SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JAIR FELICIANO RODRIGUES

O USO DE TRIÂNGULOS NA CONSTRUÇÃO DE PONTES DE MACARRÃO COMO CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

PORTO VELHO - RO
2015

JAIR FELICIANO RODRIGUES

O USO DE TRIÂNGULOS NA CONSTRUÇÃO DE PONTES DE MACARRÃO COMO CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT no polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, sob a orientação do Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodriguez.

PORTO VELHO - RO
2015

FICHA CATALOGRÁFICA

BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES

R696u

Rodrigues, Jair Feliciano.

O uso de triângulos na construção de pontes de macarrão como contribuição para o ensino-aprendizagem de geometria no ensino fundamental / Jair Feliciano Rodrigues. -- Porto Velho, Rondônia, 2015.

95 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez

Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR.

1. Estudo de triângulos. 2. Matemática – Ensino e aprendizagem. 3. Pontes de macarrão - Construção I. Rodríguez, Tomás Daniel Menéndez. II. Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR. III. Título.

CDU: 514.112.3

Bibliotecária Responsável: Edoneia Sampaio CRB 11/947

Jair Feliciano Rodrigues

O USO DE TRIÂNGULOS NA CONSTRUÇÃO DE PONTES DE MACARRÃO COMO CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Este Trabalho foi julgado e aprovado para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional no Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, Polo da Universidade Federal de Rondônia.

Porto Velho, 4 de dezembro de 2015.

Prof. Dr. Adeilton Fernandes da Costa
Coordenador no Polo da Universidade Federal de Rondônia do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UNIR

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez (Orientador)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UNIR

Prof. Ms. Carlos Vinicius da Costa Ramos (Membro Interno)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UNIR

Prof. Dr. Norton Roberto Castano (Membro externo)
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT- SBM

Dedico este trabalho aos meus maiores incentivadores: minha família. Pela paciência da espera e pela bondade da compreensão de que sem o devido esforço não haveria vitória.

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar por me proporcionar a oportunidade de trilhar nos caminhos de mais um curso, dando-me forças para continuar principalmente nos momentos em que me sentia mais fraco e desanimado.

A minha família, pela paciência, que teve comigo, pelos muitos finais de semana que não pude participar de várias atividades juntos com eles por estar estudando para chegar até aqui. Minha esposa Wilma Morais, meus filhos Vinícius de Morais e Paulo Vitor, minha nora Pâmela Trajano, meus netos Lucas Gabriel e Ana Maria.

Ao meu orientador Prof. Dr. Tomás Menéndez Rodriguez. que sempre incentivou e confiou na conclusão desse trabalho, orientando, sugerindo e motivando, o meu muito obrigado.

Aos professores, Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez, Dr. Adeilton Fernandes da Costa, Ronaldo Chaves Cavalcanti, Dr. Marinaldo Felipe da Silva, Ms. Thiago G. Velanga, Dr. Flávio Batista Simão, Dr. Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz, Ms. Carlos Vinícius, Ms Rodrigo Brasil pela colaboração e empenho nessa caminhada em busca da realização de um sonho.

Aos meus amigos de mestrado que compartilharam seus conhecimentos e em especial ao meu amigo Aldo Brasil, por me acolher em sua casa por vários finais de semana, dispensando tempo de estudo que ajudou a enriquecer meus conhecimentos matemáticos.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos as construções de pontes de macarrão como uma contribuição para o enriquecimento do Ensino-Aprendizagem da geometria, em especial, ao estudo de triângulos no 8º ano e 9ºano do ensino fundamental. Para isto, este trabalho foi dividido em partes. No início, faremos uma abordagem do ensino de triângulos por meio de seus conceitos básicos, elementos e classificação. Em seguida, abordamos o estudo de triângulos retângulos, e leis trigonométricas aplicadas aos triângulos. E por fim faremos um estudo prático com aplicações dos conhecimentos de triângulos adquiridos pelos alunos, na construção de Pontes de Macarrão.

Palavras Chave: Estudo de triângulos. Ensino-aprendizagem de Matemática. Pontes de Macarrão.

ABSTRACT

We present the construction of pasta bridges as a contribution to the enrichment of Teaching and Learning of geometry, in particular the study of triangles on the 8th and 9th grade year of elementary school. Therefore, this study was divided into parts. At the beginning, we will approach the teaching of triangles through its basic concepts, elements and classification. Then we approach the study of right triangles, and trigonometric laws applied to triangles. Finally we will study with a practical application of knowledge acquired by students triangles, construction Noodles bridges.

Keywords: Study triangles. Mathematics teaching and learning. Pasta bridges.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A escolha desse tema se deu diante de uma pergunta que eu, como professor de Matemática, e acredito que grande parte dos professores dessa disciplina já ouviu de nossos alunos: “Professor, onde que eu vou usar isto?”. Muitas vezes alguns conteúdos ministrados em sala de aula, figuram apenas no campo teórico, onde se desenvolvem expressões, resolvem-se problemas, mas que em uma situação real da vida, o aluno ainda não consegue fazer uma ligação entre aqueles conteúdos estudados e aprendidos em sala de aula e a situação-problema que está sendo vivida por ele neste momento.

Para se determinar um tema a ser abordados dentro disciplina de Matemática assim como para escolher de uma série para iniciar uma atividade voltada para uma situação real, não se constitui uma tarefa fácil. Mas, após um longo período de reflexão, foi escolhido a Geometria, e em especial o triângulo, por se tratar de uma figura simples mas com amplamente usadas em vários ramos profissionais e foram escolhidas duas séries do ensino fundamental, o 8° ano e o 9° ano, pois são nessas duas séries que estudam os fundamentos dos triângulos.

O triângulo é uma figura simples, mas de fundamental importância para o estudo da Geometria. Os estudos das relações triangulares e suas propriedades, tiveram um papel de destaque para uma melhor compreensão da vida e principalmente com a observação da natureza. Esses estudos, contribuíram para resolver problemas do cotidiano, como partilha de terras, construções de casas e no universo em que vivemos com a observação dos astros e a antecipação de seus movimentos.

Grandes sábios na Antiguidade, como Eratóstenes, Aristarco, Ptolomeu e outros, utilizaram seus conhecimentos sobre esta fabulosa figura geométrica para compreender algumas grandezas como, o tamanho do raio da Terra, a distância da Terra ao Sol, a distância da Terra à Lua, em uma época que a tecnologia não era tão avançada como hoje

Por tais motivos, faremos parte desse levantamento iniciado muitos anos antes, estendendo algumas leis e relações que já conhecemos a respeito dos triângulos, bem como suas propriedades, mostrando uma contribuição para o enriquecimento do ensino-aprendizagem de geometria, em especial, o estudo de triângulos no 8º ano e 9 ºano do ensino fundamental mediante a atividade de construção de pontes de macarrão.

No segundo capítulo, trabalhamos com triângulos, tendo como princípio, conteúdos vistos pelos alunos do ensino fundamental, tais como: definições, elementos, condições de existência, e vários conceitos básicos, como classificação e semelhança, seguidos de dedicação especial aos triângulos retângulos onde são vistos razões e relações, assim como as leis de cossenos e senos.

No terceiro capítulo , foi dada uma contribuição à Geometria, relacionando o estudo dos triângulos a uma aplicação prática, com a construção de pontes de Macarrão. Sua estrutura, é formada por triângulos, cujos conceitos como classificação e elementos notáveis, leis, relações, simetria e tensão puderam ser aplicados.

No quarto capítulo são apresentados os objetivos do projeto “Pontes de Macarrão”. Também é apresentada a metodologia do campeonato de construção de pontes de macarrão, onde o aluno terá contato com uma atividade prática relacionada aos conteúdos sobre triângulos estudados em sala de aula, aproximando-o assim de uma atividade experimental.

Para finalizarmos os nossos estudos apresentamos no quinto capítulo os resultados obtidos na competição de construção de pontes de macarrão, assim como as análises dos dados.

2 TRIÂNGULOS

A ORIGEM DA GEOMETRIA

A geometria teve origem no antigo Egito. Conta-se que nas regiões às margens do rio Nilo, que era bastante utilizada pelos agricultores, não só devido à fertilidade do solo, mas também por serem comuns os povos se fixarem próximos aos locais onde possuíam curso de águas. No entanto todos os anos, após as grandes inundações as divisas das marcações de suas terras eram destruídas, o que gerava constantes desentendimentos entre os agricultores. Para resolver problemas dessa natureza, alguns funcionários dos faraós, tinham a missão de visitar as margens do rio, para remarcar essas terras, de forma que eles possuíssem a mesma quantidade de terra após a enchente e nenhum deles tivesse perdas de suas posses, pois seus impostos eram calculados em função do tamanho de suas terras.

> Quando das inundações do Nilo, o rei Sesóstris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da geometria que migrou, mais tarde para a Grécia. (HERÓDOTO, 109 apud ROQUE, 2012)

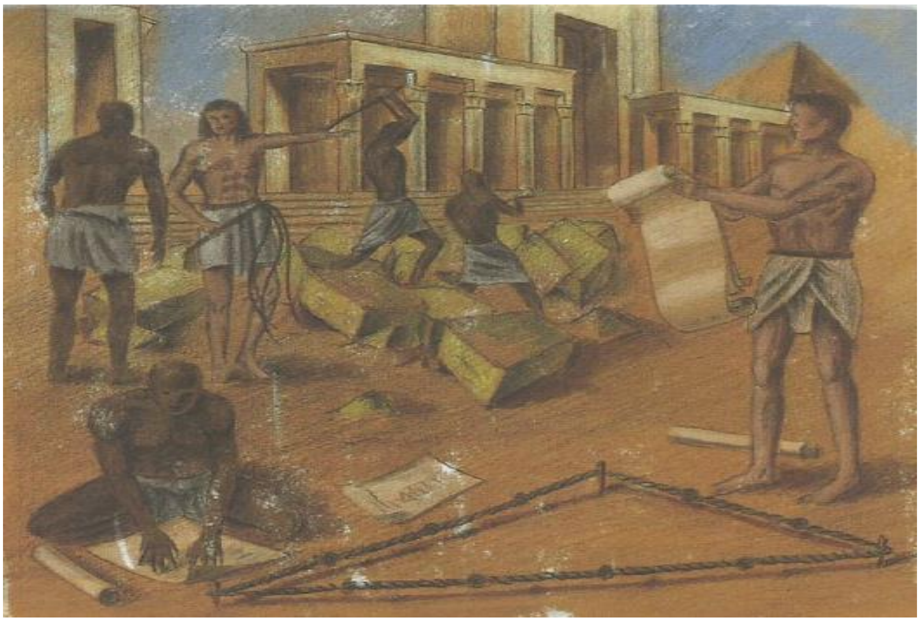


Figura 2.1 Triângulo Pitagórico

Esses funcionários dos faraós, responsáveis pelas remarcações das terras eram conhecidos como agrimensores. Acredita-se que daí a geometria teve seu início. Do grego *geo* (terra) e *metria* (medida).

O USO DE TRIÂNGULOS

Os egípcios construíram suas pirâmides durante aproximadamente um milênio, e que essas pirâmides eram utilizadas como túmulos para os faraós. É notório que para construir essas enormes obras foram exigidas uma grande gama de conhecimento de matemática. Conta-se que em uma de suas viagens ao Egito, Tales de Mileto, matemático e filósofo grego nascido em 626 a.C. foi desafiado pelo Faraó Amasis a calcular a altura da pirâmide de Quéops. Após um longo período de observação, Tales percebeu que sua sombra e a sombra da pirâmide variavam da mesma maneira. Então para ele descobrir a altura da pirâmide, fincou verticalmente um bastão na areia e esperou que a sombra do bastão ficasse da mesma altura do próprio bastão, o que significava que a sombra da pirâmide também seria da mesma altura da pirâmide. Desta forma Tales de Mileto conseguiu estimar a altura da pirâmide de Quéops que é aproximadamente 147 metros.

Figura 2.2 Pirâmide de Queóps, Egito.

Logo a razão entre os tamanhos das sombras do bastão e da pirâmide é proporcional à razão entre as alturas do bastão e da pirâmide. Aristóteles disse a respeito de Tales de Mileto. “Para Tales de Mileto, a questão primordial não era o que sabemos, mas como sabemos”.

No século III a.C. o matemático e filósofo Eratóstenes em Alexandria, entre suas várias descobertas, ele criou uma forma de calcular o comprimento da Terra. Para isto, Eratóstenes munido do conhecimento de que em uma cidade ao sul de Alexandria chamada Siena, em alguns dias no ano os raios solares ao meio-dia eram verticais. Fato este comprovado por meio das cisternas de água, que nesse horário, ficavam totalmente iluminadas, sendo até possível ver a imagem do Sol sendo refletida no fundo, enquanto que em Alexandria os raios solares ao meio-dia formavam um ângulo de 7,2° com a vertical.

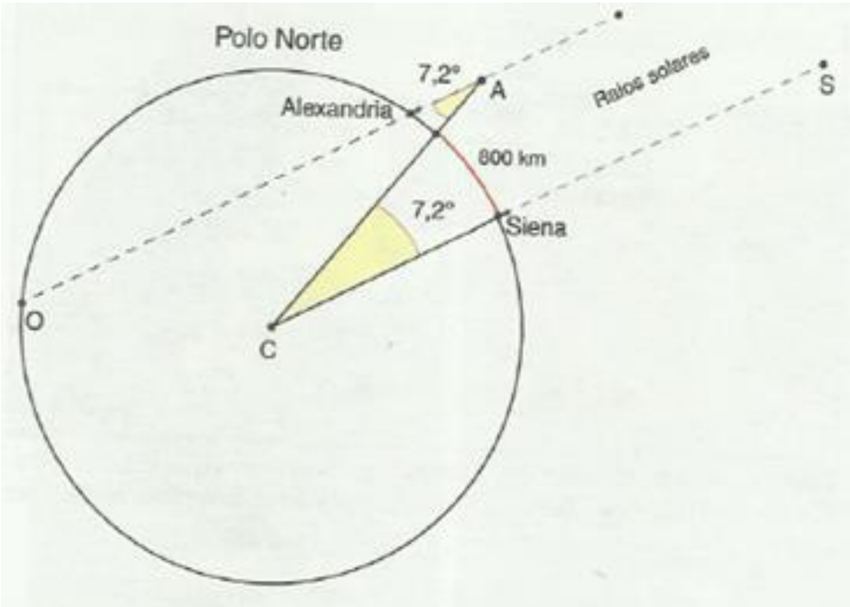


Figura 2.3 Cálculo do comprimento da Terra usado por Eratóstenes.

Como Eratóstenes conhecia a distância entre Alexandria e Siena, devido ao fluxo de caravanas existentes na região entre essas duas cidades, bastou desenvolver o seguinte cálculo:

$$\frac{x}{800} = \frac{360°}{7{,}2°}$$

Logo, temos que x = 40.000 km, valor este muito próximo do valor médio conhecido hoje, cujo comprimento é 40.023 km. Duane (2015).

Aristarco de Samos astrônomo e matemático grego, nascido em 310 a.C. em suas observações sobre os astros, analisando as fases da Lua, constatou que o Sol está mais distante da Terra do que da Lua, pois do contrário não haveria eclipses solares. Assim conclui que existem duas fases da Lua, quarto crescente e quarto minguante, que a Terra, a Lua e o Sol formam um triângulo retângulo, onde a Lua fica no vértice do ângulo reto, pois da Terra observa-se que a Lua encontra-se metade escura e metade iluminada.

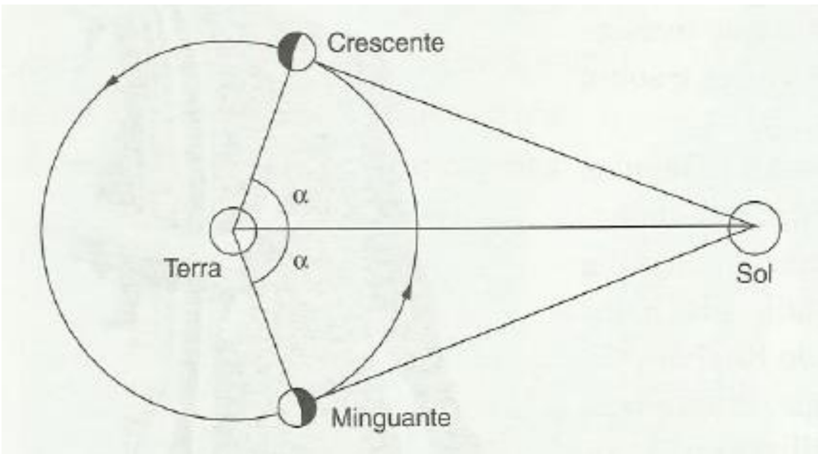


Figura 2.4 Cálculo das distâncias Lua-Terra- Sol usado por Aristarco.

Utilizando o conhecimento de que a Lua levava 29,5 dias para dar uma volta ao redor da Terra e verificando que o tempo decorrido para a Lua passar de quarto minguante para quarto crescente é de 14,25 dias, Aristarco montou a seguinte equação:

$$\frac{2\alpha}{360°} = \frac{14{,}25}{29{,}5}$$

Temos que α é aproximadamente 86,95°, e usando a trigonometria verificou-se que a distância da Terra ao Sol seria 18,8 vezes a distância da Terra a Lua. Tal valor infelizmente não está correto, devido a uma diferença de angulação. Onde Aristarco considerou 86,95°, seria 89,86°. Portanto a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra a Lua. Alarsa (2015).

Não se encontram em literaturas, relatos da descoberta de triângulos, no entanto esta figura amplamente estudada foi usada como fonte de inspiração e conhecimento por grandes sábios do passado, e continua sendo utilizada nos dias de hoje. Ciente de que por meios geométricos é possível constatar que o triângulo é a única forma poliédrica que não pode alterar a sua forma sem igualmente alterar o comprimento dos seus lados, esta figura continua sendo utilizada em diversas áreas.

O uso de triângulos na construção de casas.

Figura 2.5 Estrutura triangular em madeira deTelhado.

O uso de triângulos na construção de edifícios.

Figura 2.6 Edifício Alcoa, São Francisco, Califórnia, EUA.

O uso de triângulos na construção de pontes.

Figura 2.7 Ponte levediça, delta do rio São Francisco, Califórnia,EUA.

Figura 2.8 Ponte Navajo, Marble Canyon, Arizona, EUA.

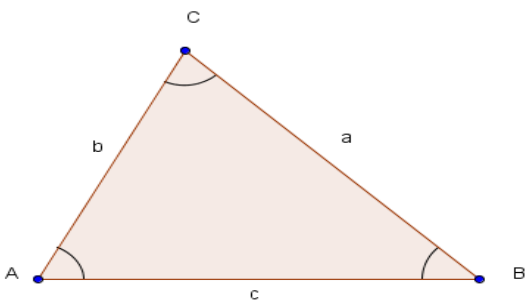
Portanto faremos parte desse levantamento que teve início muitos anos antes, partilhando os conhecimentos vivenciados por grandes sábios, por meios de observações, análises, classificações e interpretações dos fatos.

2.1 Definição e Elementos dos Triângulos

Triângulo é uma figura geométrica plana construída pela reunião de três segmentos de reta com extremidades em três pontos não colineares.

Triângulo ABC = Δ ABC

Δ ABC = $\overline{AB}$ U $\overline{AC}$ U $\overline{BC}$



Vértices: São os pontos A, B e C.

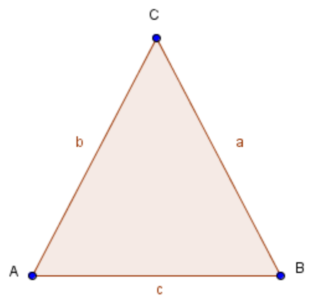
Lados: São os segmentos de reta $\overline{AB}$ (de medida c), $\overline{AC}$ (de medida b) e $\overline{BC}$ (de medida a) .

Ângulos: BÂC ou Â, A$\hat{B}$C ou $\hat{B}$ e A$\hat{C}$B ou $\hat{C}$ são os ângulos do Δ ABC (ângulos internos do Δ ABC).

2.2 Classificação dos Triângulos

Um triângulo quantos aos **lados** pode ser:

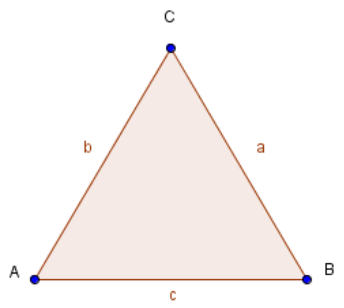
- **Isósceles**, quando possuir dois lados de mesma medida.



O Δ ABC é isósceles, pois $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$.

A e B são os vértices da base do triângulo isósceles.

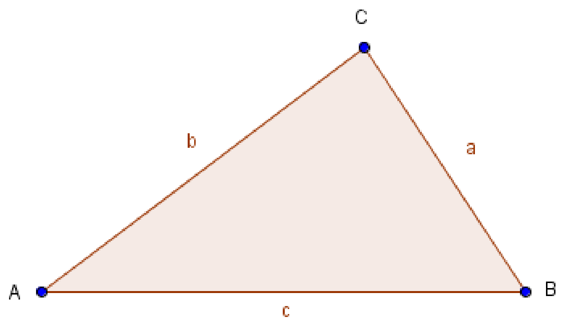
- **Equilátero**, quando possuir os três lados de mesma medida.



O Δ ABC é equilátero, pois os lados AB ≡ AC ≡ BC.

O Δ ABC sendo equilátero, também será isósceles, pois apresenta dois lados de mesma medida.

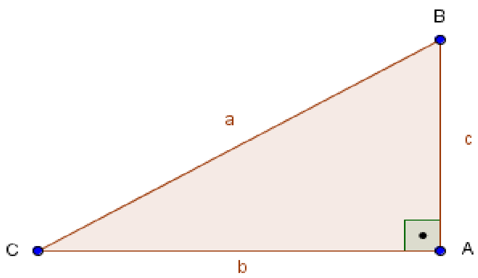
- **Escaleno**, quando possuir os três lados com medidas diferentes.



O Δ ABC sendo escaleno, não será isósceles pois não apresenta dois lados de mesma medida.

Um triângulo quanto aos **ângulos** pode ser:

- **Retângulo**, quando possuir um ângulo reto, isto é, um ângulo que mede 90°.

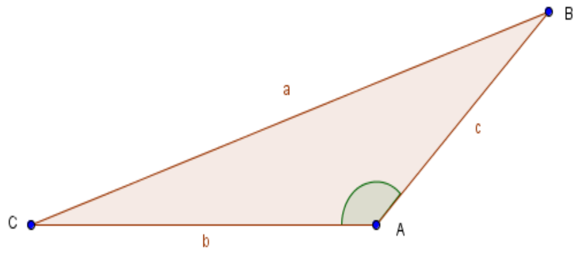


O Δ ABC é retângulo, pois Â é reto.

O lado BC é hipotenusa.

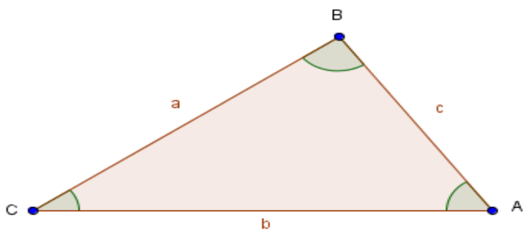
Os lados AB e AC são os catetos.

- **Obtusângulo**, quando possuir um ângulo obtuso, isto é, um ângulo maior que 90° e menor que 180°.



O Δ ABC é obtusângulo, pois $\widehat{A}$ é obtuso.

- **Acutângulo**, quando possuir os três ângulos agudos ,isto é, ângulos menores que 90°.

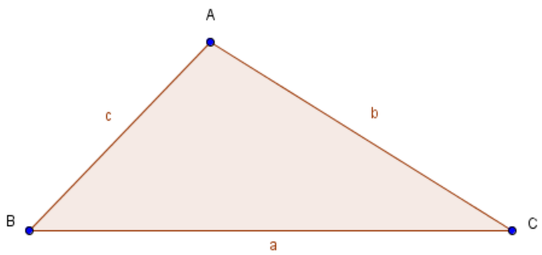


O Δ ABC é acutângulo, pois $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ são agudos.

2.3 Desigualdades Triangulares

- **Ao maior lado opõe-se o maior ângulo**

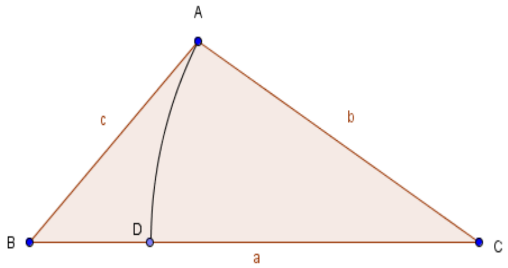
Se dois lados de triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles também não são congruentes, e o maior ângulo está oposto ao maior lado.



Hipótese: No Δ ABC, $\overline{BC} > \overline{AC}$.

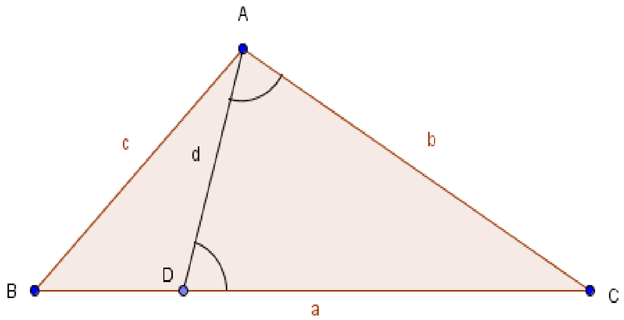
Tese: $\widehat{A} > \widehat{B}$

Demonstração:



Sobre o lado BC transportamos $\overline{\text{AC}}$, obtemos D,

Tal que $\overline{\text{DC}}$ = $\overline{\text{AC}}$



Assim, Δ ADC é isósceles

Pois $\overline{\text{DC}}$ = $\overline{\text{AC}}$ e DÂC ≡ A$\widehat{\text{D}}$C (1)

No Δ ABD, o ângulo A$\widehat{\text{D}}$C é externo, portanto A$\widehat{\text{D}}$C > A$\widehat{\text{B}}$C. (2)

Já que $\widehat{\text{B}}$ é interno ao triângulo, por comparação, no vértice A, temos:

D$\widehat{\text{A}}$C < A$\widehat{\text{B}}$C (3)

De (1), (2) e (3), temos:

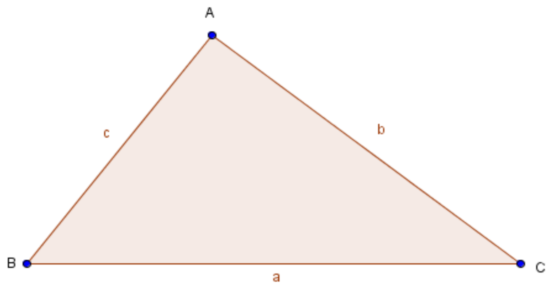
A$\widehat{\text{B}}$C < A$\widehat{\text{D}}$C ≡ D$\widehat{\text{A}}$C < B$\widehat{\text{A}}$C

Logo,

$\widehat{\text{A}}$ > $\widehat{\text{B}}$.

- **Ao maior ângulo opõe-se o maior lado**

Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior ângulo está oposto ao maior lado.



Hipótese: $B\hat{A}C > A\hat{B}C$

Tese: $\overline{BC} > \overline{AC}$

Demonstração:

Considerando o vértice A como o maior, temos três possibilidades:

1ª) $\overline{BC} = \overline{AC}$

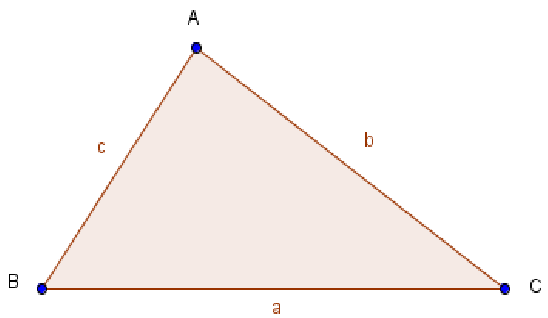
2ª) $\overline{BC} < \overline{AC}$

3ª) $\overline{BC} > \overline{AC}$

- Se $\overline{BC} = \overline{AC}$, então pelo Teorema do Triângulo isósceles, isto é, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, o que é contra a hipótese.
- Se $\overline{BC} < \overline{AC}$, então pelo teorema anterior $\hat{A} < \hat{B}$, que é contra a hipótese.
- Logo, por exclusão, temos que: $\overline{BC} > \overline{AC}$.

- **Teorema da Desigualdade Triangular**

Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois lados.



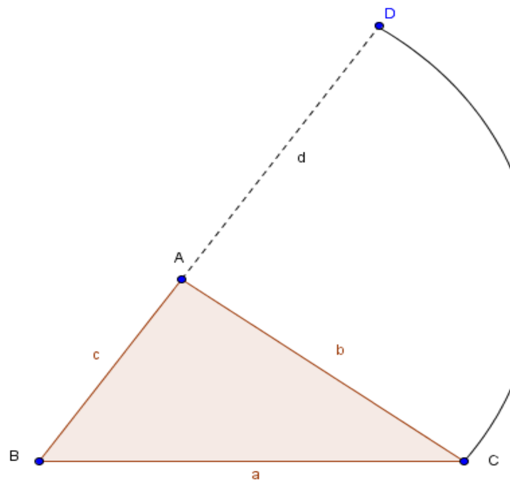
Hipótese: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são lados do Δ ABC.

Tese: $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$

Demonstração:

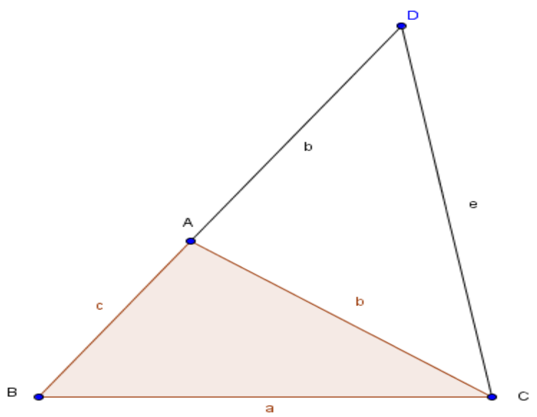
Sobre a semirreta oposta a $\overline{AB}$ transportamos $\overline{AC}$ e obtemos D,

Tal que: $\overline{AD} = \overline{AC}$.



Sendo o Δ ACD isósceles, concluímos que $A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C$ (1)

Comparando na figura os ângulos no vértice C, temos: $B\hat{C}D > A\hat{C}D$ (2)



Substituindo (1) em (2), temos: $B\hat{C}D > A\hat{D}C$.

Assim, no Δ ADC, temos $B\hat{C}D > A\hat{D}C$.

Portanto, pelo teorema do maior lado, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

Logo, $\overline{AC} + \overline{AB} > \overline{BC}$, isto é, b + c > a.

De maneira análoga, podemos também concluir que:

$\overline{BC}$+ $\overline{AB}$ > $\overline{AC}$, isto é, a + c > b e

$\overline{BC}$ + $\overline{AC}$ > $\overline{AB}$, isto é, a + b > c.

Reunindo as três condições obtidas nas demonstrações anteriores em uma única sentença, temos:

a < b + c   a < b + c

$\left.\begin{matrix} b < a + c \\ c < a + b \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} b - c < a \\ c - b < a \end{matrix}\right\} \rightarrow |b - c| < a \rightarrow |b - c| < a < b + c$

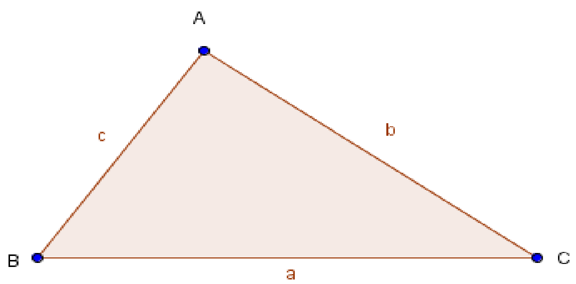
Logo, conclui-se que:

“Em todo triângulo cada lado é maior que a diferença em módulo dos outros dois lados.”

2.4 Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo

- **Teorema da soma dos Ângulos Internos de um Triângulo**

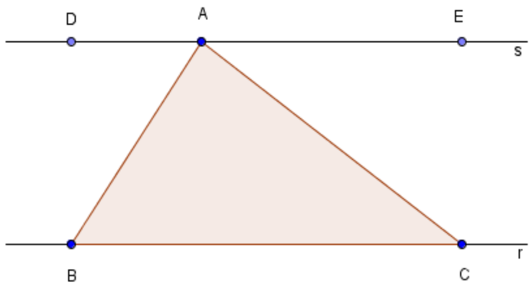
A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, isto é, um ângulo raso. Paiva (2005).



Hipótese: ABC é um triângulo

Tese: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

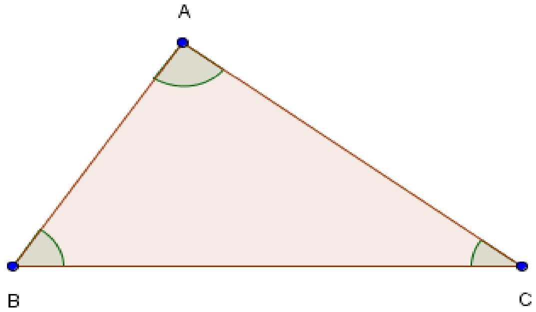
Demonstração:



Por construção, pelo ponto A, traçamos uma reta s paralela a reta r.

Sendo r//s, temos:

Os ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$ são congruentes, isto é $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$ (alternos internos) e os ângulos $A\hat{C}B \equiv C\hat{A}E$ (alternos internos).



Como $B\hat{A}D \equiv \hat{B}$ e $C\hat{A}E \equiv \hat{C}$,

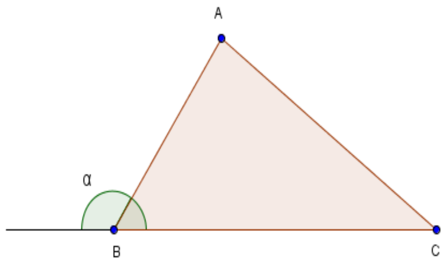
Logo, $B\hat{A}C + B\hat{A}D + C\hat{A}E = 180°$, ou seja,

$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$

- **Ângulo Externo**

  Definição de Ângulo Externo

  Um ângulo externo de um triângulo qualquer é suplementar adjacente a um ângulo interno desse triângulo.



$\hat{B} + \alpha = 180°$

- **Teorema da Medida do Ângulo Externo de um Triângulo**

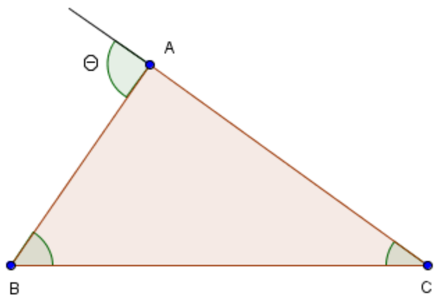
Um ângulo externo de um triângulo é a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração:

Hipótese: ABC é um triângulo

θ é um ângulo externo

Tese: $\theta = \widehat{B} + \widehat{C}$



Do teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$ (1)

Da definição de ângulo externo, temos:

$\theta + \widehat{A} = 180°$ (2)

De (1) e (2), temos:

$\theta + \widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$

Somando a ambos os membros ($-\widehat{A}$), encontramos:

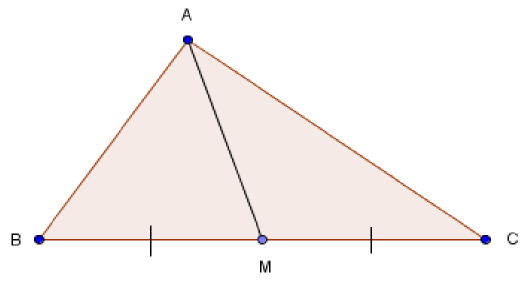
$$\boxed{\theta = \widehat{B} + \widehat{C}}$$

2.5 Elementos Notáveis dos Triângulos

- **Mediana e Baricentro**

Definição de Mediana

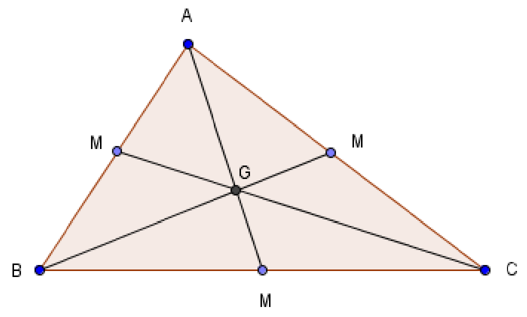
Mediana de um triângulo é um segmento que possui uma das extremidades em um vértice do triângulo e a outra extremidade no ponto médio do lado oposto a esse vértice. Junior (1988).



$\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado BC do Δ ABC.

Definição de Baricentro

Baricentro de um triângulo, é o ponto de encontro de suas medianas.



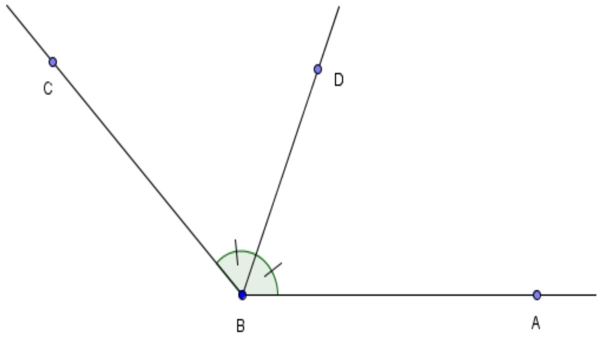
G é o baricentro do Δ ABC.

O baricentro de um triângulo divide cada mediana em duas partes, tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

- **Bissetriz interna de um triângulo e Incentro.**

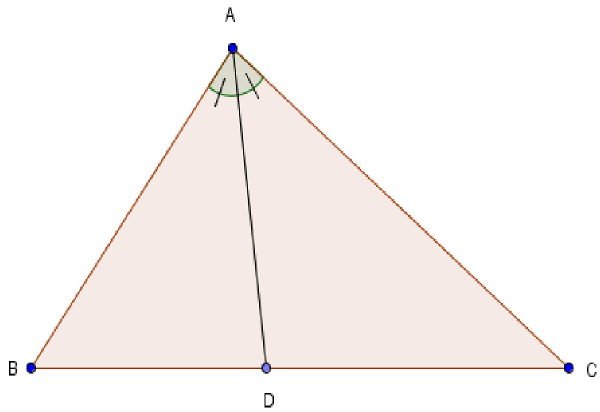
Definição de Bissetriz

Bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de duas retas concorrentes e, por consequência, divide um ângulo em dois ângulos congruentes.



Definição de Bissetriz de um triângulo

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento da bissetriz de um de seus ângulos internos, tendo uma das extremidades no vértice e a outra no lado oposto a esse vértice, que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes.

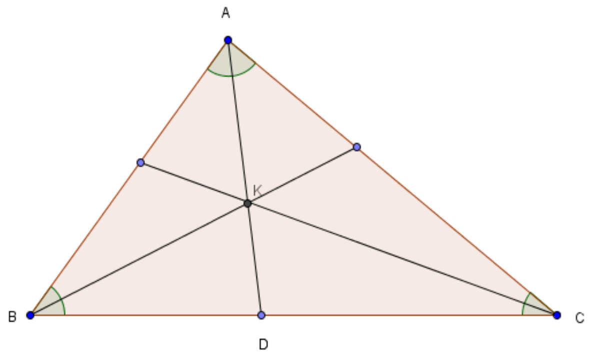


.

$\overline{AD}$ é a bissetriz interna do ângulo A do Δ ABC.

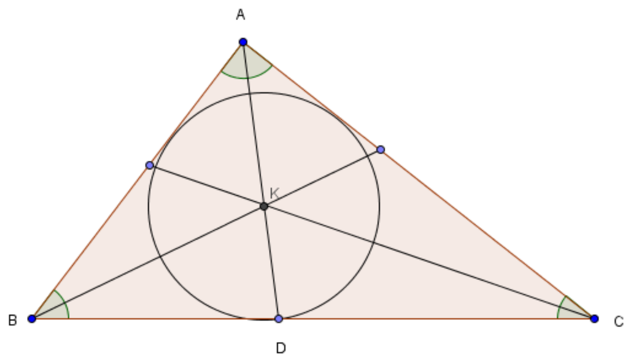
Definição de Incentro de um triângulo

Incentro de um triângulo, é o ponto de encontro de suas bissetrizes internas.



O incentro **K** é encontro das três bissetrizes internas do Δ ABC e também o centro da circunferência inscrita nesse triângulo.

Propriedade do Incentro

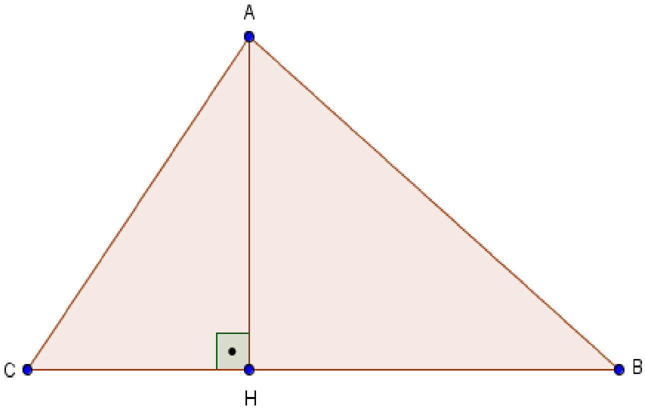


Incentro de um triângulo é o centro da circunferência inscrita nesse triângulo.

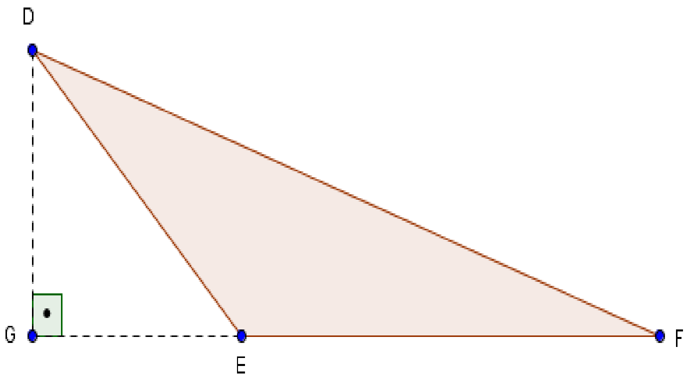
- **Altura e Ortocentro**

Definição de Altura

A altura de um triângulo é o segmento da perpendicular à reta-suporte de um lado do triângulo, tendo extremidades nesta reta e no vértice oposto a esse lado.



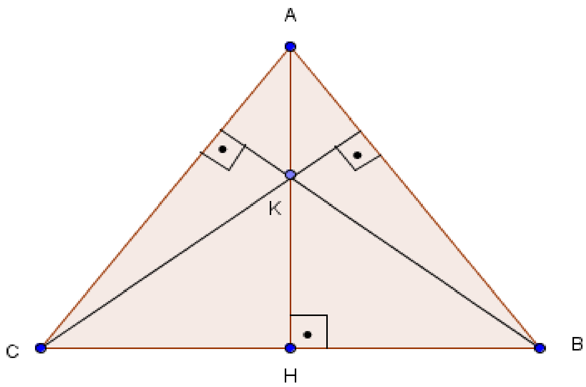
$\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado BC do Δ ABC.



$\overline{AG}$ é a altura relativa ao lado DF do Δ DEF.

Definição de Ortocentro de um triângulo

O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro das retas-suporte de suas alturas.

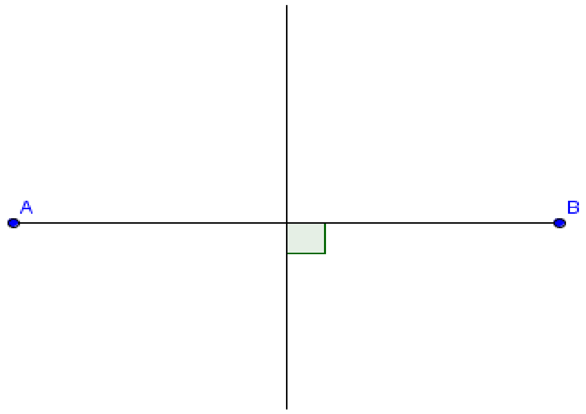


K é o ortocentro do Δ ABC.

- **Mediatriz e Circuncentro**

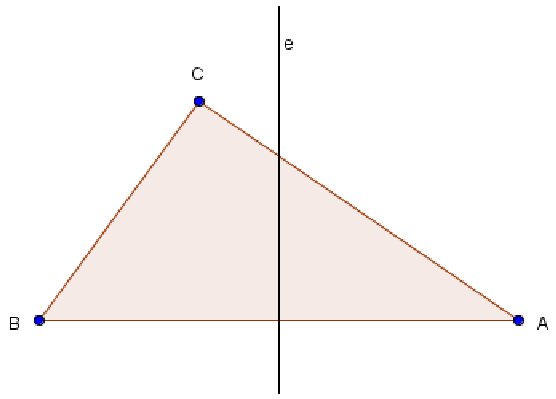
Definição de Mediatriz

É o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos **A** e **B** distinto.



Definição de Mediatriz de um triângulo

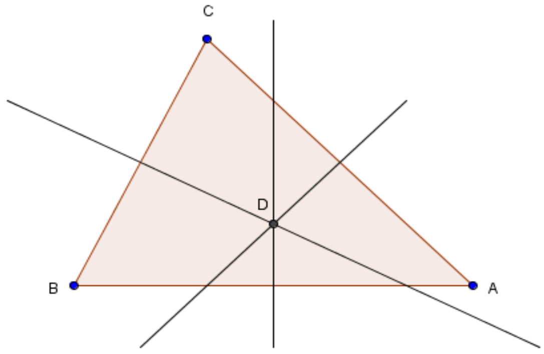
Mediatriz de um triângulo é a mediatriz de um de seus lados.



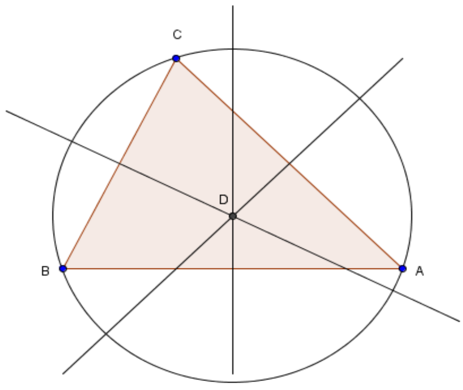
A reta **e** apresentada acima é mediatriz do lado AB do Δ ABC.

Definição de Circuncentro

Circuncentro de um triângulo é o ponto de encontro de suas mediatrizes



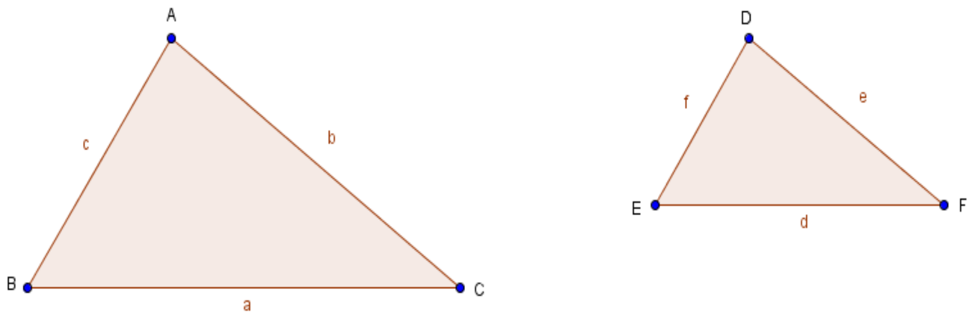
Propriedade do Circuncentro



Circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

2.6 Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem seus ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.



Os triângulos ABC e DEF são semelhantes, pois:

- $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$ (ângulos congruentes)
- $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ = K (lados homólogos ou correspondentes proporcionais, onde K é chamada de razão de semelhança).

Assim, indicamos:

$$\boxed{\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF}$$

Observação:

Se dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança é igual a 1, isto é, (K = 1), então os triângulos são congruentes.

Por ser uma relação de equivalência, a semelhança de Triângulos possui as seguintes propriedades:

- Reflexiva:

  $\Delta\, ABC \sim \Delta\, ABC$

- Simétrica

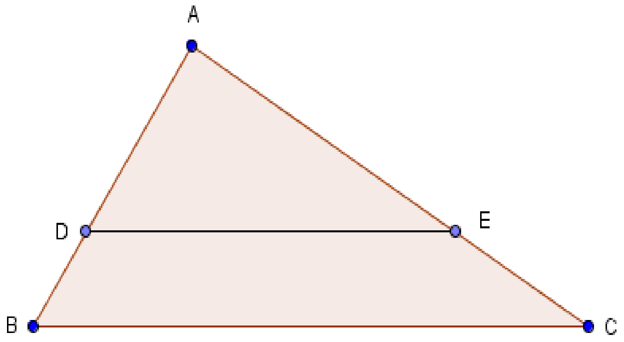
  $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF \Leftrightarrow \Delta\, DEF \sim \Delta\, ABC$

- Transitiva

  Se $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ e $\Delta\, DEF \sim \Delta\, GHI$, então $\Delta\, ABC \sim \Delta\, GHI$.

Teorema Fundamental

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo, interceptando os outros dois lados, então o triângulo que ele forma, é semelhante ao triângulo dado. Iezzi (1997).



DE // BC

$\Delta\,\mathrm{ADE} \sim \Delta\,\mathrm{ABC}$

Demonstração:

Hipótese: $\overline{\mathrm{DE}}$ // $\overline{\mathrm{BC}}$

Tese: $\Delta\,\mathrm{ADE} \sim \Delta\,\mathrm{ABC}$

Para demonstrarmos a semelhança entre dois triângulos, devemos mostrar que eles possuem ângulos ordenadamente congruentes e lados correspondentes proporcionais.

- Ângulos Congruentes

Se $\overline{\mathrm{DE}}$ // $\overline{\mathrm{BC}}$, então $\widehat{\mathrm{D}} \equiv \widehat{\mathrm{B}}$ e $\widehat{\mathrm{E}} \equiv \widehat{\mathrm{C}}$,(ângulos correspondentes) e $\widehat{\mathrm{A}}$ é comum aos triângulos.

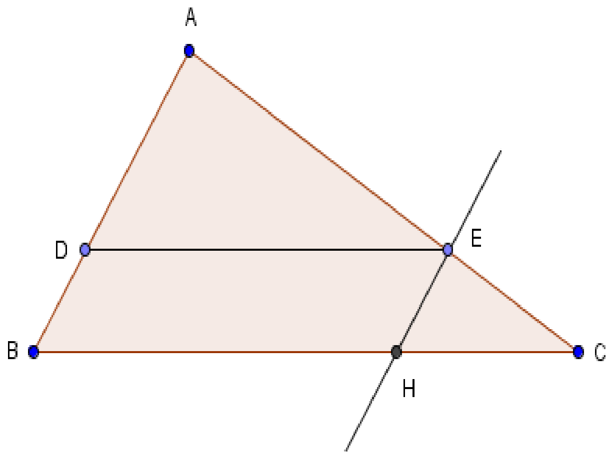
- Lados Proporcionais

Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}$$

Pelo ponto E, constrói-se uma reta $\overleftrightarrow{\mathrm{EH}}$,paralela ao segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, com o ponto H no segmento $\overline{\mathrm{BC}}$.

Logo,



Como BDEH é um paralelogramo, pois $\overline{\mathrm{DB}} \equiv \overline{\mathrm{EH}}$ e $\overline{\mathrm{DE}} \equiv \overline{\mathrm{BH}}$,assim $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}}$.

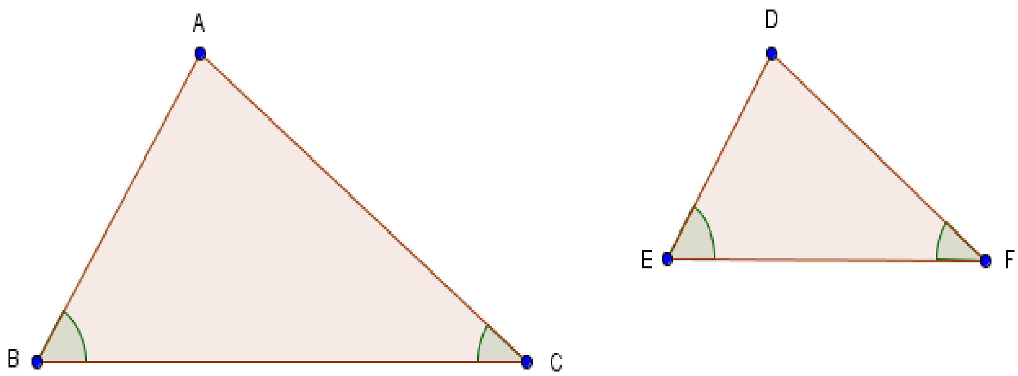
Temos, $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BC}}$.

Portanto, $\Delta\ \mathrm{ABC} \sim \Delta\ \mathrm{ADE}$

Casos de semelhança de Triângulos

1° Caso de Semelhança

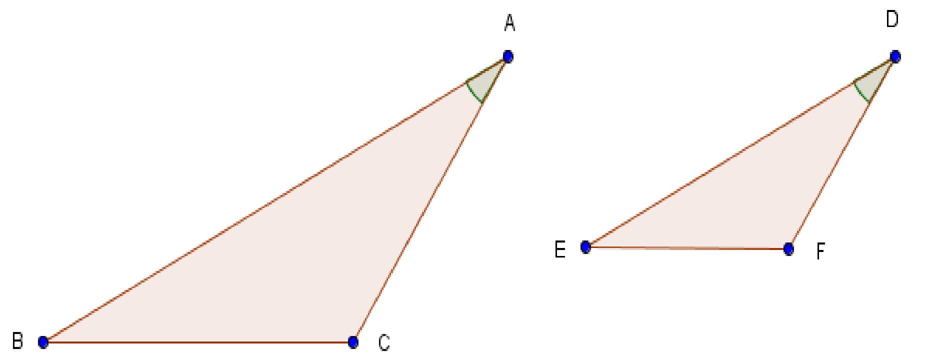
Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.



Sendo $\hat{\mathrm{B}} \equiv \hat{\mathrm{E}}$ e $\hat{\mathrm{C}} \equiv \hat{\mathrm{F}}$ logo, $\Delta\ \mathrm{ABC} \sim \Delta\ \mathrm{DEF}$

2° Caso de Semelhança

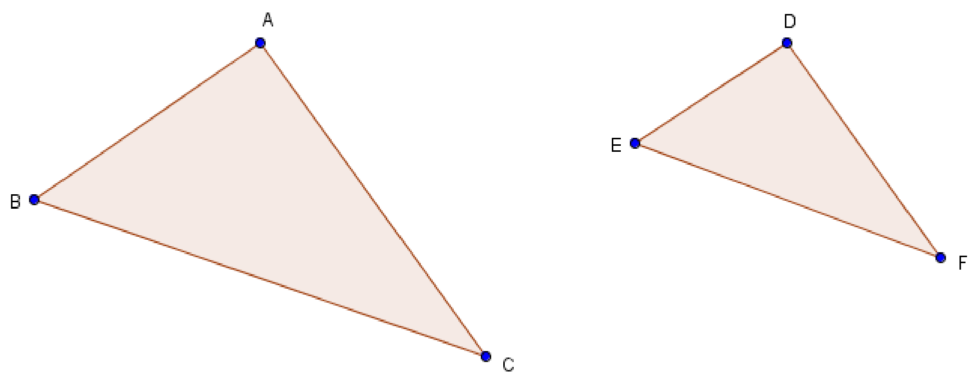
Se dois triângulos possuem um ângulo congruente e se os lados adjacentes a esse ângulo, em um dos triângulos, são proporcionais aos correspondentes no outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.



Sendo $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ logo, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$

3° Caso de Semelhança

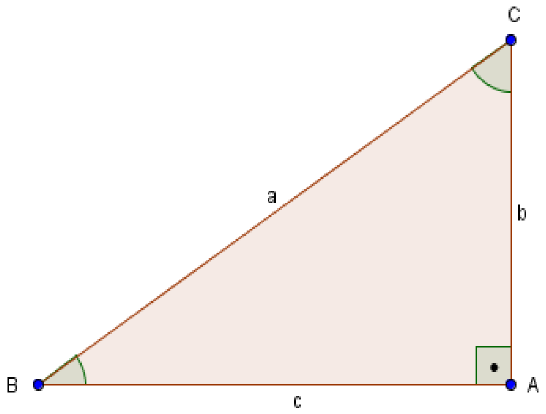
Se dois triângulos possuem os três lados proporcionais, então eles são semelhantes.



Sendo $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ logo, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$

2.7 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Dado o triângulo retângulo ABC abaixo, temos os seguintes elementos:



a = medida da hipotenusa BC

b = medida do cateto AC

c = medida do cateto AB

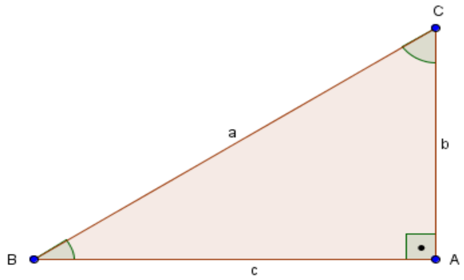
AC = cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$

AB = cateto oposto ao ângulo $\hat{C}$

AC = cateto adjacente ao ângulo $\hat{C}$

AB = cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$

Considerando o triângulo retângulo da figura seguinte, temos:



$$\text{sen}\ \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \rightarrow \text{sen}\ \hat{B} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{tg}\ \hat{B} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{B}}$$

$$\text{sen}\ \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a} \rightarrow \text{sen}\ \hat{C} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \rightarrow \text{tg}\ \hat{C} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{C}}$$

Logo, podemos concluir que:

$$\text{seno do ângulo agudo} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{cosseno do ângulo agudo} = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tangente do ângulo agudo} = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo}}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo}}$$

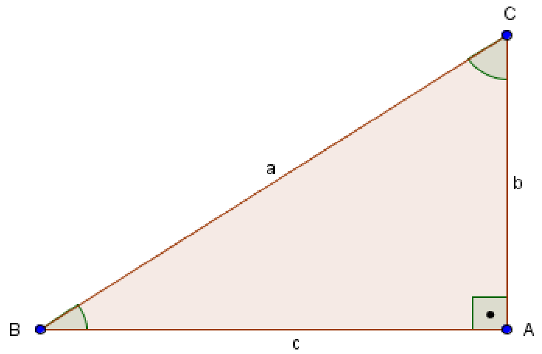
Conhecendo-se as razões trigonométricas dos ângulos de 0°, 30°, 45°, 60° e 90°, na forma fracionária, é mais convenientemente utilizados em problemas, pois ajuda a resolvê-lo de maneira satisfatória. Name (1996).

Quadro 1: Principais Valores Utilizados em Trigonometria

Ângulo	Sem	Cos	Tg
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	Não existe

Vejamos exemplos de sua aplicação:

1) No triângulo seguinte, sabendo-se que **a** = 20 cm, **b** = 12 cm e **c** = 16 cm, calcule o que se pede:



a) sen $\hat{B}$
b) cos $\hat{B}$
c) tg $\hat{B}$
d) sen $\hat{C}$
e) cos $\hat{C}$
f) tg $\hat{C}$

Resolução:

a) sen $\hat{B}$ = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

b) cos $\hat{B}$ = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

c) tg $\hat{B}$ = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{B}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{B}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

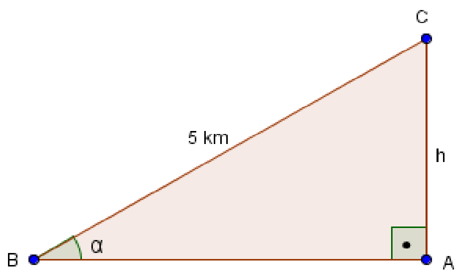
d) sen $\hat{C}$ = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

e) cos $\hat{C}$ = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$

f) tg $\hat{C}$ = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{C}} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3}$

Ao analisarmos as respostas obtidas nessa questão, constatamos que o valor do seno de um ângulo agudo no triângulo retângulo é igual ao valor do cosseno do outro ângulo agudo.

2) Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 30° em relação a pista. Quando percorrer, em linha reta uma distância de 5 km, qual será a altura atingida pelo avião? Andrini (1989).



Resolução:

$$\text{Sen } \propto = \frac{\text{medida do cateto oposto a} \propto}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{Sen } 30° = \frac{h}{5}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{5}$$

$$2h = 5$$

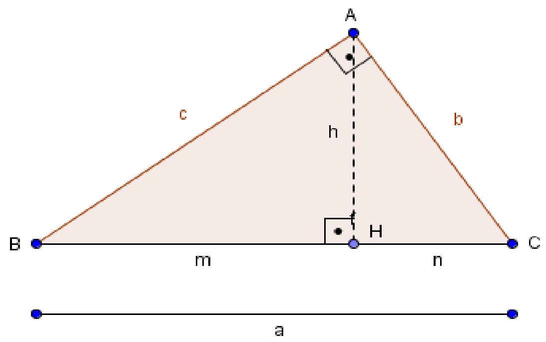
$$h = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{h = 2{,}5 \text{ km}}$$

2.8 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Utilizando semelhança de triângulos e estabelecendo relações entre lados e ângulos, identificaremos as relações métricas no triângulo retângulo. Ono (2015).

Considere o triângulo retângulo ABC, em que definimos os seguintes elementos:



$\overline{BC}$ = a (hipotenusa)

$\overline{AB}$ = c (cateto)

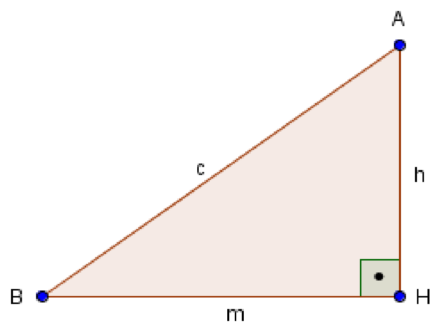
$\overline{AC}$ = b (cateto)

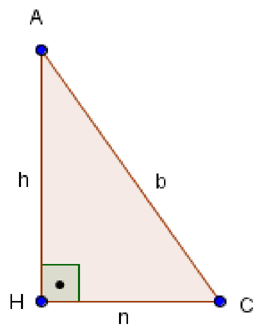
$\overline{AH}$ = h (altura relativa à hipotenusa)

$\overline{BH}$ = m (projeção do cateto c)

$\overline{CH}$ = n (projeção do cateto b)

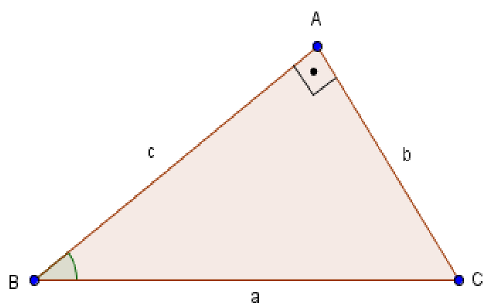
Decompondo o triângulo ABC e outros dois triângulos: Triângulo ABH e triângulo ACH.

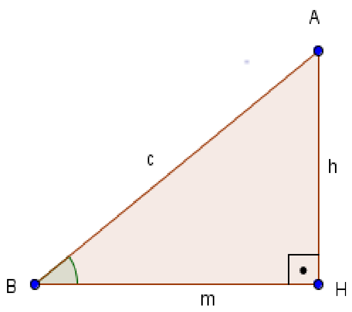




Assim, comparando os três triângulos, dois a dois, temos:

- Triângulos ABC e ABH.





$B\hat{A}C \equiv A\hat{H}B$ (ângulos retos)

$A\hat{B}C \equiv A\hat{B}H$ (ângulos comuns aos dois triângulos)

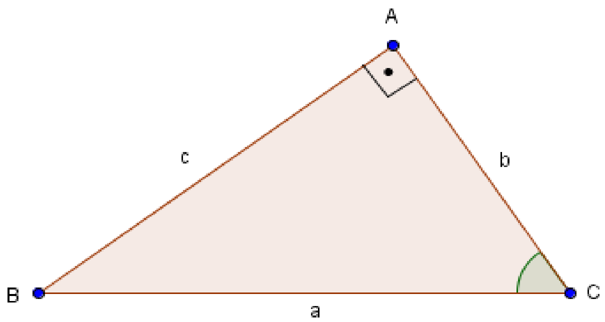
Assim, pelo caso AAA, temos que Δ ABC ~ Δ ABH e considerando a relação de semelhança, temos as seguintes proporções:

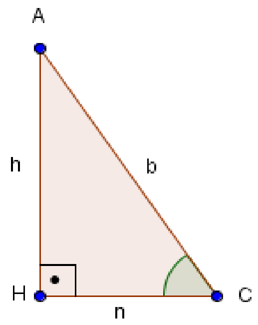
$\frac{c}{m} = \frac{b}{h} \rightarrow c \,.\, h = b \,.\, m$ (1)

$\frac{c}{m} = \frac{a}{c} \rightarrow c^2 = a \,.\, m$ (2)

$\frac{b}{h} = \frac{a}{c} \rightarrow b \,.\, c = a \,.\, h$ (3)

- Triângulos ABC e ACH





$B\hat{A}C \equiv A\hat{H}C$ (ângulos retos)

$A\hat{C}B \equiv A\hat{C}H$ (ângulos comuns aos dois triângulos)

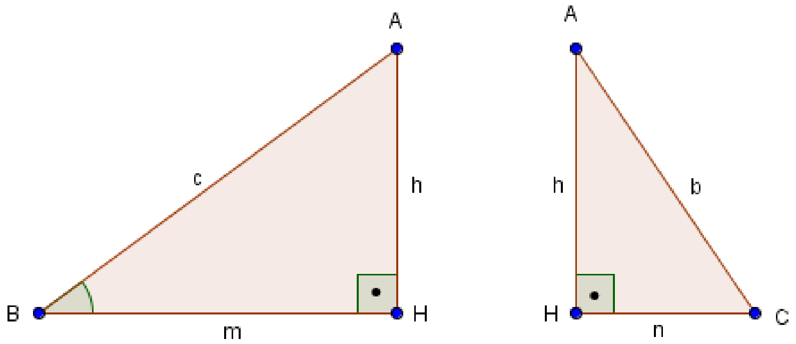
Assim, pelo caso AAA, temos que Δ ABC ~ Δ ACH e considerando a relação de semelhança, temos as seguintes proporções:

$\frac{b}{n} = \frac{c}{h} \rightarrow b \,.\, h = c \,.\, n$ (4)

$\frac{b}{n} = \frac{a}{b} \rightarrow b^2 = a \,.\, n$ (5)

$\frac{c}{h} = \frac{a}{b} \rightarrow b \,.\, c = a \,.\, h$ (3)

- Triângulos ABH e ACH



$A\hat{H}B \equiv A\hat{H}C$ (ângulos retos)

$A\hat{B}H \equiv C\hat{A}H$ (ângulos comuns aos dois triângulos)

Assim, pelo caso ALA, temos que Δ ABH ~ Δ ACH e considerando a relação

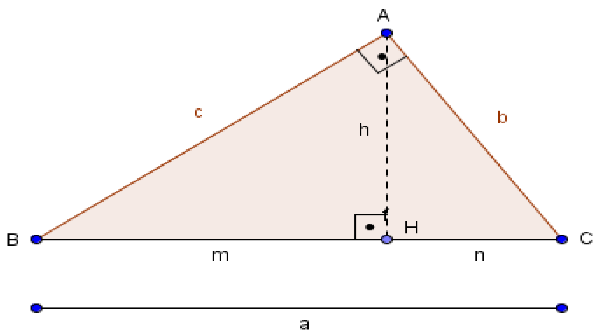
de semelhança, temos as seguintes proporções:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \rightarrow h^2 = m \, . \, n \qquad (6)$$

$$\frac{m}{h} = \frac{c}{b} \rightarrow c \, . \, h = b \, . \, m \qquad (1)$$

$$\frac{h}{n} = \frac{c}{b} \rightarrow b \, . \, h = c \, . \, n \qquad (4)$$

Resumindo as relações encontradas e excluindo as relações repetidas, encontramos as seguintes relações métricas no triângulo retângulo ABC:



- Cada cateto é média proporcional (média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$$\boxed{c^2 = a \cdot m}$$

$$\boxed{b^2 = a \cdot n}$$

- A altura relativa à hipotenusa é média proporcional (média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

- O produto dos catetos é igual ao produto é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$\boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

- O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro cateto sobre a hipotenusa.

$$\boxed{b \cdot h = c \cdot n}$$

$$\boxed{c \cdot h = b \cdot m}$$

Teorema de Pitágoras

Somando membro a membro, as relações $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$, chegaremos a uma das importantes e talvez a mais usada das relações métricas no triângulo retângulo, que é o “Teorema de Pitágoras”.

$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m$

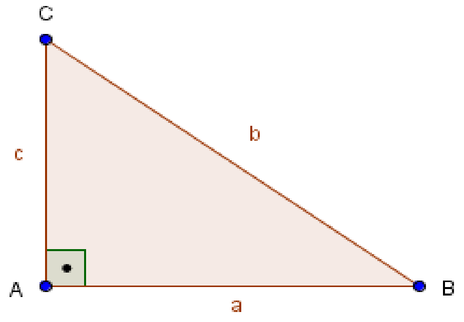
$b^2 + c^2 = a \cdot (n + m)$

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Um exemplo do uso do Teorema de Pitágoras:

Encontre o valor de **b** no triângulo retângulo, sabendo que o cateto **c** mede 12cm e a hipotenusa **a** mede 15 cm.



Resolução:

$a^2 = b^2 + c^2$

$15^2 = b^2 + 12^2$

$225 = b^2 + 144$

$b^2 = 225 - 144$

$b^2 = 81$

$b = \pm \sqrt{81}$

$b = \pm 9$ cm.

No entanto, como **b** é uma distância e não pode ser um valor negativo, logo temos que b = 9 cm.

Outra relação de destaque no triângulo retângulo é obtida a partir da relação

$$b \,.\, c = a \,.\, h$$

Elevando ambos os membros ao quadrado

$$b^2 \,.\, c^2 = a^2 \,.\, h^2$$

Identificando a seguinte proporção

$$\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{b^2c^2}$$

Substituindo a^2 por $b^2 + c^2$, temos:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2}$$

Separando o segundo membro em duas frações, encontramos:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2}{b^2c^2} + \frac{c^2}{b^2c^2}$$

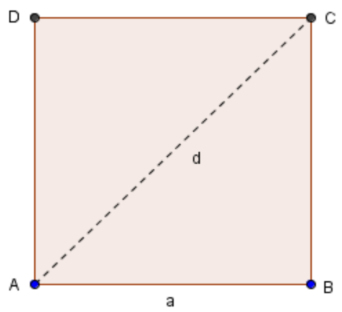
Simplificando o segundo membro, concluímos:

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

O inverso do quadrado da altura é igual à soma dos inversos dos quadrados dos catetos.

Aplicações do Teorema de Pitágoras

- **Diagonal do Quadrado**



Dado ABCD um quadrado de lado **a**, para calcular sua diagonal aplicamos o Teorema de Pitágoras.

$d^2 = a^2 + a^2$

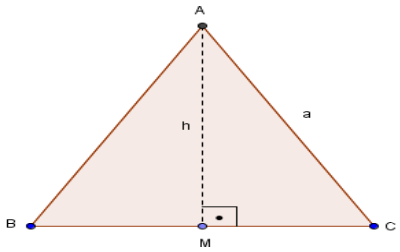
$d^2 = 2.a^2$

$d = \sqrt{2 \,.\, a^2}$

$\boxed{d = a\sqrt{2}}$

- **Altura do Triângulo Equilátero**

Dado ABC um triângulo equilátero de lado **a**, para calcular sua altura aplicamos o Teorema de Pitágoras.



Trabalhando com o triângulo AMC e sendo M, o ponto médio do segmento BC, a distância $\overline{MC}$ é dada por $\frac{a}{2}$ .Assim, temos:

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$

$h^2 = \frac{3\,.a^2}{4}$

$h = \sqrt{\frac{3\,.a^2}{4}}$

$\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

2.9 Relações Métricas num Triângulo Qualquer

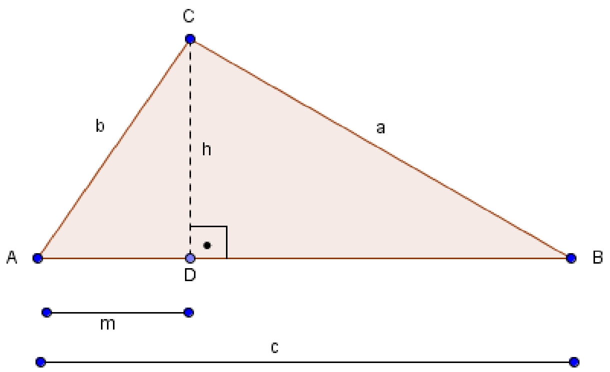
Existem relações de medidas formuladas sobre triângulos acutângulos e obtusângulos.

- **Caso o ângulo $\hat{A}$ seja agudo, isto é, $\hat{A} < 90°$, temos**:

Num triângulo qualquer, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.

Demonstração:

Dado um triângulo ABC de lados AB = c, AC = b , BC = a, altura CD = h, projeção AD = m e ângulo $\hat{A}$.



Assim, temos:

Δ BCD $\rightarrow$ $a^2 = h^2 + (c - m)^2$ (1)

Δ ACD $\rightarrow$ $h^2 = b^2 - m^2$ (2)

substituindo (2) em (1), temos:

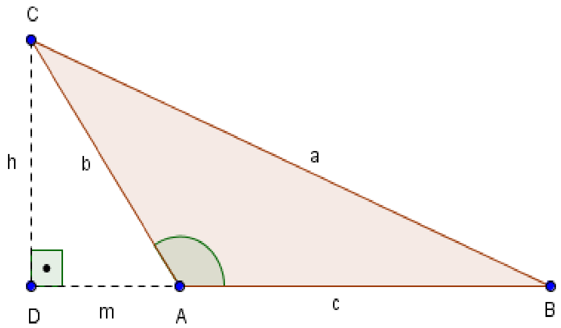
$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2$

$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}$

- **Caso o ângulo $\hat{A}$ seja obtuso, isto é, $\hat{A}$ > 90°, temos:**

Num triângulo obtusângulo qualquer, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, mais duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre ele.



Assim, temos

Δ BCD $\rightarrow$ $a^2 = h^2 + (c + m)^2$ (1)

Δ ACD $\rightarrow$ $h^2 = b^2 - m^2$ (2)

substituindo (2) em (1), temos:

$a^2 = b^2 - m^2 + (c + m)^2$

$a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2$

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2cm}$

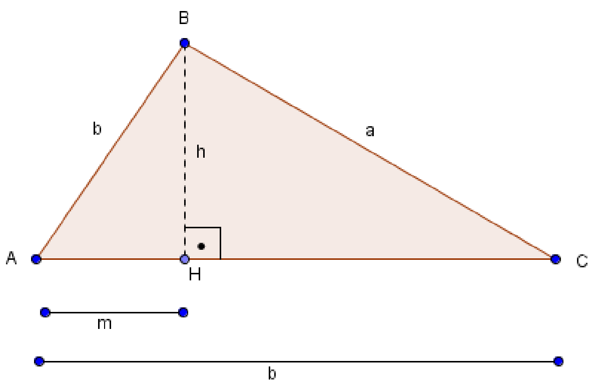
2.10 Lei dos Cossenos

Em um triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo por eles formados. Morgado (1973).

Demonstração:

- **Caso o ângulo $\hat{A}$ seja agudo, isto é, $\hat{A}$ < 90°, temos:**

Dado um triângulo ABC de lados AB = c, AC = b , BC = a, altura BH = h, projeção AH = m e ângulo $\hat{A}$.



Assim, temos

Δ BCH $\rightarrow$ $a^2 = h^2 + (b - m)^2$ (1)

Δ ABH $\rightarrow$ $h^2 = c^2 - m^2$ (2)

substituindo (2) em (1), temos:

$a^2 = c^2 - m^2 + (b - m)^2$

$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2$

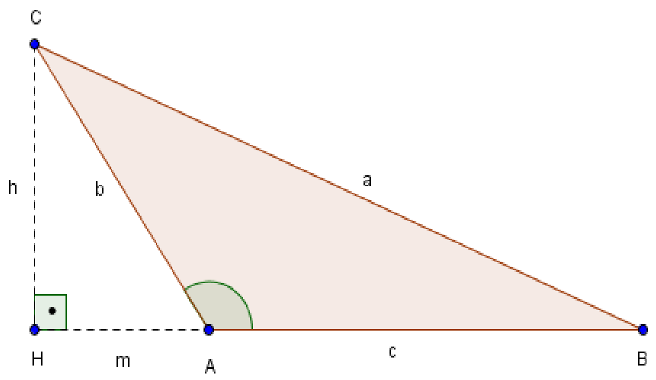
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$ (3)

Δ ABH $\rightarrow$ $\cos \hat{A} = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos \hat{A}$ (4)

substituindo (4) em (3), temos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$$

- **Caso o ângulo $\widehat{A}$ seja obtuso, isto é, $\widehat{A} > 90°$, temos:**



Assim, temos

Δ BCH $\rightarrow$ $a^2 = h^2 + (b + m)^2$ (1)

Δ ABH $\rightarrow$ $h^2 = c^2 - m^2$ (2)

substituindo (2) em (1), temos:

$a^2 = c^2 - m^2 + (b + m)^2$

$a^2 = c^2 - m^2 + b^2 + 2bm + m^2$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$ (3)

Δ ABH $\rightarrow$ $\cos(180° - \widehat{A}) = \dfrac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos\widehat{A}$

$$\rightarrow -\cos\widehat{A} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = -\ c \cdot \cos\widehat{A} \qquad (4)$$

substituindo (4) em (3), temos:

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}}$

Portanto, para triângulos acutângulos e triângulos obtusângulos, as relações trigonométricas não se alteram.

De maneira análoga, ao analisarmos os outros dois ângulos ,temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Síntese de Clairaut

Conhecendo-se as medidas dos lados de um triângulo, podemos reconhecer sua natureza, isto é, classifica-lo quanto aos ângulos. Para isto, basta identificar a maior medida como o valor de **a**.

$$|b - c| < a < b + c$$

Usando a lei dos cossenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$ e levando em consideração que o cosseno de ângulo agudo é positivo, cosseno de um ângulo reto é nulo e o cosseno de um ângulo obtuso é negativo, e ainda observando que o maior lado é oposto ao maior ângulo, basta comparar o quadrado de seu lado maior com a soma dos quadrados dos outros lados.

Assim, temos:

$$a^2 < b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \text{triângulo acutângulo}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \text{triângulo retângulo}$$
$$a^2 > b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad \text{triângulo obtusângulo}$$

2.11 Lei dos Senos (Lamy)

Lei dos senos, enunciada por Bernard Lamy, matemático, filósofo e teólogo, nascido na França em 1640, membro da Congregação do Oratório, diz que:

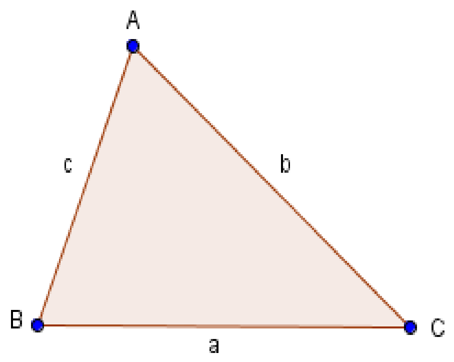
“Em todo triângulo, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo”. Morgado (1973).

Demonstração:

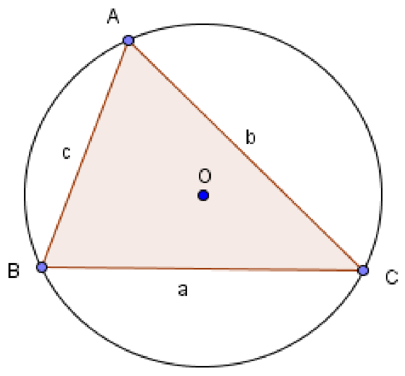
Hipótese: ABC é um triângulo

Tese: $\dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

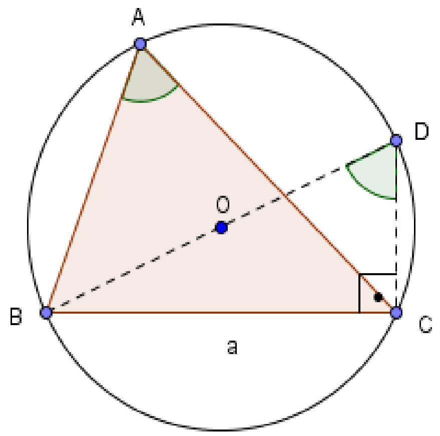
Dado um triângulo ABC



Traçamos uma circunferência circunscrita ao triângulo ABC



Traçando o diâmetro BD, obtemos o triângulo retângulo BCD, onde $B\hat{C}D$ é reto.



Assim, como o ângulo $\hat{A}$ é inscrito e é oposto ao arco BC, e o ângulo $\hat{D}$ também é inscrito na mesma circunferência e também é oposto ao mesmo arco BC, temos que $\hat{A} \equiv \hat{D}$.

Assim,

$$\text{sen } \hat{D} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$$

Analisando de maneira análoga os outros ângulos, temos:

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R \quad \text{e} \quad \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

Logo,

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$

Observando, ainda, que caso o ângulo $\hat{A}$ seja obtuso, no lugar de fazermos $\hat{D}=\hat{A}$, faremos, $\hat{D} = 180° - \hat{A}$, o que não altera a relação, pois sen $(180° - \hat{A})$ = sen $\hat{A}$.

3 CONSTRUINDO PONTES DE MACARRÃO

3.1 Dados Históricos sobre Pontes

Desde os primórdios dos tempos, o homem vem buscando, a cada dia, superar as adversidades da vida, transpondo inúmeras barreiras. Inicialmente em busca de sustento e abrigo e depois, vinculou a esta luta a vontade de conquistar um pouco mais de conforto para a sua vida. Uma das dificuldades encontradas foi a locomoção, que muitas vezes era prejudicada pelos "acidentes geográficos", como transpor pequenos riachos.

As primeiras pontes surgiram, de maneira "acidental" por causa de troncos que caíram sobre os rios, de forma absolutamente natural. Assim, o homem começou a imitar natureza, construindo as primeiras pontes, feitas de troncos caídos. Com isto, começou a superar as dificuldades de locomoção, como rios, vales e outros obstáculos naturais que surgiam. Desde a antiguidade, os povos construíram pontes com os mais variados tipos de materiais, como pedras, madeiras, cordas e outros.

Há relatos de pontes muito antigas, que acabam fazendo parte da história da humanidade. Como exemplo, a Ponte Arkadiko, construída por volta de 1450 a.C., na Grécia, feita de grandes e fortes rochas, resistindo ao tempo e, em boas condições de uso até os dias de hoje. Mobilidade Humana (2015).

Ponte Arkadiko

Outra ponte que resiste às intempéries do tempo é a Ponte de Caravana, na Turquia, com mais de 2860 anos, usada em sua região até hoje.

Assim como os romanos, também os chineses e os turcos desenvolveram habilidades na construção de pontes. Posteriormente, com a necessidade de transportar cargas grandes e pesadas, houve a necessidade de se construir pontes com materiais mais resistentes, como ferro e concreto que substituía as tradicionais pedras e madeiras.

Um dos fatos relevantes na História do Brasil, com relação a pontes, trata-se da ponte que Maurício de Nassau, começou a construir em Recife no ano de 1643, que se tornaria a primeira ponte de grande porte da América Latina, que ligaria um bairro portuário a uma ilha.

Próximo do fim da obra, para chamar a atenção da população para a importância da ponte e para aglomerar o máximo de pessoas possíveis na inauguração, Maurício de Nassau, disse que faria um boi voar sobre a ponte. Com essa promessa, muitas pessoas foram atraídas para o evento. De posse de um boi construído de couro, que se deslizava sobre cabos previamente amarrados no alto, sobre a ponte, os convidados viram que o governante havia cumprido a sua promessa, fazendo um boi voar. Calado (1989).

Os fatos narrados acima mostram que o tema a respeito de pontes é tratado e valorizado na disciplina de História. No entanto, é um tema bastante atrativo, que pode ser abordado de maneira interdisciplinar para despertar não só o interesse histórico, mas também para incentivá-los a observar a Matemática, a Física e a Arte dentro desses fatos.

A construção de uma ponte de macarrão, a princípio, pode parecer muito complexa, no entanto existem várias formas de se construir.

Neste trabalho, apresentaremos uma das formas, prática e simplificada ao máximo, a fim que seja possível a sua construção por qualquer pessoa, até mesmo por aquelas que possuem um grau de habilidade menor. Os projetos de construções de pontes de macarrão podem ser elaborados de maneiras simples, ou até mesmo um pouco sofisticados. Essas pontes utilizam materiais fáceis de serem encontrados, valendo também, a criatividade dos construtores em acrescentar e/ou substituir alguns dos materiais. Apesar de sua construção ser simples, ela depende de alguns conceitos teóricos nas áreas de Matemática, Física e Arte, como triângulos, simetria, tensão, equilíbrio e outros, pois essas pontes serão construídas para suportar inicialmente, uma carga mínima de 2,5 kg e a partir daí deverão receber gradativamente outras cargas, que variam de 1,0 kg até 5,0 kg, que acumuladas, aumentam a tensão de sua estrutura até entrar em colapso, afim de conhecermos seu limite.

3.2 Materiais Utilizados para Construção de Ponte de Macarrão

Os materiais utilizados para a construção de pontes de macarrão são fáceis de serem encontrados à venda nos mercados, no entanto, poderão ser acrescentados outros materiais ou mesmo substituídos, de acordo com a criatividade dos componentes da equipe.

- Macarrão espaguete nº 08;
- Cola araldite ou similar;
- Massa durepoxi ou similar;
- Régua;
- Tesoura;

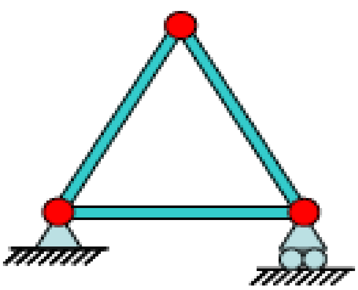
- Barbante ou fio dental;
- Lixa fina.

3.3 Procedimento para a Construção de Ponte de Macarrão.

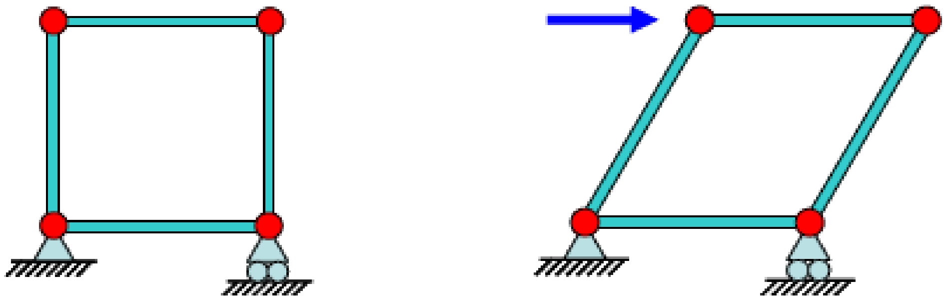
- Elaborar um projeto, em escala ou em tamanho natural, para o acompanhamento;
- Marcar o tamanho dos fios de macarrão, de acordo com o projeto, a serem cortados, utilizando para isto, a tesoura;
- Amarrar os fios de macarrão com o barbante, formando feixes de macarrão.
- Colar os fios de cada feixe de macarrão, com araldite, para que estes não se separem;
- Para unir um feixe a outro, utiliza-se a massa durepoxi, de preferência em pequena quantidade;
- Juntar todos os feixes de macarrão, seguindo a projeto inicial.

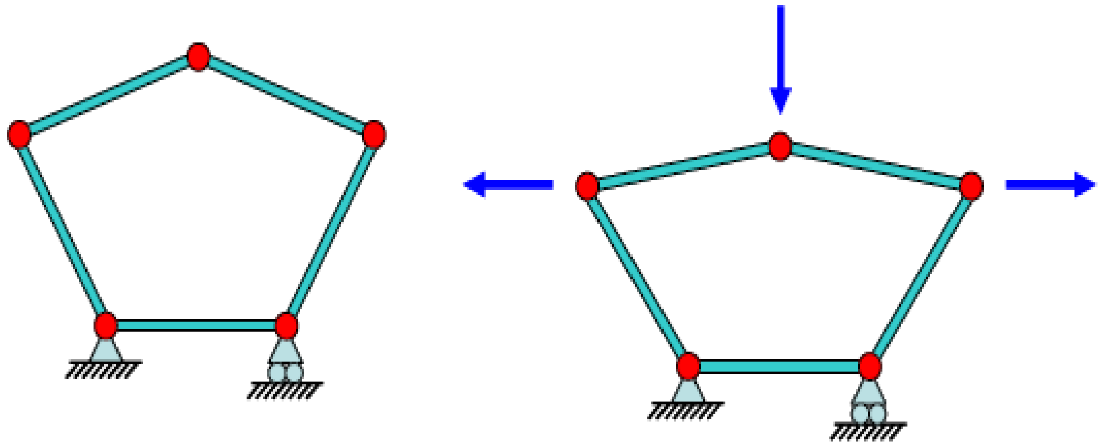
Em observações feitas em sala de aula com os alunos, prima-se muito a presença do triângulo, no momento da elaboração do projeto de construção da ponte de macarrão, pois por princípios geométricos (lei dos senos) é possível verificar que esta figura é estável e o único polígono que não pode alterar sua forma sem igualmente alterar o comprimento dos seus lados. Portanto, um triângulo não sofre qualquer deslocamento por ação de seu peso ou ação de outras forças exteriores, ao contrário do que acontece com outras formas geométricas.

Forma Estável

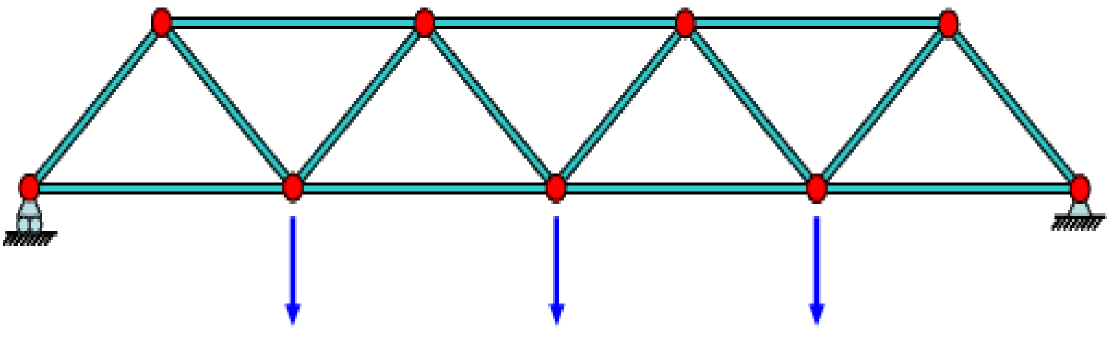


Formas Instáveis





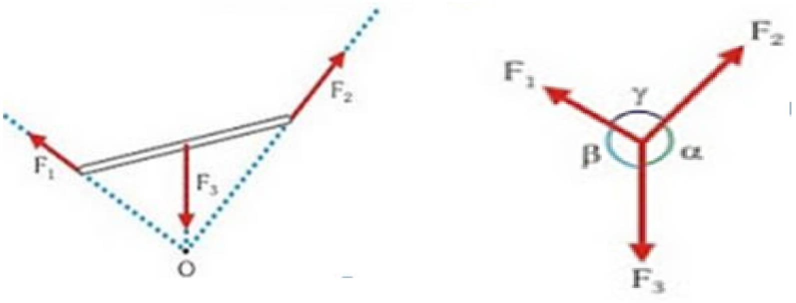
Fazendo uma associação de triângulos contínuos, criaremos uma figura estável e rígida com garantia de não sofrer qualquer movimento livre em nenhuma direção.



- **Teorema de Lamy**

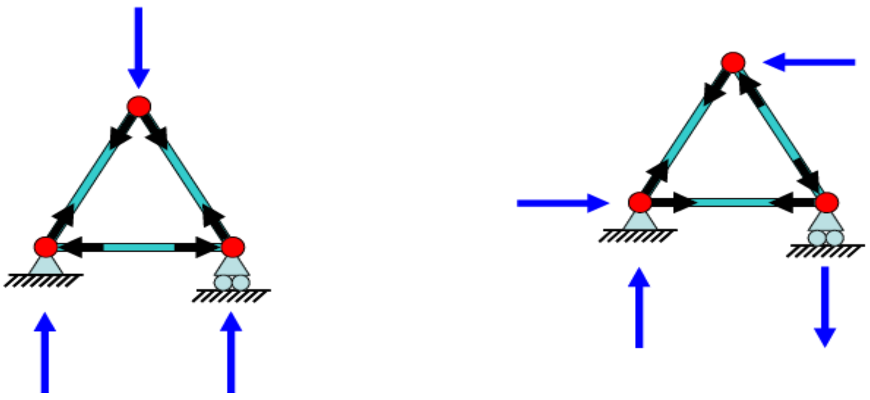
O Teorema de Lamy é uma consequência da lei dos senos aplicada após a formação do triângulo de forças.

Quando um corpo rígido em equilíbrio é submetido à ação de três forças que competem, cada módulo é diretamente proporcional ao seno do respectivo ângulo oposto.



$$\boxed{\frac{F1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{F2}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{F3}{\operatorname{sen}\gamma}}$$

Este teorema é empregado quando existirem três forças em equilíbrio num ponto material.



Quando uma força é exercida pontualmente sobre um nó (vértice) de um elemento triangular, ela distribui-se pelos lados desse triângulo até atingir um equilíbrio em cada nó.

4 O PROJETO: PONTES DE MACARRÃO

4.1 Objetivos Gerais.

O projeto “Pontes de Macarrão” surgiu com o objetivo principal de motivar nos alunos o desenvolvimento de habilidades, que lhes permitam aplicar conhecimentos de cunho interdisciplinar, em de Matemática, Física, História e Arte, afim de levar os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a construir uma ponte de macarrão espaguete nº 08 utilizando no máximo 2,0 kg de macarrão e cola, capaz de vencer um vão livre de 0,60 m e suportar em seu ponto central uma carga mínima de 2,5 kg.

4.2 Objetivos Específicos.

- Relacionar conteúdos de sala de aula a situações práticas, onde as teorias sejam associadas à situações práticas;
- Utilizar dados matemáticos e artísticos como simetria e ornamentação;
- Observar os conceitos matemáticos e físicos na estrutura da ponte;
- Testar leis da Física aplicáveis à força e tensão;
- Construir protótipo de ponte para simular uma situação real;
- Tornar público este saber e despertar a curiosidade e o interesse do jovem pela ciência.

4.3 O Projeto

A competição Pontes de Macarrão é realizada com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, que formarão equipes de no máximo 5 componentes. No entanto, foram também convidados a participar da competição os alunos do 8º ano, com o objetivo de começarem a se motivar com as atividades experimentais. Existem muitos pesquisadores das atividades experimentais, utilizadas como estratégias de ensino, pois desencadeia no aluno um enorme interesse pela disciplina estudada. Na visão de Moreira (2006).

> "O trabalho experimental tem uma reconhecida importância na aprendizagem de Ciências, largamente aceita entre a comunidade científica e pelos professores como metodologia de ensino".

Quando o estudante tem a possibilidade de testar diferentes caminhos e visualizar conceitos de diferentes pontos de vista, lhe é despertada a curiosidade para investigar e solucionar problemas.

> [...] as metodologias utilizadas devem priorizar um papel ativo do aluno, estimulando a leitura de textos matemáticos, os estudos dirigidos, o trabalho em grupo e os recursos didáticos de caráter lúdico como [...] materiais concretos para uso em geometria dinâmica e experimentos de cálculo (MINAS GERAIS, 2006).

4.4 Aula Motivacional

Foi elaborada uma aula motivacional para os alunos, onde foram apresentadas as objetivos e regras da competição.

Figura: 4.1 Slides da aula motivacional

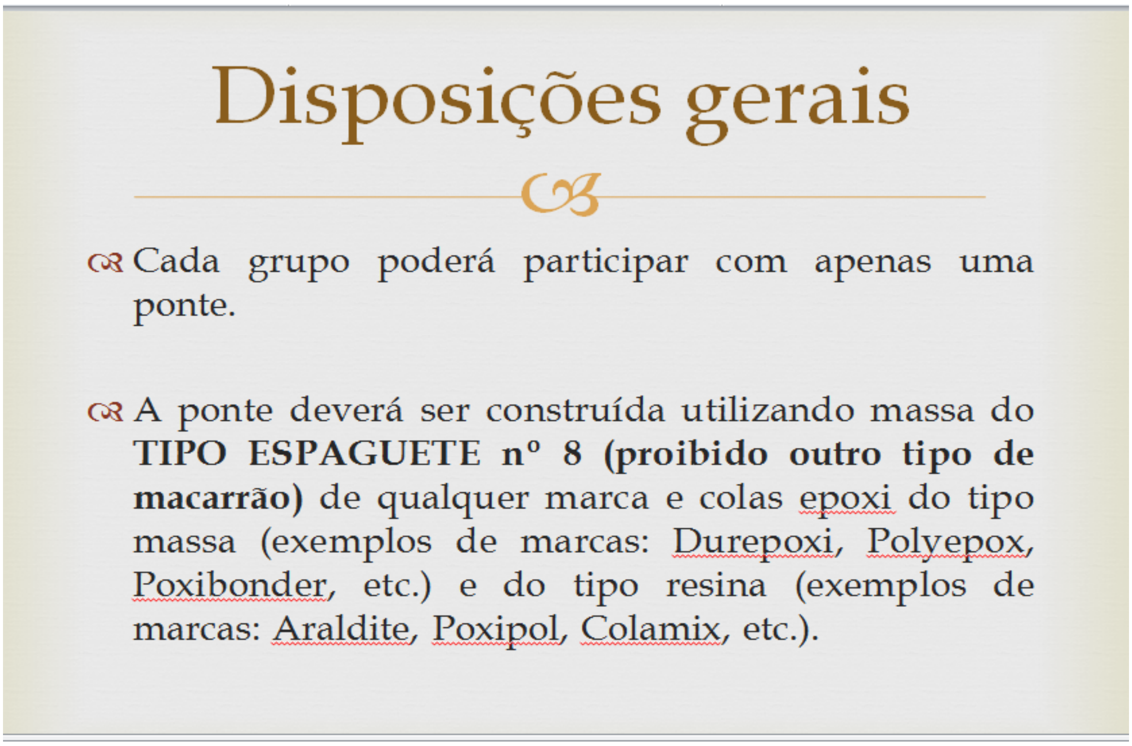


Figura: 4.2 Slides da aula motivacional

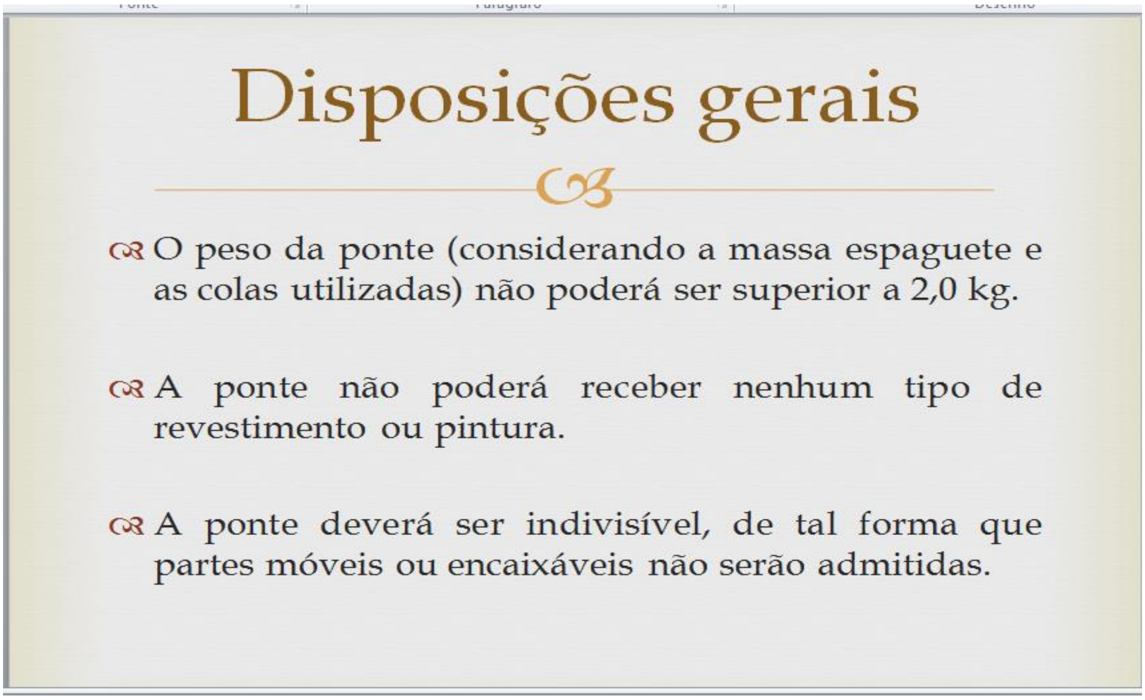


Figura: 4.3 Slides da aula motivacional

Figura: 4.4 Slides da aula motivacional

Figura: 4.5 Slides da aula motivacional

Figura: 4.6 Slides da aula motivacional

Figura: 4.7 Slides da aula motivacional

Figura: 4.8 Slides da aula motivacional

Cada equipe, no dia da competição, deverá levar a ponte, construída, sem nenhuma parte móvel ao laboratório, onde passará por uma inspeção pelos coordenadores da competição, para verificar se suas medidas e sua massa estão de acordo com as regras previamente divulgadas

- Espessura máxima dos feixes: 2,0cm;
- Comprimento: 70 cm;
- Largura: 10 a 20 cm;
- Peso máximo: 2,0 kg.

Tais medidas foram criadas para que houvesse um equilíbrio entre as pontes produzidas pelas equipes participantes da competição. Assim como as medidas são homogêneas para todas as equipes participantes, a diferença entre as pontes ficará evidente na elaboração e execução do projeto de cada equipe, identificando o projeto melhor elaborado por meio da ponte que suportar a maior carga possível.

Caso, alguma ponte de macarrão esteja acima do peso máximo permitido para a competição, a equipe poderá tentar retirar pequenas partes até que sua massa fique dentro das regras exigidas. Sendo todas as exigências cumpridas, a equipe será autorizada a participar da competição. Como a ponte é confeccionada basicamente de macarrão, aos olhos de algumas pessoas, pode parecer desperdício de alimentos, mesmo sendo um trabalho em prol da ciência e do crescimento de aprendizagem. Por este motivo, a inscrição de cada equipe foi concretizada, mediante uma doação de 5 litros de leite por equipe participante, mais 1 kg de alimento não perecível, por cada membro que compõem as equipes. Esses alimentos serão doados a uma instituição de caridade.

5 OS RESULTADOS

O projeto Pontes de Macarrão teve início no 2º semestre, depois que foram ministrados conteúdos de Matemática como:

- Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo;
- Relações Métricas no Triângulo Retângulo;
- Lei dos Senos;
- Lei dos Cossenos.

Após o aluno ter conhecimento da parte teórica de triângulos e algumas leis de Física, ocorreu a divulgação do campeonato de Pontes de Macarrão, para que o aluno pudesse vivenciar na prática os conteúdos estudados em sala de aula. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), ressaltam que:

> A exploração de diferentes tipos de investigação geométrica pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação, evidenciar conexões matemáticas e ilustrar aspectos interessantes da história e da evolução da Matemática.

Houve momentos de esclarecimentos de algumas dúvidas em sala de aula, como a angulação do lixamento dos feixes de macarrão para posterior colagem, o uso ou não de cola branca, a quantidade de massa de durepoxi utilizada na junção de feixes de macarrão e outras. Com o apoio de todos os professores envolvidos no projeto e a equipe técnica pedagógica da escola, o convite foi estendido a toda comunidade escolar e aos pais e familiares. A participação de todos foi de fundamental importância para o êxito do projeto.

No dia da competição, antes de iniciar o evento todas as pontes são levadas ao laboratório para passar por uma aferição, onde são verificadas suas medidas e sua massa (fotos Apêndice B). A competição foi registrada com fotos. (Apêndice C).

Após a realização da competição foram obtidos os seguintes resultados:

Quadro 2: Resultados da competição de Pontes de Macarrão

Nº	COMPRIMENTO (cm)	LARGURA (cm)	ALTURA (cm)	MASSA DA PONTE (kg)	CARGA MÁXIMA SUPORTADA (kg)	CLASSIFICAÇÃO
1	69	07	39	1,999	108,5	1º
2	70	11	26	1,520	20,5	8º
3	65	10	30	1,150	50,5	3º
4	70	10	22	1,800	24,5	7º
5	67	15	21	1,445	8,5	9º
6	70	10	30	1,870	30,5	5º
7	70	09	23	2,000	30,5	4º
8	71	14	34	1,998	81,5	2º
9	62	18	15	1,200	7,5	10º
10	70	08	20	2,000	26,5	6º

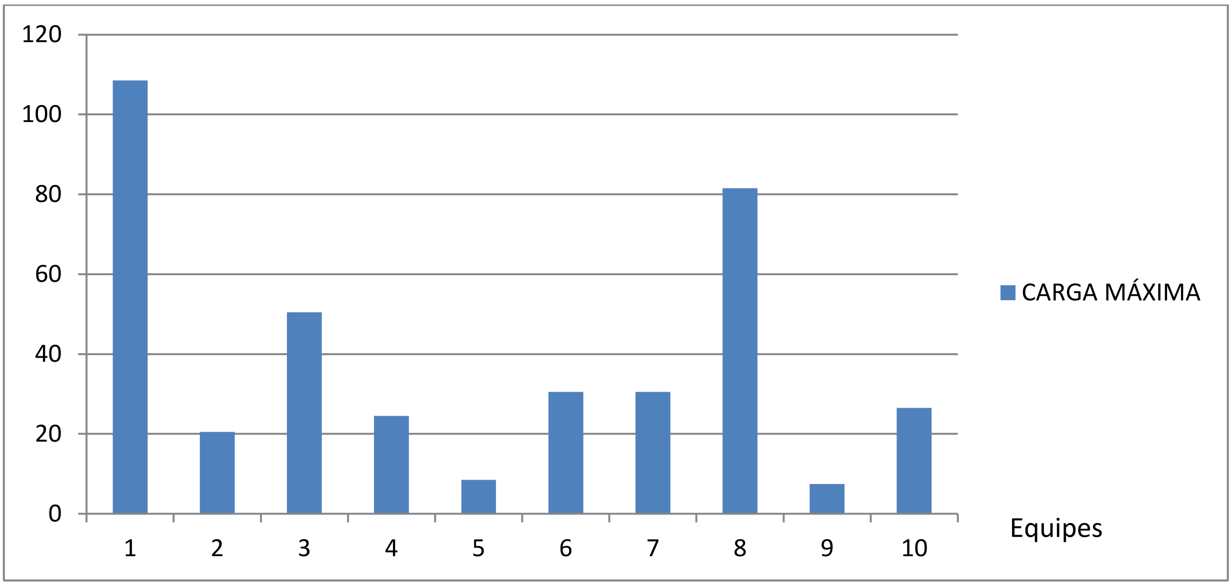
Fonte: Colégio Classe A

OBS.: Em caso de empate entre duas ou mais pontes, será considerada melhor colocada na classificação, a ponte que possuir a menor massa.

Pelo quadro 2, podemos analisar os seguintes resultados;

- Em 1º lugar, ficou a equipe número 1 com uma carga máxima de 108,5 kg.
- Em 2º lugar ficou a equipe número 8, com uma carga máxima de 81,5 kg.
- Em 3º lugar ficou a equipe número 3, com uma carga máxima de 50,5 kg.

Gráfico 1: Carga máxima suportada pelas pontes (em quilogramas)



Fazendo outra análise nas informações do quadro 2, podemos denotar uma visão diferenciada no diz respeito a relação de dados na razão entre a carga suportada pela ponte e a massa da ponte, analisados no quadro 3.

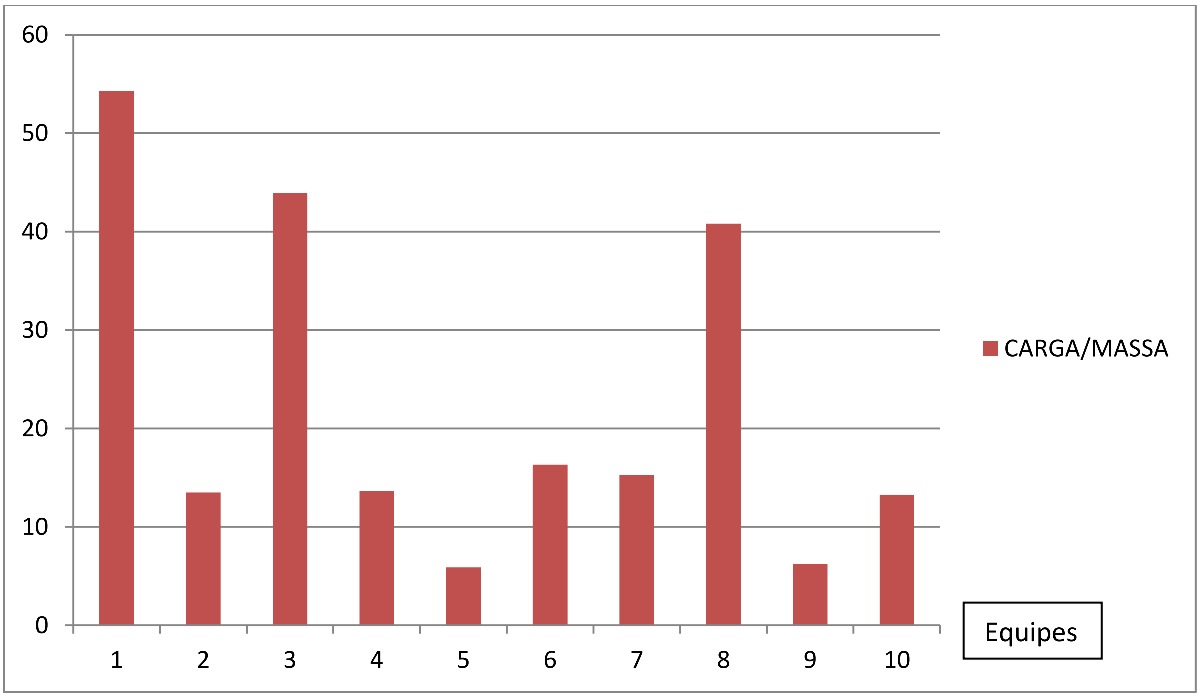
Quadro 3: Resultados da competição de Pontes de Macarrão

Nº	COMPRIMENTO (cm)	LARGURA (cm)	ALTURA (cm)	MASSA DA PONTE (kg)	CARGA MÁXIMA SUPORTADA (kg)	RAZÃO ENTRE A CARGA SUPORTADA E MASSA DA PONTE
1	69	07	39	1,999	108,5	54,28
2	70	11	26	1,520	20,5	13,49
3	65	10	30	1,150	50,5	43,91
4	70	10	22	1,800	24,5	13,61
5	67	15	21	1,445	8,5	5,88
6	70	10	30	1,870	30,5	16,31
7	70	09	23	2,000	30,5	15,25
8	71	14	34	1,998	81,5	40,79
9	62	18	15	1,200	7,5	6,25
10	70	08	20	2,000	26,5	13,25

Fonte: Colégio Classe A

- A ponte da equipe 1 que ficou em 1º lugar, suportou uma carga 54,28 vezes a sua própria massa;
- A ponte da equipe 8 que ficou em 2º lugar, suportou uma carga 40,79 vezes a sua própria massa;
- A ponte da equipe 2 que ficou em 3ºlugar, suportou uma carga de 43,91 vezes a sua própria massa.

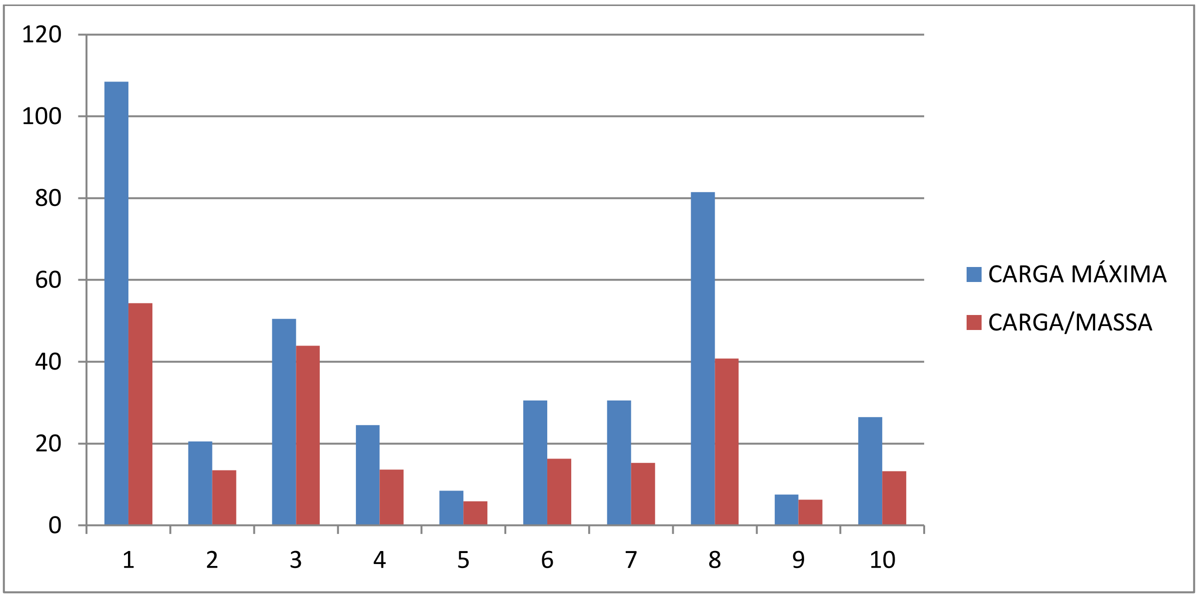
Gráfico 2: Razão entre carga suportada e a massa da ponte



Analisando por esse ponto de vista podemos concluir:

- Ficou confirmado que a ponte nº 01 foi realmente a ponte mais resistente, pois além de suportar uma maior quantidade de peso, também foi a ponte onde a razão carga suportada e massa foi a maior;
- No entanto, ficou constatado pelo quadro 2, que a ponte que ficou em 3º lugar, foi mais resistente que a ponte que ficou em 2º lugar, pois a sua razão entre a carga suportada e o sua massa foi maior que ponte que ficou em 2º lugar, como mostra no gráfico 3.

Gráfico 3: Comparação entre carga máxima e a razão carga suportada e a massa da ponte



5.1 A Premiação

Para a equipe que se sagrou campeã, recebeu como prêmio:

- Medalha de ouro para cada componente da equipe;
- Uma camiseta comemorativa do evento, para cada participante da equipe;
- Um jantar com os coordenadores do evento.

Para a equipe que ficou em segundo lugar:

- Medalha de prata para cada componente da equipe.

Para a equipe que ficou em terceiro lugar:

- Medalha de bronze para cada componente da equipe.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta do presente trabalho é uma contribuição para aumentar a aprendizagem de matemática, especificamente em geometria, com um experimento prático, tornando-a dinâmica e atrativa. Utilizando-se de alguns conhecimentos de triângulos e leis da física, em que o aluno ao invés de decorar uma série de fórmulas, muitas vezes, sem sentido para ele, coloca em prática os conhecimentos adquiridos por meio da construção de pontes de macarrão. Priorizou-se o ensino lógico dedutivo no qual o professor ministrou seus conteúdos seguidos de uma aplicação, oferecendo ao aluno um passo a passo de conhecimentos, tornando cada vez mais prazeroso o processo de ensino-aprendizagem. Alcançando assim seu objetivo, que é ensinar com qualidade, e o aluno por outro lado, aprender conteúdos que ficarão fixos em sua mente por um período de tempo maior.

Em entrevista a uma revista de grande circulação no Brasil, Andreas Schleicher diretor da OCDE, órgão internacional que estuda e avalia o desenvolvimento da educação em vários países, responsável também pelo teste PISA *Programme for International Student Assessment* (Pisa) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países. Na visão de Schleicher (2014)

> “Em um momento em que se valoriza a capacidade de análise e síntese, os brasileiros são ensinados na escola a reproduzirem conteúdos quilométricos, sem muita utilidade prática. Enquanto o Brasil foca no irrelevante, os países que oferecem bom ensino, já entenderam que uma sociedade moderna precisa contar com pessoas de mente mais flexível. Elas devem ser capazes de raciocinar sobre questões das quais jamais ouviram falar – no exato instante em que se apresentam”.

Com base no depoimento de Schleicher, precisamos intensificar esforços com a finalidade de aumentar o raciocínio de nossos alunos a fim de obtermos mentes mais flexíveis, propondo criar novas atividades experimentais.

Ao enfatizarmos aos alunos que o uso de triângulos em determinadas estruturas é de fundamental importância para a realização de muitas obras, houve uma grande motivação em se construir pontes de macarrão, utilizando as várias formas triangulares existentes. Podemos concluir que obtivemos êxito em nossos esforços, principalmente ao analisarmos o resultado do experimento. Das dez pontes de macarrão que se inscreveram para a competição, nove utilizaram em sua estrutura formas triangulares, a única ponte que usou apenas formas quadrangulares, obteve um resultado pouco satisfatório, ficando em último lugar na classificação geral.

Esta atividade foi capaz de unir professores de diversas áreas, como Matemática, Física, História e Arte, pois o caminho mais seguro para fazer a interdisciplinaridade baseia-se em uma situação prática, além de trazer para a escola a família dos alunos, que teve uma participação intensa, proporcionando um relacionamento ativo entre professores, alunos, escola e família.

O ensino de Matemática deve visar a aceleração do raciocínio e desenvolvimento do pensamento geométrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a estabelecer relações entre textos descritivos e figuras geométricas, envolvendo observações sobre diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações. Para Sales (2010)

> O livro didático é um recurso indispensável para a aprendizagem, mas é vital reconhecer também que o modelo tradicional de ensino, ainda muito utilizado pelos educadores nas escolas de ensino fundamental e médio, torna difícil para o aluno relacionar o conteúdo abordado com sua realidade. Isto ocorre porque muitos dos livros adotados apresentam conceitos poucos esclarecedores e que nem sempre contribui para a percepção da complexidade das ciências pelos alunos. É vital que os educadores diminuam a distância entre a realidade do aluno e o conteúdo de ciências por apresentá-lo de maneira atrativa e dinâmica, levando o educando a perceber que os fenômenos naturais fazem parte do cotidiano e que é possível compreendê-los.

Segundo os PCNs a aprendizagem pode ser simplificada e facilitada por meios de trabalhos experimentais, onde os princípios teóricos estudados em sala de aula são seguidos de experimentos concretos. Assim podem-se moldar os métodos utilizados em sala de aula de acordo com a realidade de cada classe e de cada escola a fim de se conseguir uma aprendizagem significativa.

Experiências concretas no qual os alunos participam, faz com que aumentem seus interesses pelos estudos, tornando-os mais prazerosos. Com isso é necessário que os professores façam pesquisas sobre relações entre teorias e práticas para desenvolver os trabalhos experimentais. As possibilidades de pesquisa neste campo são amplas.

> “Efetivar uma prática pedagógica diferenciada, promovendo o atendimento às diferentes necessidades dos alunos; utilizar técnicas e instrumentos de avaliação da aprendizagem que deem mais liberdade aos alunos [...] estabelecer pequenas metas a serem alcançadas – que contemplem a formação da competência e habilidades essenciais aos novos tempos – que possam desencadear ações que tenham por perspectivas utopias fundamentadas na prática de uma escola pública verdadeiramente mais democrática. (PEREIRA & SOUZA, 2004, p. 204).”

Quando o aprendizado é organizado de maneira adequada e eficaz, resultará em desenvolvimentos mentais que ampliam a visão de mundo do aluno e movimenta os inúmeros processos de crescimento intelectual.

Assim, concluímos que é recomendável que atividades escolares devem ser acompanhadas de cenários práticos, capazes de tornar a aprendizagem algo significativo, onde o educando possa desenvolver suas habilidades de compreensão. Na visão de Melo (2012),

> Muitos professores preparam aulas práticas com materiais caseiros e de baixo custo. Atividades práticas podem ser desenvolvidas em qualquer sala de aula, sem a necessidade de instrumentos ou aparelhos sofisticados não havendo a necessidade de um ambiente com equipamentos especiais para a realização de trabalhos experimentais. A participação dos alunos é importante e as Feiras de Ciências, programadas com antecedência, funcionam como um grande laboratório, onde crianças têm a oportunidade uma vez no ano de vivenciar a concretização de alguns experimentos.

A longa e interminável busca pelo saber, move o homem na direção de seus sonhos, fazendo com que transponha todas as dificuldades encontradas, e com modelos de ensino aprendizagem como este, levará nossos alunos a enxergar que para todos os problemas teremos soluções, talvez algumas mais fáceis e outras mais complexas.

7 REFERÊNCIAS

ALARSA, F. **Fundamentos da Astronomia**. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Aristarco_de_Samos. Acesso em 12 out. 2015.

ANDRINI, A, **Praticando Matemática**. Vol. 3 e 4. São Paulo: Editora do Brasil, 1989.

BIANCHINI, E. **Construindo Conhecimentos em Matemática**. Vol. 3 e 4. São Paulo: Moderna, 2000.

CALADO, F. M. **O Valoroso Lucideno e Triunfo da Liberdade**. Recife: Fundarpe, 1989.

DUANE, W. R. **Erathosthenes Geography. Fragments Collected and Translated**. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Erat%C3%B3stenes. Acesso em 08 out. 2015.

GIOVANNY, M. S. **A conquista da Matemática**. São Paulo :FTD, 2002.

Google. **Mobilidade Humana**. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: https://mobilidadehumana.wordpress.com/2014/05/07/pontes-da-historia-e-do-mundo/ Acesso em: 04 our. 2015.

IEZZI, G., et al. **Fundamentos de Matemàtica Elementar. Vol. 9**, Geometria Plana. Sao Paulo: Atual, 199

JÚNIOR, O. G. **Matemática por Assunto.Vol. 6**, Geometria Plana e Espacial. São paulo: Scipione, 1998.

MELO, E. S. **Atividade Experimental na Escola, 2012.**

MINAS GERAIS, Secretaria de Estado de Educação. **Conteúdo Básico Comum – Matemática**. Educação Básica - Ensino Fundamental, 2006.

MORGADO, A. C. ; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1973.

NAME, M. A. **Tempo de Matemática**. Vol. 3 e 4. São Paulo: Editora do Brasil,1996.

NEVES, M. S.; CABALLERO, C.; MOREIRA, M. A. **Repensando o papel do trabalho experimental, na aprendizagem da física, em sala de aula -** um estudo exploratório. Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre, 2006.

ONO, M. K. I. ; BONFIM, R. L. ; SANTOS, T. S. **Matemática 9º ano**. São José dos Campos: Poliedro, 2015.

PEREIRA, L. C.; SOUZA, N. A. Concepção e prática de avaliação: um confronto necessário no ensino médio. **Estudos em Avaliação Educacional: revista da Fundação Carlos Chagas**, São Paulo, n. 29, p. 191-208, 2004.

ROQUE, T. **História da Matemática:** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SALES, D. M. R.; SILVA, F. P. **Uso de Atividades Experimentais como Estratégia de Ensino de Ciências.** Encontro de Ensino, pesquisa e extensão da Faculdade SENAC, 2010

PONTE, J. P. ; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 1a Edição, 2a Reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2006

PAIVA, M. **Matemática.** Volume Único. São Paulo: Moderna, 2005.

APÊNDICE A

Acompanhando uma Equipe na Construção da Ponte de Macarrão.

Figura: 5.1 Equipe elaborando o projeto em papel jornal

Figura: 5.2 Parte do projeto elaborado pela equipe.

Figura: 5.3 Marcando o tamanho do macarrão para cortá-lo

Figura: 5.4 Amarrando os fios de macarrão formando feixes

Figura: 5.5 Colando um feixe a outro utilizando durepoxi

Figura: 5.6 Posando para foto oficial com a ponte

Figura: 5.7 Equipe recebendo a premiação de 2º colocada

Figura: 5.8 Foto com os coordenadores

APÊNDICE B

Medições das Pontes de Macarrão no Laboratório

Figura: 5.9 Aferindo peso e medidas no laboratório

Figura: 5.10 Em reunião com os líderes de cada equipe no laboratório

Figura: 5.11 Aferindo peso e medidas no laboratório

Figura: 5.12 Aferindo peso e medidas no laboratório

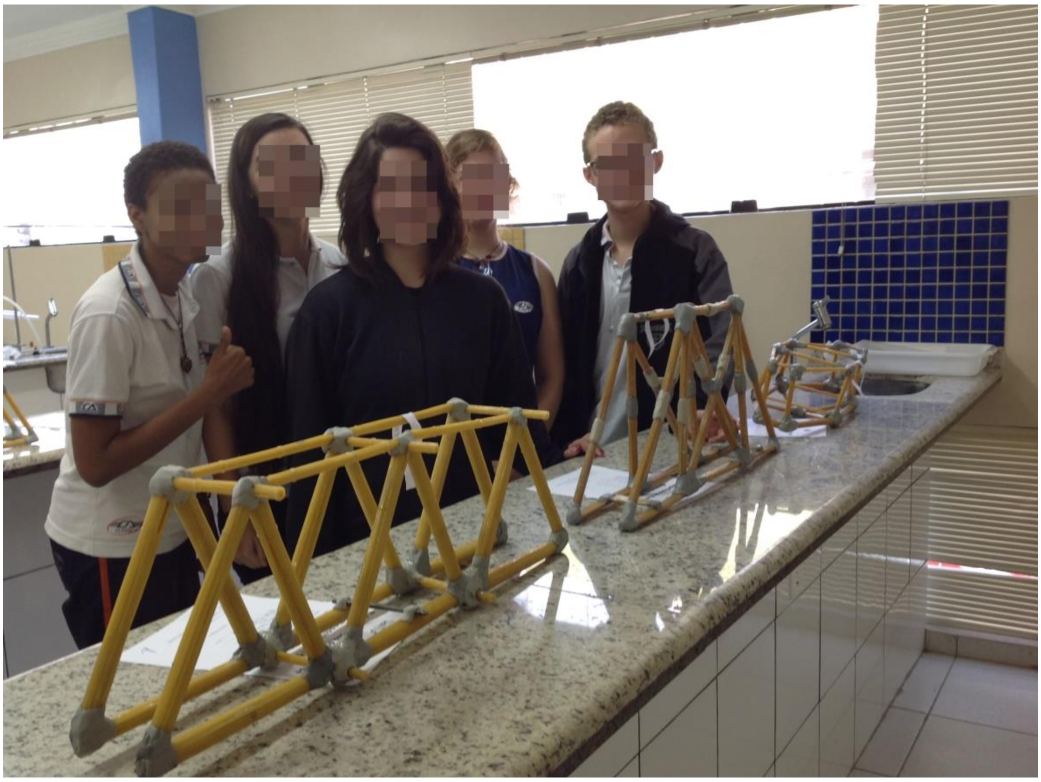


Figura: 5.13 Aferindo peso e medidas no laboratório

Figura: 5.14 Aferindo peso e medidas no laboratório

APÊNDICE C
Competição de Pontes de Macarrão

Figura: 5.15 Exposição das medalhas e camisetas

Figura: 5.16 Suporte de colocação das pontes

Figura: 5.17 Exposição das pontes

Figura: 5.18 Equipe posando com a ponte

Figura: 5.19 Equipe posando com a ponte

Figura: 5.20 Equipe posando com a ponte

Figura: 5.21 Equipe posando com a ponte

Figura: 5.22 Equipe posando com a ponte

Figura: 5.23 Equipe posando com a ponte

Figura: 5.24 Cobertura da imprensa

Figura: 5.25 Foto da competição “Pontes de Macarrão”

Figura: 5.26 Foto da competição “Pontes de Macarrão”

Figura: 5.27 Foto da competição “Pontes de Macarrão”

Figura: 5.28 Coordenadores do projeto “Pontes de Macarrão”

Figura: 5.29 Entrega dos alimentos arrecadados na inscrição da competição

Figura: 5.30 Entrega dos alimentos arrecadados na inscrição da competição

Figura: 5.31 Jantar de comemoração com as equipes vencedoras e os coordenadores

Figura: 5.32 Jantar de comemoração com as equipes vencedoras e os coordenadores.

Figura: 5.33 Jantar de comemoração com as equipes vencedoras e os coordenadores.