



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**GILBERTO DE SOUZA DAMIÃO**

**O ENSINO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS COM O SOFTWARE EDUCATIVO  
GEOGEBRA**

**MOSSORÓ/RN  
2015**

**Gilberto de Souza Damião**

**O ENSINO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS COM O SOFTWARE EDUCATIVO  
GEOGEBRA**

Dissertação apresentada a Universidade  
Federal Rural do Semiárido – UFRSA,  
campus Mossoró para obtenção do título  
de mestre em matemática.

Orientador: Prof.<sup>o</sup> Doutor Antonio Ronaldo Gomes Garcia.

Co-orientador: Prof.<sup>o</sup> Mestre Ricardo Antônio Faustino da Silva Bras.

**Mossoró – RN  
2015**

Catálogo na Fonte

Catálogo de Publicação na Fonte. UFERSA - BIBLIOTECA CENTRAL ORLANDO TEIXEIRA - CAMPUS MOSSORÓ

Damião, Gilberto de Souza.

O ensino dos quadriláteros notáveis com o software educativo  
GeoGebra / Gilberto de Souza Damião. - Mossoró, 2015.

60f: il.

1. Geometria. 2. Quadriláteros. 3. GeoGebra. I. Título

RN/UFERSA/BOT/979  
D1580

CDD 516.15


GILBERTO DE SOUZA DAMIÃO

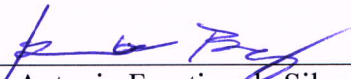
**O ENSINO DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS COM O SOFTWARE  
EDUCATIVO GEOGEBRA.**

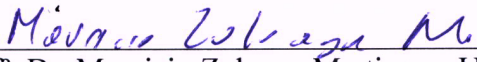
Dissertação apresentada a Universidade  
Federal Rural do Semi-Árido –  
UFERSA, Campus Mossoró para  
obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

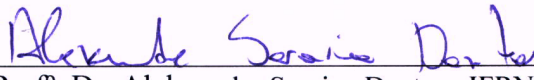
APROVADA EM: 10 / 09 / 2015

**BANCA EXAMINADORA**

  
\_\_\_\_\_  
Prof.º Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA  
Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof.º Ms. Ricardo Antonio Faustino da Silva Braz - UFERSA  
Primeiro Membro

  
\_\_\_\_\_  
Prof.º Dr. Mauricio Zuluaga Martinez – UFERSA  
Segundo Membro

  
\_\_\_\_\_  
Prof.º Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN  
Terceiro Membro

MOSSORÓ/RN, 2015.

Dedico este trabalho a todos os meus familiares e colegas professores de matemática que, de uma maneira ou de outra, tentam dar o seu melhor em sala de aula e que fazem isto com compromisso, satisfação e competência, tentando, a cada dia, superar as dificuldades e barreiras que são impostas pelo sistema.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus por ter me dado forças, determinação, sabedoria e tudo aquilo que precisei nesta caminhada.

A todos os meus familiares que me incentivaram e sempre acreditaram em minha capacidade, em especial, a meus pais José Damião Filho e Maria de Lourdes de Souza e minha esposa Samantha Ludmila Assunção Peixoto Damião e minhas filhas Rebeca Peixoto Damião e Valentina Peixoto Damião.

A todos os meus colegas do PROFMAT tanto docente quanto discente e, por fim, todos que direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e conclusão deste trabalho o meu muito obrigado.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Demonstração do 5º Postulado.....	20
Figura 2. Demonstração do Axioma de Incidência.....	21
Figura 3. Polígonos Convexos e Côncavos.....	23
Figura 4. Representação de um Trapézio.....	24
Figura 5. Tipos de Trapézio.....	24
Figura 6. Representação de um Paralelogramo.....	25
Figura 7. Representação de um Retângulo.....	25
Figura 8. Representação de um Losango.....	25
Figura 9. Representação de um Quadrado.....	26
Figura 10. Demonstração de Triângulos Congruentes.....	26
Figura 11. Demonstração de Congruência de Triângulos( Caso: LAL ).....	27
Figura 13. Demonstração de Congruência de Triângulos( Caso: LLL ).....	28
Figura 14. Demonstração de Congruência de Triângulos( Caso: LAA <sub>o</sub> ).....	28
Figura 15. Trapézio Qualquer.....	29
Figura 16. Trapézios Isósceles.....	29
Figura 18. Demonstração da 2ª Propriedade dos Paralelogramos.....	31
Figura 19. Demonstração da 2ª Propriedade dos Paralelogramos( b ).....	31
Figura 20. Demonstração da 3ª Propriedade dos Paralelogramos.....	32
Figura 21. Demonstração da 3ª Propriedade dos Paralelogramos( b ).....	32
Figura 22. Demonstração da 3ª Propriedade dos Paralelogramos( c ).....	33
Figura 23. Demonstração da 1ª Propriedade dos Retângulos.....	33
Figura 24. Demonstração da 1ª Propriedade dos Retângulos.....	34
Figura 25. Demonstração da 1ª Propriedade dos Losangos.....	35
Figura 26. Demonstração da 3ª Propriedade dos Paralelogramos( d ).....	35
Figura 27. Demonstração da 2ª Propriedade dos Retângulos.....	36

<b>Figura 28. Base Média de um Triângulo.....</b>	<b>36</b>
<b>Figura 29. Demonstração da Base Média de um Triângulo.....</b>	<b>37</b>
<b>Figura 30. Base Média de um Trapézio.....</b>	<b>38</b>
<b>Figura 31. Demonstração da Base Média de um Trapézio.....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 32. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>41</b>
<b>Figura 33. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>42</b>
<b>Figura 34. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>42</b>
<b>Figura 35. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 36. Imagem do Geogebra.....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 37. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 38. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>44</b>
<b>Figura 39. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>44</b>
<b>Figura 40. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 41. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 42. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>46</b>
<b>Figura 43. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>46</b>
<b>Figura 44. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 45. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 46. Imagem do GeoGebra.....</b>	<b>48</b>



## **LISTA DE SIGLAS**

**PCN's**

**Parâmetros Curriculares Nacionais**

## RESUMO

A justificativa para a realização do trabalho é a dificuldade que é percebida pelos estudantes em todos os níveis na compreensão de definições geométricas euclidianas, o qual se usou o GeoGebra que tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. O texto a seguir relata uma pesquisa que abordou a definição de objetos geométricos a partir dos recursos computacionais que permitem o deslocamento de figuras e a análise das propriedades inerentes ao posicionamento. No entanto a experiência foi realizada em uma escola pública do município de Fortaleza localizada na regional VI, do Estado do Ceará, para trabalhar as definições dos quadriláteros notáveis com um grupo de alunos do oitavo ano do ensino fundamental, utilizando o software GeoGebra. Para tanto, as tentativas e reflexões a diversos Quadriláteros, em especial os Notáveis, serão construídos no GeoGebra, o qual permite buscar soluções por tentativas, conjecturas e observações, bem como analisar as relações entre as propriedades dos quadriláteros. Objetivo do trabalho com o GeoGebra foi detectar se, os vinte e cinco alunos do oitavo ano da turma *C*, teriam maior desempenho com aulas teóricas em sala de aula e aulas práticas no laboratório de informática sobre os quadriláteros notáveis. Faremos uma comparação com o desempenho deles em relação aos alunos do oitavo ano da turma *D*, onde terão apenas aulas teóricas. Esperamos que com o reforço na aula prática, da construção dos quadriláteros passo a passo utilizando o software educacional GeoGebra, proporcione um melhor entendimento e uma melhor fixação em relação às propriedades e definições. Portanto, manipulando ângulos e medidas, para perceber a diferença entre a figura e o desenho, a dinamização propiciada pelo software em sua manipulação contribui, ainda, para que os alunos percebam as generalizações e particularizações dos conceitos de quadriláteros, na transformação de um quadrilátero em um losango ou retângulo, identificando e entendendo os axiomas de Euclides para a Geometria Plana. Também se avalia as situações de construções geométricas a partir do aprendizado geométrico e a mediação entre aluno e aluno, professor e aluno ocorrendo interações, análises e validação de conceitos. Os resultados obtidos evidenciam a validação de propriedades dos quadriláteros por parte dos estudantes e a conceituação geométrico sendo o software como instrumento mediador para o ensino e a aprendizagem da geometria. Muitos autores e estudiosos no assunto contribuíram para a realização desse estudo onde pode ser citado BOYER (1996), ROQUE (2012), PAVANELLO (1993) e LIMA (1995).

**Palavras-chaves:** Geometria; Quadriláteros; GeoGebra

## ABSTRACT

The rationale for conducting the work is the difficulty which is perceived by students at all levels in understanding Euclidean geometric definitions which used GeoGebra has a didactic advantage of providing at the same time, different representations of the same object that interact between is. O following text reports a survey that addressed the definition of geometric objects from computer resources that allow the movement of figures and analysis of the inherent positioning properties. However the experiment was conducted in a public school in Fortaleza located on the region VI, Ceará State, to work the definitions of outstanding quads with a group of students of the eighth grade of elementary school, using the GeoGebra software. For this purpose, attempts and reflections to various Quads, especially the Notables, will be built in GeoGebra, which allows finding solutions by trial, conjecture and observations and to examine the relationships between the properties of quads. Objective of working with GeoGebra was to detect if the twenty-five students in the eighth grade class C, would have greater performance with lectures in the classroom and practical classes in the computer lab on the remarkable quads. We will make a comparison with their performance against the eighth year of the D class students, which will only lectures. We hope that with the reinforcement in the practice session, the construction of quads step by step using the GeoGebra educational software; provide a better understanding and a better fixing in relation to the properties and settings. Therefore, manipulating angles and measures to realize the difference between the figure and the design, dynamic provided by the software in its handling also contributes so that students understand generalizations and particularizations the concepts of quads, the transformation of a quadrilateral in a diamond or rectangle, identifying and understanding the axioms of Euclid for plane geometry. It also assesses the situations of geometric constructions from the geometric learning and mediation between student and student, teacher and student interactions occurring, analysis and validation of concepts. The results show the validation property of quads by students and geometric concept and the software as a mediating tool for teaching and learning geometry. Many authors and scholars on the subject contributed to the realization of this study which may be cited BOYER (1996) ROQUE (2012), PAVANELLO (1993) and Lima (1995).

**Keywords:**Geometry ;quads ; GeoGebra .

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>1. UM BREVE RELATO DA GEOMETRIA.....</b>	<b>16</b>
1.1 A Geometria Euclidiana.....	18
1.2 O Quinto Postulado.....	20
1.3 Axiomas da Geometria Euclidiana.....	21
1.3.1 Axioma de Incidência.....	21
1.3.2 Axioma de Ordem.....	21
1.3.3 Axioma Sobre Mediação de Segmentos.....	22
<b>2. FUNDAMENTOS DOS QUADILÁTEROS NOTÁVEIS.....</b>	<b>23</b>
2.1 Quadriláteros: e seus Elementos.....	23
2.1.1 Quadriláteros Notáveis – Definições.....	24
2.1.2 Congruência de Triângulos.....	26
2.1.3 Propriedades dos Paralelogramos.....	29
2.1.4 As Principais Propriedades dos Retângulos.....	30
2.1.5 As Propriedades do Losango: Diagonais Perpendiculares.....	33
2.1.6 Quadrado: Diagonais e Perpendiculares.....	35
2.1.7 As Bases Médias do Triângulo.....	36
2.1.8 As Bases Médias do Trapézio.....	38
<b>3. SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA.....</b>	<b>38</b>
3.1 Construção do Quadrado com o Software GeoGebra.....	39
3.2 Construção do Retângulo no Software GeoGebra.....	42
3.3 Construindo o Losango no Software GeoGebra.....	44
<b>RESULTADOS OBTIDOS.....</b>	<b>49</b>
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>51</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>53</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>54</b>

## INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, transformações no ensino-aprendizagem da geometria cresceram ao redor do mundo, devido às dificuldades encontradas e ao baixo desempenho mostrado pelos alunos em geometria. A preocupação de professores e pesquisadores tem desenvolvido maneiras no qual será exposto nesse estudo, que façam o aluno se interessar e envolver-se no estudo da geometria.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática, no ensino fundamental, pois, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p. 55)

Desta forma, ministrar conteúdos de geometria nas séries iniciais, tem o objetivo de resolver problemas do cotidiano. E, posteriormente, um suporte para o entendimento das definições e demonstrações mais aprofundadas. No Brasil, alguns argumentos podem ser usados para tentar justificar essas dificuldades, pois relatos de pesquisas realizadas por vários autores, entre eles: Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) constataram um abandono do ensino da geometria nas aulas de matemática.

Por esse motivo o ensino-aprendizagem da geometria costuma ser muito desfavorecido na educação básica, em algumas ocasiões e dependendo da escola o último conteúdo a ser abordado no ano letivo, isso quando há tempo para esta abordagem. Soma-se a essa enfermidade o fato de que os autores dos livros didáticos utilizam uma sequência não muito correta na distribuição dos conteúdos, sem a preocupação em formalizar e aprofundar os conhecimentos básicos que são necessários ao pleno desenvolvimento dos alunos, para posterior entendimento das demonstrações deles decorrentes em questões mais avançadas. Além disso, alguns professores podem não apresentar uma formação inicial adequada para o ensino de geometria, com seus axiomas e teoremas, muito menos sabem da existência de outras geometrias.

Um fator que poderia amenizar essa falha, durante as séries do Ensino Fundamental seria a introdução de construções geométricas simples. O professor

poderia utilizar apenas os instrumentos de desenhos ditos euclidianos (régua, compasso e transferidor) e, nas escolas que possuem laboratório de informática, as construções poderiam ter o auxílio dos softwares de geometria dinâmica. Dentre vários existentes pode-se utilizar o GeoGebra por se tratar de um software gratuito, que pode ser acessado, pela internet, ou instalado em computadores, *tablets* e *smartfones*.

Nossa pesquisa foi desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública no município de Fortaleza no estado do Ceará, cuja finalidade foi trabalhar com as definições e propriedades dos quadriláteros notáveis utilizando um aplicativo da geometria dinâmica como o GeoGebra sendo uma ferramenta didática, no qual foram planejados encontros os quais foram aplicados no laboratório de informática da Escola fundamental e Médio Deputado Paulino Rocha, permitindo o uso do software GeoGebra com o a finalidade de um maior entendimento dos alunos em relação a definição de cada quadrilátero a partir de suas propriedades.

Na relação ensino e aprendizagem, de conceitos matemáticos, temos um veículo que pode favorecer o saber em sua construção e esse veículo é a intencionalidade que valida o mesmo, de forma significativa. Nesse caso, o software GeoGebra poderá atuar como ferramenta didática de facilitação as reflexões e posterior entendimento sobre definições e construções geométricas porque permite uma facilidade na manipulação dos objetos a serem construídos, preservando as propriedades de definições dos conteúdos matemáticos.

Das justificativas que levaram a realizar esta experiência foi o fato de se perceber uma carência no uso de tecnologias em relação aos professores de matemática das Escolas Públicas. Além do que os quadriláteros notáveis foram escolhidos como tema devido à dificuldade que os alunos têm com suas definições formais, especialmente com relação às suas particularizações ou generalizações.

O GeoGebra é um software que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001 na Universidade de Salzburg com o intuito de prestar apoio didático ao ensino de matemática. No software é possível fazer construções geométricas de maneira aproximada ao *Paint*, um software do Windows, ou seja, apenas utilizando o mouse e desenhando figuras da maneira desejada.

Além disso, os comandos do Software GeoGebra, que são necessariamente as ferramentas utilizadas nas construções com régua e compasso, fornecem os subsídios necessários para traçar quadriláteros notáveis, e é justamente a partir deles que a atividade foi desenvolvida.

Em relação ao trabalho desenvolvido procuramos reforçar as habilidades dos alunos com o manuseio do Software GeoGebra na construção dos quadriláteros notáveis. Desenvolvendo no aluno o próprio manuseio do aplicativo bem como mostrar na prática o desenvolvimento dos quadriláteros e as suas propriedades.

Selecionamos como sujeitos de nossa dissertação alunos do ensino básico de uma escola da rede pública estadual localizada no município de Fortaleza. Percebemos um acentuado despreparo dos mesmos em relação aos conteúdos geométricos básicos devido aos baixos rendimentos constatados nas atividades propostas em sala de aula. Essa falha que pode ser considerada gritante é resultado de um ensino deficitário, acumulado ao longo das séries do Ensino Fundamental.

Mediante a essa constatação, o trabalho em questão tem como um dos objetivos a construção de um pequeno modelo de estudos, a ser aplicado no oitavo ano do ensino fundamental, tendo a base, inicialmente a forma intuitiva, uma descrição dos principais axiomas da geometria euclidiana plana e uma introdução às construções de figuras geométricas utilizando os instrumentos euclidianos e o Software GeoGebra. Para finalizar, esse nosso objetivo, são propostas atividades que visam à aplicação dos referidos axiomas na obtenção de resultados deles decorrentes.

Nesse trabalho o estudo será dividido em três capítulos, sendo o primeiro capítulo relatando a parte histórica da geometria e sua evolução, também a contribuição de Euclides Alexandria<sup>1</sup> através dos axiomas e o quinto postulado.

O capítulo dois vai tratar da fundamentação e definição dos quadriláteros notáveis e suas propriedades.

---

<sup>1</sup>Euclides era um matemático grego que viveu em Alexandria, Egito, provavelmente durante o reinado de Ptolomeu I (323 – 283 a.C). Ele é frequentemente considerado como o “pai da Geometria”.

No terceiro capítulo, iremos abordar a construção dos quadriláteros notáveis, os comandos de ensinamentos para o manuseio do software bem como ensinado aos alunos ou outros interessados no assunto.

Desta forma foi colocado uma lista de anexos com exercícios a serem resolvidos em relação ao Software GeoGebra e também uma lista de exercícios resolvidos através do Software.



## 1. UM BREVE RELATO DA GEOMETRIA

É muito comum encontrarmos relatos em livros didáticos que a geometria surgiu às bordas do Nilo, devido às enchentes e à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas entre aqueles que haviam sofrido prejuízos. Esta hipótese, segundo Lima (1991) tem sua origem nos escritos de Heródoto.

A Geometria é uma ciência muito antiga. As concepções geométricas não conhecidas já eram dominadas no Egito antigo, na Babilônia e na Grécia. Na forma como se conhece, pode-se estabelecer o seu ponto inicial na Grécia, no tempo de Ptolomeu I, quando Euclides escreveu os *Elementos* (por volta do ano 300 a.C.).

Euclides e seus predecessores reconheceram o que nos dias de hoje todo estudante de Filosofia sabe: que não se pode provar tudo. Na construção de uma estrutura lógica, uma ou mais proposições devem sempre ser admitidas como axiomas a partir dos quais todas as outras são deduzidas.

Pelo tempo de Euclides, o que hoje se chama de geometria euclidiana estava totalmente desenvolvida. De fato, o trabalho de Euclides foi aquele de um compilador que reuniu os teoremas conhecidos, já demonstrados por seus predecessores, e os colocou em único texto com uma apresentação unificada.

Euclides ficou famoso pela concepção do livro em si, considerado como o primeiro tratado científico, modelo para todos os outros em qualquer ramo da ciência, e pela escolha que fez dos axiomas.

Os primeiros contatos com a geometria são anteriores aos sistemas de números escritos. Muitos povos antigos deixaram evidência de seu interesse por padrões retidos, simetrias e formas na forma de padrões geométricos decorando seus objetos, estruturas e residências.

Segundo Eves (1992), as primeiras considerações do homem a respeito da geometria foram feitas observando a natureza, denominadas descobertas geométricas subconscientes.

De acordo com Boyer (1996), afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever.

Os problemas práticos da geometria devem ter surgido nos projetos de construção muito antes de eles serem registrados na forma escrita. Os sumérios, os babilônios e os egípcios tornaram-se grandes adeptos do trabalho com a geometria de formas bidimensionais e objetos tridimensionais, calculando distâncias, áreas e volumes. Documentos de aproximadamente 3100 a.C. relevam que os egípcios e babilônios já tinham algumas regras matemáticas para medir extensões de terrenos e planejar construções. A grande pirâmide de Gizé foi construída por volta de 2650 a.C., demonstrando que os egípcios já tinham um bom domínio da geometria.

Os egípcios precisavam ser capazes de calcular áreas porque as inundações sazonais no Nilo apagavam as divisas das propriedades. Precisava-se de marcas e técnicas de pesquisa para restaurá-las corretamente. Desta forma os geômetras egípcios às vezes eram chamados de “*esticadores de cordas*” devido à maneira como mediam e marcavam distâncias e formas usando cordas. As mesmas técnicas, sem dúvida, serviram igualmente bem para demarcar extensões de terreno para projetos de construção, bem como recuperar a terra que foi inundada.

De acordo Pitombeira (2012) um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.E.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, a partir da semelhança existente entre as razões desta altura, com sua sombra e, de sua própria altura com sua própria sombra.

O primeiro documento matemático conhecido é o papiro de Ahmes (às vezes chamado de papiro Rhind), do Egito. Ele foi escrito pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C, copia de um texto mais antigo, escrito aproximadamente 200 anos antes, que por si só deveria conter material ainda mais antigo. Trata-se de uma peça de 33 cm de altura por 5 metros de comprimento (1 pé por 18 pés).

O papiro apresenta oitenta e quatro problemas matemáticos, abrangendo tópicos em aritmética, álgebra, geometria e também pesos e medidas. Em relação a

alguns problemas, são verificadas apresentações estritamente práticas, por exemplo, um campo redondo tem um diâmetro de 9kbet. Qual é a área? O chamado papiro de Moscou, da mesma data, inclui instruções para calcular o volume de parte de uma pirâmide..

A pequena quantidade de escritos matemáticos que sobreviveram vem do fato de que muitos foram escritos em papiros, pois os mesmo são muito frágeis. O povo da Mesopotâmia, o vale fértil drenado pelos rios Tigres e Eufrates, escreveu em tábuas de argila que eles cozeram ao fogo. Estas tábuas duram mais de dez mil anos e sobreviveram com o tempo. Uma tábua de argila da Babilônia datando de aproximadamente 1800-1650 a.C. foi interpretada como apresentando cálculos para resolver o problema da hipotenusa de um triângulo retângulo.

## 1.1 A Geometria Euclidiana

O mais famoso matemático de todos os tempos, Euclides de Alexandria, reuniu e registrou a herança da antiga geometria, codificando e estendendo-a em seus elementos por volta de 300 a.C. Nessa época, os gregos já haviam descoberto muitas das curvas-padrão (elipse, parabólica, hipérbole e outras), uma introdução do cálculo integral no método de exaustão e métodos para determinar o volume de um cone e de uma esfera. Embora Platão não fosse ele próprio um matemático, sua academia em Atenas era o centro do mundo matemático e ajudou a cristalizar a distinção entre matemática pura e as aplicações práticas dos números.

Os elementos de Euclides não apenas demonstram a matemática dos gregos antigos, mas também seu desenvolvimento do método lógico. Euclides apresenta cinco axiomas e cinco noções comuns, e deduziu destes várias centenas de teoremas e provas, exemplificando o princípio da dedução, lógica que perdurou pelos séculos.

### Os Axiomas:

- 1 - Coisas iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- 2 - Se iguais são adicionados a iguais, os totais obtidos são iguais.
- 3 - Se iguais são subtraídos de iguais, os totais obtidos são iguais.

- 4 - Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- 5 - O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

**Os postulados eram:**

1. Existe uma única reta contendo dois pontos dados.
2. Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em todas as direções.
3. Existe uma circunferência com quaisquer centro e raio dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta intercepta outras duas retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, interceptam-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Um sistema axiomático consiste num conjunto de verdades acerca de uma determinada realidade, organizado de tal forma que todos os conceitos são definidos a partir de alguns poucos conceitos básicos, chamados termos primitivos, os quais não se definem e são conhecidos intuitivamente. Esses conceitos são então, articulados por meio de algumas proposições primitivas, chamados axiomas, que não se demonstram, pois sua veracidade é evidente pela intuição que temos acerca do domínio em estudo. As demais proposições, os teoremas, são então obtidas por demonstração a partir dos axiomas.

O que Euclides faz é construir axiomáticamente a geometria plana, através do método axiomático. Mas o método axiomático consiste em que uma afirmação  $A_1$  é verdadeira, eu posso mostrar como esta afirmação segue logicamente de alguma outra afirmação  $A_2$ , a qual você acredita ser verdadeira. No entanto, se você não acredita em  $A_2$ , eu terei que repetir o processo utilizando outra afirmação  $A_3$ . Eu devo repetir este processo várias vezes até atingir alguma afirmação que você acredite ser verdadeira, um que eu não precise justificar.

## 1.2 O Quinto Postulado

“Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos.” (5º postulado de Euclides)

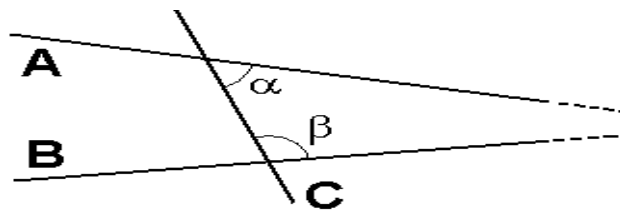


Figura 1. Demonstração do 5º postulado

O quinto postulado só é utilizado a partir da proposição 29 nos Elementos, sendo as 28 primeiras válidas para qualquer outra geometria onde sejam assumidos os quatro primeiros postulados, sendo assim é impossível, no âmbito da geometria euclidiana, provar a proposição 29 sem o 5º postulado.

Proposição 29: Quando uma reta corta duas paralelas, formam-se ângulos correspondentes iguais. Por definição, retas são paralelas quando não têm ponto em comum, ou seja, quando não se cruzam.

O quinto postulado tornou-se alvo de críticas dos Elementos no tempo de Euclides e durante 2.000 anos inúmeras tentativas foram feitas para demonstrá-lo. Uma das consequências foi à produção de vários outros equivalentes denominados substitutos. Afirmar que um postulado A é substituto do quinto postulado significa dizer que o desenvolvimento dos quatro primeiros postulados mais o postulado A coincide com Geometria Euclidiana. Além disso, tomando o postulado A é possível provar o quinto postulado, e vice-versa.

Segundo Eves (1992), ainda na época dos gregos, algumas dúvidas foram levantadas quanto à colocação desse enunciado, como um postulado e não como uma proposição passível de demonstração. Dentre as tentativas gregas de prová-lo, destacam-se as de Ptolomeu e Proclo.

### 1.3 Axiomas da Geometria Euclidiana

Neste momento vamos tratar algumas ideias dos axiomas da geometria Euclidiana. Iremos tratar dos axiomas de incidência e do axioma de ordem na reta.

**1.3.1. Axioma de incidência.** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contém.

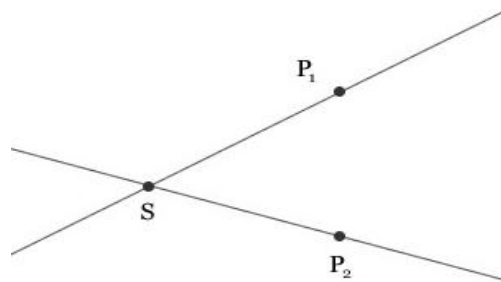


Figura 2. Demonstração do axioma de incidência

Axioma acima é da determinação das retas. Na forma informal, seria “dois pontos distintos determinam uma única reta”.

### 1.3.2. Axioma de ordem (na reta)

Os axiomas de incidência não garante que existem infinitos pontos na reta. No entanto, colocar axioma para garantir somente a existência de infinitos pontos não força a ser reta, pois pode haver “saltos” entre os pontos da reta como no conjunto  $\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}\}$ . Para evitar que tenha saltos, precisaria garantir que tenha pontos entre dois pontos quaisquer. Além disso, uma reta tem que continuar para ambos os lados, o que requer que tenha pontos fora do segmento. Os axiomas de ordem servem para este propósito.

O ponto B está entre os pontos A e C que será denotado por  $A*B*C$ , satisfazem os seguintes axiomas.

No próximo capítulo trata-se das definições e elementos dos quadriláteros.

### 1.3.3. Axiomas sobre Medição de Segmentos (ou Axiomas de Continuidade)

Os Axiomas sobre medição de segmentos ou Axiomas de continuidade estão classificados por:

- a) A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.
- b) Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que a diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.
- c) Se o ponto  $C$  está entre  $A$  e  $B$  então

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

- d) Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de ângulo é zero se e somente se ele é constituído por duas semirretas coincidentes.
- e) É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.
- f) Se uma semirreta  $s_{oc}$  divide um angulo  $\widehat{AOB}$  então temos:  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$

## 2. FUNDAMENTOS DOS QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Neste momento vamos tratar algumas ideias dos quadriláteros notáveis bem como as suas definições e elementos.

### 2.1 Quadriláteros: E seus Elementos

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  quatro pontos de um mesmo plano, todos distintos e três não colineares. Se os segmentos  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$  interceptam-se apenas nas extremidades, a reunião desses quatro segmentos é um quadrilátero.

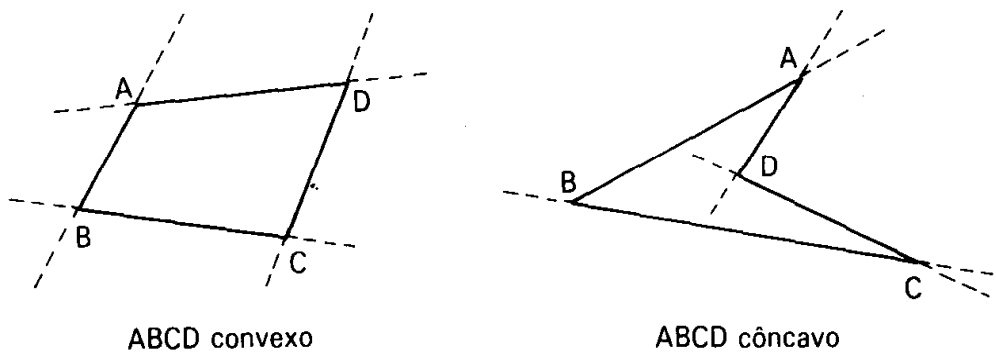


Figura 3. Polígonos convexos e côncavos

O Quadrilátero  $ABCD = ABCD = AB \cup BC \cup CD \cup DA$ , o quadrilátero é um polígono simples de quatro lados.

Alguns elementos dos quadriláteros são: os lados:  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ ; As diagonais do quadrilátero  $ABCD$ :  $\overline{AC}, \overline{BD}$ ; Os ângulos internos:  $\hat{A} = \widehat{DAB}, \hat{B} = \widehat{ABC}, \hat{C} = \widehat{BCD}$  e  $\hat{D} = \widehat{CDA}$ . Os vértices:  $A, B, C$  e  $D$ .

Podemos destacar como observação que a soma dos ângulos internos é  $360^\circ$  e a soma dos ângulos externos também é  $360^\circ$ .



### 2.1.1. Quadriláteros Notáveis – Definições

De acordo com a definição de Dolce e Pompeo (2005), os quadriláteros notáveis são os trapézios, retângulos, paralelogramos, os losangos e os quadrados.

O **Trapézio** é um quadrilátero plano convexo é um trapézio se, e somente se possui dois lados paralelos. Esta é a caracterização de um dos quadriláteros notáveis, o trapézio. O polígono fechado  $ABCD$  é um trapézio, isso implica que os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  ou  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$  são paralelos.

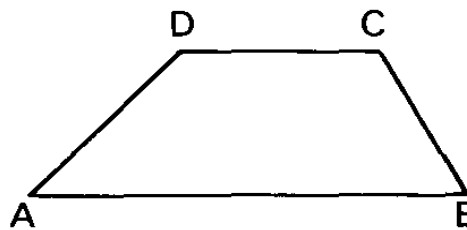


Figura 4. Representação de um trapézio

Os lados paralelos são as bases do trapézio. De acordo com a definição, decorrem os outros trapézios de acordo com seus lados não paralelos e são assim classificados:

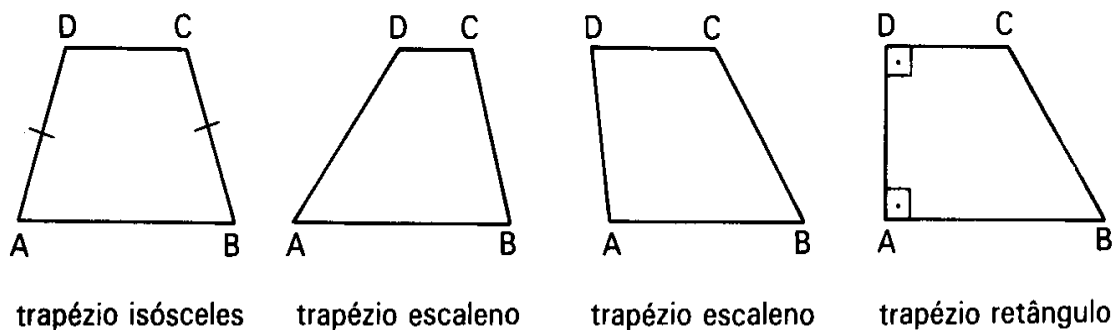


Figura 5. Tipos de trapézios

A figura acima apresenta os tipos de trapézios, de acordo com suas características temos os Trapézios Isósceles que possuem os lados congruentes, os Trapézios Escalenos são os que não possuem os lados congruentes e por último os Trapézios retângulos(ou bi- retângulo) são trapézios que tem dois ângulos retos.

Outra figura geométrica é o **Paralelogramo**. O Paralelogramo é um quadrilátero plano convexo se, e somente se, possui os lados opostos paralelos.

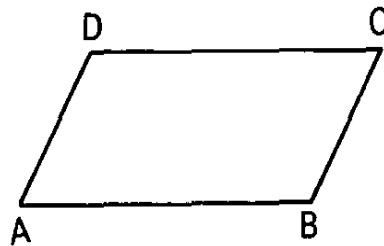


Figura 6. Representação de um paralelogramo

O polígono fechado ABCD é um paralelogramo se, e somente se, o lado  $\overline{AB}$  for igual a  $\overline{CD}$  e  $\overline{AD}$  for igual a  $\overline{BC}$ .

Um caso particular do paralelogramo é o **retângulo**. O retângulo é definido como um quadrilátero plano convexo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes.

Em linguagem matemática: ABCD é retângulo  $\Leftrightarrow (\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D})$ .

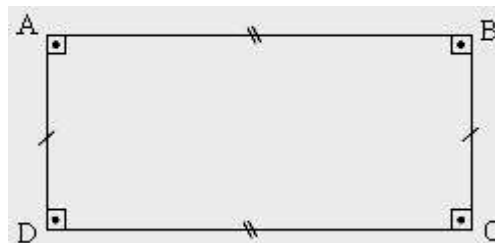


Figura 7. Representação de um retângulo

Outro paralelogramo é o **losango** que é definido como um quadrilátero plano convexo se, e somente se, possui os quatro lados congruentes.

Em linguagem matemática: ABCD é losango  $\Leftrightarrow (\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA})$ .

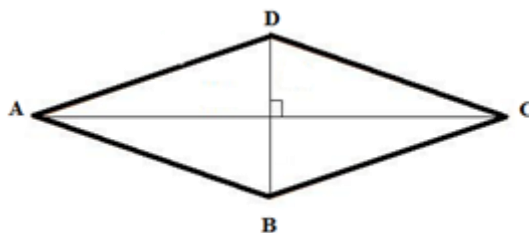


Figura 8. Representação de um losango

Já o **quadrado**, que também se enquadra nas definições do paralelogramo, do retângulo e do losango, é um quadrilátero plano convexo se, e somente se, possui os quatro ângulos congruentes e os quatros lados congruentes.

Em linguagem matemática:  $ABCD$  é quadrado  $\Leftrightarrow (\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$  e  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA})$ .

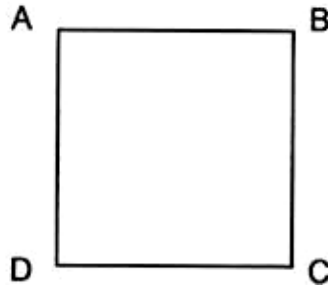


Figura 9. Representação de um quadrado

### 2.1.2 Congruência de Triângulos

Neste tópico vamos abordar os casos de congruências, pois nas demonstrações de algumas propriedades dos quadriláteros notáveis precisaremos recorrer a alguns casos de congruências de triângulos.

Um triângulo é congruente a outro se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que seus lados sejam ordenadamente congruente aos lados do outro e seus ângulos congruentes aos ângulos do mesmo triângulo. Observe a demonstração abaixo:

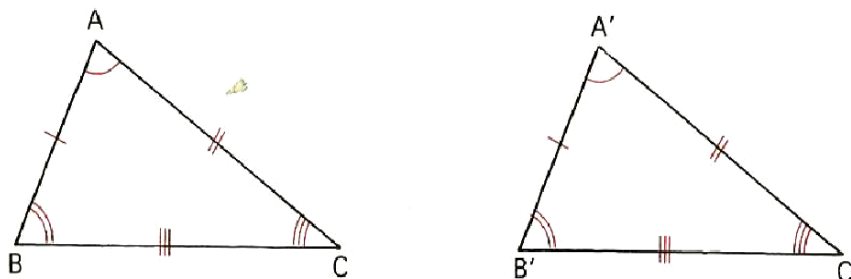


Figura 10. Demonstração de triângulos congruentes

$$\begin{aligned} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \leftrightarrow & \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & \hat{A} & \equiv \hat{A}' \\ & \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \text{e} & \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ & \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & \hat{C} & \equiv \hat{C}' \end{aligned}$$

Desta forma a relata-se que a congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

O conceito de congruência de triângulos propicia condições que vão satisfazer que dois triângulos sejam congruentes. Desta forma existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes chamados casos ou critérios de congruência.

*Lado Ângulo Lado*; são congruentes dois triângulos que possuem dois lados e o ângulo compreendido entre esses lados respectivamente congruentes.

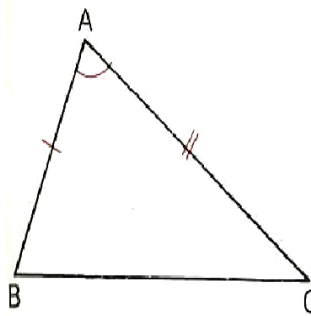


Figura 11. Demonstração de congruência de triângulos. ( Caso: LAL )

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \quad \hat{A} \equiv \hat{A}' \quad \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \Rightarrow_{LAL} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{B}' \quad \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \text{ e } \hat{C} \equiv \hat{C}'.$$

*Ângulo Lado Ângulo*; Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes. Exemplo: Os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  da figura são congruentes pelo caso ALA.

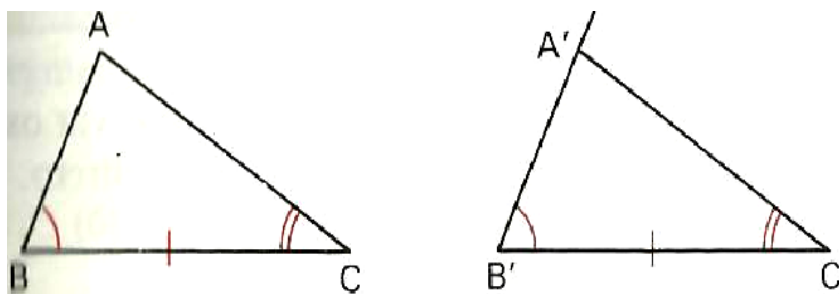


Figura 12. Demonstração de congruência de triângulos. ( Caso: ALA )

Prova-se que  $\overline{BA} \equiv \overline{B'A'}$ , pois com isso recai-se no 1º caso. Exemplo: Os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  da figura são congruentes pelo caso ALA.

*Lado Lado Lado*; Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes. Exemplo: Os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  da figura são congruentes pelo caso LLL.

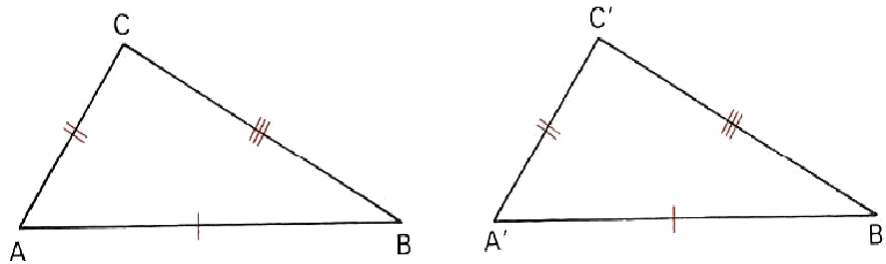


Figura 13. Demonstração de congruência de triângulos. ( Caso: LLL )

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C' \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \quad \widehat{A} = \widehat{A'}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$$

*Lado Ângulo Ângulo oposto*: Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.

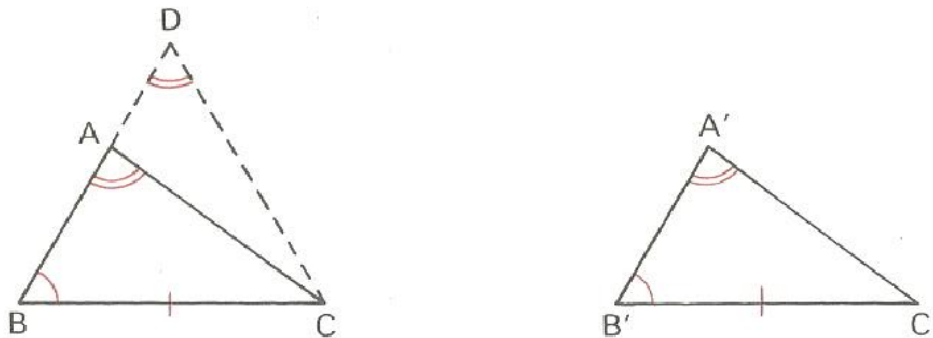


Figura 14. Demonstração de congruência de triângulos. ( Caso: LAA<sub>0</sub> )

*Hipótese*

*Tese*

$$\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}, (1), \widehat{B} \equiv \widehat{B'} (2), \widehat{A} \equiv \widehat{A'} (3) \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

### 2.1.4. Propriedades dos Trapézios

#### Propriedades de um Trapézio qualquer

Segundo Dolce e Pompeo (2005), qualquer trapézio  $ABCD$  de bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  tem:  $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ .

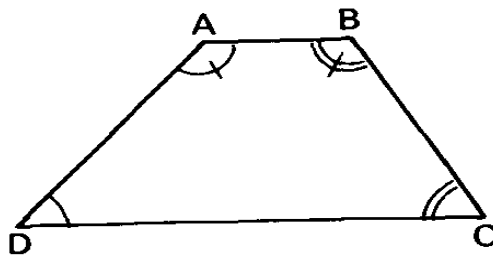


Figura 15. Trapézio qualquer.

#### Demonstração

De fato, como  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{AD}$  é um segmento transversal a estes. Portanto, os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{D}$  são suplementares porque são colaterais internos, ou seja,  $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ . De modo análogo,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{BC}$  transversal. Sendo assim, os ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  também são suplementares (colaterais internos), logo,  $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ .

$$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

#### Propriedades do Trapézio Isósceles

Os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

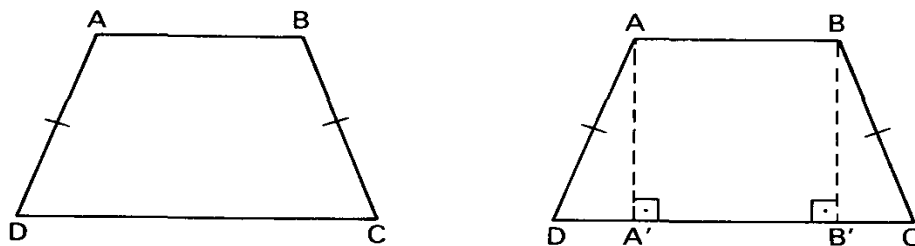


Figura 16. Trapézios isósceles.

### Demonstração

Observando-se os triângulos  $ADC$  e  $BCD$  temos que  $AD \equiv BC$  e  $\widehat{D} \equiv \widehat{C}$  pois o trapézio é isósceles. Como  $DC \equiv CD$ , que são as bases dos triângulos  $ADC$  e  $BCD$ , pela congruência de triângulos, temos o caso  $LAL \Rightarrow \triangle ADC \equiv \triangle BCD \Rightarrow AC \equiv BD$ . Daí decorre que os triângulos  $PCD$  e  $PAB$  são isósceles com bases  $CD$  e  $AB$ , sendo  $P$  o ponto onde as diagonais se cortam.

### 2.1.4 Propriedades dos Paralelogramos

Em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

#### Demonstração:

Hipótese

Tese

$ABCD$  é um paralelogramo  $\Rightarrow (\widehat{A} \equiv \widehat{C} \text{ e } \widehat{B} \equiv \widehat{D})$

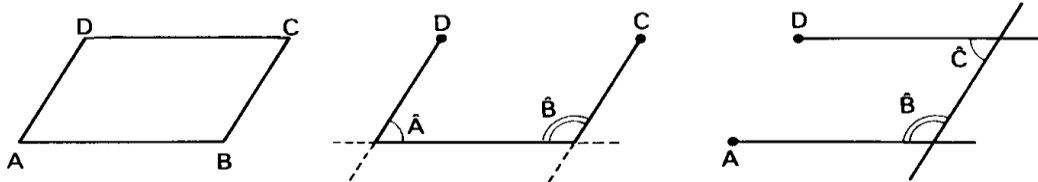


Figura 17. Demonstração da 1ª propriedade dos paralelogramos.

Como  $ABCD$  é paralelogramo,  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  são suplementares, pois são colaterais internos. Por outro lado, de maneira análoga  $\widehat{C}$  e  $\widehat{B}$  também são suplementares. Portanto,  $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ . De maneira análoga  $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$ .  $(\widehat{A} \equiv \widehat{C} \text{ e } \widehat{B} \equiv \widehat{D}) \Rightarrow ABCD$  é um paralelogramo.

#### Demonstração

$\widehat{A} \equiv \widehat{C} \text{ e } \widehat{B} \equiv \widehat{D} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ .

Portanto,  $ABCD$  é paralelogramo e se  $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C} \equiv \widehat{D}$ , ou seja, é um retângulo e todo retângulo é um paralelogramo.

Lados Opostos congruentes: em todo paralelogramo dois lados opostos quaisquer são congruentes.

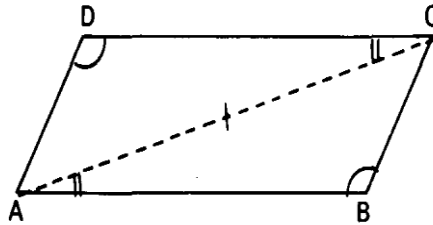


Figura 18. Demonstração da 2ª propriedade dos paralelogramos.

Hipótese

Tese

$ABCD$  é paralelogramo  $\Rightarrow (AB \equiv CD \text{ e } BC \equiv AD)$

### **Demonstração**

Como  $ABCD$  é paralelogramo temos que  $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$  Temos ainda que  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{AC}$  é uma transversal, logo,  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DCA}$ , pois são alternos internos.

$(\overline{AC}$  comum,  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DCA}$ ,  $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$ )  $\Rightarrow$  Pela congruência de triângulos, o caso  $LAA_0$ ,  $\triangle BAC \equiv \triangle DCA \Rightarrow AB \equiv CD$  e  $BC \equiv DA$ .

Todo quadrilátero convexo que tem lados opostos congruentes é paralelogramo. Sendo  $ABCD$  um quadrilátero convexo,

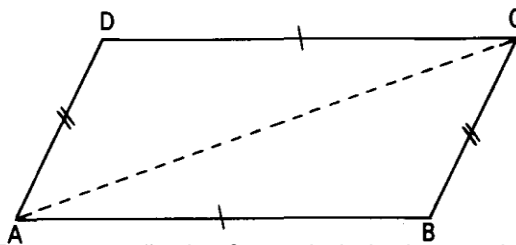


Figura 19. Demonstração da 2ª propriedade dos paralelogramos. ( b )

Hipótese

Tese

$(AB \equiv CD, BC \equiv AD) \Rightarrow ABCD$  é paralelogramo.



**Demonstração:**

Temos que  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ,  $BC \equiv \overline{DA}, \overline{AC}$  comum. Pela congruência de triângulos, o caso *LLL*,  $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ . Como  $B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $B\hat{C}A \equiv D\hat{A}C \Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ , temos que ABCD é um paralelogramo. Sendo assim conclui-se que todo losango é paralelogramo.

Diagonais dividem-se ao meio: em todo paralelogramo, as diagonais interceptam-se nos respectivos pontos médios.

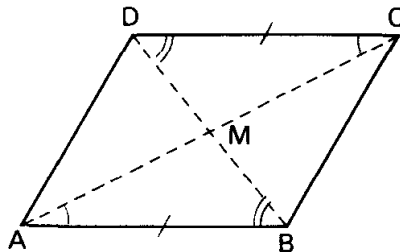


Figura 20. Demonstração da 3ª propriedade dos paralelogramos.

Todo quadrilátero convexo em que as diagonais interceptam nos respectivos pontos médios é paralelogramo.

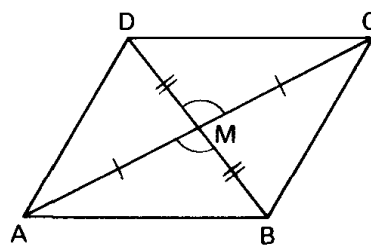


Figura 21. Demonstração da 3ª propriedade dos paralelogramos. ( b )

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,  $(\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}, \overline{AM} \equiv \overline{CM}, \overline{BM} \equiv \overline{DM}) \Rightarrow$  ABCD é paralelogramo.

**Demonstração**

Como  $\overline{AM} \equiv \overline{CM}$ ,  $\widehat{AMB} \equiv \widehat{CMD}$  (O. P.V) e  $\overline{BM} \equiv \overline{DM}$  temos pela congruência de triângulos o caso (LAL) nos  $\triangle ABM \equiv \triangle CDM$ . Como estes triângulos são congruentes temos que  $\widehat{BAM} \equiv \widehat{DCM}$ , logo,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .

Analogamente, considerando  $\triangle ADM$  e  $\triangle BMC$ ,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ . Logo,  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \Rightarrow ABCD$  é paralelogramo.

Dois lados paralelos e congruentes. Todo quadrilátero convexo que tem dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo.

Sendo ABCD um quadrilátero convexo,

Hipótese

Tese

$(\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{AB} \equiv \overline{CD}) \Rightarrow ABCD$  é um paralelogramo.

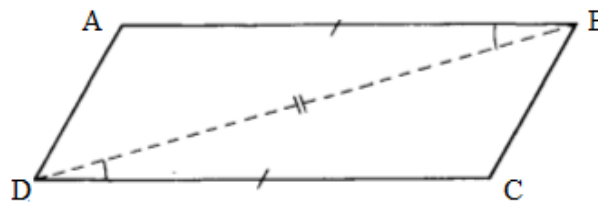


Figura 22. Demonstração da 3ª propriedade dos paralelogramos. ( c )

### **Demonstração:**

Como  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{BD}$  um segmento transversal, temos que  $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$ , pois são ângulos alternos internos. Sendo assim, como  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ,  $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BDC}$  e  $\overline{BD}$  é comum aos triângulos ABD e BDC, pelo caso de congruência de triângulos (LAL)  $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ . Portanto,  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ . Se  $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$  e  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ , então, ABCD é paralelogramo. As propriedades do paralelogramo valem para o quadrado, retângulo e losango, tendo em vista que todos estes são paralelogramos.

### **2.1.5 As Principais Propriedades do Retângulo.**

Retângulo – Diagonais Congruentes

a) Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

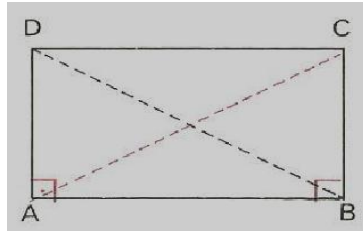


Figura 23. Demonstração da 1ª propriedade dos retângulos.

Hipótese

Tese

$ABCD$  é retângulo  $\Rightarrow \overline{AC} \equiv \overline{BD}$

### **Demonstração**

Como  $ABCD$  é retângulo, temos que  $ABCD$  é paralelogramo, portanto  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ . Sendo assim,  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ ,  $\hat{B} \equiv \hat{A}$ ,  $\overline{AB}$  é comum aos triângulos  $ABD$  e  $ABC$ . Portanto, pelo caso de congruência de triângulos (LAL)  $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$  o que nos leva a concluir que  $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ .

Todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo. Sendo  $ABCD$  um paralelogramo,

Hipótese

Tese

$\overline{AC} \equiv \overline{BD} \Rightarrow ABCD$  é Retângulo

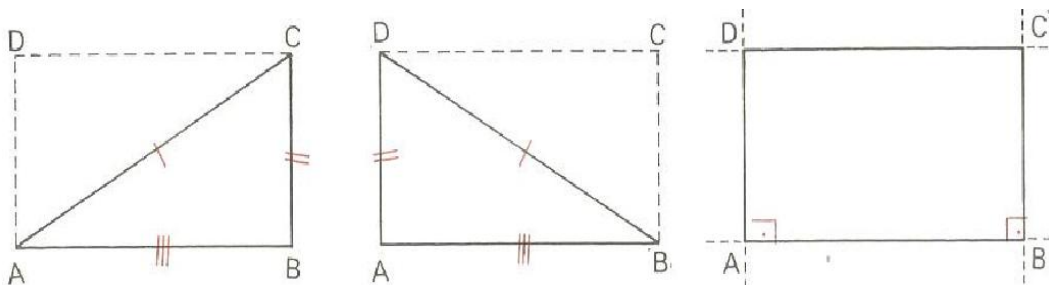


Figura 24. Demonstração da 1ª propriedade dos retângulos.

### **Demonstração**

Sendo  $ABCD$  um paralelogramo, temos que  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ . Temos ainda que,  $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$  (hipotenusa nos triângulos),  $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ ,  $\overline{AB}$  é comum. Portanto, pelo caso de congruência de triângulos (LLL),  $\triangle ABC \equiv \triangle BAD \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{B}$ .

Como  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos colaterais em relação às paralelas  $\overline{AD}$  e  $\overline{BC}$ ,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são suplementares.

Logo,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , sendo congruentes e suplementares, são retos.

No paralelogramo, os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são opostos respectivamente a  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  e, portanto,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  também são retos.

Então:  $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D}$  (são todos retos)  $\Rightarrow$  ABCD é retângulo.

### 2.1.6 As Propriedades do Losango: Diagonais Perpendiculares

Além das propriedades do paralelogramo, o losango tem a propriedade característica que segue. Todo losango tem diagonais perpendiculares.

ABCD é losango  $\Rightarrow \overline{AC} \perp \overline{BD}$

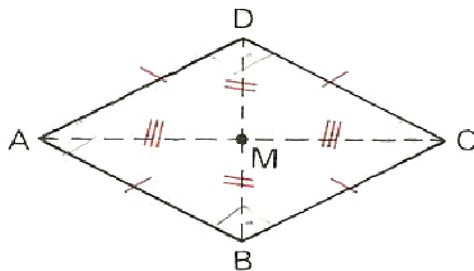


Figura 25. Demonstração da 1ª propriedade dos losangos.

#### **Demonstração**

Como ABCD é losango, então também é paralelogramo, logo,  $\overline{AM} \equiv \overline{CM}$  e  $\overline{BM} \equiv \overline{DM}$ . Pelo caso *LLL*, temos as congruências:  $\triangle AMB \equiv \triangle AMD \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$ . Portanto, os ângulos de vértice M são congruentes e suplementares.

Logo,  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ . Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Sendo ABCD um paralelogramo,  $\overline{AC} \perp \overline{BD} \Rightarrow$  ABCD é um losango.

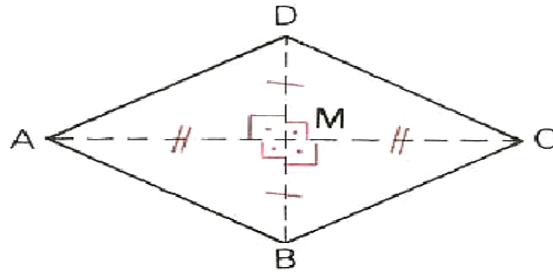


Figura 26. Demonstração da 3ª propriedade dos paralelogramos. ( d )

### Demonstração

Temos que  $ABCD$  é paralelogramo, logo,  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$ ,  $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$  e  $\overline{BM} \equiv \overline{DM}$ . Pelo caso LAL, temos as congruências:  $\triangle AMB \equiv \triangle AMD \equiv \triangle CMB \equiv \triangle CMD$ . Daí,  $\overline{AB} \equiv \overline{AD} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD}$  e então  $ABCD$  é losango.

### 2.1.7 Quadrado: Diagonais e Perpendicularidades

Todo quadrado é retângulo e também é losango. Além das propriedades do paralelogramo, o quadrado tem as propriedades características dos retângulos e do losango.

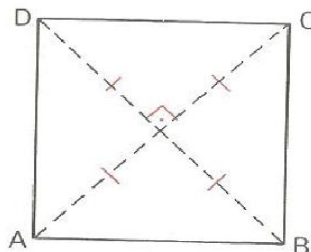


Figura 27. Demonstração da 2ª propriedade dos retângulos.

$ABCD$  é quadrado  $\Leftrightarrow (ABCD$  é paralelogramo,  $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ ,  $\overline{AC} \perp \overline{BD})$ .

### 2.1.8 As Bases Médias do Triângulo

Chamamos de base média de um triângulo todo segmento com extremidades nos pontos médios dos lados de um triângulo. Seja  $ABC$  um triângulo.

$$(\overline{AM} \equiv \overline{MB}, \overline{AN} \equiv \overline{NC}) \Rightarrow \begin{cases} 1^a) \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ 2^a) \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC} \end{cases}$$

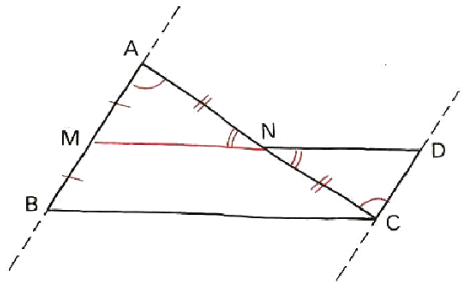


Figura 28. Base média de um triângulo.

### Demonstração

Conduza por  $C$  uma reta paralela à reta  $\overline{AB}$  e seja  $D$  o ponto de intersecção com a reta  $\overline{MN}$ : note que  $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$  temos que  $\hat{C} \equiv \hat{A}$  pois são ângulos alternos internos. Observe que  $\hat{C} \equiv \hat{A}$ ,  $\overline{AN} \equiv \overline{CN}$  e  $\hat{ANM} \equiv \hat{DNC}$  (opostos pelo vértice). Portanto, temos o caso de congruência (ALA) nos  $\triangle AMN \equiv \triangle CDN$ . Logo,  $\overline{CD} \equiv \overline{AM}$  o que nos leva a concluir que  $\overline{CD} \equiv \overline{MB}$ . Sendo assim, se  $\overline{CD} \parallel \overline{MB}$  e  $\overline{CD} \equiv \overline{MB}$ , então  $MBCD$  é paralelogramo e  $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$ .

E ainda:

Como  $\triangle AMN \equiv \triangle CDN$ , então  $\overline{MN} \equiv \overline{DN}$   
 $MBCD$  é paralelogramo, logo  $\overline{MD} \equiv \overline{BC}$  } que nos leva a seguinte equação:  
 2.  $\overline{MN} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ .

Seja  $ABC$  o triângulo.

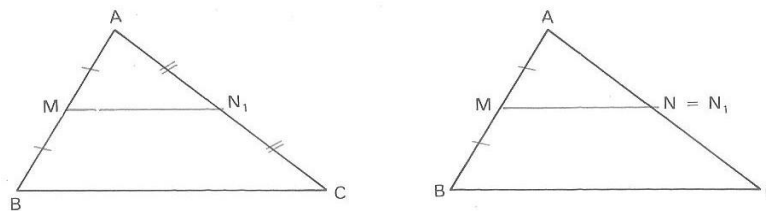


Figura 29. Demonstração da base média de um triângulo.

Hipótese

Tese

$$(\overline{MN} \parallel \overline{BC}, \overline{AM} \equiv \overline{MB}, N \in \overline{AC}) \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{NC}$$

### Demonstração

Seja  $N_1$  o ponto médio de  $\overline{AC}$ . Pelo teorema anterior  $\overline{MN_1} \parallel \overline{BC}$ .

Como a reta paralela à reta  $\overline{BC}$  por M é a única, resulta que  $\overline{MN_1} = \overline{MN} = \overline{MN}$ . E como  $\overline{MN_1}$  e  $\overline{MN}$  interceptam  $\overline{AC}$  em  $N_1$  e  $N_1$ , respectivamente, decorre que  $N_1 = N$ .

Logo,  $\overline{AN} \equiv \overline{NC}$ .

### 2.1.9 As Bases Médias do Trapézio

Se um segmento tem extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então ele é paralelo às bases e será igual à semissoma de suas bases. Seja  $ABCD$  um trapézio não paralelogramo de bases  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ .

Hipótese

Tese

$$(\overline{AM} \equiv \overline{DM}, \overline{BN} \equiv \overline{CN}) \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ 2^\circ \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \end{cases}$$

### Demonstração

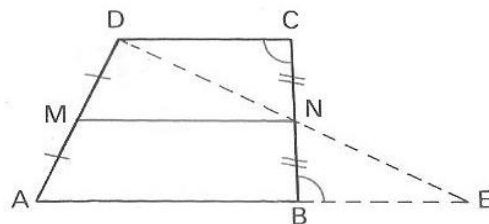


Figura 30. Base média de um trapézio

Seja  $E$  (figura 31) o ponto de interseção das retas  $\overline{DN}$  e  $\overline{AB}$ .  $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$   
 $(\hat{B} \equiv \hat{C}, \overline{BN} \equiv \overline{CN}, \hat{N}$  o.p.v)  $ALA \Rightarrow \overline{EN} \equiv \overline{DN}$  (1)  
 e  $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$  (2)

No  $\triangle ADE$ , em vista de (1),  $M$  e  $N$  são pontos médios de  $\overline{AD}$  e  $\overline{DE}$ , respectivamente. Logo,  $\overline{MN} \parallel \overline{AE} \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$  e  $\overline{MN} = \frac{\overline{AE}}{2} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{BE}}{2} \Rightarrow^{(2)} \overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$

Se  $ABCD$  for paralelogramo, a propriedade é imediata. Se um segmento paralelo às bases de um trapézio tem uma extremidade no ponto médio de um dos outros lados e a outra extremidade no quarto lado, então esta extremidade é ponto médio deste lado. Se  $ABCD$  é um trapézio não paralelogramo,  $(\overline{MN} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \overline{AM} \equiv \overline{DM}, N \in \overline{BC}) \Rightarrow \overline{BN} \equiv \overline{CN}$ .

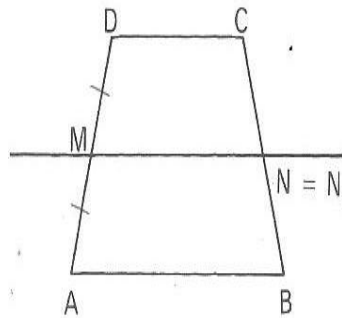


Figura 31. Demonstração da base média de um trapézio

### Demonstração

Seja  $N_1$  o ponto médio de  $\overline{BC}$ . Pelo teorema anterior  $\overline{MN_1} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ . Como a reta paralela à reta  $\overline{AB}$ . Pelo ponto  $M$  é única, temos  $\overline{MN_1} = \overline{MN}$ . E como  $\overline{MN_1}$  e  $\overline{MN}$  interceptam  $\overline{BC}$  em  $N_1 = N$  Logo,  $\overline{BN} \equiv \overline{CN}$ .



### 3. SOFTWARE GEOGEBRA: FERRAMENTA DIDÁTICA

Várias são as ferramentas disponíveis no Software GeoGebra que serão úteis na produção de figuras para aulas expositivas, criação de *Apple* para rodar na internet, execução de seqüências didáticas para conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Trata-se de um software com aplicações em diversas áreas de atuação tais como, estatística, física, engenharias, ciências biológicas, química e matemática.

De forma geral, os ambientes de geometria dinâmica fornecem uma representação computacional para o plano euclidiano e suas ferramentas básicas são concebidas para reproduzir régua não graduada e compasso físico - os chamados instrumentos euclidianos.

Desta forma estrutural é concebida a simulação de construções geométricas que podem ser feitas com os instrumentos euclidianos, sendo que, nesses ambientes, as construções podem ser manipuladas de forma que as propriedades e relações dos objetos construídos sejam preservadas.

A geometria dinâmica atribui ainda outros recursos, como traçado de lugares geométricos, representação de secções cônicas, coordenadas cartesianas e medidas aproximadas para comprimentos e áreas.

Assim afirma Giraldo, Matos e Caetano (2012), em virtude das limitações inerentes ao software, as representações computacionais apresentam diferenças importantes em relação ao modelo matemático. No modelo matemático teórico, o plano euclidiano é completo e ilimitado. Por outro lado, nas representações em geometria dinâmica, lidamos sempre com uma região retangular formada por uma quantidade muito grande, porém finita de pixels.

O Software GeoGebra permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta e polígonos assim como inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente no

campo de entrada. O Software GeoGebra é capaz de lidar com variáveis e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes de uma função.

O software contém ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

A imagem abaixo mostra a interface inicial do GeoGebra. Onde aparecem as opções do *menu* e os botões para acesso às ferramentas.

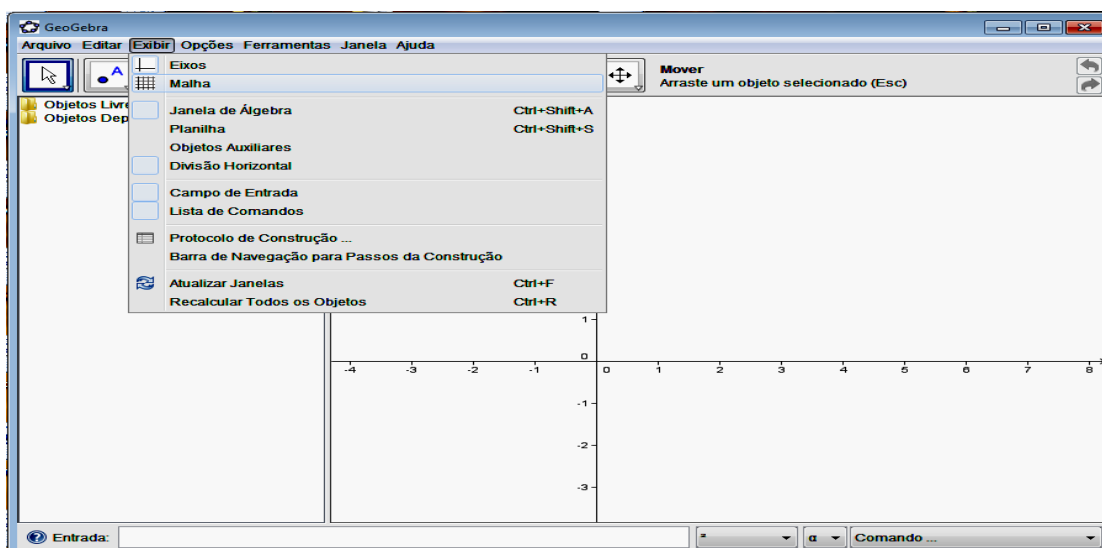


Figura 32. Imagem do GeoGebra

### 3.1 Construção do Quadrado no GeoGebra

**EXEMPLO 01:** *Construir um quadrado.* Demonstrar que as medidas de seus lados são iguais.

**1º Passo:** Clique no canto inferior direito da quinta opção da caixa de ferramenta e escolha a opção polígonos regulares.

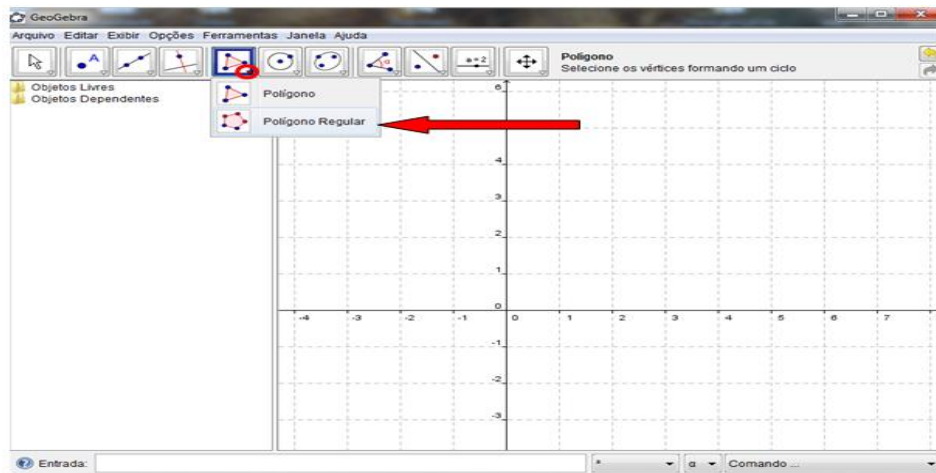


Figura 33. Imagem do GeoGebra.

**2º Passo:** Clique na origem do plano cartesiano, ou seja, nas coordenadas  $(0, 0)$ , depois em um outro ponto qualquer, por exemplo  $(0, 4)$ , em seguida aparecerá uma caixa para selecionar o número de vértices ou lados, digitar o número quatro (4).

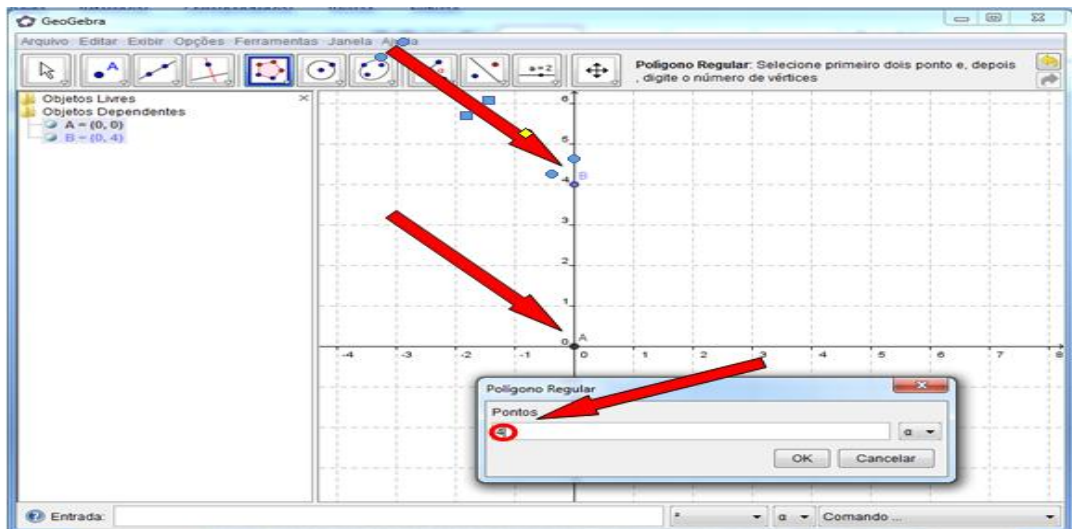


Figura 34. Imagem do GeoGebra.

**3º Passo:** Clique no botão ok para fechar o polígono.

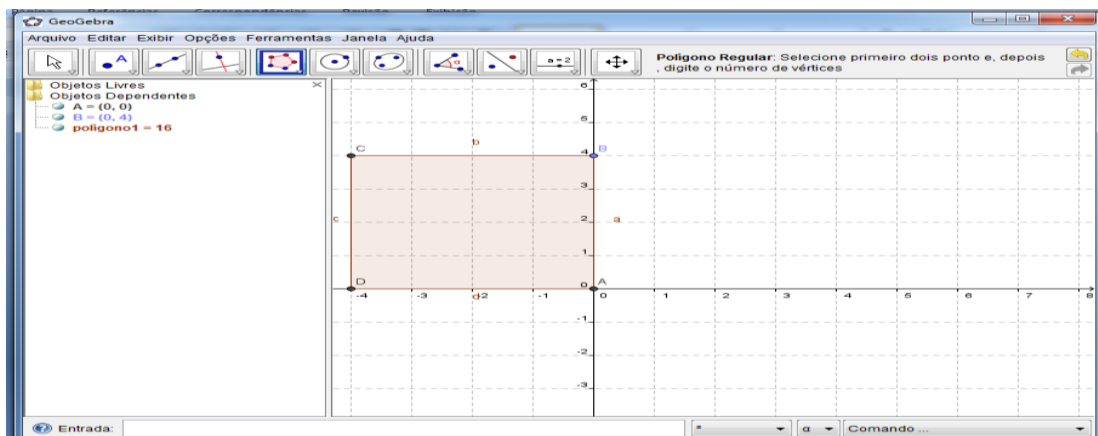


Figura 35. Imagem do GeoGebra.

**4º Passo:** Clique no canto inferior direito da oitava opção da caixa de ferramenta e escolha a opção Distância, comprimento ou perímetro.

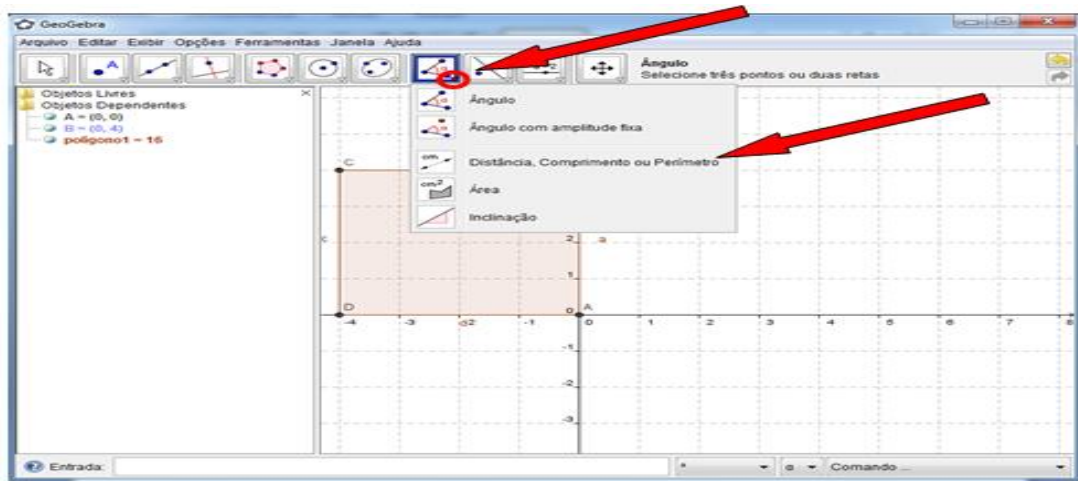


Figura 36. Imagem do GeoGebra

**5º Passo:** Clique no ponto A (0, 0) e depois no ponto B (0, 4) e aparecerá o comprimento do segmento AB.

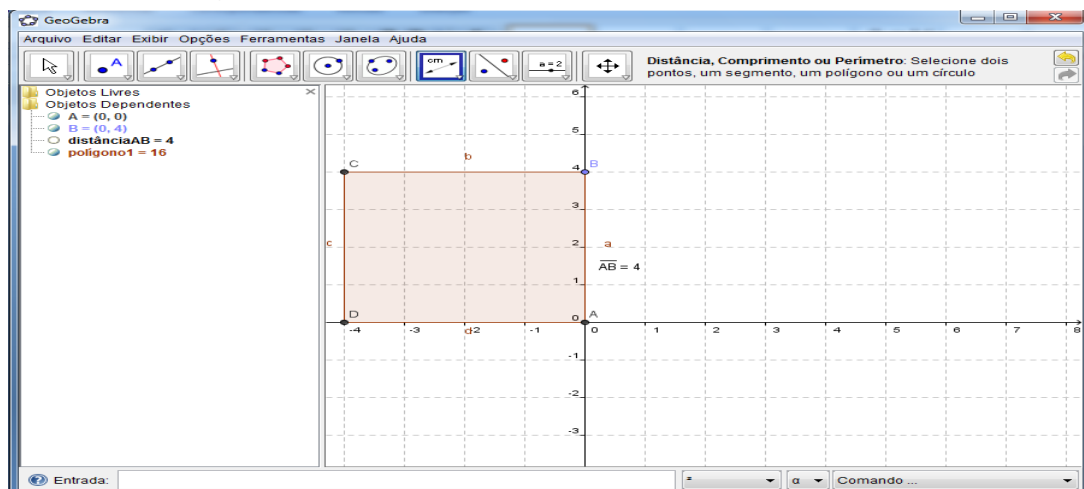


Figura 37. Imagem do GeoGebra

**6º Passo:** Proceder da mesma forma para os outros pontos para determinar o comprimento dos outros segmentos (lados do polígono).

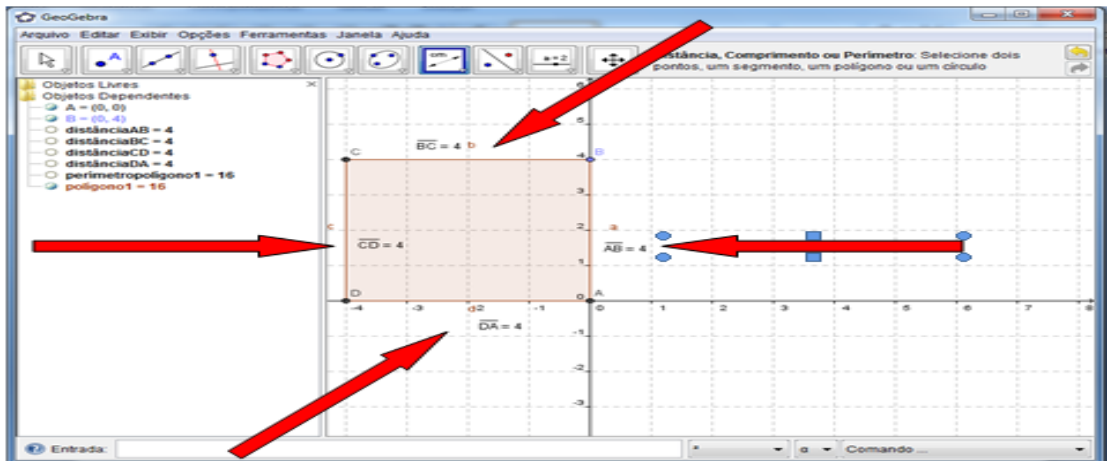


Figura 38. Imagem do GeoGebra.

Observam-se como os quatro lados são congruentes e possui ângulos retos pode-se concluir que o polígono é um quadrado.

### 3.2 Construção do Retângulo no Software GeoGebra

**EXEMPLO 02:** *Construir um retângulo.* Demonstrar que as medidas de seus lados opostos são iguais.

**1º Passo:** Clique no canto inferior direito da quinta opção da caixa de ferramenta e escolha a opção polígonos.

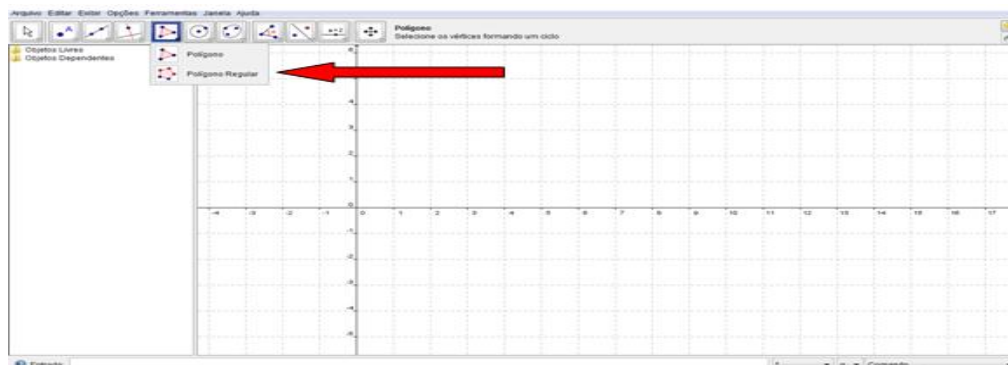


Figura 39. Imagem do GeoGebra.

**2º Passo:** Clique na origem do plano cartesiano, ou seja, nas coordenadas  $(0, 0)$ , depois clique nos outros pontos quaisquer, por exemplo os pontos  $(7, 0)$ ,  $(7, 3)$  e  $(0, 3)$ , depois clique no ponto inicial  $(0, 0)$  para fechar o polígono.

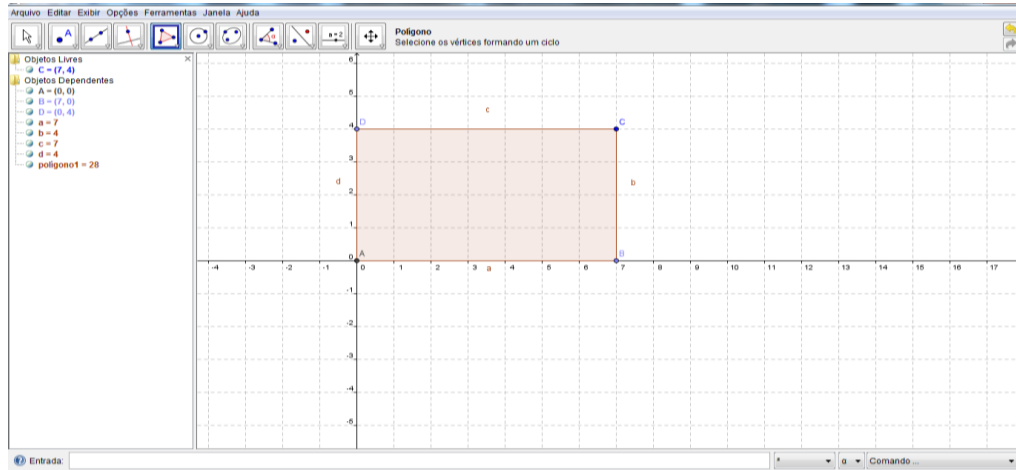


Figura 40. Imagem do GeoGebra

**3º Passo:** Clique no canto inferior direito da oitava opção da caixa de ferramenta e escolha a opção Distância, comprimento ou perímetro.

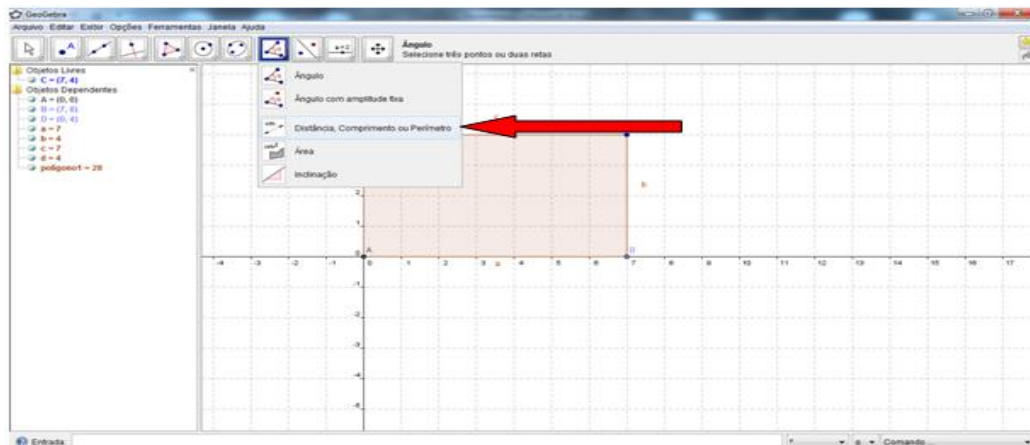


Figura 41. Imagem do GeoGebra

**4º Passo:** Clique no ponto A (0, 0) e depois no ponto B (7, 0) e aparecerá o comprimento do segmento AB. Proceder da mesma forma para os outros pontos para determinar o comprimento dos outros segmentos (lados do polígono).

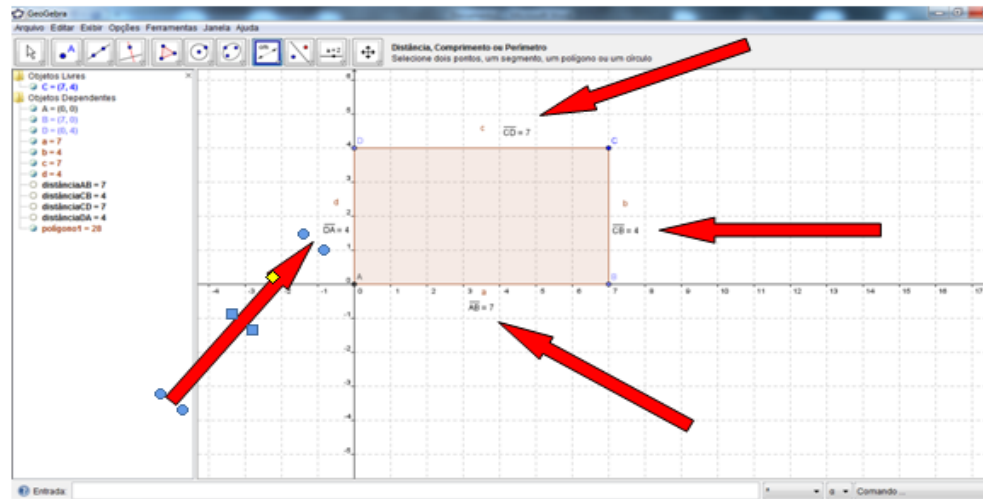


Figura 42. Imagem do GeoGebra

### 3.3 Construindo o Losango no Software GeoGebra

Visualizar que as medidas de seus lados opostos são iguais.

**1º PASSO:** Clique no canto inferior direito da quinta opção da caixa de ferramenta escolher a opção polígonos.

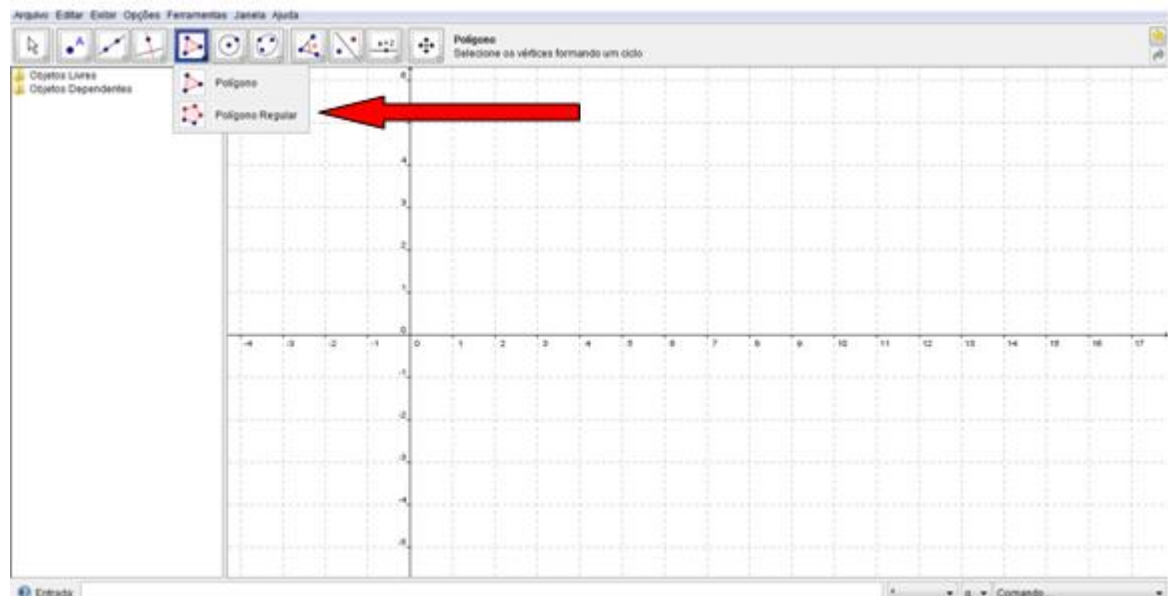


Figura 43. Imagem do GeoGebra

**2º PASSO:** Clique em um ponto qualquer do plano cartesiano, por exemplo, o ponto de coordenadas (0, 3), depois clique em outro ponto qualquer, exemplo o ponto (5, 0), em seguida clique no ponto que seja o dobro da abscissa e de mesma ordenada do primeiro ponto, ou seja, (10, 3). Faça o inverso para o outro ponto que será, no nosso exemplo (5, 6). Clique no ponto inicial (0, 3) para fechar o polígono.

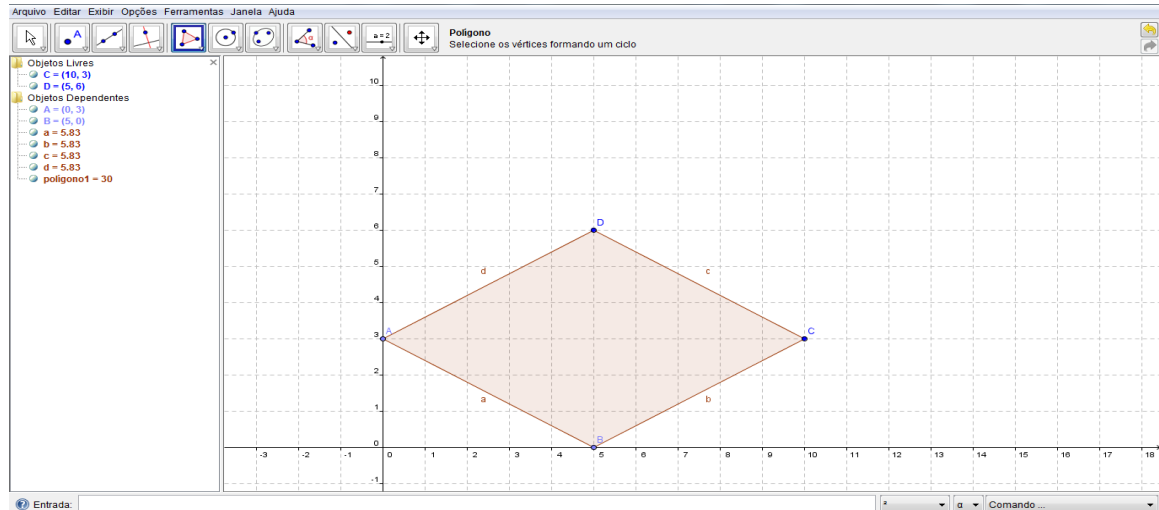


Figura 44. Imagem do GeoGebra

**3º PASSO:** Clique no quanto inferior direito da oitava opção da caixa de ferramenta escolher a opção Distância, comprimento ou perímetro.

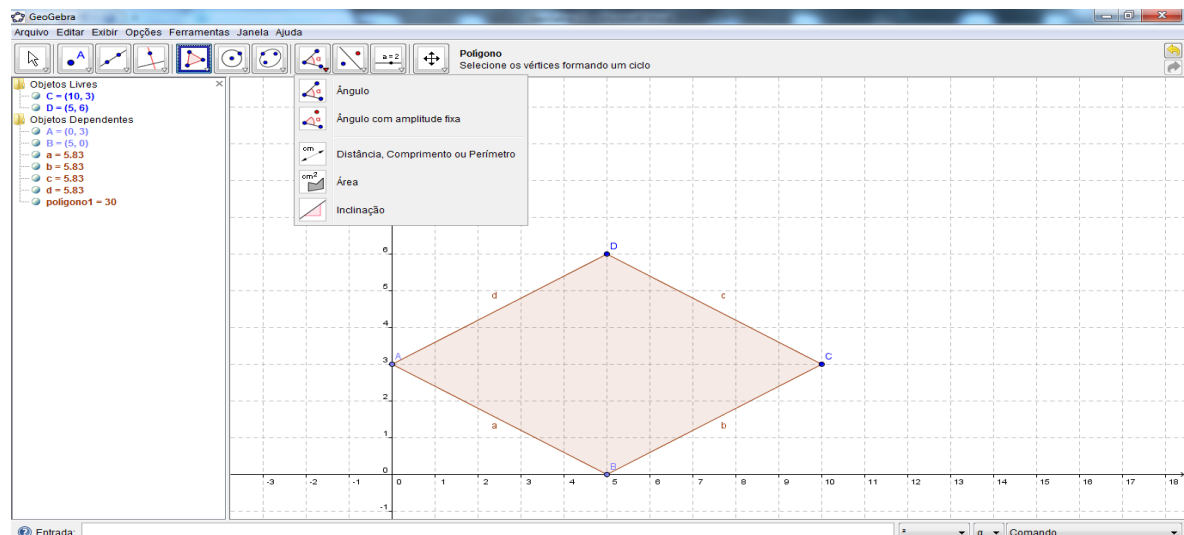


Figura 45. Imagem do GeoGebra

**4º PASSO:** Clique no ponto A (0, 3) e depois no ponto B (5, 0) e aparecerá o comprimento do segmento AB. Proceder da mesma forma para os outros pontos para determinar o comprimento dos outros segmentos (lados do polígono).



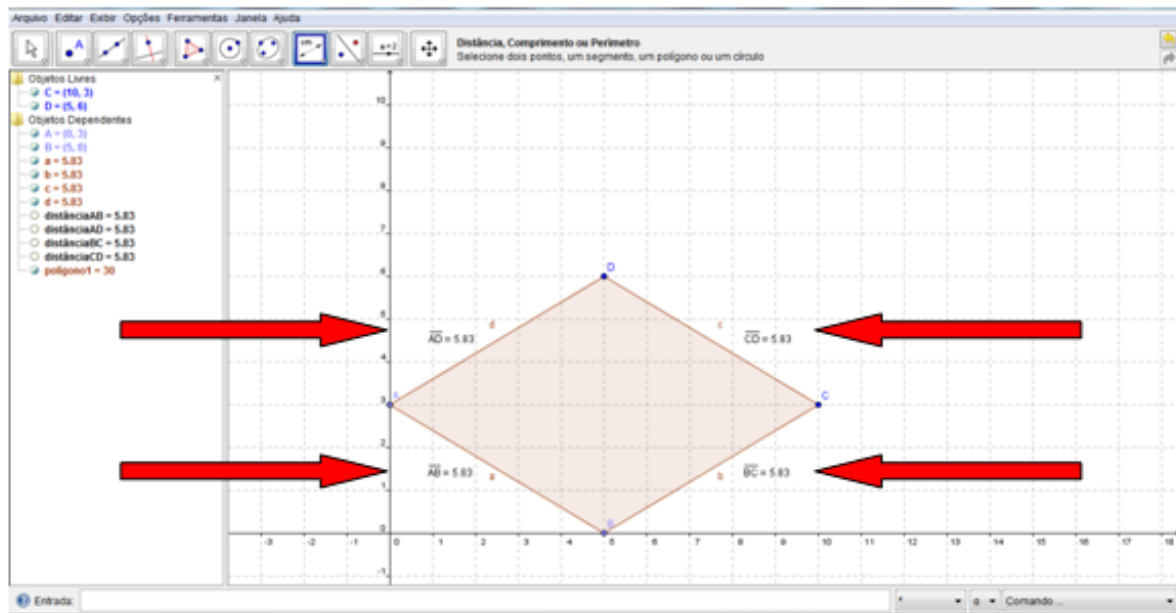


Figura 46. Imagem do GeoGebra

Observe os lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são congruentes, portanto como o polígono possui quatro lados com medidas iguais, e pela imagem possui ângulos agudos e obtusos, concluí-se que se trata de um losango.

## RESULTADOS OBTIDOS

Inspirado nas ideias do suíço Jean Piaget (1896 - 1980), o método procura instigar a curiosidade, já que o aluno é levado a encontrar as respostas a partir de seus próprios conhecimentos e de sua interação com a realidade e com os colegas.

O construtivismo propõe que o aluno participe ativamente do próprio aprendizado, mediante a experimentação, a pesquisa em grupo, o estímulo à dúvida e o desenvolvimento do raciocínio, entre outros procedimentos. A partir de sua ação, vai estabelecendo as propriedades nesta teoria acreditaram que com a utilização do software educativo GeoGebra, o aluno perceberia melhor as propriedades relatadas na aula teórica quando participasse da aula prática já que ele seria levado a construir figuras com os conhecimentos adquiridos em aulas teóricas.

Nosso estudo foi desenvolvido na Escola de Ensino Fundamental e Médio Deputado Paulino Rocha, situada em Fortaleza-Ceará. As turmas participantes foram 8º C, com 25 alunos e o 8ºD com 26 alunos. A motivação da escolha destas turmas foi porque trabalho diariamente como docente nelas. A estratégia para execução do GeoGebra foram aulas teóricas para as duas turmas no primeiro momento. Em seguida, foi apresentado para os alunos do 8ºC o software educativo GeoGebra com explicação dos comandos que os alunos precisariam para executar as atividades propostas. Foram necessárias 10 aulas práticas para uma melhor manipulação do software por parte dos alunos para, assim, iniciarem a utilização do GeoGebra como uma ferramenta para fixação e percepção das propriedades dos quadriláteros através da construção passo a passo de alguns quadriláteros notáveis, como quadrado e losango.

Como pontos positivos observados, temos a interação dos alunos com o software educativo GeoGebra; Construção dos quadriláteros notáveis tendo melhor aprendizado, fixando melhor as definições e propriedades; Melhor desempenho nos exercícios propostos em sala de aula, com média de 70% de aproveitamento dos alunos do 8º C, que tiveram aulas teóricas e práticas com o GeoGebra. Já a turma dos alunos do 8º D obteve média de 40% tendo apenas aulas teóricas. Os exercícios realizados pelos alunos do 8º C, estimulou a criatividade e discussão na hora da

solução dos exercícios, onde foram abordadas maneiras diferenciadas na solução do mesmo exercício.

Um exemplo muito interessante foi à solução em que o aluno percebeu, depois de realizar a construção do quadrado e do losango no GeoGebra, que o quadrado também era um losango, logo, no momento de resolver a lista de exercícios proposta em sala, ele calculou a área do quadrado multiplicando as diagonais e dividindo por dois, que é a fórmula adotada nos livros didáticos para calcular a área do losango.

Também foi percebido pelos alunos que a área de um triângulo nada mais era do que a metade da área de um paralelogramo.

O ponto negativo verificado foi à problemática do fator determinante tempo e conteúdo programático, já que para apresentação, e uma manipulação do GeoGebra foi preciso tempo para os alunos do 8º C se familiarizarem com o software. Já os alunos do 8º D prosseguiram com o conteúdo programático, porém o rendimento e o aprendizado verificado em relação aos quadriláteros foram inferiores.

Portanto, o objetivo foi alcançado quanto ao melhor desempenho nas atividades proposta para os alunos do 8º C em relação aos do 8ºD.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Devido às limitações citadas neste trabalho é esperado que os alunos conseguissem um desenvolvimento razoável nos conceitos básicos da geometria euclidiana plana.

Os conteúdos são colocados de maneira simples, para que a assimilação e compreensão tenham uma grande parcela do caráter intuitivo, que sempre se espera durante o processo de ensino aprendizagem de geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem ao Ensino Fundamental que o ensino de geometria evidencie a evolução do desenvolvimento e o pensamento indutivo e dedutivo de se trabalhar explicações, argumentações e demonstrações. Além disso, o referido documento também ressalta a importância de se incorporar ao ensino os recursos das tecnologias da comunicação.

Destaca-se então o uso do Software GeoGebra ao qual o entusiasmo em contato aos objetos geométricos, reflexão e apropriação de conceitos. Obteve sucesso na intencionalidade de instigar a curiosidade dos alunos e estimulá-los na comunicação com o *Software*. Os alunos em questão apresentaram-se confortáveis em percorrer menus, fazer construções voluntárias, movimentar objetos, questionar, gravar e tomar decisões, permitindo-se desfazer no momento que o resultado não era o esperado ou programado.

Alguns conceitos geométricos foram tratados por meio da experimentação e construção estimuladas pelo uso do *Software* e pelo contato de figuras e desenhos, ficando a diferenciação como objeto de aprendizagem proporcionada pelo Software GeoGebra.

Consentir a exploração do *Software* livremente, instigando seus sentidos com apresentações de objetos nele construídos, fez com que os participantes buscassem o entendimento a diferenciar as ferramentas disponíveis no Software GeoGebra.

De maneira geral, a teoria apresentada nos livros didáticos, quando trabalhada com o software GeoGebra foi mais bem compreendida já que o aluno

passa a ser um componente do aprendizado e não apenas uma fonte de observação do que o docente reproduz durante as aulas tradicionais. Portanto, com a utilização do recurso, o ensino, a motivação e o aprendizado tiveram resultados positivos.

Acredito que este trabalho pode ser aprofundado em pesquisas posteriores, colocando os alunos para realizarem as atividades no próprio software educativo GeoGebra, pois neste primeiro momento, o objetivo era a apresentação da ferramenta como auxílio na fixação de definições e propriedades de forma não tradicional, porém sem retirar as aulas teóricas tradicionais, pois acredito de fundamental importância.

Conclui-se que o uso da construção geométrica e da geometria dinâmica pode trazer uma importante contribuição para o currículo de matemática, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, contribuindo didaticamente ao aprendizado dos alunos, na busca de melhorar assimilação do conteúdo nas aulas de matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEISIEGEL, Celso de Rui. **Paulo Freire/Celso de Rui Beisiegel**. – Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. Hist. Matemática, São Paulo: Blücher, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.

EVES, H. **História da Geometria**; tradução Hygino H. Domingues, Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Hist. Geometria, São Paulo: Atual Editora, 1992.

GeoGebristas.blogspot.com/p/**lista-de-exercicios-sobre-geometria.html**. Acesso: 13. Junho de 2015.

GIRALDO, V.; PINTO MATOS, F. R.; SILVANI CAETANO, P. A. **Recursos Computacionais no Ensino de Matemática**. Coleção Profmat Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GOUVEA, Flavio Roberto. **Uma abordagem de ensino-aprendizagem da geometria esférica através do computador**. São Paulo. SP. Disponível em < <http://www.desenho.ufpr.br/IIISIPEM/GT6.pdf>>. Acesso em 09. De julho, 2015.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: **Uma Nova Abordagem para o Aprendizado da Geometria**, ANAIS DO VII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, pp. 1-13, Belo Horizonte, 1996.

LIMA, E. L. **Medidas e formas em geometria**. Matemática Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** SBEM A Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 4, p. 3-13, 1995.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 9. **Geometria Plana**, São Paulo: Atual Editora, 1996.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: Causas e conseqüências**. Educação - Revista Zetetiké, São Paulo, ano I, n. 1, p. 7-17, 1993.

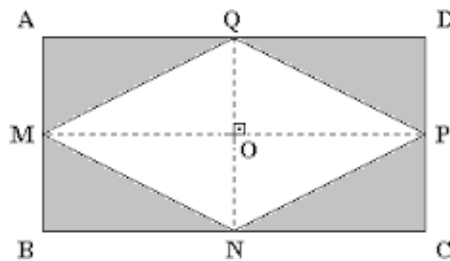
ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção Profmat Rio de Janeiro: SBM, 2012.

## APÊNDICES

1. Construa no GeoGebra um quadrado de lado 10 cm e, utilizando os conhecimentos adquiridos, determine sua área de três modos diferentes.

Sugestão: Mostre que a área do quadrado é obtida da mesma maneira que a área do retângulo, pois o quadrado é um retângulo e de modo análogo, com o losango.

2. Na figura, os vértices do losango interceptam os lados do retângulo em seus pontos médios



Sabendo que  $AB=12\text{m}$  e  $BC=20\text{m}$  determine:

- Qual a área do losango?
- Determine a área sombreada de duas maneiras diferentes.
- Construa a figura no Software GeoGebra seguindo as medidas dadas.

3- (OBMEP-2012) 15. A figura mostra um retângulo de área  $720\text{ cm}^2$ , formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?

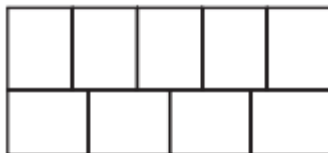
A) 20

B) 24

C) 30

D) 36

E) 48



4- (OBMEP-2012) 6. O retângulo ao lado, que foi recortado de uma folha de papel quadriculado, mede 4 cm de largura por 5 cm de altura. Qual é a área da região cinzenta?

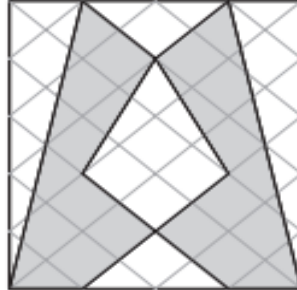
A)  $10 \text{ cm}^2$

B)  $11 \text{ cm}^2$

C)  $12,5 \text{ cm}^2$

D)  $13 \text{ cm}^2$

E)  $14,5 \text{ cm}^2$



5- (OBMEP-2013) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?

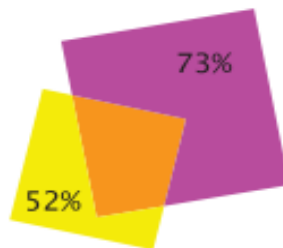
A)  $\frac{3}{4}$

B)  $\frac{5}{8}$

C)  $\frac{2}{3}$

D)  $\frac{4}{7}$

E)  $\frac{4}{5}$



6- (OBMEP-2013) 7. A figura representa um retângulo de  $120 \text{ m}^2$  de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?

A)  $20 \text{ m}^2$

B)  $24 \text{ m}^2$

C)  $30 \text{ m}^2$

D)  $36 \text{ m}^2$

E)  $40 \text{ m}^2$



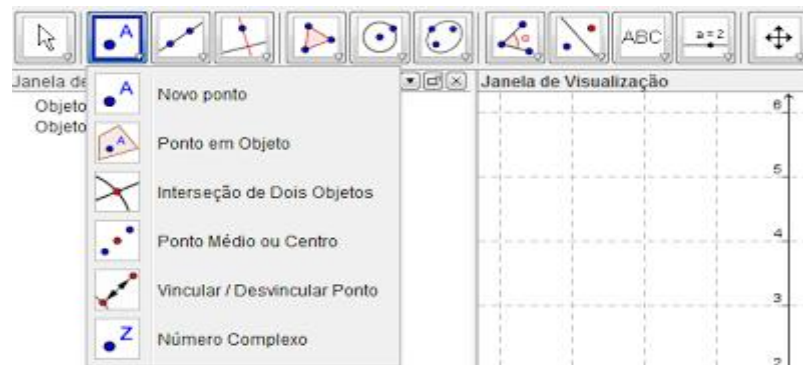
## Exercícios Resolvidos Aprofundado no Software GeoGebra <sup>2</sup>

1) Determine o ponto médio entre  $A=(-4,1)$  e  $B=(-2,5)$ .

**Solução:**

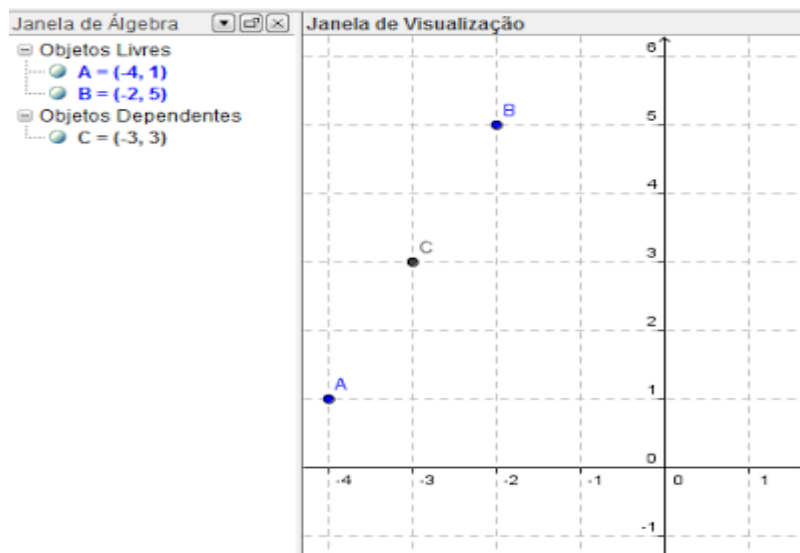
Na caixa de entrada, digite os pontos A e B.

No 2º ícone da barra de ferramentas, escolha "Ponto Médio ou Centro".



Na Janela de Visualização ou na Janela de Álgebra, clique no ponto A e, em seguida, no ponto B (pode ser em B e depois em A).

Verifique que aparecerá na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra a seguinte solução:  $C=(-3,3)$ .



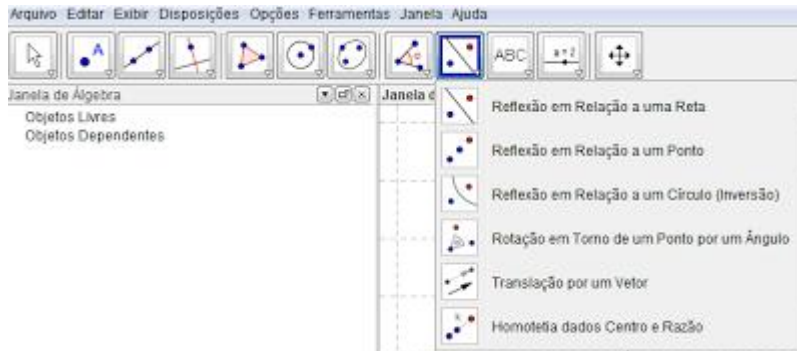
2) Divida o segmento AB em 5 partes iguais, dados  $A=(-3,5)$  e  $B=(2,-5)$ .

<sup>2</sup> [GeoGebristas.blogspot.com/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html](http://GeoGebristas.blogspot.com/p/lista-de-exercicios-sobre-geometria.html). Acesso: 13. Junho de 2015

**Solução:**

Na caixa de entrada, digite os pontos A e B.

No 9º ícone da barra de ferramentas, escolha "Homotetia dados Centro e Razão".

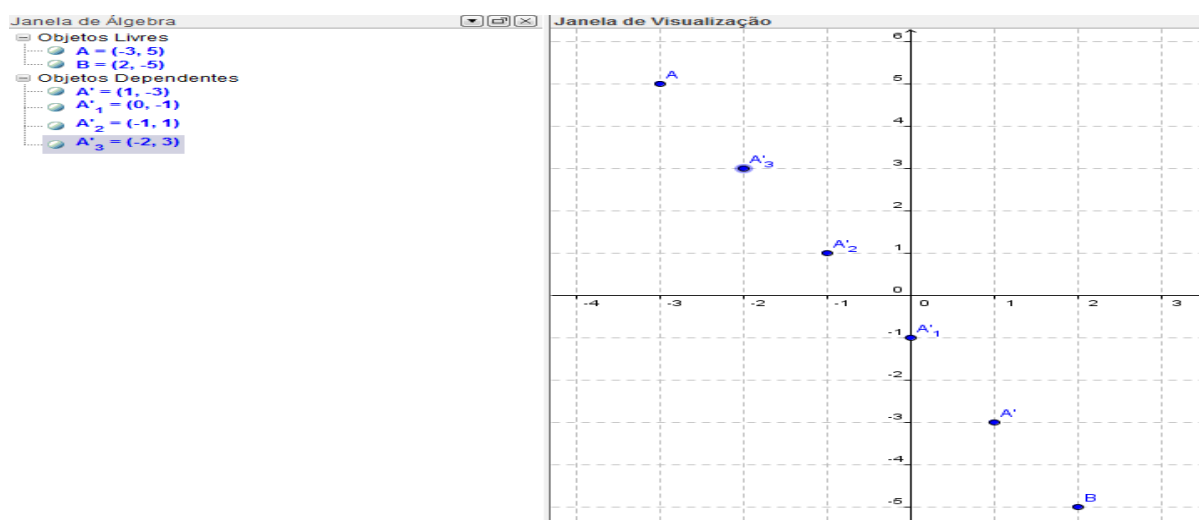


Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B (a ordem aqui é muito importante). Aparecerá uma caixa para digitar a fração em que os pontos que dividirão AB aparecerão a partir do último ponto clicado (neste caso foi B). Digite 1/5 e tecla <ENTER>.

Repita o procedimento para os próximos pontos. Assim:

- Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B. Digite 2/5.
- Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B. Digite 3/5.
- Clique no ponto A e, em seguida, no ponto B. Digite 4/5.

Verifique que aparecerá na Janela de Visualização a solução, que são os pontos: (1,-3); (0,-1); (-1,1); (-2,3).



3) Encontre o ponto de interseção entre as retas (r)  $3x-2y=7$  e (s)  $2x+5y=11$ .

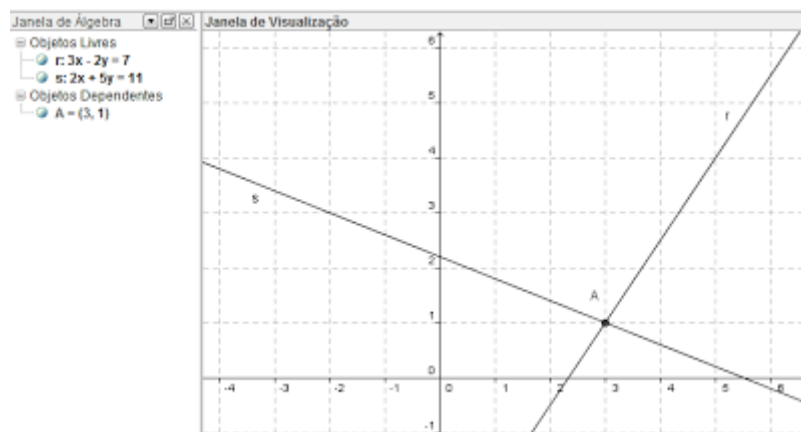
**Solução:**

Na caixa de entrada, digite as equações das retas  $r$  e  $s$  (para nomear, digite  $r:3x-2y=7\dots$ , ou então, após digitar a equação na caixa de Entrada, clique com o botão direito e escolha "renomear"  $r$ , porque o default é  $a$ )

No 2º ícone da barra de ferramentas, escolha "Interseção de Dois Objetos". Clique na reta  $r$  e em seguida na reta  $s$ . Ou então, na Janela de Visualização, aponte o cursor para o ponto de interseção e verifique que as duas retas ficarão mais escuras. Clique neste ponto e ele aparecerá.



Verifique que aparecerá na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra a seguinte solução:  $A=(3,1)$ .

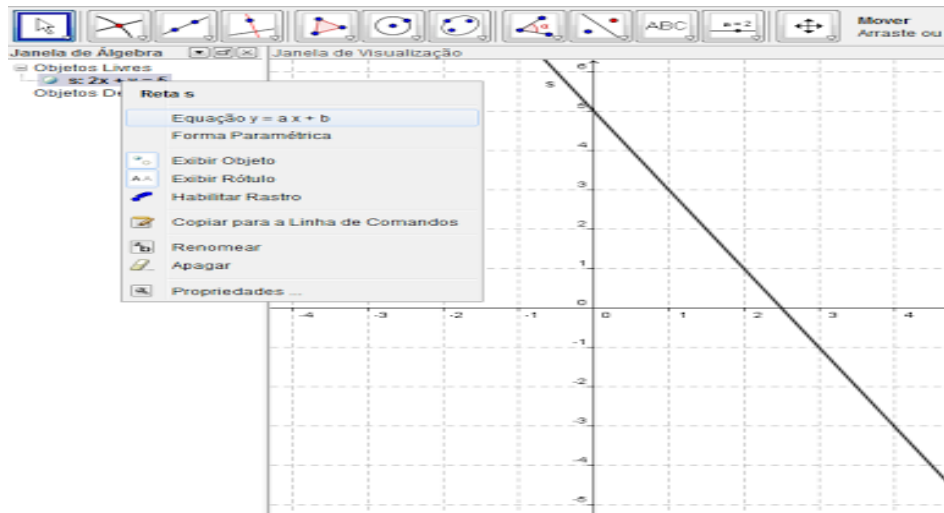


4) Determine a equação reduzida da reta (s)  $2x+y=5$ .

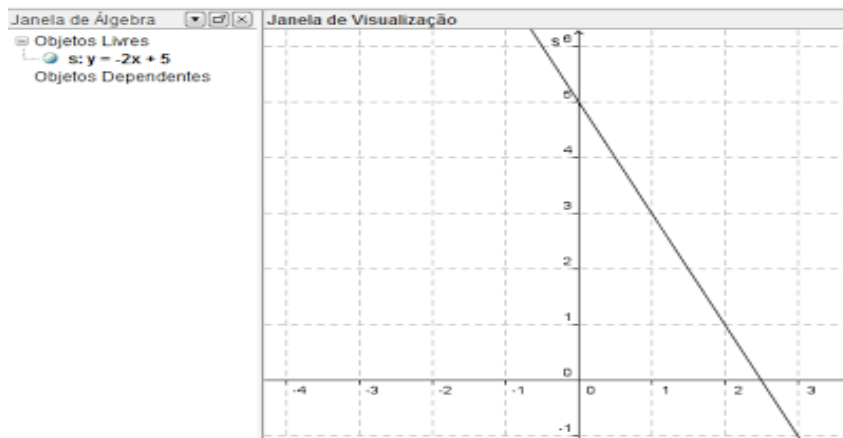
**Solução:**

Na caixa de entrada, digite a equação da reta  $s$ .

Na janela de álgebra, clique com o botão direito em cima da equação da reta  $s$  e escolha "Equação  $y=ax+b$ ".



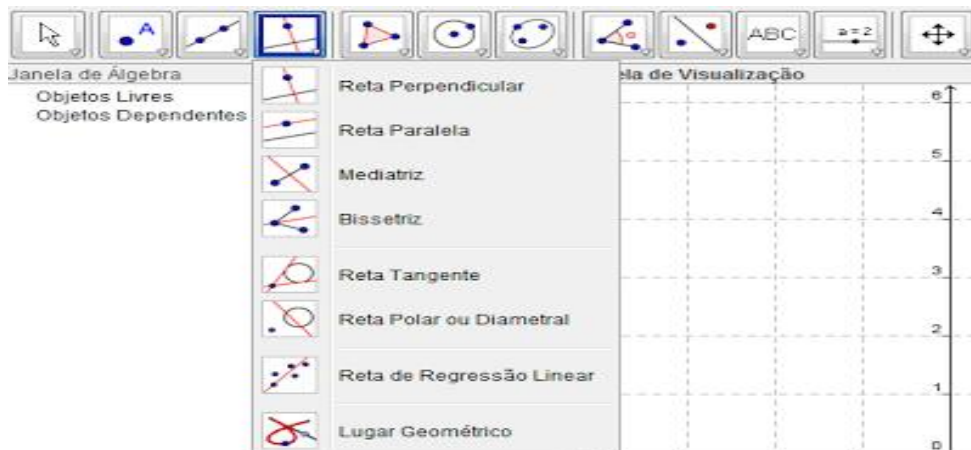
Verifique que aparecerá na Janela de Álgebra a equação reduzida:  $s: y = -2x + 5$ .



5) Determine a inclinação da reta formada pelos pontos  $A=(0,1)$  e  $B=(-3,4)$ .

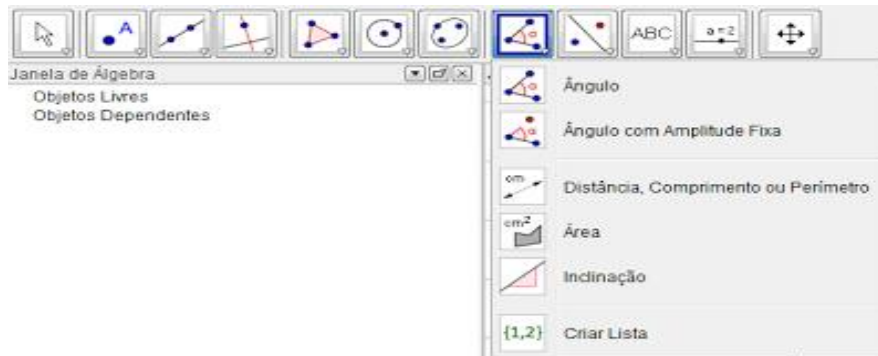
**Solução:**

Na caixa de entrada, digite os pontos A e B. Na caixa de entrada, digite "reta [A,B]", ou no 4º ícone da barra de ferramentas, escolha "Reta definida por Dois Pontos".



Na Janela de Álgebra ou na Janela de Visualização, clique no ponto A e, em seguida, no ponto B.

No 8º ícone da barra de ferramentas, escolha "Inclinação".



Verifique que aparecerá na Janela de Álgebra a seguinte solução:  $a_1 = -1$  e na Janela de Visualização:

