Universidade Federal de Sergipe
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Josinaldo dos Santos Cruz

O USO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA ABORDAGEM DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E APLICAÇÕES

Itabaiana-SE
2015

Josinaldo dos Santos Cruz

O USO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA ABORDAGEM DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E APLICAÇÕES

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Wagner Ferreira Santos

Itabaiana-SE

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

O USO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NA ABORDAGEM DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E APLICAÇÕES

por

Josinaldo dos Santos Cruz

Aprovada pela Banca Examinadora:

Wagner Ferreira Santos

Prof. MSc. Wagner Ferreira Santos- UFS
Orientador

Mateus Alegri

Prof. Dr. Mateus Alegri- UFS
Primeiro Examinador

TEtcheverria

Prof. Dr[a]. Teresa Cristina Etcheverria- UFS
Segundo Examinador

Itabaiana, 31 de Agosto de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Aos meus pais, a minha esposa Camila e a meu filho Yan Fernandes.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelos dons que me concedeu, guiando-me para fazer destes qualidades.

Aos meus pais, pelo espírito de luta, perseverança e otimismo, dando-me apoio e confiança nos momentos que precisei.

A minha esposa, Camila, por estar presente em minha vida, compreendendo as minhas ausências, consolando-me nos momentos de fraqueza e desânimo, e por acreditar em meu potencial.

Aos meus irmãos e demais familiares, por torcerem para o alcance desse meu objetivo.

Ao meu primo, Jânisson, por ter sido sempre solícito quando necessitei de sua ajuda.

Aos meus amigos da turma 2013 do PROFMAT (Airton, André, Ataniel, Claudemir, Cleidinaldo, Dayane, John, 'Robsão', Robson, Salomão, Sérgio, Sílvio, Valdir, Victor), pelo companherismo, pelos finais de semana e feriados que passamos estudando e pelos momentos de descontração. Essa vitória também é de vocês.

Aos demais amigos, em especial aos 'APS', que sempre torceram por mim.

A meu orientador, Prof. Wagner Ferreira Santos, pelo apoio, dedicação e pelos ensinamentos que foram dados na orientação deste trabalho e nas disciplinas que lecionou. Um exemplo a ser seguido.

A todos os professores da UFS que ministraram aula no PROFMAT, por ter compartilhado seus conhecimentos nesses dois anos de curso.

Josinaldo dos Santos Cruz

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo compreender a importância das investigações matemáticas no estudo da semelhança de triângulos e suas aplicações. Levando em consideração a importância das atividades investigativas para o ensino e a aprendizagem, este trabalho apresenta algumas definições, aspectos e considerações acerca desta metodologia de ensino. Falamos, também, do papel do professor e dos possíveis obstáculos na realização das tarefas investigativas. Para tanto, os dados foram coletados por meio da realização de três atividades investigativas em uma turma do 9° ano do Ensino Fundamental de um colégio da rede estadual de Sergipe. Os resultados apontam que a inserção de atividades investigativas no cotidiano de sala de aula, em qualquer nível de ensino, indica um melhor aprendizado do conteúdo estudado.

Palavras-chave: Investigações Matemáticas, Semelhança de Triângulos, Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

This study aims to understand the importance of mathematical investigations in the study of similar triangles and their applications. Considering the importance of research activities for teaching and learning, this paper presents some definitions , aspects and considerations of this teaching methodology . We speak also of the teacher's role and possible obstacles in carrying out investigative tasks. To this end, data was collected through the implementation of three investigative activities in a class of 9th grade of elementary school of a college of the state of Sergipe. The results show that the inclusion of research activities in the classroom everyday , at any level of education , indicates a better learning of the content studied .

Keywords: Mathematical Research, Similar Triangles, Teaching and Learning

Sumário

Introdução

O trabalho de professor traz uma grande quantidade de desafios, necessitando que o mesmo esteja sempre atualizando seus conhecimentos e suas estratégias de ensino. Além disso, se faz necessário que o professor busque propostas de ensino que promovam aos alunos uma aquisição efetiva de competências matemáticas, as quais envolvem o pensamento, o raciocínio, a argumentação, o planejamento, a representação, a comunicação matemática, a relação entre a teoria e a prática social, dentre outros. Agindo desta forma, pesquisamos e propomos aos alunos do 9° ano A_2 do Colégio Estadual Dr. Augusto César Leite, em Itabaiana-SE, uma metodologia de ensino e de aprendizagem, que são as investigações matemáticas.

As investigações matemáticas contribuem para a construção do conhecimento do aluno, levando-o a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e apresentar os resultados obtidos. Essas investigações, por terem um caráter mais aberto, favorecem o envolvimento de todos os alunos. Mostramos no desenvolvimento deste estudo que essas investigações têm alguns aspectos problemáticos, mas que são superados devido a necessidade de buscar novas soluções e estratégias para a aprendizagem da Matemática por parte do aluno.

Neste trabalho, buscamos compreender a importância das atividades investigativas no estudo da semelhança de triângulos e suas aplicações. Para isso, o dividimos em quatro capítulos. No primeiro capítulo, trazemos para discussão as atividades investigativas, o que é investigar em Matemática, como é uma aula de investigação, qual o papel do professor numa aula investigativa e também sobre a importância das investigações geométricas para a percepção dos aspectos essenciais da atividade matemática.

Já no segundo, abordamos aspectos que fundamentam o estudo da semelhança de triângulos, das relações métricas no triângulo retângulo e das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

No capítulo seguinte, descrevemos o desenvolvimento das atividades investigativas, caracterizamos o colégio onde foram aplicadas as atividades e a turma na qual as atividades foram desenvolvidas. No quarto capítulo, descrevemos as reflexões sobre a experiência de ensino por meio das atividades investigativas.

Por fim, encerramos apresentando as principais conclusões, comentando os benefícios e as dificuldades encontradas no desenvolvimento das atividades investigativas.

Na construção das figuras foi usado o *software* matemático multiplataforma livre Geogebra, que pode ser encontrado e baixado em `www.geogebra.org`.

Capítulo 1

Investigações Matemáticas

Neste capítulo, trazemos para discussão o principal tema de nosso estudo, que são as investigações matemáticas. Considerando a grande importância educacional das investigações matemáticas, procuramos dar ênfase a algumas concepções e considerações que julgamos importantes em relação às atividades investigativas como potencialidade e suporte para o desenvolvimento de vários objetivos curriculares com o intuito de dar base para o desenvolvimento de uma atividade investigativa.

1.1 Investigar em Matemática

Investigar em Matemática baseia-se em procurar relações entre objetos matemáticos conhecidos e desconhecidos, identificando as respectivas propriedades, explorando situações e promovendo reflexões acerca de cada descoberta. Para Ponte (2003), em se tratando de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente trabalhar com problemas muito sofisticados nem com problemas de grandes dificuldades. Significa, apenas, trabalhar a partir de questões abertas e que se apresentam inicialmente desordenadas, mas que conseguimos clarear e estudar de modo organizado. Nesse propósito, investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a um conjunto de métodos válidos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos e demonstrações. Sendo assim, é preciso estabelecer padrões, identificar os elos que permitam comprovar as respectivas propriedades alavancadas na investigação.

Essa atividade, tem a relevância de oferecer caminhos para a construção do conhecimento, instigando o aluno ao exercício intelectual da intuição, conjecturação, experimentação, avaliação e demonstração dos resultados encontrados reforçando atitudes de autonomia cooperação e capacidade de comunicação oral e escrita. Este tema tem sido abordado nos estudos de Fiorentini e Lorenzato (2006) e Mendes (2009) no Brasil e em Portugal por Cunha, Oliveira, Ponte (1995), Fonseca, Brunheira, Ponte (1999), Ponte et al (1998), Ponte, Brocardo, Oliveira (2013), Ponte (2003) que defendem o uso das atividades investigativas em sala de aula, uma vez que a mesma traz grandes vantagens do ponto de vista das aprendizagens individuais.

Nesta abordagem de ensino e de aprendizagem os alunos são confrontados com um conceito abrangente de saber Matemática, que não inclui apenas um conjunto de técnicas e conhecimentos intemporais. Partindo do ponto em que o aluno aprende Matemática fazendo Matemática, o seu saber Matemática não pode ser um conjunto invariável de técnicas e conhecimentos, pelo contrário, é um sistema dinâmico e adaptável de capacidades, atitudes e conhecimentos, onde se inclui o domínio dos processos e das técnicas de investigação matemática.

Em Portugal, o currículo Nacional de Ensino básico sublinha as atividades de investigação como uma das experiências de aprendizagem que deve ser regulamente proporcionada aos alunos.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) atribuem uma grande importância à realização de atividades de investigação no ensino e na aprendizagem da Matemática, em associação estreita com a resolução de problemas. Assim, entre os objetivos gerais para o ensino fundamental aparece o 'espírito de investigação' e o 'desenvolvimento da capacidade para resolver problemas' além do objetivo dos alunos serem capazes de 'argumentar sobre suas conjecturas' (BRASIL, 1998, p. 47-48). Reforçando assim, a importância dos alunos serem capazes de argumentar nas aulas de Matemática, questionando e analisando suas próprias respostas, tornando-se desta forma parte fundamental no processo de ensino e de aprendizagem. Sendo a investigação matemática uma atividade, que

> Ajuda a trazer para sala de aula o espírito da atividade genuína, construindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os colegas e o professor. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2013, p. 23).

É importante deixar claro que o professor deve propor a seus alunos além da realização de investigações, outros tipos de tarefas como exercícios, problemas e projetos. Isso porque o desafio é articular as mais diferentes maneiras de execução das tarefas, de modo a formular um currículo instigador e equilibrado, que permita o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

1.2 A aula de investigação e o papel do professor

Para Fiorentini e Lorenzato (2006) uma aula investigativa precisa oferecer um leque de possibilidades, de alternativas de abordagem e significados. Uma situação é investigadora a partir do momento em que ela se apresenta desafiadora, onde cada grau de dificuldade motiva, na medida em que a resolução não é facilmente acessível, mas requer um esforço intelectual.

De modo geral, a estrutura mais utilizada pelos professores em uma aula com investigações matemáticas envolve as seguintes fases: uma pequena introdução, seguida da realização da investigação, em pequenos grupos e, finalmente, a discussão dos resultados, com todos os alunos.

A fase de introdução da tarefa é bastante importante pois tem uma dinâmica própria que poderá influenciar decisivamente o sucesso do trabalho, principalmente se os alunos não estiverem familiarizados com este tipo de atividade. Nesta fase inicial é determinante o modo de apresentação da proposta de trabalho à turma. Neste aspecto, concordamos com Ponte, Brocardo e Oliceira (2013) quando dizem que cabe ao professor oferecer garantias para que todos os alunos entendam o sentido da tarefa proposta e, naturalmete, aquilo que deles se espera no transcorrer da atividade. Pode optar-se pela distribuição do enunciado escrito acompanhado por uma pequena apresentação oral que pretenderá, por um lado, deixar mais claro a tarefa e explicar o que se quer desenvolver com as investigações e, por outro, criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. Pode-se, simplesmente, apresentar a tarefa por escrito, sem que se faça uma discussão inicial do enunciado. Em alguns casos, a tarefa pode ser proposta apenas oralmente, sem nenhum suporte escrito, podendo o professor, eventualmente, ir registando no quadro algumas informações essenciais. Finalmente, podemos pensar ainda no caso da introdução da proposta de trabalho não ser preparada previamente pelo professor, surgindo a tarefa, espontaneamente, na aula a partir da atividade dos alunos.

Segundo Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) na fase de desenvolvimento do trabalho pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na atividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa. Durante esta fase, o professor tem um papel de orientador da atividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo de trabalho dos alunos e do tipo de apoio que presta no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. Ao longo de toda esta fase o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que é alvo. O professor deve colocar regularmente a pergunta 'porquê' a seguir aos comentários dos alunos, de modo a 'provocar o raciocínio', levando-os a analisar e refletir sobre o seu trabalho e a procurar significado para as suas descobertas.

Caso ocorra dos alunos mostrarem dificuldades em organizar os dados e em formular questões, e sendo isto determinante para o prosseguimento da investigação, o professor deverá apoiá-los. Para Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) neste momento deve-se incentivar a autoconfiança e reflexão dos estudantes num ambiente de interação entre os colegas no sentido de descobrir novas relações entre conceitos, além de estimular o desenvolvimento de seu raciocínio e sua criatividade.

Quando estiver na reta final do trabalho é necessário que o professor promova um diálogo com os alunos enquanto estes ainda estão executando a atividade e os encoraje a discutir com outros grupos em sala de aula. O papel do professor na etapa de discussão final do trabalho tem grande importância. Essa é uma etapa indispensável para que o conhecimento produzido pelos alunos individualmente ou em grupo possa ser partilhado por toda a turma. Para Ponte et al. (1998) além da apresentação de resultados é importante que exista um confronto de ideias para que justifiquem suas afirmações e sejam também questionados sobre a validade dessas justificações. A condução da discussão final requer do professor boa preparação matemática e capacidade de gestão de discussões. Durante a fase de discussão, o professor tem a função de moderador e orientador, cabe-lhe estimular a comunicação entre os alunos explicando as suas ideias e conclusões. Nesta fase os alunos são confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas.

Para Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) a discussão final sobre a atividade dos alunos é uma boa ocasião para promover a reflexão sobre o trabalho realizado, devendo o professor proporcionar aos alunos momentos onde possam pensar e refletir sobre a atividade realizada. A reflexão permite a valorização do processo de resolução que cada aluno desenvolve para chegar a um resultado mesmo não sendo o correto, permite ainda estabelecer conexões com outras ideias matemáticas e pode constituir um ponto de partida para outras investigações.

Outro ponto bastante importante para o professor é a elaboração do relatório final sobre o trabalho desenvolvido em atividades de investigação, pois esses relatórios promovem que os alunos reflitam sobre o trabalho realizado na sua investigação, levando-os a aprofundar e clarear, muitas vezes, aspectos menos compreendidos.

1.3 Investigações geométricas

A Geometria é o conteúdo matemático com mais possibilidades para a realização de atividades de natureza exploratória e investigativa na sala de aula e que necessita de poucos pré-requisitos. Valendo-se pela visualização e intuição, e recorrendo à manipulação de materiais, a Geometria torna-se especialmente favorável a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas mais elementares.

Concordamos com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) que as investigações geométricas contribuem para a percepção de aspectos essenciais da atividade matemática, tais como formulação e teste de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações. Em Geometria, trabalha-se no plano ou no espaço, com figuras planas ou poliedros, por exemplo, podendo descobrir e explorar um grande número de propriedades e conexões. A relação entre situações da realidade concreta e situações matemáticas encontra na geometria uma infinidade de exemplos e concretizações.

A tendência de revalorização da Geometria, que nos últimos anos, tem marcado a evolução curricular em Matemática, é deixada bem claro por Ponte (2013) quando dizem

> Por todo o mundo têm vindo a ser perspectivadas recomendações curriculares para o ensino da Geometria. De um modo geral, tem sido contestada a visão do movimento da Matemática Moderna que destacava o papel da Geometria para ilustrar o caráter dedutivo e axiomático da Matemática e desvalorizava os aspectos ligados à observação, à experimentação e à construção.
>
> As tendências curriculares atuais convergem ao considerar que essa área da Matemática é fundamental para compreender o espaço em que nos movemos e para perceber aspectos essenciais da atividade matemática. Salienta-se, por exemplo, a importância de estudar os conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo, de explorar a aplicação da Geometria a situações da vida real e de utilizar diagramas e modelos concretos na construção conceptual em Geometria.

Existem vários exemplos, como a Geometria Dinâmica e os materiais concretos (cubos, réguas, transferidores, papel 'milimetrado', geoplano, compassos e outros), que procuram evidenciar a ideia de que as investigações geométricas constituem experiências de aprendizagem importantes para dar prosseguimento a estas recomendações curriculares.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, pois por meio deste o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender e representar o mundo em que vive. Este saber, se trabalhado a partir do mundo físico, permite ao aluno fazer conexões entre a Matemática e as outras áreas de conhecimento.

Capítulo 2

Semelhança de Triângulos

Neste capítulo apresentamos a argumentação matemática sobre semelhança entre triângulos, objeto de estudo com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Nesse processo, consideramos que já conhecidos dos leitores os conceitos elementares da Geometria Euclidiana e sua axiomática (Axiomas de Incidência, de Ordem, de Medição, de Congruência e das Paralelas). Em seguida, aplicamos a semelhança entre triângulos em duas frentes. Na primeira, para obtenção das relações métricas no triângulo retângulo, fato este que culmina com a demonstração do Teorema de Pitágoras. Na segunda, para apresentação de razões trigonométricas num triângulo retângulo.

2.1 Estudo da Semelhança de Triângulos

O conceito de semelhança está presente em várias situações do dia a dia, como nas ampliações e reduções de fotos e mapas. Podemos perceber também a semelhança em projetos representados por maquetes ou em miniaturas de carros, desde que estes mantenham a mesma forma do original.

Os triângulos apresentados na figura 2.1 são semelhantes? Observe que o primeiro possui lados medindo 4, 5 e 6, enquanto que o segundo possui lados medindo 8, 10 e 12. Observa-se que, ao se medir os ângulos internos desses dois triângulos obtém-se os valores $41,41°$, $82,82°$ e $55,77°$. Desse modo, os dois triângulos possuem ângulos correspondentes iguais e lados correspondentes proporcionais. Sempre que tal situação puder ser observada, diz-se que os triângulos são semelhantes.

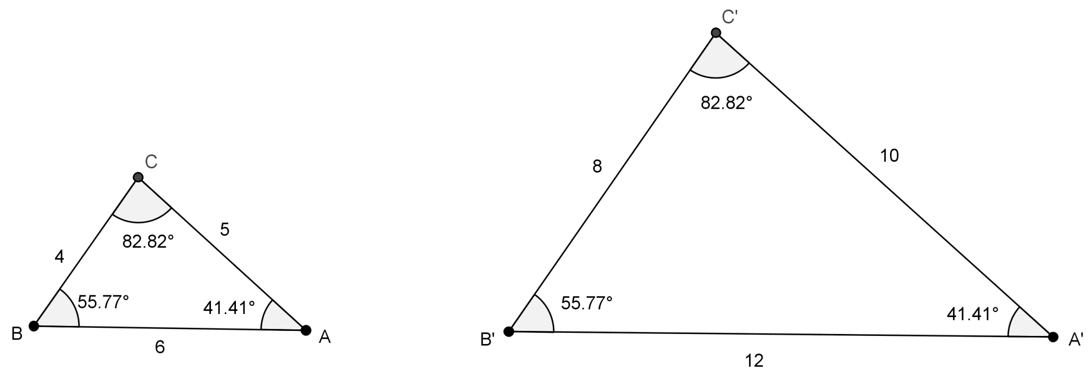


Figura 2.1: triângulos semelhantes

Definição 2.1 *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos correspondentes são iguais e os lados correspondentes são proporcionais.*

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura 2.2.

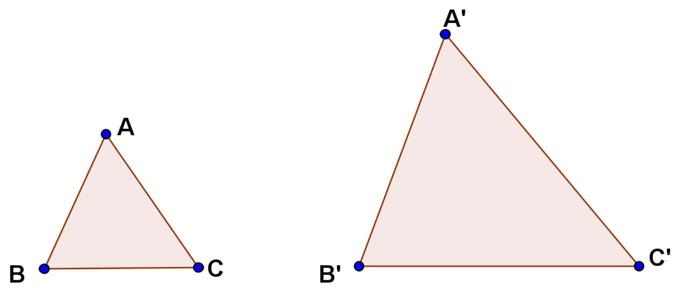


Figura 2.2: triângulos semelhantes

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \text{ e}$$
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = r$$

onde r é uma constante chamada de razão de semelhança dos triângulos ou razão de proporcionalidade dos triângulos. Se $r = 1$, os triângulos são congruentes.

No exemplo da figura 2.1 a razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$ é $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Como poderiamos verificar se de dois triângulos são semelhantes? Será necessário sempre se verificar que os ângulos correspondentes são iguais e que os lados correspondentes são proporcionais? Apresentamos uma sequência de proposições que facilita o trabalho de verificação da semelhança entre dois triângulos.

Proposição 2.1 *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

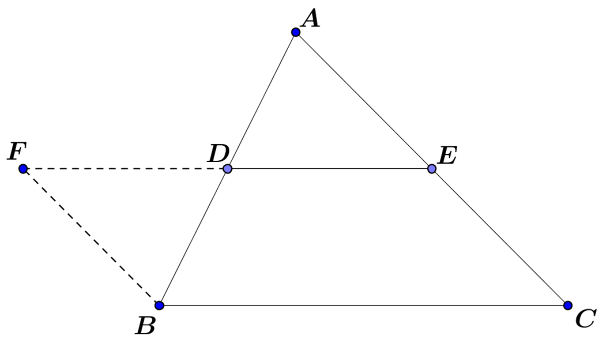


Figura 2.3: triângulo para demonstração da proposição 2.1

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Designe por D o ponto médio de AB e por E o ponto médio de AC. Devemos provar que DE é paralelo a BC e que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Para isto, marque na semi-reta $\mathcal{S}_{ED}$ um ponto F tal que $FD = DE$. Como $AD \equiv DB$, $A\hat{D}E \equiv B\hat{D}F$ por serem opostos pelo vértice, então os triângulos ADE e FDB são congruentes. Como consequência tem-se que $D\hat{F}B \equiv A\hat{E}D$ e $FB \equiv AE$. Logo FB e EC são paralelos e tem mesmo comprimento. Segue-se que o quadrilátero $FBCE$ é um paralelogramo. Portanto, FE é paralelo a BC e tem o mesmo comprimento. Como D é ponto médio de FE então $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. □

Observe que a proposição 2.1 acaba mostrando que os triângulos ABC e ADE são semelhantes com razão de semelhança $1/2$. De fato, como o lado DE é paralelo ao lado BC, então, os ângulos $A\hat{D}E \equiv D\hat{B}C$ assim como $A\hat{E}D \equiv E\hat{C}B$, ou seja, os triângulos ABC e ADE tem ângulos correspondentes iguais. Além disso, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = r$, como $\overline{AB} = 2.\overline{AD}$, $\overline{AC} = 2.\overline{AE}$ e $\overline{BC} = 2.\overline{DE}$, temos, $\frac{\overline{AD}}{2.\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{2.\overline{AE}} = \frac{\overline{DE}}{2.\overline{DE}} = r$, ou seja, $r = 1/2$(razão de semelhança).

Mas este é um caso particular de uma situação mais geral. Considere um triângulo ABC cujos lados AB e AC foram seccionados nos pontos D e E por uma reta paralela ao lado BC. Os triângulos ABC e ADE são semelhantes? A resposta é afirmativa e será o resultado final desta seção. Contudo, o trabalho argumentativo para demonstração desse Teorema necessita de alguns resultados preliminares que serão apresentados a seguir.

Proposição 2.2 *Suponha que três retas paralelas a, b e c, cortam as retas m e n nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C, então o ponto B' também encontra-se entre A' e C'. Se $AB \equiv BC$, então, também tem-se $A'B' \equiv B'C'$.*

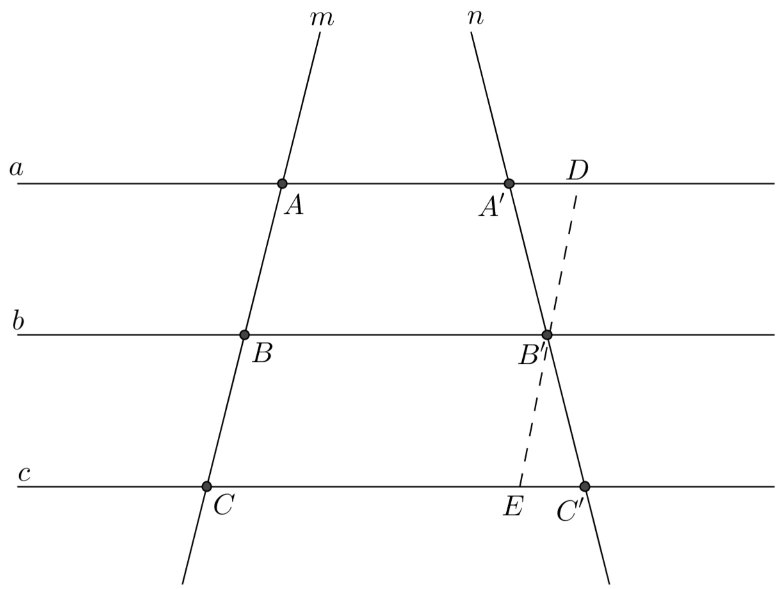


Figura 2.4: As retas paralelas a, b e c cortam as retas m e n

Demonstração: Sejam a, b e c retas paralelas e m e n retas que intersectam estas paralelas nos pontos A, B e C e A', B' e C' como mostrado na figura 2.4. Se B está entre A e C, então A e C estão em semiplanos distintos relativamente à reta b. Observe que A e A' estão em um mesmo semiplano determinado por b, já que a e b são retas paralelas e A e A' pertencem à reta a. Do mesmo modo C e C' estão em um mesmo semiplano determinado por b. Podemos portanto concluir que A e C' estão em semiplanos distintos relativamente à reta b.

Logo b intercepta o segmento $A'C'$ em um único ponto. Como B' é o ponto de interseção da reta n com a reta b, e A' e C' pertencem a n concluímos que o ponto de interseção de $A'C'$ com b é exatamente o ponto B'. Logo, B' pertence ao segmento $A'C'$ e logo B' está entre A' e C'.

Para mostrar a segunda parte, devemos traçar pelo ponto B' uma reta paralela à reta m. Esta corta as retas a e c e pontos D e E, respectivamente. Afirmamos que os triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ são congruentes. De fato, como $DB'BA$ e $B'ECB$ são paralelogramos, então $DB' \equiv AB$ e $B'E \equiv BC$. Como $AB \equiv BC$ por hipótese, então concluí-se que $DB' \equiv B'E$. Observe que os ângulos $D\hat{B'}A'$ e $E\hat{B'}C'$ são congruentes por serem opostos pelo vértice e $B'\hat{D}A'$ e $B'\hat{E}C'$ são também congruentes, por serem ângulos determinados por uma transversal cortada pelas paralelas a e c. Da congruência dos triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ decorre imediatamente que $A'B' \equiv B'C'$. $\square$

Exemplo 2.1 *A figura* 2.5 *ilustra muito bem a proposição* 2.2. *As retas paralelas b, e e c interceptam as retas a e d formando os segmentos AB, BC, $A'B'$ e $B'C'$. Como $AB \equiv BC$, logo, $A'B' \equiv B'C'$.*

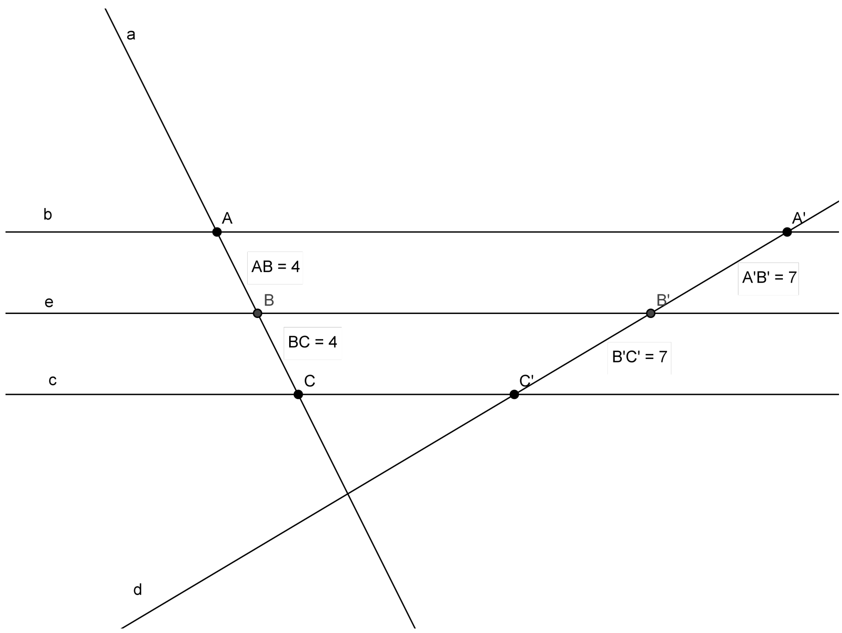


Figura 2.5: Exemplo da proposição 2.2

Corolário 2.3 *Suponha que k retas paralelas $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cortam duas retas m e n nos pontos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ e nos pontos $A'_1, A'_2, \ldots, A'_k$, respectivamente. Se $A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \ldots \equiv A_{k-1}A_k$ então $A'_1A'_2 \equiv A'_2A'_3 \equiv \ldots \equiv A'_{k-1}A'_k$.*

Teorema 2.4 *Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.*

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Considere uma reta paralela ao lado BC que corta os lados AB e AC, respectivamente, nos pontos D e E, como na figura 1.6.

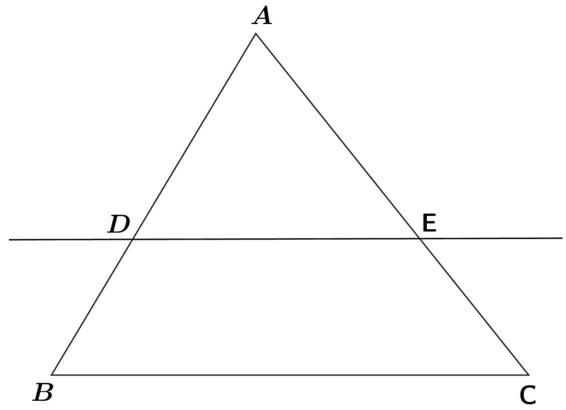


Figura 2.6: triângulo ABC

Queremos provar que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$. Para isto, tome um pequeno segmento AP, na semi-reta S_{AB} de modo que as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP_1}}$ e $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$ não sejam números inteiros. Consideremos na semi-reta S_{AB} os pontos $P_2, P_3, \ldots, P_k, \ldots$ tai que $\overline{AP_k} = k.\overline{AP_1}$, para todo $k \geq 2$.

Então existem dois números inteiros m e n tais que

$$D \text{ está entre } P_m \text{ e } P_{m+1}$$

$$B \text{ está entre } P_n \text{ e } P_{n+1}$$

Tem-se portanto,

$$m.\overline{AP_1} < \overline{AD} < (m+1)\overline{AP},$$

$$n.\overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1)\overline{AP},$$

Portanto,

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n} \tag{2.1}$$

Tracemos pelos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ retas paralelas a BC. Estas retas, segundo o corolário 1.3, cortam a semi-reta S_{AC} em pontos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$, os quais satisfazem a

$$k.\overline{AQ_1} = \overline{AQ_k}, \text{ para todo } k,\ 2 \leq k \leq n+1$$

Além disso, o ponto E encontra-se entre Q_m e Q_{m+1} e o ponto C entre Q_n e Q_{n+1}. Como feito anteriormente, podemos mostrar que

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n} \tag{2.2}$$

Portanto, por 2.1 e 2.2, podemos concluir que

$$\left|\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}$$

Como $m \leq n$, então

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{(m+1)(n+1) - mn}{n(n+1)} = \frac{m+n+1}{n(n+1)} < \frac{(n+1)+(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n},$$

ou seja, as razões $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ e $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ diferem por não mais do que $\dfrac{2}{n}$. Como podemos escolher $\overline{AP}$, tão pequeno quanto desejarmos, isso fará n tão grande quanto quisermos, ou seja, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$. □

Com o auxílio do Teorema 2.4, provamos que para dois triângulos serem semelhantes é suficiente verificar se eles possuem dois ângulos correspondentes congruentes. A proposição 2.5 facilita bastante a tarefa de verificar e justificar a semelhança entre dois triângulos.

Proposição 2.5 *(Caso Ângulo - Ângulo de Semelhança – AA) Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes iguais, então eles são semelhantes.*

Demonstração: Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$, tais que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\hat{B} = \hat{B}'$, vamos demonstrar que eles são semelhantes.

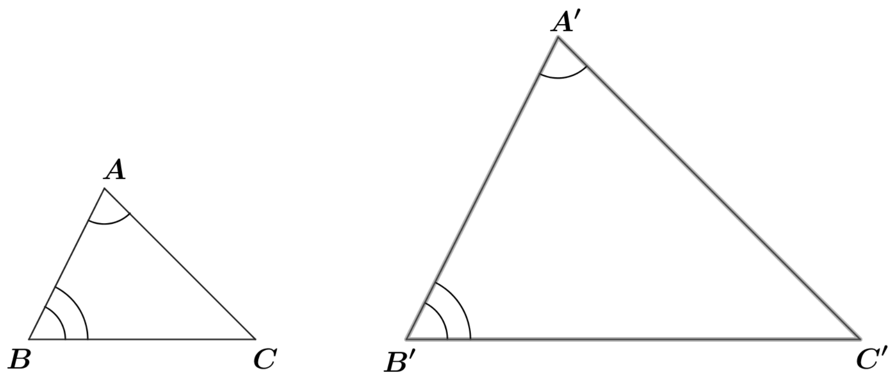


Figura 2.7: triângulos semelhantes - caso AA

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°, logo, a congruência dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ e dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ implica na congruência dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{C}'$. Basta provar agora que os lados são proporcionais. Para isto, tomemos um ponto D sobre o lado $A'B'$ de modo que $A'D = AB$. Pelo ponto D tracemos uma reta paralela a $B'C'$.

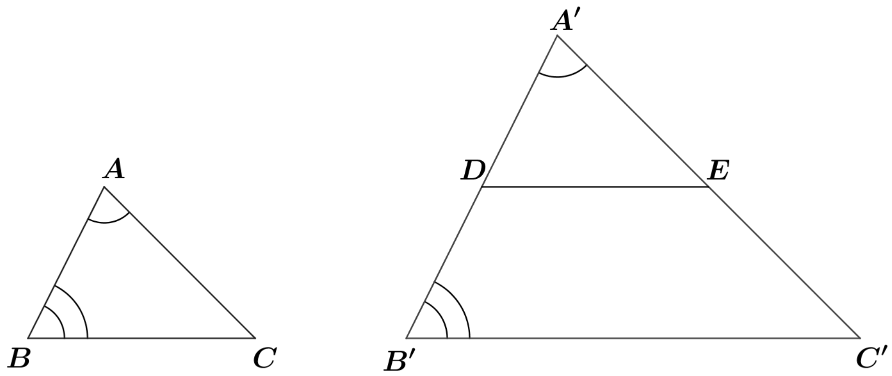


Figura 2.8: triângulos semelhantes - caso AA

Esta corta o lado $A'C'$ num ponto E, formando um triângulo $A'DE$ que é congruente ao triângulo ABC, pois $\hat{A} = \hat{A}'$, $AB = A'D$ e como DE é paraelo a $B'C'$, temos também $\hat{B} = \hat{B}' = A'\hat{D}E$. Segue-se agora do teorema (2.4) que $\dfrac{A'D}{A'B'} = \dfrac{A'E}{A'C'} = \dfrac{DE}{B'C'}$, mas sabemos que $A'D = AB$, $A'E = AC$ e $DE = BC$, logo obtemos: $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

□

Exemplo 2.2 *Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura* 2.9 *são semelhantes? De fato, isso* *se verifica pelo caso AA de semelhança de triângulos.*

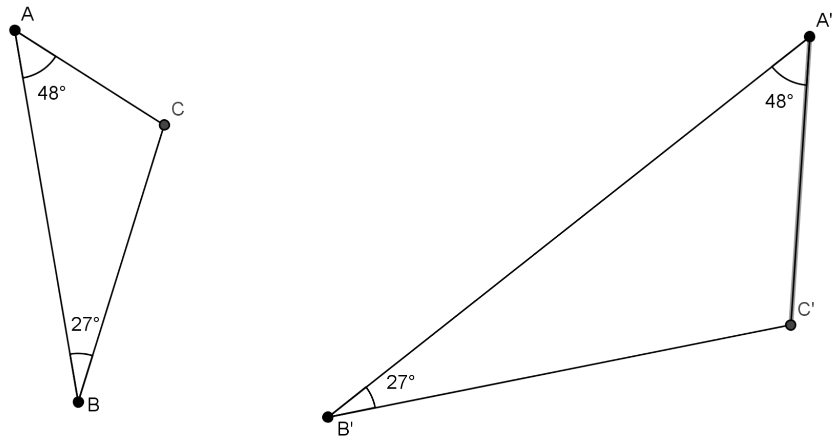


Figura 2.9: triângulos semelhantes - caso AA

Corolário 2.6 *(Teorema Fundamental) Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos do vértice, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.*

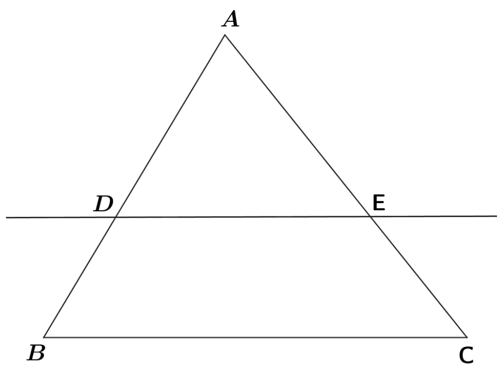


Figura 2.10: triângulo ABC

Demonstração: Como a reta DE é paralela ao lado BC do triângulo da figura (2.10), então temos, $\hat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C}$, portanto, pelo caso de semelhança AA os triângulos ADE e ABC são semelhantes. □

Exemplo 2.3 *Se DE é paralelo a BC, determinar a medida x da figura* 2.11.

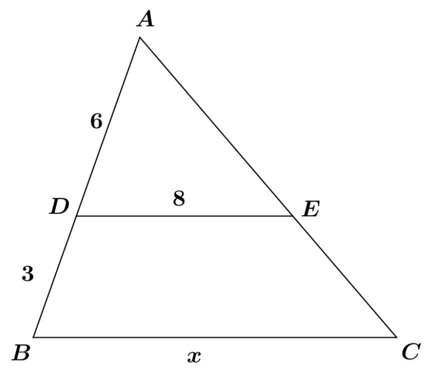


Figura 2.11: Exemplo do Teorema fundamental

Solução:

Pelo Teorema fundamental, como DE é paralelo a $BC \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 12$$

Não é necessário conferir se todos os ângulos de dois triângulos são congruentes e se todos os lados dos mesmos são proporcionais para saber se ambos são semelhantes, basta que eles apresentem algumas das condições necessárias. Estudamos, a seguir, mais dois casos que facilitam determinar quando triângulos são semelhantes.

Corolário 2.7 *(Caso de semelhança LAL) Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.*

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que $\hat{A} = \hat{A}'$ e $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$, então eles são semelhantes.

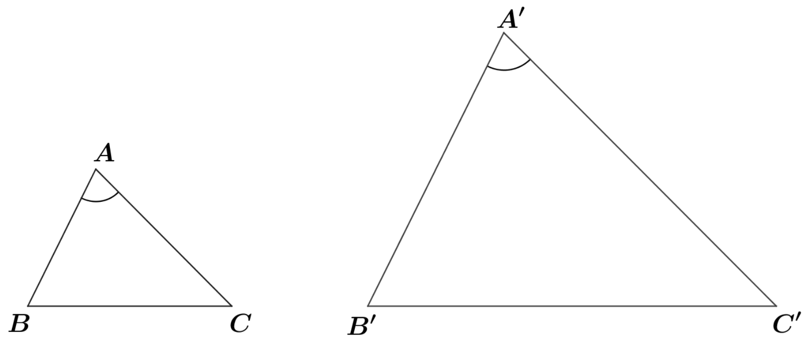


Figura 2.12: triângulos semelhantes - caso LAL

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade que os triângulos ABC e $A'B'C'$ não sejam conguentes e que $AB < A'B'$.

Tomemos um ponto D sobre o lado $A'B'$ de modo que $A'D = AB$ e tracemos uma reta DE paralela a $B'C'$.

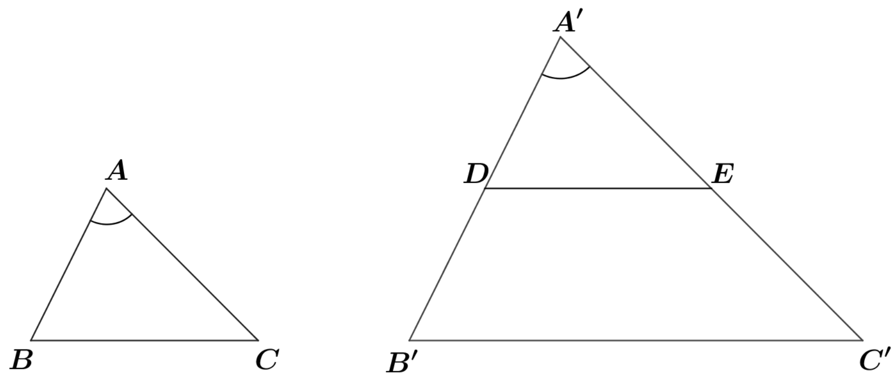


Figura 2.13: triângulos semelhantes - caso LAL

Segue do Corolário (2.6) que os triângulos $A'DE$ e $A'B'C'$ são semelhantes. Basta provar que o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'DE$. De fato, Como DE é paralelo a $B'C'$, então

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{A'D}{A'E} \tag{2.3}$$

Por construção, temos $A'D = AB$, logo

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{A'E} \tag{2.4}$$

Por hipótese, temos

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \tag{2.5}$$

De 2.4 e 2.5, temos $\dfrac{AB}{A'E} = \dfrac{AB}{AC}$, logo $A'E = AC$. Portanto, como $AB \equiv A'D$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ e $AC \equiv A'E$, pelo caso de congruência de triângulo LAL, o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'DE$. Com isso, provamos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. □

Corolário 2.8 *(Caso de semelhança LLL) Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.*

Sejam os triângulos $A'B'C'$ e ABC, se $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, então eles são semelhantes.

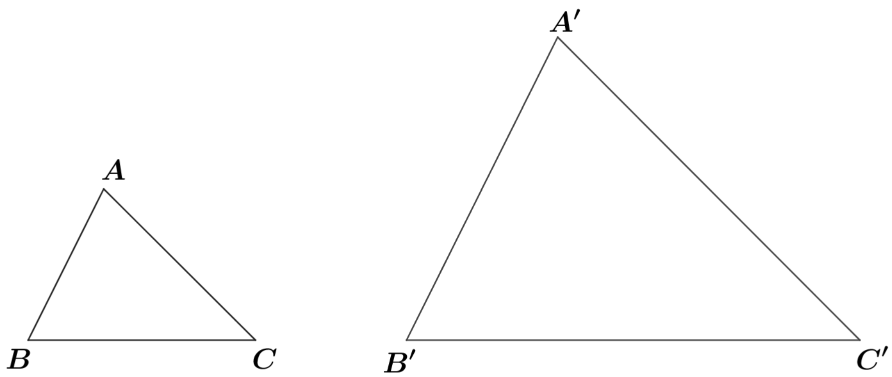


Figura 2.14: triângulos semelhantes - caso LLL

Demonstração: Suponha sem perda de generalidade que os triângulos ABC e $A'B'C'$ não sejam conguentes e que $AB < A'B'$.

Tomemos um ponto D sobre o lado $A'B'$ de modo que $A'D = AB$ e tracemos uma reta DE paralela a $B'C'$.

Segue do Corolário (2.6) que o triângulo $A'B'C'$ é semelhante ao triângulo $A'DE$. Basta provar agora que o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'DE$.

Se $\Delta A'B'C' \sim \Delta A'DE$, temos

$$\frac{A'D}{A'B'} = \frac{A'E}{A'C'} = \frac{DE}{B'C'} \tag{2.6}$$

Por construção, temos $A'D = AB$, logo

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A'E}{A'C'} = \frac{DE}{B'C'} \tag{2.7}$$

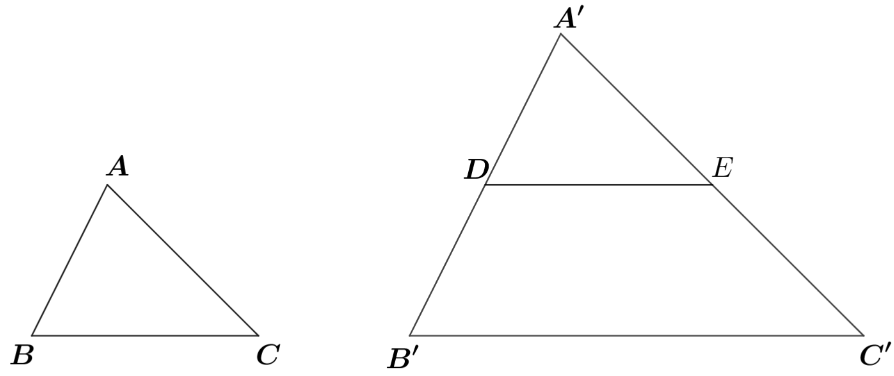


Figura 2.15: triângulos semelhantes - caso LLL

Por hipótese, temos

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \tag{2.8}$$

De 2.7 e 2.8, vem $A'E = AC$ e $DE = BC$. Portanto, como $AB = A'D$, $AC = A'E$ e $BC = DE$, pelo caso de congruência de triângulo LLL, o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'DE$. Logo, concluimos que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$. □

Exemplo 2.4 *Verifique se os triângulos da figura* 2.16 *são semelhantes.*

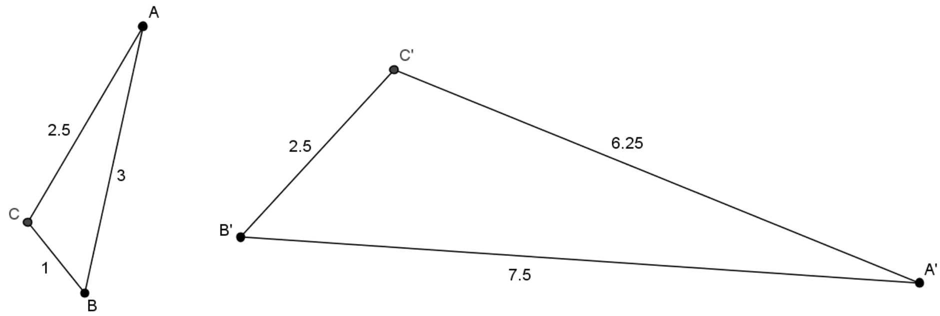


Figura 2.16: triângulos semelhantes - caso LLL

Precisamos verificar se os lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Rightarrow \frac{7,5}{3} = \frac{6,25}{2,5} = \frac{2,5}{1} = 2,5$$

Note que os lados correspondentes são proporcionais e tem razão de semelhança igual a $2,5$, portanto os triângulos são semelhantes.

2.2 Relações métricas no triângulo retângulo

Nesta seção, determinamos algumas relações métricas que são válidas em qualquer triângulo retângulo. Inicialmente, definimos certos elementos de um triângulo retângulo para então, aplicando semelhança de triângulos, obter algumas relações.

Definição 2.2 *Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é dito hipotenusa do triângulo, enquanto os demais lados, opostos aos ângulos agudos, são chamados catetos do triângulo.*

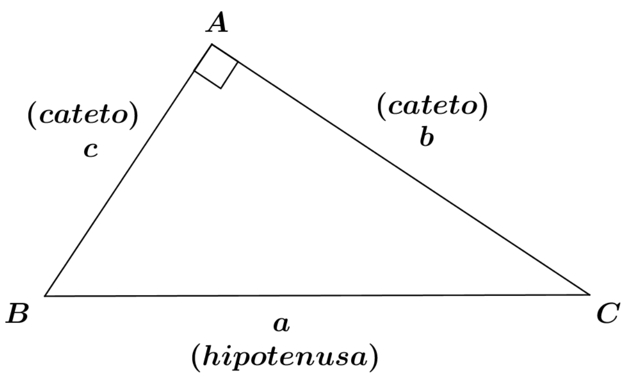


Figura 2.17: triângulo retângulo

Definição 2.3 *A interseção entre a hipotenusa e uma reta perpendicular a ela e que passa pelo vértice do ângulo reto é dito o pé da (reta) perpendicular sobre a hipotenusa.*

O pé da perpendicular sobre a hipotenusa pode ser visto também como a projeção do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa.

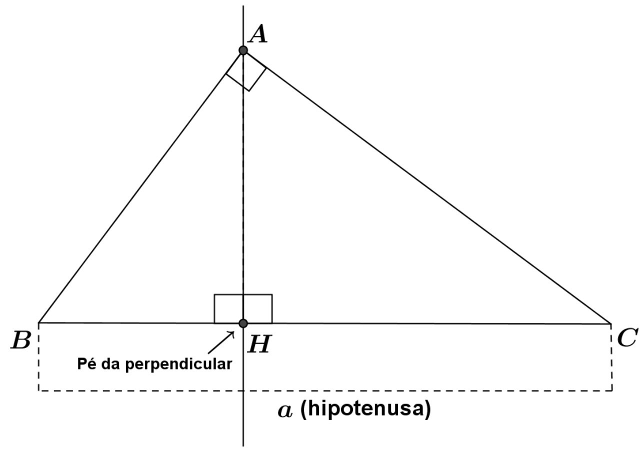


Figura 2.18: triângulo retângulo e o pé da perpendicular

Definição 2.4 *O segmento que liga o pé da perpendicular ao vértice do ângulo reto é conhecido como altura relativa à hipotenusa. Já os segmentos que ligam o pé da perpendicular aos vértices dos ângulos agudos são conhecidos como as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

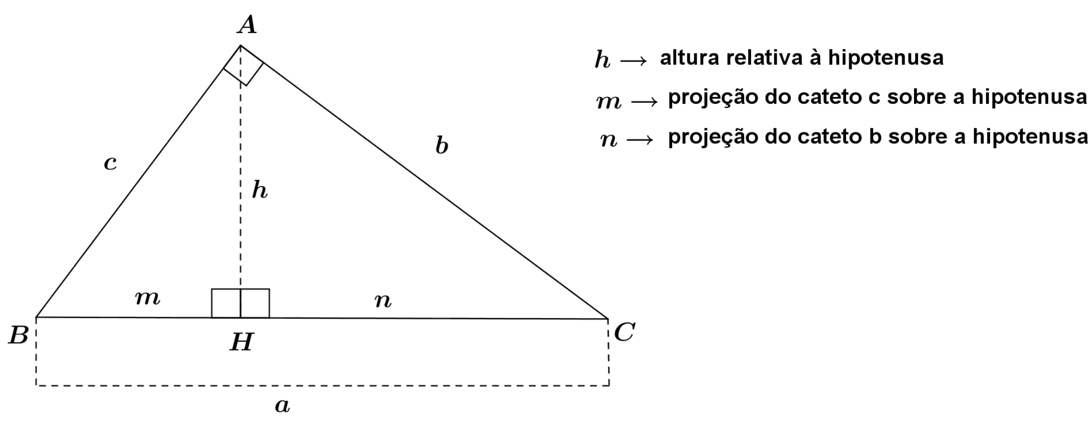


Figura 2.19: triângulo retângulo e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa

Proposição 2.9 *Todo triângulo retângulo pode ser decomposto em dois outros triângulos retângulos. Estes três triângulos retângulos, o original e os dois obtidos pela decomposição, são semelhantes entre si.*

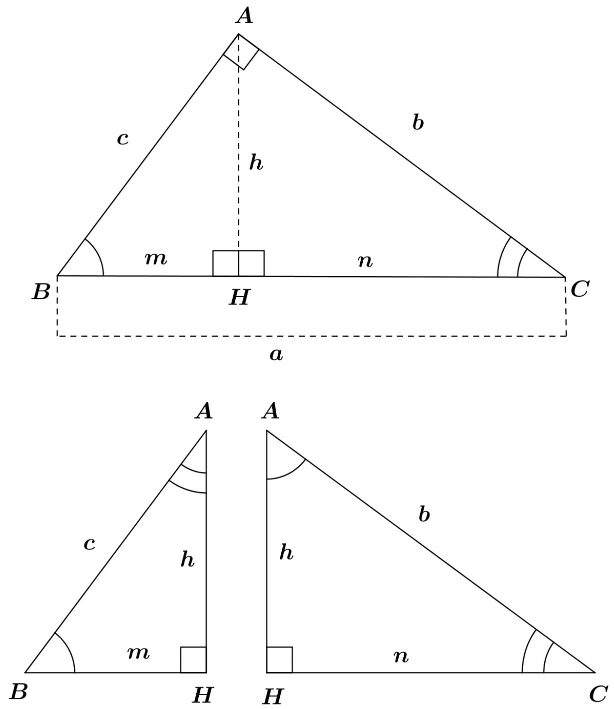


Figura 2.20: triângulos semelhantes

Demonstração: A altura AH divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos, ABH e ACH. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, pois $\hat{B}+\hat{C}=90°$. Sabendo que $\hat{C}+C\hat{A}H=90°$, então $C\hat{A}H=\hat{B}$. Do mesmo modo, $\hat{B}+B\hat{A}H=90°$, então $B\hat{A}H=\hat{C}$. Portanto, os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC e também semelhantes entre si. □

Com base nas semelhança dos triângulos da figura 2.20 e nos elementos que já forma definidos, encontramos as seguintes relações métricas:

$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Longleftrightarrow \frac{c}{m}=\frac{a}{c}=\frac{b}{h}$$

logo: $c^2=am; ah=bc; ch=bm$

$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \iff \frac{c}{h} = \frac{b}{n} = \frac{a}{b}$$

$$\text{logo: } b^2 = an; bh = cn; bc = ah$$

$$\Delta HBA \sim \Delta HAC \iff \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

$$\text{logo: } h^2 = nm; bh = cn; ch = bm$$

Corolário 2.10 *Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.*

$$h^2 = nm$$

Corolário 2.11 *Em todo triângulo retângulo, o cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre a hipotenusa.*

$$b^2 = an \text{ e } c^2 = am$$

Corolário 2.12 *Em todo triângulo retângulo, o produto entre a altura relativa à hipotenusa e um cateto é igual ao produto da projeção deste cateto e o outro cateto.*

$$bh = cn \text{ e } ch = bm$$

Corolário 2.13 *Em todo triângulo retângulo, o produto entre a hipotenusa e altura relativa à hipotenusa é igual ao produto entre seus dois catetos.*

$$bc = ah$$

Corolário 2.14 *(Teorema de Pitágoras) Em todo triângulo retângulo, o quadrado de sua hipotenusa é igual à soma dos quadrados de seus dois catetos.*

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Demonstração: Para demonstrar o Teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e $c^2 = an$.

$$b^2 + c^2 = an + am$$

$$b^2 + c^2 = a.(n + m)$$

Como $n + m = a$, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

□

Exemplo 2.5 *Determinar x e y nos triângulos da figura* 1.21*:*

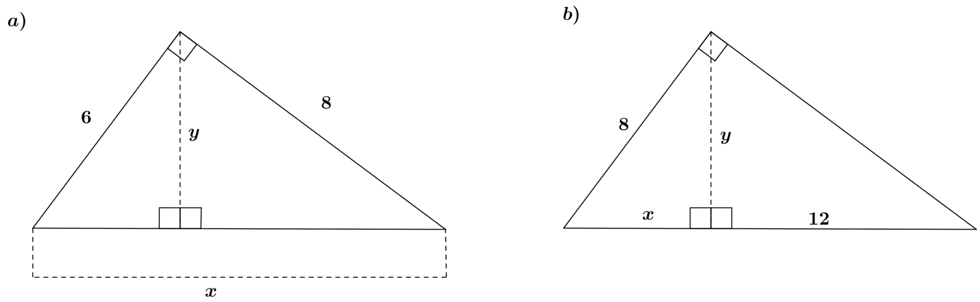


Figura 2.21: exemplo de utilização das relações métricas

Solução: Vamos usar os Corolários para determinar os valores de x e y.

a) Do corolário 2.14 vem:

$$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 8^2 + 6^2 = x^2 \text{ , logo, } x = 10$$

Do corolário 2.13 vem:

$$bc = ah \Rightarrow 6.8 = y.10 \text{ , logo, } y = 4,8$$

.

b) Do corolário 2.11 vem:

$$b^2 = an \Rightarrow 8^2 = (x + 12).x \Rightarrow x^2 + 12x - 64 = 0 \text{ , logo, } x = 4, \text{ pois } x \in \mathbb{R}_+$$

.

Do corolário 2.10 vem:

$$b^2 = nm \Rightarrow y^2 = 4.12 \text{ , logo, } y = 4\sqrt{3}$$

.

Como verificar se um triângulo é triângulo retângulo?

Proposição 2.15 *(Recíproca do Teorema de Pitágoras) Considere ABC um triângulo cujos lados medem a, b e c. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então ABC é um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o lado que mede a.*

Demonstração: Considere um triângulo ABC, com $AB = c$, $CA = b$ e $BC = a$, com $c \leq b$. Vamos considerar os seguintes casos:

1° **caso:** $\hat{A} < 90^\circ$

Seja D a projeção do vértice B sobre o lado AC, considere ainda, $AD = x$ e $BD = h$.

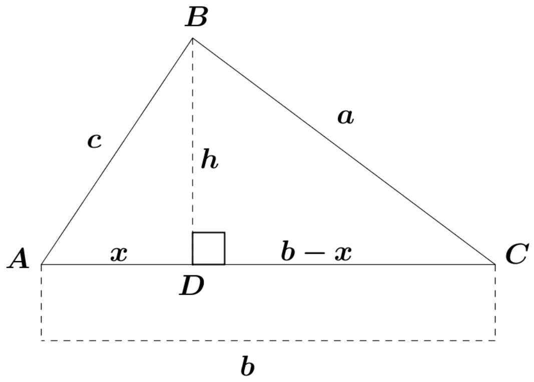


Figura 2.22: demonstração da proposição 1.15

Como ADB e CDB são triângulos retângulos, temos:

$$c^2 = h^2 + x^2 \tag{2.9}$$

e

$$a^2 = h^2 + (b - x)^2 \tag{2.10}$$

De 2.9 e 2.10, vem

$$a^2 = c^2 - x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

Ou seja, $a^2 < b^2 + c^2$, o que contradiz a condição inicial.

2° **caso:** $\hat{A} > 90^\circ$

Neste caso, a projeção do vértice B não estará sobre o lado AC. Considere $AD = x$ e $BD = h$.

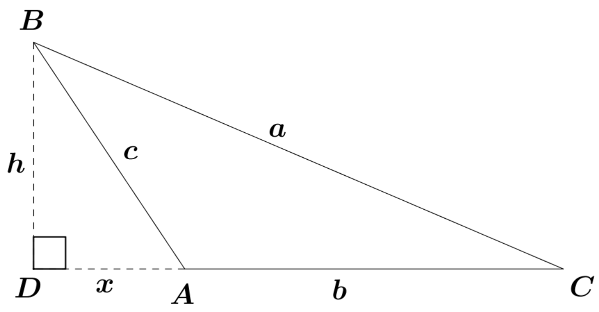


Figura 2.23: demonstração da proposição 1.15

Como ABD e CDB são triângulos retângulos, chegamos facilmente a $a^2 = b^2 + c^2 + 2bx$, ou seja, $a^2 > b^2 + c^2$, o que contraria mais uma vez a condição inical.

Logo, concluimos que se em um triângulo ABC, de lados a, b e c, $a^2 = b^2 + c^2$ implica necessariamente $\hat{A} = 90°$, ou seja, é um triângulo retângulo e sua hipotenusa é o lado com medida a. $\square$

Exemplo 2.6 *Verifique se o triângulo cujos lados medem* 8, 15 *e* 17 *é um triângulo retângulo.*

De fato, como $17^2 = 8^2 + 15^2$, logo, é um triângulo retângulo com a hipotenusa sendo o lado de medida 17.

2.3 Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Nesta seção, usaremos a semelhança de triângulos para definir as razões trigonométricas, seno, cosseno e tangente, que são as razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. As razões trigonométricas nos permite o cálculo indireto de distâncias e de ângulos.

Dado um ângulo agudo α, cujo vértice é B. Sobre um dos lados do ângulo α marcamos arbitrariamente os pontos $A, A_1, A_2, \ldots$ e por eles, traçamos perpendiculares que ao se encontrar com o outro lado do ângulo α determina os pontos $C, C_1, C_2, \ldots$ respectivamente.

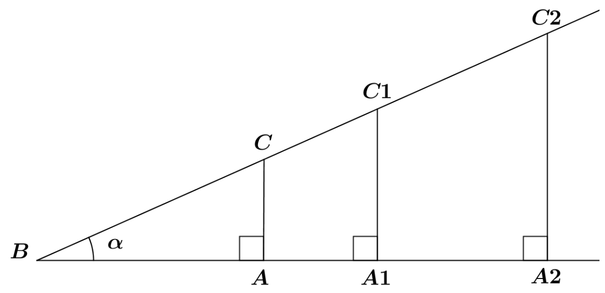


Figura 2.24: triângulos semelhantes

Como os triângulos BAC, BA_1C_1, BA_2C_2,... são todos semelhantes podemos estabelecer as igualdades entre as razões:

- $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{BC_1} = \dfrac{A_2C_2}{BC_2} = \ldots = r_1$
- $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA_2}{BC_2} = \ldots = r_2$
- $\dfrac{AC}{BA} = \dfrac{A_1C_1}{BA_1} = \dfrac{A_2C_2}{BA_2} = \ldots = r_3$

O número r_1 encontrado é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo α e a medida da hipotenusa.

O número r_2 encontrado é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo α e a medida da hipotenusa.

O número r_3 encontrado é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo α e a medida do cateto adjacente ao ângulo α.

Para facilitar a identificação dessas razões, chamadas de razões trigonométricas, é usada a seguinte nomeclatura:

Definição 2.5 *A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa é chamada de* ***seno de*** *α.*

Definição 2.6 *A razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida α e a medida da hipotenusa e chamada de* ***cosseno de*** *α.*

Definição 2.7 *A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de medida α e a medida do cateto adjacente a α é chamada de* ***tangente de*** *α.*

Usamos **sen** α, **cos** α e **tg** α para abreviar seno de α, cosseno de α e tangente de α, respectivamente. Os números sen α, cos α e tg α não dependem do tamanho do triângulo, dependem apenas do valor do ângulo α.

Assim, considerando o triângulo retângulo ABC, indicado na figura 2.25:

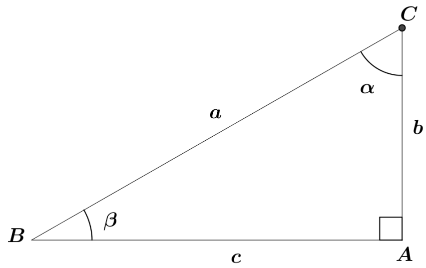


Figura 2.25: triângulo retângulo

Onde,

$\beta + \alpha = 90°(\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares)

$\overline{AC}$: cateto oposto a $\hat{B}$ e adjacente a $\hat{C}$

$\overline{AB}$: cateto oposto a $\hat{C}$ e adjacente a $\hat{B}$

Para o seno, temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{a}$$
$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$$

Para o cosseno, temos:

$$\cos \beta = \frac{c}{a}$$
$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

Para a tangente, temos:

$$\text{tg } \beta = \frac{b}{c}$$
$$\text{tg } \alpha = \frac{c}{b}$$

Exemplo 2.7 *Adotando sen* $40° = 0,64$*, cos* $40° = 0,76$ *e tg* $40° = 0,84$*. determine as medidas indicadas por x nos triângulos da figura* 2.26*:*

Solução:

a) No triângulo retângulo temos os elementos:

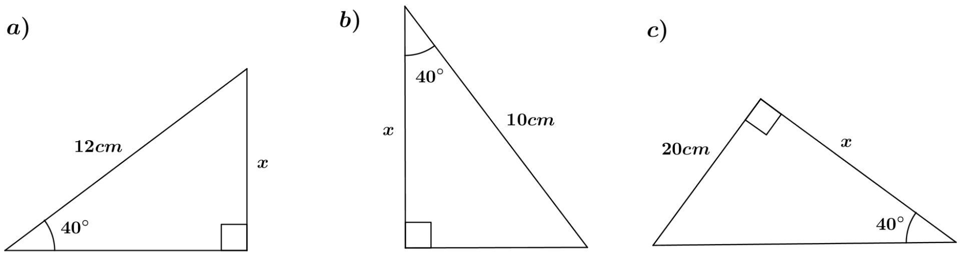


Figura 2.26: aplicação das razões trigonométricas

- ângulo agudo: 40°
- cateto oposto a esse ângulo: x
- hipotenusa: 12 cm

A razão trigonométrica adequada para encontrar o valor de x é o seno. Logo,

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{x}{12} \Rightarrow 0,64 = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 7,68cm$$

b) Os elementos neste caso são:

- ângulo agudo: 40°
- cateto adjacente a esse ângulo: x
- hipotenusa: 10 cm

A razão trigonométrica que relaciona esses elementos é o cosseno. Assim, temos:

$$\cos 40^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow 0,76 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 7,6cm$$

c) As medidas relacionadas no triângulo retângulos são:

- ângulo agudo: 40°
- cateto oposto a esse ângulo: $20cm$
- cateto adjacente a esse ângulo: x

Neste caso, a razão trigonométrica adequada é a tangente. Assim, temos:

$$\text{tg } 40^\circ = \frac{20}{x} \Rightarrow 0,84 = \frac{20}{x} \Rightarrow x \cong 23,8cm$$

2.3.1 Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo

Existe uma importante relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo, a qual é enunciada no Teorema 2.16.

Teorema 2.16 *Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se: tg* $\alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$

Demonstração:

De fato, da figura 2.25 calculamos sen α, cos α, e efetuando $\dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, logo, concluimos que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c}{b} = \text{ tg } \alpha$$

□

Exemplo 2.8 *Sabendo que sen* $40° = 0,64$ *e cos* $40° = 0,76$*, determine o valor de* x *na figura* 2.27*.*

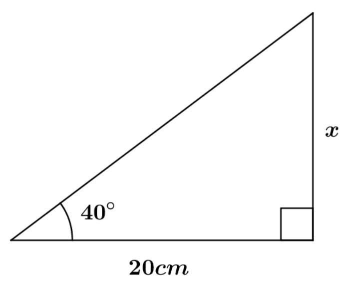


Figura 2.27: triângulo retângulo

Solução:

A razão trigonométrica adequada para encontrar o valor de x é a tangente.

$$\text{tg } 40° = \frac{x}{20}$$

Vamos obter o valor de tg 40° fazendo o quociente entre sen 40° e o cos 40°, ou seja:

$$\text{tg } 40° = \frac{\text{sen } 40°}{\cos 40°} = \frac{0,64}{0,76} \cong 0,84$$

Logo:

$$0,84 = \frac{x}{20} \therefore x \cong 16,8cm$$

2.3.2 Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

Sabendo que dois ângulos agudos de medidas α e β são complementares se, e somente se, $\alpha + \beta = 90°$. Iremos relacionar neste tópico o seno e o cosseno desses dois ângulos.

Teorema 2.17 *O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento.*

Demonstração:

Observando a figura 2.25 percebemos que sen $\alpha = \dfrac{c}{a}$ e cos $\beta = \dfrac{c}{a}$, ou seja, sen α = cos β. Do mesmo modo, verificamos que sen β = cos α, pois sen $\beta = \dfrac{b}{a}$ e cos $\alpha = \dfrac{b}{a}$. Com isso, concluimos que se dois ângulos agudos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

$\square$

Exemplo 2.9 $35°$ *é o complemento de* $55°$, *logo, sen* $35°$ = *cos* $55°$ *e sen* $55°$ = *cos* $35°$

Capítulo 3

Contexto Investigado e Experiência de Ensino

Neste capítulo, caracterizamos o contexto educacional no qual foi desenvolvida a experiência de ensino. Descrevemos, também, como aconteceu o desenvolvimento das atividades investigativas.

3.1 Apresentação do Colégio e dos Alunos

Optamos em ralizar este projeto no Colégio Estadual Dr. Augusto César Leite, pois trabalhamos nele desde 2004, o que facilitou na escolha da turma e o contato com outros professores de Matemática. O Colégio está localizado à Avenida Vereador Olímpio Arcanjo de Santana, no Bairro Porto, ao lado da UFS, próximo à Delegacia de Polícia, em Itabaiana-SE e foi inaugurado em 05 de novembro de 1980. Em março de 2015, o colégio possuia uma matrícula discente de 1.108 alunos. O mesmo oferece os ensinos fundamental e médio, nos 03 turnos e a Educação de Jovens e Adultos (EJA) no turno noturno. Os alunos são oriundos, em quase sua totalidade, do próprio bairro, mas a escola também atende estudantes de bairros vizinhos ou povoados. A maioria dos alunos são de famílias de poder aquisitivo baixo.

O colégio deixa a desejar na parte estrutural, pois falta quadra de esportes(a mesma está em reforma desde 2012), laboratório de informática, banheiros em condições adequadas de uso, e as salas, na sua maioria, são quentes, pois falta ventiladores. Mesmo com todos esses problemas, o Colégio vem se destacando em aprovações no vestibular da UFS, pois nos últimos anos, os alunos obtiveram êxito em vários cursos como por exemplo, Medicina(por dois anos consecutivos), Direito, Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Enfermagem, Nutrição e vários outros. Isso mostra que o sucesso nos estudos não depende, na maioria das vezes, da estrutura do colégio ou da renda familiar dos alunos, mas sim, de uma boa equipe de trabalho e um corpo discente que acredita em seus potenciais.

A Escola possui: 01 diretor, 01 secretária, 03 coordenadores, 02 pedagogas, 03 vigilantes, 01 merendeira, 02 oficiais administrativos, 06 executores de serviços básicos, e um quadro docente de 44 profissionais devidamente habilitados e efetivos da rede estadual, tendo também uma professora readaptada.

A turma que escolhemos para o desenvolvimento destas atividades investigativas foi o 9º ano, turma A_2. Uma turma bastante heterogênea, com 20 alunos matriculados, na faixa etária de 13 a 16 anos, dos quais muitos apresentavam facilidade para compreender os conteúdos e outros com uma certa dificuldade. Como já tínhamos trabalhado com esses alunos no ano anterior, sabíamos dos seus potenciais bem como suas dificuldades. Sabíamos, também, que a turma era bastante unida e colaborativa e que ela já tinha uma predisposição para aceitar desafios.

3.2 Experiência de Ensino: desenvolvimento das atividades investigativas

Neste tópico, descrevemos o desenvolvimento das atividades investigativas com os estudantes, por serem elas o tópico central deste estudo.

Durante a experiência de ensino foram desenvolvidas três atividades investigativas relacionadas ao estudo de semelhança de triângulos, a saber:

- Obtenção das relações métricas no triângulo retângulo
- Prova do Teorema de Pitágoras
- Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Em todas as aulas em que houve atividade de investigação, os alunos foram divididos em 5 grupos, cada grupo com 4 alunos. Foi dividido de modo que, em cada grupo, houvessem alunos com dificuldade e alunos com facilidade no aprendizado da Matemática.

A seguir, iremos relatar como foram desenvolvidas as atividades investigativas. Vale ressaltar que as atividades, na forma como foram aplicadas e os exercícios aplicados na turma, encontram-se nos Apêndices.

3.2.1 Atividade 1: Obtenção das relações métricas no triângulo retângulo

O objetivo desta atividade foi possibilitar a construção, a partir de uma folha em branco, de três triângulos semelhantes, e a partir deles, possibilitar que os alunos percebessem as relações entre as medidas de seus lados, ou seja, as relações métricas de um triângulo retângulo.

Após a divisão da turma em grupos, como já foi mencionado, foi entregue a cada grupo o seguinte material: régua, tesoura, folhas de papel A4 em branco e uma cópia da atividade 1.

A atividade 1 continha os seguintes passos:

- Com o auxílio de uma folha de papel A4, recorte dois triângulos retângulos congruentes. Nomeie os seus elementos: vértices, catetos e hipotenusa.
- Em um dos triângulos obtidos encontre a altura relativa a hipotenusa. Nomeie a altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa (distância do vértice até a base da altura).
- Recorte a figura na altura, dividindo-a em dois triângulos. Observe as figuras obtidas. O que consegue detectar? Anote
- A partir daí, que relações você pode estabelecer entre as medidas destes triângulos. Faça suas conjecturas e escreva-as.

Esta atividade foi desenvolvida num dia em que a aula de Matemática com dois horários seguidos, com início às 15h50min e término às 17h20min, ou seja, um tempo de 90 min.

Inicialmente, foi feita uma apresentação da atividade para que todos os alunos entendessem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se esperava no decurso da atividade. A turma, por nunca ter trabalhado com investigações matemáticas, sentiu um pouco de dificuldade no início, mas no decorrer da aula os alunos foram se envolvendo na atividade e perceberam que era necessário a discussão entre os componentes do grupo para que não necessitassem da intervenção do professor.

3.2.2 Atividade 2: Prova do Teorema de Pitágoras

Esta atividade teve como objetivo provar o Teorema de Pitágoras, por meio das relações estabelecidas na atividade 1, entre as medidas dos lados dos triângulos semelhantes. Esta atividade foi adaptada do livro: Investigations in Geometry, Posamentier e Sheridan (1982).

Na atividade 2 os alunos já tiveram menos dificuldade. Creditamos isso a dois motivos: primeiro, pelo fato deles já estarem mais familiarizados com as atividades investigativas, pois já sabiam que deveriam explorá-la para que não houvesse necessidade da interferência do professor e que também era preciso discutir com os colegas no grupo para se tomar as devidas decisões. Segundo, pelo fato dos alunos terem acabado de encontrar as relações métricas necessárias para a sua demonstração.

3.2.3 Atividade 3: Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Esta atividade teve como objetivo oportunizar a verificação de que as razões entre os lados de um triângulo retângulo são constantes à medida que se mantém fixo o ângulo interno, ou seja, que os estudantes descubram na prática as razões trigonométricas usando construções de triângulos semelhantes e as frações equivalentes.

Para a aplicação da terceira atividade, inicialmente foi explicado à turma a diferença entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um ângulo agudo. Foi pedido que os alunos medissem os lados dos três triângulos que eles construíram na atividade 1. Depois dos alunos encontrarem as medidas dos lados, em centímetros (com uma casa decimal), pedimos que calculassem, com o auxílio de uma calculadora, a razão (quociente), entre o cateto oposto a um ângulo agudo e a medida da hipotenusa. Essa razão foi encontrada para os três triângulos. Foi dado um tempo para que todos os grupos fizessem seus cálculos. Passado esse tempo, perguntamos aos grupos o que eles tinham percebidos em relação a esta razão. Dois grupos responderam que os valores eram iguais e os outros responderam que os valores eram aproximados. Explicamos que os valores foram aproximados devido as imprecisões das medidas, bem como a confecção e o recorte dos triângulos não foram com exatidão.

Explicamos aos alunos que a razão entre a medida do cateto oposto a um ângulo agudo e a medida da hipotenusa é sempre o mesmo valor, independente das medidas dos lados do triângulo, desde que o ângulo agudo seja mantido constante. E essa razão trigonométrica, para facilitar a identificação, é chamada de seno do ângulo agudo.

Pedimos que os alunos repetissem o mesmo processo para encontrar a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo e a hipotenusa, bem como, a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo agudo e a medida do cateto adjacente ao ângulo agudo. Eles perceberam que essas razões também eram iguais e mostramos que essas razões também recebem nomes especiais. São chamadas cosseno do ângulo agudo e tangente do ângulo agudo, respectivamente.

É importante destacar que os relatos evidenciam o envolvimento dos estudantes nas atividades, o que nos motivou a refletir sobre a experiência de ensino realizada.

Capítulo 4

Reflexões sobre a Experiência de Ensino

No momento final de cada atividade houve um tempo destinado para que cada grupo expusesse suas descobertas e como chegou até elas. Esse momento foi ideal para que houvesse uma troca de ideias e para que, também, avaliássemos como foi a receptividade dos alunos a essa nova metodologia de ensino e de aprendizagem.

No momento de discussão da atividade 1, que teve como propósito a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo, usando a semelhança de triângulos, cada grupo teve a oportunidade de mostrar aos outros como chegaram aos três triângulos semelhantes e o que fizeram para encontrar as relações métricas.

Quando surgiu a ideia de usarmos a folha para se chegar até as relações métricas, esperávamos (ou acreditávamos) que os alunos perceberiam que a diagonal do retângulo o dividia em dois triângulos retângulos iguais, mas não foi isso que aconteceu. Apenas um grupo fez da maneira que esperávamos, os demais usaram a régua para medir triângulos iguais e teve um grupo que a partir do retângulo construiram um quadrado e só depois usaram a diagonal do quadrado para dividir em dois triângulos retângulos iguais. As diferentes maneiras de proceder para representar os três triângulos semelhantes, utilizadas pelos estudantes, serviu para comprovar a imprevisibilidade das atividades investigativas e também a necessidade de estarmos sempre preparados para darmos continuidade à descobertas dos alunos. (PONTE et al, 1998).

No momento em que os alunos estavam fazendo a atividade 1, percebemos que a primeira grande dificuldade encontrada foi determinar a altura do triângulo relativa à hipotenusa. Aproveitamos esse momento e discutimos o que era uma altura e qual o ângulo que ela deveria formar com a base. Depois, sugerimos que manuseassem um dos triângulos encontrado para obtenção da altura. Depois de alguns minutos os grupos conseguiram obter os três triângulos retângulos, mas ficou evidente a dificuldade que os alunos tinham para perceber e justificar por que os triângulos eram semelhantes. Conforme demonstrado no 2º capítulo, seria necessário apenas que os alunos percebessem que os ângulos correspondentes tem medidas iguais para justicar a semelhança. Passados mais alguns minutos eles chegaram à conclusão que os triângulos obtidos eram semelhantes, mas não conseguiram justificar o motivo. Então, nesse momento intervimos e pedimos que refizessem todos os passos, mas dessa vez nomeando os ângulos. Percebemos que se na atividade já estivesse pedindo para nomear os ângulos, é possível que os alunos não tivessem dificuldade para mostrar que eles eram semelhantes. Refeita a atividade, os alunos perceberam que os ângulos correspondestes eram congruentes, o que provava a semelhança dos triângulos. Devido às dificuldades encontradas, não foi possível, dentro dos 90 min, encontrar as relações métricas. Na aula seguinte, também uma aula de 90 min, pedimos que os grupos manuseassem os três triângulos para que pudessem estabelecer as relações entre as medidas dos triângulos. Como estava havendo uma certa dificuldade para obter as relações métricas, intervimos mais uma vez e mostramos como eles deveriam proceder para obter uma relação métrica, o que fez com que eles encontrassem com facilidade as outras relações. Nesse momento, fizemos uma permuta entre os componentes dos grupos para que houvesse uma troca de informações sobre os procedimentos que eles utilizaram para obtenção das relações métricas.

Ainda em relação à atividade 1, no momento de discussão indagamos sobre o que eles acharam daquela atividade. Alguns falaram que gostaram, já outros disseram que era necessário que houvesse mais atividades como aquelas, mas também teve aluno que achou difícil (acreditamos que tenha sido pelo fato de não estar explícito no enunciado que era para nomear os ângulos, o que fez com que os alunos tivessem dificuldades para perceber que os ângulos correspondentes dos três triângulos eram congruentes). Teve um aluno que achou bastante interessante o uso da folha de papel para o desenvolvimento daquela atividade. Mendes (2009) ressalta que

> O uso de materiais concretos no ensino da Matemática é uma ampla alternativa didática que contribui para a realização de intervenções do professor na sala de aula durante o semestre letivo. Os materiais são usados em atividades que o próprio aluno, geralmente trabalhando em grupos pequenos, desenvolve na sala de aula. Essas atividades têm uma estrutura matemática a ser redescoberta pelo aluno que, assim, se torna um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático.[...] os materiais concretos devem proporcionar uma verdadeira personificação e representação dos conceitos matemáticos ou das ideias exploradas. Devem ser motivadores de aprendizagem matemática dos alunos.

Em nossa experiência de ensino percebemos que o uso dos recursos materiais concretos nas aulas ofereceu subsídios para uma melhor aprendizagem, pois foi possível através de exercícios desenvolver a percepção e a clareza no raciocínio.

No momento de discussão da atividade 2, que teve como propósito a demostração do Teorema de Pitágoras por meio das relações estabelecidas entre as medidas dos lados dos triângulos semelhantes, uma aluna perguntou se era possível demonstrar o Teorema de Pitágoras usando outras relações diferentes da que estava propondo a atividade. Neste momento não conseguimos dar uma resposta com precisão, apenas dissemos que não tínhamos certeza, mas que em um outro momento tentaríamos trabalhar com as outras relações para ver se era possível demonstrar o citado teorema. Todos os grupos foram unânimes em dizer que nesta atividade eles não tiveram maiores dificuldades, é possível que isso tenha acontecido porque os alunos já estavam mais familiarizados com as atividades investigativas, e também, porque eles tinham acabado de encontrar, na atividade anterior, as relações métricas necessárias para a sua demonstração.

Discutida a atividade 2, propusemos à turma um exercício, valendo um ponto, para que fossem reforçadas as relações estabelecidas entre as medidas dos lados dos triângulos semelhantes. Esse exercício foi aplicado em uma aula de 50 minutos, em outro dia de aula. Uma cópia foi entregue a cada grupo, cuja divisão foi feita com os mesmos componentes.

Depois de aplicado e corrigido o exercício, os resultados nos deixaram bastante animados. Sabemos que a avaliação de uma atividade não pode ser feita apenas nas respostas de um exercício, existem outros fatores que devem ser levados em consideração no decorrer das atividades investigativas, mas o fato do desempenho dos estudantes ter sido superior a 80% na resolução dos exercicios, em nosso entender, sinaliza que houve aprendizagem.

Já no momento de discussão da atividade 3, que teve como propósito a descoberta, na prática, das razões trigonométricas usando construções de triângulos semelhantes, foi mostrado aos alunos que a tangente de um ângulo agudo é a razão entre o seno e o cosseno deste ângulo. Também instigamos os alunos para que eles percebessem que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento. Concluídas as observações, fizemos um exemplo para mostrar a utilização das razões trigonométricas, depois pedimos que ele respondessem um exercício.

Depois de recolhermos e analisarmos as repostas de cada grupo, mais uma vez consideramos os resultados satisfatórios, pois em quase todas as questões os grupos usaram corretamente as razões trigonométricas. A 2ª questão foi a única que gerou certa dificuldade, pois a maioria dos grupos não conseguiu perceber qual o lado do triângulo representava a distância do observador à torre, o que consequentemente fez gerar erros nas resoluções. Vejamos nas figuras 4.1 e 4.2 como os alunos responderam a 2ª questão deste exercício.

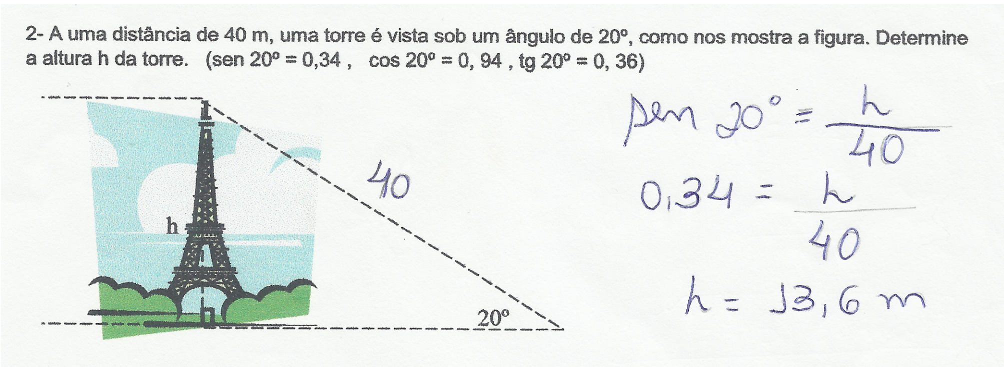


Figura 4.1: Resposta do grupo 1 para a 2ª questão

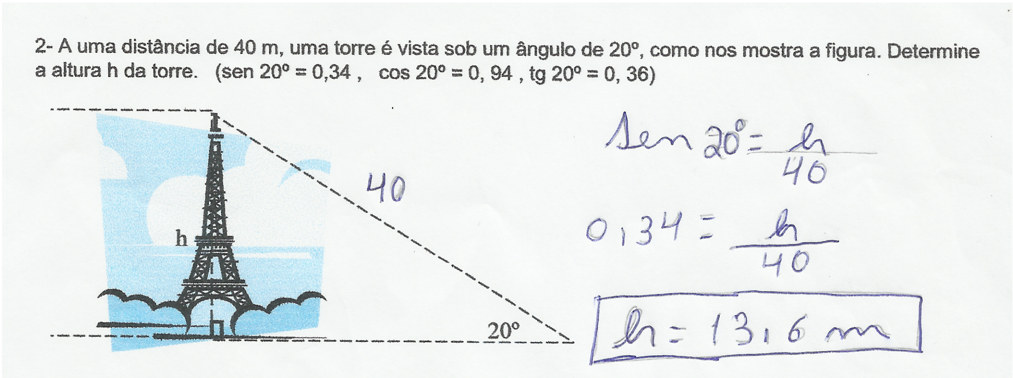


Figura 4.2: Resposta do grupo 2 para a 2ª questão

Percebe-se que os dois grupos cometeram os mesmos erros, colocaram a distância do observador à torre no lugar errado. Esse erro serviu para mostrarmos aos alunos como encontrar a menor distância entre dois objetos.

As demais resoluções estavam corretas. Um exemplo está na figura 4.3

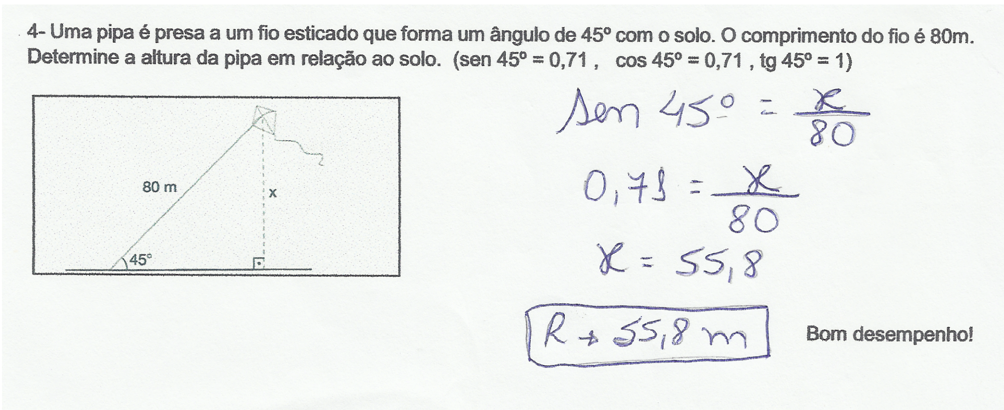


Figura 4.3: Resposta do grupo 1 para a 4ª questão

O resultado da aplicação das atividades investigativas nesta turma foi bastante proveitoso. Percebemos na prática o que só sabíamos na teoria, em relação as investigações matemáticas. Vivenciamos as dificuldades que são inerentes a implementação de algo novo no cotidiano da sala de aula. Encontramos nestas atividades um grande aliado para a construção do conhecimento de nosso aluno, mas ressaltando que existe muitas outras atividades que devemos realizar na sala de aula.

Algumas Considerações

Neste trabalho, buscamos compreender a importância das atividades investigativas no estudo da semelhança de triângulos e suas aplicações. Percebemos nestas investigações matemáticas uma excelente ferramenta para o ensino de semelhança, já que, por meio delas, os alunos puderam explorar e construir vários conhecimentos. Com esta metodologia de aprendizagem os estudantes puderam participar na construção de seu próprio conhecimento.

É aconselhável aos professores que queiram utilizar as investigações matemáticas, que comecem a trabalhar com atividades investigativas mais simples, para que alunos que só tiveram aular ditas tradicionais, sintam-se à vontade para levantar questões e propor conjecturas.

Analisando as atividades investigativas que trabalhamos com os alunos, percebemos que as dificuldades, principalmente na percepção de semelhança entre os triângulos, poderiam ter sido amenizadas se já tivessemos trabalhado com a turma alguma atividade onde eles pudessem manusear triângulos de vários tipos e tamanhos para obtenção de pares de triângulos semelhantes. Além disso, sugerimos, como já foi mencionado no desenvolvimento das atividades, que seja colocado na primeira atividade que os alunos nomeiem os ângulos à medida que eles forem encontrando os triângulos.

As atividades investigativas também foram importantes para mostrar aos alunos que o trabalho em grupo pode proporcionar vários benefícios. Eles puderam trocar ideias uns com os outros e aprender a trabalhar coletivamente.

Levando em conta o que foi observado durante o desenvolvimento dessas atividades, concordamos com Ponte (2013) quando ele diz que uma atividade de investigação deve ser constituída por diversos momentos, onde deve ser inseridos o início, o desenvolvimento e a conclusão da atividade. Acreditamos ter sido bastante útil a leitura que fizemos no início das atividades com os alunos acerca do que era pedido, principalmente porque era a primeira vez que esses alunos estavam trabalhando com atividades investigativas, e também, ainda no momento de inicial da atividade, fomos circulando pelos grupos, esclarecendo as eventuais dúvidas em relação ao trabalho pedido. No decorrer da atividade, foi dado um certo tempo para que os alunos fizessem as suas descobertas ao mesmo tempo que procuramos questioná-los para que começassem a fazer suas próprias conjecturas. Na parte final das atividades foi importante a discussão com todos os alunos para que eles sistematizassem suas ideias, suas descobertas e as conclusões a que chegaram.

Ficou evidente a necessidade do professor estar preparado para a imprevisibilidade das atividades de investigação. As situações imprevistas colocam em prova a capacidade de improvisação do docente e, muitas vezes, a sua autoconfiança. Um fato que deixou bem claro a imprevisibilidade das investigações foi quando uma aluna nos questionou se era possível demonstrar o Teorema de Pitágoras usando outras relações métricas, diferentes da que já estava mencionado na atividade.

Foi possível notar que as aulas investigativas implicam em que o professor esteja mais atento e disponível para perceber as descobertas dos alunos e neste sentido, dar continuidade ao caminho que tomaram caso esse se enquadre no trabalho desenvolvido, conforme afirmado por Fonseca, Brunheira e Ponte (1999).

Esperamos, com este trabalho, contribuir na realização de outras pesquisas, pois são necessários mais estudos que busquem compreender a importância das atividades investigativas no estudo da semelhança de triângulos.

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. Lucas M. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[3] CUNHA, H., OLIVEIRA, H., PONTE, J. P. *Investigações matemáticas na sala de aula*. In: Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 1995.

[4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar,* 9*: Geometria Plana*. 7ed. São Paulo: Atual, 1993.

[5] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados, 2006.

[6] FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. *As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática*. Actas do ProfMat 99. Lisboa: APM, 1999.

[7] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. *Matemática: Uma nova abordagem, vol.*1*: Versão Trigonometria*. São Paulo: FTD, 2000.

[8] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar,* 3*: Trigonometria*. 7ed. São Paulo, 1993.

[9] MENDES, Iran Abreu. *Matemática e investigações em sala de aula: tecendo redes cognitavas na aprendizagem*. Ed. rev. e aum. - São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[10] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática* 1. 2ed. São Paulo: Moderna, 2010.

[11] PONTE, J.P. *Investigar, ensinar e aprender*. In: Actas do ProfMat. Lisboa: APM, 2003.

[12] PONTE, J. P., BROCARDO, J. OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. 3. Ed. rev. Ampl. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

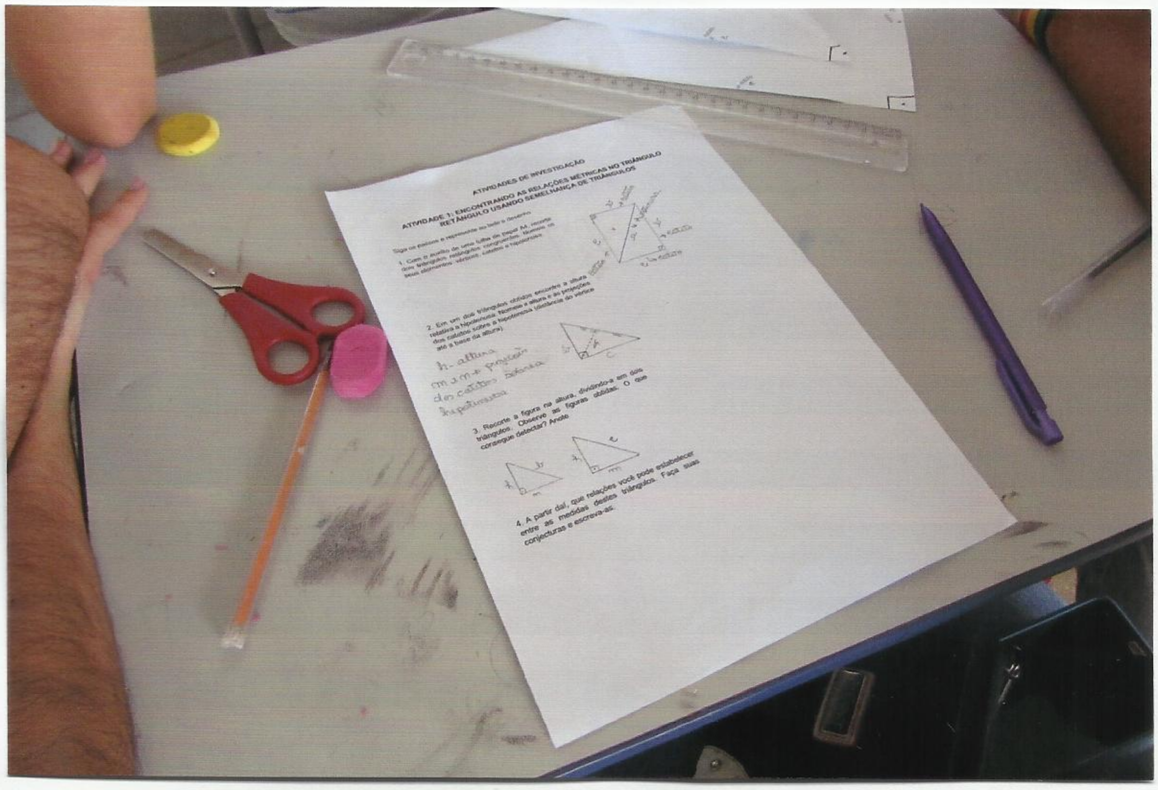
[13] PONTE, J.P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M.; FERREIRA, C. *O trabalho do professor numa aula de investigação matemática*. Quadrante, 1998.

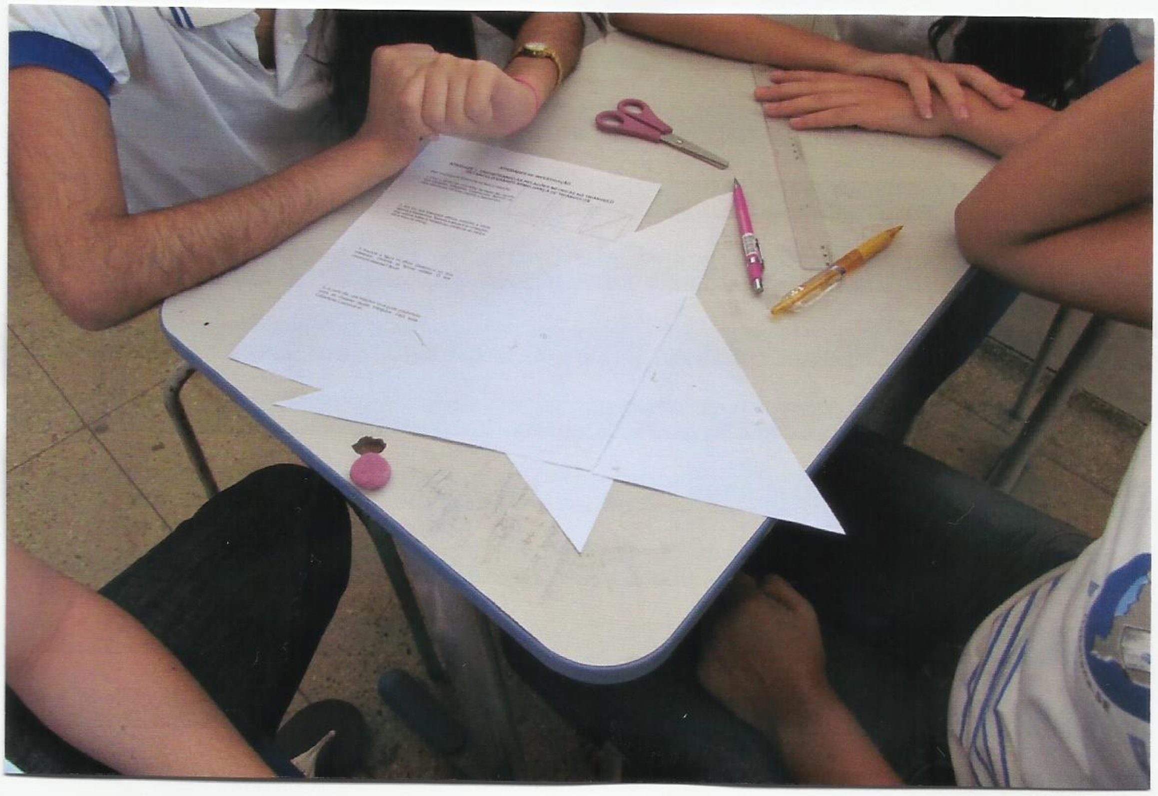
[14] POSAMENTIER, Alfred S; SHERIDAN, Gordon. *Mart Motivators: Investigations in Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1982.

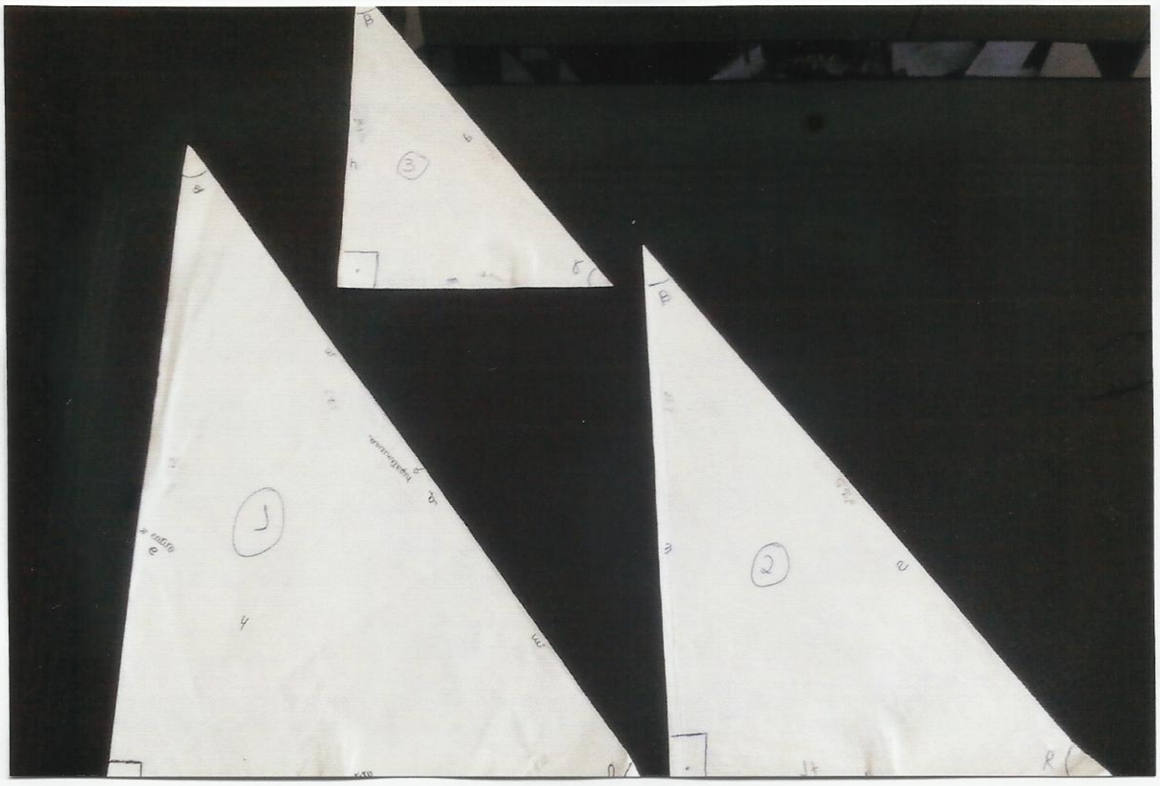
[15] WAGNER, Eduardo. *Teorema de Pitágoras e Áreas*. Apostila 3. OBMEP, 2009.

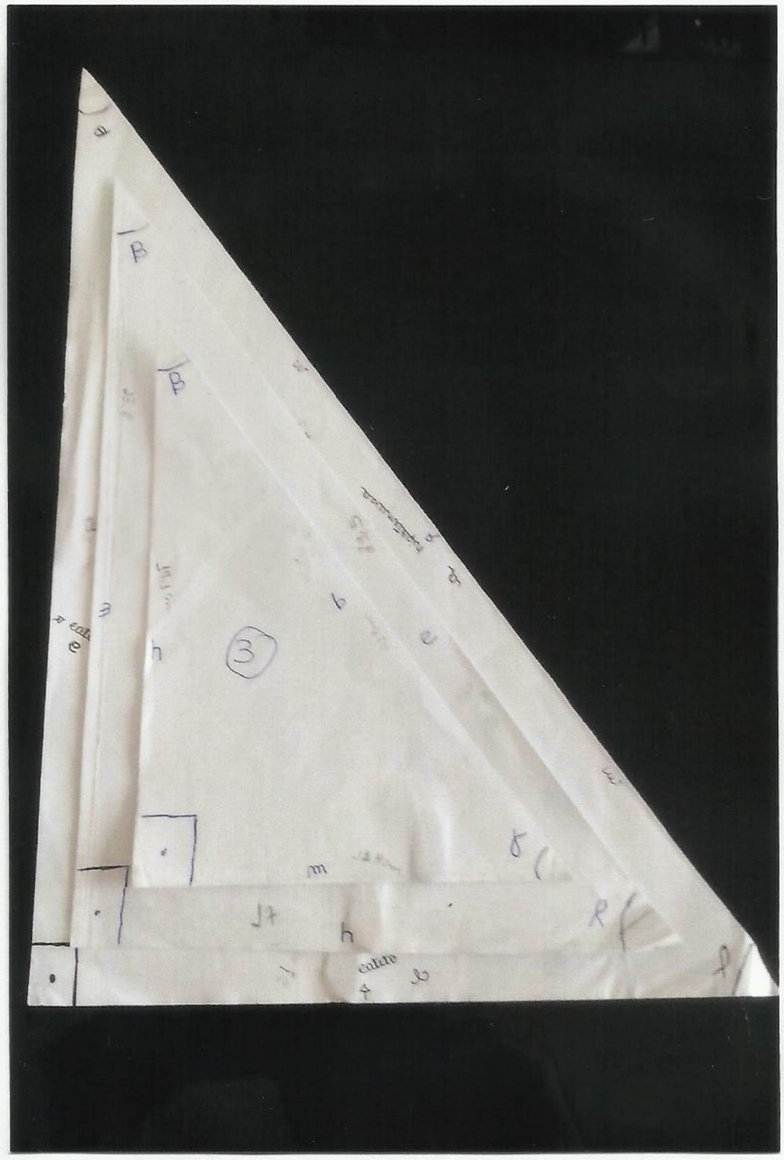
ANEXOS:
FOTOS DOS ALUNOS FAZENDO AS ATIVIDADES


César Leite


ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO
ATIVIDADE 1: ENCONTRANDO AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO USANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS
3. Recorte a figura na altura, dividindo-a em dois triângulos. Observe as figuras obtidas. O que consegue detectar? Anote
4. A partir daí, que relações você pode estabelecer entre as medidas destes triângulos. Faça suas conjecturas e escreva-as.







APÊNDICES:
ATIVIDADES INVESTIGATIVAS E EXERCÍCIOS

APÊNDICE 1

ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO

ATIVIDADE 1: ENCONTRANDO AS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO USANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Siga os passos e represente ao lado o desenho

1. Com o auxílio de uma folha de papel A4, recorte dois triângulos retângulos congruentes. Nomeie os seus elementos: vértices, catetos e hipotenusa.

2. Em um dos triângulos obtidos encontre a altura relativa a hipotenusa. Nomeie a altura e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa (distância do vértice até a base da altura).

3. Recorte a figura na altura, dividindo-a em dois triângulos. Observe as figuras obtidas. O que consegue detectar? Anote

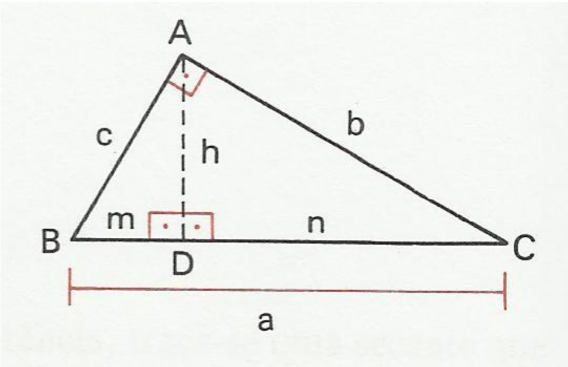
4. A partir daí, que relações você pode estabelecer entre as medidas destes triângulos. Faça suas conjecturas e escreva-as.

APÊNDICE 2

ATIVIDADE 2: PROVA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Mais diferentes provas foram escritas para o Teorema de Pitágoras que para qualquer outro teorema em geometria. Um livro lista 370 deles. A Pitágoras é dado o crédito para o desenvolvimento da seguinte prova com base em triângulos semelhantes.

Dado $\triangle ABC$ com o ângulo reto em A, prove $b^2 + c^2 = a^2$.



A altura $\overline{AD}$ forma dois triângulos retângulos que são semelhantes um ao outro e ao triângulo original. Portanto,

$\frac{a}{c} = \frac{c}{m}$ e $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$

Assim, c^2 = ____________ e b^2 = _______________.

Adicionando, $b^2 + c^2$ = ________________

Complete a prova:

____

____

____

APÊNDICE 3

ATIVIDADE 3: RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Preencha a tabela abaixo com as respectivas medidas dos lados dos triângulos retângulos encontrados na 1ª atividade usando uma casa decimal, ou seja, usando os milímetros:

Triângulo	Comprimentos em centímetros		
	Hipotenusa	Cateto oposto	Cateto Adjacente
Δ1			
Δ2			
Δ3			

Razões entre os segmentos

Preencha a tabela abaixo e encontre as razões que se pede.

Triângulo	Razões entre os lados		
	Cateto oposto e a hipotenusa	Cateto adjacente e hipotenusa	Cateto oposto e o cateto adjacente
Δ1			
Δ2			
Δ3			

Razões trigonométricas

- As razões entre o cateto oposto e a hipotenusa nos três triângulos retângulos foram iguais ou aproximadas (devido imprecisão das medidas)? ________. Qual foi o valor? ___________. Essa razão é tão importante que recebe um nome específico para isso: **SENO**. Portanto, quando quisermos nos referir à razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um ângulo, estaremos fazendo referência ao SENO deste ângulo.
- As razões entre o cateto adjacente e a hipotenusa nos três triângulos retângulos foram iguais ou aproximadas (devido imprecisão das medidas)? ________. Qual foi o valor? ___________. Essa razão também tem um nome especial: **COSSENO**.
- As razões entre o cateto oposto e cateto adjacente nos três triângulos retângulos foram iguais ou aproximadas (devido imprecisão das medidas)? ________. Qual foi o valor? ___________. A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente chama-se **TANGENTE.**

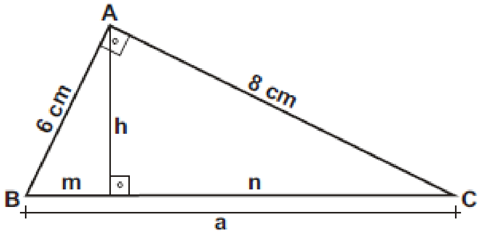
É importante salientar que seno do ângulo A (sen $\hat{A}$), cosseno do ângulo A (cos $\hat{A}$) e tangente do ângulo A (tg $\hat{A}$) dependem apenas do ângulo **A**, mas não do tamanho do triângulo retângulo do qual $\hat{A}$ é um dos ângulos agudos.

APÊNDICE 4

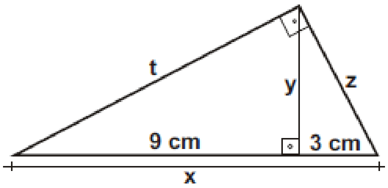
COLÉGIO ESTADUAL DR. AUGUSTO CÉSAR LEITE
PROFESSOR: **JOSINALDO**
ALUNO(A):
SÉRIE: 9º ANO DATA:

<u>QUESTÕES SOBRE RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO</u>

01) No triângulo retângulo ABC abaixo, determine a , m , n e h.

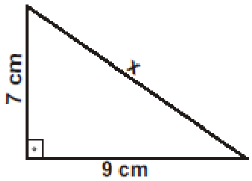


02) No triângulo retângulo abaixo, determine o valor de **x**, **y**, **z** e **t**.

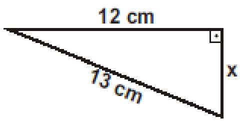


04) Determine o valor de x nos triângulos retângulos abaixo.

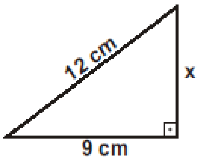
a)



b)



c)

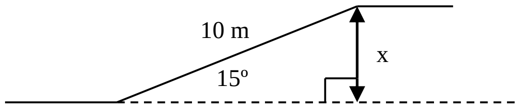


APÊNDICE 5

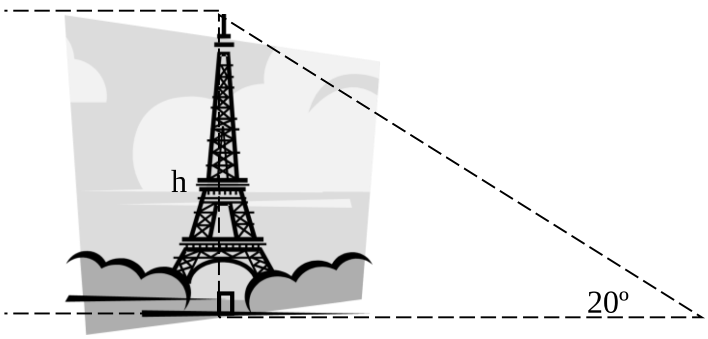
COLÉGIO ESTADUAL DR. AUGUSTO CÉSAR LEITE
PROFESSOR: **JOSINALDO**
ALUNOS(AS):
SÉRIE: 9º ANO DATA:

<u>QUESTÕES SOBRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS</u>

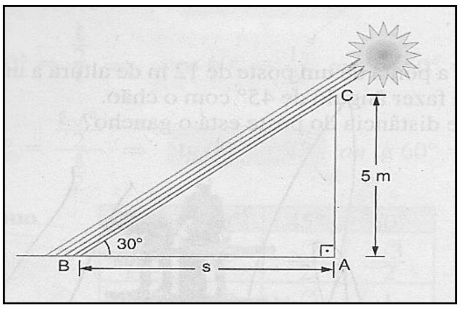
1- Uma rampa lisa com 10 m de comprimento faz ângulo de 15° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente a quantos metros? (use: sen 15° = 0,26, cos 15° = 0,97, tg 15° = 0,27)



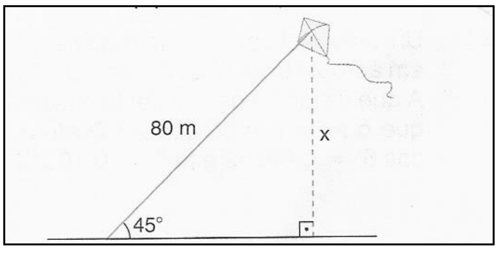
2- A uma distância de 40 m, uma torre é vista sob um ângulo de 20º, como nos mostra a figura. Determine a altura h da torre. (sen 20º = 0,34 , cos 20º = 0, 94 , tg 20º = 0, 36)



3- Qual é o comprimento da sombra de uma árvore de 5 m de altura quando o sol está 30º acima do horizonte? (sen 30º = 0,50 , cos 30º = 0,87 , tg 30º = 0,58)



4- Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento do fio é 80m. Determine a altura da pipa em relação ao solo. (sen 45º = 0,71 , cos 45º = 0,71 , tg 45º = 1)



Bom desempenho!