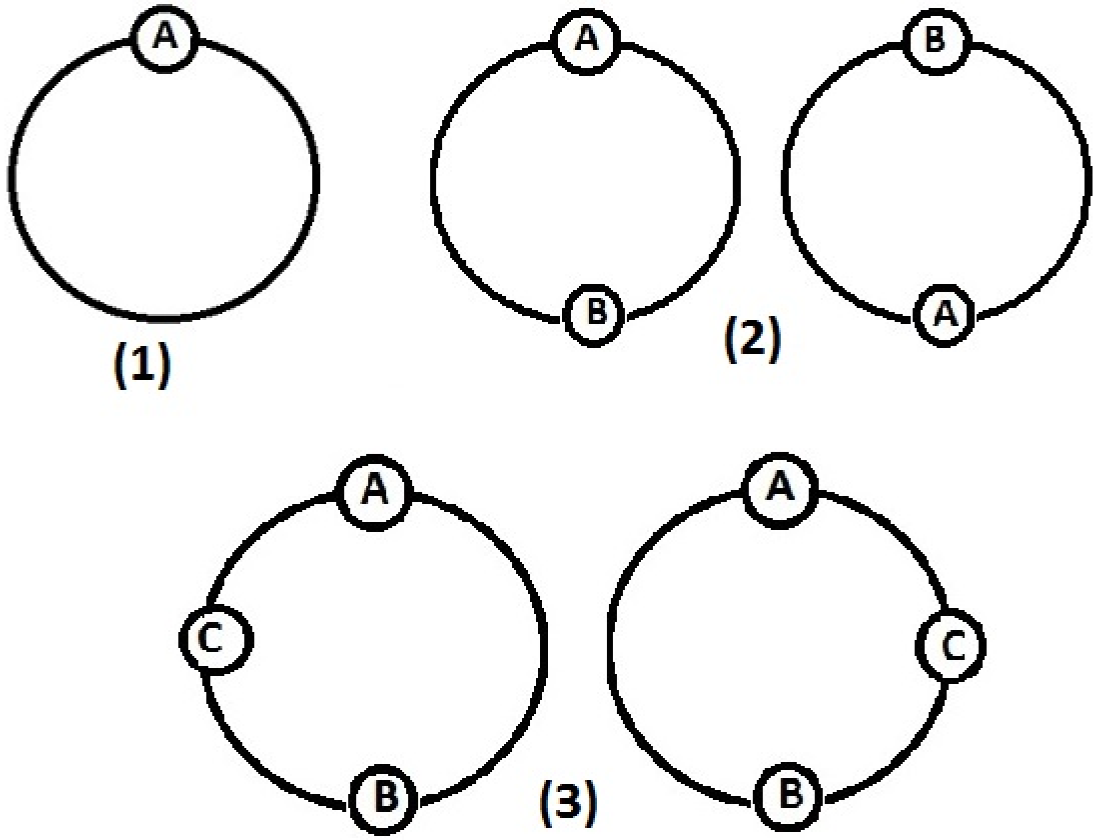

Figura 3.4: Inserindo um a um os elementos em um círculo

horário ((3) da Figura 3.4).

Observe que se escolhermos a opção da esquerda de (3) na Figura 3.4, são criados três arcos de circunferência; AC, CB e BA; sempre tomados no sentido anti-horário, e um quarto elemento (D) poderá entrar em qualquer um desses 3 arcos. Seguindo essa ideia, cada novo elemento terá uma possibilidade a mais em relação ao elemento anterior, para "entrar" em algum arco já formado no círculo. Assim, para n elementos, teremos $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) = (n-1)!$ maneiras para formar um círculo.

Exemplo 3.13: Cinco meninas e cinco meninos devem dar as mãos de modo a formar um círculo. De quantos modo isso é possível se não quisermos que dois meninos ou duas meninas fiquem com as mãos dadas?

Uma solução bem simples para esse problema seria formar um círculo inicialmente com as 5 meninas, o que pode ocorrer de $4! = 24$ formas e, em seguida, introduzir os meninos nos espaços formados entre as meninas (observe a Figura 3.5).

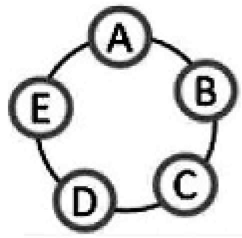

Figura 3.5: Inicialmente criamos o círculo apenas com as meninas

Assim, o primeiro menino a entrar no círculo terá 5 opções: entre A e B, entre B e C, entre C e D, entre D e E ou entre E e A. Uma vez escolhido o local onde o primeiro menino irá entrar; o segundo menino terá somente 4 opções, haja vista que não pode entrar no mesmo local em que o primeiro entrou. Desse medo, o terceiro menino terá 3 possibilidades; o quarto menino, 2 possibilidades e o quinto menino, apenas uma possibilidade.

Assim, teremos $4! \cdot 5! = 2880$ maneiras de dispor essas 5 meninas e esses 5 meninos da forma desejada.

No capítulo 4, iremos abordar os problemas referentes ao segundo tipo de problemas de Análise Combinatória. Os problemas de arranjo.

Capítulo 4

Arranjos

4.1 Definição

Os arranjos são formas de agrupamento em que, além de mudar a ordem dos elementos escolhidos, podemos mudar os próprios elementos escolhidos.

Por exemplo, vamos supor que 8 atletas estão participando da final de uma prova de natação das olimpíadas. Sabemos, por tudo aquilo que dissemos no capítulo 3, que haverá 8! classificações diferentes ao final da prova (admitindo que não haja dois atletas empatados com o mesmo tempo) e, obviamente, nessas 8! classificações, mudamos apenas a ordem de classificação dos atletas, sendo, em todas elas, os mesmos 8 atletas.

Entretanto, se desejamos saber de quantas formas distintas poderão ser feitas as premiações com medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente para o primeiro, segundo e terceiro colocados na prova, os 3 atletas que serão premiados não serão os mesmos em todas as premiações. Essa ideia de mudar a ordem e mudar também os elementos escolhidos é uma característica que diferencia os problemas de arranjo dos problemas de permutação.

Exemplo 4.1: Dez times de futebol, entre eles Flamengo, Fluminense e Vasco, disputam um torneio.

a) Quantas são as possíveis classificações para os três primeiros colocados?

b) Quantas são as possíveis classificações para os três primeiros colocados de forma *que o Flamengo seja o campeão do torneio?*

c) *Quantas são as possíveis classificações para os três primeiros colocados de forma que o Flamengo esteja entre eles?*

d) *Quantas são as possíveis classificações para os três primeiros colocados de forma que o Flamengo não esteja entre eles?*

e) *Quantas são as possíveis classificações para os quatro primeiros colocados de forma que o Flamengo e o Vasco estejam entre eles?*

f) *Quantas são as possíveis classificações para os cinco primeiros colocados de forma que o Flamengo, o Vasco e o Fluminense estejam entre eles?*

Inicialmente observemos que, caso quiséssemos as possíveis classificações para todas as 10 posições teríamos 10! possibilidades. Vamos às resoluções de cada item:

a) Para a escolha do primeiro colocado do torneio teremos 10 possibilidades, para o segundo colocado teremos 9 possibilidades e para o terceiro, 8 possibilidades. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, teremos $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ classificações distintas para os três primeiros colocados.

   É importante observar que supondo que existissem n times participando desse torneio, haveria n possibilidades para o primeiro colocado, $(n-1)$ possibilidades para o segundo colocado e $(n-2)$ possibilidades para o terceiro colocado. Sendo $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ o total de possibilidades para os três primeiros.

   De um modo ainda mais geral podemos imaginar que temos n times e que queremos encontrar as possíveis classificações para os primeiros p times, assim teríamos n possibilidades para o primeiro colocado, $(n-1)$ possibilidades para o segundo colocado, $(n-2)$ possibilidades para o terceiro e assim sucessivamente até termos $(n-p+1)$ possibilidades para o p-ésimo colocado; e teremos, $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$ possibilidades para os primeiros p colocados.

   Por outro lado, podemos escrever a expressão $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1)$ como:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Portanto, podemos imaginar uma fórmula para calcular o número de possibilidades distintas para escolher p elementos entre n possíveis, com $p \leq n$, de modo que a ordem de escolha desses elementos seja importante e que não haja repetição entre os elementos escolhidos. Simbolizaremos essa expressão por $A_{n,p}$ e chamaremos de "arranjo de n elementos tomados p a p".

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Entretanto, particularmente eu prefiro imaginar na tomada das escolhas uma a uma utilizando o Princípio Fundamental da Contagem.

Outra detalhe que devemos estar atentos na resolução das questões é a possibilidade de repetição entre os p elementos escolhidos. Assim, o número de possibilidades, que será simbolizado por $AR_{n,p}$ (arranjos com repetição de n elementos tomados p a p), será dado pela expressão $AR_{n,p} = n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n = n^p$.

b) Nesse item, teremos apenas uma possibilidade para o primeiro colocado (deve ser o Flamengo), 9 possibilidades para o segundo e 8 possibilidades para o terceiro. Assim, teremos $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ classificações distintas.

c) Nesse item, como desejamos que um elemento específico (no caso o Flamengo) esteja entre os escolhidos, então é interessante escolher primeiramente em que posição ele estará entre esses três primeiros e, obviamente, teremos 3 possibilidades. Uma vez feita essa escolha, teremos que escolher 2 entre os 9 times restantes para ocupar as demais posições excluindo a que foi ocupado pelo Flamengo. Assim, teremos $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$ classificações distintas.

   Observemos que alguns autores explicam esse item de outra maneira, imaginando o Flamengo inicialmente na primeira colocação e, em seguida, muitiplicando por 3 o resultado, que seriam as possibilidades de posições que o Flamengo poderia ocupar. Para apenas um elemento específico entre os escolhidos, as duas formas parecem iguais, entretanto quando quisermos que mais elementos específicos estejam entre os escolhidos (item "e" e "f"), a vantagem da primeira forma em relação à segunda é bastante evidente.

d) Para que determinado elemento não esteja entre os escolhidos, basta-nos escolher todos os três primeiros colocados entre os 9 demais times. Assim, teremos $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ classificações distintas.

Observe que esse item "d" poderia ser resolvido, de um modo não tão prático, subtraindo os resultados dos itens "a" e "c".

e) Como desejamos que o Flamengo e o Vasco estejam entre os 4 primeiros colocados, teremos 4 possibilidades de escolha para a posição que será ocupada pelo Flamengo e 3 possibilidades de escolha para a posição ocupada pelo Vasco. As duas demais posições entre esses 4 primeiros, excluindo as ocupadas por Flamengo e Vasco, devem ser escolhidas entre os 8 times restantes. Assim, teremos $4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 = 672$ classificações distintas.

f) De modo muito similar ao item "e", teremos 5 possibilidades para escolher a posição do Flamengo, 4 possibilidades para escolher a posição do Vasco, 3 possibilidades para escolher a posição do Fluminense e 7 e 6 possibilidades, respectivamente, para escolher as duas demais posições entre os 5 primeiros. Assim, teremos $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 = 2520$ classificações distintas.

Exemplo 4.2: De quantas maneiras distintas 6 pessoas, sendo 4 homens e 2 mulheres, podem se sentar em 4 cadeiras sendo que as mulheres sempre devem estar sentadas?

Nesse exemplo temos um raciocínio muito similar ao exemplo 4.1. Haja vista que devemos ter dois elementos específicos (as duas mulheres) entre os escolhidos para sentar-se nas cadeiras. Assim, teremos 4 possibilidades de escolha para a posição ocupada pela 1ª mulher, 3 possibilidades para a posição ocupada pela 2ª mulher e para as duas demais cadeiras que ainda estão vazias teremos, respectivamente, 4 e 3 possibilidades escolhendo-as entre os homens. Dessa forma, teremos, $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 144$ maneiras de escolher as pessoas para sentar-se nas cadeiras de modo que as mulheres sempre permaneçam sentadas.

Muitos dos tipos de problemas de arranjo já foram discutidos no capítulo 1 e são puramente aplicações do Princípio Fundamental da Contagem. O único problema que poderíamos tomar como novo é exatamente esse tipo de problema em que alguns elementos específicos devem estar entre os escolhidos e, conforme vimos, a melhor maneira é primeiramente escolher as posições desses elementos que devem ser escolhidos para só então escolher os demais elementos entre os restantes. É importante observer que tal situação não é encontrada entre os problemas de permutação, haja vista que em todo agrupamento em uma permutação, os elementos escolhidos são sempre os mesmos, sendo a diferença dada apenas pela ordem de escolha destes.

Capítulo 5

Combinações

5.1 A combinação e o desprezo de ordem

Dizemos que um problema de Análise Combinatória se trata de uma combinação quando existe desprezo de ordem entre os elementos escolhidos, que foi amplamente estudado no capítulo 2. Nosso objetivo neste capítulo é descrever algumas situações frequentes em questões e oferecer formas de resolução que dispensem o uso de fórmulas prontas. Vamos aos exemplos.

Exemplo 5.1: Entre um grupo de oito frutas diferentes (em que duas delas são laranja e maçã) serão escolhidas quatro para preparar uma salada de frutas. Calcule quantas saladas diferentes podemos preparar:

a) ao total;

b) tal que laranja seja uma dessas frutas;

c) sem utilizar maçã como uma das frutas;

d) utilizando maçã, porém sem utilizar laranja;

e) sem misturar laranja com maçã;

Inicialmente devemos perceber que a ordem de escolha das frutas não influencia na salada, o que importa apenas são as frutas que serão escolhidas, logo o problema possui um desprezo de ordem. Vamos às soluções:

a) Em todo problema que exista desprezo de ordem é útil calcular o número de possibilidades que teríamos caso esse desprezo não existisse. Ou seja, existiriam $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ saladas diferentes caso a ordem fosse importante. Entretanto, como a ordem de escolha não é importante devemos raciocinar em quantas formas diferentes teríamos de mudar a ordem das frutas escolhidas uma vez que essa escolha já tenha sido feita. Assim, percebemos que teremos 4! formas de efetuar essa mudança na ordem. Portanto, para evitar que a mesma salada seja contada mais de uma vez, o resultado deve ser dividido por 4! e teremos apenas $\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = 70$ saladas diferentes.

   De um modo geral, o número de possibilidades em uma combinação da qual entre n elementos devem ser escolhidos p deles é o resultado do arranjo que seria obtido, dividido por $p!$. Daqui segue a fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

b) No item “b”, uma das 4 frutas escolhidas deve ser laranja. Em problemas de arranjo, conforme foi visto no capítulo anterior, deveríamos inicialmente escolher a posição em que essa laranja entraria dentro das escolhas e só então escolher as demais frutas. Porém, como a ordem não é importante, faz-se necessário tão somente escolher as demais três frutas, entre as 7 restantes. Logo, teremos $C_{7,3} = 35$ saladas diferentes que incluem laranja.

   De um modo geral, caso se deseje que um ou mais elementos sejam escolhidos em um problema que possua desprezo de ordem, basta-nos escolher os demais elementos entre os restantes.

c) Por outro lado, nesse item “c”, queremos que um determinado elemento não seja utilizado, no caso a maçã, então o que nos resta será escolher todas as 4 frutas entre as 7 que restam excluíndo-se a maça. Logo, teremos $C_{7,4} = 35$ saladas dieferentes sem utilizar a maçã.

   Um fato que pode ter chamado atenção é a igualdade de resultados entre $C_{7,3} = 35$ e $C_{7,4} = 35$. Terá sido mera coincidência ou realmente era de se esperar essa igualdade? Realmente não foi mera coincidência e podemos justificar de uma maneira bem simples que, não sendo a ordem importante, quando de um grupo de 7 elementos escolhemos 3 deles, indiretamente estamos formando outro grupo de 4 elementos com aqueles que não foram escolhidos.

Essa ideia pode ser generalizada para uma situação em que, entre n elementos, devem ser escolhidos p deles, com desprezo de ordem. Indiretamente estamos criando um novo grupo formado com os $n-p$ elementos que deixaram de ser escolhidos. Logo:

$$C_{n,p} = C_{n,n-p}$$

d) Nesse item "d" uma das 4 frutas escolhidas será a maçã e devemos escolher as demais 3 frutas entre as 6 restantes (excluindo a laranja). Assim, teremos $C_{6,3} = 20$ saladas diferentes incluindo maçã e sem incluir laranja.

e) Esse item "e" pode ser resolvido de duas maneiras. Como não podemos misturas as frutas laranja e maçã, temos três possibilidades: escolher maçã e não escolher laranja ($C_{6,3}$), escolher laranja e não escolher maçã ($C_{6,3}$) e não escolher nem laranja e nem maçã ($C_{6,4}$). Logo, teremos $2 \cdot C_{6,3} + C_{6,4} = 2 \cdot 20 + 15 = 55$ saladas diferentes nessa situação.

   Entretanto essa forma não é a mais simples de se raciocinar. A melhor maneira seria calcular o total de saladas diferentes que podem ser feitas ($C_{8,4} = 70$) e retirar dessa quantidade as saladas que misturam maçã e laranja ($C_{6,2} = 15$). Assim, teremos $70-15 = 55$ saladas diferentes que não misturam maçã e laranja.

Exemplo 5.2: Em uma reta r, foram marcados 5 pontos distintos, em outra reta s, paralela a r, foram marcados 4 pontos distintos.

a) Quantos triângulos podem ser formados?

b) Quantos quadriláteros podem ser formados?

c) Quantos pentágonos podem ser formados?

No capítulo 2 foi resolvido um problema similar no exemplo 2.1, entretanto, naquele exemplo, os pontos estavam sobre uma circunferência e não existiam quaisquer três deles colineares. Assim, qualquer conjunto de três pontos formaria um triângulo.

a) Nesse item "a" do exemplo 5.2, se tomarmos três pontos da reta r ou três pontos da reta s, não haverá um triângulo formado. Para que se forme um triângulo devemos escolher um ponto da reta r e dois pontos da reta s ou dois pontos da reta r e um ponto da reta s.

Portanto, usando o Princípio Fundamental da Contagem, teremos $C_{5,2} \cdot C_{4,1} = 10 \cdot 4 = 40$ formas de escolher dois pontos da reta r e um ponto da reta s e $C_{5,1} \cdot C_{4,2} = 5 \cdot 6 = 30$ formas de escolher um ponto da reta r e dois pontos da reta s. Logo, utilizando o Princípio Aditivo, teremos $40 + 30$ triângulos formados.

Há uma outra forma de resolução desse item "a" que envolve o cálculo de todas as possibilidades para escolher 3 entre os 9 pontos das duas retas e dessas iríamos retirar as possibilidades em que os pontos estão em uma mesma reta. Assim, teremos $C_{9,3} = 84$ possibilidades ao total, de onde devemos retirar $C_{5,3} = 10$ e também $C_{4,3} = 4$ que são as possibilidades, respectivamente, de escolher os três pontos na reta r e escolher os três pontos na reta s. Portanto, chegaríamos no mesmo resultado de $84 - 10 - 4 = 70$ triângulos formados. Particularmente eu não sou adepto dessa forma de resolução pois caso seja um polígono com mais pontos, como o item "b", a quantidade de retiradas que deveremos fazer do total de possibilidades se torna muito grande e extremamente trabalhosa.

b) Para se formar um quadrilátero há apenas uma possibilidade: devemos escolher 2 pontos da reta r, que pode ser feito de $C_{5,2} = 10$ formas, e escolher 2 pontos da reta s, que pode ser feito de $C_{4,2} = 6$ formas. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, teremos $10 \cdot 6 = 60$ quadriláteros formados.

c) O item "c" pede-nos para formar um pentágono com os pontos das retas r e s. Entretanto, como só existem duas retas onde os pontos se encontram, para escolher 5 pontos entre eles, necessariamente três deles devem estar em uma mesma reta (pelo Princípio das Gavetas) e, sendo assim, estarão alinhados não formando um pentágono e sim um quadrilátero. Portanto, podemos concluir que é impossível formar um pentágono nessas condições.

Exemplo 5.3: O jogo da megassena consiste em sortear 6 dezenas entre 60 disponíveis. Ganha aquele que acertar as 6 dezenas sorteadas, independentemente da ordem de escolha. Uma aposta com 6 dezenas custa R$ 2,50. Quanto custará uma aposta em que forem escolhidas 10 dezenas?

Inicialmente percebemos, conforme dito até no enunciado, que a ordem dos números sorteados não interfere no resultado, logo se trata de um problema de combinação.

Esse problema particularmente, apesar de ser de solução extremamente fácil, normalmente provoca muitas dúvidas por parte da maioria dos alunos. A solução decorre do fato de que quando uma pessoa aposta mais de 6 números, que é a quantidade de números sorteados, indiretamente ela está fazendo várias apostas. Imaginemos conforme o exemplo que uma pessoa aposte em 10 números (dezenas) e que essas dezenas sejam os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Cada subconjunto com 6 elementos forma uma aposta diferente que deverá custar R$ 2,50. Conforme dito anteriormente, a ordem não é importante, logo teremos $C_{10,6} = 210$ apostas diferentes de 6 dezenas feitas escolhendo entre as 10 dezenas apostadas. Como cada aposta deve custar R$ 2,50, então uma aposta com 10 dezenas deve custar $210 \cdot 2,50 = R\$525,00$

5.2 Lemas de Kaplansky

Os Lemas de Kaplansky foram criados pelo matemático canadense-americano Irving Kaplansky para a resolução de um famoso problema chamado Problema de Lucas. Basicamente os Lemas de Kaplansky são utilizados quando desejamos formar um subconjunto com p elementos escolhidos entre os n elementos de um conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ de modo que dois deles não sejam consecutivos. Por exemplo, para $n = 8$ e $p = 3$ os conjuntos $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 6, 8\}$ e $\{3, 5, 7\}$ são subconjuntos que estão entre os que desejamos formar, já o conjunto $\{2, 5, 6\}$ não está entre os que desejamos formar pois os elementos 5 e 6 são consecutivos.

O raciocínio que seguiremos será criar uma sequência de símbolos $+$ e $-$ de modo que o símbolo $+$ representa que o elemento foi escolhido e o símbolo $-$ representa que o elemento não foi escolhido. Assim, novamente citando o exemplo para $n = 8$ e $p = 3$, o conjunto $\{1, 4, 8\}$ seria representado pela sequência $+ - - + - - - +$; já o conjunto $\{2, 5, 6\}$ seria representado por $- + - - + + - -$.

Notemos que para que um conjunto esteja entre os que satisfazem a condição de não haver elementos consecutivos a sua representação não pode possuir uma sequências de dois $+$ seguidos. Assim, novamente em nosso exemplo com $n = 8$ e $p = 3$, devemos intercalar 3 símbolos $+$ entre 5 símbolos $-$, de modo que dois símbolos $+$ não "entrem" no mesmo local entre dois símbolos $-$. Assim, distribuindo os 5 símbolos $-$ (apenas 1 modo) teremos 6 espaços em que os símbolos $+$ poderão entrar. Dessa forma, teremos 6 possibilidades para o primeiro símbolo $+$, 5 possibilidades para o segundo símbolo $+$ e 4 possibilidades para o terceiro símbolo $+$. Como a ordem com que esses símbolos "entram" entre os símbolos $-$ não é importante, devemos dividir o resultado por 3!, o que configura um problema cujo resultado $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$ é igual a $C_{6,3}$.

De um modo mais genérico, se de um conjunto com n elementos desejamos criar um subconjunto com p elementos de modo que dois destes elementos não sejam consecutivos teremos que distribuir $n-p$ símbolos $-$ em que teremos somente uma forma de escolha e entre os $n-p+1$ espaços que foram formados entre os símbolos $-$ devemos inserir os p símbolos $+$ de tal forma que dois deles não sejam inseridos no mesmo local e que a ordem com que são inseridos seja desprezada. Ou seja, teremos $C_{n-p+1,p}$ formas disso ocorrer. Com isso temos o

Primeiro Lema de Kaplasky: O número de subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ com p elementos de modo que dois deles não sejam consecutivos é dado por $C_{n-p+1,p}$.

Exemplo 5.4: Quantos anagramas da palavra ARARAQUARA não possuem duas letras A consecutivas?

Devemos colocar as 10 letras palavra nas 10 casas a seguir:

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

Inicialmente vamos escolher 5 casas não consecutivas entre as 10 para colocar as letras "A", o que pode ser feito de $C_{10-5+1,5} = C_{6,5} = 6$ formas.

As demais 5 letras, dentre as quais há 3 repetidas (R), devem ser colocadas nas 5 demais casas, o que pode ser feito de $P_{5,3} = \dfrac{5!}{3!} = 20$ formas. Assim, teremos $6 \cdot 20 = 120$ anagramas da palavra ARARAQUARA que não possuem duas letras "A" consecutivas.

Vamos supor agora que os n elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ estejam organizados formando um círculo conforme a figura a seguir.

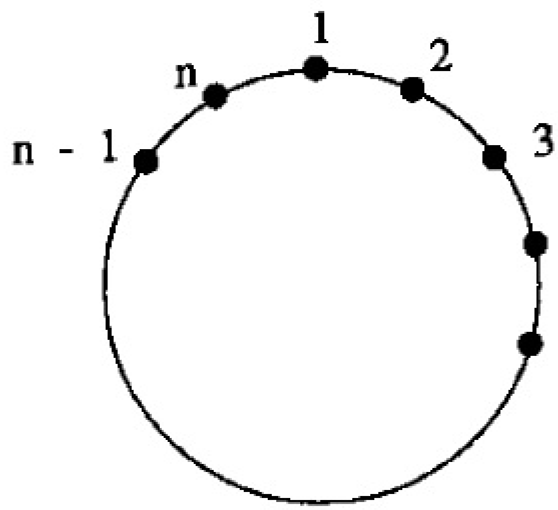

Figura 5.1: n elementos organizados formando um círculo

Novamente desejamos formar um subconjunto com p elementos de modo que dois deles não sejam consecutivos e lembrando que agora os elementos 1 e n são agora consecutivos. Desse modo, devemos o problema em duas situações:

Na primeira situação o elemento 1 não figura e devemos escolher os p elementos entre os $n-1$ elementos do conjunto $\{2, 3, \cdots, n\}$, o que pode ser feito de $C_{(n-1)-(p-1),p} = C_{n-p,p}$ modos.

Na segunda situação, o elemento 1 figura entre os escolhidos e devemos escolher os demais $p-1$ elementos entre os $n-3$ elementos do conjunto $\{3, 4, \cdots, n-1\}$, pois os elementos 2 e n não podem figurar pois são consecutivos a 1. Essa segunda escolha pode ser feita de $C_{(n-3)-(p-1)+1,p-1} = C_{n-p-1,p-1}$ modos.

Portanto, para se formar o subconjunto com p elementos nessa situação teremos $C_{n-p,p} + C_{n-p-1,p-1}$ modos, que desenvolvendo de maneira conveniente, chegaremos ao resultado de termos $\dfrac{n}{n-p} \cdot C_{n-p,p}$ modos.

Dessa forma, podemos enunciar o

Segundo Lema de Kaplansky: O número de subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ com p elementos de modo que dois deles não sejam consecutivos, sendo os elementos 1 e n consecutivos, é dado por $\dfrac{n}{n-p} \cdot C_{n-p,p}$.

Exemplo 5.5: Com os vértices de um decágono, polígono com 10 lados, quantos são os triângulos que podem ser formados de modo que nenhum dos lados do triângulo seja um lado do decágono.

Devemos perceber que o nosso problema é, a partir do conjunto $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, que representarão os vértices do decágono, formar um subconjunto com 3 elementos, que serão os vértices do triângulo, de modo que dois deles não sejam consecutivos, sendo os elementos 1 e 10 consecutivos. Assim, pelo Segundo Lema de Kaplansky, teremos $\dfrac{10}{10-3} \cdot C_{10-3,3} = \dfrac{10}{7} \cdot \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 50$ triângulos que podem ser formados.

Capítulo 6

Um breve histórico das Probabilidades

São muito difusas as informações de quando realmente a probabilidade começou a ser utilizada mesmo que de maneira informal. Existem relatos de povos antigos, especialmente, egípcios e indianos, que utilizavam um instrumento conhecido como astragali (observe a figura 6.1) para realizar apostas. O astragali nada mais é uma versão primitiva dos nossos dados. Era feito em osso e possuíam 4 ou 6 faces, nunca perfeitamente simétricas, que eram numeradas ou gravadas. Acredita-se também que os astragalis eram utilizados pelos oráculos da época para consultar as opiniões dos deuses. Ao longo do tempo, os astragali foram substituídos pelos nossos dados com 6 faces muito mais simétricas que as de seu antecessor e gradativamente perderam seus aspectos místicos sendo usadas exclusivamente para diversão.

Foi na Roma antiga que os dados se difundiram amplamente e segundo se tem notícia existiam leis especiais para regulamentar as apostas. Quase todos jogavam, inclusive o imperador Júlio César que, segundo o historiador romano Plutarco, jogava dados com os senadores antes de derrubar o Senado e tornar-se imperador. Foi em um desses jogos que ele disse uma de suas mais famosas frases: *alea iacta est*, ou seja, o dado está lançado, que comumente é traduzida como "a sorte está lançada". Interessante perceber que a palavra latina *alea* pode significar dado ou sorte, daí as duas interpretações da frase e também a origem da palavra aleatório quando queremos dizer que algum fenômeno é baseado apenas na sorte.

Figura 6.1: Cada “face” do osso se referia a um número, de maneira similar aos dados atuais

Os dados permaneceram ao longo de muito tempo como o maior divertimento entre os povos e assim foi durante toda a Idade Antiga e também a Idade Média. Foi entre esses jogos de azar que a Matemática viu surgir Girolamo Cardano (1501-1576) que apesar de ter se formado em Medicina, dedicou muito tempo de sua vida estudando Matemática e, em particular, os tais jogos de azar. No seu livro Liber de Ludo Aleae (Livro dos jogos de azar) escreveu o que, para muitos estudiosos, é a primeira abordagem concreta da probabilidade. Nesse livro ele apresenta a mais ampla variedade de jogos e os diferencia em vários tipos: jogos de força, jogos de habilidade e jogos de azar. Entre esses faz amplas análise sobre os principais jogos da época: dados, cartas, gamão, primero (uma versão antiga do Poker), entre outros. São apontados ainda nesse livro as primeiras ideias de experimentos não equiprováveis como, por exemplo, que no lançamento de dois dados de 6 faces existem 36 possibilidades e não apenas 11 (pontuações de 2 a 12) como resultado para a soma dos pontos obtidos das faces que ficam voltadas para cima.

Esses erros de probabilidade, que serão amplamente discutidos nos capítulos 8 e 9, derivam do fato de que nem sempre nosso cérebro distingue as situações que podem ocorrem mais vezes. Por exemplo, imagine uma situação em que um casal deseja ter dois filhos e que seja um menino e uma menina. Poderíamos pensar que existem três possibilidades ao total: nascerem ambos meninos, nascerem ambas meninas e nascer um menino e uma menina. Contudo, devemos perceber que se desejamos que seja um menino uma menina (sem que a ordem influencie) poder-se-ia ter a menina sendo a primogênita ou o menino sendo o primogênito. Dessa forma existem quatro formas: (menino, menino), (menino, menina), (menina, menino) e (menina, menina). Assim, se o casal deseja ter um menino e uma menina (sem que a ordem influencia), isso deverá ocorrer na metade das situações (2 de 4) e teríamos, portanto, uma probabilidade de 50

Capítulo 7

Definições de Probabilidade

7.1 Definições iniciais

Antes de definirmos o conceito de probabilidade, devemos estabelecer algumas definições anteriores da qual aquela vai derivar.

Definição 7.1 (Experimento Determinístico) É um experimento que, quando repetido inúmeras vezes mantendo as mesmas condições levará a resultados idênticos ou muito semelhantes. Podemos citar por exemplo um experimento de encontrar o tempo que uma bolinha gasta para tocar o solo quando abandonada a 1,0 metro do mesmo, obviamente em locais com a mesma gravidade e sem muita influência do vento.

Definição 7.2 (Experimento Aleatório) É um experimento que, quando repetido inúmeras vezes mantendo as mesmas condições poderá levar a resultados completamente diferentes. Podemos citar por exemplo um experimento de abandonar um dado de 6 faces a uma altura de 1,0 metro do solo e verificar a face voltada para cima quando este repousar sobre o solo.

Definição 7.3 (Espaço Amostral) O espaço amostral (Ω) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os seus possíveis resultados. Por exemplo, ao lançar um dado de 6 faces e verificar qual a face voltada para cima o espaço amostral seria o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Conforme escreve Samuel HAZZAN em Fundamentos da Matemática elementar, vol. 5, “Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para a experimento, são devidas a uma multiplicidade de causas que não podemos controlar, as quais denominamos acaso”.

Definição 7.4 (Evento) Um evento (A) é um subconjunto do espaço amostral que verifique certa propriedade. Por exemplo, o evento lançar um dado de 6 faces e que a face voltada para cima seja um número primo será o conjunto $A = \{2, 3, 5\}$ que é um subconjunto de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definição 7.5 (Evento Certo) Um evento é dito certo quando coincide com o espaço amostral. Por exemplo, o evento lançar um dado de 6 faces e que a face voltada para cima seja menor que 7.

Definição 7.6 (Evento Impossível) Um evento é dito impossível quando representa o conjunto vazio. Por exemplo, o evento lançar um dado de 6 faces e que a face voltada para cima seja um número maior que 6.

Após todas essas definições podemos estabelecer uma definição, mesmo que inicial, para a probabilidade de ocorrência de um evento A ao se realizar um experimento Ω.

Dois ou mais eventos podem ser combinados entre si e distinguimos basicamente três combinações:

Definição 7.7 (União de eventos) Considerando dois eventos A e B, o evento $A \cup B$, resultado da união entre os eventos A e B, ocorrerá quando A ou B (ou ambos) ocorrerem.

Definição 7.8 (Intersecção de eventos) Considerando dois eventos A e B, o evento $A \cap B$, resultado da intersecção entre os eventos A e B, ocorrerá quando A e B ocorrerem concomitantemente.

Definição 7.9 (Eventos Complementares) Dois eventos A e B são ditos complementares quando $A \cap B = \varnothing$ e $A \cup B = \Omega$, ou seja, dois eventos complementares não possuem elementos em comum e, quando unidos, totalizam as possibilidades do experimento. Por exemplo, no experimento lançar um dado de 6 faces e observar a face voltada para cima, que tem como espaço amostral o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, os eventos A em que a face voltada para cima é um número par e B em que a face voltada para cima é um número ímpar, respectivamente $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$, são eventos complementares. Normalmente simbolizamos o complementar de um evento A por $\overline{A}$ ou A^C.

A seguir temos um exemplo de três eventos A, B e C e algumas combinações entre eles:

Suponha o experimento de lançar um dado com 6 faces e observar o resultado da face voltada para cima, de espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Considere agora os eventos:

A: ocorrência de um número par. Ou seja, $A = \{2, 4, 6\}$.
B: ocorrência de um número maior que 3. Ou seja, $B = \{4, 5, 6\}$.
C: ocorrência de um número primo. Ou seja, $C = \{2, 3, 5\}$.

O evento $A \cup B$ representa a ocorrência de um número par ou maior que 3, assim $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$, que é simplesmente o resultado da união entre os conjuntos A e B.

O evento $A \cup C$ representa a ocorrência de um número par ou primo, assim $A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

O evento $B \cap C$ representa a ocorrência de um número maior que 3 e primo, assim $B \cap C = \{5\}$.

O evento $\overline{A}$, complementar do evento A, representa a não ocorrência de um número par que, nesse caso, representa a ocorrência de um número ímpar, assim $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ e note que $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Definição 7.10 (Probabilidade) A probabilidade de ocorrência de um evento A ao se realizar um experimento Ω mede o grau de certeza (ou incerteza) da ocorrência desse evento. Quanto maior for a probabilidade, maiores serão as chances daquele evento ocorrer. Assim, a probabilidade de ocorrência desse evento A, simbolizada por $P(A)$, é o quociente entre o número de elementos do conjunto A e o número de elementos do conjunto Ω. Ou seja:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

É importante salientar que tal definição para a probabilidade deve sempre considerar que o espaço amostral Ω deve ser finito. Para espaços amostrais infinitos devemos utilizar conceitos diferentes (que fogem ao alcance desse nosso estudo ao nível de Ensino Médio) ou então, em algumas situações, substituir Ω por outra grandeza que seja finita, conforme é ilustrado em alguns exemplos ao final do último capítulo.

7.2 Teoremas importantes

Conforme escreve HAZZAN, com base nessa simples definição de probabilidade, podemos listar alguns teoremas que nos serão importantes na continuidade de nosso estudo.

Teorema 7.1 "A probabilidade de um evento certo é 1".

Teorema 7.2 "A probabilidade de um evento impossível é 0".

Teorema 7.3 "Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$".

Teorema 7.4 "Se A é um evento, então $0 \leq P(A) \leq 1$ ".

Teorema 7.5 "Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$".

Esse teorema 7.5 possui uma forma simplificada quando os eventos A e B são ditos mutuamente exclusivos, o que ocorre quando $A \cap B = \varnothing$. Assim, caso A e B sejam mutuamente exclusivos teremos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, haja vista que $P(A \cap B) = 0$.

Teorema 7.6 "Se A é um evento, então $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$".

Os teoremas acima são de fácil demonstração que porém serão omitidas de modo a não tornar tão cansativa a leitura. Se for do interesse, pode-se encontra-las no próprio livro Fundamentos da Matemática Elemental, vol. 5, de Samuel HAZZAN [1].

A probabilidade ainda pode ser expressa em forma percentual, multiplicando-se essa fração por 100. Assim:

$$P(A)_{\%} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \cdot 100$$

Mais uma vez é importante salientar que essa última definição para a probabilidade deve ser usada somente quando o espaço amostral Ω for finito.

Os teoremas listados anteriormente sofreriam pequenas alterações se tomarmos as probabilidades em porcentagem. Dessa forma:

Teorema 7.1 "A probabilidade de um evento certo é 100%".
Teorema 7.2 "A probabilidade de um evento impossível é 0%".
Teorema 7.4 "Se A é um evento, então $0\% \leq P(A) \leq 100\%$ ".
Teorema 7.6 "Se A é um evento, então $P\left(\overline{A}\right) = 100\% - P(A)$".
Os teoremas 7.3 e 7.5 não sofreriam alterações.

7.3 Afinal, o que é probabilidade?

A probabilidade, em sua forma percentual, pode ser entendida como o percentual de vezes que espera-se que o evento ocorra ao se repetir o experimento uma grande quantidade de vezes.

Tomando novamente o experimento de se lançar um dado de 6 faces e observar a face voltada para cima, cujo espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e o evento A em que essa face voltada para cima é um número par, ou seja, $A = \{2, 4, 6\}$, temos, pelas definições apresentadas que a probabilidade de ocorrência desse evento A é $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, ou em forma percentual, $P(A) = \frac{3}{6} \cdot 100 = 50\%$. Dessa forma, espera-se que ao lançar esse dado uma grande quantidade de vezes, a quantidade de vezes em que a face voltada para cima seja um número par fique muito próxima (ou até igual) a 50% do número de lançamentos. Assim, ao se lançar esse dado 1000 vezes por exemplo, espera-se que a quantidade de vezes em que a face voltada para cima seja um número par seja próxima de 500, obviamente pequenas variações são possíveis, então essa quantidade de vezes pode ser 499, 498, 497, 501, 502, 503 ou até valores mais afastados de 500 porém dentro de uma margem de erro. Seria extremamente raro, contudo não impossível, que se lance esse dado 1000 vezes e em 800 dessas vezes a face voltada para cima fosse um número par.

Capítulo 8

As repetições de experimentos e erros probabilísticos

8.1 Um experimento motivado pelo tédio

Vamos pensar em uma certa situação: você está esperando a sua filha sair da escola e, devido a uma grande crise de tédio começa a lançar uma mesma moeda várias vezes e observar o resultado da sua face voltada para cima. Pelo que já vimos, o espaço amostral ao se lançar uma moeda e observar a face voltada para cima é $\Omega = \{cara, coroa\}$. Por economia de notação simbolizaremos cara por C e coroa por K, assim $\Omega = \{C, K\}$. Assim você lança a moeda a primeira vez e a face voltada para cima é C, você lança uma segunda vez e novamente aparece a face C. Intuitivamente em sua crise de tédio você pensa: no terceiro lançamento sairá a face K (já saíram duas vezes C), entretanto no terceiro lançamento, bem como no quarto e quinto são todas faces C.

Será coincidência, obra do acaso, ou a moeda em questão se trata de uma moeda viciada? Antes permita-me definir o que é um experimento não equiprovável.

Definição 8.1 (Experimento equiprovável) Um experimento E, de espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ com n elementos é dito equiprovável quando cada um dos eventos elementares $A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2\}, \ldots A_n = \{a_n\}$ de Ω tiverem a mesma probabilidade, ou seja $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_n) = \dfrac{1}{n}$.

Por exemplo, em um dado de 6 faces, se todas as faces tiverem a mesma probabilidade de ocorrência no experimento lançar o dado e observar a face voltada para cima, que no caso será igual a $\frac{1}{6}$, esse experimento será dito equiprovável e o dado será chamado de dado honesto, dado equilibrado ou dado não viciado.

Definição 8.2 (Experimento não equiprovável) Um experimento é dito não equiprovável quando nem todos os elementos de seu espaço amostral Ω possuem a mesma probabilidade de ocorrência. Ou seja, alguma das probabilidades $P(A_i)$, com $1 \leq i \leq n$, terá probabilidade diferente de $\frac{1}{n}$.

Por exemplo, suponha que em uma urna há 10 bolinhas coloridas, sendo 6 azuis (A), 3 vermelhas (V) e uma branca (B). O espaço amostral desse experimento é formado pelos eventos A: a bola retirada ser azul; V: a bola retirada ser vermelha e B: a bola retirada ser branca, entretanto a probabilidade de ocorrência do evento A não é $\frac{1}{3}$, pois existem 6 bolinhas azuis na urna de um total de 10 bolinhas, assim a probabilidade correta seria $\frac{6}{10}$, ou $\frac{3}{5}$.

Do mesmo modo podemos ter eventos não equiprováveis em determinados experimentos que isso normalmente não deveria ocorrer. Por exemplo, ao lançar uma moeda para cima a nossa expectativa é que a probabilidade de ocorrência de cada face seja $\frac{1}{2}$ ou seja, haja 50% de chances da face voltada para cima ser cara (C) e 50% de ser coroa (K). Quando uma moeda não obedece essa característica dizemos que a moeda é desonesta, desequilibrada ou viciada. Analogamente, dizemos que um dado de 6 faces está viciado quando a probabilidade de ocorrência de cada face não é $\frac{1}{6}$.

8.2 Vício ou acaso?

Voltemos ao nosso experimento das moedas. Se você lançou a moeda 5 vezes e em cada um dos lançamentos há duas possibilidades de resultado (C ou K) então, pelo Princípio Fundamental da Contagem existem $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ resultados possíveis e em apenas um desses resultados todas as faces serão cara (CCCCC), assim a probabilidade de que isso ocorra é $P = \frac{1}{32} = 3,125\%$. Ou seja, é de se esperar que, mesmo se tratando de uma moeda não viciada, a cada 100.000 pessoas que repitam esse experimento em um momento de tédio, 3.125 pessoas encontrem o mesmo resultado que você encontrou e outras 3.125 pessoas encontrem como resultado a ocorrência de todas as faces sendo coroa (K) e em nenhuma delas, absolutamente nenhuma delas, a ocorrência de faces em que apareçam cara seja igual à que aparecem coroa, já que $n = 5$, que é o número de vezes que o experimento foi repetido se trata de um número ímpar.

Mas imaginemos que você lance a moeda uma sexta vez e novamente nessa sexta vez a face seja cara, o número total de possibilidades agora será $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$ e em apenas uma dessas as 6 faces serão cara (CCCCCC), o que corresponde a uma probabilidade de $\frac{1}{64} = 1,5625\%$. Contudo era de se esperar, para uma moeda não viciada, que saíssem 3 caras e 3 coroas, porém esse acontecimento ocorre em apenas 20 das 64 possibilidades, ou seja, menos de $\frac{1}{3}$ do total de possibilidades e, sendo assim, em mais de $\frac{2}{3}$ das vezes em que se lança uma mesma moeda 6 vezes, a expectativa de que em metade dos lançamentos ocorra cara e na outra metade ocorra coroa é frustrada. A tabela 8.1 mostra as possibilidades no lançamento das 6 moedas:

Tabela 8.1: Possibilidades e probabilidades ao lançar 6 vezes uma moeda não viciada

Resultado	Possibilidades	Probabilidade
6 caras e nenhuma coroa	CCCCCC	$\frac{1}{64} = 1,5625\%$
5 caras e 1 coroa	CCCCCK, CCCCKC, CCCKCC, CCKCCC, CKCCCC, KCCCCC	$\frac{6}{64} = 9,375\%$
4 caras e 2 coroas	CCCCKK, CCCKCK, CCKCCK, CKCCCK, KCCCCK, CCCKKC, CCKCKC, CKCCKC, KCCCKC, CCKKCC, CKCKCC, KCCKCC, CKKCCC, KCKCCC, KKCCCC	$\frac{15}{64} = 23,4375\%$
3 caras e 3 coroas	CCCKKK, CCKCKK, CCKKCK, CCKKKC, CKCCKK, CKCKCK, CKCKKC, CKKCCK, CKKCKC, CKKKCC, KCCCKK, KCCKCK, KCCKKC, KCKCCK, KCKCKC, KCKKCC, KKCCCK, KKCCKC, KKCKCC, KKKCCC	$\frac{20}{64} = 31,25\%$
2 caras e 4 coroas	CCKKKK, CKCKKK, KCCKKK, CKKCKK, KCKCKK, KKCCKK, CKKKCK, KCKKCK, KKCKCK, KKKCCK, CKKKKC, KCKKKC, KKCKKC, KKKCKC, KKKKCC	$\frac{15}{64} = 23,4375\%$
1 cara e 5 coroas	CKKKKK, KCKKKK, KKCKKK, KKKCKK, KKKKCK, KKKKKC	$\frac{6}{64} = 9,375\%$
Nenhuma cara e 6 coroas	KKKKKK	$\frac{1}{64} = 1,5625\%$

Vamos agora imaginar um jogo de vôlei entre duas equipes A e B que, teoricamente, possuem as mesmas chances de ganhar, ou seja, em cada set, a probabilidade da equipe A ganhar é 50% e da equipe B ganhar também é 50% (não existe empate em um set e tão pouco em um jogo de vôlei). Mas admita ainda que essa equidade entre as equipes A e B não seja conhecida. Será que se uma das equipes ganhar o jogo por 3 sets a 0 (3 x 0) isso será um indício de que a equipe que ganhou é bem melhor do que a que perdeu? A probabilidade e a análise combinatória nos mostram que não.

Vejamos, um jogo de vôlei tem no máximo 5 sets porém ele pode terminar com 3 ou 4 sets se umas das equipes conseguir vencer 3 sets. Porém, mesmo o jogo terminando com 3 ou 4 sets, os demais sets que não foram jogados poderiam existir e, cada um deles, teria a mesma probabilidade de vitória das equipes A e B. Assim, a tabela 8.2 apresenta todas as possibilidades de resultado de uma partida de vôlei entre as equipes A e B. A letra A representa um set ganho pela equipe A e a letra B representa um set ganho pela equipe B (as letras marcadas em negrito representam sets que não foram disputados)

Tabela 8.2: Possibilidades e probabilidades de resultados para um jogo de vôlei

Resultado da partida (A x B)	Possibilidades	Probabilidade
3 x 0	AAA**AA**, AAA**AB**, AAA**BA**, AAA**BB**	$\frac{4}{32} = 12,5\%$
3 x 1	BAAA**A**, ABAA**A**, AABA**A**, BAAA**B**, ABAA**B**, AABA**B**	$\frac{6}{32} = 18,75\%$
3 x 2	AABBA, ABABA, ABBAA, BAABA, BABAA, BBAAA	$\frac{6}{32} = 18,75\%$
2 x 3	AABBB, ABABB, ABBAB, BAABB, BABAB, BBAAB	$\frac{6}{32} = 18,75\%$
1 x 3	ABBB**A**, BABB**A**, BBAB**A**, ABBB**B**, BABB**B**, BBAB**B**	$\frac{6}{32} = 18,75\%$
0 x 3	BBB**BB**, BBB**BA**, BBB**AB**, BBB**AA**	$\frac{4}{32} = 12,5\%$

Dessa forma, a partir de hoje, quando observar que uma partida de vôlei terminou 3 x 0 para uma das equipes não diga que a equipe que venceu é muito melhor por conta disso pois é esperado que 1 em cada 4 partidas em que as equipes estejam no mesmo nível termine em um placar de 3 x 0 para uma delas.

Esses erros probabilísticos ocorrem basicamente devido ao pequeno número de repetições a que o experimento foi avaliado, apenas 5 vezes. Se o mesmo experimento fosse repetido um número bem maior de vezes (100 vezes, por exemplo) e mesmo assim uma das equipes apresentasse uma larga vantagem em relação a outra (70 x 30, por exemplo), aí sim poderíamos admitir, com um grau bem maior de certeza, que uma delas é realmente superior a outra pois, seria extremamente improvável que isso ocorresse por obra do acaso.

Quando eu penso nisso sempre me vem à mente a diferença entre o Campeonato Brasileiro e a Copa do Brasil. Para os leigos no assunto eu explico: o Campeonato Brasileiro é uma competição realizada entre 20 clubes em que todos jogos contra todos os outros em jogos de ida e volta (um em seu campo e outro no campo adversário), assim, cada equipe faz um total de 38 jogos (19 em seu campo e 19 em campos adversários); ganha o campeonato aquele que totalizar mais pontos ao final (cada vitória vale 3 pontos, cada empate, 1 ponto e pelas derrotas não se recebem pontos); já na Copa do Brasil, normalmente é uma quantidade bem maior de times que participam (foram 80 em 2013; 86 em 2014 e serão novamente 86 em 2015) e a disputa é feita em regime de mata-mata, ou seja, dois times se enfrentam em dois jogos (um de ida e um de volta) e os placares dos jogos são somados, aquele que vencer continua na competição avançando à próxima fase e aquele que perde é eliminado. As perguntas são: um time que ganha a Copa do Brasil pode ser declarado como realmente o melhor time do Brasil? E um time que ganha o Campeonato Brasileiro? As respostas podem ser explicadas de maneira análoga ao nosso exemplo da partida de vôlei.

Se dois times A e B com níveis extremamente diferentes se enfrentam na Copa do Brasil e um deles tem, por exemplo, três vezes mais chances de ganhar que o outro (75% a 25%) então, teoricamente, de cada 4 vezes que eles se enfrentam, em uma delas o time extremamente inferior vence (como é um jogo de ida e um de volta essa quantidade pode ser levemente menor). Entretanto, o que devemos nos atentar é que, como o número de partidas é pequeno, então a chance do time inferior levar vantagem é relativamente grande, o mesmo não aconteceria tão facilmente se fossem 10 partidas. Dessa forma um time ao vencer o Campeonato Brasileiro (38 partidas) torna-se um candidato muito mais forte a realmente ser o melhor time do campeonato pois seria quase improvável um time inferior ser campeão com base unicamente na "sorte", fato que é recorrente ao se falar na Copa do Brasil em que vemos frequentemente times tecnicamente inferiores superando grandes times do nosso país.

Mas afinal, sabemos que um jogo de vôlei entre duas equipes A e B que tenha um placar 3 x 0 em sets para uma das equipes não é garantia de que a equipe vencedora seja amplamente melhor que a perdedora pois, mesmo com as equipes com a mesma qualidade, há 25% de chances de uma das equipes vencer por 3 x 0. Porém, quantas vezes essas equipes devem jogar entre si para termos um nível de certeza aceitável (com uma pequena margem de erro que sempre existirá) de que uma delas é melhor que a outra, ou que realmente o nível das equipes é semelhante?

Por exemplo, vamos supor que uma determinada máquina que fabrica peças possui uma probabilidade p, desconhecida, de fabricar peças defeituosas. Para descobrir qual seria essa probabilidade p, uma possível ideia seria analisar n peças fabricadas por essa máquina, escolhidas aleatoriamente e verificar quantas delas são defeituosas, suponha que o número de peças defeituosas tenha sido m. Assim, a probabilidade dessa máquina fabricar uma peça defeituosa seria $\frac{m}{n}$. Porém, podemos garantir que essa probabilidade está correta? Se escolhermos um número pequeno de peças, essa probabilidade pode ser uma mera obra do acaso. Qual seria o número mínimo de peças que devem ser analisadas para que possamos estar, digamos, 99% certos de que a essa probabilidade encontrada $\left(\frac{m}{n}\right)$ difere da probabilidade real p (desconhecida) em menos de, digamos 5%?

Esse é exatamente o momento em que o estudo da Probabilidade e a Estatística se encontram. A título de curiosidade, a quantidade de peças que devem ser analisadas para ter as certezas que foram descritas no exemplo é 10.000 e terá o seu valor dado pela Lei dos Grandes Números.

A Lei dos Grandes Números, abusando um pouco da informalidade, é um conceito importante da Probabilidade que declara que se um experimento Ω é repetido inúmeras vezes, a frequência relativa com que o evento $A \subset \Omega$ ocorre converge para a probabilidade de ocorrência $P(A)$ à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande.

Capítulo 9

Probabilidade condicional

9.1 Definição

Definição 9.1 (Probabilidade condicional) Conforme escreve HAZZAN: Seja Ω um espaço amostral e consideremos dois eventos, A e B. Com o símbolo $P(A|B)$ indicamos a probabilidade do evento A, dado que o evento B ocorreu, isto é, $P(A|B)$ é a probabilidade condicional do evento A, uma vez que B tenha ocorrido. Quando calculamos $P(A|B)$, tudo se passa como se B fosse o novo espaço amostral "reduzido" dentro do qual queremos calcular a probabilidade de A.

Apesar da definição ser um pouco difícil para aqueles que não tem muita facilidade com Matemática, a exemplificação desse conceito torna seu entendimento amplamente facilitado. Vamos supor que em um grupo de 100 pessoas, 60 são homens, 35 usam óculos e 30 mulheres não usam óculos. Com base nessas informações podemos montar a seguinte tabela:

	Usam óculos	Não usam óculos	Total
Homens	25	35	60
Mulheres	10	30	40
Total	35	65	100

Considere agora os seguintes eventos dentro do espaço amostral do experimento escolher ao acaso uma dessas pessoas:

A: a pessoa escolhida é um homem;

B: a pessoa escolhida é uma mulher;

C: a pessoa escolhida usa óculos;

D: a pessoa escolhida não usa óculos.

Podemos, a partir desses quatro eventos, criar outros eventos condicionais, como por exemplo:

$A|C$: a pessoa escolhida é um homem sabendo que usa óculos.

$C|B$: a pessoa escolhida usa óculos sabendo que é mulher.

Dessa forma, cada um dos espaços amostrais desses três eventos condicionais é reduzido apenas ao espaço de Ω em que a condição ocorre. Assim, o espaço amostral do evento $A|C$ é formado apenas pelos elementos de C e o espaço amostral de $C|B$ é formado apenas pelos elementos de B. A probabilidade desses eventos condicionais, por fim, é calculada como a razão entre os elementos que estão nos dois conjuntos citados e o conjunto que possui os elementos da condição. Logo, $P(A|C) = \dfrac{n(A \cap C)}{n(C)} = \dfrac{25}{35} = \dfrac{5}{7}$ e $P(C|B) = \dfrac{n(C \cap B)}{n(B)} = \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{4}$.

Sendo os conjuntos A e B, bem como o espaço amostra Ω, finitos, podemos portanto definir de maneira formal, a probabilidade condicional $P(A|B)$, como $P(A|B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$, ou, dividindo tanto o numerador como o denominador por $n(\Omega)$, teremos $P(A|B) = \dfrac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}}$ e daí segue:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

9.2 Um erro muito comum

Uma vez entendido o conceito de probabilidade condicional passamos para um outro problema que normalmente confunde a mente até de pessoas que costumam trabalhar e tem certa facilidade em Matemática. O problema de quando saber que se deve usar a probabilidade condicional e iremos ilustrar isso através de duas situações.

Suponha que uma mulher faça uma mamografia para saber se apresenta algum problema nas mamas. Suponha ainda que essa mulher não apresente qualquer sintoma (assintomática) e possua mais de 40 anos. Para a surpresa dessa mulher, ela foi diagnosticada como tendo câncer de mama. O quão assustada essa mulher tem razão de estar, ou seja, qual a probabilidade de que ela realmente possua tal câncer haja vista que exames sempre apresentam uma margem de erro. Vamos para alguns dados que são relevantes: primeiramente esse exame apresenta um erro de 7% em seus resultados, ou seja, para cada 1000 exames, 70 deles mostram câncer quando ele não existe; em segundo lugar, a incidência desse tipo de câncer entre mulheres assintomáticas com mais de 40 anos é apenas de $0,8\%$.

Se perguntarmos para uma pessoa leiga em probabilidade qual a chances que essa mulher tem de realmente estar com o câncer, provavelmente a resposta será 93%, ou seja, retira-se os 7% de erros do exame e a segunda informação sobre a incidência real do câncer seria totalmente descartada pois não traria qualquer informação sobre a mulher diagnosticada especificamente. Contudo o raciocínio não deve ser esse. Devemos pensar da seguinte maneira: suponha um grupo de 1000 mulheres nessa mesma situação (assintomáticas e com mais de 40 anos), desse grupo somente 8 mulheres ($0,8\%$) realmente apresentam a doença, entretanto outras 70 mulheres (7%) foram diagnosticadas de maneira errada com falsos positivos. Portanto, das 78 mulheres que foram diagnosticadas de maneira positiva à doença citada, apenas 8 realmente possuem a doença, o que nos leva a uma probabilidade de $\frac{8}{78}$ ou pouco mais de 10%. O que nos levou a pensar de maneira equivocada foi o fato da probabilidade em questão ser condicional, haja vista que já era sabido que o exame da mulher teve resultado positivo.

Exemplos parecidos podem ser vistos em exames de paternidade e exames anti-doping. Na verdade, qualquer exame apresenta um percentual de erro, seja devido a fatores técnicos que beiram a coincidência, seja por falhas humanas na manipulação e procedimento do exame, como contaminações, por exemplo. Nossa segunda situação foi retirada de uma antiga coluna presente em uma revista americana chamada "Ask Marilyn" em que várias perguntas sobre os mais diversos temas eram enviados para Marilyn vos Savant e esta respondia em sua coluna. Certa vez foi enviado um problema que também havia sido um quadro de um programa de auditórios. Nesse quadro, existiam três portas e atrás de uma dessas três portas havia um carro de luxo (uma Ferrari por exemplo), atrás das demais portas haviam prêmios insignificantes como uma galinha ou uma garrafa de vinho barata. O participante deveria inicialmente escolher uma das três portas, em seguida o apresentador do quadro (que sabe atrás de qual das portas está o carro), abre uma das portas não escolhidas pelo participante e que também não esteja com a Ferrari por trás. A seguir o participante deve escolher por permanecer com a porta escolhida inicialmente ou mudar para a outra porta que continua fechada na clássica pergunta "você quer continuar com a sua porta ou quer trocar para a outra". Na minha opinião como professor de Matemática que ensina a pouco mais de 12 anos eu afirmo que todos (ou quase todos) os alunos afirmam, sem pensar muito, que pouco importa se o participante mudará ou não sua porta escolhida, ao final, a chance dele receber a Ferrari será 50%; eu afirmei quase todos pois sempre há aquele aluno que não deseja se manifesta em sala de aula por vergonha ou ainda aquele que já havia ouvido falar desse problema sem dar muita importância mas que sabia que era melhor trocar de porta.

Mas afinal, quem está certo? É melhor permanecer na porta escolhida, trocar de porta ou independentemente da escolha feita a probabilidade é de 50%? A pergunta aparentemente simples nos dá um resultado inesperado: o melhor a ser feito é sempre trocar de porta e eu me explico.

Imagine uma situação em que as três portas sejam 1, 2 e 3 e que a Ferrari esteja atrás da porta 1. Caso o participante escolha a porta 1, o apresentador abrirá uma das demais portas (2 ou 3) e, obviamente, se o participante trocar de porta nesse caso perderá o prêmio mais valioso. Entretanto, se o participante escolher inicialmente a porta 2 ou a porta 3, o apresentador abrirá uma das portas que não possuem o carro e, para que o participante conquiste o prêmio é necessário que ele mude de porta. Dessa forma, o problema acaba sendo mais um exemplo de probabilidade condicional onde a chance do participante conquistar o prêmio ao trocar de porta é $\frac{2}{3}$ e de conquistar sem trocar de porta é de apenas $\frac{1}{3}$ (somente se ele houvesse escolhido inicialmente a porta correta). É claro que isso é uma explicação matemática para o caso, aconselhando o participante na tomada da decisão. Nada impede de eu sofrer uma tentativa de agressão ou homicídio se Sílvio Santos resolver fazer esse quadro em seu programa dominical e um participante perder uma Ferrari de meio milhão de reais porque resolveu trocar de porta pois havia lido anteriormente essa minha dissertação.

9.3 A probabilidade condicional e o Teorema da Multiplicação

Uma das grandes aplicações da probabilidade condicional é o *Teorema da Multiplicação.*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Conforme afirma HAZZAN, a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos A e B é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro.

Obviamente se o evento A não interferir na ocorrência do evento B então a probabilidade de ocorrência de $A \cap B$ se torna $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, como é por exemplo o caso do lançamento simultâneo de um dado e uma moeda, ambos não viciados e a ocorrência da face voltada para cima ser o número 6 no dado e cara na moeda. Entretanto se tivermos 10 bolas com o mesmo tamanho em uma urna, sendo 6 vermelhas e 4 pretas e retirarmos aleatoriamente duas bolas sem reposição dessa urna e desejamos que ambas sejam pretas, então a probabilidade disso ocorrer será $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}$; o $\frac{4}{10}$ para que a primeira bola retirada seja preta (4 pretas em um total de 10 bolas) e o $\frac{3}{9}$ para que a segunda bola retirada seja preta uma vez que a primeira também o foi (3 bolas pretas restantes de um total de 9 bolas restantes).

Porém esse exemplo da retirada sem reposição de duas bolas pretas da urna é relativamente simples. Normalmente os estudantes, nesse tópico acerca probabilidade, costumam esquecer de alguns detalhes importantes como lembrar que a ordem de retirada (ou escolha) pode ser ou não importante, bem como que por diversas vezes há mais de uma forma de se proceder o evento que é pedido no problema. Para que isso se torne claro, irei mostrar um exemplo envolvendo tudo isso que agora foi falado.

Considere novamente uma urna com 10 bolas idênticas a não ser pela cor, porém agora consideremos que são 4 bolas pretas, 3 bolas brancas, 2 bolas amarelas e 1 bola verde. Desejamos encontrar a probabilidade de cada um dos eventos listados a seguir:

a) retirar da urna, sem reposição, duas bolas e ambas serem pretas.

b) retirar da urna, com reposição, duas bolas e ambas serem amarelas.

c) retirar da urna, com reposição, duas bolas e ambas serem verdes.

d) retirar da urna, sem reposição, duas bolas e ser uma preta e uma branca.

e) retirar da urna, sem reposição, duas bolas e a primeira ser uma preta e a segunda, branca.

f) retirar da urna, sem reposição, três bolas e serem duas pretas e uma branca.

g) retirar da urna, sem reposição, quatro bolas e serem duas pretas e duas brancas.

h) retirar da urna, com reposição, seis bolas e serem duas pretas, duas brancas e duas amarelas.

i) retirar da urna, sem reposição, três bolas e elas serem todas de cores diferentes.

j) retirar da urna, sem reposição, quatro bolas e elas serem todas de cores diferentes.

Vamos encontrar item a item a probabilidade dos eventos listados que servirá como um manual para qualquer estudante do assunto quando houver alguma dúvida em como proceder na resolução de problemas que envolvam retiradas (escolhas) sucessivas.

a) esse item assemelha-se bastante ao exemplo dado anteriormente e terá como probabilidade $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$; a fração $\frac{4}{10}$ corresponde à retirada da primeira bola: 4 pretas em 10 na urna e a fração $\frac{3}{9}$ corresponde à retirada da segunda bola: 3 pretas em 9 na urna.

b) esse item traz a retirada “com reposição” que faz com que cada retirada (escolha) seguinte não interfira na retirada anterior pois a bola retirada é reposta (colocada de volta) na urna. Assim, para cada bola retirada teremos 10 bolas ao total, sendo 4 pretas, 3 brancas, 2 amarelas e 1 verde. Dessa forma, a probabilidade desse evento será $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{25}$; cada um dos $\frac{2}{10}$ representam a retirada de cada uma das duas bolas (2 amarelas em 10 na urna). Caso a retirada fosse sem reposição a probabilidade seria $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$.

c) esse item, bem semelhante ao anterior, terá como probabilidade $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ e devemos atentar ao fato de que, caso a retirada fosse sem reposição, o evento seria impossível pois só há na urna uma bola verde e a probabilidade seria $\frac{1}{10} \cdot \frac{0}{9} = 0$.

d) esse item pede que sejam retiradas sem reposição duas bolas e sejam uma preta e uma branca, porém não deixa expresso que deve ser nessa ordem. Portanto, como não podemos supor isso, devemos calcular as probabilidades de todas as formas possíveis e somá-las. Temos apenas duas formas possíveis: a primeira ser preta e a segunda, branca ou o contrário, a primeira ser branca e a segunda, preta. Observe que as bolas retiradas são as mesmas (uma branca e uma preta) e a única mudança é a ordem de retirada. Assim, a probabilidade desse evento será $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{9}$. Observe ainda que cada uma das parcelas dessa soma são iguais e isso deriva do fato, novamente, das bolas retiradas serem a mesma e a única mudança ser a ordem. Portanto, podemos escrever essa probabilidade como $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot 2$, sendo o 2 que é multiplicado ao final representando a quantidade de formas que podemos modificar a ordem das bolas retiradas, desde que sejam as mesmas bolas. Fazendo os cálculos, temos que a probabilidade de ocorrência desse evento é $\frac{4}{15}$.

e) esse item é muito semelhante ao anterior apenas com a ressalva de que é claramente explícito no item que a primeira bola deve ser preta e a segunda, branca. Dessa forma, a multiplicação da probabilidade por 2 (do item anterior) não se faz necessária e teremos como resultado apenas $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$.

Ou seja, para que tudo se torne ainda mais claro: se as bolas retiradas forem as mesmas porém puderem ter a sua ordem alterada, calculamos a probabilidade em uma ordem qualquer (de nossa escolha) e, ao final, multiplicamos pela quantidade de formas diferentes que essa ordem possui de ser alterada. Caso a ordem seja claramente explícita no evento, não há necessidade dessa multiplicação. Isso ocorre, por exemplo, em uma situação em que se deseja encontrar a probabilidade de um casal ter apenas dois filhos e ser um menino e uma menina, que terá como resultado $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} = 50\%$, porém se quisermos que o menino seja o primogênito a ordem automaticamente foi fixada e a probabilidade será somente $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Para que a brincadeira se torne ainda mais interessante, vamos imaginar, como escreve MLODINOW, em *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas* [2], o seguinte problema: um casal teve dois filhos e é sabido que um deles é menino, qual seria a probabilidade que ambos sejam meninos?

A resposta que nos salta à língua é, obviamente $\frac{1}{2} = 50\%$ pois o nosso pensamento é: se um dos filhos é menino, o outro poderá ser menino ou menina. Como queremos que ambos sejam meninos então queremos que esse segundo filho também seja menino e a probabilidade será, portanto, 50%. Correto?

Errado! Infelizmente o nosso cérebro, por muitas vezes, deixa de pensar probabilisticamente e acaba por fazer escapar os conceitos básicos. Esse problema se trata de uma probabilidade condicional pois é sabido que um dos filhos é menino. Portanto há apenas três possibilidades: (menino, menino), (menino, menina) e (menina, menino); ou seja, a possibilidade (menina, menina) é descartada pela condição.

Dessa forma, há apenas uma possibilidade (em três) para satisfazer o evento pedido e a probabilidade será $\frac{1}{3} \cong 33,3\%$.

Feitas essas pequenas observações, vamos retomar nossos cálculos de probabilidades do item anteriormente listados.

f) nesse item, desejamos retirar sem reposição, três bolas da urna sendo duas pretas e uma branca e percebamos novamente que a ordem não é citada. Assim, seguindo o que já foi dito anteriormente, vamos calcular a probabilidade em uma ordem qualquer (as duas primeiras pretas e a terceira branca, por exemplo) e em seguida multiplicar o resultado por 3, que são as formas de modificar essa ordem: (preta, preta, branca), (preta, branca, preta) e (branca, preta, preta). Essas três possibilidades podem ser entendidas como o número de anagramas da “palavra” PPB que seria $\dfrac{3!}{2!} = 3$ (três letras ao total e duas letras “P” repetidas). Assim, nossa probabilidade será $\dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{3}{8} \cdot 3 = \dfrac{3}{20}$.

Existe uma outra forma para se fazer esse cálculo através do número binomial que também costuma ser chamado de *lei binomial das probabilidades* e os eventos em que isso ocorre são chamados de ensaios de Bernoulli em homenagem a Jacques Bernoulli, matemático do século XVII, que procedeu os primeiros estudos acerca disso. Porém, apesar de ser amplamente utilizado por professores e estudantes, em minha opinião, apresenta uma grande restrição que seria o fato de que, para ser utilizado, necessita que existam apenas duas possibilidades de escolha que normalmente são chamados de *sucesso* e *fracasso*. Caso haja mais possibilidades, como o que ocorre com o item “h”, o método não pode ser aplicado. O mesmo não ocorre se pensarmos na quantidade de formas de modificar a ordem como sendo o número de anagramas de uma certa palavra que represente as retiradas. Assim, iremos proceder nossos cálculos sempre utilizando o número de anagramas ao invés do número binomial.

g) nesse item devem ser retiradas sem reposição quatro bolas e serem duas pretas e duas brancas. Novamente iremos calcular as probabilidades em uma ordem qualquer (as duas primeiras pretas e as duas últimas brancas, por exemplo) e multiplicar o resultado pelos anagramas da “palavra” PPBB, que é igual a $\dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$ e representa as formas de modificar a ordem de retirada das bolas. Assim, a probabilidade será $\dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{2}{7} \cdot 6 = \dfrac{3}{35}$.

h) esse item, onde devem ser retiradas com reposição seis bolas sendo duas pretas, duas brancas e duas amarelas, mostra a vantagem do cálculo da quantidade de formas de modificar a ordem das bolas retiradas pelos anagramas, em detrimento do método binomial pois, conforme já foi colocado anteriormente, o método binomial pode ser aplicado tão somente quando houver apenas duas possibilidades de escolha, o que não ocorre nesse item. Dessa forma, escolhendo uma ordem qualquer (as duas primeiras pretas, as duas seguintes brancas e as duas últimas amarelas, por exemplo) e multiplicando pela quantidade de anagramas da "palavra" PPBBAA que representa exatamente essas formas de mudar a ordem, teremos que a probabilidade será $\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{162}{3.125}$.

i) no penúltimo item, devem ser retiradas três bolas e que sejam todas de cores diferentes. Isso nos leva a pensar que existem várias formas disso ocorrer. As bolas podem ser, sem pensar por hora na ordem de retirada, de quatro formas diferentes: (preta, branca, amarela), (preta, branca, verde), (preta, amarela, verde) ou (branca, amarela, verde). Entretanto, ao contrário da maioria dos itens anteriores, essas formas diferentes não representam modificações da ordem de escolha das bolas e sim bolas diferentes. Dessa forma, não podemos pensar como nos outros itens em que escolhíamos uma das formas e multiplicávamos pela quantidade de formas que existia. Esse raciocínio somente se aplicaria se, repetindo mais uma vez, as bolas fossem as mesmas e apenas a ordem se alterasse. E como podemos resolver então esse problema? A resposta é: calculando, uma a uma, a probabilidade de ocorrência de cada forma, o que, infelizmente, nos levará tempo. Assim, teremos as probabilidades:

   $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot 3!$ para que as bolas sejam uma preta, uma branca e uma amarela, independentemente da ordem de escolha e isso explica o porquê do 3!, que representa a quantidade de anagramas da "palavra" PBA.

   $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3!$ para que as bolas sejam uma preta, uma branca e uma verde.

   $\frac{4}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3!$ para que as bolas sejam uma preta, uma amarela e uma verde.

   $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot 3!$ para que as bolas sejam uma branca, uma amarela e uma verde.

   Tais probabilidades devem ser somadas pois são formas diferentes do evento em questão ocorrer e a probabilidade final será $\frac{5}{12}$.

j) nesse último item desejamos retirar sem reposição quatro bolas e que as quatro sejam de cores diferentes. Esse item é bem menos trabalhoso que o anterior haja vista que, como existem apenas quatro cores de bolas (preta, branca, amarela e verde), devemos portanto ter uma bola de cada cor, ficando apenas a cargo da mudança na ordem dessas mesmas bolas que as formas diferentes ocorram. Assim, a probabilidade será calculada escolhendo uma ordem qualquer (a primeira ser preta, a segunda, branca, a terceira, amarela e a quarta, verde, por exemplo) e multiplicando a seguir por 4!, que é a quantidade de anagramas da "palavra" PBAV, representantes das mudanças na ordem de escolha das bolas. Assim essa probabilidade será $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 4! = \frac{4}{35}$.

9.4 O Teorema de Bayes

Dessa teoria de probabilidade condicional, bem como do teorema da multiplicação, surge outra grande aplicação que foi chamada de *Teorema de Bayes* ou *Teorema da probabilidade total*.

Suponha que o espaço amostral Ω seja particionado em n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tais que $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ e que $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq j$, ou seja, um elemento de Ω deve estar em um e apenas um dos conjuntos A_i. Assim, conforme afirma HAZZAN, os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são dois a dois mutualmente exclusivos e exaustivos, conforme ilustra a figura 9.1 a seguir para $n = 9$.

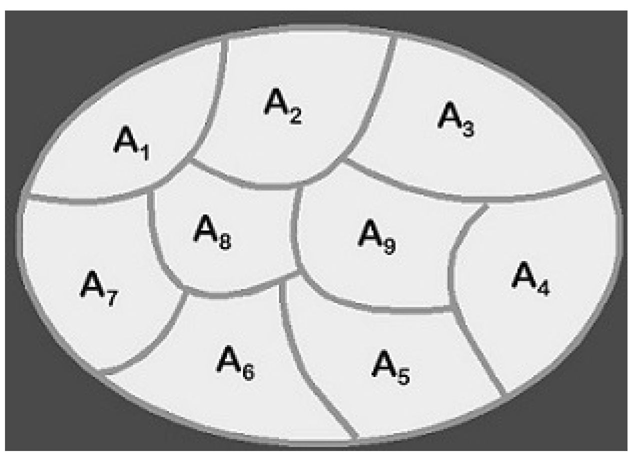

Figura 9.1: http://www2.lv.psu.edu/ojj/courses/discrete-math/, acesso 12/01/2015.

Considere agora um conjunto $B \subset \Omega$, conforme o esquema a seguir.

Perceba que o conjunto B pode ser dividido em várias regiões que são interseções com cada partição A_i. Assim $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$, sendo que os conjuntos $(B \cap A_i)$ e $(B \cap A_j)$ são disjuntos (não há interseção), se $i \neq j$ e alguns dos conjuntos $(B \cap A_i)$ podem eventualmente ser vazios. No diagrama acima os conjuntos

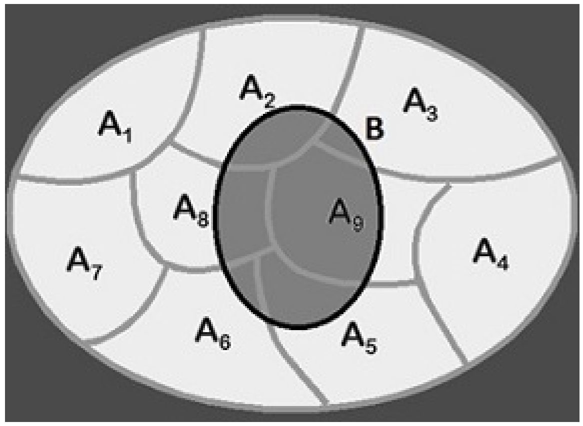

Figura 9.2: http://www2.lv.psu.edu/ojj/courses/discrete-math/, acesso 12/01/2015.

$(B \cap A_1)$, $(B \cap A_4)$ e $(B \cap A_7)$ são vazios. Dessa forma, a probabilidade do evento B ocorrer pode ser dada por $P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n))$ e como $(B \cap A_i)$ e $(B \cap A_j)$ são disjuntos, se $i \neq j$, temos que $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$. Contudo, como cada termo $P(B \cap A_i)$ pode ser expresso na forma $P(B|A_i) \cdot (A_i)$, teremos a expressão:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot (A_1) + P(B|A_2) \cdot (A_2) + \cdots + P(B|A_n) \cdot (A_n)$$

Conforme escreve MEYER, este resultado representa uma relação extremamente útil, porque frequentemente, quando $P(B)$ é pedida, pode ser difícil calculá-la diretamente. No entanto, com a informação adicional de que A_i tenha ocorrido, seremos capazes de calcular $P(B|A_i)$ e, em seguida, empregar a fórmula citada.

Vamos exemplificar essa situação através de um exemplo:

Suponha um certo piloto de Fórmula 1 que está na melhor equipe de carros do ano, porém, ele é um pouco inferior ao seu companheiro de equipe em situações normais de pilotagem. Digamos que, com pista seca, ele possua somente 30% de chances de vitória. Entretanto, quando chove durante a corrida, esse piloto é amplamente superior ao seu companheiro de equipe e tem 80% de chances de alcançar o lugar mais alto do pódio. Suponha-se ainda que a meteorologia prevê para o dia da corrida, uma probabilidade de 55% de que chova. Dessa forma, qual seria a probabilidade desse piloto vencer essa corrida?

Observe que o evento B: o piloto em questão vencer a corrida, tem sua probabilidade dependente do fato se irá ou não chover, então vamos supor os eventos A_1: chove durante a corrida e A_2: não chove durante a corrida e observe que A_2 é o complementar de A_1. Podemos ainda utilizar as notações $B|A_1$ e $B|A_2$ para o piloto vencer na condição de chover durante a corrida e do piloto vencer sem chover durante a corrida, respectivamente.

Note que $P(A_1) = 0,55$, $P(A_2) = 1 - P(A_1) = 0,45$, $P(B|A_1) = 0,8$ e $P(B|A_2) = 0,3$. Sendo assim, temos que $P(B) = P(B|A_1) \cdot (A_1) + P(B|A_2) \cdot (A_2)$ e, dessa forma, $P(B) = 0,8 \cdot 0,55 + 0,3 \cdot 0,45 = 0,575 = 57,5\%$.

Agora vamos pensar nessa mesma situação porém é sabido que o piloto em questão venceu determinada corrida porém não se sabe se choveu ou não durante a prova. Qual palpite você daria se fosse arriscar se choveu ou não? Obviamente uma pessoa sensata arriscaria que choveu, haja vista que a probabilidade desse piloto vencer com chuva é bem maior que a probabilidade dele vencer sem haver chovido. Mas qual seria a probabilidade de ter chovido, sabendo que esse piloto venceu a corrida?

Nesse caso a probabilidade se altera um pouco e devemos pensar agora que a condição é que o piloto venceu a corrida que já sabemos que tem uma probabilidade de 0,575 de ocorrer. O que se deseja calcular a probabilidade é de ter chovido na condição dele ter vencido, ou seja $P = (A_1|B)$ e, seguindo os conceitos de probabilidade condicional mostrados anteriormente teríamos uma expressão $P(A_1|B) = \dfrac{P(B \cap A_1)}{P(B)}$ ou, escrevendo de forma mais formal:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) + P(B|A_2)}$$

Assim, substituindo os valores na expressão, teremos $P(A_1|B) = \dfrac{0,8 \cdot 0,55}{0,44 + 0,135} \cong 0,765 = 76,5\%$. Portanto, ao responder, obviamente de forma correta e intuitiva, que se espera ter chovido durante a prova que esse piloto venceu tem-se uma probabilidade aproximada de $76,5\%$ de acertar a resposta.

De modo análogo, se formos apostar que não choveu durante a prova em que é sabido que esse piloto venceu, teremos $P(A_2|B) = \dfrac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B|A_2) + P(B|A_2)}$ e assim, substituindo novamente os valores teremos, $P\left(A_2|B\right)=\dfrac{0,3\cdot 0,45}{0,44+0,135}\cong 0,235=23,5\%$, o que era naturalmente de se esperar pois os eventos $A_1|B$ e $A_2|B$ são complementares.

Essa ideia pode ser generalizada para uma situação em que haja mais condições $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ e, a partir da equação anteior, podemos generalizá-la para:

$$P\left(A_i|B\right)=\frac{P\left(B|A_i\right)\cdot P\left(A_i\right)}{P\left(B|A_1\right)\cdot P\left(A_1\right)+P\left(B|A_2\right)\cdot P\left(A_2\right)+\cdots+P\left(B|A_n\right)\cdot P\left(A_n\right)}$$

ou, utilizando a notação de somatório:

$$P\left(A_i|B\right)=\frac{P\left(B|A_i\right)\cdot P\left(A_i\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P\left(B|A_j\right)\cdot P\left(A_j\right)}$$

Esse resultado é conhecido como Teorema de Bayes e é também denominado fórmula da probabilidade das “causas” (ou dos “antecedentes”).

Conforme escreve MEYER, desde que os A_i constituam uma partição do espaço amostral um, e somente um, dos eventos A_i ocorrerá. (Isto é, um dos eventos A_i deverá ocorrer e somente um poderá ocorrer.) Portanto, a expressão acima nos dá a probabilidade de um particular A_i (isto é, uma “causa”), dado que o evento B tenha ocorrido. A fim de aplicar esse teorema, deveremos conhecer os valores das $P\left(A_i\right)$. Muito frequentemente, esses valores são desconhecidos, e isso limita a aplicabilidade do teorema. Tem havido considerável controvérsia sobre o Teorema de Bayes; ele é perfeitamente correto matematicamente; somente a escolha imprópria dos $P\left(A_i\right)$ pode tornar o resultado discutível.

Para finalizar esse capítulo, vamos resolver o problema da moeda de Bertrand que tem sua solução encontrada a partir do Teorema de Bayes. O problema consiste em uma situação em que existem três caixas idênticas. A primeira contém duas moedas de ouro, a segunda contém uma moeda de ouro e uma de prata e a terceira, duas moedas de prata. Uma moeda foi escolhida sem que se saiba de qual caixa ela veio e verificou-se que é uma moeda de ouro. Qual a probabilidade dessa moeda ter vindo da primeira caixa?

Para resolver o problema vamos considerar os seguintes eventos: A_1: a moeda foi tirada da primeira caixa; A_2: a moeda foi tirada da segunda caixa; A_3: a moeda foi tirada da terceira caixa; B: a moeda é de ouro. Observe que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$ e ainda que $P(B|A_1) = 1$, $P(B|A_2) = \frac{1}{2}$ e $P(B|A_3) = 0$.

Observe ainda que, pelo que foi visto anteriormente, temos que:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot (A_1) + P(B|A_2) \cdot (A_2) + P(B|A_3) \cdot (A_3) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Por fim, pelo Teorema de Bayes, a probabilidade pedida é $P(A_1|B) = \dfrac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$ e, substituindo os valores, teremos que:

$$P = (A_1|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Capítulo 10

Pensando probabilisticamente

10.1 Dados e apostas

É inevitável, quando se tem um conhecimento mesmo que mínimo sobre probabilidade, passamos a ver o mundo de uma forma um pouco diferente. Para essas pessoas, diversas situações são interpretadas como uma probabilidade. Uma aposta nos dados, um par ou ímpar, um cara ou coroa, uma aposta na megassena ou até simples eventos do nosso cotidiano como sair para trabalhar dirigindo na chuva ou viajar de avião passam a ser encarados como disputas de probabilidades em que as possibilidades diferentes de resultado se digladiam para decidir quem será a escolhida da vez. Nesse capítulo iremos refletir um pouco sobre esse assunto que está bem próximo de nós e por muitas vezes não temos noção da dimensão dessa proximidade.

Vamos começar por um problema que foi desvendado por um físico muito famoso que tenho certeza que qualquer estudante de Ensino Médio conhece, trata-se de Galileu Galilei. A pedido do seu patrono, o grão-duque de Toscana, Galileu foi praticamente forçado a escrever um artigo intitulado "ideias sobre os jogos de dados". Como escreve MLODINOW "O problema que perturbava o nobre era o seguinte: quando jogamos três dados, por que o número 10 aparece com mais frequência que o número 9? A frequência de aparições do número 10 é apenas cerca de 8% maior, e nem o número 10 nem o 9 aparecem com muita frequência; assim, o fato de que o grão-duque tenha jogado o bastante para notar essa pequena diferença mostra que sua real necessidade não eram os conhecimentos de Galileu, e sim uma terapia de grupo para se livrar do vício no jogo. Sabe-se lá por que motivo, Galileu não gostou de trabalhar nesse problema e reclamou do pedido. Porém, como qualquer conselheiro que quer manter o emprego, ele apenas resmungou em voz baixa e fez o trabalho".

Inicialmente observemos que ao se jogar três dados existem 216 possibilidades diferentes de resultado $(6 \cdot 6 \cdot 6)$. Dessas 216 possibilidades, existem algumas delas em que a soma dos pontos é 9 e outras em que a soma dos pontos é 10. A soma igual a 9 é obtida em $6+2+1$, $5+3+1$, $5+2+2$, $4+4+1$, $4+3+2$ e $3+3+3$. Já a soma igual a 10 é obtida em $6+3+1$, $6+2+2$, $5+4+1$, $5+3+2$, $4+4+2$ e $4+3+3$. Ou seja, sem pensar na ordem em que os números aparecem, obedecendo a máxima da Matemática que diz que a ordem das parcelas não altera a soma, teremos seis possibilidades para a soma ser igual a 9 e também seis possibilidades para a soma ser igual a 10. Entretanto, mesmo que nos parece estranho, a ordem em que esses números são somados torna-se exatamente a explicação do porquê a soma igual a 10 aparece com mais frequência. A seguir temos cada uma das somas e suas possibilidades diferentes de serem apresentadas com as ordens alteradas.

A soma igual a 9 aparece em $6+2+1$, $6+1+2$, $2+6+1$, $2+1+6$, $1+6+2$, $1+2+6$, $5+3+1$, $5+1+3$, $3+5+1$, $3+1+5$, $1+5+3$, $1+3+5$, $5+2+2$, $2+5+2$, $2+2+5$, $4+4+1$, $4+1+4$, $1+4+4$, $4+3+2$, $4+2+3$, $3+4+2$, $3+2+4$, $2+4+3$, $2+3+4$ e $3+3+3$; ou seja, em 25 possibilidades. Já a soma igual a 10 aparece em $6+3+1$, $6+1+3$, $3+6+1$, $3+1+6$, $1+6+3$, $1+3+6$, $6+2+2$, $2+6+2$, $2+2+6$, $5+4+1$, $5+1+4$, $4+1+5$, $4+5+1$, $1+5+4$, $1+4+5$, $5+3+2$, $5+2+3$, $3+5+2$, $3+2+5$, $2+5+3$, $2+3+5$, $4+4+2$, $4+2+4$, $2+4+4$, $4+3+3$, $3+4+3$ e $3+3+4$; ou seja, em 27 possibilidades. Assim, admitindo que os dados são honestos, teremos mais possibilidades da soma ser igual a 10 do que a soma ser igual a 9, concluiu Galileu.

É fato! Separar a probabilidade dos jogos de azar é como tentar separar as sílabas da palavra Sol e os maiores exemplos dos jogos de azar são exatamente os jogos de dados e de cartas.

10.2 O amigo secreto

Mas continuemos com os pensamentos sobre probabilidades. Um problema que sempre nos surge ao final do ano (ou períodos) ou ainda em festas comemorativas é o amigo secreto, ou amigo oculto para alguns. Colocar papeizinhos com os nomes dos participantes e fazer cada um deles tirar o papel que dirá quem será o seu amigo secreto. Mas e se alguém tirar o próprio nome? Lá vamos nós uma outra vez enrolar todos os papeizinhos e fazer todo mundo tirar novamente.

Porém, qual a probabilidade de um sorteio de amigo secreto dar certo, ou seja, nenhuma pessoa tirar o seu próprio nome? O problema matematicamente se resume à sequência de retiradas de papéis seguir uma permutação caótica, ou seja, nenhum termo da sequência (de retiradas) possuir posição igual à posição original. Por exemplo, se Aldo, Bento, Carlos e Davi devem retirar os papeizinhos do amigo secreto nessa ordem, um possível sorteio que teria sucesso seria Carlos, Davi, Aldo e Bento, ou seja, a segunda sequência não tem nenhum termo na mesmo posição da anterior. Mas afinal, como calcular o número de permutações caóticas para n termos? Vamos observar alguns casos:

Para $n = 1$, não teremos nenhuma permutação caótica possível. Para $n = 2$ (AB), teremos apenas uma permutação caótica possível (BA). Para $n = 3$ (ABC), teremos apenas duas permutações caótica possíveis (BCA e CAB).

Vamos considerar que uma permutação caótica com n termos possa ser feita em D_n formas e com $(n + 1)$ termos possa ser feita com D_{n+1} formas. Tentaremos calcular, a partir dessas quantidades, quantas permutações caóticas poderíamos ter com $(n + 2)$ termos, que representaremos por D_{n+2}.

Conforme escreve LAGES no livro A Matemática do Ensino Médio, vol. 2, As permutações podem ser divididas em dois grupos: aquelas nas quais o 1 ocupa o lugar do número que ocupa o primeiro lugar e aquelas nas quais isso não ocorre.

Para formar uma permutação do primeiro grupo, devemos escolher o número que trocará de lugar com o 1, o que pode ser feito de $(n + 1)$ modos, e, em seguida, devemos arrumar os demais n elementos nos restantes n lugares, sem que nenhum desses elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_n modos. Há

$(n+1)\cdot D_n$ permutações no primeiro grupo.

Para formar uma permutação do segundo grupo, temos que escolher o lugar que será ocupado pelo número 1 (chamaremos esse lugar de k), o que pode ser feito de $(n+1)$ modos, e, em seguida, devemos arrumar os restantes $(n+1)$ elementos nos demais $(n+1)$ lugares, sem que o elemento k ocupe o primeiro lugar e sem que nenhum dos demais elementos ocupe o seu lugar primitivo, o que pode ser feito de D_{n+1} modos.

Há $(n+1)\cdot D_{n+1}$ permutações no segundo grupo. Portanto, $D_{n+2} = (n+1)\cdot(D_n + D_{n+1})$.

Porém, ainda nos resta mostrar uma expressão em que essa quantidade de permutações caóticas seja escrita em função de n pois a expressão acima escreve D_{n+2} em função de D_n e de D_{n+1}. Matematicamente falando, desejamos escrever o termo geral da sequência que foi definida em função de uma recorrência.

Observemos que para o caso $n=1$, temos que:

$$D_3 = 2\,(D_2 + D_1) = 2D_2 + 2D_1$$

Escrevendo convenientemente a expressão de uma outra forma, pode dizer que:

$$D_3 = (-D_2 + 3D_2) + 2D_1 \Rightarrow D_3 - 3D_2 = -D_2 + 2D_1 \Rightarrow D_3 - 3D_2 = -\,(D_2 - 2D_1)$$

Da mesma forma podemos escrever para $n=2$ e $n=3$:

$$D_4 - 4D_3 = -\,(D_3 - 3D_2)$$

$$D_5 - 5D_4 = -\,(D_4 - 4D_3)$$

Repetindo analogamente esse raciocínio, chegamos às expressões:

$$D_3 - 3D_2 = -\left(D_2 - 2D_1\right)$$

$$D_4 - 4D_3 = -\left(D_3 - 3D_2\right)$$

$$D_5 - 5D_4 = -\left(D_4 - 4D_3\right)$$

$$\vdots$$

$$D_n - n \cdot D_{n-1} = -\left(D_{n-1} - (n-1) \cdot D_{n-2}\right)$$

E multiplicando essas igualdades, teremos:

$$\left(D_3 - 3D_2\right) \cdot \left(D_4 - 4D_3\right) \cdots \left(D_n - nD_{n-1}\right) =$$
$$= (-1)^{n-2} \cdot \left(D_2 - 2D_1\right) \cdot \left(D_3 - 3D_2\right) \cdots \left(D_{n-1} - (n-1)\, D_{n-2}\right)$$

Eliminando os fatores comuns e percebendo que $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, temos:

$$D_n - n \cdot D_{n-1} = (-1)^n \cdot \left(D_2 - 2D_1\right)$$

Como $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$, teremos que:

$$D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n$$

Entretanto, a equação acima ainda é uma recorrência, porém agora de primeira ordem. Note também que:

$D_3 = 3D_2 - 1$

$D_4 = 4D_3 + 1 = 4\left(3D_2 - 1\right) + 1 = 4 \cdot 3D_2 - 4 + 1 = 4 \cdot 3 - 4 + 1$

$D_5 = 5D_4 - 1 = 5\left(4 \cdot 3 - 4 + 1\right) - 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1$

Note ainda que $D_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1 = 5! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$ e, do mesmo modo:

$$D_6 = 6D_5 + 1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 6 \cdot 5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 - 6 + 1 = 6! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$$

Vamos provar que:

$$D_n = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

Note claramente que a equação acima é válida para $n = 2$, pois $D_2 = 2! \cdot \left(\frac{1}{2!} \right) = 1$. Admitamos agora que a expressão seja válida para um $n = k - 1$, ou seja, que:

$$D_{k-1} = (k-1)! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \right)$$

Vamos mostrar que também será válida para $n = k$.

Multiplicando a equação por k teremos que:

$$k \cdot D_{k-1} = k \cdot (k-1)! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \right)$$

Porém, $k \cdot D_{k-1} = D_k - (-1)^k$ e, substituindo na equação acima, teremos:

$$D_k - (-1)^k = k \cdot (k-1)! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \right)$$

$$D_k = k! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{(k-1)!} \right) + (-1)^k$$

$$D_k = k! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \right)$$

Provamos, através do Princípio da Indução Matemática que realmente a expressão $D_n = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

Por fim, lembrando que $D_1 = 0$, acrescentaremos a parcela $1 - \frac{1}{1!}$ à soma, para que a expressão também possa ser definida para $n = 1$. Dessa forma, a permutação caótica de n elementos será dada pela expressão:

$$D_n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right)$$

Voltando para o nosso problema do amigo secreto, a probabilidade para que o sorteio seja um sucesso é dada por $P\left(sucesso\right) = \frac{D_n}{n!}$, onde D_n é o número de permutações caóticas de n elementos e $n!$ é o total de permutações que podem ocorrer. Portanto, a probabilidade que o sorteio do amigo secreto seja um sucesso, com n amigos, é dada por:

$$P_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}$$

A tabela a seguir mostra as probabilidades aproximadas para alguns valores de n:

n	2	3	4	5	6	7	8
P_n	0,5	0,33333	0,375	0,36667	0,36806	0,36786	0,36788

Se continuarmos com esses cálculos para valores maiores de n iremos perceber que a probabilidade se "estabiliza" em um número em torno de 0,367879441... (pouco mais de $\frac{1}{3}$) que, por um estudo um pouco mais detalhado de séries numéricas, poder-se-ia mostrar que é o número $\frac{1}{e}$.

Assim, a probabilidade de que um sorteio de um amigo secreto venha a ter sucesso é pouco mais que $\frac{1}{3}$ e, para aqueles que já participaram de muito amigos secretos, é o que a experiência mostra. Normalmente o primeiro e segundo sorteios dão errado (alguma pessoa pega o papelzinho com seu próprio nome) deixando o terceiro sorteio para que realmente se consiga sucesso.

Bem, já que estamos mergulhados no universo dos amigos secretos, vamos pensar em uma última probabilidade sobre eles. Qual seria a probabilidade da brincadeira não parar no meio, ou seja, o ciclo não ser fechado antes de terminar e alguém ter de ir lá para o meio da rodinha e recomeçar a brincadeira?

Essa probabilidade é relativamente simples de se calcular. Começando por um participante qualquer, este irá informar qual o seu amigo secreto, ao qual terá $(n-1)$ opções, já que ele não pode ter tirado ele mesmo. Dando continuidade ao jogo, o amigo seguinte terá $(n-2)$ opções para que o jogo não se interrompa; o seguinte terá $(n-3)$ opções e assim sucessivamente até que a última pessoa receba o seu presente do penúltimo que divulgou qual seria esse amigo e teria uma única opção.

Dessa forma, a probabilidade para que o jogo não seja interrompido é dada por:

$$P = \frac{(n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \cdots \cdot 1}{n!}$$

Já que existem $n!$ formas diferentes para a ordem das pessoas. Portanto a probabilidade descrita é $p = \frac{1}{n}$ e percebemos que, conforme n aumenta, ou seja, conforme existe um grupo maior de pessoas no amigo secreto, mais remota é a chance do jogo não ser interrompido. Novamente a experiência de quem participou de vários amigos secretos vale. Eu, particularmente, não me lembro de um único amigo secreto que tenha se desenrolado sem nenhuma interrupção, entretanto, a probabilidade de que isso ocorra existe.

10.3 Aniversários no mesmo dia?

Esse cálculo final sobre o amigo secreto me lembra muito uma aposta que todo ano eu faço com meus alunos (e quase sempre ganho) acerca das datas de aniversário. A pergunta seria: Em um grupo de n pessoas, qual a probabilidade de que duas (ou mais pessoas) façam aniversário na mesma data?

Obviamente para que se tenha certeza absoluta de que em um grupo de n pessoas, duas delas façam aniversário no mesmo dia, somente se $n > 366$, pois ainda há a possibilidade de uma pessoa que nasceu no dia 29 de fevereiro entre elas. Entretanto, nossa intuição falha ao pensar que serão precisas muitas pessoas para que a probabilidade disso ocorrer seja alta.

Vamos tentar calcular essa probabilidade através do complementar desse evento, ou seja, tentaremos calcular a probabilidade de que, em um grupo de n pessoas, nenhuma delas faça aniversário no mesmo dia do ano. Assim, supondo que a primeira pessoa do grupo faça aniversário em determinado dia, para que a segunda pessoa não faça aniversário nesse mesmo dia, há 365 possibilidades de 366 possíveis e a probabilidade será $\frac{365}{366}$. Para que o mesmo ocorra com a terceira pessoa, a probabilidade será de $\frac{364}{366}$ e assim sucessivamente. Portanto, a probabilidade de que nenhuma das n pessoas faça aniversário no mesmo dia que outra, é dada por:

$$P = \frac{366}{366} \cdot \frac{365}{366} \cdot \frac{364}{366} \cdot \dots \cdot \frac{366-n+1}{366}.$$

Utilizando o auxílio de uma simples tabela de Excel, podemos calcular as probabilidades P para que nenhuma das n pessoas faça aniversário no mesmo dia e a probabilidade $(100 - P)\,\%$, complementar de P, para que duas (ou mais) das n pessoas façam aniversário no mesmo dia. A tabela na página seguinte ilustra isso.

Observe que para apenas 23 pessoas no grupo, a probabilidade de que duas dessas façam aniversário no mesmo dia já é superior a 50% e para 40 pessoas, a probabilidade já beira os 90%. Logo, não é de se admirar que eu quase sempre ganhe a aposta com meus alunos todos os anos, já que nas turmas que eu ensino dificilmente existem menos de 40 alunos. Porém, mesmo contrariando todas as probabilidades, houve uma vez em que perdi e justamente em uma das maiores turmas (por volta de 50 alunos), o que mostra que a probabilidade é uma previsão e não uma exatidão.

Tabela 10.1: Probabilidades para que, em um grupo de n pessoas, duas delas façam aniversário no mesmo dia do ano

n	P	$(100-P)\,\%$	n	P	$(100-P)\,\%$
1	100,0000%	0,0000%	26	40,2786%	59,7214%
2	99,7268%	0,2732%	27	37,4173%	62,5827%
3	99,1818%	0,8182%	28	34,6570%	65,3430%
4	98,3689%	1,6311%	29	32,0056%	67,9944%
5	97,2938%	2,7062%	30	29,4697%	70,5303%
6	95,9646%	4,0354%	31	27,0541%	72,9459%
7	94,3914%	5,6086%	32	24,7626%	75,2374%
8	92,5861%	7,4139%	33	22,5976%	77,4024%
9	90,5624%	9,4376%	34	20,5601%	79,4399%
10	88,3355%	11,6645%	35	18,6502%	81,3498%
11	85,9219%	14,0781%	36	16,8667%	83,1333%
12	83,3396%	16,6604%	37	15,2077%	84,7923%
13	80,6071%	19,3929%	38	13,6703%	86,3297%
14	77,7440%	22,2560%	39	12,2510%	87,7490%
15	74,7702%	25,2298%	40	10,9455%	89,0545%
16	71,7059%	28,2941%	41	9,7493%	90,2507%
17	68,5712%	31,4288%	42	8,6572%	91,3428%
18	65,3862%	34,6138%	43	7,6637%	92,3363%
19	62,1705%	37,8295%	44	6,7633%	93,2367%
20	58,9430%	41,0570%	45	5,9503%	94,0497%
21	55,7221%	44,2779%	46	5,2187%	94,7813%
22	52,5249%	47,4751%	47	4,5628%	95,4372%
23	49,3677%	50,6323%	48	3,9768%	96,0232%
24	46,2654%	53,7346%	49	3,4553%	96,5447%
25	43,2316%	56,7684%	50	2,9927%	97,0073%

10.4 Um breve estudo sobre o pôquer

Pois bem, um outro assunto que nos permite inúmeros cálculos de probabilidades são os jogos de cartas. Apenas para um início de conversa, vamos supor um jogo com apenas 4 cartas: um ás de ouro, um ás de espada, uma dama de copas e um 8 de paus. Iremos distribuir essas 4 cartas para duas pessoas (duas cartas para cada pessoa) e assim existirão 6 possibilidades diferentes de combinações das duas mãos. As perguntas que faço são:

1) Qual a probabilidade de uma pessoa possuir os dois ases?

2) Se uma pessoa possui um ás, qual a probabilidade dela possuir os dois ases?

3) Se uma pessoa possuir o ás de ouro, qual a probabilidade dela possuir os dois ases?

Primeiramente perceba que existe uma única possibilidade (das 6 possíveis) de uma pessoa estar com os dois ases, logo a resposta da pergunta 1 é $\frac{1}{6}$.

Para responder a pergunta 2 devemos perceber que existem 5 possibilidades de uma pessoa possuir um ás. São elas: (ás de ouro, dama); (ás de ouro, oito); (ás de espada, dama); (ás de espada, oito) e (ás de ouro, ás de espada). E portanto, dentre as 5 possibilidades que existem para que uma pessoa possua um ás, em apenas uma delas ela possui também o outro ás. Logo a probabilidade pedida pela pergunta 2 é $\frac{1}{5}$.

Por fim, existem apenas 3 possibilidades de uma pessoa ter agora um ás de ouro. São elas: (ás de ouro, dama); (ás de ouro, oito) e (ás de ouro, ás de espada). Assim, dentre essas 3 possibilidades, em apenas uma delas a pessoa possui os dois ases e a probabilidade pedida na pergunta 3 é $\frac{1}{3}$.

Note que pouquíssimas pessoas inicialmente pensariam que o fato da informação adicional que o naipe do ás é de ouro influi-se na probabilidade pedida em cada caso. Esse exemplo é muito similar ao problema de perguntar a probabilidade de um casal que tenha dois filhos (de qualquer sexo) sendo que um deles é do sexo masculino, tenha o outro filho também do sexo masculino. E depois perguntar a mesma coisa porém com a informação de que o filho do sexo masculino se chama Carlos.

Mas voltemos aos jogos de cartas. Talvez o mais famoso entre eles seja o pôquer. São várias as versões do pôquer, e explicaremos de forma bem simplificada a versão *Omaha*, que é jogado com um baralho comum de 52 cartas ou parte dele, a depender do número de participantes. Até 4 participantes, são excluídas do baralho as cartas de número 2, 3, 4, 5 e 6 de cada naipe (20 cartas), restando apenas as demais 32 cartas. Conforme existam mais participantes, as cartas de números 6, 5, 4, 3 e 2 vão sendo acrescentadas.

Inicialmente são distribuídas 5 cartas para cada competidor, a seguir é facultado a cada jogador se desfazer de até 3 das suas cartas, recebendo quantidade igual as que descartou dentre as cartas que restaram no baralho. Por fim, os competidores revelam sua carta e, seguindo uma ordem de hierarquia dos conjuntos de cartas, define-se o vencedor da rodada que fica com o total apostado por todos. Existem 9 jogadas que podem ser pontuadas, elas serão descritas a seguir e, em seguida, será calculada a probabilidade de se conseguir cada uma delas ao receber as 5 primeiras cartas. Para cada uma das probabilidades que serão apresentadas após a lista de jogadas estaremos levando em conta o baralho com 52 cartas, em que existirão possíveis 2.598.960 distribuições iniciais diferentes.

1) Royal Straight Flush: é formada por um 10, um valete, uma dama, um rei e um ás, todos do mesmo naipe. Existem apenas 4 formas (uma de cada naipe) de receber uma royal straight flush na distribuição inicial.

2) Straight Flush: é formada por qualquer sequência de cinco cartas do mesmo naipe que não seja uma royal. Lembrando que o ás pode ser usado como a menor carta também (número 1), existem 36 formas diferentes de receber uma straight flush na distribuição inicial.

3) Quadra: é formada por quatro cartas de mesmo valor (e naipes diferentes) e uma quinta carta qualquer. Para as quatro cartas de mesmo valor existem 13 possibilidades diferentes e para a carta qualquer existem 48 possibilidades. Assim, existem $13 \cdot 48 = 624$ formas diferentes de se ter uma quadra.

4) Fullhand (ou fullhouse): é formada por uma trinca (três cartas de um mesmo valor) e um par (duas cartas de um mesmo valor). Note que um fullhand de dama e valete (3 damas e 2 valetes) é diferente de um fullhand de valete e dama (3 valetes e 2 damas). Teremos, ao total 13 formas de escolher a carta

da trinca e 12 formas de escolher a carta do par. Além disso, teremos 4 formas de escolher os naipes da trinca e 6 formas de escolher os naipes do par. Logo, existem $13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3.744$ formas diferentes de se obter um fullhand.

5) Flush: é formada por um conjunto de cartas do mesmo naipe porém não em sequência. Existem $\frac{13!}{8! \cdot 5!} = 1.287$ formas de se ter cinco cartas de um mesmo naipe, para cada naipe. Porém 10 dessas formas são sequências (straight flush ou royal straight flush). Assim, restam 1.277 flushes para cada naipe, ou seja, $1.277 \cdot 4 = 5.108$ formas diferentes de ter um flush.

6) Straight: é formada por 5 cartas em sequência porém nem todas do mesmo naipe. Teremos 10 maneiras de formar a sequência e 4^5 maneiras de escolher os naipes de cada uma das cartas da sequência. Além disso, 4 dessas jogadas são royal straight flushes e 36 são straight flushes. Logo, existem $10 \cdot 4^5 - 4 - 36 = 10.200$ formas diferentes de se ter uma straight.

7) Trinca: é formada por 3 cartas de mesmo valor e duas outras cartas de valores distintos entre si de modo que não formem um par. Teremos 13 formas de escolher a carta da trinca e 4 formas de escolher os naipes dessa trinca. Além disso, teremos 48 formas de escolher a quarta carta já que ela não pode ser igual à carta que forma a trinca e 44 formas de escolher a quinta carta já que ela não pode ser igual nem a carta que forma a trinca e nem à quarta carta. Dessa forma, teremos $13 \cdot 4 \cdot \frac{48 \cdot 44}{2} = 54.912$ formas diferentes de se obter uma trinca, já eliminando as combinações em que a quarta e quinta cartas são as mesmas mudando apenas a ordem.

8) Dois pares: é formada por 2 pares de cartas de mesmo valor e uma quinta carta de valor distinto. Teremos $\frac{13 \cdot 12}{2}$ formas de escolher os valores das cartas que formarão os dois pares, já eliminando as combinações em que essas cartas são as mesmas mudando apenas a ordem. Teremos ainda 6 formas de escolher os naipes de cada um dos pares e por fim, 44 formas de escolher a quinta carta que não pode ser do valor das que formam nem o primeiro e nem o segundo par. Assim, existem $\frac{13 \cdot 12}{2} \cdot 6^2 \cdot 44 = 123.552$ formas diferentes de se obter dois pares.

9) Um par: é formada por um par de cartas com o mesmo valor e três outras cartas de valores diferentes entre si e também diferentes das cartas que formam

o par. Teremos 13 formas de escolher o valor da carta que formará o par e 6 formas de escolher os naipes do par. Para as demais três cartas que não formam pares, teremos $\dfrac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!}$ formas de escolher, já eliminando as possibilidades em que são as mesmas cartas mudando apenas a ordem. Portanto, existem $13 \cdot 6 \cdot \dfrac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 1.098.240$ formas diferentes de se obter um par.

Para todos os demais conjuntos de cartas que não estejam entre esses listados, dizemos que o jogador não possui nada de interesse e, estando todos os jogadores nessa situação, ganha aquele que possuir a carta de maior valor. Existem, portanto, 1.302.540 formas diferentes de não ter nada de interessante, que é o resultado da subtração do total de possibilidades (2.598.960) pela quantidade de cada uma das jogadas que foram descritas. A tabela 10.2 mostra as probabilidades de cada uma das jogadas.

Tabela 10.2: Probabilidades para obter jogadas na distribuição inicial

Jogada	**Probabilidade**	**Jogada**	**Probabilidade**
Royal Straight Flush	0,000154%	Straight	0,392465%
Straight Flush	0,001385%	Trinca	2,112845%
Quadra	0,024001%	Dois pares	4,7539%
Fullhand	0,1441%	Um par	42,2569%
Flush	0,19654%	Nada de interesse	50,11774%

10.5 Tiro ao alvo, macarrão e um universo maior a ser explorado

Para encerrar esse capítulo acerca de várias situações em que a probabilidade é utilizada, vamos falar um pouco sobre experimentos em que não há um número finito de possibilidades e, portanto, a fórmula para se calcular as probabilidades não poderia ser utilizada. Porém, ao contrário do que muitos possam imaginar, muitos alunos buscam intuitivamente uma adaptação para que o uso da fórmula seja possível. Citarei dois exemplos: o problema do tiro ao alvo e o problema do macarrão.

O problema do tiro ao alvo consiste em uma situação na qual é sabido que um atirador, com os olhos vendados, tenha acertado um alvo com a forma de um círculo com 50 cm de raio e que possui uma região central também com a forma de um círculo, porém com 5 cm de raio. A pergunta é: qual a probabilidade do atirador acertar o círculo central do alvo?

Figura 10.1: http://www.clubedosingleses.com.br/files/201209/030129salvo.jpg, acesso em 09-02-2015

Observe que existem infinitas possibilidades tanto para o atirador acertar o alvo quanto para ele acertar o seu círculo central. Porém, intuitivamente podemos, ao invés das possibilidades, pensar nas áreas ocupadas pelo alvo e pelo seu círculo central. Assim, através de um cálculo simples de área, podemos afirmar que a probabilidade do atirador ter acertado o círculo central do alvo é $P = \dfrac{\pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 50^2} = \dfrac{1}{100} = 1\%$.

Outro problema bastante interessante é o chamado problema do macarrão que consiste em quebrar um macarrão de comprimento 1 em três pedaços de comprimentos aleatórios e perguntar qual a probabilidade para que os três pedaços formem um triângulo.

Mais uma vez perceba que existem infinitas possibilidades diferentes de tamanhos que se pode quebrar o macarrão. Mas vamos tentar transformar esse problema em áreas para poder usar o mesmo raciocínio do problema do tiro ao alvo.

Vamos supor inicialmente que os três pedaços em que foram divididos o macarrão tenham comprimentos a, b e $1-a-b$. Assim, para que um triângulo seja formado com esses três pedaços, devemos ter que $a < b + (1-a-b)$, $b < a + (1-a-b)$ e $1-a-b < a+b$.

Dessas inequações resultam $a < \frac{1}{2}$, $b < \frac{1}{2}$ e $a + b > \frac{1}{2}$. Observe ainda que, devido à forma como os pedaços foram feitos, devemos ter $a < 1$ e também $b < 1$. Assim, inserindo em um plano cartesiano, as condições iniciais e as condições para que o triângulo seja formado teremos algo como mostrado na figura seguir.

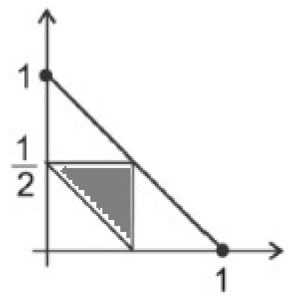

Figura 10.2: A probabilidade pode ser entendida como a razão entre a área sombreada e a área total do triângulo maior

A área que satisfaz a condição para os três pedaços formarem um triângulo está sombreada no gráfico e corresponde a $\frac{1}{4}$ (ou 25%) da área total. Assim, a probabilidade para ocorrer o que foi pedido é exatamente essa, $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Referências Bibliográficas

[1] MLODINOW, Leonard. *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas.* tradução Diego Alfaro, Rio de Janeiro, Zahar, 2009.

[2] HAZZAN, Samuel. *Fundamentos da Matemática Elementar, vol. 5* São Paulo, Atual, 2004.

[3] MEYER, Paul L. *Probabilidade - Aplicações à Estatística* Rio de Janeiro, LTC, 2013.

[4] LAGES, Ellon, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo e MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio, vol. 2.* Rio de Janeiro, SBM, 2004.

[5] MORGADO, Augusto César, DE CARVALHO, João Bosco, DE CARVALHO, Paulo César, FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro, SBM, 2004.