Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Frações Contínuas e Equações Diofantinas Lineares e Não-Lineares

Jackson Pereira Júnior
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Outubro de 2015

Frações Contínuas e Equações Diofantinas Lineares e Não-lineares

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Jackson Pereira Júnior e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 14 de dezembro de 2015.

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P436f Pereira Júnior, Jackson.
Frações Contínuas e Equações Diofantinas Lineares e Não-lineares / Jackson Pereira Júnior. -- 2015
ix, 61 f. ; 30 cm.

Orientador: Martinho da Costa Araújo.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Racional. 2. Irracional. 3. Convergente. 4. Pell. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de Outubro de 2015 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi

Prof. Dr. Severino Cirino de Lima Neto

À Nair Aparecida dos Santos, minha Mãe.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

Agradeço primeiramente à Deus;

À minha família, em especial à minha mãe, Nair Aparecida dos Santos, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos;

Ao meu orientador, Martinho da Costa Araújo;

À minha namorada, Angela Paula Missio, que me incentivou em todos os momentos;

Ao meu grande amigo Nazime Sales Filho;

Ao meu pai Jackson Pereira;

Aos meus amigos, e companheiros de curso Paulo Sérgio, Adilson, Sandro, Marcioney e todos os outros colegas de curso;

Aos meus amigos.

Muito obrigado a todos.

Perseverança

Resumo

Neste trabalho é apresentada uma proposta diferenciada para o estudos de frações contínuas, onde serão abordadas propriedades sobre representações de números racionais e irracionais sobre a forma de fração contínua. Além, do estudo de propriedades referentes a frações contínuas, abordaremos também os estudo de seus convergentes, evidenciando as propriedade mais importantes, e aplicando o uso de frações contínuas na resolução de equações diofantinas lineares e também na resolução das chamadas equações de Pell.

Palavras chave: Racional, Irracional, Convergente, Pell.

Abstract

In this work a different proposal is presented for the study of continued fractions, where properties will be addressed on representations of rational and irrational numbers on the form of continued fraction. In addition, the study of properties related to continued fractions, we will also address the study of its convergent, highlighting the most important property, and applying the use of continued fractions in solving linear Diophantine equations and also in the resolution of so-called Pell equations.

Keywords: Rational, Irrational, Convergent, Pell.

Sumário

Introdução

> "A Álgebra é generosa: freqüentemente ela dá mais do que se lhe pediu."
>
> (D' Lambert)

As frações contínuas nos fornece um ponto de vista diferente sobre muitos problemas matemáticos, em particular sobre a natureza dos números. As frações contínuas foram estudadas por grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII. Em geral, quase todos os livros sobre a teoria dos números, incluem um capítulo sobre frações contínuas, muitas vezes, bem condensado e bastante difícil para um iniciante no assunto. Pensando nisso, propomos apresentar uma discussão simples sobre frações contínuas que possa ser entendida por qualquer pessoa que tenha um grau mínimo de formação matemática.

O Capítulo 1, versa sobre o aspecto histórico acerca do assunto, elencamos algumas definições iniciais, para que o assunto possa ser desenvolvido com bastante clareza.

O Capítulo 2, mostra como as frações contínuas podem ser descobertas, e como números racionais podem ser representados em forma de frações contínuas. Gradualmente serão introduzidos teoremas e propriedades preliminares sobre frações contínuas finitas. Este capítulo também trata da representação de números irracionais em forma frações contínuas infinitas, e inclui uma discussão introdutória através do conceito de limites. Faremos um estudo sobre os convergentes das frações contínuas sejam finitas ou infinitas.

O Capítulo 3, mostra como podem ser aplicadas as propriedades descritas no capítulo anterior na resolução de equações diofantinas lineares e equações de Pell.

Este trabalho teve como ponto de partida, o estudo dos textos de (Rosen, 1993), (Moore, 1964) e (Koshy, 2002), que serviram de aporte teórico na elaboração deste texto.

Capítulo 1

Divisibilidade e Máximo Divisor Comum

Este Capítulo abordá o aspecto histórico referente as escrituras nos livros de Euclides de Alexandria, abordando primeiramente o conceito de divisão até o processo de divisões sucessivas na busca do máximo divisor comum (m.d.c) entre dois números naturais. O processo de obtenção do máximo divisor comum será o ponto de partida para desenvolver o tema proposto, por isto, far-se-á uma breve explanação sobre as propriedades inicias acerca do mdc, para que o assunto seja desenvolvido com clareza.

1.1 Aspectos históricos

Ao se tratar de obras matemáticas, todo e qualquer estudante de matemática, profissional ou amador, já ouviu falar na obra os "Elementos" de Euclides de Alexandria. Segundo (Eves, 1995) é provável que os "Elementos" de Euclides sejam, em sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida de um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. Não há dúvida de que Euclides colaborou com muitas demonstrações e aperfeiçoou outras tantas, mas, o grande mérito de seu trabalho, reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo em uma sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições.

Ao contrário do que muitos pensam, os "Elementos" de Euclides não pretendia servir somente como um prolongamento amplo da discussão sobre os cinco poliedros regulares, sua obra também aborda a teoria dos números e também a álgebra elementar (geométrica). Os "Elementos" de Euclides é composto de uma coleção de 13 livros, totalizando 465 proposições, distribuídas entre eles. Em sua coleção, Euclides apresenta no livro I, 48 proposições sobre as propriedades dos triângulos, a teoria das paralelas e a relação entre áreas. No livro II, são apresentadas 14 proposições sobre transformações de áreas e a álgebra geométrica dos pitágoricos. No livro III, são apresentadas 39 proposições, sobre o círculo e seus elementos, e suas relações de posição a outros objetos geométricos. No livro IV, são apresentadas 16 proposições, discutindo construções com régua e compasso. No livro V são tratados, principalmente, a teoria das proporções de Eudoxo. No livro VI são descritas algumas aplicações da teoria das proporções à geometria plana.

Nos livros VII, VIII e IX são apresentadas 102 proposições sobre a teoria elementar dos números, e no livro VII é feita apresentação do algoritmo euclidiano para encontrar o máximo divisor comum entre dois números, enquanto que o livro VIII, discorre sobre as proporções contínuas e progressões gométricas relacionadas, e no livro IX, são apresentados e enunciados muitos teoremas significativos para a teoria dos números, como por exemplo, o teorema que hoje é conhecido como o "Teorema Fundamental da Aritmética". No livro X, são abordados os números irracionais.

E, por fim, os livros XI, XII e XIII tratam da geometria sólida, onde o livro XI descreve retas e planos no espaço, XII aborda, as noções de volumes dos sólidos e, o XIII descreve algumas construções com foco na inscrição dos poliedros regulares em uma esfera, respectivamente. Acredita-se que os "Elementos" de Euclides tenha sido escrito como um texto introdutório de matemática geral.

Como foi citado, no livro VII está o Algoritmo de Euclides, que consiste em um processo para determinar o máximo divisor comum de dois números inteiros, tal algoritmo é fundamental no progresso de vários campos da matemática moderna. Segundo (Eves, 1995) o algoritmo é enunciado da seguinte forma: "Divida o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então divida o divisor pelo resto. Continue esse processo de dividir o último divisor pelo último resto até que a divisão seja exata. O último final é o máximo divisor comum (m.d.c) procurado".

1.2 Conceitos iniciais

Definição 1.2.1. *Um número natural a divide um número natural b se $b = ac$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Neste caso dizemos que a é um divisor de b e que b é um múltiplo de a, ou ainda, que b é divisível por a. Denotaremos por $a|b$ o fato de a dividir b, e por $a \nmid b$ caso a não divide b.*

Considerando que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, então o elemento $c \in \mathbb{N}$, tal que $b = ac$, onde $a \neq 0$ é chamado quociente da divisão de b por a.

Exemplo 1.2.2. $2|8$, *pois,* $8 = 2.4$.

$\square$

Para a relação $a|b$ em $\mathbb{N}$ valem as seguintes propriedades:

1. $a|a, \forall a \in \mathbb{N}$, pois $a = a.1$ (reflexiva)

2. $a|b$ e $b|a \Rightarrow a = b$ (anti-simétrica)

   Por hipótese, $b = ac$ e $a = bd$, fazendo a substituição da primeira igualdade na segunda temos $a = a(cd)$. Se $a = 0$, então $b = 0$. Se $a \neq 0$ então $cd = 1$ e portanto $c = d = 1$, logo $a = b$.

3. $a|b$ e $b|c \Rightarrow a|c$ (transitiva)

   Como $b = ar$ e $c = bs$, então $c = a(rs)$.

4. Se $a|b$ e $a|c$, então $a|(ax + by), \forall x, y \in \mathbb{N}$

   Observa-se que $a|b \Rightarrow a|bx, \forall x \in \mathbb{N}$. Se $b = ar$ e $c = as$ decorre que $bx = arx$ e $cy = asy$, assim $bx + cy = arx + asy = a(rx + sy) \Rightarrow a|(bx + cy)$.

5. Se $c|a, c|b$ e $a \leq b$, então $c|(b - a)$

   Por hipótese temos $a = cr$ e $b = cs$. Tomando $b = a + d$, então $cs = cr + d$, portanto $u = cs - cr = c(s - r)$. Logo $c|u \Rightarrow c|(b - a)$.

6. Seja $a = b + c$, supondo que $d|b$, então $d|a \Leftrightarrow d|c$.

   $(\Rightarrow)$ Sabendo que $a = b + c$ e $d|b$ então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $b = ds$, se $d|a$ então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $a = dq$, logo $a = b + c \rightarrow dq = ds + c \rightarrow c = dq - ds \rightarrow c = d(q - s)$, tomando $r = q - s$ então $c = dr \rightarrow d|c$.

($\Leftarrow$) Sabendo que $a = b + c$ e $d|b$ então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $b = ds$, se $d|c$ então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $c = dr$, logo $a = b + c \rightarrow a = ds + dr \rightarrow a = d(r + s)$, tomando $q = s + r$ então $a = dq \rightarrow d|a$.

7. Se $a|b$ e $b \neq 0$, então $a \leq b$ Pela hipótese, existe $q \in \mathbb{N}^*$ de modo que $b = aq$. Como $q > 0$, então $q \geq 1$ e portanto $q = 1 + u$, para algum $u \in \mathbb{N}$. Assim $b = aq = a(1 + u) = a + au$ o que implica $a \leq b$.

Para auxilio de algumas demonstrações, será usado o princípio de indução matemática

Teorema 1.2.3. *Seja $a \in \mathbb{N}$, supondo que a cada número natural $n \geq a$ esteja associado uma afirmação $P_{(n)}$, admitimos ainda que seja possível mostrar que:*

i *$P_{(a)}$ é verdadeira.*

ii *Para todo $r \geq a$, se $P_{(n)}$ é verdadeira, então $P_{(n+1)}$ também é verdadeira.*

Então $P_{(n)}$ é verdadeira para todo $n \geq a$.

Demonstração: Seja V o subconjunto dos elementos de $\mathbb{N}$ onde $P_{(n)}$ é verdade, determinado por $V = \left\{n \in \mathbb{N}; P_{(n)}\right\}$. Considerandoo conjunto $S = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\}$, que verifica $a + S \subset V$. Pela condição i, temos que $a + 0 = a \in V$, assim $0 \in S$. Mas, se $m \in S$, então $a + m \in V$ e, pela condição ii, temos $a + m + 1 \in V$, logo $m + 1 \in S$. Assim temos que $S = \mathbb{N}$. Portanto, $\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V$.

$\square$

O algoritmo da divisão de Euclides é dado por:

Teorema 1.2.4 (Algoritmo da divisão de Euclides)**.** *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, existe um único par de números inteiros q e r, de maneira que $a = qb + r$, com $0 \leq r < b$. Os elementos a, b, q e r são chamados, respectivamente, divisor, dividendo, quociente e resto da divisão de a por b.*

Demonstração: Considere b um número natural não nulo. Se $a \in \mathbb{N}$, então a é múltiplo de b ou a está entre dois múltiplos consecutivos de b, ou seja, $bq \leq a < b(q + 1)$. Desta forma temos que $q + 1$ é o menor elemento de $\{n \in \mathbb{N}|bn > a\}$, sendo este um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, pois, contém o elemento $a+1$, ou seja, $b \geq 1 \Rightarrow ab \geq a \Rightarrow ab+b \geq a+b \Rightarrow b(a+1) \geq a+b > a$.

Se $bq \leq a$, então existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a = qb + r$. Precisamos provar que $r < b$, considerando $r \geq b$, se $r = a - bq \geq b$, então $(a - qb) + qb \geq b + bq$, logo $a \geq b(q+1)$, o que não é possível. Dessa forma podemos dizer que: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b \neq 0$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ de maneira que $a = qb + r$ e $r < b$.

Observe que se $r = 0$, então a é múltiplo de b.

Supondo que $a = bq + r = bq_1 + r_1$, onde $r < b$ e $r_1 < b$. Admitindo que $r \neq r_1$ e considerando que $0 < r - r_1 < b$, então a igualdade $bq + r = bq_1 + r_1$ decorre que $bq + (r - r_1) = bq_1$, assim $b|(r - r_1)$, logo $b \leq (r - r_1)$ o que é um absurdo. Dessa forma temos então $r = r_1$ e portanto $q = q_1$.

□

Demonstrado o algoritmo da divisão, o máximo divisor comum de dois números inteiros a e b (a ou b diferente de zero), representado por $mdc(a,b)$ ou simplesmente por (a,b), é o maior inteiro que divide a e b, então:

Definição 1.2.5 (Máximo Divisor Comum)**.** *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Um número $d \in \mathbb{N}$, com $d \neq 0$, é considerado o máximo divisor comum de a e b se:*

1. $d|a$ e $d|b$.

2. se c é um número natural de forma que $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

Demonstração: Seja B o conjunto de todas as combinações lineares $\{na + mb\}$ onde n e m são inteiros. Escolhendo n_0 e m_0 tais que $c = n_0a + m_0b$ seja o menor inteiro positivo pertencente ao conjunto B. Supondo que $c \nmid a$, então existem q e r tais que $a = qc + r$ com $0 < r < c$, assim

$$r = a - qc = a - q(n_0a + m_0b) = (1 - qn_0)a + (-qm_0)b,$$

ou seja, $r \in B$, pois $(1 - qn_0)$ e $(-qm_0)$ são inteiros, mas isso é uma contradição, uma vez que $0 < r < c$ e c é o menor elemento positivo de B, logo $c|a$.

De forma análoga se mostra que $c|b$. Sabendo que d é um divisor comum de a e b, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $a = k_1d$ e $b = k_2d$ e, portanto, $c = n_0a + m_0b = n_0k_1d + m_0k_2d = d(n_0k_1 + m_0k_2) \Rightarrow d|c$. Assim temos que $d \leq c$ e como $d < c$ não é possível, pois d é o máximo divisor comum, concluímos que $d = n_0a + m_0b$.

$\square$

Teorema 1.2.6. *Se a e b são inteiros e $a = qb + r$ onde q e r são inteiros, então*

$$(a, b) = (b, r).$$

Demonstração: Observando a relação $a = qb + r$ concluímos que todo divisor de b e r é um divisor de a, se esta mesma relação for escrita como $r = a - qb$, então todo divisor de a e b é um divisor de r. Logo o conjunto dos divisores comuns de a e b é igual ao conjunto de divisores comuns de b e r, o que nos garante que $(a, b) = (b, r)$.

$\square$

Este teorema apresenta um resultado elementar, mas é de grande importância na demonstração do Algoritmo de Euclides. que é dado por:

Teorema 1.2.7. *Sejam $r_0 = a$ e $r_1 = b$ inteiros não-negativos com $b \neq 0$. Se o algoritmo da divisão for aplicado sucessivamente para se obter $r_j = q_{j+1}r_{j+1} + r_{j+2}$, com $0 \leq r_{j+2} < r_{j+1}$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ e $r_{n+1} = 0$ então $(a, b) = r_n$, o último resto não nulo.*

Demonstração: Aplicando o algoritmo da divisão para dividir $r_0 = a$ por $r_1 = b$, obtemos $r_0 = q_1r_1 + r_2$, em seguida dividimos r_1 por r_2, obtemos $r_1 = q_2r_2 + r_3$, e assim sucessivamente, até a otenção do resto $r_{n+1} = 0$. Sabendo que a cada passo o resto é sempre menor do que o anterior, e tendo r_1 e r_2 positivos, então após um número finito de aplicações do algoritmo teremos um resto nulo. Assim geramos a sequência:

$r_0 = q_1r_1 + r_2$, com $0 < r_2 < r_1$

$r_1 = q_2r_2 + r_3$, com $0 < r_3 < r_2$

$r_2 = q_3r_3 + r_4$, com $0 < r_4 < r_3$

$\vdots$

$r_{n-2} = q_{n-1}r_{n-1} + r_n$, com $0 < r_n < r_{n-1}$

$r_{n-1} = q_nr_n + 0$

A última destas equações nos diz que $(r_n, r_{n-1}) = rn$, a penúltima nos diz que este número é igual a (r_{n-1}, r_{n-2}) e prosseguindo temos a sequência:

$r_n = (r_{n-1}, r_n) = (r_{n-2}, r_{n-1}) = \ldots = (r_1, r_2) = (r_0, r_1) = (a, b)$.

Portanto o máximo divisor comum de a e b é o último resto não nulo da sequência das divisões descritas.

$\square$

Essa demonstração é construtiva, e costuma-se empregar um dispositivo prático, conhecido como processo das divisões sucessivas, para encontrar o máximo divisor comum entre dois números.

Exemplo 1.2.8. *Encontrar, pelo algoritmo de Euclides, o* $mdc(41, 12)$.

$41 = 12.3 + 5$

$12 = 5.2 + 2$

$5 = 2.2 + 1$

$2 = 1.2$

Logo o $mdc(41, 12) = 1$.

Pelo dispositivo prático temos

	3	2	2	2
41	12	5	2	1
5	2	1	0	

$\square$

Capítulo 2

Frações contínuas

Neste capítulo será descrito as frações contínuas na forma finita e infinita. As frações contínuas de forma finita, estão diretamente ligadas a representação de números racionais, e as frações contínuas de forma infinita, estão diretamente ligadas a representação de números irracionais. Também serão abordadas as propriedades dos convergentes das frações contínuas finitas e infinitas.

2.1 Frações contínuas finitas

Ao descrever o método de divisões sucessivas utilizadas por Euclides para se encontrar o máximo divisor comum de dois números, pode-se utilizar este método para se converter uma fração qualquer em uma fração contínua.

Definição 2.1.1. *Uma fração contínua finita é uma expressão da forma:*

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} \tag{2.1}$$

onde $q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n$ são números reais, com $q_1, q_2, \cdots, q_n$ positivos. Os números reais $q_1, q_2, \cdots, q_n$ são chamados de quocientes parciais da fração contínua finita. A fração contínua finita é chamada de simples se os números reais $q_0, q_1, q_2, \cdots, q_n$ são todos inteiros.

Observando que essa representação de fração contínua é muitas vezes extensa, uma fração contínua é representada por

$$[q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n]. \tag{2.2}$$

Tomando um número racional irredutível $\frac{a}{b}$, pelo algoritmo da divisão de Euclides, existem únicos q_0 e r_0 tais que $a = q_0 b + r_0$, com $0 \leq r_0 < b$, logo:

$$\frac{a}{b} = \frac{q_0 b}{b} + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_0}} \tag{2.3}$$

Para b e r_0, existem únicos q_1 e r_1 tais que $b = q_1 r_0 + r_1$, com $0 \leq r_1 < r_0$, logo:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{r_0}{r_1}} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_0}}} \tag{2.4}$$

Repetindo esse processo sucessivamente, obtem-se a fração contínua desse número racional, ou seja:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}} \tag{2.5}$$

E a escrevemos como

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n] \tag{2.6}$$

Exemplo 2.1.2. *Expressar o número racional* $\frac{41}{12}$ *sob a forma de fração contínua.*

Pelo algoritmo de Euclides, temos:

$$41 = 12.3 + 5$$

$$12 = 5.2 + 2$$

$$5 = 2.2 + 1$$

$$2 = 1.2$$

Como consequência dessas igualdades podemos expressar o número racional $\frac{41}{12}$

sob a forma de fração contínua, ou seja:

$$\frac{41}{12} = 3 + \frac{5}{12} = 3 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = [3; 2, 2, 2]$$

□

Nesse processo de divisões sucessivas observa-se os seguintes casos:

1. se $a > b$, então o primeiro quociente parcial da fração contínua é positivo;

Exemplo 2.1.3.

$$\begin{aligned} \frac{85}{32} &= 2 + \frac{21}{32} = 2 + \frac{1}{\frac{32}{21}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{11}{21}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{21}{11}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{10}{11}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{10}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10}}}} = [2; 1, 1, 1, 10] \end{aligned}$$

□

2. se $0 < a < b$, então o primeiro quociente parcial da fração contínua é zero;

Exemplo 2.1.4.

$$\begin{aligned} \frac{17}{31} &= 0 + \frac{17}{31} = 0 + \frac{1}{\frac{31}{17}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{14}{17}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{14}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{14}}} \\ &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{14}{3}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{3}}}} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}} \\ &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = [0; 1, 1, 4, 1, 2] \end{aligned}$$

$\square$

3. se $a < 0$, então o primeiro quociente parcial da fração contínua é negativo;

Exemplo 2.1.5.

$$\frac{-40}{13} = -4 + \frac{12}{13} = -4 + \frac{1}{\frac{13}{12}} = -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{12}} = [-4; 1, 12]$$

$\square$

Observe que como consequência da definição, se $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$, então

$$\frac{b}{a} = [0; q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n] \tag{2.7}$$

pois,

$$\frac{b}{a} = 0 + \frac{b}{a} = 0 + \frac{1}{\frac{a}{b}} \tag{2.8}$$

ou seja, se

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

então,

$$\frac{b}{a} = 0 + \cfrac{1}{q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}} \tag{2.9}$$

Teorema 2.1.6. *Toda fração contínua finita simples representa um número racional.*

Demonstração: Vamos provar o teorema usando indução matemática sobre o número de quocientes parciais da fração contínua finita simples. Seja $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ uma fração contínua finita simples. Quando $n = 1$ temos

$$[q_0; q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$$

que é um número racional.

Agora vamos supor que cada fração contínua finita simples com k quocientes parciais é um número racional, onde $k \geq 1$. Então

$$[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}] = q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}]}$$

Uma vez que $[q_1; q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}]$ contém k quocientes parciais, é um número racional $\frac{r}{s}$, onde $s \neq 0$. Então

$$[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}] = q_0 + \frac{1}{\frac{r}{s}} = q_0 + \frac{s}{r} = \frac{q_0 r + s}{r}$$

é um número racional.

Assim, por indução $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ é um número racional para todo n inteiro positivo.

$\square$

Exemplo 2.1.7. *Verificando a fração contínua* $[2, 1, 4, 5, 3]$*, temos:*

$$\begin{aligned}
[2,1,4,5,3] &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{15+1}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{3}{16}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{64+3}{16}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{16}{67}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{67+16}{67}} = 2 + \frac{67}{83} \\
&= \frac{166+67}{83} = \frac{233}{83}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[2, 1, 4, 5, 3] = \frac{233}{83}$$

$\square$

O seguinte teorema nos mostra que o inverso também é verdadeiro, ou seja, que todo número racional pode ser representado por uma fração contínua finita simples. A prova foi descoberta por Euler e envolve o algoritmo da divisão de Euclides.

Teorema 2.1.8. *Todo número racional pode ser representado por uma fração contínua finita simples.*

Demonstração: Seja $x = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros com $b > 0$. Seja $r_0 = a$ e $r_1 = b$. Então, o algoritmo da divisão de Euclides produz a seguinte sequência de equações:

$r_0 = r_1 q_0 + r_2, 0 < r_2 < r_1,$

$r_1 = r_2 q_1 + r_3, 0 < r_3 < r_2,$

$r_2 = r_3 q_2 + r_4, 0 < r_4 < r_3,$

$\vdots$

$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-3} + r_{n-1}, 0 < r_{n-1} < r_{n-2},$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-2} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1},$

$r_{n-1} = r_n q_{n-1}.$

Nessas equações, $q_1, q_2, \cdots, q_{n-1}$ são inteiros positivos. Escrevendo essas equações em forma de frações, temos

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} = q_0 + \frac{r_2}{r_1} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_1 + \frac{r_3}{r_2} = q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}$$

$$\frac{r_2}{r_3} = q_2 + \frac{r_4}{r_3} = q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_3}{r_4}}$$

$\vdots$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-3} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-3} + \cfrac{1}{\cfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-2} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-2} + \cfrac{1}{\cfrac{r_{n-1}}{r_n}}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_{n-1}.$$

Substituindo o valor de $\frac{r_1}{r_2}$ a partir da segunda equação na primeira equação, obtemos

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}. \tag{2.10}$$

Similarmente, substituimos o valor de $\frac{r_2}{r_3}$ da terceira equação na equação anterior, obtemos

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_3}{r_4}}}}.$$

Continuando da mesma maneira, vemos que

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots \cfrac{1}{q_{n-2} + \cfrac{1}{q_{n-1}}}}}.$$

Consequentemente, $\frac{a}{b} = [q_0; q_1, \cdots, q_{n-1}]$. Isto mostra que todo número racional pode ser escrito como uma fração contínua finita simples.

$\square$

Exemplo 2.1.9. *Determinar uma representação por fração contínua do número racional* $\frac{225}{157}$.

Pelo algoritmo de Euclides temos:

	1	2	3	4	5
225	157	68	21	5	1
68	21	5	1	0	

assim,

$$\begin{aligned}
\frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{157}{68}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{21}{68}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{68}{21}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{5}{21}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{21}{5}}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}}} = [1; 2, 3, 4, 5]
\end{aligned}$$

$\square$

Nota-se que as frações contínuas finitas simples, usadas para representar números racionais não são únicas, assim, cada número racional pode ser escrito como uma fração contínua simples finita de duas maneiras diferentes.

O teorema a seguir mostra que é possível ter duas representações em frações contínuas para um mesmo número racional.

Teorema 2.1.10. *Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua finita.*

Demonstração: Na representação de um número racional sob a forma fração contínua finita simples, sempre que o termo q_n for maior que 1, podemos substituí-lo por $(q_n-1)+\dfrac{1}{1}$, desta forma, a representação por fração contínua finita simples pode assumir duas formas diferentes, ou seja, a fração contínua finita simples

$$[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}$$

pode ser representada como

$$[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n - 1, 1] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{(q_n - 1) + \cfrac{1}{1}}}}}}.$$

□

Exemplo 2.1.11. *Considerando o exemplo já utilizado, determinar uma segunda representação por fração contínua finita simples para o número racional* $\dfrac{233}{83}$. *Sabemos que*

$$\frac{233}{83} = [2; 1, 4, 5, 3] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}}$$

substituindo o termo $q_4 = 3$ *por* $(3-1) + \dfrac{1}{1}$ *temos*

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{(3-1) + \cfrac{1}{1}}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = [2; 1, 4, 5, 2, 1]$$

logo,

$$\frac{233}{83} = [2; 1, 4, 5, 3] = [2; 1, 4, 5, 2, 1].$$

$\square$

De fato, pode-se mostrar que cada número racional pode ser escrito como uma fração contínua finita simples em exatamente duas formas, uma com um número ímpar de termos, e outra com um número par de termos.

2.2 Convergentes

Discutir-se-á os números obtidos a partir de uma fração contínua finita. Truncando a fração contínua finita simples dada por $x = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$, nos vários sinais de mais, podemos gerar uma sequência $\{c_k\}$ de aproximações de x, essas aproximações são chamadas de convergentes da fração contínua finita simples. Este conceito foi introduzido por Wallis (1616-1703) em sua Opera Mathematica, e é dado por

Definição 2.2.1. *Dada a fração contínua $x = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$, a fração contínua $c_k = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$, onde $0 \leq k \leq n$, é chamado de k-ésimo convergente de x.*

Observa-se que, os convergentes de uma fração contínua formam uma sequência $\{c_k\}$ de valores que se aproxima de x.

Considere as frações:

$c_0 = [q_0] = \dfrac{q_0}{1}$,

$c_1 = [q_0; q_1] = q_0 + \dfrac{1}{q_1}$,

$c_2 = [q_0; q_1, q_2] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}$,

$\vdots$

$c_k = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k}}}}$

Esse conjunto de frações é obtido através das expansões das frações contínuas finitas simples $[q_0]$, $[q_0; q_1]$, $[q_0; q_1, q_2]$, ..., $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$ de x. Estas frações contínuas finitas simples são denominadas primeiro, segundo, terceiro, ..., k-ésimo convergente da fração contínua finita simples $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Observe que quando $k = n$, ou seja, o n-ésimo convergente, seu valor será igual a própria fração contínua finita simples, logo, $c_n = x$.

Exemplo 2.2.2. *Vamos obter os convergentes de* $\dfrac{128}{37}$.

Escrevendo $\dfrac{128}{37}$ *sob a forma de fração contínua, temos:*

$$\frac{128}{37} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = [3; 2, 5, 1, 2]$$

logo, seus convergentes serão:

- $c_0 = [3] = 3$

- $c_1 = [3; 2] = 3 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$

- $c_2 = [3; 2, 5] = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}} = \dfrac{38}{11}$

- $c_3 = [3; 2, 5, 1] = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1}}} = \dfrac{45}{13}$

- $c_4 = [3; 2, 5, 1, 2] = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \dfrac{128}{37}$

c_0	c_1	c_2	c_3	c_4
3	$3,5$	$3,\overline{45}$	$3,46$	$3,\overline{459}$

□

Considerando que os convergentes de uma fração contínua finita simples, sejam representados por $c_k = \dfrac{a_k}{b_k}$, observa-se que a_k e b_k, com $0 \leq k \leq n$, dependem exclusivamente dos termos da fração contínua finita simples $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$. O seguinte teorema nos mostra como obter o denominador e o numerador de qualquer convergente da fração contínua $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$.

Teorema 2.2.3. *O k-ésimo convergente da fração contínua finita simples* $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$ *é dado por* $c_k = \dfrac{a_k}{b_k}$*, onde* $2 \leq k \leq n$*. O numerador* a_k *e o denominador* b_k *de* c_k *satisfazem as seguintes relações:*

$$a_0 = q_0 \qquad b_0 = 1$$

$$a_1 = q_0 q_1 + 1 \qquad b_1 = q_1$$

$$a_k = q_k a_{k-1} + a_{k-2} \qquad b_k = q_k b_{k-1} + b_{k-2}$$

Demonstração: Provando por indução, devemos mostrar que a relação é válida para $k = 0$ e $k = 1$.

- Para $k = 0$, o convergente será $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0}$, por definição $c_0 = [q_0] = q_0$, logo podemos considerar que $\dfrac{a_0}{b_0} = q_0 = \dfrac{q_0}{1}$. Temos então

$$a_0 = q_0$$
$$b_0 = 1$$

- Para $k = 1$, o convergente será $c_1 = \dfrac{a_1}{b_1}$, por definição $c_1 = [q_0; q_1] = q_0 + \dfrac{1}{q_1}$, logo $\dfrac{a_1}{b_1} = q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0 q_1 + 1}{q_1}$. Temos então

$$a_1 = q_0 q_1 + 1$$
$$b_1 = q_1$$

Agora provaremos que a relação é válida para $k+1$. Assumiremos que as relações $a_k = q_k a_{k-1} + a_{k-2}$ e $b_k = q_k b_{k-1} + b_{k-2}$ sejam verdadeiras para algum k, com $2 \leq k \leq n$. Observamos que a fração contínua finita simples

$$c_{k+1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}}}}}}}$$

possui $k+1$ termos, mas se considerarmos $q_k + \dfrac{1}{q_{k+1}}$, como um único termo, temos a seguinte fração contínua finita simples

$$c_{k+1} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{\left(q_k + \cfrac{1}{q_{k+1}}\right)}}}}}$$

agora com k termos, ou seja $c_{k+1} = [q_0; q_1, \cdots, q_{k-1}, q_k + \dfrac{1}{q_{k+1}}]$. De acordo com a hipótese de indução para uma equação de k termos, temos que o seu convergente será dado por

$$c_k = \frac{a_k}{b_k} = \frac{q_k a_{k-1} + a_{k-2}}{q_k b_{k-1} + b_{k-2}} \tag{2.11}$$

Devido a forma como em que a_k e b_k são definidos, vemos que os números a_{k-1}, a_{k-2}, b_{k-1} e b_{k-2}, dependem apenas dos quocientes parciais $q_0, q_1, \cdots, q_{k-1}$. Consequentemente podemos substituir q_k por $q_k + \dfrac{1}{q_{k+1}}$, na equação anterior logo

$$\begin{aligned}
c_{k+1} &= \frac{(q_k + \dfrac{1}{q_{k+1}})a_{k-1} + a_{k-2}}{(q_k + \dfrac{1}{q_{k+1}})b_{k-1} + b_{k-2}} \\
&= \frac{(\dfrac{q_k q_{k+1} + 1}{q_{k+1}})a_{k-1} + a_{k-2}}{(\dfrac{q_k q_{k+1} + 1}{q_{k+1}})b_{k-1} + b_{k-2}} \\
&= \frac{\dfrac{q_k q_{k+1} a_{k-1} + a_{k-1} + q_{k+1} a_{k-2}}{q_{k+1}}}{\dfrac{q_k q_{k+1} b_{k-1} + b_{k-1} + q_{k+1} b_{k-2}}{q_{k+1}}} \\
&= \frac{q_k q_{k+1} a_{k-1} + a_{k-1} + q_{k+1} a_{k-2}}{q_k q_{k+1} b_{k-1} + b_{k-1} + q_{k+1} b_{k-2}} \\
&= \frac{q_{k+1}(q_k a_{k-1} + a_{k-2}) + a_{k-1}}{q_{k+1}(q_k b_{k-1} + b_{k-2}) + b_{k-1}} \\
&= \frac{q_{k+1} a_k + a_{k-1}}{q_{k+1} b_k + b_{k-1}} \\
&= \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}
\end{aligned}$$

Observa-se que a relação, é válida para $k+1$, o que conclui a nossa demonstração.

□

Exemplo 2.2.4. *Determinar os convergentes de* $\dfrac{384}{157}$.

Fazendo a representação em fração contínua finita simples de $\dfrac{384}{157}$, *temos:*

$$\frac{384}{157} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2}}}} = [2; 2, 4, 8, 2]$$

logo os numerados e denominadores dos convergentes de $\dfrac{384}{157}$, *serão dados por*

$a_0 = 2$

$a_1 = 2.2 + 1 = 5$

$a_2 = 4.5 + 2 = 22$

$a_3 = 8.22 + 5 = 181$

$a_4 = 2.181 + 22 = 384$

$b_0 = 1$

$b_1 = 2$

$b_2 = 4.2 + 1 = 9$

$b_3 = 8.9 + 2 = 74$

$b_4 = 2.74 + 9 = 157$

logo, os convergentes de $\dfrac{384}{157}$ *serão:*

- $c_0 = \dfrac{a_0}{b_0} = \dfrac{2}{1} = 2$
- $c_1 = \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{5}{2}$
- $c_2 = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{22}{9}$
- $c_3 = \dfrac{a_3}{b_3} = \dfrac{181}{74}$
- $c_4 = \dfrac{a_4}{b_4} = \dfrac{384}{157}$

Para nos auxiliar a determinar os convergentes de uma determinada fração contínua finita simples através do processo descrito, podemos usar a tabela a seguir para determinar os númeradores e denominadores dos convergentes, observe:

k	0	1	2	3	4
q_k	2	2	4	8	2
a_k	2	5	22	181	384
b_k	1	2	9	74	157

$\square$

Teorema 2.2.5. *Seja* $c_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ *o k-ésimo convergente da fração contínua finita simples* $[q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n]$, *onde* k *um número inteiro positivo,* $1 \leq k \leq n$. *Se* a_k *e* b_k *são definidos como no Teorema* 2.2.1, *então*

$$a_k.b_{k-1} - b_k.a_{k-1} = (-1)^{k-1}. \tag{2.12}$$

Demonstração: Será aplicado o princípio de indução matemática para provar o teorema. Para $k = 1$ temos

$$a_1.b_0 - b_1.a_0 = (q_0q_1 + 1).1 - q_1.q_0 = q_0q_1 + 1 - q_1.q_0 = 1.$$

Assumiremos que o teorema é verdadeiro para o inteiro k, onde $1 \leq k \leq n$, isto é

$$a_k.b_{k-1} - b_k.a_{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

vamos mostrar que o teorema é válido para $k+1$, logo

$$\begin{aligned}
a_{k+1}.b_k - b_{k+1}.a_k &= (q_{k+1}a_k + a_{k-1}).b_k - (q_{k+1}b_k + b_{k-1}).a_k \\
&= q_{k+1}a_k.b_k + a_{k-1}.b_k - q_{k+1}b_k.a_k - b_{k-1}.a_k \\
&= a_{k-1}.b_k - b_{k-1}.a_k \\
&= -(a_k b_{k-1} - b_k a_{k-1}) \\
&= -(-1)^{k-1} \\
&= (-1)^k
\end{aligned}$$

Como o teorema é válido para $k+1$, então concluímos a prova por indução.

$\square$

Exemplo 2.2.6. *Temos que a representação em fração contínua finita simples de* $\dfrac{384}{157}$ *é dada pela sequência* $[2; 2, 4, 8, 2]$.

Através dos seus quocientes parcias podemos representar os númeradores e denominadores de seus convergentes pela tabela:

k	0	1	2	3	4
a_k	2	5	22	181	384
b_k	1	2	9	74	157

Vamos testar o Teorema 2.2.5 *para esta fração contínua. Observe que para:*

- $k = 1 \Rightarrow a_1.b_0 - b_1.a_0 = 5.1 - 2.2 = 5 - 4 = 1$
- $k = 2 \Rightarrow a_2.b_1 - b_2.a_1 = 22.2 - 9.5 = 44 - 45 = -1$
- $k = 3 \Rightarrow a_3.b_2 - b_3.a_2 = 181.9 - 74.22 = 1629 - 1628 = 1$
- $k = 4 \Rightarrow a_4.b_3 - b_4.a_3 = 384.74 - 157.181 = 28416 - 28417 = -1$

$\square$

Corolário 2.2.7. *Seja* $c_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ *o k-ésimo convergente da fração contínua finita simples* $[q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n]$*, onde os inteiros* a_k *e* b_k *são definidos no Teorema 2.2.3. Então os inteiros* a_k *e* b_k *são relativamente primos.*

Demonstração: Seja $d = mdc(a_k, b_k)$. Pelo Teorema 2.2.5, sabemos que

$$a_k.b_{k-1} - b_k.a_{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

Consequentemente,

$$d|(-1)^{k-1}.$$

Portanto, $d = 1$.

□

Corolário 2.2.8. *Seja* $c_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ *o k-ésimo convergente da fração contínua finita simples* $[q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n]$*. Então*

$$c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{b_k b_{k-1}} \tag{2.13}$$

para todo inteiro k, com $1 \leq k \leq n$*.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.5, sabemos que

$$a_k.b_{k-1} - b_k.a_{k-1} = (-1)^{k-1}.$$

Dividindo ambos os lados da equação por $b_k b_{k-1}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{a_k.b_{k-1} - b_k.a_{k-1}}{b_k b_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{b_k b_{k-1}} \quad &\rightarrow \quad \frac{a_k.b_{k-1}}{b_k b_{k-1}} - \frac{b_k.a_{k-1}}{b_k b_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{b_k b_{k-1}} \\ &\rightarrow \quad \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{b_k b_{k-1}} \\ &\rightarrow \quad c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{b_k b_{k-1}}. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.9. *Seja* $c_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ *o k-ésimo convergente da fração contínua finita simples* $[q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n]$*. Então*

$$c_k - c_{k-2} = \frac{q_k(-1)^k}{b_k b_{k-2}} \tag{2.14}$$

para todo inteiro k, com $2 \leq k \leq n$*.*

Demonstração: Note que

$$c_k - c_{k-2} = \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k-2}}{b_{k-2}} = \frac{a_k b_{k-2} - b_k a_{k-2}}{b_k b_{k-2}}. \tag{2.15}$$

Pelo Teorema 2.2.3, observamos que o numerador da equação é dado por

$$\begin{aligned}
a_k b_{k-2} - b_k a_{k-2} &= (q_k a_{k-1} + a_{k-2}) b_{k-2} - (q_k b_{k-1} + b_{k-2}) a_{k-2} \\
&= q_k a_{k-1}.b_{k-2} + a_{k-2}.b_{k-2} - q_k b_{k-1}.ak - 2 - b_{k-2}.a_{k-2} \\
&= q_k a_{k-1}.b_{k-2} - q_k b_{k-1}.ak - 2 \\
&= q_k (a_{k-1}.b_{k-2} - b_{k-1}.ak - 2) \\
&= q_k (-1)^{k-2},
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2.5, sabemos que

$$a_{k-1}.b_{k-2} - b_{k-1}.a_{k-2} = (-1)^{k-2}.$$

Portanto, achamos que

$$\begin{aligned}
c_k - c_{k-2} &= \frac{q_k(-1)^{k-2}}{b_k b_{k-2}} \\
&= \frac{q_k(-1)^k}{b_k b_{k-2}.(-1)^2} \\
&= \frac{q_k(-1)^k}{b_k b_{k-2}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.10. *Seja c_k o k-ésimo convergente de uma fração contínua finita simples $[q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n]$. Então*

$$c_1 > c_3 > c_5 > \ldots,$$
$$c_0 < c_2 < c_4 < \ldots,$$

e todo convergente ímpar c_{2j+1}, com $j = 0, 1, 2, 3, \cdots$ é maior que todo convergente par c_{2j}, com $j = 0, 1, 2, 3, \cdots$.

Demonstração: Como o Corolário 2.2.9 nos diz que, para $k = 2, 3, 4, \cdots, n$,

$$c_k - c_{k-2} = \frac{q_k(-1)^k}{b_k b_{k-2}}$$

sabemos que

$$c_k < c_{k-2}$$

quando k é impar, e

$$c_k > c_{k-2}$$

quando k é par. Portanto

$$c_1 > c_3 > c_5 > \dots$$

e

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots.$$

Para mostrar que cada convergente ímpar é maior do que todos os convergentes pares, basta aplicar o Corolário 2, tomando $k = 2m$, temos

$$c_{2m} - c_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m-1}}{b_{2m}b_{2m-1}} < 0,$$

de modo que, $c_{2m-1} > c_{2m}$. Comparando c_{2k} e c_{2j-1}, vemos que

$$c_{2j-1} > c_{2j+2k-1} > c_{2j+2k} > c_{2k}.$$

então, todo convergente ímpar é maior do que todos os convergentes pares.

$\square$

Exemplo 2.2.11. *Dada a representação de um número racional em fração contínua finita simples* $[2; 3, 1, 1, 2, 4]$, *observamos a tabela a seguir,*

k	0	1	2	3	4	5
q_k	2	3	1	1	2	4
a_k	2	7	9	16	41	180
b_k	1	3	4	7	18	79

os convergentes da fração contínua finita simples serão:

k	0	1	2	3	4	5
c_k	2	2,333	2,25	2,285	2,277	2,278

Com isso observamos que

- $c_0 < c_2 < c_4$, *pois* $2 < 2,25 < 2,277$
- $c_1 > c_3 > c_5$, *pois* $2,333 > 2,285 > 2,278$
- $c_2 < c_3 < c_1$, *pois* $2,25 < 2,285 < 2,333$
- $c_4 < c_5 < c_3$, *pois* $2,277 < 2,278 < 2,285$

ao expressar todos esse valores em uma mesma desigualdade temos

$$c_0 < c_2 < c_4 < c_5 < c_3 < c_1$$

□

2.3 Frações contínuas infinitas

Definição 2.3.1. *Considere que existam infinitos termos na expressão* $[q_0; q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots]$, *onde* $q_0 \geq 0$ *e* $q_k > 0$ *para* $k \geq 1$. *Podemos representar essa expressão por uma fração contínua. Como a fração possui infinitos termos, então dizemos que ela é uma fração contínua infinita. Se cada* q_k *é um número inteiro, então dizemos que a fração é uma fração contínua infinita simples. Uma fração contínua infinita simples é da forma*

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}} \tag{2.16}$$

Para dar sentido às frações contínuas infinitas, é necessário usar um importante resultado de análise matemática. Considerando seu resultado como verdadeiro, a prova pode ser encontrada em alguns textos e livros de análise matemática, tais como (Rudin, 1964) ou (Lima, 2004).

Teorema 2.3.2. *Seja* $q_0, q_1, q_2, \ldots$ *uma seqüência de números reais tais que* $q_0 < q_1 < q_2 < \ldots$ *e* $q_k < U$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *e para algum número real* U, *ou* $q_0 > q_1 > q_2 > \ldots$ *e* $q_k > L$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *e para algum número real* L. *Então, os termos da sequência* $q_0, q_1, q_2, \ldots$ *tendem para um limite* x, *ou seja, existe um número real* x *tal que*

$$\lim_{k \to \infty} q_k = x.$$

Este teorema nos diz que os termos de uma sequência infinita tende a um limite em duas situações especiais: quando os termos da sequência estão a aumentando e todos são menores que um limite superior, e quando os termos da sequência estão a diminuindo e todos são maiores que um limite inferior.

Note que, embora uma fração contínua

$$[q_0; q_1, q_2, \ldots]$$

seja infinita, os seus convergentes

$$c_k = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$$

são finitos, e, portanto, representam números racionais, de modo que as propriedades dos convergentes podem ser aplicados a estes convergentes também. Sabendo que,

$$c_0 < c_2 < c_4 < \ldots < c_5 < c_3 < c_1$$

a sequência c_{2n} é uma sequência que está aumentando, porém, limitada acima por c_1, e a sequência c_{2n+1} é uma sequência que está diminuindo, porém limitada por c_0. Consequentemente, ambas as sequências têm limites, isto é, à medida que n tende a infinito, c_{2n} se aproxima de um limite l_1, e a sequência c_{2n+1} se aproxima de um limite l_2, assim,

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = l_1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = l_2.$$

Agora, é possível definir infinitas frações contínuas como limites finitos de frações contínuas, como mostra o seguinte teorema.

Teorema 2.3.3. *Seja* $c_k = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$*, o k-ésimo convergente da fração contínua simples* $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$*. Então*

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1}.$$

Demonstração: Pelo Corolário 2.2.8

$$\begin{aligned} c_{2n+1} - c_{2n} &= \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}} \\ &= \frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{b_{2n+1}b_{2n}} \\ &= \frac{1}{b_{2n+1}b_{2n}}. \end{aligned}$$

Como $b_k \geq k$ para todo inteiro positivo k, sabe-se que

$$\frac{1}{b_{2n+1}b_{2n}} < \frac{1}{(2n+1)2n},$$

e consequentemente,

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{1}{b_{2n+1}b_{2n}}$$

tende a zero, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} (c_{2n+1} - c_{2n}) = 0.$$

Consequentemente, as sequências $c_1, c_3, c_5, \ldots$ e $c_0, c_2, c_4, \ldots$, tem o mesmo limite, pois,

$$\lim_{n\to\infty} (c_{2n+1} - c_{2n}) = \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} c_{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} c_{2n}.$$

Portanto, $l_1 = l_2$, logo as sequências tem um limite l de forma que $l = l_1 = l_2$.

□

Nota-se que o limite l descrito na demonstração do teorema, é chamado de valor da fração contínua infinita simples $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$.

Sabendo que todo número racional pode ser representado por uma fração contínua finita, será mostrada agora que toda fração contínua infinita simples representa um número irracional.

Teorema 2.3.4. *Seja $q_0, q_1, q_2, \ldots$ inteiros com $q_1, q_2, \ldots$ positivos. Então $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$ é irracional.*

Demonstração: Seja $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots]$ e seja

$$c_k = \frac{a_k}{b_k} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k]$$

o k-ésimo convergente de α. Quando n é um inteiro positivo, o Teorema 2.3.3 mostra que $c_{2n} < \alpha < c_{2n+1}$, de modo que

$$0 < \alpha - c_{2n} < c_{2n+1} - c_{2n}.$$

Contudo, pelo Corolário 2.2.8, sabemos que

$$c_{2n+1} - c_{2n} = \frac{1}{b_{2n+1}b_{2n}},$$

o que significa que

$$0 < \alpha - c_{2n} = \alpha - \frac{a_{2n}}{b_{2n}} < \frac{1}{b_{2n+1}b_{2n}},$$

e, portanto, temos

$$0 < \alpha.b_{2n} - a_{2n} < \frac{1}{b_{2n+1}}.$$

Suponha que α é racional, a fim de que $\alpha = \frac{a}{b}$, onde a e b são inteiros com $b \neq 0$. Então

$$0 < \frac{\alpha.b_{2n}}{b} - a_{2n} < \frac{1}{b_{2n+1}},$$

e multiplicando essa desigualdade por b, vemos que

$$0 < \alpha.b_{2n} - b.a_{2n} < \frac{b}{b_{2n+1}}.$$

Observe que $\alpha.b_{2n} - b.a_{2n}$ é um inteiro para todo n inteiro positivo. Contudo, como $q_{2n+1} > 2n + 1$, para cada inteiro n existe um inteiro n_0 tal que $q_{2n_0+1} > b$, assim $\frac{b}{q_{2n_0} + 1} < 1$. Isto é uma contradição, pois, o inteiro $a.b_{2n_0} - b.a_{2n_0}$ não pode estar entre 0 e 1, ou seja, concluímos que α é irracional.

$\square$

Agora, será mostrado que todo número irracional pode ser expresso, de modo único, por uma fração contínua infinita simples.

Teorema 2.3.5. *Seja $\alpha = \alpha_0$ um número irracional, e a sequência $q_0, q_1, q_2, \ldots$ definida recursivamente por*

$$q_k = \lfloor \alpha_k \rfloor \qquad\qquad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - q_k}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, onde $\lfloor \alpha_k \rfloor$ é denominado parte inteira de α_k. Então α é o valor da fração contínua infinita simples $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$.

Demonstração: A partir da definição recursiva dos inteiros q_k, vemos que q_k é um inteiro para todo k. Além disso, usando indução matemática, podemos mostrar que α_k é irracional para todo inteiro não-negativo k e que, como consequência, α_{k+1} existe. Observe que $\alpha = \alpha_0$ é irracional, tal que $\alpha_0 \neq q_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor$ e $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - q_0}$ existem.

Assumiremos que α_k é irracional, como consequência temos que α_{k+1} existe. Podemos facilmente ver que α_{k+1} também é irracional, pois a relação

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - q_k}$$

implica que

$$\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}, \tag{2.17}$$

e se α_{k+1} for irracional, então α_k também seria um racional. Agora, como α_k é irracional e q_k é um inteiro, sabemos que $\alpha_k \neq q_k$, e

$$q_k < \alpha_k < q_k + 1,$$

de modo que

$$0 < \alpha_k - q_k < 1.$$

Assim,

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - q_k} > 1$$

e, consequentemente,

$$q_{k+1} = \lfloor \alpha_{k+1} \rfloor \geq 1$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Isto significa que todos os inteiros $q_1, q_2, \ldots$ são positivos.

Observe que usando repetidamente a equação, vemos que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_0 = q_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [q_0; \alpha_1] \\
&= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = [q_0; q_1, \alpha_2] \\
\vdots \\
&= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_{k+1}] \\
.
\end{aligned}$$

O que devemos mostrar agora é que o valor de $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_{k+1}]$ tende para α quando k tende para o infinito. Pelo Teorema 2.2.3, vemos que

$$\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_{k+1}] = \frac{\alpha_{k+1} a_k + a_{k-1}}{\alpha_{k+1} b_k + b_{k-1}},$$

onde $c_j = \dfrac{a_j}{b_j}$ é o j-ésimo convergente de $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$. Consequentemente

$$\begin{aligned}
\alpha - c_k &= \frac{\alpha_{k+1}a_k + a_{k-1}}{\alpha_{k+1}b_k + b_{k-1}} - \frac{a_k}{b_k} \\
&= \frac{-(a_k b_{k-1} - a_{k-1}b_k)}{(\alpha_{k+1}b_k + b_{k-1})b_k} \\
&= \frac{-(-1)^{k-1}}{(\alpha_{k+1}b_k + b_{k-1})b_k},
\end{aligned}$$

Onde usamos o Teorema 2.2.5 para simplificar o numerador no lado direito da segunda igualdade. Como

$$\alpha_{k+1}b_k + b_{k-1} > q_{k+1}b_k + b_{k-1} = b_{k+1},$$

vemos que

$$|\alpha - c_k| < \frac{1}{b_k b_{k+1}}.$$

Como $b_k > k$, observamos que $\dfrac{1}{b_k b_{k+1}}$ tende a zero quando k tende para o infinito. Consequentemente, c_k tende para α quando k tende para o infinito, ou seja, o valor da fração contínua infinita simples $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$ é α.

$\square$

Para mostrar que uma fração contínua infinita simples que representa um número irracional é unica, deve-se provar o seguinte teorema.

Teorema 2.3.6. *Se duas frações contínuas infinitas simples $[q_0; q_1, q_2, \ldots]$ e $[p_0; p_1, p_2, \ldots]$ representam o mesmo número irracional, então $q_k = p_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

Demonstração: Suponha que $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots]$. Então, como $c_0 = q_0$ e $c_1 = q_0 + \dfrac{1}{q_1}$, o Teorema 2.2.10 nos diz que

$$q_0 < \alpha < q_0 + \frac{1}{q_1},$$

de modo que $q_0 = |\alpha|$. Além disso, notamos que

$$[q_0; q_1, q_2, \ldots] = q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, q_3, \ldots]},$$

como

$$
\begin{aligned}
\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots] &= \lim_{k\to\infty} [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k] \\
&= \lim_{k\to\infty} q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, q_3, \ldots]} \\
&= q_0 + \frac{1}{\lim_{k\to\infty} [q_1; q_2, q_3, \ldots, q_k]} \\
&= q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, q_3, \ldots]}.
\end{aligned}
$$

Suponha que

$$[q_0; q_1, q_2, \ldots] = [p_0; p_1, p_2, \ldots].$$

Nossas observações mostram que

$$q_0 = p_0 = \lfloor \alpha \rfloor$$

e que

$$q_0 + \frac{1}{[q_1; q_2, q_3, \ldots]} = p_0 + \frac{1}{[p_1; p_2, p_3, \ldots]},$$

assim

$$[q_1; q_2, q_3, \ldots] = [p_1; p_2, p_3, \ldots].$$

Agora, assuma que $q_k = p_k$, e que $[q_{k+1}; q_{k+2}, q_{k+3}, \ldots] = [p_{k+1}; p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots]$. Usando o mesmo argumento, vemos que $q_{k+1} = p_{k+1}$, e

$$q_{k+1} + \frac{1}{[q_{k+2}; q_{k+3}, q_{k+4}, \ldots]} = p_{k+1} + \frac{1}{[p_{k+2}; p_{k+3}, p_{k+4}, \ldots]},$$

o que implica que

$$[q_{k+2}; q_{k+3}, q_{k+4}, \ldots] = [p_{k+2}; p_{k+3}, p_{k+4}, \ldots].$$

Logo, por indução matemática, vemos que $q_k = p_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

□

Exemplo 2.3.7. *Expressar $\sqrt{13}$ sob a forma de fração contínua infinita simples.*

Seja $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{13}$, então $q_0 = \left\lfloor \sqrt{13} \right\rfloor = 3$. Pela definição de recursividade temos:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - q_0} = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \Rightarrow q_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 1 \\
\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - q_1} = \frac{\sqrt{13}-3}{4-\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}+1}{3} \Rightarrow q_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor = 1 \\
\alpha_3 &= \frac{1}{\alpha_2 - q_2} = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} \Rightarrow q_3 = \lfloor \alpha_3 \rfloor = 1 \\
\alpha_4 &= \frac{1}{\alpha_3 - q_3} = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} \Rightarrow q_4 = \lfloor \alpha_4 \rfloor = 1 \\
\alpha_5 &= \frac{1}{\alpha_4 - q_4} = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \sqrt{13}+3 \Rightarrow q_5 = \lfloor \alpha_5 \rfloor = 6 \\
\alpha_6 &= \frac{1}{\alpha_5 - q_5} = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} \Rightarrow q_6 = \lfloor \alpha_6 \rfloor = 1
\end{aligned}
$$

É evidente que o padrão continua, assim

$$\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$$

destacando o período da fração.

□

Teorema 2.3.8. *Se α é um número irracional, então existem infinitos números racionais $\frac{a}{b}$, de forma que*

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^2}.$$

Demonstração: Seja $\frac{a_k}{b_k}$ o k-ésimo convergente da fração contínua infinita simples de α. Então, pelo Teorema 2.3.5, vemos que

$$\left| \alpha - \frac{a_k}{b_k} \right| < \frac{1}{b_k b_{k+1}}.$$

Como $b_k < b_{k+1}$, segue que

$$\left| \alpha - \frac{a_k}{b_k} \right| < \frac{1}{b_k^2}.$$

Consequentemente, os convergentes de α, $c_k = \frac{a_k}{b_k}$, com $k = 1, 2, \ldots$, são infinitos e racionais, que satisfazem a condição do teorema.

□

Os próximos teorema e corolário mostram que os convergentes da representação em fração contínua infinita simples de α são as melhores aproximações racionais para α.

Teorema 2.3.9. *Seja α um número irracional e $\dfrac{a_j}{b_j}$, com $j = 1, 2, \ldots$, os convergentes de sua representação em fração contínua infinita simples. Se r e s são inteiros com $s > 0$ e se k é um inteiro positivo de forma que*

$$|s\alpha - r| < |b_k\alpha - a_k|,$$

então, $s \geq b_{k+1}$.

Demonstração: Assumindo que $|s\alpha - r| < |b_k\alpha - a_k|$, mas que $1 \leq s < b_{k+1}$. Consideremos as equações

$$a_k x + a_{k+1} y = r$$
$$b_k x + b_{k+1} y = s$$

Multiplicando a primeira equação por b_k e a segunda por a_k, e, em seguida, subtraindo a segunda equação a partir da primeira

$$(a_{k+1}b_k - a_k b_{k+1})y = rb_k - sa_k.$$

Pelo Teorema 2.2.5 tem-se que $a_{k+1}b_k - b_{k+1}a_k = (-1)^k$, logo

$$y = (-1)^k(rb_k - sa_k).$$

Do mesmo modo, multiplicando a primeira equação por b_{k+1} e a segunda por a_{k+1}, e depois subtraindo a primeira equação a partir da segunda, encontra-se que

$$x = (-1)^k(sa_{k+1} - rb_{k+1}).$$

Observamos que $s \neq 0$ e $y \neq 0$. Se $x = 0$, então $sa_{k+1} = rb_{k+1}$. Como $mdc(a_{k+1}, b_{k+1}) = 1$ e $b_{k+1}|s$, tem-se que $b_{k+1} \leq s$, o que contraria a nossa suposição. Se $y = 0$, então $r = a_k x$ e $s = b_k x$, logo

$$|s\alpha - r| = |x|\,|b_k\alpha - a_k| \geq |b_k\alpha - a_k|,$$

como $|x| \geq 1$, contraria a nossa suposição.

Agora mostraremos que x e y tem sinal oposto. Primeiro, supondo que $y < 0$. Como $b_k x = s - b_{k+1}y$, tem-se que $x > 0$, como $b_k x > 0$ e $b_k > 0$. Quando $y > 0$, como $b_{k+1}y \geq b_{k+1} > s$, ver-se que $b_k x = s - b_{k+1}y < 0$, logo $x < 0$.

Pelo Teorema 2.2.10 sabe-se que $\dfrac{a_k}{b_k} < \alpha < \dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ ou que $\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \alpha < \dfrac{a_k}{b_k}$. Em ambos os casos, é fácil ver que $b_k\alpha - a_k$ e $b_{k+1}\alpha - a_{k+1}$ tem sinais opostos.

A partir das duas equações iniciais, observa-se que

$$\begin{aligned} |s\alpha - r| &= |(b_k x + b_{k+1} y)\alpha - (a_k x + a_{k+1} y)| \\ &= |x(b_k\alpha - a_k) + y(b_{k+1}\alpha - a_{k+1})| \,. \end{aligned}$$

Combinando as conclusões anteriores, tem-se que $x(b_k\alpha - a_k)$ e $y(b_{k+1}\alpha - a_{k+1})$ possuem o mesmo sinal, logo

$$\begin{aligned} |s\alpha - r| &= |x|\,|b_k\alpha - a_k| + |y|\,|b_{k+1}\alpha - a_{k+1}| \\ &\geq |x|\,|b_k\alpha - a_k| \\ &\geq |b_k\alpha - a_k| \,, \end{aligned}$$

como $|x| \geq 1$, isto contradiz a suposição inicial, mostra-se então que a suposição é falsa e, consequentemente, a prova está completa.

□

Corolário 2.3.10. *Seja α um número irracional e $\dfrac{a_j}{b_j}$, com $j = 1, 2, \ldots$, os convergentes de sua representação em fração contínua infinita simples. Se $\dfrac{r}{s}$ é um número irracional, onde r e s são inteiros com $s > 0$, e se k é um inteiro positivo de forma que*

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right|,$$

então, $s > b_k$.

Demonstração: Suponha que $s \leq b_k$ e que

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right|.$$

Multiplicando essas duas desigualdades, descobrimos que

$$s\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < b_k\left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right|,$$

logo,

$$|s\alpha - r| < |b_k\alpha - a_k|,$$

contrariando a conclusão do Teorema 2.3.9.

□

Teorema 2.3.11. *Se α é um número irracional e se $\frac{r}{s}$ é um número racional menor que α, onde r e s são inteiros com $s > 0$ de forma que*

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2}$$

então $\frac{r}{s}$ é um convergente da representação em fração contínua infinita simples de α.

Demonstração: Suponha que $\frac{r}{s}$ não seja um dos convergentes da representação em fração contínua infinita simples de α. Então, há convergentes sucessivos $\frac{a_k}{b_k}$ e $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ de forma que $b_k \leq s < b_{k+1}$. Pelo Teorema 2.3.9, vemos que

$$|b_k\alpha - a_k| \leq |s\alpha - r| = s\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s}.$$

Dividindo por b_k, obtemos

$$\left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right| < \frac{1}{2sb_k}.$$

Como sabemos que $|sa_k - rb_k| \geq 1$ (pois sabemos que $sa_k - rb_k$ é número inteiro não-nulo, pois $\frac{r}{s} \neq \frac{a_k}{b_k}$), segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2sb_k} &\leq \frac{|sa_k - rb_k|}{sb_k} \\
&= \left|\frac{a_k}{b_k} - \frac{r}{s}\right| \\
&\leq \left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right| + \left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \\
&< \frac{1}{2sb_k} + \frac{1}{2s^2}
\end{aligned}$$

Assim, vemos que

$$\frac{1}{2sb_k} < \frac{1}{2s^2}.$$

Consequentemente,

$$2sb_k > 2s^2,$$

o que implica que $b_k > s$, contrariando a suposição inicial.

$\square$

Capítulo 3

Equações Diofantinas Lineares

Neste capítulo, será mostrado como as frações contínuas finitas simples podem ser usadas para resolver a equação diofantina linear $ax + by = c$ onde a, b, e c são números inteiros, e x e y são números inteiros desconhecidos. Será mostrada que os valores inteiros de x e y que satisfazem qualquer equação de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ podem ser encontrados. Será analisada a representação em fração contínua infinita simples de $\sqrt{D}$, evidenciando uma relação entre as frações contínua infinitas simples e a equação de Pell.

3.1 Equações Diofantinas Lineares e Frações Contínuas

Diofanto, muitas vezes conhecido como o "pai da álgebra", é mais conhecido por seu ilustre tratado "'Arithmetica", um trabalho sobre a solução de equações algébricas e teoria dos números. No entanto, essencialmente, nada se sabe de sua vida e tem havido muito debate sobre a data em que ele viveu.

A Arithmetica é uma coleção de 130 problemas, que mostrarm soluções numéricas de equações determinados (aqueles com uma solução única), e equações indeterminadas. O método para resolver este último, é agora conhecido como análise Diofantina. Apenas seis dos 13 livros originais sobreviveram, e os outros devem ter sido perdido, muito em breve, depois que eles foram escritos. O trabalho considera a solução de muitos problemas relativos linear e equações de segundo grau, mas considera apenas soluções racionais positivas para estes problemas. Equações que levariam as soluções que são raízes quadradas negativas ou irracionais, Diofanto considera como inútil. Não há evidência para sugerir que Diofanto percebeu que uma equação quadrática pode ter duas soluções. No entanto, o fato de que ele estava sempre satisfeito com uma solução racional, e não exigia um número inteiro, é mais sofisticado do que se pode perceber hoje.

Definição 3.1.1. *Uma equação diofantina linear em duas variáveis é uma expressão da forma*

$$ax + by = c$$

onde x e y são variáveis inteiras e a, b e c são números inteiros, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Qualquer par de números inteiros que, quando substituído em x e y tornam a equação uma sentença verdadeira, são chamados de soluções para a equação.

Uma equação diofantina, possui solução se, e somente se, $d|c$, onde $d = mdc(a, b)$. Se x_0, y_0 é uma solução particular, então existem infinitas soluções do tipo

$$x = x_0 + (\frac{b}{d})t$$
$$y = y_0 - (\frac{a}{d})t.$$

Para encontrar soluções, usamos $\frac{a}{b}$ ou $\frac{b}{a}$. Supondo que usamos $\frac{a}{b}$, e façamos uma representação desta fração em fração contínua finita simples $[q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Em seguida, se a fração contínua finita simples contém n termos, podemos utilizar o Teorema 2.2.5

$$a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Teorema 3.1.2. *Se $(a, b) = 1$, onde $a > b > 0$, e $c_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ é o penúltimo convergente do racional $\frac{a}{b}$, então*

$$x = (-1)^{n-1}.b_{n-1},$$
$$y = (-1)^{n-1}.a_{n-1}$$

é uma solução para a equação $ax - by = 1$.

Demonstração: Sabendo que

$$a_k.b_{k-1} - b_k.a_{k-1} = (-1)^{k-1},$$

e que

$$\frac{a}{b} = \frac{a_n}{b_n},$$

então, quando $k = n$ a equação pode ser escrita como

$$a.b_{n-1} - b.a_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os membros dessa equação por $(-1)^{n-1}$ temos:

$$a.(-1)^{n-1}.b_{n-1} - b.(-1)^{n-1}.a_{n-1} = (-1)^{n-1}.(-1)^{n-1} = (-1)^{2n-2} = (-1)^{2(n-1)} = 1$$

ou seja,

$$a.\underbrace{(-1)^{n-1}.b_{n-1}}_{x} - b.\underbrace{(-1)^{n-1}.a_{n-1}}_{y} = 1.$$

□

Observe que:

- Se n é par, então

  $$a.((-1)^{n-1}.b_{n-1}) - b.((-1)^{n-1}.a_{n-1}) = a(-b_{n-1}) - b.(-a_{n-1}) = a(-b_{n-1}) + b.a_{n-1} = 1$$

  e $x_0 = -b_{n-1}$, $y_0 = a_{n-1}$ é uma solução particular para esta equação.

- Se n é ímpar, então

  $$a.((-1)^{n-1}.b_{n-1}) - b.((-1)^{n-1}.a_{n-1}) = a.b_{n-1}. - b.a_{n-1} = ab_{n-1} + b.(-a_{n-1}) = 1$$

  e $x_0 = b_{n-1}$ e $y_0 = -a_{n-1}$ é uma solução particular para esta equação.

Para determinar as soluções de uma equação do tipo $ax + by = c$, pode-se utilizar o corolário a seguir,

Corolário 3.1.3. *Se $mdc(a, b) = 1$, onde $a > b > 0$, e $c_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ é o penúltimo convergente da representação em fração contínua finita simples do número racional $\dfrac{a}{b}$, então a equação $ax - by = c$ tem soluções*

$$x = (-1)^{n-1}.c.b_{n-1}$$
$$y = (-1)^{n-1}.c.a_{n-1}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.2 temos que

$$x = (-1)^{n-1}.b_{n-1},$$
$$y = (-1)^{n-1}.a_{n-1}$$

é uma solução particular para a equação $ax - by = 1$, ou seja,

$$a.((-1)^{n-1}.b_{n-1}) - b.((-1)^{n-1}.a_{n-1}) = 1,$$

multiplicando essa equação por c, temos

$$a.((-1)^{n-1}.b_{n-1}.c) - b.((-1)^{n-1}.a_{n-1}.c) = c.$$

Logo $x = (-1)^{n-1}.c.b_{n-1}$ e $y = (-1)^{n-1}.c.a_{n-1}$ é uma solução particular para a equação $ax + by = c$.

□

Observe que:

- Se n é par, então

$$\begin{aligned} a.((-1)^{n-1}.b_{n-1}.c) - b.((-1)^{n-1}.a_{n-1}.c) &= a.(-b_{n-1}.c) - b.(-a_{n-1}.c) \\ &= a.(-b_{n-1}.c) + b.(a_{n-1}.c) \\ &= c. \end{aligned}$$

  e $x_0 = -b_{n-1}.c$, $y_0 = a_{n-1}.c$ é uma solução particular para esta equação.

- Se n é ímpar, então

$$\begin{aligned} a.((-1)^{n-1}.b_{n-1}.c) - b.((-1)^{n-1}.a_{n-1}.c) &= a.(b_{n-1}.c) - b.(a_{n-1}.c) \\ &= a.(b_{n-1}.c) + b.(-a_{n-1}.c) \\ &= c. \end{aligned}$$

  e $x_0 = b_{n-1}.c$ e $y_0 = -a_{n-1}.c$ é uma solução particular para esta equação.

Exemplo 3.1.4. *Resolva a equação diofantina* $2076x + 1076y = 3076$.

Sabendo que $d = mdc(2076, 1076)$ *e que* $d|3076$, *considerando* $a = 2076$ *e* $b = 1076$, *utilizando o métodos das divisões sucessivas do algoritmo de Euclides temos:*

$$2076 = 1.1076 + 1000$$
$$1076 = 1.1000 + 76$$
$$1000 = 13.76 + 12$$
$$76 = 6.12 + 4$$
$$12 = 3.4$$

ou seja, $d = mdc(1076, 2076) = 4$ *e* $d|3076$*, pois,* $3076 = 4.769$*. Logo, a equação pode ser reescrita como*

$$269x + 519y = 769.$$

Considerando o número racional $\dfrac{2076}{1076}$*, sua representação em fração contínua finita simples é dada por* $[1; 1, 13, 6, 3]$*. Essa representação possui os seguintes convergentes.*

$c_0 = q_0 = 1 = \dfrac{a_0}{b_0} \Rightarrow a_0 = 1, b_0 = 1$

$c_1 = q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0q_1 + 1}{q_1} = \dfrac{1.1 + 1}{1} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{a_1}{b_1} \Rightarrow a_1 = 2, b_1 = 1$

$c_2 = q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2}} = \dfrac{q_2a_1 + a_0}{q_2b_1 + b_0} = \dfrac{13.2 + 1}{13.1 + 1} = \dfrac{27}{14} = \dfrac{a_2}{b_2} \Rightarrow a_2 = 27, b_2 = 14$

$c_3 = q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{q_3}}} = \dfrac{q_3a_2 + a_1}{q_3b_2 + b_1} = \dfrac{6.27 + 2}{6.14 + 1} = \dfrac{164}{85} = \dfrac{a_3}{b_3} \Rightarrow a_3 = 164, \text{ e } b_3 = 85$

$c_4 = q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{q_3 + \dfrac{1}{q_4}}}} = \dfrac{q_4a_3 + a_2}{q_4b_3 + b_2} = \dfrac{3.164 + 27}{3.85 + 14} = \dfrac{519}{269} = \dfrac{a_4}{b_4} \Rightarrow a_4 = 519, b_4 = 269$

Sabemos que

$$a_kb_{k-1} - b_ka_{k-1} = (-1)^{k-1}$$

nesse caso consideremos $k = 4$ *assim,*

$$a_4b_{4-1} - b_4a_{4-1} = (-1)^{4-1} \rightarrow a_4b_3 - b_4a_3 = (-1)^3 \rightarrow a_4b_3 - b_4a_3 = -1$$

realizando as substituições, temos

$$519.(85) - 269.(164) = -1$$

multiplicando a equação por (-1) *temos*

$$519.(-85) + 269.(164) = 1,$$

desta forma temos

$$x_0 = -85$$
$$y_0 = 164$$

é uma solução particular para a equação. Ao multiplicar a equação considerada por 769 *temos*

$$519.(769.(-85)) + 269.(769.164) = 769$$

assim,

$$x_0 = 769.(-85) = -65365$$
$$y_0 = 769.164 = 126116$$

Logo, as soluções para a equação serão da forma

$$x = -65365 + 269.t$$
$$y = 126116 - 519.t$$

para $t \in \mathbb{Z}$*.*

□

Exemplo 3.1.5. *Resolva a equação* $90x - 28y = 22$*.*

Sabendo que $d = mdc(90, -28)$ *e que* $d|22$*, considerando* $a = 90$ *e* $b = -28$*, utilizando o métodos das divisões sucessivas do algoritmo de Euclides temos*

$$90 = (-4).(-28) - 22$$
$$-28 = 1.(-22) - 6$$
$$-22 = 3.(-6) - 4$$
$$-6 = 1.(-4) - 2$$
$$-4 = 2.(-2)$$

ou seja, $d = mdc(90, -28) = 2$ *e* $d|22$*, pois,* $22 = 2.11$*. Logo a equação pode ser reescrita como*

$$45x - 14y = 11.$$

Considere o número racional $\dfrac{90}{-28}$*, sua representação em fraçã contínua finita simples é dada por*

$$\frac{90}{-28} = [-4; 1, 3, 1, 2],$$

essa fração possui os seguintes convergentes.

$c_0 = q_0 = -4 = \dfrac{a_0}{b_0} \Rightarrow a_0 = -4, b_0 = 1$

$c_1 = q_0 + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{q_0q_1 + 1}{q_1} = \dfrac{-4.1 + 1}{1} = \dfrac{-3}{1} = \dfrac{a_1}{b_1} \Rightarrow a_1 = -3, b_1 = 1$

$c_2 = q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2}} = \dfrac{q_2a_1 + a_0}{q_2b_1 + b_0} = \dfrac{3.(-3) + (-4)}{3.1 + 1} = \dfrac{-13}{4} = \dfrac{a_2}{b_2} \Rightarrow a_2 = -13, b_2 = 4$

$c_3 = q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{q_3}}} = \dfrac{q_3a_2 + a_1}{q_3b_2 + b_1} = \dfrac{1.(-13) + (-3)}{1.4 + 1} = \dfrac{-16}{5} = \dfrac{a_3}{b_3} \Rightarrow a_3 = -16, b_3 = 5$

$c_4 = q_0 + \dfrac{1}{q_1 + \dfrac{1}{q_2 + \dfrac{1}{q_3 + \dfrac{1}{q_4}}}} = \dfrac{q_4a_3 + a_2}{q_4b_3 + b_2} = \dfrac{2.(-16) + (-13)}{2.5 + 4} = \dfrac{-45}{14} = \dfrac{a_4}{b_4} \Rightarrow a_4 = -45, b_4 = 14$

Sabendo que

$$a_4b_3 - b_4a3 = -1$$

ou seja,

$$(-45).5 - 14.(-16) = -1,$$

multiplicando a equação por (-1) *temos*

$$45.(5) - 14.(16) = 1,$$

desta forma temos

$$x_0 = 5$$
$$y_0 = 16$$

é uma solução para a equação considerada. Ao multiplicar a equação considerada por 11 *temos*

$$45.(11.5) - 14.(11.16) = 11,$$

assim,

$$x_0 = 11.5 = 55$$
$$y_0 = 11.16 = 176.$$

Logo, as soluções para a equação serão da forma

$$x = 55 - 14.t$$
$$y = 176 - 45t$$

para $t \in \mathbb{Z}$.

□

Uma expressão do tipo

$$a \equiv b(modm)$$

é chamada de congruência linear, e é lida como a congruente a b módulo m. Em uma congruência linear, temos que a e b deixam o mesmo resto, quando dividos por m, também chamado de módulo. Também podemos ter congruências envolvendo incógnitas, como

$$ax \equiv b(modm).$$

Sabemos que uma congruência linear pode ser representada como

$$ax \equiv b(modm) \Rightarrow ax - my = b.$$

Uma solução para esta congruência é um número que, quando substituído por x fará com que a congruência seja uma sentença verdadeira, para algum $y \in \mathbb{Z}$. Para encontrar soluções para $ax \equiv b(modm)$ por frações contínuas, pode-se considerar que se x_0 é uma solução particular para a congruência então existe $y_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$ax_0 - my_0 = b.$$

Como tem-se que encontrar soluções para a equação

$$ax + m(-y) = b$$

sabe-se que elas são dadas por

$$x = x_0 + (\frac{m}{d})t$$
$$y = y_0 - (\frac{a}{d})t,$$

onde $d = mdc(a, m)$.

O Teorema 3.1.2 e o Corolário 3.1.3 auxilia na resolução deste tipo de equação, no caso uma equação linear diofantina.

Vamos considerar a fração contínua finita simples para o número racional $\frac{a}{m}$. O último convergente de sua representação em fração contínua finita simples será evidentemente, o próprio racional $\frac{a}{m}$. Se essa representação apresenta n convergentes, considerando a equação

$$a_n(b_{n-1}(-1)^{n-1}) - b_n(a_{n-1}(-1)^{n-1}) = 1$$

substitutuindo $a_n = a$ e $b_n = m$ temos

$$a(b_{n-1}(-1)^{n-1}) + m(-a_{n-1}(-1)^{n-1}) = 1.$$

Com isso observamos que suas soluções serão

$$x_0 = b_{n-1}.(-1)^{n-1}$$
$$y_0 = -a_{n-1}.(-1)^{n-1}$$

Para encontrar as soluções da equação $ax+m(-y) = b$, multiplicamos a $a(b_{n-1}(-1)^{n-1})+ m(-a_{n-1}(-1)^{n-1}) = 1$ por b, assim temos

$$a(b_{n-1}(-1)^{n-1}.b) + m(-a_{n-1}(-1)^{n-1}.b) = b,$$

logo, as soluções particulares para esta equação serão

$$x_0 = b_{n-1}.(-1)^{n-1}.b$$
$$y_0 = -a_{n-1}.(-1)^{n-1}.b.$$

Com isso determinamos que as soluções gerais para essa equação serão da forma

$$x = b_{n-1}.(-1)^{n-1}.b + (\frac{m}{d})t$$
$$y = -a_{n-1}.(-1)^{n-1}.b - (\frac{a}{d})t,$$

Porém em uma congruência linear, nosso objetivo se reduz a encontrar apenas os valores para x, logo nossa solução se reduz a

$$x = b_{n-1}.(-1)^{n-1}.b + (\frac{m}{d})t$$

ou seja, uma congruência linear pode ser escrita como

$$a.(b_{n-1}.(-1)^{n-1}.b+(\frac{m}{d})t) \equiv b(modm)$$

Exemplo 3.1.6. *Encontre uma solução para* $11x \equiv 13(mod7)$.

Tomando $a = 11$, $b = 13$ *e* $m = 7$, *considere o número racional* $\frac{11}{7}$, *então sua representação em fração contínua será*

$$\frac{11}{7} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = [1; 1, 1, 3]$$

logo, podemos determinar os numeradores e denominadores de seus convergentes pela tabela

k	0	1	2	3
q_k	1	1	1	3
a_k	1	2	3	11
b_k	1	1	2	7

Observamos que o penúltimo denominador é 2, *como* $k = 3$ *logo, as soluções para a congruência serão dadas por*

$$x = b_{3-1}.(-1)^{3-1}.b + (\frac{m}{d})t \rightarrow x = 2.13 + (\frac{7}{1})t \rightarrow x = 26 + 7t$$

□

3.2 Equações de Pell e Frações contínuas

John Pell (1611-1685) foi um matemático Inglês, que ensinou matemática na Holanda, nas universidades de Amesterdão e Breda em 1640. A equação de Pell tem uma história longa fascinante. Sua primeira aparição gravada está no problema de gado de Arquimedes. O primeiro progresso significativo na solução de equação de Pell foi feito na Índia tão cedo quanto AD 628, por Brahmagupta. Brahmagupta descreveu como usar a solução conhecida de uma equação Pell para criar novas soluções e Bhaskaracharya em 1150 AD obteu um método de resolver a equação de Pell. Em 1657 Fermat desafiou seus colegas matemáticos para resolverem uma equação de Pell, vários deles conseguiram encontraram uma solução, e William Brouncker em 1657 descreveu um método geral para resolver a equação de Pell proposta por Fermat. John Wallis descreveu o método de Brounckers em um livro sobre álgebra e teoria dos números, e Wallis e Fermat afirmaram que, uma equação de Pell tem sempre uma solução. Euler equivocadamente pensou que o método descrito por Wallis em seu livro deveu-se a John Pell, e assim Euler atribuiu a equação o nome equação de Pell. Mas, John Pell nada tem a ver com a chamada equação de Pell.

Definição 3.2.1. *Uma equação de Pell é uma expressão da forma*

$$x^2 - Dy^2 = 1 \tag{3.1}$$

onde D é um inteiro positivo.

Será mostrada que os valores inteiros de x e y que satisfazem qualquer equação deste tipo podem ser encontrados. Será analisada a representação em fração contínua infinita simples de $\sqrt{D}$, para ver se podemos descobrir uma relação entre ela e a equação de Pell.

Teorema 3.2.2. *Qualquer número irracional quadrático α tem a sua representação em fração contínua infinita simples, periódica de algum ponto em diante.*

Demonstração: Considere que a representação de α seja

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1}}}}}} = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_k, \alpha_{k+1}]$$

e do Teorema 2.2.1 tem-se

$$\alpha = \frac{\alpha_{k+1}a_k + a_{k-1}}{\alpha_{k+1}b_k + b_{k-1}}$$

onde, α e α_{k+1} são irracionais quadráticos com $\alpha_{k+1} > 1$. Considerando o conjugado de ambos os lados desta equação, obtemos

$$\alpha' = \frac{\alpha'_{k+1}a_k + a_{k-1}}{\alpha'_{k+1}b_k + b_{k-1}}$$

logo,

$$\alpha'_{k+1} = -\frac{\alpha' b_{k-1} - a_{k-1}}{\alpha' b_k - a_k}.$$

Fatorando o numerador e o denominador tem-se,

$$\begin{aligned}
\alpha'_{k+1} &= -\frac{b_{k-1}}{b_k}\left(\frac{\alpha' - \dfrac{a_{k-1}}{b_{k-1}}}{\alpha' - \dfrac{a_k}{b_k}}\right) \\
&= -\frac{b_{k-1}}{b_k}\left(\frac{\alpha' - c_{k-1}}{\alpha' - c_k}\right).
\end{aligned}$$

E quando k tende ao infinito, então c_{k-1} e c_k tendem ao seu limite determinado por α, logo

$$\frac{\alpha' - c_{k-1}}{\alpha' - c_k} \to \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = 1$$

Sabe-se que os convergentes c_k são alternadamente menor e maior que α, e, portanto, à medida que k aumenta, os valores da fração não só irão chegar mais perto de 1, mas eles serão alternadamente inferior e superior que 1. Nota-se também que os números b_k e b_{k-1} são inteiros positivos e $0 < b_{k-1} < b_{k-1}$, de modo que $\dfrac{b_{k-1}}{b_k} < 1$. Assim, uma vez que ter encontrado um valor de k que faça com que a fracção seja ligeiramente menor que 1, o valor de α'_{n+1} estará necessariamente entre -1 e 0. Logo, a fração contínua infinita simples será periódica a partir daí.

$\square$

Observe a seguinte representação

$$\sqrt{D} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}}}}}}$$

A partir desta representação temos

$$\sqrt{D} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_0 + q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}}}}}}$$

logo,

$$\sqrt{D} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_0 + \sqrt{D}}}}}}$$

Na última expressão para $\sqrt{D}$, o último termo é dado por $q_n = q_0 + \sqrt{D}$. Mas, uma vez que o último convergente é igual ao valor que fração contínua infinita ismples representa, pode-se aplicar a fórmula sobre o n-ésimo convergente, ficando da seguinte forma

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{D} = \frac{q_n a_{n-1} + a_{n-2}}{q_n b_{n-1} + b_{n-2}}$$

mas, $q_n = q_0 + \sqrt{D}$, então

$$\begin{aligned}
\sqrt{D} &= \frac{(q_0 + \sqrt{D})a_{n-1} + a_{n-2}}{(q_0 + \sqrt{D})b_{n-1} + b_{n-2}} \\
\sqrt{D}((q_0 + \sqrt{D})b_{n-1} + b_{n-2}) &= (q_0 + \sqrt{D})a_{n-1} + a_{n-2} \\
\sqrt{D}(q_0 + \sqrt{D})b_{n-1} + \sqrt{D}b_{n-2} &= q_0 a_{n-1} + \sqrt{D}a_{n-1} + a_{n-2} \\
\sqrt{D}(q_0 b_{n-1} + \sqrt{D}b_{n-1}) + \sqrt{D}b_{n-2} &= q_0 a_{n-1} + \sqrt{D}a_{n-1} + a_{n-2} \\
\sqrt{D}q_0 b_{n-1} + D.b_{n-1} + \sqrt{D}b_{n-2} &= q_0 a_{n-1} + \sqrt{D}a_{n-1} + a_{n-2} \\
D.b_{n-1} + \sqrt{D}(q_0 b_{n-1} + b_{n-2}) &= q_0 a_{n-1} + a_{n-2} + \sqrt{D}a_{n-1}
\end{aligned}$$

Como os membros direito e esquerdo são iguais, logo, por consequência as partes irracionais são iguais, e as partes racionais também são iguais. Como resultado desta observação tem-se as seguintes equações

$$D.b_{n-1} = q_0 a_{n-1} + a_{n-2}$$
$$q_0 b_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-1}$$

e pode-se reescrevê-las como

$$a_{n-2} = D.b_{n-1} - q_0 a_{n-1}$$
$$b_{n-2} = a_{n-1} - q_0 b_{n-1}$$

Pelo Teorema 2.2.5 segue

$$a_{n-1}b_{n-2} - b_{n-1}a_{n-2} = (-1)^{n-2}.$$

Agora, ao substituir os valores de a_{n-2} e b_{n-2}, obtém-se a seguinte equação

$$a_{n-1}(a_{n-1} - q_0 b_{n-1}) - b_{n-1}(D.b_{n-1} - q_0 a_{n-1}) = (-1)^{n-2}.$$

Simplificando tem-se

$$\begin{aligned}
a_{n-1}.a_{n-1} - a_{n-1}.q_0.b_{n-1} - b_{n-1}.D.b_{n-1} + b_{n-1}.q_0.a_{n-1} &= (-1)^{n-2} \\
a_{n-1}.a_{n-1} - b_{n-1}.D.b_{n-1} - a_{n-1}.q_0.b_{n-1} + b_{n-1}.q_0.a_{n-1} &= (-1)^{n-2} \\
a_{n-1}.a_{n-1} - b_{n-1}.D.b_{n-1} &= (-1)^{n-2} \\
a_{n-1}^2 - D.b_{n-1}^2 &= (-1)^{n-2}
\end{aligned}$$

Observe que a_{n-1} e b_{n-1} são soluções para equações do tipo

$$x^2 - D.y^2 = (-1)^n.$$

Assim, para encontrar inteiros que satisfaçam essa equação, deve-se encontrar a representação em fração contínua infinita simples de $\sqrt{D}$ construindo uma tabela de seus convergentes.

Teorema 3.2.3. *Denotando o k-ésimo convergente de $\sqrt{D}$ como $c_k = \dfrac{a_k}{b_k}$ e n o comprimento do período de $\sqrt{D}$. Se n for par, toda solução positiva de $x^2 - Dy^2 = 1$ é dada por $x_k = p_{kn-1}$ e $y_k = q_{kn-1}$, para $k \geq 1$. Se n for ímpar, toda solução positiva de $x^2 - Dy^2 = 1$ é dada por $x_k = p_{2kn-1}$ e $y_k = q_{2kn-1}$, para $k \geq 1$.*

Demonstração: Se n é o comprimento do período da representação em fração contínua infinita simples de $\sqrt{D}$, então $x = a_{n-1}$ e $y = b_{n-1}$, são soluções para a equação $x^2 - D.y^2 = (-1)^n$.

Se n é par então

$$\begin{aligned}
x &= a_{n-1} \\
y &= b_{n-1}
\end{aligned}$$

são as soluções minimais para a equação $x^2 - D.y^2 = 1$.

Se n é ímpar então

$$\begin{aligned}
x &= a_{n-1} \\
y &= bn - 1,
\end{aligned}$$

são as soluções minimais para a equação $x^2 - D.y^2 = -1$.

Uma solução para $x^2 - D.y^2 = 1$ e com n ímpar, pode-se usar como solução

$$x = a_{2n-1}$$
$$y = b_{2n-1},$$

logo tem-se

$$a_{2n-1}^2 - D.b_{2n-1}^2 = 1.$$

□

Exemplo 3.2.4. *Determine os menores inteiros que satisfazem a equação*

$$x^2 - 41y^2 = 1.$$

Como,

$$\sqrt{41} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \sqrt{41}}}} = [6; \overline{2, 2, 12}],$$

considerando a tabela a seguir.

k	0	1	2	3	4	5
q_k	6	2	2	12	2	2
a_k	6	13	32	397	826	2049
b_k	1	2	5	62	129	320

Logo, como $n = 3$ então, sabe-se que a solução para a equação $x^2 - 41y^2 = 1$ é dado pelo par (a_{2n-1}, b_{2n-1}), sendo assim, tem-se

$$n = 3 \to (a_{2.3-1}, b_{2.3-1}) = (a_5, b_5) = (2049, 320),$$

fazendo a substituição na equação tem-se

$$\begin{aligned} 2049^2 - 41.320^2 &= 4198401 - 41.102400 \\ &= 4198401 - 4198400 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Realizando a substituição com os convergentes anteriores a c_5, observase que nenhum gera a solução esperada,

$(6,1) = 6^2 - 41.1^2 = 36 - 41 = -5$

$(13,2) = 13^2 - 41.2^2 = 169 - 164 = 5$

$(32,5) = 32^2 - 41.5^2 = 1024 - 1025 = -1$

$(397,62) = 397^2 - 41.62^2 = 157609 - 157604 = 5$

$(826,129) = 826^2 - 41.129^2 = 682276 - 682281 = -5$

logo, consta-se que $(2049, 320)$ *é a solução minimal para a equação* $x^2 - 41y^2 = 1$

$\square$

Agora, mesmo que (a_{2n-1}, b_{2n-1}) seja uma solução para a equação $x^2 - Dy^2 = 1$, será apresentado um método para obtenção de mais soluções para qualquer equação deste tipo.

Se n é par, então (a_{n-1}, b_{n-1}) é uma solução para a equação $x^2 - Dy^2 = 1$. Outro par que satisfaz a equação é (a_{2n-1}, b_{2n-1}). Em geral as soluções para uma equação deste modelo são dadas por

$$(a_{in-1}, b_{in-1}),$$

para qualquer i inteiro positivo.

Se n é ímpar, então a solução minimal será dada por (a_{2n-1}, b_{2n-1}). Logo, para obter a segunda solução usamos (a_{4n-1}, b_{4n-1}). Em geral, se n for ímpar, as soluções para a equação $x^2 - Dy^2 = 1$ serão dadas por

$$(a_{pn-1}, b_{pn-1}),$$

onde p é um número inteiro positivo e par.

Exemplo 3.2.5. *Determine pelo menos duas soluções inteiras para a equação*

$$x^2 - 7y^2 = 1.$$

Como

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{41}}}}} = [2; \overline{1,1,1,4}],$$

considerando a tabela a seguir.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
q_k	2	1	1	1	4	1	1	1	4
a_k	2	3	5	8	37	45	82	127	590
b_k	1	1	2	3	14	17	31	48	223

Logo, como $n = 4$ *então, sabe-se que a solução mínimal para a equação* $x^2 - 7y^2 = 1$ *é dado pelo par* (a_{n-1}, b_{n-1})*, sendo assim, tem-se*

$$n = 4 \rightarrow (a_{4-1}, b_{4-1}) = (a_3, b_3) = (8, 3),$$

fazendo a substituição na equação temos

$$\begin{aligned} 8^2 - 7.3^2 &= 64 - 7.9 \\ &= 64 - 63 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Tem-se que as demais soluções serão dadas por (a_{in-1}, b_{in-1})*, quando* $i = 1$ *obtem-se a solução mínimal* (a_{n-1}, b_{n-1})*, para encontrar a segunda solução condira-se* $i = 2$*, logo*

$$i = 2 \rightarrow (a_{2.n-1}, b_{2.n-1}) = (a_{2.4-1}, b_{2.4-1}) = (a_7, b_7) = (127, 48),$$

fazendo a substituição na equação tem-se

$$\begin{aligned} 127^2 - 7.48^2 &= 16129 - 7.2304 \\ &= 16129 - 16128 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

O processo para a obtenção de todos os convergentes de $\sqrt{D}$, quando n é grande, envolve muitos cálculos aritméticos. Desta forma, é conveniente usar fórmulas que permitam encontrar os pares, que satisfazem essa equação, em função de uma solução minimal, sem ter que avaliar todos os convergentes da fração contínua entre as soluções. Uma vez que a menor solução positiva foi obtida, pode-se encontrar todas as outras soluções positivas.

Teorema 3.2.6. *Se $D > 1$ é um número natural livre de quadrado, então a equação $x^2 - Dy^2 = 1$ admite infinitas soluções inteiras positivas (x, y), onde, existe uma solução mínima*

$$(x_1, y_1) > 0$$

tal que todas as demais soluções inteiras positivas dessa equação são dadas pelos naturais positivos (x_n, y_n) que satisfaz a igualdade

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para $n = 2$, tem-se

$$\begin{aligned} x_2 + y_2\sqrt{D} &= (x_1 + y_1\sqrt{D})^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1y_1\sqrt{D} + y_1^2D \\ &= x_1^2 + y_1^2D + 2x_1y_1\sqrt{D} \end{aligned}$$

logo,

$$x_2 = x_1^2 + y_1^2D$$
$$y_2 = 2x_1y_1,$$

Supondo que x_2 e y_2 seja uma solução para a equação $x^2 - Dy^2 = 1$, então,

$$x_2^2 - Dy_2^2 = 1,$$

assim,

$$\begin{aligned} x_2^2 - Dy_2^2 &= (x_1^2 + y_1^2D)^2 - D(2x_1y_1)^2 \\ &= x_1^4 + 2.x_1^2y_1^2D + y_1^4D^2 - 4x_1^2y_1^2D \\ &= x_1^4 + y_1^4D^2 + 2.x_1^2y_1^2D - 4x_1^2y_1^2D \\ &= x_1^4 - 2.x_1^2y_1^2D + y_1^4D^2 \\ &= (x_1^2 - y_1^2D)^2 \end{aligned}$$

Como $x_1^2 - y_1^2D = 1$, segue que

$$(x_1^2 - y_1^2D)^2 = 1$$

portanto, temos

$$x_2^2 - Dy_2^2 = 1$$

logo, $x_2 = x_1^2 + y_1^2D$ e $y_2 = 2x_1y_1$ também serão soluções para a equação $x^2 - y^2D = 1$.

Para verificar que a relação é válida para qualquer n, considera-se

$$x_n + y_n\sqrt{D} = (x_1 + y_1\sqrt{D})^n = \underbrace{(x_1 + y_1\sqrt{D}).(x_1 + y_1\sqrt{D}).\ldots.(x_1 + y_1\sqrt{D})}_{nfatores},$$

da mesma forma, considerando que o conjugado de $x_n + y_n\sqrt{D}$ é

$$x_n - y_n\sqrt{D} = (x_1 - y_1\sqrt{D})^n = \underbrace{(x_1 - y_1\sqrt{D}).(x_1 - y_1\sqrt{D}).\ldots.(x_1 - y_1\sqrt{D})}_{nfatores},$$

Se x_n e y_n for uma solução da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, logo a equação

$$x_n^2 - Dy_n^2 = 1$$

deve ser verdadeira. Fatorando o membro esquerdo dessa equação tem-se

$$\begin{aligned}
x_n^2 - Dy_n^2 &= (x_n + y_n\sqrt{D})(x_n - y_n\sqrt{D}) \\
&= (x_1 + y_1\sqrt{D})^n(x_1 - y_1\sqrt{D})^n \\
&= \Big[(x_1 + y_1\sqrt{D})(x_1 - y_1\sqrt{D})\Big]^n \\
&= \Big[(x_1^2 - x_1y_1\sqrt{D} + x_1y_1\sqrt{D} - y_1^2D)\Big]^n \\
&= \big[(x_1^2 - y_1^2D)\big]^n \\
&= [(1)]^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Como a equação foi verificada, então isso conclui a prova.

$\square$

Exemplo 3.2.7. *Determine pelo menos duas soluções inteiras para a equação*

$$x^2 - 19y^2 = 1.$$

Dado que

$$\sqrt{19} = 4\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\sqrt{41}}}}}}} = [4;\overline{2,1,3,1,2,8}],$$

considerando a tabela a seguir.

k	0	1	2	3	4	5	6
q_k	4	2	1	3	1	2	8
a_k	4	9	13	48	61	170	1421
b_k	1	2	3	11	14	39	326

Logo, como $n = 6$ *então, sabe-se que a solução mínima para a equação* $x^2 - 19y^2 = 1$ *é dado pelo par* (a_{n-1}, b_{n-1})*, sendo assim,*

$$n = 6 \to (a_{6-1}, b_{6-1}) = (a_5, b_5) = (170, 39),$$

fazendo a substituição na equação tem-se

$$\begin{aligned} 170^2 - 19.39^2 &= 28900 - 19.1521 \\ &= 28900 - 28899 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Considerando, $x_1 = 170$ *e* $y_1 = 39$*, tem-se que uma outra solução para a equação pode ser dada por*

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^2 + y_1^2 D \\ &= 170^2 + 39^2.19 \\ &= 28900 + 1521.19 \\ &= 28900 + 28899 \\ &= 57799 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_2 &= 2x_1y_1 \\ &= 2.170.39 \\ &= 13260 \end{aligned}$$

fazendo a substituição na equação tem-se

$$\begin{aligned} 57799^2 - 19.13260^2 &= 3340724401 - 19.175827600 \\ &= 3340724401 - 3340724400 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

Considerações finais

. Ao realizar o estudo das frações contínuas, foi verificado que é possível usar frações contínuas para representar número racionais, como também na representação de número irracionais. Foi observado que quando trata-se de números racionais, sua representação em fração contínua é de forma finita; já a representação para números irracionais, é feita de forma infinita. No caso dos números irracionais, nesse trabalho, abordou-se apenas os números irracionais quadráticos, onde sua representação em forma de fração contínua, é de forma infinita e periódica. Esse tipo de representação auxiliou muito para a obtenção da solução das equações de Pell.

Verificou-se que as relações descritas para os convergentes de uma fração contínua são validas tanto para representações de forma finita, quanto infinita; dessa forma, independemente de considerar-se números racionais ou irracionais, as propriedades sempre serão válidas.

Este trabalho teve como objetivo, utilizar as frações contínuas na resolução de dois tipos de equações, as equações diofantinas lineares $ax - by = c$ e as equações de Pell da forma $x^2 - Dy^2 = \pm 1$.

Através das aplicações das propriedades de frações contínuas e de seus convergentes, foi mostrado um método alternativo para a resolução destes tipos de equações, que usualmente envolvem cálculos mais avançados.

Mesmo conseguindo atingir nosso objetivo, ainda existem as equações do tipo $x^2 - Dy^2 = m$, onde este trabalho possa ser um ponto de partida para o estudo dessas equações.

Ressalta-se que o estudo da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ é uma abordagem preliminar, observa-se que ainda existem as equações do tipo $x^2 - Dy^2 = m$. Destaca-se ainda que pode ser realizado estudo mais aprofundado de equações do segundo grau em duas incógnitas, ou seja, equações da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde A, B,

C, D, E e F são inteiros, e que x e y são números inteiros desconhecidos. Isto envolve um estudo mais amplo e por isso, esse trabalho pode servir de introdução para futuros trabalhos sobre essas equações e as frações contínuas.

Referências Bibliográficas

Eves, H. W. (1995). *Introdução à história da matemática*. Unicamp.

Koshy, T. (2002). *Elementary number theory with applications*. Academic press.

Lima, E. L. (2004). *Análise real*. Impa.

Moore, C. G. (1964). *An Introduction to Continued Fractions*. ERIC, Washington.

Rosen, K. H. (1993). *Elementary number theory and its applications*. Reading, Mass.

Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis*, volume 3. McGraw-Hill New York.