Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

Função Geradora: Uma ferramenta de contagem

por

John William dos Santos Machado
Mestrado Profissional em Matemática - Itabaiana - SE

Orientador: **Prof. Dr. Mateus Alegri**

Julho de 2015

Universidade Federal de Sergipe
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional - PROFMAT

John William dos Santos Machado

Função Geradora: Uma ferramenta de contagem

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal de Sergipe como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: **Prof. Dr. Mateus Alegri**

Julho de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

M149f

Machado, John William dos Santos.
Função geradora: uma ferramenta de contagem / John William dos Santos Machado; orientador Mateus Alegri . – São Cristóvão, 2015.
67 f.

Dissertação (mestrado profissional em Matemática)– Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Funções (Matemática). 2. Análise combinatória. 3. Matemática – Estudo e ensino. 4. Didática. I. Alegri, Mateus, orient. II. Título.

CDU 519.1

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Função Geradora: Uma ferramenta de contagem
por

John William dos Santos Machado

Aprovada pela Banca Examinadora:

Mateus Alegri
Prof. Dr. Mateus Alegri- UFS
Orientador

Wagner Ferreira Santos
Prof. Wagner Ferreira Santos- UFS
Primeiro Examinador

TEtcheverria
Profª. Dra. Teresa Cristina Etcheverria- UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 17 de julho de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Agradecimentos

À Deus, pelo dom da vida e pela força que me dá todos os dias para realizar os meus sonhos.

A minha família, pelos bons momentos que passei quando morava em Itabaiana e pela educação que me deram para me tornar o homem que sou hoje.

A minha esposa Elaine pela paciência, carinho e compreensão.

Aos professores do PROFMAT em Itabaiana - SE, em especial meu orientador Prof. Dr. Mateus Alegri, porque sem a sua ajuda nos momentos difíceis este sonho não seria realizado, pelo apoio e ensinamentos adquiridos no decorrer do curso.

Aos amigos da turma do PROFMAT 2013, pelos dias de estudos e pelos momentos divertidos.

Aos amigos da turma do PROFMAT 2014, em particular a Augusto, Emerson e Jaílson pelo apoio e pelos dias de estudo.

Ao meu cunhado Elton, por ter me ajudado na conclusão deste trabalho.

Aos colegas professores das escolas em que eu trabalho, pelo apoio.

Resumo

As técnicas de contagem estudadas na Educação Básica visam as resoluções de problemas combinatórios mais simples. Neste trabalho, apresentamos as funções geradoras, uma poderosa ferramenta para solucionar problemas mais complexos de contagem. Para tanto, abordamos o conteúdo de análise combinatória através do estudo de funções geradoras, propondo uma sequência didática sobre o tema para que professores da Educação Básica possam ampliar e diversificar as suas estratégias de ensino, por meio deste método de contagem.

Palavras-chaves: Técnicas de Contagem. Análise Combinatória. Funções Geradoras. Sequência Didática. Educação Básica.

Abstract

Counting techniques studied in basic education aim at the resolutions os simplest combinatorial problems. In this work, we present the generating functions, a powerful tool to solving more complex problems of counting. In this way, we discuss the contents of combinatorial analysis through the study of generating functions, proposing a didactic sequence on the subject for teachers of basic education can expand and diversify their teaching strategies, by means of this counting method.

Keywords: Counting Techniques. Combinatorial Analysis. Generating Functions. Didactic Sequence. Basic Education.

Sumário

Introdução

A Análise Combinatória é a parte da Matemática que é essencial e permite a elaboração de situações-problema que instiguem o professor e o aluno a desenvolverem a capacidade de argumentação lógica desde os problemas mais simples, listando os casos, até os mais complexos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que os professores devem ter para desenvolvê-lo, já que alguns docentes não passam este conteúdo por não terem habilidade no mesmo. Segundo este documento:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são sem dúvida, instrumentos tanto da ciências da natureza quanto das ciências humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da matemática e das demais ciências e áreas (PCN, 1999, p.257).

No primeiro capitulo, apresentamos o conteúdo de Análise Combinatória com os tipos de agrupamentos (permutações, arranjos e combinações) com e sem repetição e suas aplicações em problemas, bem como o cálculo do número de soluções de uma equação linear com coeficientes unitários. Por fim, mostramos o Binômio de Newton e o cálculo dos coeficientes.

No segundo capitulo, apresentamos as funções geradoras ordinárias e suas aplicações em problemas de contagem, o Binômio de Newton Generalizado, as funções geradoras exponenciais e terminamos com as aplicações dos Números de Catalão e as soluções de recorrências.

No terceiro capitulo, apresentamos uma introdução ao estudo de partições de inteiros com algumas definições, as funções geradoras para as partições, algumas identidades algébricas e finalizamos com algumas bijeções usando os gráficos de Ferrers.

No quarto capítulo, desenvolvemos um sequência didática sobre as funções geradoras. Em todos os capítulos utilizamos uma linguagem simples e resolvemos vários exemplos na busca de facilitar a leitura e a compreensão da proposta.

Capítulo 1

Análise Combinatória

A análise combinatória é a parte da Matemática que estuda os métodos de contagem, tais como arranjos, permutações e combinações. Com estes e outros métodos calculamos de forma indireta as possibilidades de ocorrer um determinado evento sem precisarmos listar todos os seus elementos.

A seguir, apresentamos dois princípios básicos que serão essenciais para o desenvolvimento do raciocínio combinatório: O Princípio Multiplicativo e o Princípio Aditivo.

1.1 Princípio Multiplicativo

Se uma decisão A_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão A_1, a decisão A_2 pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A_1 e A_2 é $x.y$. Em linguagem de conjuntos, se A tem m elementos e B tem n elementos, o cartesiano $A \times B$ possui $m.n$ elementos.

A extensão do princípio multiplicativo para n conjuntos. Se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então esses n conjuntos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1.m_2...m_n$ maneiras diferentes. Em linguagem de conjuntos, se o conjunto A_i tem m_i elementos, para $i = 1, 2, 3, ..., n$, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times ...A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n), a_i \in A_i$, para $i = 1, 2, 3, ..., n\}$ tem $m_1.m_2...m_n$ elementos.

Exemplo 1 *Há 3 linhas de ônibus entre as cidades A e B e 2 linhas de ônibus entre B e C. De quantas maneiras uma pessoa pode viajar.*

a) *indo de A até C, passando por B?*

Para resolvermos este problema, temos 3 possibilidades dessa pessoa viajar da cidade A até a cidade B e 2 possibilidades de viajar de B até C. Logo, pelo príncipio multiplicativo, há $3.2 = 6$ maneiras.

b) *indo e voltando entre A e C sempre passando por B?*

Como o item trata da ida e da volta entre A e C sempre passando por B, basta multiplicar o resultado do item anterior por 2, ou seja, $2.3.2 = 12$ maneiras.

Exemplo 2 *Supondo que as placas dos veículos contêm 3 letras (dentre as 26 disponíveis), seguidas de 4 digítos numéricos, quantas são as placas nas quais.*

a) *o zero não aparece na primeira posição?*

Observe que não há restrição com relação às letras. Assim, as três letras podem ser iguais, daí teremos $26.26.26 = 17576$ possibilidades para a escolha das letras. Com relação à escolha dos números, a única restrição é que não apareça o número zero na primeira posição. Assim, teremos $9.10.10.10 = 9000$ maneiras de escolhermos os 4 dígitos numéricos. Logo, pelo princípio multiplicativo, há $17576.9000 = 15184000$ placas.

b) *não há repetição de letras e nem de números?*

Como as letras são diferentes, teremos $26.25.24 = 15600$ possibilidades de escolhermos as 3 letras. Da mesma forma, com os digítos obtemos $10.9.8.7 = 6480$ maneiras. Portanto, pelo principio multiplicativo, teremos $15600.6480 = 78624000$ placas.

1.2 Princípio Aditivo

Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos, disjuntos 2 a 2, $(A_i \bigcap A_j = \emptyset$,se $i \neq j)$ e se A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ possui $\sum_{n=1}^{n} a_i$ elementos.

Exemplo 3 *Suponhamos que em um cinema passarão 3 filmes diferentes pela manhã e 5 filmes diferentes pela tarde. De quantas maneiras podemos assistir a somente 1 filme?*

Como temos 3 filmes diferentes pela manhã e 5 pela tarde, podemos assistir de 3 formas distintas os filmes que serão apresentados pela manhã e de 5 formas os da tarde. Como os conjuntos são dijuntos, ou vai pela manhã ou vai pela tarde, pelo princípio aditivo, o total de opções para ver ao filme é de $3 + 5 = 8$.

Exemplo 4 *Há 12 moças e 10 rapazes, onde 5 deles (3 moças e 2 rapazes) são filhos da mesma mãe e os restante não possuem parentesco. Quantos são os casamentos possíveis?*

Dividiremos o problema em duas partes: as moças que possuem irmãos e as moças que não possuem irmãos. Há 3 moças que possuem 2 irmãos, ou seja, serão formados $3.8 = 24$ casamentos possíveis, já que subtraimos dos 10 rapazes, os dois irmãos delas. Do mesmo modo, considerando as 9 moças que não têm irmãos, serão formados $9.10 = 90$ casamentos possíveis. Portanto, pelo princípio aditivo, há $24 + 90 = 114$ casamentos possíveis.

1.3 Permutações simples

Definição 1.3.1 *Uma permutação de n objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado formado por esses objetos.*

Denotamos as permutações simples por P_n. Assim, um conjunto com n objetos distintos, teremos as seguintes possibilidades:

- o 1^o objeto deve ser disposto de n maneiras;

- o 2º objeto deve ser disposto de $n-1$ maneiras, já que o 1º objeto já fixou a sua posição;
- o 3º objeto deve ser disposto de $n-2$ maneiras, já que o 1º e o 2º objetos já foram dispostos em suas posições;
- Assim, sucessivamente, até o último objeto, que terá apenas 1 lugar para ser ocupado. Logo, pelo princípio multiplicativo, obtemos $P_n = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$

Note que P_n é justamente a definição de fatorial, que é o produto de fatores decrescentes positivos até 1. Definimos $P_0 = 0! = 1$. Portanto, $P_n = n!$.

Exemplo 5 *Considere os algarismos do número 786 415. Forme todos os números de 6 algarismos distintos e coloque-os em ordem crescente. Qual a posição ocupada pelo número dado?*

Colocando os algarismos da esquerda para a direita em ordem crescente de modo que o maior seja 7. Fixando o algarismo das centenas de milhar, temos 5! números começados por 1, 5! números começados por 4, 5! números começados por 5 e 5! números começados por 6.

Os próximos números começarão por 7. Fixando o algarismo das dezenas de milhar, teremos 4! números começados por 1, 4! números começados por 4, 4! números começados por 5 e 4! números começados por 6. Fixando o algarismo das unidades de milhar, temos 3! números começados por 1, 3! números começados por 4 e 3! números começados por 5.

Fixando o algarismo das centenas, temos 2! números começados por 1 e por fim teremos 1 possibilidade do número desejado. Logo, obtemos $4.5! + 4.4! + 3.3! + 2! + 1 = 4.120 + 4.24 + 3.6 + 2 + 1 = 597$. E concluímos que o número 786 415 ocupa a 597ª posição.

Exemplo 6 *De quantos modos diferentes podem ser dispostos em fila $m+h$ pessoas (todas de alturas diferentes), sendo m mulheres e h homens.*

a) *Sem restrições?*

Como não há restrições, podemos dispor de $(m+h)!$ modos distintos.

b) *De modo que pessoas do mesmo sexo fiquem juntas?*

Como as pessoas do mesmo sexo devem ficar juntas, podemos agrupar as mulheres de $m!$ formas e podemos agrupar os homens de $h!$ formas. Note que há 2 modos de iniciar a fila, ou por mulher ou por homem. Portanto, pelo princípio multiplicativo, obtemos $m!.h!.2$ modos diferentes.

Exemplo 7 *Determine o número de divisores inteiros e positivos do número 720.*

Inicialmente, fatoramos o número $N = 720$ e obtemos $N = 2^4.3^2.5$. Observe que ao representar os divisores de N como números da forma $D = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma$, $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\beta \in \{0, 1, 2\}$ e $\gamma \in \{0, 1\}$. Há 5 possibilidades para os valores de α, 3 possibilidades para os valores de β e 2 possibilidades para os valores de γ. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $5.3.2 = 30$ divisores.

1.4 Arranjos simples

Definição 1.4.1 *Chamamos de Arranjos simples de n elementos distintos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e $p \in N$, tal que $n \geq p$, todos grupos de p elementos que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo.*

Denotamos os arranjos simples por A_n^p. Os arranjos simples são um caso particular das permutações simples quando não permutamos todos os p elementos. A quantidade total de agrupamentos é calculada por $A_n^p = n.(n-1).(n-2)...(n-p+1)$. Multiplicando e dividindo a expressão pelo mesmo valor, a igualdade não se altera. Daí, segue que

$$A_n^p = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-p+1).(n-p).(n-p-1).(n-p-2)...3.2.1}{(n-p).(n-p-1).(n-p-2)...3.2.1}$$

e concluimos que $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Exemplo 8 *Considere os números de 3 algarismos distintos formados com os digítos 2,3,5,8 e 9.*

a) *Quantos são estes números?*

Como os números serão formados por 3 algarismos e dispomos de 5 dígitos, a primeira posição pode ser ocupada de 5 modos diferentes, a segunda posição pode ser ocupada de 4 modos distintos e a terceira de 3 modos distintos. Portanto, pelo princípio multiplicativo, obtemos $5.4.3 = A_5^3 = 60$ números.

b) *Quantos são menores do que 800?*

Para ser menor do que 800, o dígito das centenas pode ser 2,3 ou 5. Escolhido o primeiro dígito, devemos escolher 2 dos 4 restantes para ocuparem as posições das dezenas e unidades, o que pode ser feito de $4.3 = A_4^2 = 12$ modos. Logo, teremos $3.A_4^2 = 3.12 = 36$ números.

c) *Quantos são múltiplos de 5?*

Para ser múltiplo de 5, o número deve terminar em 5, fixando o dígito 5 na unidade, temos 4 digítos restantes para ocupar 2 lugares, ou seja, $A_4^2 = 4.3 = 12$ números.

Exemplo 9 *O conselho diretivo de uma empresa de informática tem 10 membros. Programaram uma reunião de acionistas para aprovar uma nova escolha de executivos (eleitos entre os 10 membros do conselho).*

a) *Quantas escolhas diferentes, formadas por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro, podem apresentar o conselho aos acionistas para a sua aprovação?*

Inicialmente, observe que se denotarmos os membros por 1, 2, 3, 4,...,10, uma escolha seria 1, 2, 3, 4 e a outra 4,5,3,1, a ordem importa, já que o primeiro seria o presidente, o segundo o vice-presidente, o terceiro o secretário e o quarto o tesoureiro.

E na outra escolha, o presidente seria a pessoa representada pelo número 4, isto é, as escolhas são diferentes. Assim, o número de escolhas é $A_{10}^4 = \dfrac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040$ escolhas.

b) *Se três membros do conselho são engenheiros. Em quantas possibilidades tem um engenheiro para a presidência?*

Fixando o presidente (3 possibilidades) e variando o restante teremos $3.A_9^3 = 3.\frac{9!}{6!} = 3.\frac{9.8.7.6!}{6!} = 1512$ escolhas.

1.5 Combinações simples

Definição 1.5.1 *Combinações simples de n elementos tomados p a p, onde $n \geq 1$ e $p \in N$ tal que $n \geq p$, são todas as escolhas não ordenadas de p desses n elementos, ou seja, são todos os agrupamentos que diferem entre si pela natureza apenas.*

Denotaremos as combinações simples por $C_n^p = \binom{n}{p}$. Vimos que os arranjos simples diferem entre si pela ordem e pela natureza dos seus agrupamentos. Assim, teremos que retirar os agrupamentos que não diferem pela ordem, pois são os mesmos subconjuntos. veja o exemplo.

Exemplo 10 *Quantos subconjuntos de 2 elementos distintos podemos formar com os elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

Há 10 subconjuntos, $\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$.

Note que poderíamos ter o subconjunto $\{(2,1)\}$ que é o mesmo que $\{(1,2)\}$, o mesmo acontece com os outros subconjuntos.

Vamos agora, mostrar que $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Demonstração

Como notamos, o número C_n^p é o número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos. Um conjunto $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_p\}$ gera $p!$ p-uplas do tipo $(b_1, b_2, b_3, ..., b_p)$. Logo, $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Exemplo 11 *De um grupo de 10 pessoas, das quais 4 são mulheres, quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas de modo que pelo menos 1 mulher faça parte?*

Pelo exemplo anterior, observe que se trata de combinações, pois se mudarmos as posições dos homens e mulheres de cada comissão, o conjunto não se altera. No problema há uma restrição de que 1 mulher faça parte da comissão. Como temos 4 mulheres, devemos variar o número delas de 1 até 4.

Aplicando simultâneamente os princípios multiplicativo e aditivo, temos que o número N de comissões é dada por $N = C_4^1.C_6^4 + C_4^2.C_6^3 + C_4^3.C_6^2 + C_4^4.C_6^1$.

Calculando cada combinação e simplificando,

$$N = \frac{4!}{3!1!}.\frac{6!}{4!2!} + \frac{4!}{2!2!}.\frac{6!}{3!3!} + \frac{4!}{3!1!}.\frac{6!}{4!2!} + \frac{4!}{0!4!}.\frac{6!}{5!1!}$$

$$N = 4.\frac{6.5}{2} + \frac{4}{3}.\frac{6.5.4}{3.2} + 4.\frac{6.5}{2} + 6$$

$N = 246$ comissões.

Exemplo 12 *De quantos modos podemos dividir 18 pessoas em:*

a) *3 grupos de 6 pessoas cada?*

Cada grupo deve ter 6 pessoas, no primeiro grupo há C_{18}^6 possibilidades de escolhas, no segundo grupo, como já foram escolhidas 6 pessoas, sobram 12, das quais 6 são selecionadas, ou seja, C_{12}^6.

E por último, resta apenas 1 possibilidade de escolha para o terceiro grupo, já que sobraram 6 pessoas. Pelo princípio multiplicativo, obtemos $C_{18}^6.C_{12}^6.C_6^6 =$

$$\frac{18!}{6!12!}.\frac{12!}{6!6!}.\frac{6!}{0!6!} = \frac{18.17.16.15.14.13}{6.5.4.3.2.1}.\frac{12.11.10.9.8.7}{6.5.4.3.2.1}.\frac{6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{18!}{(6!)^3} = 17153136$$

modos.

b) *Um grupo de 11 pessoas e um grupo de 7 pessoas?*

De modo análogo, no primeiro grupo há C_{18}^{11} modos e no segundo grupo, como já foram selecionadas 11 pessoas, restam apenas 7, isto é, C_7^7.

Pelo princípio multiplicativo, teremos $C_{18}^{11}.C_7^7 = \frac{18!}{11!7!}.\frac{7!}{7!0!} = \frac{18.17.16.15.14.13.12}{7.6.5.4.3.2.1} =$ 31824 modos.

1.6 Combinações Complementares

Sabemos que o número de combinações simples de n elementos distintos, tomados p a p, com $n \geq p$ e $n \in N$, é denotado por $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$. Calcularemos agora o valor de C_n^{n-p}. Assim,

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)![n-(n-p)]} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p,$$

ou seja, o número de maneiras de escolhermos p objetos é idêntico ao número de maneiras de escolhas (n-p) objetos, pois se dos n objetos tirarmos p, sobram (n-p) e, consequentemente, se de n objetos tirarmos (n-p), sobram p.

Portanto, $C_n^p = C_n^{n-p}$, onde C_n^{n-p} é chamada de combinação complementar de C_n^p.

Exemplo 13 *Prove as identidades.*

a) $p.C_n^p = n.C_{n-1}^{p-1}$

Como $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, então

$$p.\frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{p.n!}{(n-p)!p!} = \frac{p.n.(n-1)!}{p.(p-1)!(n-p)!} = n.\frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} = n.C_{n-1}^{p-1}.$$

b) $\frac{1}{p+1}.C_n^p = \frac{1}{n+1}.C_{n+1}^{p+1}$.

$$\frac{1}{p+1}.C_n^p = \frac{1}{p+1}.\frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Multiplicando e dividindo a expressão por $(p+1)!$ e simplificando, obtemos

$$\frac{n!(p+1)!p!}{(p+1)(n-p)!p!(p+1)!} = \frac{n!}{(n-p)!(p+1)!}$$

e finalmente multiplicando e dividindo a expressão por $(n+1)!$ e simplificando, encontramos

$$\frac{n!(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!(n+1).n!} = \frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{1}{n+1}.C_{n+1}^{p+1}.$$

1.7 Cálculo do número de soluções inteiras de equações lineares com coeficientes unitários

Neste tópico, o nosso objetivo é contar o número de soluções inteiras de uma equação da forma $x_1+x_2+x_3+...+x_n = m$, onde x_i, para $i = 1, 2, 3..., n$ e m são inteiros positivos.

1.7.1 Teorema

Teorema 1.7.1 *O número de soluções inteiras positivas da equação* $x_1+x_2+x_3+...+x_n = m$ *é dado por* C_{m-1}^{n-1}.

Inicialmente, observemos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$. Uma possível solução desta equação é uma lista da forma $\{(1, 2, 2, 3)\}$, ou seja, é uma quadrupla $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$, com x_1, x_2, x_3 e x_4 inteiros positivos cuja soma vale 8. Assim, aplicaremos uma estratégia, escrevendo o número 8 como soma de números 1's. Daí, segue que 1+1+1+1+1+1+1+1=8.

Note que há 7 sinais de +, e que precisamos escolher 3 destes para colocarmos entre as quatro incógnitas. Portanto, teremos $C_7^3 = C_{8-1}^{4-1} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7.6.5.4!}{3.2.1.4} = 35$ soluções. Aplicando o mesmo raciocínio, escrevemos o número m como soma de números 1's. $\underbrace{1+1+1+...+1}_{m \quad números \quad 1} = m$.

Demonstração

Vamos diferenciar o sinal de + que separa as variáveis como $\oplus$. De forma análoga como foi feito no exemplo, vamos escrever a equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m$ como $\underbrace{1 + ... + 1}_{x_1} \oplus ... \oplus \underbrace{1 + ... + 1}_{x_n} = m$.

Note que há $(m - 1)$ sinais de +, e desses, $n - 1$ devem ser escolhidos como $\oplus$. Portanto, obtemos que o número de soluções inteiras positivas é igual a C_{m-1}^{n-1}.

Exemplo 14 *Quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1+x_2+x_3 = 5$?*

Veja que a fórmula que demostramos serve para calcular o número de soluções inteiras positivas, ou seja, $x_i \geq 1$. Assim, para resolver o problema, devemos ajustar as variáveis. Mudando de variável, $x_i = a_i - 1$, com $a_i \geq 1$. Substituindo na equação acima, temos que $a_1 - 1 + a_2 - 1 + a_3 - 1 = 5$, ou seja, $a_1 + a_2 + a_3 = 8$ e como vimos, o número de soluções inteiras positivas desta equação é igual a $C_7^2 = \dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7.6}{2} = 21$ soluções.

Exemplo 15 *De quantas maneiras podemos distribuir 30 laranjas para 4 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 2 laranjas?*

Denotando as crianças por x_1, x_2, x_3 e x_4, temos que resolver a equação $x_1+x_2+x_3+x_4 = 30$, com $x_i \geq 2$. Mudando de variável, faz $x_i = a_1 + 1$, com $a_i \geq 1$. Substituindo na equação, temos que $a_1+1+a_2+1+a_3+1+a_4+1 = 30$, o que resulta em $a_1+a_2+a_3+a_4 = 26$. Logo, a solução do nosso problema é $C_{25}^3 = \dfrac{25!}{22!3!} = \dfrac{25.24.23}{3.2.1} = 25.4.23 = 2300$ maneiras.

1.8 Combinações com repetição

Definição 1.8.1 *Seja um conjunto formado por n elementos distintos. Cada agrupamento formado por p elementos, distintos ou repetidos, tomados dos n elementos é cha-*

mado de combinação com repetição.

Indicaremos as combinações com repetição por CR_n^p. O número de combinações com repetição de n elemento distintos, tomados p a p é igual a $CR_n^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}$.

Exemplo 16 *Quantas peças têm o jogo de dominó?*

Uma peça de dominó é um retângulo que tem duas partes, em cada parte tem uma pontuação que varia de 0 até 6 pontos. Temos ainda pares de pontuações de 0 à 6, chamadas de bombas. Portanto, o número de peças será $CR_7^2 = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8.7}{2} = 28$.

Exemplo 17 *Um mercado tem 6 marcas diferentes de café no estoque. De quantas formas uma compra de 8 pacotes de café pode ser feita?*

$CR_6^8 = \binom{8+6-1}{8} = \binom{13}{8} = \frac{13!}{8!5!} = \frac{13.12.11.10.9}{5.4.3.2.1}$. Simplificando, $CR_6^8 = 1287$ formas.

1.9 Permutações com repetição

Vimos as permutações simples, nas quais os elementos são distintos e calculamos por $P_n = n!$. Agora, vamos estudar as permutações com repetição. Estas são permutações onde um elemento pode ou não repetir.

Definição 1.9.1 *Seja um conjunto com n elementos, entre os quais já existem α_i objetos iguais de um tipo $A_i, i \in \{1, 2, ..., k\}$, com $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$. Assim, o número de permutações com repetição é calculada por $P_n^{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k} = \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!...\alpha_k!}$.*

Exemplo 18 *Quantos anagramas tem a palavra Americana?*

Observe que na palavra Americana tem 3 letras a. Assim, a quantidade de anagramas é dada por $P_9^3 = \frac{9!}{3!} = 9.8.7.6.5.4 = 60480$.

Exemplo 19 *Permutando os algarismos no número 125612, quantos números:*

a) São obtidos?

Veja que o número 125 612 possui 6 dígitos, dos quais se repetem dois números 1 e dois números 2. Portanto, obtemos $P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!} = \frac{6.5.4.3}{2} = 180$ números.

b) Pares são obtidos?

Terminando pelo número 2, há P_5^2 e terminando pelo número 6 há $P_5^{2,2}$. Pelo princípio aditivo, teremos $P_5^2 + P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2!2!} = 5.4.3 + \frac{5.4.3}{2} = 60 + 30 = 90$ números.

1.10 Binômio de Newton

Alguns problemas de análise combinatória são resolvidos a partir dos coeficientes do desenvolvimento de potências da forma $(x+a)^n$, onde x e a são números reais quaisquer e $n \in N$. Estas potências são chamadas de binômio de newton e nos ajudam a compreender o teorema do binômio de Newton generalizado, bem como as funções geradoras. A seguir, veremos algumas dessas potências.

$$
\begin{aligned}
&(x+a)^0 = 1\\
&(x+a)^1 = x + a\\
&(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2\\
&(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3\\
&(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4\\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

Note que os coeficientes desses desenvolvimentos formam o triângulo de Pascal, de modo que, em cada linha, se tenha números binomiais de mesmo numerador e classes crescentes e, em cada coluna, se tenha números binomiais de mesma base e numeradores crescentes. Observe abaixo

$$
\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{0} & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array}
$$

Calculando cada combinação, teremos os valores seguintes

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Agora desenvolveremos as mesmas potências usando os números binomiais nos coeficientes

$$
\begin{aligned}
&(x+a)^0 = \binom{0}{0}x^0a^0 \\
&(x+a)^1 = \binom{1}{0}x^1a^0 + \binom{1}{1}x^0a^1 \\
&(x+a)^2 = \binom{2}{0}x^2a^0 + \binom{2}{1}x^1a^1 + \binom{2}{2}x^0a^2 \\
&(x+a)^3 = \binom{3}{0}x^3a^0 + \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1a^2 + \binom{3}{3}x^0a^3 \\
&(x+a)^4 = \binom{4}{0}x^4a^0 + \binom{4}{1}x^3a^1 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}x^1a^3 + \binom{4}{4}x^0a^4 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

Dai, segue que o Binômio de Newton para as potências decrescentes de x é dado por

$T = (x+a)^n = \binom{n}{0}x^n a^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^1 a^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 a^n.$

Demonstração

Como $(x+a)^n = \overbrace{(x+a).(x+a)...(x+a)}^{n \qquad parcelas}$, vamos encontrar o coeficiente de $a^p x^{n-p}$ na expansão de $(x+a)^n$.

Podemos escolher p elementos a em $(x+a)^n$ de C_n^p modos, pois temos n a's na expansão de $(x+a)^n$. Observe que, para cada valor de p, com $0 \leq p \leq n$, o termo $\binom{n}{p}x^{n-p}a^p$ ocupa a posição p+1, ou seja, $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}a^p$.

Exemplo 20 *Desenvolva o binômio* $(3x+2)^4$*.*

Utilizando o desenvolvimento de Newton, temos $(3x+2)^4 = \binom{4}{0}2^0.(3x)^4 + \binom{4}{1}2^1.(3x)^3 + \binom{4}{2}2^2.(3x)^2 + \binom{4}{3}2^3.(3x)^1 + \binom{4}{4}2^4.(3x)^0 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16.$

Observação: Quando o desenvolvimento for do tipo $(x-a)^n$, a expressão do termo geral é igual a $T_{p+1} = (-1)^p\binom{n}{p}a^p x^{n-p}$, *pois* $(x-a)^n = (x+(-a))^n \Rightarrow T_{p+1} = \binom{n}{p}(-a)^p x^{n-p} = \binom{n}{p}(-1)^p a^p x^{n-p} = (-1)^p\binom{n}{p}a^p x^{n-p}$.

Capítulo 2

Funções geradoras

No capitulo 1, estudamos alguns métodos de contagem, cada um com as suas características. Vimos que a ordem e a natureza dos elementos do conjunto influencia na contagem no caso de arranjos simples e que apenas a natureza dos elementos era necessário para identificar as combinações simples. Vimos como resolver equações com coeficientes unitários em inteiros positivos e suas mudanças de variáveis para se adequar aos problemas. Por fim, exploramos o Binômio de Newton que nos ajudará na compreensão do Binômio de Newton generalizado e em funções geradoras, nosso objeto de estudo.

A ferramenta matemática chamada de função geradora foi amplamente aplicada pelo matemático norueguês Leonhard Euler, na obra "Introduction in Analysis Infinitorum". Outros matemáticos importantes fizeram o uso deste, como N. Bernoulli e S. Laplace. As funções geradoras encontram aplicações no campo de análise matemática, probabilidade, combinatória, mecânica estatística e teoria da informação quântica.

Considere o problema a seguir.

Exemplo 21 *Calcule o número de soluções inteiras da equação* $x_1+x_2+x_3=6$*, sabendo que* $x_1 \in \{1,2\}, x_2 \in \{1,2,3\}$ *e* $x_3 \in \{2,3,4\}$.

Associando a cada variável x_i um polinômio $p(x_i)$, tal que os expoentes representem as possibilidades dos resultados.

Assim, teremos os seguintes polinômios

$p(x_1) = x^1 + x^2$

$p(x_2) = x^1 + x^2 + x^3$

$p(x_3) = x^2 + x^3 + x^4$

Calculando o produto $p(x_1).p(x_2).p(x_3) = (x + x^2)(x + x^2 + x^3)(x^2 + x^3 + x^4) = x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 5x^7 + 3x^8 + x^9$, o coeficiente do termo x^6 é o resultado do problema.

Portanto, temos 5 soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Este método é conhecido como função geradora.

2.1 Série de potências

Definição 2.1.1 *Chama-se série de potências de x com coeficientes $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, a qualquer série da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.*

A série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = a + ax + ax^2 + ...$ é convergente se $-1 < x < 1$ e sua soma é $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = \frac{a}{1-x}, |x| < 1$.

Como nos problemas de funções geradoras, estamos interessados em calcular os coeficientes, isto não influenciará nos resultados. Vamos definir duas operações envolvendo séries de potências.

Definição 2.1.2 *Se $s(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ e $l(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...$ são duas séries de potências, então a soma $s(x) + l(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ...$ onde $c_i = a_i + b_i, i \geq 0$ e o produto $s(x).l(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + ...$, onde $d_i = a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + ... + a_0b_i$.*

2.2 Funções geradoras

Definição 2.2.1 *Seja $(a_n), n = 0, 1, 2, ...$, uma sequência de números reais. A série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ é chamada de função geradora e os coeficientes da função geradora nos fornece a solução de um problema de contagem.*

Exemplo 22 *Encontrar a função geradora que calcula o número de soluções inteiras da equação* $x + y + z + w = 25$, *onde cada variável é no mínimo 3 e no máximo 8.*

A função geradora que modela o problema é

$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4$

$= \left[x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\right]^4$

$= x^{12}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$

$= x^{12}.\left(\dfrac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4$

$= x^{12}.(1 - x^6)^4.(1 - x)^{-4}.$

Exemplo 23 *Encontrar a função geradora que permite calcular o número de soluções inteiras da equação* $a + b + c = 6$, *com* $-1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 4$ *e* $1 \leq c \leq 4$*?*

A função geradora é $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 1 + x + x^2\right)(x + x^2 + x^3 + x^4)^2$

$= x^2\left(\dfrac{1 + x + x^2 + x^3}{x}\right)(1 + x + x^2 + x^3)^2$

$= x.(1 + x + x^2 + x^3)^3$

$= x.(1 - x^4)^3.(1 - x)^{-3}.$

Definição 2.2.2 *A função geradora ordinária da sequência* $(a_n) = 1$, *para* $n = 0, 1, 2, ...,$ *é dada por* $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$ *Utilizando a soma infinita da série geométrica, isto é,* $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, *para* $|x| < 1$.

Nos três exemplos anteriores, encontramos uma expressão mais simples para a função geradora. Esta expressão é chamada de fórmula fechada.

Exemplo 24 *Encontrar a função geradora para a sequência* $(a_n) = (0, 4, 0, 4, 0, 4, ...)$.

Por definição, a série de potências procurada é igual a

$f(x) = 0 + 4x + 0.x^2 + 4x^3 + 0.x^4 + 4x^5 + ...$

$f(x) = 4x + 4x^3 + 4x^5 + ...$

$f(x) = 4x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...)$

$f(x) = 4x.\dfrac{1}{1-x^2}$

$f(x) = \dfrac{4x}{1-x^2}$.

Portanto, a função geradora procurada é $f(x) = \dfrac{4x}{1-x^2}$.

Exemplo 25 *Encontre a sequência gerada pela função geradora ordinária* $f(x) = x^2.(1-3x)^{-1}$.

A função pode ser escrita como $x^2.\dfrac{1}{1-3x}$. Assim,

$f(x) = x^2(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + 81x^4 ...)$

$f(x) = x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + 81x^6 + ...$

Portanto $f(x)$ é a função geradora da sequência $(a_n) = (0, 0, 1, 3, 9, 27, 81, ...)$, ou podemos fazer da seguinte forma.

Sabemos que $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ...$, substituindo x por $3x$ na última expressão, temos que $\dfrac{1}{1-3x} = 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + (3x)^4 + ...$ e multiplicando a expressão por x^2, obtemos $f(x) = x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 27x^5 + 81x^6 + ...$

Teorema 2.2.1 *O número de soluções em inteiros não-negativos para a equação* $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$ *é igual a* C^p_{n+p-1}.

Demonstração

Vimos no capítulo 1, que o número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m$ é dada por C^{n-1}_{m-1}.

Utilizando a mesma estratégia. Inicialmente, mudaremos as variáveis. Fazendo $x_i = a_i - 1$, com $a_i \geq 1$ e substituindo na equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$, temos $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + ... + (a_n - 1) = p$. Como foram retirados n fatores iguais a 1, então $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n + p$.

Escrevendo o número $n+p$ como soma de números 1, segue que $1+1+1+1+...+1 = n + p$.

Note que há $(n + p - 1)$ sinais de $+$, e como temos n variáveis, há $(n - 1)$ espaços para serem escolhidos entre os $(n + p - 1)$ sinais de $+$. Portanto, o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + a_n = p$ é $C^{n-1}_{n+p-1} = C^p_{n+p-1}$, pois são combinações complementares.

Assim, dado que cada x_i pode assumir qualquer inteiro não-negativo, a função geradora que "controla" a presença de x_i é $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \dfrac{1}{1-x}$.

E concluímos que a função geradora para este problema é $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^n = \dfrac{1}{(1-x)^n} = (1 - x)^{-n}$.

Para calcularmos o coeficiente de x^p nesta função, precisamos do Teorema de Newton generalizado. Tomando o desenvolvimento em série de Taylon, em torno do zero, da função $(1 + x)^u$, onde u é um número real arbitrário, podemos provar o Teorema de Newton Generalizado para $-1 < x < 1$.

Teorema 2.2.2 *Teorema de Newton Generalizado*

$(1+x)^u = \binom{u}{0}x^0 + \binom{u}{1}x^1 + \binom{u}{2}x^2 + \binom{u}{3}x^3 + ... + \binom{u}{p}x^p$, *onde*

$$\binom{u}{p} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)...(u-p+1)}{p!}, & se\ p > 0 \\ 1, & se\ p = 0 \end{cases}.$$

Teremos $(1+x)^u = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{u}{p} x^p$.

O número $\binom{u}{p}$ definido acima é chamado de coeficiente binomial generalizado. Se u for igual ao número natural n, $\binom{u}{p}$ será o coeficiente binomial usual e o desenvolvimento acima se reduzirá ao desenvolvimento do Binômio de Newton.

Teorema 2.2.3 *O coeficiente de* x^p *na expressão* $(1+x+x^2+x^3+...)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$ *é igual a* $\binom{n+p-1}{p}$.

Demonstração

Sabemos que $(1+x)^u = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{u}{p} x^p$. Substituindo nesta expressão x por $-x$ e u por $-n$, temos

$$(1-x)^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-x)^p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \binom{-n}{p} x^p.$$

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado, o coeficiente de x^p é igual a $\binom{-n}{p}(-1)^p = \frac{(-n)!(-1)^p}{(-n-p)!p!} =$

$$= \frac{(-n).(-n-1)(-n-2)...(-n-p+1).(-n-p)!(-1)^p}{(-n-p)!p!}$$

$$= \frac{(-n).(-n-1)(-n-2)...(-n-p+1).(-1)^p}{p!}$$

$$= \frac{(-1)^p.n(n+1)(n+2)...(n+p-1).(-1)^p}{p!}$$

$$= \frac{(-1)^{2p} n.(n+1)(n+2)...(n+p-1)}{p!}$$

Multiplicando e dividindo a igualdade por $(n-1)!$.

$$\frac{n.(n+1)(n+2)...(n+p-1)(n-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Este valor é o total de formas de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Exemplo 26 *Sendo* $(1+x)^{\frac{1}{4}}$*, a função geradora ordinária para a sequência* (a_n)*, encontrar* a_3*.*

Basta tormarmos o coeficiente de x^3 na expansão de $(1+x)^{\frac{1}{4}}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{4}} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{4}}{p} x^p = \frac{\binom{\frac{1}{4}}{0}}{0!} + \frac{\binom{\frac{1}{4}}{1}x}{1!} + \frac{\binom{\frac{1}{4}}{2}x^2}{2!} + \frac{\binom{\frac{1}{4}}{3}x^3}{3!} + ...$$

Logo, $a_3 = \dfrac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!}$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{4}(\frac{-3}{4})(\frac{-7}{4})}{6}$$

$$a_3 = \frac{7}{128}$$

Exemplo 27 *Usar o teorema binominal para encontrar o coeficiente de* x^3 *na expansão de* $(1+4x)^{\frac{1}{2}}$*.*

$$(1+4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{p} (4x)^p = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} 4x + \frac{\binom{\frac{1}{2}}{2}(4x)^2}{2!} + \frac{\binom{\frac{1}{2}}{3}(4x)^3}{3!} + ...$$

Logo, o coeficiente de x^3 é dado por

$$\frac{4^3\binom{\frac{1}{2}}{3}}{3!} = \frac{64\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6} = \frac{64\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})(\frac{-3}{2})}{6} = 4.$$

Exemplo 28 *(ENQ - 2013-1) Maria tem 10 anéis idênticos e quer distribui-los pelos 10 dedos de suas mãos. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer isso? Suponha que é possível colocar todos os anéis em qualquer um dos dedos.*

Note que o problema é solucionado quando resolvemos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 10$, com $0 \leq x_i \leq 10$.

A função geradora do problema é $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{10})^{10}$. Devemos calcular o coeficiente do termo x^{10}.

Encontrando a fórmula fechada para $f(x)$, obtemos $f(x) = \left(\frac{1-x^{11}}{1-x}\right)^{10}$. Logo, $f(x) = (1-x^{11})^{10}.(1-x)^{-10}$.

Desenvolvendo $(1-x^{11})^{10}$, encontramos $(1-x^{11})^{10} = (1-x^{11})^2(1-x^{11})^8 = (1-2x^{11}+x^{22})(1-x^{11})^8$.

Como estamos interessados no coeficiente de x^{10}, calculamos $(1-x)^{-10} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\binom{-10}{p}x^p$, para $p = 10$.

Assim, o coeficiente de x^{10} é igual a $(-1)^{10}\binom{-10}{10} = \binom{10+10-1}{10} = \binom{19}{10} = \frac{19!}{10!9!} = 92378$ maneiras.

Claro que este problema poderia ter sido resolvido de uma forma mais simples. Percebam o uso das funções geradoras em problemas mais complexos.

Exemplo 29 *Uma bolsa contem 8 moedas de 1 real, 7 moedas de 50 centavos, 4 moedas de 25 centavos e 3 moedas de 10 centavos. De quantas maneiras podemos retirar 6 moedas dessa bolsa?*

Este problema pode ser resolvido usando o princípio da inclusão-exclusão, porém fica mais simples resolvê-lo usando as funções geradoras.

Definimos

x_1: número de moedas de 1 real;

x_2: número de moedas de 50 centavos;

x_3: número de moedas de 25 centavos;

x_4: número de moedas de 10 centavos.

Queremos calcular o número de soluções inteiras não-negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, com $0 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $0 \leq x_3 \leq 4$, e $0 \leq x_4 \leq 3$. Assim, a função geradora que modela o problema é igual a

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2.(1 + x + x^2 + x^3 + x^4).(1 + x + x^2 + x^3) =$$
$$(1\text{+x+x}^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2.(1 + x + x^2 + x^3 + x^4).(1 + x + x^2 + x^3).$$

Encontrando a fórmula fechada para $f(x)$, obtemos

$$f(x) = \left(\frac{1 - x^7}{1 - x}\right)^2 . \left(\frac{1 - x^5}{1 - x}\right) \left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right) = (1 - x^7)^2(1 - x^5)(1 - x^4).(1 - x)^{-4}.$$

Desenvolvendo $(1 - x^7)^2.(1 - x^5).(1 - x^4)$ para calcular a contribuição de $(1 - x)^{-4}$ no produto $(1 - x^7)^2.(1 - x^5).(1 - x^4).(1 - x)^{-4}$, segue que $(1 - x^7)^2.(1 - x^5).(1 - x^4) = 1 - x^4 - x^5 - 2x^7 + x^9 + 2x^{11} + 2x^{12} + x^{14} - 2x^{16} - x^{18} - x^{19} + x^{23}$.

Queremos calcular o coeficiente de x^6.

Como $(1 - x)^{-4} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-4}{p} (-x)^p$, substituimos $p = 6$, $p = 2$ e $p = 1$.

Portanto, o coeficiente de x^6 é igual a $\mathbf{1}.(-1)^6 \binom{-4}{6}$**-1**$.(-1)^2.\binom{-4}{2}$**-1**$.(-1)^2 \binom{-4}{1}$ $= \binom{9}{6} - \binom{5}{2} - \binom{4}{1} = 84 - 10 - 4 = 70$ modos.

Note que os números destacados acima são os coeficientes dos termos de graus zero, quatro e cinco respectivamente.

Para que não haja confusão em relação ao sinal de cada expressão por causa do valor de p, calculamos $(1 - x)^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-4}{p} x^p$ *e modificamos o sinal de acordo com o*

coeficiente. Assim, o coeficiente de x^6 *é igual a* $\boldsymbol{1}.\binom{-4}{6}$**-1**$.\binom{-4}{2}$**-1**$.\binom{-4}{1}$
$= \binom{9}{6} - \binom{5}{2} - \binom{4}{1} = 84 - 10 - 4 = 70$ *modos.*

Exemplo 30 *Encontrar o número de maneiras de se obter um total 28 de 15 pontos ao se jogar, simultaneamente, quatro dados diferentes.*

Como há 6 possibilidades da fase voltada para cima de 1 dado, a função geradora que modela o problema é $f(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$.

Sua fórmula fechada é $f(x) = x^4.(1 - x^6)^4.(1 - x)^{-4} = x^4.(1 - x^6)^2.(1 - x^6)^2.(1 - x)^{-4} = x^4.(1-2x^6+x^{12})(1-2x^6+x^{12}).(1-x)^{-4} = x^4.(1-4x^6+6x^{12}-4x^{18}+x^{24}).(1-x)^{-4} = (x^4 - 4x^{10} + 6x^{16} - 4x^{22} + x^{28}).(1 - x)^{-4}$.

Queremos calcular o coeficiente de x^{15}.

Calculando o valor de $(1 - x)^{-4} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{-4}{p}(-x)^p$, para $p = 11$ e $p = 5$.

Assim, o valor procurado é igual a $\mathbf{1}.\binom{-4}{11}$**-4**$.\binom{-4}{5} = \binom{14}{11} - 4.\binom{8}{5} = \frac{14!}{11!3!} - 4.\frac{8!}{3!5!} = \frac{14.13.12}{3.2} - 4.\frac{8.7.6}{3.2} = 364 - 224 = 140$ maneiras.

2.2.1 Função geradora exponencial

Vimos nos problemas anteriores que a ordem dos objetos é irrelevante e que para resolvermos os exemplos, precisavamos da função geradora ordinária. Porém, quando nos problemas a ordem de escolher determinado número de objetos for importante, utilizamos a função geradora exponencial. A seguir, veremos um exemplo de aplicação das funções geradoras exponenciais para nos ajudar a entender a definição.

Exemplo 31 *Dados três livros diferentes a, b e c, desejamos retirar 4 livros de formas diferentes e colocá-los em ordem numa prateleira obedecendo os seguintes critérios: O livro a deve ser retirado no mínimo uma vez, o livro b no mínimo três vezes e o livro c no mínimo duas vezes. De quantos modos diferentes podemos retirar esses quatro livros?*

Inicialmente, se considerarmos que a ordem de escolha dos livros não importa, a função geradora ordinaria do problema é dada por $(1+ax)(1+bx+b^2x^2+b^3x^3)(1+cx+c^2x^2) = 1+(a+b+c)x+(b^2+ab+bc+ac+c^2)x^2+(b^3+ab^2+ac^2+b^2c+abc+bc^2)x^3+(ab^3+b^3c+ab^2c+b^2c^2+abc^2)x^4+(ab^3c+b^3c^2+ab^2c^2)x^5+ab^3c^2x^6$.

Com este desenvolvimento, calculamos todas as possibilidades de escolha de um livro (Coeficiente de x), de escolha de 2 livros (coeficiente de x^2), de escolha de 3 livros (coeficiente de x^3) e, assim sucessivamente, até a escolha de 6 livros que representa o (coeficiente de x^6).

Deste modo, a solução do problema seria $(ab^3+b^3c+ab^2c+b^2c^2+abc^2)$ que é o coeficiente de x^4.

Mas como estamos interessados em calcular o número de formas levando em consideração a ordem dos livros, temos um caso de permutação com repetição.

Ordenando os livros em cada caso, queremos obter como coeficiente de x^4 o número $\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}$.

Para alterar os polinômios que controlam a presença de cada tipo de livro, introduziremos no coeficiente de x^n o fator $\frac{1}{n!}$.

Assim, teremos $\left(1+\frac{a}{1!}x\right)\left(1+\frac{b}{1!}x+\frac{b^2}{2!}x^2+\frac{b^3}{3!}x^3\right)\left(1+\frac{c}{1!}x+\frac{c^2}{2!}x^2\right)=$

$$1+\left(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!}+\right)x+\left(\frac{b^2}{2!}+\frac{ab}{1!1!}+\frac{bc}{1!1!}+\frac{ac}{1!1!}+\frac{c^2}{2!}\right)x^2+$$

$$\left(\frac{b^3}{3!}+\frac{ab^2}{1!2!}+\frac{ac^2}{1!2!}+\frac{b^2c}{2!1!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{bc^2}{1!2!}\right)x^3+\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right)x^4+$$

$$\left(\frac{ab^3c}{1!3!1!}+\frac{b^3c^2}{3!2!}+\frac{ab^2c^2}{1!2!2!}\right)x^5+\frac{ab^3c^2}{1!3!2!}x^6.$$

Agora, o coeficiente de x^4 é $\left(\frac{ab^3}{1!3!}+\frac{b^3c}{3!1!}+\frac{ab^2c}{1!2!1!}+\frac{b^2c^2}{2!2!}+\frac{abc^2}{1!1!2!}\right)$.

Para obtermos o coeficiente desejado, multiplicaremos e dividiremos a expressão acima por 4!. Portanto, o valor procurado, tomando-se $a = b = c = 1$, será o coeficiente de $\frac{x^4}{4!}$ na expansão de $\left(1 + \frac{x}{1!}\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\right)$, o que resulta em

$$1+3.\frac{x}{1!}+\left(\frac{2!}{2!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{1!1!}+\frac{2!}{2!}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(\frac{3!}{3!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{1!2!}+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{1!1!1!}+\frac{3!}{1!2!}\right)\frac{x^3}{3!}$$

$$+\left(\frac{4!}{1!3!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!1!2!}\right)\frac{x^4}{4!}+\left(\frac{5!}{1!3!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{1!2!2!}\right)\frac{x^5}{5!}+\left(\frac{6!}{1!3!2!}\right)\frac{x^6}{6!}.$$

Definição 2.2.3 *A série de potências* $a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + ... + a_n\frac{x^n}{n!} + ...$ *é a função geradora exponencial da sequência* (a_n).

Exemplo 32 *Encontrar a função geradora para a sequência* $\left(1, -1, \frac{1}{2!}, \frac{-1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{-1}{5!}, ...\right)$.

A função geradora para a sequência $\left(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, ...\right)$ *é* $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ... = e^x$.

Substituindo x por -x, obtemos $q(x) = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + \frac{(-x)^5}{5!} + ... = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + ... = e^{-x}$.

Exemplo 33 *Encontrar a sequência gerada pela função geradora* $e^{2x} + x + x^2$.

Sabemos que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ é a função geradora para a sequência $\left(1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, ...\right)$. Para encontrarmos e^{2x}, basta substituir x por 2x.

Assim, $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + ... + \frac{(2x)^n}{n!} + ... =$

$1 + 2x + \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^4x^4}{4!} + \frac{2^nx^n}{n!} + ...$

Substituindo e^{2x} na função geradora $e^{2x} + x + x^2$, temos que

$$e^{2x} + x + x^2 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^4x^4}{4!} + ... + \frac{2^nx^n}{n!} + ... + x + x^2 =$$

1+3x+3x$^2 + \dfrac{2^3x^3}{3!} + \dfrac{2^4x^4}{4!} + ... + \dfrac{2^nx^n}{n!} + ...$

Logo, a sequência gerada por essa função geradora é $\left(1, 3, 3, \dfrac{2^3}{3!}, \dfrac{2^4}{4!}, \dfrac{2^5}{5!}, \dfrac{2^n}{n!}, ...\right)$.

Exemplo 34 *(AV2 - MA12 - 2013) Penélope quer distribuir 6 presentes entre seus sobrinhos, Alfredo, Bruno, Carlos e Daniel, de modo que cada um receba pelo menos um presente. Todos presentes devem ser distribuídos. Supondo que todos os presentes sejam diferentes, de quantos modos ela pode distribuir os presentes?*

Para resolver, utilizaremos a função geradora exponencial, pois os presentes são diferentes. Como são 6 presentes, cada sobrinho irá receber pelo menos 1 e no máximo 3 presentes.

Portanto, a função geradora exponencial que modela o problema é
$f(x) = \left(x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}\right)^4$.

Queremos calcular o coeficiente de $\dfrac{x^6}{6!}$. Sabemos que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} +, ...,$ assim $f(x) = (e^x - 1)^4$, ou seja, $f(x) = e^{4x} - 4e^{3x} + 6.e^{2x} - 4e^x + 1$ e o coeficiente de $\dfrac{x^6}{6!}$ é igual a $1.4^6 - 4.3^6 + 6.2^6 - 4.1^6 = 1560$ modos.

Observação 2.2.1 *O número de maneiras de distribuirmos n bolas distintas em k caixas distintas, sem que nenhuma caixa fique vazia, é* $T(n, k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k - i)^n$. *Este número é igual ao número de aplicações sobrejetoras.*

Exemplo 35 *Quantas sequências de 0's e 1's podem ser formadas usando-se um número par de 0's e um número par de 1's?*

A função geradora exponencial que controla o número de sequências com um número par de 0's e um número par de 1's é $\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + ... + \dfrac{x^{2r}}{(2r)!}\right)^2$.

Sabemos que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... \dfrac{(x)^r}{r!} + ...$ e que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + ... \frac{(-x)^r}{r!} + ...$$

Somando as duas expressões acima teremos $e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + 2\frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2r}}{(2r)!}$, isto é, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2r}}{(2r)!} + ...$

Logo, $\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{x^{2r}}{(2r)!} + ...\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}$, e o coeficiente procurado é $\frac{2^r + (-2)^r}{4}$.

2.3 Aplicações das funções geradoras

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações das funções geradoras.

2.3.1 Números de catalão

Definição 2.3.1 *Considere o produto de n números em uma ordem específica, $y = x_1x_2x_3 \ldots x_n$, e seja C_n o número de maneiras de calcular este produto por sucessivas multiplicações de exatamente dois números em cada parte sem alterar a ordem inicial.*

Assim,

Para $n = 1$, $C_1 = 1$;

Para $n = 2$, ou seja, $y = x_1x_2$, $C_2 = 1$;

Para $n = 3$, ou seja, $y = x_1x_2x_3$. Teremos as seguintes possibilidades $(x_1x_2)x_3$ ou $x_1(x_2x_3)$, $C_3 = 2$.

Iremos encontrar uma expressão para C_n usando recorrência.

Sejam $y_k = x_1x_2x_3...x_k$ e $y_{n-k} = x_{k+1}...x_n$. O número de maneiras de calcular y_k é C_k e o número de maneiras de se calcular y_{n-k} é C_{n-k}. Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de calcular $y_k.y_{n-k}$ é C_kC_{n-k}, para $k = 1, 2, ..., n-1$.

Portanto, $C_n = C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + ... + C_{n-1}C_1$, $n = 2.3,....$ Assim, a função geradora para o nosso problema é $C(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n t^n$.

Multiplicando a relação de recorrência por t^n e tomando $n = 2, 3, 4, ...$, teremos que $C(t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n t^n = \sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k})t^n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k t^k\right)(\sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j)$.

Logo, $C(t) - t = (C(t)^2)$, ou seja, $(C(t))^2 - C(t) + t = 0$.
Resolvendo a equação do segundo grau em $C(t)$, temos $C(t) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2}$.

Assim, $C'(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4t}}{2}$ e $C''(t) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4t}}{2}$. Como $C(0) = 0$, $C''(t)$ é rejeitada, pois $C''(0) = 1$. Logo, $C(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4t}$.

Usando o Binômio de Newton generalizado e expandindo em potências de t,
$C(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(1-4t)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{2n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$.
Logo, $C_n = (-1)^{n-1}.2^{2n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}$.

$$C_n = (-1)^{n-1}2^{2n-1}\frac{\frac{1}{2}!}{\left(\frac{1}{2} - n\right)!n!}$$

$$= (-1)^{n-1}.2^{2n-1}.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)...\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}$$

$$= (-1)^{n-1}.2^{2n-1}.\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)...\left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!}$$

$$= \frac{2^{2n-1}.1.3.5.7...(2n-3)}{2^n n!}.\frac{2.4.6(2n-2)}{2.4.6(2n-2)}$$

$$= \frac{2^{n-1}.(2n-2.).(2n-3)...7.6.5.4.3.2.1}{2^n n!2.4.6...2(n-1)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$ e concluimos que

$$C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, n = 1, 2, ...$$

2.4 Resolução de equações de recorrências

Conhecemos algumas formas para resolver as relações de recorrências lineares não homogêneas. Utilizaremos agora as funções geradoras. Esta técnica permite encontrar as soluções particular e homogênea de a_n e também incorpora as condições inicias do problema. No entanto, podemos obter mais resultados com este método. Para o próximo exemplo, faz-se necessário o conhecimento da técnica de derivação de uma variável.

Exemplo 36 *Resolva a relação de recorrência* a_n*-3*$a_{n-1} = n$*, para* $n \geq 1$ *e* $a_0 = 1$.

Para $n = 1$, $a_1 - 3a_0 = 1$;

Para $n = 2$, $a_2 - 3a_1 = 2$;

Para $n = 3$, $a_3 - 3a_2 = 3$.

Multiplicando a primeira das equaçoes por x, a segunda por x^2,a terceira por x^3 e assim sucessivamente, obtemos

$$\begin{array}{l}
a_1x^1 - 3a_0x^1 = 1x^1 \\
a_2x^2 - 3a_1x^2 = 2x^2 \\
a_3x^3 - 3a_2x^3 = 3x^3 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
a_nx^n - 3a_1x^n = nx^n
\end{array}$$

Somando as equações, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Queremos determinar a_n em função de n. Assim, seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ a função geradora para a sequência $a_0, a_1, a_2, ...,$.

Substituindo na expressão acima, $f(x) - a_0 - 3x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = f(x)$e $a_0 = 1$ e o lado esquerdo da equação muda para

$f(x) - 1 - 3xf(x)$.

Considere a função $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Sua primeira derivada, $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ...$

Portanto, $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ e $f(x) - 1 - 3xf(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Isolando $f(x)$, temos que $f(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{x}{(1-3x)(1-x)^2}$.

Utilizando o método da decomposição em frações parciais,

$$\frac{1}{1-3x} + \frac{x}{(1-3x)(1-x)^2} = \frac{1-x+x^2}{(1-3x)(1-x)^2} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{(1-x)^2}.$$

$$A + B + C + x(-2A - 4B - 3C) + x^2(A + 3B) = 1 - x + x^2.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ \text{2A+4B+3C=1} \\ \text{A+3B=1} \end{cases}$$

Encontramos $A = \frac{7}{4}$, $B = \frac{-1}{4}$ e $C = \frac{-1}{2}$.

Logo, $f(x) = \frac{\frac{7}{4}}{1-3x} + \frac{\frac{-1}{4}}{1-x} + \frac{\frac{-1}{2}}{(1-x)^2}$.

E finalmente, teremos que calcular o coeficiente de x^n em cada parte de $f(x)$.

Para $\frac{\frac{7}{4}}{1-3x}$, encontramos $\frac{7}{4}.\frac{1}{1-3x} = \frac{7}{4}(1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + ...)$ cujo coeficiente é $\frac{7}{4}.3^n$;

Para $\frac{\frac{-1}{4}}{1-x}$, encontramos $-\frac{1}{4}.\frac{1}{1-x} = -\frac{1}{4}(1 + x + x^2 + x^3 + ...)$ cujo coeficiente é

$-\dfrac{1}{4}$ e para $\dfrac{\frac{-1}{2}}{(1-x)^2}$, encontramos $-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{(1-x)^2} = -\dfrac{1}{2}.(1-x)^{-2}$ cujo coeficiente é $\left(-\dfrac{1}{2}\right).(n+1)$.

Portanto, a solução da equação de recorrência é $a_n = \dfrac{7}{4}.3^n - \dfrac{1}{2}n - \dfrac{3}{4}$.

Capítulo 3

Partições de inteiros

A teoria de partições faz parte da Análise Combinatória que é estudada em Matemática Discreta em alguns cursos de graduação. Esta teoria foi desenvolvida no século 18 por Euler e reforçada por Hardy, Ramanujan e Rademacher, e é composta pela combinatória e pela teoria dos números.

Nesta seção usaremos os gráficos de Ferrers para fornecer provas bijetivas envolvendo identidades de partições, utilizaremos também as funções geradoras para partições. A primeira abordagem é gráfica e a segunda é analítica e veremos as ligações entre elas.

Colocaremos notações e linguagem simples que serão apresentadas no inicio de cada item para o maior entendimento do assunto.

Definição 3.0.1 *A partição de um inteiro positivo n é uma maneira de representá-lo como soma de inteiros positivos, chamadas de partes da partição.*

Por exemplo, as partições dos inteiros 2,3,4 e 5 são as seguintes

$$\begin{array}{cccc} & & & 5 \\ & & 4 & 4+1 \\ & 3 & 3+1 & 3+2 \\ 2 & 2+1 & 2+2 & 3+1+1 \\ 1+1 & 1+1+1 & 2+1+1 & 2+2+1 \\ & & 1+1+1+1 & 2+1+1+1 \\ & & & 1+1+1+1+1 \end{array}$$

Denotamos o número de partições de um inteiro positivo por $p(n)$. Assim dos números acima temos que $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$ e $p(5) = 7$. O crescimento do número de partições de um inteiro é muito rápido, o que torna inviável listar todas as possibilidades à medida que n aumenta. Para exemplificar o crescimento de $p(n)$, listamos alguns valores: $p(1) = 1$, $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(50) = 204.226$, $p(200) =$ 3.972.999.029.388.

3.1 Representação gráfica de uma partição

Definição 3.1.1 *A representação gráfica de uma partição ou gráfico de Ferrers é uma representação gráfica através de pontos que são distribuídos na horizontal (linhas) e distribuídos na vertical (colunas) em ordem decrescente. O número de pontos colocados é igual a cada uma de suas partes.*

Exemplo 37 *A partição* $5 + 3 + 2 + 1 + 1$, *de 12 é representada graficamente por*

$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$

$\bullet\bullet\bullet$

$\bullet\bullet$

$\bullet$

$\bullet$

Observe que cada quantidade de pontos é distribuído na horizontal.

Exemplo 38 *A representação gráfica da partição de 10,* $3 + 3 + 2 + 1 + 1$ *é*

$\bullet\bullet\bullet$

$\bullet\bullet\bullet$

$\bullet\bullet$

$\bullet$

$\bullet$

Estes gráficos nos ajudarão a demonstrar combinatorialmente as identidades entre as partições que veremos mais adiante.

3.2 Partição Conjugada

Definição 3.2.1 *Representamos a partição conjugada de uma partição n, trocando as linhas pelas colunas da referida partição.*

Exemplo 39 *Dada a partição* $4 + 4 + 2$*, represente graficamente a partição conjugada.*

Trocando as linhas pelas colunas, encontraremos a partição $3 + 3 + 2 + 2$. Observe graficamente abaixo.

Partição		*Partição conjugada*
• • • •	→	• • •
• • • •		• • •
• •		• •
		• •

Note que às vezes a partição e sua conjugada têm a mesma representação gráfica. Quando isto acontece, dizemos que as partições são autoconjugadas.

Exemplo 40 *A partição 3+2+1 é autoconjugada, pois a partição conjugada é idêntica.*

Partição		*Partição conjugada*
• • •	→	• • •
• •		• •
•		•

3.3 Funções geradoras para partições

Vimos no capitulo 2, as funções geradoras e suas aplicações nos problemas de contagem e que as respostas dos problemas são associadas aos expoentes das variáveis destas funções. Nesta seção, apresentaremos as funções geradoras para partições e alguns resultados que obteremos a partir delas.

Exemplo 41 *De quantas formas podemos representar o número 4 como soma de vários números naturais?*

Para resolver este problema, devemos encontrar uma função geradora para partições em partes de no máximo 4. Assim, $f(x) = (1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^2+x^4)(1+x^3)(1+x^4)$.

O coeficiente de x^4 na expansão desta série é a resposta do nosso exemplo. Desenvolvendo, $f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 5x^5 + 6x^6 + 7x^7 + 7x^8 + 5x^{10} + 5x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + x^{14} + x^{15}$.

Portanto, há 5 partições de 4 da forma pedida.

Exemplo 42 *Encontrar a função geradora ordinária para o número de partições de n em que todas as partes são ímpares e nenhuma supera 7.*

A função geradora é $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x^3+x^6)(1+x^5)(1+x^7)$ onde temos as partes de $1, 3, 5$ e 7 respectivamente e nenhuma parte supera 7.

Definição 3.3.1 *A função geradora para partições de n é o produto* $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ...)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + ...)(1 + x^k + x^{2k} + ...)$ *que representa o número de partições de n em partes de* $1, 2, 3, ..., k$ *respectivamente.*

Assim, $$\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)...\left(\frac{1}{1-x^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n.$$

Definição 3.3.2 A Função geradora para partes ímpares distintas é a expressão $(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)...(1 + x^{2k+1})...$ que representa o número de partições de n em partes ímpares distintas. Denotaremos esta função geradora por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}p_d^i(n)x^n$.

Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} p_d^i(n)x^n = \prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})$.

Definição 3.3.3 A Função geradora para partes ímpares é o produto $(1+x+x^2+x^3+ ...)(1+x^3+x^6+...)(1+x^5+x^{10}+...)...$ que representa o número de partições de n em partes ímpares. Denotaremos esta função geradora por $\sum_{n=0}^{\infty} p^i(n)x^n$.

Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} p^i(n)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)...\left(\frac{1}{1-x^{2k+1}}\right)...$, ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} p^i(n)x^n = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}}$.

Definição 3.3.4 A Função geradora para partes distintas é a expressão $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)...(1+x^n)...$ que representa o número de partições de n em partes distintas. Denotaremos esta função geradora por $\sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n$. Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$.

3.4 Teorema

Teorema 3.4.1 *Para $n \in \mathbb{N}$, temos* $\sum_{n=0}^{\infty} p^i(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n$.

Demonstração

Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)...(1+x^k)....$ Como $1-x^2 = (1+x)(1-x)$, $1-x^4 = (1+x^2)(1-x^2)$,..., $1-x^{2k} =$

$(1+x^k)(1-x^k)$, temos $\sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n = \left(\frac{1-x^2}{1-x}\right)\left(\frac{1-x^4}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^6}{1-x^3}\right)...\left(\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}\right)... =$

$\frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)...(1-x^{2k})}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)...(1-x^k)}$, simplificando obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)1-x^5)(1-x^7)...} = \prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} p^i(n)x^n.$$

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} p^i(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p^d(n)x^n$.

Definição 3.4.1 A Função geradora para partes pares é o produto $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + ...)(1 + x^6 + x^{12} + x^{18} + ...)...$ que representa o número de partições n em partes pares. Denotaremos esta função geradora por $\sum_{n=0}^{\infty} p^p(n)x^n$.

Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} p^p(n)x^n = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)...\left(\frac{1}{1-x^{2k}}\right)... = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}}$.

Definição 3.4.2 A Função geradora para partes pares distintas é a expressão $(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)...(1+x^{2k})...$ que representa o número de partições de n em partes pares distintas. Denotaremos esta função geradora por $\sum_{n=0}^{\infty} p_d^p(n)x^n$.

Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} p_d^p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{2k})$.

Usando ideias semelhantes as que foram vistas para encontrar as funções geradoras para alguns tipos de partições, podemos obter outras funções geradoras, veja a tabela

Função geradora	Para a sequência de partições de n com partes
$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + x^{2^k})$	Potências distintas de 2
$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^{3^k})$	Cubos distintos
$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^{k^3})}$	Cubos
$\prod_{p\ primo}^{\infty} \frac{1}{1 - x^p}$	Primos

Exemplo 43 *Provar que todo inteiro positivo pode ser expresso de maneira única como soma de potências distintas de 2.*

Demonstração

Inicialmente, observe alguns exemplos: $10 = 2^1 + 2^3, 20 = 2^2 + 2^4, 60 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$.

Sabemos que a função geradora para potências distintas de 2 é igual a $\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2^k}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)...(1+x^{2^k})....$ O coeficiente de x^n desta função geradora determina o número de formas de se escrever n como soma de potências distintas de 2.

Assim, devemos mostrar que o coeficiente de x^n da expansão $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)...(1+x^{2^k})...$ é igual a 1.

Note que $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)...(1+x^{2^k})... = 1+x+x^2+x^3+x^4+...$ e sabemos que $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4...$, ou seja,

$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})...(1+x^{2^k})... =$

$(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})...(1+x^{2^k})... =$

$(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)...(1+x^{2^k})... =$

$(1-x^8)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})...(1+x^{2^k})... = 1.$

Corolário 3.4.1 *Mostre que o número de partições de n em partes pares distintas é igual ao número de partições de n em partes que são congruentes a 2mod4.*

Demonstração

Sabemos que o número de partições em partes pares distintas é igual a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_d^p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{2k}) = (1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)(1+x^{10})....$$

Como $1+x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2}, 1+x^4 = \frac{1-x^8}{1-x^4}, ..., 1+x^k = \frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$, substituindo na expressão acima, obtemos $(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)(1+x^{10})...=$

$$\left(\frac{1-x^4}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^8}{1-x^4}\right)\left(\frac{1-x^{12}}{1-x^6}\right)\left(\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\right)\left(\frac{1-x^{20}}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1-x^{24}}{1-x^{12}}\right)\left(\frac{1-x^{28}}{1-x^{14}}\right)...$$ e simpli

ficando, encontramos $(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)(1+x^{10})... =$

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{14}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{4k-2}}\right)... = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{4k-2}}.$$

Portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} p_d^p(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n/partes \equiv 2mod4)x^n$.

Capítulo 4

Proposta de sequência didática

No início da vida escolar, algumas crianças criam uma "barreira" que as impede de aprender matemática. Isso se deve, muitas vezes, ao fato dos próprios pais, e até de certos professores, afirmarem que Matemática é difícil, criando assim, obstáculos e dificultando a aprendizagem. Além disso, o número elevado de estudantes em uma sala de aula, a falta de estrutura física das escolas, a falta de motivação do professor em exercer suas atividades e a falta de interesse e motivação dos alunos contribuem para que esta disciplina seja temida e que somente os "bons alunos"consigam aprender os conteúdos, excluindo, assim, boa parte dos estudantes.

Segundo Burochovitch e Bzuneck (2004,p.13), " [...] a motivação tornou-se um problema de ponta em educação, pela simples constatação de que, em paridade de outras condições, sua ausência representa queda de investimento pessoal de qualidade nas tarefas de aprendizagem". Ou seja, a desmotivação do professor em ministrar suas aulas, influencia o desempenho dos alunos, pois os mesmos não se sentem mobilizados a aprender. Da mesma forma, o desinteresse dos estudantes limita o aprendizado dos mesmos.

Diante dessa situação, o ensino de matemática se torna cada vez mais um desafio para o docente desta área, tendo que se aperfeiçoar e buscar novas metodologias que o auxilie nos processos de ensino e de aprendizagem. Por isso, se fez necessário que profissionais da área da Educação Matemática buscassem novas alternativas de abordagem dos conteúdos, fazendo uso de estratégias que permitam uma melhor aprendizagem.

A Didática da Matemática visa contribuir nesse processo ao discutir possibilidades de solução dos problemas de ensino e de aprendizagem, abordando os conteúdos de forma a atrair a atenção dos alunos e suprir as dificuldades de transmissão dos mesmos, sem perder o rigor matemático.

Nesse contexto, surge uma proposta de ensino que tem por base as sequências didáticas. Estas têm como objetivo criar situações que possibilitem ao professor perceber os comportamentos cognitivos dos alunos, quando os mesmos estão envolvidos em fenômenos que não estão habituados, levando-os a serem agentes ativos no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Brousseau [1] (1986, p.8),

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educacional (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos.

Para tanto, a intervenção do professor é necessária para o desenvolvimento da aula, visando uma prática que dê liberdade ao aluno para expor suas ideias, deixando de ser um mero expectador para se tornar um sujeito ativo na aprendizagem, e o professor, da mesma forma, terá outros meios de avaliar o discente, além da avaliação escrita, como acontece no ensino tradicional.

Douady (1993, p.2) nomeia esse processo de Engenharia Didática, que ele explica,

[1] Guy Brousseau (1933) é um educador matemático francês, um dos pioneiros da didática da matemática, desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas.

> Como sendo uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor.

Nesse âmbito, podemos entender a Engenharia Didática como um conjunto de situações que serão reproduzidas pelos alunos, chamadas de situações didáticas, nas quais os docentes oportunizam condições para o avanço no desempenho dos discentes.

Com base nas ideias de Brousseau (1986) e de Douady (1993), elaboramos uma proposta de sequência didática para ser aplicada na Educação Básica, envolvendo Análise Combinatória e as Funções Geradoras com o objetivo de propor aos docentes novas formas de abordagens do conhecimento matemático referentes aos assuntos.

Apresentamos, também, o aparato teórico fundamental de funções geradoras para modelar os problemas de combinatória e partições de inteiros. Com isso, pretendemos desenvolver um trabalho que possa servir de orientação na realização de pesquisas futuras, voltadas para o aprimoramento das práticas de ensino da Matemática na Educação Básica, e ainda, auxiliar docentes na melhoria do processo de ensino.

A seguir, mostramos uma proposta de sequência didática que tem como foco o ensino de conceitos de Análise Combinatória e Funções Geradoras.

4.1 Objetivos

- Conhecer e aplicar os princípios básicos de contagem;
- Oportunizar a associação entre a Análise Combinatória e as funções geradoras;
- Proporcionar aos discentes e docentes outras formas de abordarem os conteúdos de Análise Combinatória e Funções Geradoras;

- Auxiliar os docentes em suas aulas através das sequências didáticas;
- Manipular e realizar as operações entre polinômios;
- Compreender o desenvolvimento do Binômio de Newton Generalizado e o cálculo dos coeficientes.

4.2 Níveis sugeridos para aplicação

- Segundo ano do Ensino Médio;
- Terceiro ano do Ensino Médio;
- Cursos preparatórios para Olimpíadas de Matemática.

4.3 Duração estimada

- No Ensino Médio, de 8 a 10 aulas;
- Em cursos preparatórios para Olimpíadas de Matemática, seria incluído no curso de Matemática Discreta com duração de 60 horas para aprofundamento e utilização de materiais selecionados pelo professor.

4.4 Desenvolvimento

A sequência didática que propomos está organizada em duas partes. Na primeira parte apresentamos um problemas de Análise Combinatória e na segunda parte um problema de Funções geradoras.

4.4.1 Primeira parte

Na primeira parte, apresentamos um problema de Análise Combinatória e desenvolvemos todo aparato teórico fundamental para a resolução detalhada do problema, bem como exemplos, exercícios, situações-problemas e possíveis perguntas dos alunos sobre o assunto.

Buscamos utilizar todo o conteúdo de Análise Combinatória, desde os princípios aditivo e multiplicativo até o cálculo da quantidade de soluções de equações com coeficientes unitários. Cada tópico é desenvolvido utilizando estes princípios fundamentais para as demonstrações de cada fórmula aplicada. Os exercícios propostos foram selecionados por nível de dificuldade, desde os mais simples até os mais elaborados, visando o desenvolvimento e aprofundamento de cada item pelo aluno. Em cada fase, o discente, orientado pelo professor, irá expor a sua estratégia de resolução da questão.

Nosso objetivo imediato é que o aluno obtenha ferramentas teóricas necessárias para solucionar problemas como o problema 1 abaixo. Não desejamos que o discente saiba previamente como resolver este problema de forma decorativa. Buscamos criar situações problemas em que o aluno possa desenvolver aparato teórico arrojado de tal forma que este consiga compreender a solução geral do problema.

Problema 1 *De quantos modos podemos distribuir 30 laranjas para 4 crianças de modo que cada uma receba pelo menos 2 laranjas?*

A seguir, apresentamos uma possibilidade de solução para o problema 1. Escolhemos esta resolução, porque é a mais proposta nos livros didáticos, usa linguagem simples e se baseia no conteúdo exposto no capitulo 1 deste trabalho.

Solução

Inicialmente, modelamos o problema. Seja x_i a quantidade de laranjas que as crianças irão receber, com $i = 1, 2, 3, 4$. Assim, teremos que resolver a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, com $x_i \geq 2$.

Neste problema, utilizamos a ideia de encontrar o número de soluções para uma equação linear do tipo abaixo em inteiros não negativos. Como cada criança deve ganhar no mínimo 2 laranjas, distribuiremos para cada criança as 2 duas laranjas e a equação resultante será $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$, com $x_i \geq 0$. Matematicamente, fazendo a mudança $x_i = a_i + 2$, com $a_i \geq 0$, encontramos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$.

Sabendo que o número de soluções em inteiros não negativos de uma equação do tipo $x_1 + x_2 + x_3 + x_n = p$ é C^{n-1}_{n+p-1}, no nosso caso $p = 22$ e $n = 4$. Portanto, há $C^3_{25} = \dfrac{25!}{22!3!} = \dfrac{25.24.23}{3.2} = 2300$ modos.

Observe que para resolver o problema 1, precisamos modelá-lo usando uma equação linear, para daí, encontrar a solução desta. Por isto, definimos uma equação linear e sua solução.

Observação 4.4.1 *Uma n-upla é uma sequência ordenada de n elementos que será solução da equação linear.*

Definição 4.4.1 *Chamamos de equação linear nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, toda equação do tipo $a_1.x_1 + a_2.x +_2 +a_3.x +_3 +... + a_n.x+_n = b$, onde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ e b são números reais e denominados coeficientes e termo independente respectivamente. Uma solução desta equação será a n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que a satisfaz.*

Exemplo 44 *A quádrupla $(1, 2, 0, 5)$ é solução da equação $2x_1 + 3x_2 – 5x_3 + x_4 = 13$.*

Para verificar se realmente a quádrupla $(1, 2, 0, 5)$ é solução da equação acima, basta substituir os valores nas respectivas variáveis. Assim, temos que $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0$ e $x_4 = 5$. Substituindo os valores na equação $2x_1 + 3x_2 – 5x_3 + x_4 = 13$ segue que $2.1 + 3.2 – 5.0 + 5 = 8 + 5 = 13$. Como a igualdade foi verificada, a quádrupla $(1, 2, 0, 5)$ é solução da equação $2x_1 + 3x_2 – 5x_3 + x_4 = 13$.

Observação 4.4.2 *Alunos do Ensino Médio costumam resolver esta questão tentando encontrar algumas quádruplas que sejam solução da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, com $x_i \geq 2$. Por exemplo, $(2, 5, 8, 15)$ e $(5, 10, 6, 9)$ são soluções para a equação acima. Mas, mesmo assim não conseguem listar todas as possibilidades facilmente.*

Vejamos agora um exemplo que será possível a contagem da quantidade de soluções.

Situação-Problema 1 *Encontrar o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 = 6$.*

Solução

A solução deste problema são os pares ordenados $(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$. Portanto, obtemos 5 soluções. Este problema poderia ser resolvido da seguinte forma. Escrevendo o número 6 como partições de 1, teremos $1+1+1+1+1+1=6$.

Note que há 5 sinais de + para ser escolhido apenas 1 que será colocado entre as variáveis x_1 e x_2. Logo, encontramos $C_5^1 = 5$ soluções.

Diante disto, podemos enunciar e demonstrar um teorema que nos ajuda a calcular, de forma geral, a quantidade de soluções inteiras não negativas de uma equação linear com coeficientes unitários.

Teorema 4.4.1 *O número de soluções inteiras não negativas da equação* $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$ *é dado por* C_{n+p-1}^{p}.

Demonstração

Vimos que o número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m$ é dada por C_{m-1}^{n-1}.

Utilizando a mesma estratégia. Inicialmente, mudamos as variáveis. Fazendo $x_i = a_i - 1$, com $a_i \geq 1$ e substituindo na equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$, temos $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + (a_3 - 1) + ... + (a_n - 1) = p$. Como foram retirados n fatores iguais a 1, então $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n + p$.

Escrevendo o número $n+p$ como soma de números 1, segue que $1+1+1+1+...+1 = n+p$.

Note que há $(n+p-1)$ sinais de $+$, e como temos n variáveis, há $(n-1)$ espaços para serem escolhidos entre os $(n+p-1)$ sinais de $+$. Portanto, o número de soluções em inteiros não-negativos da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + a_n = p$ é $C_{n+p-1}^{n-1} = C_{n+p-1}^{p}$, pois são combinações complementares.

No exemplo abaixo, aplicamos os conhecimentos do teorema, simplesmente para calcular a quantidade de soluções inteiras não negativas, já que dispomos da equação.

Mas, antes de resolver, perceba que cada variável pode assumir o valor zero, ou seja, $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ e $d \geq 0$.

Exemplo 45 *Quantas soluções inteiras positivas tem a equação $a + b + c + d = 10$?*

Solução

Como queremos calcular a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação $a + b + c + d = 10$, basta tomar $n = 4$ e $p = 10$. Substituindo, encontramos $C^{10}_{4+10-1} = C^{10}_{13} = 286$ soluções.

Note que podemos calcular usando a combinação complementar, já que n–$1 = 3$ e teremos $C^{3}_{13} = C^{10}_{13} = 286$ soluções.

No exemplo abaixo, veremos um caso particular do teorema estudado. Excluimos as soluções nulas, ou seja, cada variável assume valores maiores ou iguais a 1. Deste modo, utilizamos uma estratégia de simples compreensão, escrevendo o número dado em soma de números 1's.

Exemplo 46 *De quantos modos diferentes podemos distribuir 10 bombons idênticos em 4 caixas diferentes, sabendo que cada caixa deve conter no mínimo 1 bombom?*

Solução

Seja x_i o número de bombons na caixa i, para $i = 1, 2, 3, 4$. Logo, teremos que calcular o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, com $x_i \geq 1$. Assim, escrevemos o número 10 como soma de números 1's e teremos $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$.

Veja que no problema, temos 4 variáveis e entre elas temos 3 sinais de +, isto é, dos nove sinais de + que utilizamos para escrever o número 10 como soma de números 1's, devemos escolher 3 sinais de + que ficarão entre as 4 variáveis.

Portanto, obtemos $C^{3}_{9} = 84$ modos diferentes.

Desta forma, o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = m$, com $m > 0$, será dado por C^{n-1}_{m-1}.

Percebam que ao excluir a solução nula para cada variável, o número de soluções diminui consideravelmente.

Agora, veremos dois exercícios de aplicação do exemplo anterior, para que o aluno reforce os conhecimentos estudados. O primeiro exercício é algébrico e o segundo requer mais atenção, por se tratar de um problema do quotidiano.

Exercício 1 *Quantas soluções inteiras positivas tem a equação $x + y + z + w + t = 7$?*

Solução

Da mesma forma do exemplo, $m - 1 = 6$ e $n - 1 = 4$. Logo, há $C_6^4 = 15$ soluções.

Exercício 2 *De quantas maneiras podemos comprar 5 sorvetes de uma bola em uma loja que oferece 3 sabores diferentes, sabendo-se que teremos que escolher cada sabor de sorvete pelo menos 1 vez?*

Solução

Seja x_1 o número de sorvetes que compramos do 1º sabor, x_2 o número de sorvetes que compramos do 2º sabor e x_3 o número de sorvetes que compramos do 3º sabor. Teremos que resolver a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, com $x_i \geq 1$, ou seja, devemos calcular o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 5$.

Daí, segue que $m - 1 = 4$ e que $n - 1 = 2$. Portanto, há $C_4^2 = 6$ maneiras.

Uma possível pergunta dos alunos seria. E se tivéssemos um problema em que fosse possível a não utilização de pelo menos um dos objetos? Isto é, como resolveríamos uma equação com soluções em inteiros não negativos?

Vimos como responder a esta pergunta, aplicando o teorema. Mas, a partir de agora, usamos outra estratégia, que é a mudança de variável.

Situação-Problema 2 *Encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$.*

Solução

Nas soluções inteiras não negativas, as variáveis podem assumir o valor zero, por isso antes de resolvermos devemos ajustar cada variável. Como $x_i \geq 0$, faz $x_i = a_i - 1$, com $a_i \geq 1$. Substituindo na equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$, obtemos $a_1 - 1 + a_2 - 1 + a_3 - 1 + a_4 - 1 + a_5 - 1 = 7$, o que resulta em $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 12$, com $a_1 \geq 1$.

Note que com o ajuste de cada variável, o problema se transforma nos estudados anteriormente. Assim, $m - 1 = 11$ e $n - 1 = 4$. Logo, teremos $C_{11}^{4} = 330$ soluções não negativas.

Seguindo a mesma linha, mostramos um problema de aplicação na vida real.

Exercício 3 *De quantos modos podemos distribuir 18 livros iguais em três caixas diferentes sem nenhuma restrição?*

Solução

Seja x_1 o número de livros distribuídos do 1ª caixa, x_2 o número de livros distribuídos do 2ª caixa e x_3 o número de livros distribuídos do 3ª caixa. Teremos que resolver a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 18$, com $x_i \geq 0$, pois não tem restrição. Mudando a variável do problema, faz $x_i = a_i - 1$, com $a_i \geq 1$.

Substituindo na equação $x_1+x_2+x_3 = 18$, o que resulta em $a_1-1+a_2-1+a_3-1 = 18$, ou seja, $a_1 + a_2 + a_3 = 21$. Logo, há $C_{20}^{2} = \dfrac{20!}{2!.18!} = \dfrac{20.19}{2} = 190$ modos.

Com esta estrutura de sequência didática, é possível que o aluno consiga resolver problemas como o problema 1, proposto e resolvido no inicio desta sequência.

4.4.2 Segunda parte

Na segunda parte, buscamos mostrar como transformar o saber científico em saber a ser ensinado na escola.

Definimos formalmente séries de potências sem nos preocuparmos com a convergência, já que estamos interessados apenas nos coeficientes das funções geradoras. Em seguida, definimos funções geradoras e suas propriedades e exemplificamos com sequências.

Esta passagem requer mais atenção, porque temos as funções geradoras ordinárias (que não levam em consideração a ordem dos objetos) e as funções geradoras exponenciais (que consideram a ordem dos objetos). Após conhecer os tipos de funções geradoras e resolver exercícios, nos quais, em alguns será dada a sequência e será solicitado que seja encontrada a função geradora e, em outros será dada a função geradora e o estudante deve encontrar a sequência. Na sequência, apresentamos o Binômio de Newton Generalizado para calcularmos os coeficientes das funções geradoras, ou seja, de modo análogo ao que foi feito na primeira etapa, desenvolvemos o aparato teórico fundamental para a resolução detalhada do problema, bem como exemplos, exercícios, situações-problemas e possíveis perguntas dos alunos sobre o assunto, de tal forma que estes consigam compreender a solução geral do problema.

Nosso objetivo imediato é que o aluno obtenha ferramentas teóricas necessárias para solucionar problemas como o problema 2 e não esperamos que o discente saiba previamente como resolver este problema de forma decorativa.

Problema 2 *De quantos modos podemos retirar (sem olhar) 10 bolas de uma caixa que contém pelo menos 10 bolas brancas, pelo menos 10 vermelhas e pelo menos 10 azuis?*

A seguir, apresentamos uma possibilidade de solução para o problema 2 . Escolhemos esta resolução, por que é de fácil entendimento, linguagem simples e segue conteúdo exposto no capitulo 2 deste trabalho.

Solução

Inicialmente, teremos que modelar o problema com a função geradora. Como devemos ter no mínimo 10 bolas de cada cor, a função geradora pedida é $(1 + x + x^2 + ... + x^{10})^3$.

O próximo passo é encontrar a fórmula fechada.

Assim, $(1 + x + x^2 + ... + x^{10})^3 = \left(\dfrac{1 - x^{11}}{1 - x}\right)^3 = (1 - x^{11})^3(1 - x)^{-3}$.

Observe que a primeira expressão representa a soma dos termos de uma progressão geométrica. Desenvolvendo, $(1 - x^{11})^3 = 1 - 3x^{11} + 3x^{22} – x^{33}$.

Queremos calcular o coeficiente de x^{10} no desenvolvimento de $(1-x^{11})^3(1-x)^{-3}$. Sabemos que $(1-x^{11})^3 = 1–3x^{11}+3x^{22}–x^{33}$. Logo a expressão $(1-x)^{-3}$ contribuirá com $p = 10$.

Assim, utilizando o Binômio de Newton generalizado, $(1-x)^{-3} = \sum_{p=0}^{\infty} C^p_{-n}(-x)^p$, para $p = 10$, temos que o coeficiente de x^{10} é igual a $(-1)^{10}C^{10}_{-3} = C^{10}_{-3}$.

Pelo binômio de Newton generalizado obtemos $C^{10}_{-3} = C^{10}_{3+10-1} = C^{10}_{12} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12.11}{2} = 66$ modos.

Observe que para resolver o problema 2 é necessário que o aluno saiba manipular polinômios e suas operações. Para isto, apresentamos algumas definições que serão úteis no decorrer desta sequência didática.

Definição 4.4.2 *Uma série da forma* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, *onde* $a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$, *e* x *é a variável é uma série de potências centrada em* $x = 0$.

Exemplo 47 $1 + x + x^2 + ...$ *e* $1 - x$ *são séries de potências.*

Definição 4.4.3 *Sejam* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + ...$ *duas séries de potências. A soma destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de* x^n *é* $a_n + b_n$ *e o produto destas duas séries é a série de potências na qual o coeficiente de* x^n *é* $a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + ... + a_nb_0$.

Observação 4.4.3 *Duas séries de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *são iguais, se e somente se,* $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definição 4.4.4 *Dada uma sequência* (a_n), *a função geradora para esta sequência é a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3...$, *onde os coeficientes desta série nos informa a solução de um problema de contagem.*

Observe que estas definições estão ligadas e para tentar entendê-las, mostramos o exemplo abaixo.

Exemplo 48 *Encontrar a função geradora ordinária para encontrar o número de soluções da equação* $a + b + c = 5$, *onde* $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{1, 2\}$ *e* $c \in \{0, 1\}$.

Solução

O polinômio que controla a presença dos a's é $p(x) = (x^1 + x^2 + x^3)$, o polinômio que controla a presença dos b's é $q(x) = (x^1 + x^2)$ e o polinômio que controla a presença dos c's é $s(x) = (x^0 + x^1)$.

Portanto, a função geradora para este problema é $p(x).q(x).s(x) = (x^1 + x^2 + x^3)(x^1 + x^2)(x^0 + x^1) = x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 3x^5 + x^6$.

Perceba que é suficiente que o aluno conheça e compreenda as definições acima descritas, ou seja, que o mesmo saiba exibir o polinômio, bem como manuseá-lo.

Observação 4.4.4 *Note que o número de soluções do problema acima é justamente o coeficiente de x^5 que é igual a 3. São elas: $\{2, 2, 1\}$,$\{3,1,1\}$e$\{3,2,0\}$.*

Adiante, veremos um exercício em que as variáveis têm restrições diferentes das impostas nos exemplos anteriores. Para resolvê-lo, precisamos de uma ferramenta poderosa conhecida como funções geradoras.

Exercício 4 *Qual a função geradora que usaremos para calcular a quantidade de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$, nas quais $x_4 \geq 3$?*

Solução

A função geradora que modela o nosso problema é $f(x) = (x + x^2 + x^3 + ...)^4.(x^3 + x^4 + x^5 + ...)$. Encontrando a fórmula fechada,

$$f(x) = (x+x^2+x^3+...)^4.(x^3+x^4+x^5+...) = x^4.(1+x+x^2+...)^4.x^3(1+x+x^2+...) = x^7.(1 + x + x^2 + ...)^5 = x^7.(1 - x)^{-5}.$$

Provavelmente, os alunos irão indagar sobre o fato do expoente do desenvolvimento ser negativo e que no ensino médio o cálculo do número de combinações é feito apenas usando os números naturais. Para responder a estas perguntas, apresentamos a seguir um resultado.

Teorema 4.4.2 *O coeficiente de x^p na expressão* $(1+x+x^2+x^3+...+)^n = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$ *é igual a* $\dbinom{n+p-1}{p}$.

Demonstração

Sabemos que $(1+x)^u = \sum_{p=0}^{\infty} \dbinom{u}{p} x^p$. Substituindo nesta expressão x por -x e u por -n, temos $(1-x)^{-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \dbinom{-n}{p} (-x)^p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dbinom{-n}{p} x^p$.

Utilizando a definição do coeficiente binomial generalizado, o coeficiente de x^p é

igual a $\dbinom{-n}{p}(-1)^p = \dfrac{(-n)!(-1)^p}{(-n-p)!p!} =$

$$= \frac{(-n).(-n-1)(-n-2)...(-n-p+1).(-n-p)!(-1)^p}{(-n-p)!p!}$$

$$= \frac{(-n).(-n-1)(-n-2)...(-n-p+1).(-1)^p}{p!}$$

$$= \frac{(-1)^p.n(n+1)(n+2)...(n+p-1).(-1)^p}{p!}$$

$$= \frac{(-1)^{2p}n.(n+1)(n+2)...(n+p-1)}{p!}.$$

Multiplicando e dividindo a igualdade por $(n-1)!$, encontramos

$$\frac{n.(n+1)(n+2)...(n+p-1)(n-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \binom{n+p-1}{p}.$$

Este valor é o total de formas de selecionarmos p objetos dentre n objetos distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Voltando ao exercício anterior, podemos calcular o coeficiente de x^{10} da expressão $(1-x)^{-5}$.

Daí segue que $(1-x)^{-5} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{-n}^{p}(-x)^p$, para $p = 10$ obtemos que o coeficiente de x^{10} que é igual a $(-1)^{10}C_{-5}^{10} = C_{5+10-1}^{10} = C_{14}^{10} = \dfrac{14!}{10!4!} = \dfrac{14.13.12.11.}{4.3.2} = 1001$. Logo, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 17$ possui 1001 soluções inteiras positivas, nas quais $x_4 \geq 3$.

Exemplo 49 *De quantos modos podemos distribuir 18 livros iguais em três caixas diferentes sem nenhuma restrição?*

Solução

Veja que é o mesmo que resolver a equação $x_1 + x_2 + x_3 = 18$, com $x_i \geq 0$. A função geradora é $(1 + x + x^2 + ...)^3$ e sua fórmula fechada é $(1-x)^{-3}$.

Como queremos distribuir os 18 livros, devemos encontrar o coeficiente de x^{18} no desenvolvimento de $(1-x)^{-3}$.

Assim, $(1-x)^{-3} = \sum_{p=0}^{\infty} C_{-n}^{p}(-x)^p$, para $p = 18$. Portanto, $(-1)^{18}C_{-3}^{18} = C_{3+18-1}^{18} = C_{20}^{18} = \dfrac{20!}{18!2!} = \dfrac{20.19}{2} = 190$ modos.

Com esta estrutura de sequência didática, é possível que o aluno consiga resolver problemas como o problema 2 , proposto e resolvido no inicio desta sequência.

Referências Bibliográficas

[1] ANDREWS, G. E., The theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1976.

[2] ANDREWS, G. E., ERIKSSON. K (2004), Integer Partition , Cambridge University Press, 2004.

[3] BORUCHOVITCH, E.; BZUNECK, J. A. (orgs.). A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

[4] BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. Secretária de Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, volumes 1 e 3. 1999, 2000.

[5] BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches em Didactique des Mathématiques, Grenoble, v.7, n.2, p.33-116, 1986

[6] BUJALENCE, E., BUJALENCE, J.A., COSTA, A.F., MARTÍNEZ, E., Elementos de Matemática Discreta, Sanz y Torres, Madrid, 1993.

[7] CHARALAMBOS. A. Charalambides, Enumerative Combinatorics, Chapman Hall/CRC, 2002.

[8] D'AMORE, Bruno. *Elementos de didática da Matemática/,* Bruno D'Amore [tradução Maria Cristina Bonomi]. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

[9] *Educação Matemática: uma (nova) introdução/ Anna Franchi,..., et al; org. Silvia Dias Alcântara Machado* - 3ª ed. revisada, 2 reimpr. - São Paulo: EDUC, 2012.

[10] GARCÍA,F. , Matemática Discreta, Thomson, Madrid, 2005.

[11] GRIMALDI,R.L. , Matemática discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones, Prentice-Hall, México, 1998.

[12] MACHADO, Claúdia Rejane. *Teorias de pesquisa em educação matemática: a influência dos franceses.* Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/∼ vclotilde/disciplinas/pesquisa/CLAUDIA_FRANCESES.DOC.pdf. Acesso em 10/05/2015.

[13] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções /Krerley Irraciel Martins e Adán Jose Corcho Fernández.* Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[14] PELLEGRINI, Jerônimo C. Notas de aula de Matemática Discreta, São Paulo, 2015.

[15] SANTOS, José Plinio de Oliveira. *Introdução à teoria dos números.* 3ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[16] SANTOS, J.Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T.C., Introdução à Análise Combinatória, Campinas: Editora da Unicamp, 1998.

[17] TEIXEIRA, Cleidemar dos Santos. Um estudo sobre Funções Geradoras. Trabalho de conclusão de curso (Monografia), Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2004.

[18] VEERARAJAN, T., Matemáticas discretas. Con teoría de gráficas y combinatoria. , Mc Graw Hill, México, 2008.

[19] http://www.ime.unicamp.br/ deleo/MS328md.html. Acesso em 28/04/2015.

[20] http://dns.uls.cl/ ej/web$_daa_2$010/$Lect_daa$2010/Fun$_G$*en.pdf. Acesso em* 13/05/2015.

[21] http://classes.uleth.ca/201003/math3860a/hw/3due28sept.pdf. Acesso em 29/05/2015.

[22] http://www.profmat-sbm.org.br. Acesso em 29/05/2015.