UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Uma Abordagem Geométrica do Ensino dos Números Complexos

Ledivaldo Gomes de Melo

Instituto de Matemática

Maceió, Novembro de 2015

PROFMAT

LEDIVALDO GOMES DE MELO

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Flores

Maceió

2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

M528a Melo, Ledivaldo Gomes de.
Uma abordagem geométrica do ensino dos números complexos / Ledivaldo Gomes de Melo. – 2015.
109 f. : il +CD.

Orientador: André Luiz Flores.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 100-102.
Apêndices: f. 103-109.

1. Matemática - Estudo ensino. 2. Números Complexos. 3. Geometria dinâmica. I. Título.
.

CDU: 372.851

Folha de Aprovação

LEDIVALDO GOMES DE MELO

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 27 de novembro de 2015.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. André Luis Flores - UFAL (Orientador)

____

Prof. Dr. – Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL

____

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández - UFRJ

Aos meus pais, Francisco de Melo e Quitéria Gomes de Melo,
por me direcionarem a educação que dignifica o ser humano.
A eles fico muito grato.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar junto de mim nas maiores dificuldades enfrentadas já nesta vida. A meus pais Francisco de Melo e Quitéria Gomes de Melo, a meus irmãos Valdir Junior Gomes de Melo, Ledijane Gomes de Melo e Irauto Gomes de Melo, e a minha sobrinha Lylia Sophia por velejar na alegria deste mundo.

Aos professores Quitéria Alves Calado, Katharina Melo, Lucia Lourenço, José Machado Filho, Murilo de Deus Camelo, Cristina de Tavares de Albuquerque, Evaneide Leite, Irene de Vasconcelos que de forma sutil ou grandiosa deixaram uma perspectiva de vida profissional gratificante a minha pessoa como professor.

Aos meus amigos do Ensino Médio, José Junior, José Cícero e Ademilton Correia.

Aos professores do PROFMAT, Dr. Vânio, Dr. José Carlos, Dr. André Flores, Dr. Hilário e Dr. Fernando Micena.

Ao Prof. Vicente Bezerra Filho, da Universidade de Pernambuco, que despertou-me para seguir com esta vida profissional de licenciatura, com a qual amo em trabalhar da melhor maneira.

A meus ex-alunos Cintia Ferreira, Severino Neto, Alex Gomes, Aldo Ferreira, Karine Cecília e Edivania Silva.

Aos colegas alagoanos do PROFMAT, que me receberam em seu Estado e não pouparam esforços para que eu e os demais colegas de Pernambuco nos sentíssemos em casa.

Aos colegas e amigos pernambucanos Djalma Gomes e Jucelio Melo com quem pude compartilhar mais de perto as dificuldades desses dois anos, e com o apoio de quem as pude superar.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ensignar é o que você grava em algo ou alguém. Se uma pessoa me pergunta o que aprendi na vida até agora, minha resposta revelará tudo que me ensignou, as marcas que foram gravadas em mim. Revelará minhas características, meus caracteres, meu caráter.

- MARIO SERGIO CORTELLA

RESUMO

É comum nas escolas brasileiras observadas pelas escolhas dos livros didáticos adotados, que os números complexos possuem uma abordagem mais algébrica do que geométrica, e portanto, menos explorados pelos docentes. É nesse circuito que o ensino com auxílio de programas de geometria dinâmica se mostra eficaz para as competências e habilidades requeridas no Ensino Médio. O objetivo desta monografia é poder mostrar uma nova ferramenta didática para o ensino de números complexos com enfoque nas operações com representações geométricas. Assim, esperamos que abordagem geométrica auxilie também na compreensão destes como objeto associado a álgebra, diminuindo o abismo entre o abstrato e o concreto. Esta monografia começará a introduzir o ensino dos números complexos na visão dos Parâmetros Nacionais Curriculares e de alguns livros didáticos. Em seguida, relatamos uma breve história dos números complexos, também como fazendo menção das suas operações. Ao final apresentamos atividades com representações geométricas dos números complexos.

Palavras-chave: Educação. Geometria dinâmica. Número complexo. Atividades geométricas.

ABSTRACT

It is common in Brazilian schools observed by the choices of textbooks adopted, that complex numbers have a more algebraic approach than geometric, and therefore less exploited by teachers. It is in this circuit that teaching with the support of dynamic geometry programs shows up effective for the skills and abilities required in high school. The purpose of this monograph is to be able to show a new didactic tool for teaching complex numbers with a focus on operations with geometric representations. So hopefully that the geometric approach also assists in the understanding of these as associated algebra object, reducing the gap between the abstract and the concrete. Our monograph will start introducing the teaching of complex numbers in the view of National Curriculum Parameters and some textbooks. Then we report a brief history of complex numbers also as making mention of his operations. At the end we present activities with geometric representations of complex numbers.

Keywords: Education. Dynamic geometry. Complex number. Geometric activities.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Neste século XXI, prevalece a intenção de modificar os baixos índices da educação, principalmente no repúdio que o estudante possui em relação a matemática, disciplina que há anos vem sofrendo modificações metodológicas e didáticas para tentar entender e repassar de forma correta e concreta a matemática que está envolto em cada cidadão, sejam elas em diversas áreas e ocasiões temporais.

É sempre comum que a estratégia deve ser acompanhada dos objetivos que queiram alcançar. Por esta razão, não há como fugir e sim pensar em alternativas para realizar um bom trabalho na escola, aproveitando assim, o envolvimento dos alunos para a construção e/ou perpetuação de conhecimentos em diversas áreas.

Todo trabalho educativo deve se basear nos fatores quantitativos e qualitativos, em que os dois venham a se completar para um trabalho envolto na reflexão. Como já dissera Borba:

> O quantitativo tem a ver com o objetivo passível de ser mensurável. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista, que destaca como pontos importantes para a produção da ciência a razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa. Embutida no seu significado está, também, a ideia de racionalidade entendida como quantificação.(BORBA, 2004, p. 103).
>
> [...] O qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências.(BORBA, 2004, p. 104).

Assim, ambos (qualitativo e quantitativo) se complementam, um não pode estar desconectado do outro, mesmo porque esta conexão está prevista nas diretrizes ditadas pelos órgãos governamentais. A permuta de informações responde a uma das preocupações fundamentais do ensino moderno, dando a possibilidade a cada aluno de construir seu próprio saber, valorizando assim a motivação pessoal. Reforça-se estas palavras D´Ambrosio:

> O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura. (D´AMBROSIO, 2002, p. 22).

Para tanto, desejou-se colocar dentro da disciplina matemática todos esses fatores, visando uma elaboração sistemática com temáticas matemáticas de conteúdos para prévio conhecimento e consolidação dos níveis de aprendizagens abordados no terceiro ano do Ensino Médio. É o caso, por exemplo, da geometria em que são abordadas situações que exigem do estudante a interpretação espacial da figura. Entendendo os elementos que configuram o objeto em estudo, já que segue-se, quando é dado, planos distintos para o estudo da geometria, ora no plano do logicismo, ora no plano do formalismo. Como observa Neves na sua análise histórica,

> [...] observa-se que, para a civilização egípcia, a matemática apresentava caráter estritamente prático e imediato. Os conhecimentos matemáticos, em especial os geométricos, foram gerados tendo uma aplicação motivadora para a descoberta e a validação, mas nem todas as civilizações tiveram problemas imediatos como motivadores. A civilização grega, por exemplo, devido à sua estrutura política e organizacional, ofereceu aos pesquisadores em matemática outra possibilidade de concebê-la, partindo do plano prático imediato para o abstrato futuro em que a aplicabilidade não estava visível. Desse modo, retratando a concepção dos povos que a tomaram como desafio, a matemática foi se desenvolvendo, tendo como alicerces "concepções" que influenciaram e influenciam a pesquisa matemática e a prática docente da atualidade. (NEVES, 2008, p. 56).

Portanto, no aspecto aritmético, algébrico e geométrico, o objetivo é proporcionar aos educandos uma variação do conhecimento matemático mostrando ao final a clara difusão de uma mescla de aspectos pertinentes ao primeiro momento a sala de aula, e também apresentar como de forma global o conhecimento matemático que é singular e ao mesmo tempo plural.

A Geometria no Ensino Fundamental apresentada pelos livros didáticos está sendo mais valorizada. Antes a Geometria costumava ser o capítulo "descartado" ou empurrado para o final do ano letivo, o que acarretava quase sempre numa forma resumida ou quase nula de abordagem. E quando lecionada era voltada a uma geometria com deduções e explicações puramente abstratas.

A escola (quase) sempre foi a parte introdutória de conceitos e atitudes visíveis à sociedade desde tempos remotos. Ela que compila e estrutura os dados envoltos na natureza buscando uma mediação entre o prático, o usual e o necessário. Mas que ao longo do tempo, foi se principiando em desvincular o ensino simples ao contexto usual.

Em uma das suas maneiras de diversificar a aprendizagem, de introduzir novas formas de adquirir o primordial do aprender e de autoconstruir o aprender, as escolas tiveram a ideia de reformular este conceito dando oportunidade a livre e espontânea vontade da autoaprendizagem por meio do conhecimento prático-usual-necessário, não desmembrando da disciplinaridade nas salas de aula.

Nesse contexto, dar-se-á diante o tema proposto, enfoque geométrico e algébrico com recursos computacionais visando com que o aluno compreenda os números complexos como ferramenta que está embutida em correlações tecnológicas e interação com o mesmo propondo uma contextualização nas respectivas áreas de ensino matemático.

Os números complexos paralelos à geometria baseada no *fazer-aprender*, tenta unir a parte manipulativa e construtiva com o conhecimento matemático cabível de desenvolver um pensamento exequível noutros contextos matemáticos. A relevância do tema trazido ao campo escolar faz-se induzir nos alunos um grau de compreensão e interpretação de aspectos que o circunda e que muitas vezes o é desprezada ou de menor importância para o debate docente.

Nesta realidade educativa é que se propôs complementar o estudo da temática em questão, numa escola pública do município de Santana do Mundaú, Alagoas, localizada na zona urbana, mas com aproximadamente 80% dos estudantes da zona rural. Em 2010, a enchente quase destruiu a cidade, afetando a escola estruturalmente e danificando o laboratório de informática, o que até então não tinham sido recompostos os equipamentos, portanto, o trabalho de pesquisa foi realizado com o auxílio de 23 alunos de dois terceiros anos do ensino médio, já que os mesmos tinham notebooks que puderam ser transportados à escola e cujos problemas e resultados estão relatados no Capítulo 4.

Ressaltou-se um trabalho voltado para uma dinâmica do ensino que trouxesse essa matemática “abstrata” para um nível de compreensão. Para isso, organizou-se um trabalho com propostas de atividades no ensino tendo como estudo os números complexos que para os alunos não possui nenhuma aplicação mesmo no aspecto visual.

Sensibilizar para a transposição do conhecimento teórico para o prático foi a questão principal ministrada nas aulas na construção deste trabalho, dando um verniz de modernidade à prática do ensinar. Para tanto, a ideia é deixar uma contribuição também aos professores do Ensino Médio que lecionam números complexos e onde muitas escolas públicas possuem um laboratório de informática, e que muitas vezes, o professor não sabe utilizar essa ferramenta, somente utilizando a superficialidade do programa computacional. Portanto, a intenção é tornar este conteúdo mais atraente, sendo fundamental à compreensão do aluno.

Muito se discute a remodelação do currículo do Ensino Médio, haja vista que há um grande abismo entre o que é ensinado e seu objetivo propriamente dito, que não fora uma preparação para o vestibular. Assim, este trabalho tem por objetivo contribuir para que o aluno tão conectado com redes sociais e com a dinâmica funcional de aplicativos, sinta que há recursos computacionais que podem auxiliá-lo na aprendizagem de um conteúdo, e não simplesmente acertar questões por mera habilidade conquistada por repetições.

Assim sendo, a ideia principal também é apresentar ferramentas que alcem o pensamento matemático quanto a funcionalidade do conteúdo, intercalados com a algébra e geometria para que possibilitem que o aluno saiba construir seu pensar matemático a partir das manipulações das figuras, auxiliando-o na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas, proporcionando ao término deste, formar alunos mais críticos e conscientes, que busquem soluções criativas para as mais diferentes situações.

Quanto à organização do trabalho, este segue dividido em quatro capítulos. No Capítulo 2, tratamos do ensino dos números complexos observados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e livros didáticos. O Capítulo 3, refere-se a uma breve história dos números complexos, bem como do realce geométrico destes números, no qual abordamos também a concepção matemática, dando ênfase a definição e propriedades. No capítulo 4, encontram-se atividades referentes ao tratamento dos números complexos com representação geométrica. Na última parte tratamos das considerações finais relativas a este trabalho.

2. ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

2.1 Ensino dos números complexos nos parâmetros curriculares nacionais

O estudo dos números complexos no currículo atual das escolas do ponto de vista geométrico possui uma abordagem superficial ou quase nula, pois os motivos ditos por seus interlocutores são que não faz parte da grade do ENEM ou possui uma algebrização desnecessária e abstrata para a realidade dos alunos, portanto, estes são os argumentos mais sustentados por aqueles que minimizam este assunto no Ensino Médio. No entanto, vemos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que tais justificativas quanto ao pensamento matemático não emergem a verdade:

> [...] a Matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional. (BRASIL, 2002, p. 111).

Apesar de não se apresentar nos livros didáticos ou no ensino por parte dos professores, ainda sim, o argumento que a matemática deva servir para ler e interpretar a realidade implica que o ensino-aprendizagem tenha uma remodelação neste aspecto, pois é apresentado aos alunos somente a forma algébrica, desenvolvendo muitas vezes a interpretação visual e simples de informações gráficas ou levando a manipulação de fórmulas. Porém, o estudo dos números complexos leva ao desenvolvimento da interpretação e reflexão dos objetos em estudo possibilitando um invólucro de conhecimento quanto a representação dos mesmos, no qual alguns problemas podem ser resolvidos de forma mais simples. Não podemos afirmar que o ensino dos números complexos poderá estar conectado no mundo fora da escola diretamente, mas como conhecimento pode impregná-lo em outros aspectos singulares, como também reafirma o PCN:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (BRASIL, 2002, p. 111).

É claro que para aprender matemática é necessário sedimentar seu aprendizado com conclusões e tomadas de decisões através de argumentações que demonstrem a compreensão do problema em análise. Daí, podemos afirmar que sutilmente ou não, dependendo da forma que é estruturada, exista um desenvolvimento das competências e habilidades matemáticas.

O ensino de números complexos no Ensino Médio ainda é envolto na sistematização de manipulações de termos, onde as operações matemáticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) são simplificadas quanto às resoluções semelhantes aos números reais e a representação gráfica é posta como o posicionamento de pares ordenados no eixo real e imaginário sem existir uma interpretação das operações no plano complexo, como serão discutidas no Capítulo 3.

É neste aspecto que podemos observar um fracasso primeiro do aluno, quanto a receptividade dos conteúdos expostos e sua compreensão, e em segundo do professor no ensino formalizado tecnicamente e algébrico no tratamento dos números complexos. Portanto, necessita que haja um saber escolar que esteja entre o saber cotidiano e o saber científico. O conceito matemático deve envolver o estudo das operações matemáticas no tratamento dos números complexos para uma compreensão mais ampla do papel deste também fora do campo algébrico, já que está no cerne do ser humano que a abordagem geométrica contribui com nível significativo à elaboração do pensar matemático e com sustentável adaptação à abordagem algébrica.

Os PCNs destacam três competências em matemática que podem construir um pensamento matemático adequado para maioria dos alunos:

> - representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
> - investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
> - contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondias ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.(BRASIL, 2002, p. 113).

Observamos nestas três competências que a escola se destaca como principal motivadora para uma aprendizagem significativa mesmo dentro do campo "abstrato" como afirmam alguns professores quando trata dos números complexos e suas operações. Mesmo os Parâmetros Curriculares Nacionais tratam os números complexos como objetos de estudos eventuais, Brasil(2002, p. 120), "Os objetos de estudo [do tema álgebra: números e funções] são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais". Há uma afirmação por parte dos elaboradores das diretrizes curriculares para a sutil exclusão deste dos assuntos tratados no ensino médio; ou seja, onde o PCN afirma que existe uma enorme importância enquanto linguagem da álgebra e do dimensionamento e representação de desenhos e modelos para o mundo concreto, o mesmo diminui o papel dos números complexos na construção de identificação de propriedades e conceitos que mesmo que não seja do cotidiano do aluno, mas auxilia no pensar matemático e associa saberes com demais elementos da matemática que possam realçar um significado para o aluno, assim contribuindo para o interesse desta área do conhecimento.

2.2 Ensino dos números complexos nos livros didáticos

O livro didático no Brasil é utilizado como ferramenta de atualização dos professores, planejamento de aulas e realização de atividades em sala de aula e em casa, servindo muitas vezes como o único objeto de pesquisa e orientação de aprendizagem do estudante. Dentro desta perspectiva, ressaltamos a análise de alguns livros didáticos que abordam este conteúdo e são utilizados pelos professores do Ensino Médio da rede pública. Segue uma análise mais detalhada de alguns livros.

Manoel Paiva (2013), *Matemática: Paiva*, volume 3, inicia com uma situação-problema envolvendo uma equação cúbica, a qual possui raízes complexas. Em seguida, enuncia o significado direto de i^2. O texto segue dando ênfase à forma algébrica e às operações com números complexos. Faz um paralelo entre a representação do conjuntos dos números reais na reta e em seguida o conjunto dos números complexos no plano de Argand-Gauss. Também realiza uma representação no plano das coordenadas polares. Apresenta um total de 64 atividades, dos quais 21 são referentes às representações geométricas.

Na última parte do capítulo, o autor trata de movimentos no plano com uma atividade de translação e rotação trabalhando com multiplicação de números complexos.

Obra Coletiva, editor responsável: Fabio Martins de Leonardo (2013), Editora Moderna (Org.), *Conexões com a Matemática*, traz um resumo histórico dos números complexos, ressalta a forma algébrica e em seguida indica as operações com números complexos. Demonstra através de exercícios resolvidos uma representação da multiplicação dos números complexos na forma trigonométrica. Este livro possui 78 atividades, das quais 11 são referentes as representações no plano complexo.

Joamir Souza (2013), *Novo Olhar, Matemática*, o autor faz uma abordagem inicial da história dos números complexos, em seguida explana a não possibilidade de resolução de uma equação com raiz quadrada negativa. Faz menção à representação algébrica de um número complexo. O aspecto geométrico é mais representativo de como se esboça um argumento, a parte real e imaginária no plano. O livro possui 102 atividades/desafios/atividades complementares, dos quais 24 fazem referência a representação geométrica ou interpretação de uma informação geométrica.

Katia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz (2013), *Matemática: Ensino Médio*. As autoras iniciam com uma breve história, em seguida fazem uma abordagem algébrica dando ênfase as raízes complexas. Trata das operações matemáticas de forma sistematicamente algébrica, também como representa algebricamente o número complexo e suas operações na forma trigonométrica, realçando pouco a interpretação geométrica. Dos 62 exercícios/problemas que compõem o conteúdo, destacam-se 7 atividades envolvendo representação geométrica.

Luiz Roberto Dante (2003), *Matemática, Contexto & Aplicações*. Na introdução do assunto, o autor revisa os cinco conjuntos dos números estudados em séries anteriores (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais), depois faz uma abordagem algébrica dos números complexos. Na seção sobre representação geométrica associa a cada complexo $z = a + bi$ um vetor com origem do sistema de coordenadas e o ponto $P(a,b)$. Faz menção à interpretação geométrica da adição entre dois números complexos, assim como do conjugado do mesmo. A forma trigonométrica é apresentada através de vetores. Também na multiplicação entre complexos como exercício, é feito a interpretação geométrica dessa operação, e na seção que trata-se da radiciação de números complexos, é representada geometricamente as raízes do número complexo na circunferência. Na seção, *Outras Aplicações*, observamos que há uma preocupação do autor em explicar com detalhes e geometricamente o significado da multiplicação entre um número complexo pelo número imaginário puro. Ao final do capítulo, há um resumo da parte histórica dos números complexos. E quanto aos exercícios, das 115 atividades, há uma preocupação quanto a abordagem algébrica, mesmo quando há a possibilidade de solicitar ao aluno que faça uma representação geométrica do número complexo distribuído em 11 atividades.

Em todos os livros pesquisados, conclui-se que é predominante a abordagem algébrica dos números complexos, ficando a geométrica especificamente centralizada na representação da parte real e imaginária. Desse modo, a geometria tratada com números complexos quanto as operações destes, observadas do ponto de vista geométrico nunca foram requeridas nos livros analisados como objetivo de aprofundar a interpretação e o conceito consistindo na representação geométrica como recurso significativo. Cabe observar que o autor Dante propõe uma discussão mais ampla da interpretação geométrica na última seção do capítulo.

Quanto aos exercícios, também existe um forte tratamento algébrico na estratégia de solução das atividades propostas, o que influencia o processo repetitivo e resolução mecânica e superficial dos problemas/exercícios. Se restringindo, ainda há um sistema tradicional de ensino com fragmentos construtivistas, porém não refletem nas atividades propostas pela maioria dos autores, ou alguns que citam ao leitor (professor/aluno) que existe um diferencial, além da repetição na resolução de questões. Portanto, como em outros conteúdos, não permite que o tratamento geométrico se transforme em expressões matemáticas que conduzam o estudante ao entendimento de conceitos e propriedades.

3 OS NÚMEROS COMPLEXOS

3.1 Breve História dos Números Complexos

No ano 50 E.C., o matemático grego Héron de Alexandria deparou-se com problemas relacionados aos “números estranhos” ou precisamente sobre a raiz quadrada de -1, que apareciam em seus cálculos, como por exemplo, no cálculo do volume da parte de uma pirâmide. Somente no século XVI é que o matemático Niccolò Fontana — também chamado de Tartaglia — usou pela primeira vez uma raiz quadrada de números negativos.

Fontana aprendeu matemática sozinho e escreveu vários livros importantes e traduziu os Elementos de Euclides para o italiano, e as obras de Arquimedes para o latim pela primeira vez. Mas foi seu trabalho sobre equações cúbicas que acabou por arruiná-lo, uma vez que o método de Fontana para encontrar a solução de algumas equações cúbicas, os resultados envolviam o cálculo da raiz quadrada de números negativos. O matemático Scipione del Ferro, havia descoberto uma solução parcial para as equações cúbicas com aparência $x^3 + ax = b$, guardando-a em segredo, contando para seu assistente, Fior, quando estava prestes a morrer. Entretanto, Fior começou a apresentar para a comunidade acadêmica que era o autor das soluções com raízes cúbicas. Com esta descoberta, Fontana desafiou Fior para uma competição, onde cada matemático enviaria 30 problemas matemáticos. Fontana, enviou 30 problemas diferentes e Fior 30 problemas envolvendo equações cúbicas, onde imaginava que somente ele saberia responder. Com isto, Fontana resolveu todos os problemas em duas horas, tornando-se famoso por esse feito.

Muitos se admiraram pelo sucesso de Fontana e ficaram curiosos para saber qual solução geral poderia existir para equações cúbicas. De início Fontana mostrou-se relutante, mas estimulado pela perspectiva de que sua descoberta lhe proporcionasse um emprego melhor, cedeu e revelou seu método a um famoso médico, matemático, astrônomo e astrólogo Girolamo Cardano (1501-1576).

Cardano notara que o método de Fontana tinha algumas operações “estranhas” com números. Quando tentava encontrar a solução de algumas equações cúbicas, os resultados envolviam o cálculo da raiz quadrada de números negativos. Desde o tempo de Fontana, os números imaginários continuaram a aparecer regularmente em matemática. Descartes foi o primeiro a expressar o termo “imaginário” para esses números, usando a palavra num sentido pejorativo. Muito tempo depois, os matemáticos De Moivre e Newton, uniram trigonometria com números complexos para resolver problemas que Cardano não conseguia resolver. Mais tarde Euler introduziu a notação *i*, a qual era uma maneira mais simples de escrever $\sqrt{-1}$ (quanto a introdução da notação *i* e *-i*, há uma divergência de acordo com o Bentley (2009, p. 238) e Roque (2012, p. 323).

Quanto a Cardano, do ponto de vista intelectual era brilhante, quanto ao caráter era no mínimo uma figura controversa. E qual não foi a surpresa de Tartaglia quando, em 1545, ao sair a primeira edição do importante livro *Ars Magna*, de autoria de Cardano, continham os métodos de Tartaglia, no entanto, com referência a Cardano a descoberta, assim, provocando um conflito entre ambos.

Na sua obra Cardano resolve o problema de dividir 10 em duas partes iguais, cujo produto seja 40. Algebricamente, temos duas partes desconhecidas x e y, onde podemos formar o sistema:

$x+y=10 \quad \text{e} \quad x\cdot y=40$

Isolando y e substituindo na segunda equação temos a equação quadrática $x^2-10x+40=0$. Resolvendo a equação, obtemos as raízes $x=5\pm\sqrt{-15}$. Para tal resultado, Cardano cita *"Pondo de lado torturas mentais e multiplicando* $5+\sqrt{-15}$ *por* $5-\sqrt{-15}$*. Portanto, o produto é 40 ... e até aí vai a sutileza aritmética, da qual este extremo é, como eu disse, tão sutil que é inútil".*

O grande período de retórica solução de $x^3+mx=n$, que figura no Ars Magna, incluía outra notável descoberta, devida a Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano, um método para reduzir equações do quarto grau a equações cúbicas.

Outro grande auxiliar a expansão da ideia dos números complexos foi Zuanne de Tonini da Coi, como cita Gilberto Garbi:

> Dentro do costume da época, um matemático chamado Zuanne de Tonini da Coi, submeteu a Cardano a equação $x^4+6x^2+60x+36=0$. Após várias tentativas, Cardano passou-a ao jovem Ferrari que, num lampejo de gênio, encontrou um método geral para a solução das equações do 4° grau. (...) Ferrari, então, procurou reagrupar os termos da equação incompleta de modo a ter polinômios quadrados perfeitos em ambos os lados da igualdade. Se isso fosse possível, seriam extraídas raízes quadradas, cair-se-ia em equações do 2º grau e o problema estaria resolvido. (...) O grande mérito de Ferrari foi haver demonstrado que as raízes das equações do 4º grau podem ser achadas usando-se apenas as operações da Álgebra.(GARBI, 2006, p. 122).

Uma consequência inesperada e admirável do método de Tartaglia foi a descoberta de que os números reais são insuficientes para o estudo da Álgebra, sendo necessário trabalhar com os "números imaginários".

É conveniente salientar que foram as equações do 3º grau e não as do 2º grau que levaram à descoberta dos números complexos. Três séculos mais tarde, o topógrafo e cartógrafo norueguês Caspar Wessel foi o primeiro a representar geometricamente os números imaginários. Entretanto, por um descuido histórico o suíço Jean-Robert Argand acabou levando o mérito. Denominando os diagramas geométricos dos números complexos de diagramas de Argand, não diagramas de Wessel.

Os personagens matemáticos históricos que contribuíram para a estruturação dos números complexos foram decisivos para o desenvolvimento dos estudos do eletromagnetismo e tecnologia da informação. Mesmo na época não sendo aceitáveis, como o fato de Descartes, por exemplo, apesar de ter tido preconceito, mas foi um dos primeiros a aceitar os números negativos como soluções de equações e dá o nome de "raízes imaginárias" àquelas que envolvem soluções com raiz quadrada de -1. Entretanto, é de autoria de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a expressão "números complexos".

3.1.1 Representação geométrica dos números reais e imaginários

Entre o final do século XVIII e início do século XIX, foi proposta a representação geométrica dos números complexos na tentativa de uní-las a outras ferramentas, principalmente algébricas.

Paralelamente à representação geométrica dos números complexos se discutia a representação das quantidades negativas, ou seja, não se compreendia o papel dos números negativos quanto a ideia por exemplo de subtrair $1-2$, o que na época fora chamado de "imaginário". Já, Argand acreditava que era necessário dar um aspecto de "realidade" a estes termos.

Assim, existiu os primeiros caminhos para introduzir a geometria no estudo dos números complexos com o sentido de orientação como já destaca Tatiana Roque:

> A ideia de relação entre grandezas assim introduzida por Argand inclui: uma relação numérica, que depende dos valores absolutos das grandezas; e uma relação de orientação, que pode ser uma relação de identidade ou de oposição. Argand conseguia, assim, que as quantidades negativas se tornassem "reais" reunindo as noções de "quantidade absoluta" e de "orientação". (ROQUE, 2012, p. 444).

Dentro deste aspecto, os números complexos também destacaram uma relação de $+i$ com $-i$, assim como a relação de $+1$ com -1, (símbolo este que Gauss introduz nos seus trabalhos).

Foi Argand que analisou as possibilidades de média proporcional entre essas grandezas. Desta forma temos a direção perpendicular para representar $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$. Assim, se deu a representação desses números no plano, $+1$ (à direita), -1 (à esquerda), $+i$ (acima), $-i$ (abaixo) em relação à origem (0,0). Portanto, a multiplicação por $\sqrt{-1}$ pode ser entendida como uma rotação, em sentido horário, quando se multiplica por $-\sqrt{-1}$; e anti-horário quando se multiplica por $+\sqrt{-1}$, agora as quantidades $-\sqrt{-1}$ e $+\sqrt{-1}$ apresentam-se como termos “reais” e de “orientação”. Logo, o ponto $(0,0)$ representa um centro de rotação, e $(\sqrt{-1})^2 = -1$ determina que o número $+1$, na reta real, sofrerá uma rotação de $180°$, estando no plano à esquerda, e com mesmo comprimento de distância do ponto $(0,0)$ a $+1$.

Ou seja, ao multiplicar dentro da ideia dos números complexos $\sqrt{(-2)}.\sqrt{(-2)}$, o entendimento agora é que se $\sqrt{2.(-1)}.\sqrt{2.(-1)} = \sqrt{-1}.\sqrt{2}.\sqrt{-1}.\sqrt{2}$, multiplicando os semelhantes temos, $\left(\sqrt{-1}\right)^2.2 = (-1).2 = -2$, o processo é que $\sqrt{-1}.\sqrt{2}.\sqrt{-1}.\sqrt{2}$ nos fornece a ideia geométrica de que $\sqrt{2}$ será multiplicado por $\sqrt{2}$ novamente, e quando multiplicar por $\sqrt{-1}$ duplamente, informa que o resultado do produto anterior sofrerá uma rotação de $180°$ no sentido anti-horário, ou seja o resultado será -2. Daí, tem-se um novo realce que sobressai da algebrização, representando os complexos no plano que chamamos de Argand-Gauss, pela contribuição desses notáveis matemáticos.

Assim, essa ideia dos números complexos efetivamente aceita como grandezas orientadas, foi construída com a introdução da noção de vetor, que apesar de surgir com base forte no século XIX, as quantidades direcionadas de Argand já se pareciam bastante com vetores. Com toda essa forte admissão destes números na matemática, estes números “imaginários” foram chamados de “complexos”.

Ainda há nas escolas públicas um ensino voltado para manipulações algébricas e poucas geométricas, sem dar o devido valor a sua representação, escondendo a beleza da aplicação destes números na vida real ou mesmo numa geometria mais complexa como mostrou Benoît Mandelbrot com o chamado *Conjunto de Mandelbrot*. Geralmente, reduz-se o ensino somente a explicar como se apresenta uma equação, na qual a raiz não está contida nos números reais, e sendo necessário buscar outra representação e consequente solução, tornando a aprendizagem muito simplista para o estudante.

3.2 Os Números Complexos

3.2.1 Definição e propriedades

Neste capítulo trataremos da definição e propriedades dos números complexos, bem como da sua representação geométrica a cada operação citada. Segue a definição e propriedades dos números complexos dada por Gauss, também encontrada em Hefez (2013, p. 175) e Iezzi (2013, p. 6).

Definição: Denotaremos de conjunto de números complexos por $\mathbb{C}$, o conjunto de pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação.

Tomando os pares ordenados (a,b) e (c,d), com *a,b,c* e d números reais, temos as operações definidas da seguinte forma:

(i) Igualdade: $(a,b) = (c,d)$ se, e somente, se $a = c$ e $b = d$;

(ii) Adição: $(a,b)+(c,d) = (a+c,b+d)$;

(iii) Multiplicação: $(a,b).(c,d) = (ac-bd,ad+bc)$.

Propriedades da Adição:

A operação da adição em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:

A1) Propriedade Associativa;

A2) Propriedade Comutativa;

A3) Existência do Elemento Neutro (e_a);

A4) Existência do Elemento Simétrico.

Demonstração: Considerando $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ e $z_3 = e+fi$, temos:

A1) $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3), \forall z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)+z_3 &= [(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (a+c,b+d)+(e,f) = \\ &= [(a+c)+e,(b+d)+f] = [a+(c+e),b+(d+f)] = \\ &= (a,b)+(c+e,d+f) = (a+b)+[(c,d)+(e,f)] = \\ &= z_1+(z_2+z_3).\end{aligned}$$

A2) $z_1+z_2=z_2+z_1, \forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}$

$z_1+z_2=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(c+a,d+b)=(c,d)+(a,b)=z_2+z_1.$

A3) $\exists e_a \in \mathbb{C} | z+e_a=z, \forall \ \in \mathbb{C}.$

Fazendo z = (a,b), provemos que existe $e_a=(x,y)$ tal que $z+e_a=z.$

Como (a,b) + (x,y) = (a,b), temos a + x = a e b + y = b, quando x = y = 0.

Portanto, existe $e_a=(0,0)$, chamado *elemento neutro* para a adição, que somado a qualquer número complexo z dá como resultado o próprio z.

A4) $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C} | z+z'=e_a.$

Já que temos z = (a,b), vamos provar que existe z´ =(x,y) tal que z + z'= e_a.

Propriedades da Multiplicação:

A operação de multiplicação em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:

M1) Propriedade Associativa;

M2) Propriedade Comutativa;

M3) Existência do Elemento Neutro(e_m);

M4) Existência do Elemento Inverso.

Demonstração:

M1) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1,z_2,z_3 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) \\
&= (ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f) = \\
&= [(ac-bd)e-(ad+bc)f,(ac-bd)f+(ad+bc)e] \\
&= [ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce] = \\
&= [a(ce-df)-b(de+cf),a(de+cf)+b(ce-df)] = \\
&= (a,b)\cdot(ce-df,cf+de) = (a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)] = z_1\cdot(z_2\cdot z_3).
\end{aligned}$$

M2) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, z_1,z_2 \in \mathbb{C}.$

$z_1 \cdot z_2 = (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,ad+bc) = (ca-db,cb+da) = (c,d)\cdot(a,b) = z_2 \cdot z_1.$

M3) $\exists e_m \in \mathbb{C} | z.e_m = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Como $z = (a,b)$, provemos que existe $e_m = (x,y)$ tal que $z \cdot e_m = z$:

$(a,b) \cdot (x,y) = (a,b) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (a,b)$ se, e somente, se $ax - by = a$, e $bx + ay = b$, assim teremos $x = 1$ e $y = 0$. Portanto existe o **elemento neutro** para a multiplicação.

M4) $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z" \in \mathbb{C} | z.z" = e_m$.

Tomando um $z = (a,b)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, provemos que existe $z" = (x,y)$ tal que $z.z" = e_m$:

$(a,b) \cdot (x,y) = (1,0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1,0)$. Onde resolvendo por um sistema, encontramos:

$x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ e $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$, portanto, existe $z" = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, chamado *inverso multiplicativo* de z.

Temos ainda a operação de multiplicação em relação à adição em $\mathbb{C}$, a qual damos de propriedade distributiva.

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a,b) \cdot [(c,d) + (e,f)] + (a,b) \cdot (c+e, d+f) = \\
&= [a(c+e) - b(d+f), a(d+f) + b(c+e)] = \\
&= [ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be] = \\
&= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)] = \\
&= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) = \\
&= (a,b) \cdot (c,d) + (a,b) \cdot (e,f) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.
\end{aligned}
$$

3.2.2 Números reais e a parte imaginária

Com a introdução dos números complexos temos a possibilidade de realizar operações aditivas e multiplicativas, onde podemos calcular a raiz quadrada de números negativos, o que antes dentro do conjunto dos números reais isso não era possível. Com essas operações aditivas e multiplicativas para $\mathbb{R}^2$, satisfazendo às propriedades na seção 3.2.1, denotamos por $\mathbb{C}$, no qual é um corpo dos números complexos, assim como nos referimos ao corpo dos números reais, com os reais contidos nos complexos. Dada a definição e propriedade dos números complexos, e seja $(a,b) \in \mathbb{R}$, podemos escrever,

$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b.0 - 0.1, b.1 + 0.0) = (a,0) + (b,0).(0,1)$.

Portanto, todo número complexo pode ser representado usando somente os números da forma $(x,0)$ e o número $(0,1)$. Se substituirmos $(a,0)$ e $(b,0)$ por a e b respectivamente, e $(0,1)$ por i. Temos, $(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(b,0)(0,1) = a+bi$.

Observe que $i^2 = (0,1).(0,1) = (0.0-1.1, 0.1+1.0) = (-1,0) = -1$.

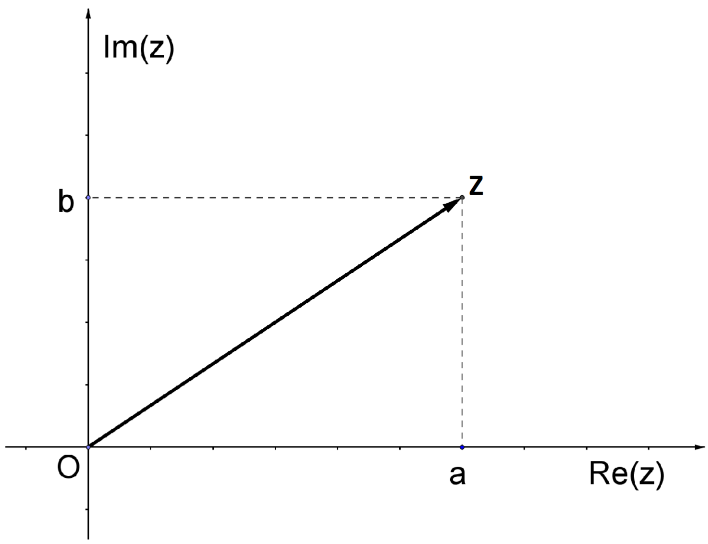
Assim, temos que o número complexo escrito na forma $a+bi$, com a e b números reais, a será chamado de parte real e b será chamado de parte imaginária.

3.2.3 Representação geométrica

Os números complexos podem ser representados no plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo. Da representação de $z = a+bi$, podemos associar o valor de a ao eixo da abscissa, onde será chamado de eixo real (Re) e o valor de b ao eixo da ordenada, que será chamado de eixo do campo imaginário (Im).

No plano de Argand-Gauss podemos representar um ponto Z(a,b), como um vetor $\overrightarrow{Oz}$, com $z = a+bi$ (figura 1). Entende-se por vetor, como um símbolo matemático que representa o módulo, a direção e o sentido de uma grandeza vetorial, no qual é representado por um segmento orientado com origem em O e extremidade em Z(a,b).

Figura 1: Plano Argand-Gauss



Fonte: Autor, 2015.

Com a representação geométrica do número complexo, podemos realizar operações matemáticas em $\mathbb{C}$, e também representá-las geometricamente.

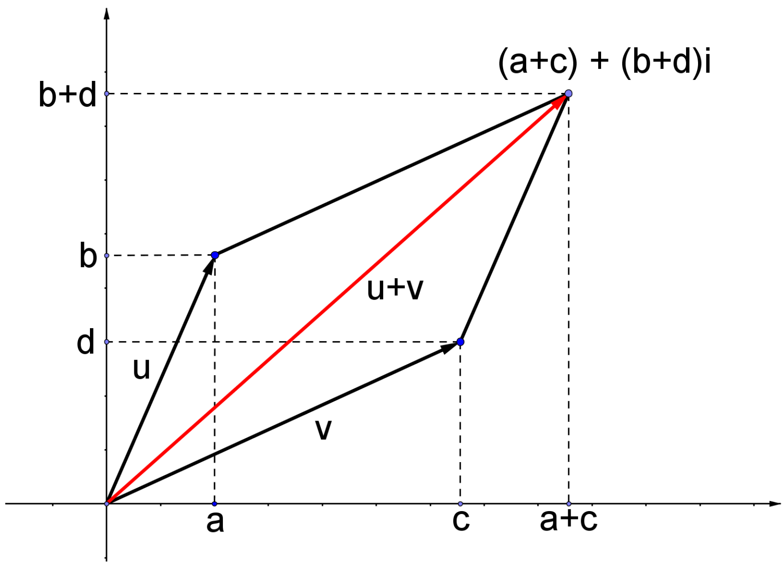
3.2.4 Operações dos números complexos representadas geometricamente

Esta seção discorre sobre as operações dos números complexos apresentadas com suas respectivas representações geométricas.

3.2.4.1 Adição

Considerando $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$, vamos somar os números complexos u e v, onde temos:
$u+v = (a+bi)+(c+di) = a+c+bi+di = (a+c)+(b+d)i$. Representando a soma de $u+v$ geometricamente, obtemos:

Figura 2: Representação da soma de u e v



Fonte: elaborada pelo autor

Observamos, portanto, que a soma de dois números complexos representados por vetores, retratam o método do paralelogramo, visto no ensino de composição de movimentos na disciplina Física. Método este, no qual temos dois vetores com a mesma origem O, que a partir das extremidades de cada um deles, traça-se uma paralela ao outro vetor, determinando um paralelogramo, com a diagonal deste representando o vetor resultante com a mesma origem em O.

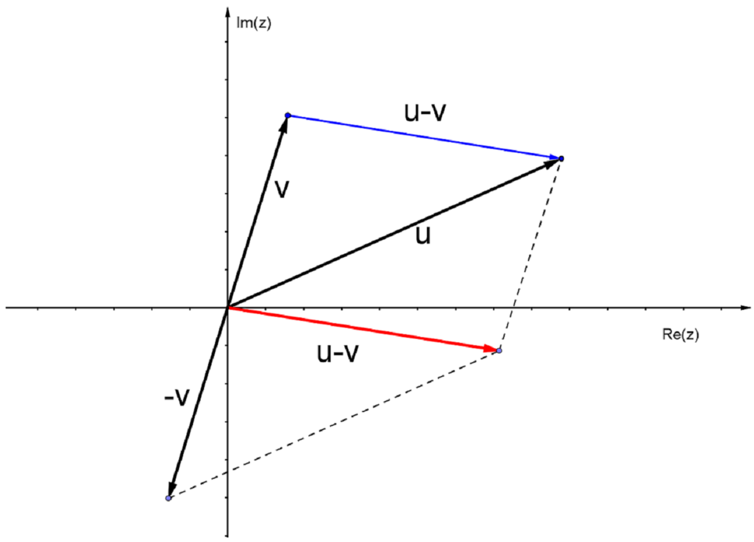
3.2.4.2 Subtração

Podemos também representar a subtração entre dois números complexos u e v, como uma soma de vetores, no qual um deles é a forma oposta, ou seja, no nosso exemplo, $u-v=u+(-v)$, mostrando geometricamente (figura 3), vemos que o vetor resultante $(u-v)$ segue o método do paralelogramo, como visto na subseção Adição.

Na forma algébrica, temos que:

$u-v=(a+bi)-(c+di)=a-c+bi-di=(a-c)+(b-d)i.$

Figura 3: Representação da subtração entre u e v



Fonte: Autor, 2015.

3.2.4.3 Multiplicação

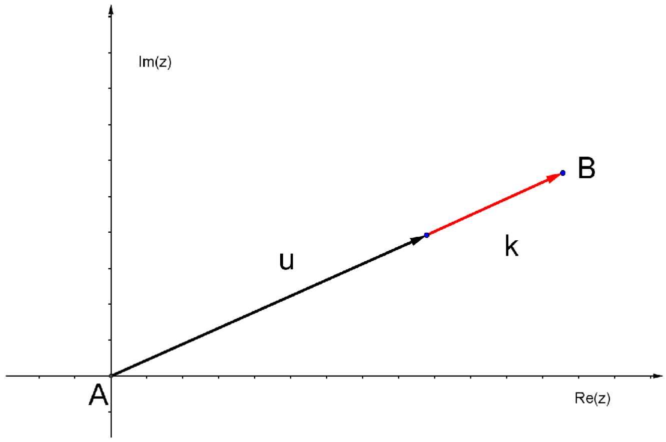
Vejamos o processo da multiplicação dos números complexos em três casos:

1º caso: Multiplicação de uma constante k real por $u=(a,b)$.

Assim, temos, $k\cdot u=k(a,b)=(k,0)\cdot(a,b)=(k+0i)\cdot(a+bi)=ka+kbi=k(a+bi)=k(a,b)$. Portanto, temos um número escalar multiplicando o número complexo u.

Vejamos a representação geométrica.

Figura 4: Represesentação da multiplicação de uma constante por um número complexo



Fonte: Autor, 2015.

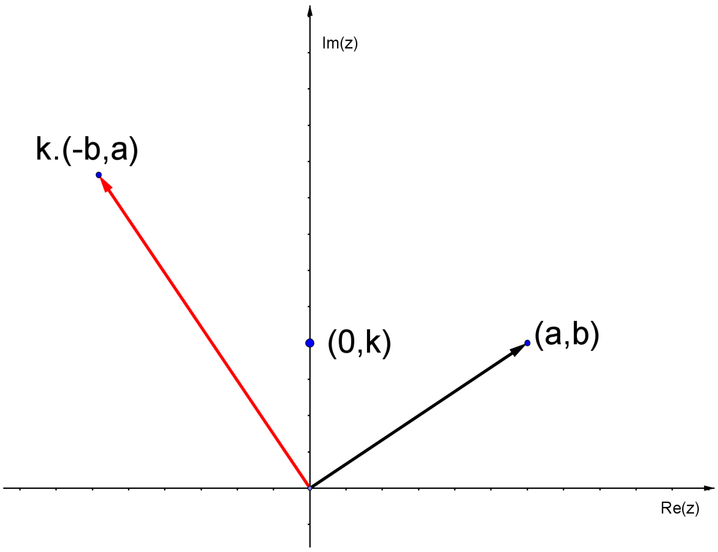
Deve-se salientar que a representação do vetor $k \cdot u$ corresponde a representação no gráfico do vetor $\overrightarrow{AB}$.

2º caso: Multiplicação de um número complexo por um número imaginário puro.

Considerando $u = (a,b)$ e $v = (0,k)$, temos: $u \cdot v = (a,b) \cdot (0,k) = (a+bi) \cdot (0+ki) = aki + bki^2 = aki - bk = k(-b+ai) = k(-b,a)$.

Veja a seguir a representação geométrica.

Figura 5: Multiplicação de um número complexo por um número imaginário



Fonte: Autor, 2015.

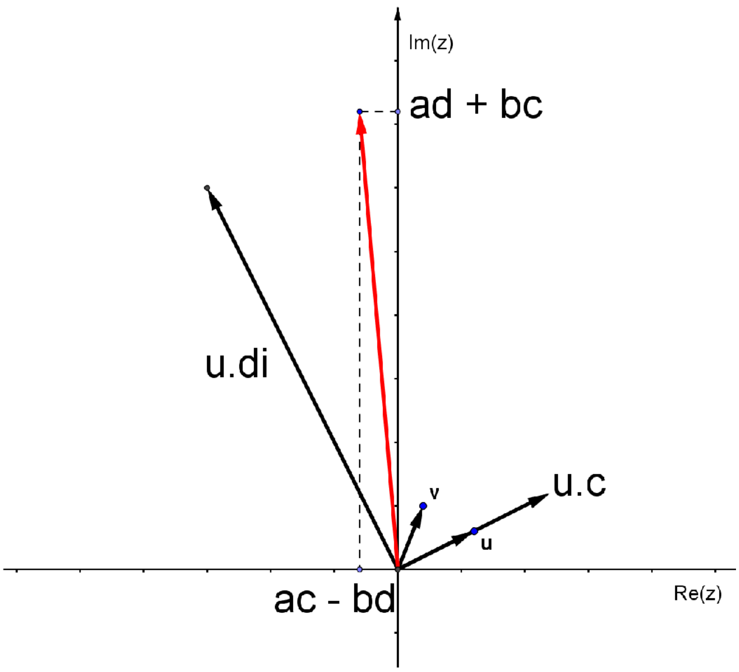
Observa-se na figura 5, que ao multiplicar um número complexo por um número imaginário, obtemos uma rotação de 90º sobre $u = (a,b)$, tornando-o um novo par ordenado $u' = k(-b,a)$.

3º Caso: Multiplicação de números complexos por números complexos.

Seja $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$, com *a, b, c* e *d* reais. Temos $u \cdot v = (a,b).(c,d) = (a+bi) \cdot (c+di) = ac+adi+cbi+bdi^2$, portanto, $u \cdot v = ac-bd+(ad+bc)i.$

Nesta forma algébrica temos que para $c > 1$, $ac+cbi$ representa um aumento do número complexo u, e para $c < 1$, $ac+cbi$ representa uma diminuição do número complexo u, enquanto a expressão $-bd+adi$, representa uma rotação de 90° do número complexo u multiplicado por d. Vejamos como fica representado geometricamente tal operação.

Figura 6: Multiplicação de u por v



Fonte: Autor, 2015.

Quanto à operação divisão de um número complexo por um número complexo, obtemos as ações opostas da multiplicação, ou seja, uma "diminuição" de um número complexo dado mais uma rotação no sentido horário do mesmo.

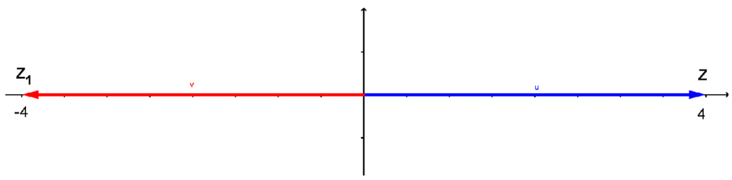
Nesse contexto da multiplicação de números complexos por números complexos, podemos relacionar à representação da multiplicação de números negativos na reta real.

Assim, podemos mostrar ao aluno numa nova perspectiva a representação de número real multiplicado por número real negativo, como por exemplo, $4 \times (-1)$. A interpretação dentro do conjunto dos números complexos se apresentaria da seguinte maneira:

$4 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = 4 \cdot i \cdot i = 4 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4.$

Geometricamente, podemos interpretar essa operação anterior como um vetor associado ao número real 4 que consistirá numa rotação dupla de 90° no eixo real. Daí, obtemos o resultado como mostrado na figura seguinte.

Figura 7: Multiplicação de u por i



Fonte: Autor, 2015.

O trabalho com números negativos neste aspecto de rotação de um vetor, talvez seja uma sequência didática conveniente para em seguida introduzir a operação de número complexo por imaginários puros, e posteriormente multiplicação de números complexos por números complexos.

3.2.4.4 Conjugado do número complexo

Sabemos que, se existe um número z, $z \neq 0$, então, existe um número real $\frac{1}{z}$, tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$. Entretanto, temos de determinar o número complexo $\frac{1}{z}$.

Logo, temos de determinar o conjugado do número complexo. Para isso, vamos considerar que $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com a, b $\in \mathbb{R}$, e o conjugado de z como sendo $\overline{z} = a - bi$.

Algebricamente, podemos observar que,

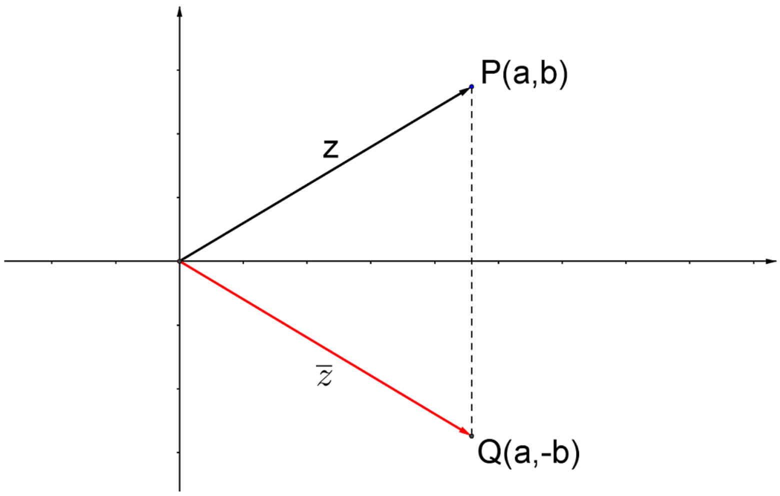
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{\overline{z}}{(a^2+b^2)}$$

ou mais especificamente,

$$\frac{1}{z} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Vamos representar geometricamente o conjugado do número complexo z, no qual $\overline{z}$ é a representação do simétrico de z em relação ao eixo Ox.

Figura 8: Representação de $\overline{z}$



Fonte: Autor, 2015.

3.2.4.4.1 Propriedades do conjugado

Ainda considerando que $z = a + bi$ e $w = c + di$, vejamos as propriedades do conjugado dos números complexos:

i) $\overline{z} = 0$ se, e somente se, $z = 0$;

ii) $\overline{\overline{z}} = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$;

iii) $\overline{z} = z$, se somente se, $z \in \mathbb{R}$;

iv) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$;

v) $\overline{z.w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

vi) se $z \neq 0$, então $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$;

vii) Re(z)=$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e Im(z)=$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Faremos a demonstração de cada propriedade:

i) De fato, se $a-bi=0$ temos $a=bi$, o que implica $a+bi=bi+bi=0$, onde temos $bi=0$, portanto $bi=0=a$. Então $a=b=0$, logo, $a+bi=0$. Reciprocamente, se $z=0$, temos $a=b=0$, então, $\overline{z}=0$;

ii) Se $z=a+bi$ e $\overline{z}=a-bi$, temos que $\overline{\overline{z}}=a-(-bi)$, o que implica $\overline{\overline{z}}=a+bi=z$;

iii) Seja $z=a+bi$. Se $a+bi=z=\overline{z}=a-bi$, então $b=-b$, logo $2b=0$; assim, $b=0$ e $z=a+0i\in\mathbb{R}$. Reciprocamente, se $z=a\in\mathbb{R}$, então $\overline{z}=a=z$;

iv) Sabendo que $z=a+bi$ e $w=c+di$, temos:

$$z+w=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overline{z+w}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z}+\overline{w};$$

v) Considerando também que $z=a+bi$ e $w=c+di$, obtemos:

$$\overline{z\cdot w}=\overline{(a+bi)\cdot(c+di)}=\overline{ac+adi+bci+bdi^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overline{z\cdot w}=ac+bdi^2-adi-bci=ac-adi-bci+bdi^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overline{z\cdot w}=a(c-di)-bi(c-di)=(a-bi)(c-di)=\overline{z}\cdot\overline{w};$$

vi) Sabendo que $z=a+bi$ e $\overline{z}=a-bi$. Seja $\overline{z^{-1}}=\overline{(a+bi)^{-1}}=(a-bi)^{-1}=\overline{z}^{-1}$;

vii) Provando primeiro Re(z)=$\dfrac{z+\overline{z}}{2}$:

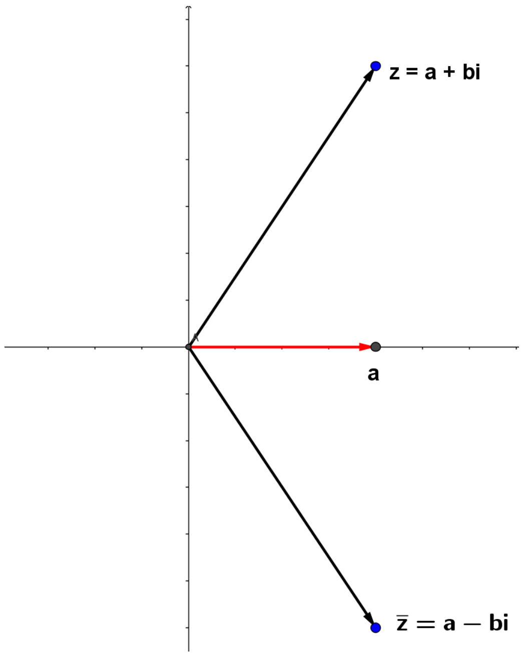
$$\frac{a+bi+a-bi}{2}=\frac{2a}{2}=a=Re(z).$$

Provando Im(z)=$\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, temos:

$$\frac{a+bi-a+bi}{2i}=\frac{2bi}{2i}=b=Im(z)$$

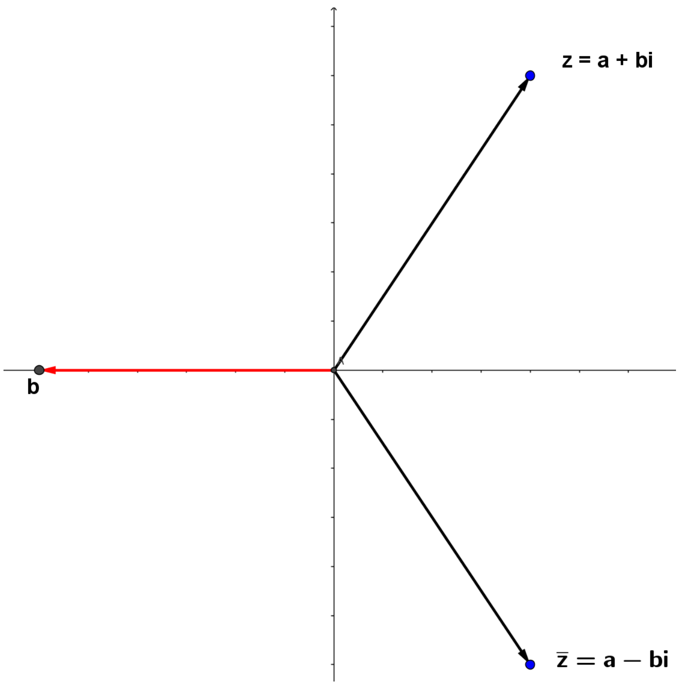
Vamos representar geometricamente os dois casos da propriedade (vii).

Figura 9: Representação de Re(z)



Fonte: Autor, 2015.

Figura 10: Representação de Im(z)



Fonte: Autor, 2015.

3.2.4.5 Divisão

Considerando $z = a + bi$, $w = c + di$ e $\overline{w} = c - di$, com $w \neq 0$, e sabendo que,
$w\overline{w} = (c+di).(c-di) = c^2 - d^2i^2 = c^2 + d^2$
temos,

$$\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

A conclusão da operação supracitada é que basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugador do denominador. Um processo prático que assemelha-se ao de racionalizar uma fração visto nas séries finais do Ensino Fundamental.

3.2.4.6 Potenciação

Como explanado em Iezzi (2013, p. 8), e já sabendo que $i^2 = -1$, podemos observar uma regularidade quanto aos primeiros expoentes de i:

$$\begin{aligned}
i^0 &= 1\\
i^1 &= i\\
i^2 &= -1\\
i^3 = i^2 \cdot i &= -i\\
i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) &= 1\\
i^5 = i^3 \cdot i^2 = (-i)\cdot(-1) &= i\\
i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i)\cdot(-i) &= -1\\
i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1\cdot(-i) &= -i
\end{aligned}$$

Observa-se, que há um processo periódico, com $i^{n+4} = i^n.i^4 = i^n.1 = i^n$. Assim, podemos generalizar, onde para todo $n \in \mathbb{N}$, temos: $i^4 = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$. Portanto, basta analisarmos o resto do expoente quando dividido por 4, que teremos uma das potências anteriores, ou mais especificamente, $i^{4q+r} = i^r$, com $r \in 0,1,2,3$.

3.2.5 Módulo do número complexo

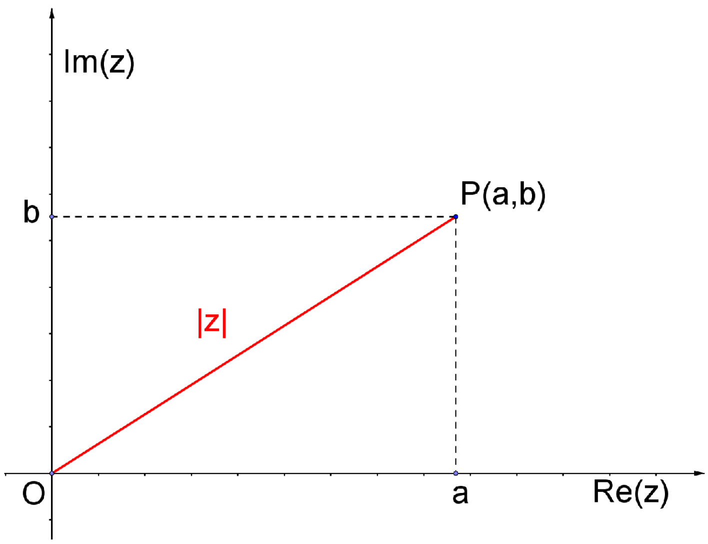
O módulo de um número complexo permite sabermos o comprimento do vetor no plano complexo, ou mais especificamente, a distância OP (figura 9) também representada por $|z|$.

Observa-se pelo gráfico abaixo que para determinarmos o valor do módulo $|z|$ basta utilizarmos o Teorema de Pitágoras, onde os valores de a e b representam os catetos do triângulo e $|z|$ representa a hipotenusa.

Portanto, podemos expressar da seguinte forma:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Figura 11: Representação geométrica do módulo de z



Fonte: Autor, 2015.

Assim, podemos chamar módulo ou valor absoluto de um número complexo z ao número real não negativo $|z|^2 = a^2 + b^2$.

3.2.5.1 Propriedades do módulo

Se $z = a + bi$ é um número complexo qualquer, então:

i) $|z| \geq 0$.

ii) $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$.

iii) $|z| = |\bar{z}|$.

iv) $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$.

v) $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$.

Demonstração

i) Considerando $a^2 \geq 0$ e $b^2 \geq 0$, implica que $a^2 + b^2 \geq$, logo, $\sqrt{a^2+b^2} \geq 0$, portanto, $|z| \geq 0$;

ii) $|z| = 0$ se, e somente se, $a^2 = b^2 = 0$ se, e somente se $z = 0$;

iii) $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = |\bar{z}|$;

iv) Tomando $a \geq 0$ e $a < 0$, temos que $a \leq |a|$. E sendo,

$a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow |a| \leq |z|$.

De $a \leq |a|$ e $|a| \leq |z|$, temos, $a \leq |a| \leq |z|$.

No item (v), a demonstração é análoga ao item (iv).

Proposição 1: Quaisquer que sejam $z, w \in \mathbb{C}$, temos que, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Demonstração

Utilizando as propriedades comutativa e associativa da multiplicação, temos:

$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)(\overline{z \cdot w}) = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2$.

Assim, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, temos $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Proposição 2: Quaisquer que sejam $z, w \in \mathbb{C}$, temos que, $|z+w| \leq |z| + |w|$

Demonstração

Utilizando as propriedades do módulo, acima, temos:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = z.\bar{z} + w.\overline{w} + w.\bar{z} + z.\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2Re(z.\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raíz quadrada de ambos os membros obtemos $|z+w| \leq |z| + |w|$. O que conclui a demonstração.

3.2.6 Forma trigonométrica

Nas séries finais do Ensino Fundamental e séries iníciais do Ensino Médio, os alunos utilizam bastante as coordenadas cartesianas. Com a representação dos números complexos na forma trigonométrica será exposto as coordenadas polares, com as quais faremos uma relação entre a representação das coordenadas cartesiana e polar.

3.2.6.1 Argumento

Seja $z = a + bi$ um número complexo não nulo, chamamos de *argumento* ao ângulo θ tal que

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad e \quad sen\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Dessas igualdades, obtemos: $a = |z| \cdot cos\theta$ e $b = |z| \cdot sen\theta$.

Logo, reescrevendo os números complexos da forma algébrica em forma trigonométrica (ou polar), obtemos:

$z = |z| \cdot cos\theta + (|z| \cdot sen\theta) \cdot i \Rightarrow z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$.

3.2.6.2 Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

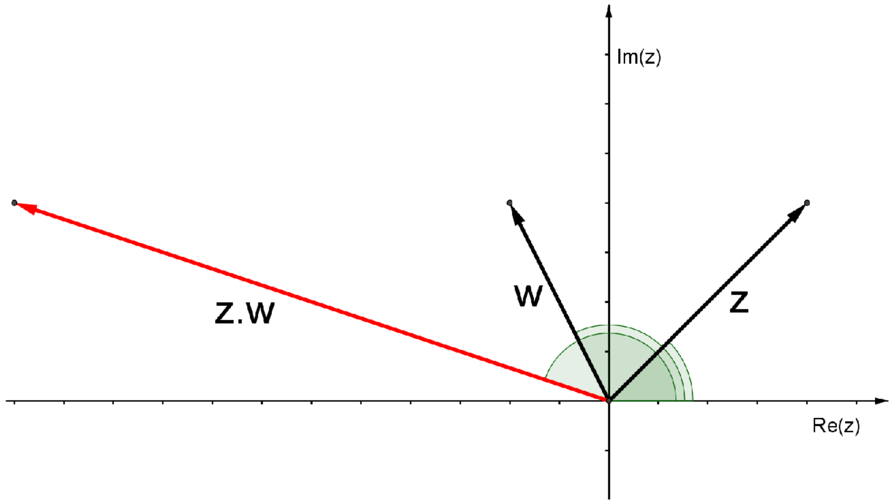
Sejam $z = |z| \cdot (cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$ e $w = |w| \cdot (cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$, dados na forma trigonométrica. Para o produto $z \cdot w$, temos:

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= |z| \cdot (cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot |w| \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2) \\
&= |z| \cdot |w|[(cos\theta_1 + isen\theta_1) \cdot (cos\theta_2 + isen\theta_2) \\
&= |z| \cdot |w|[(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - sen\theta_1 \cdot sen\theta_2) \cdot i(sen\theta_1 \cdot cos\theta_2 + sen\theta_2 \cdot cos\theta_1)] \\
&= |z| \cdot |w|[cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

Assim, a soma dos argumentos é reduzida à primeira volta, ou seja, $0 \leq arg(z.w) < 2\pi$.

Vejamos a representação gráfica da multiplicação de números complexos na forma trigonométrica, na qual observa-se uma rotação e uma dilatação do vetor dado por $z \cdots w$.

Figura 12: Representação da multiplicação de números complexos



Fonte: Autor, 2015.

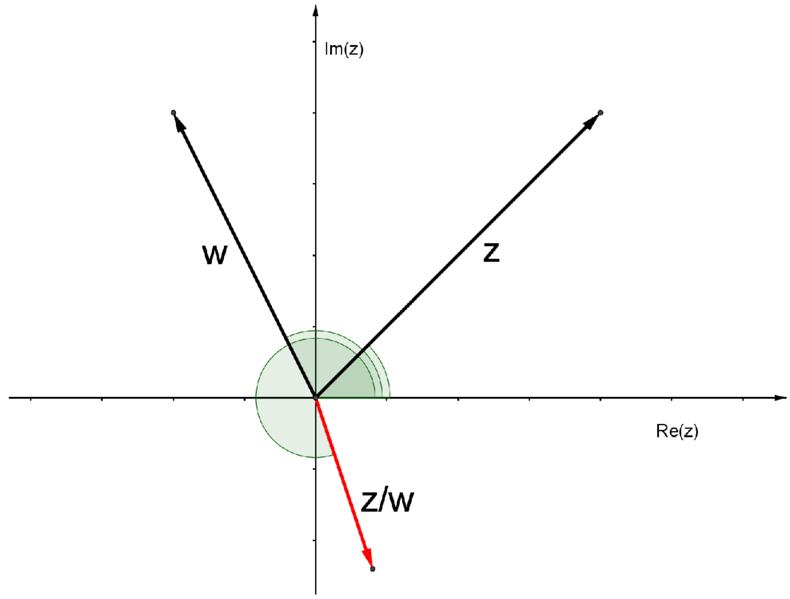
Processo igual ocorre se quisermos generalizar o produto $z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_n| [(cos(\theta_1 + \theta_2 \ldots + \theta_n) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2 \ldots + \theta_n)]$.

3.2.6.3 Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Sejam $z = |z| \cdot (cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$ e $w = |w| \cdot (cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$, dados na forma trigonométrica. Assim, para o quociente $\frac{z}{w}$, com $w \neq 0$ temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{|z| \cdot (cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)}{|w| \cdot (cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)} \\
&= \frac{|z|}{|w|} \cdot (cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1) \cdot (cos\theta_2 - i \cdot sen\theta_2) \\
&= \frac{|z|}{|w|} \cdot (cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1) \cdot (cos(-\theta_2) + i \cdot sen(-\theta_2)) \\
&= \frac{|z|}{|w|} \cdot (cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 - \theta_2)).
\end{aligned}
$$

Figura 13: Representação da divisão de números complexos



Fonte: Autor, 2015.

Assim, o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica, com o segundo número diferente de 0, é o número complexo, cujo módulo é o quociente dos módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida à primeira volta $0 \leq arg\left(\frac{z}{w}\right) < 2\pi$.

3.2.6.4 Potenciação de números complexos na forma trigonométrica - primeira fórmula de De Moivre

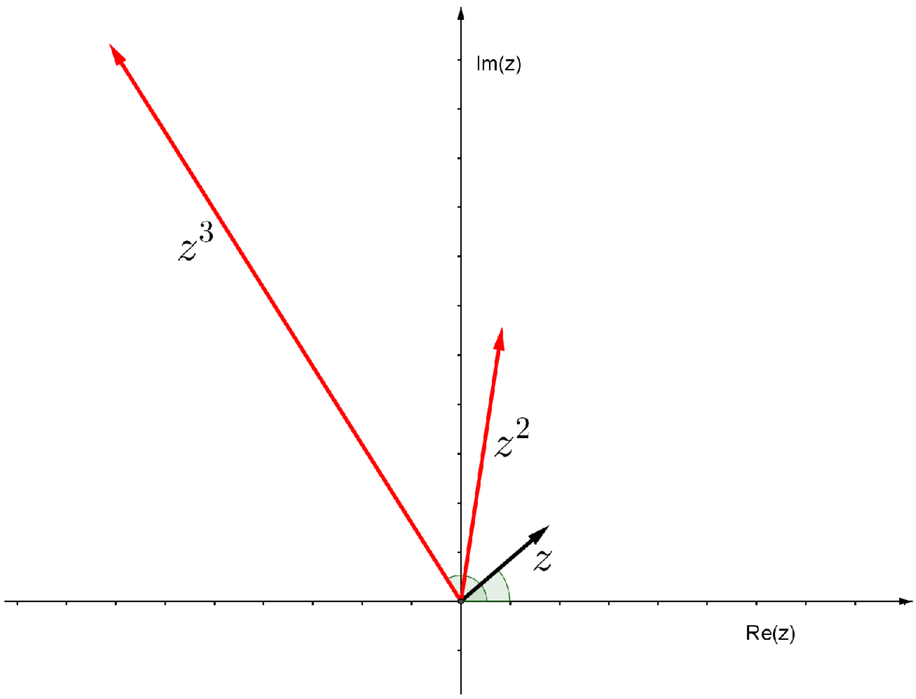
O estudo da potenciação na forma trigonométrica segue a interpretação que $z^n, n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n fatores}$.

Assim, se um número complexo z está escrito na forma trigonométrica $z = |z|(cos\theta + i.sen\theta)$, temos:

$$\begin{aligned} z^n &= z \cdot z \cdot \ldots \cdot z = |z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z|[cos(\theta + \theta + \ldots + \theta) + i \cdot sen(\theta + \theta + \ldots + \theta)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow z^n = |z|^n[cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)]. \end{aligned}$$

Esboçando o gráfico para n, com $n \in 1,2,3$, observa a ideia de que cada ponto seguinte seja rotacionado a um valor θ e dilatado a um módulo $|z|$.

Figura 14: Repressentação de potenciação para n = 2 e n = 3



Fonte: Autor, 2015.

Neste caso o argumento é igual ao argumento do número multiplicado por **n**, reduzido à primeira volta $(0 \leq arg(z^n) < 2\pi)$.

3.2.6.5 Radiciação de números complexos na forma trigonométrica - segunda fórmula de De Moivre

Dado um número complexo z, chama-se raiz n-ésima de z, e denota-se por $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo z_k tal que $z_k^n = z$. Ou seja, é determinar os complexos z tais que $z^n = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$.

Usando a definição de $\sqrt[n]{z}$ e considerando $z = |w| \cdot (cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$, obtemos

$$[|w| \cdot (cos\alpha + i \cdot sen\alpha)]^n = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta).$$

Pela fórmula de De Moivre,

$$[|w|^n \cdot [(cos(n\alpha) + i \cdot sen(n\alpha)] = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

Como números complexos iguais possuem módulos iguais e argumentos congruentes, $w^n = |z|$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$, com k inteiro. Daí,

$w = \sqrt[n]{|z|}$ e $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$.

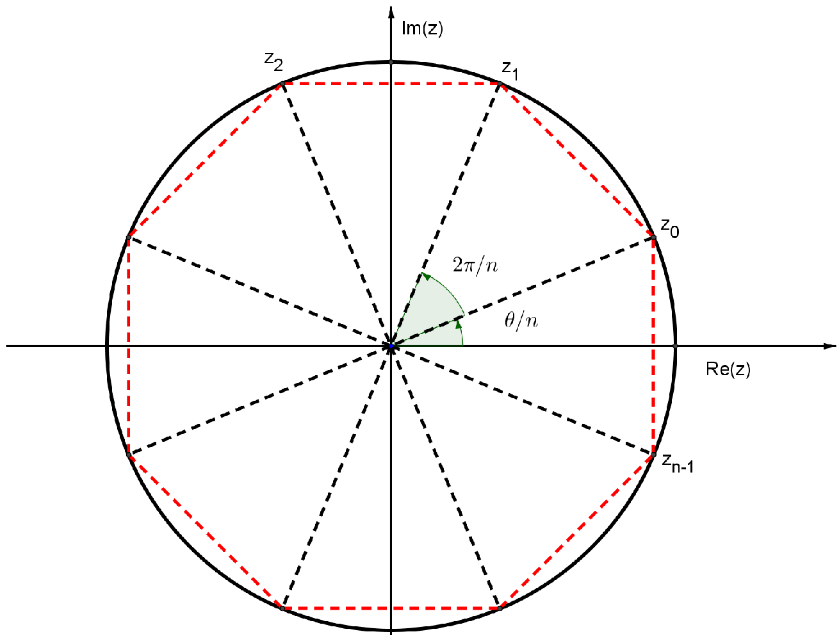
Portanto,

$z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot sen\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$, com $\quad$ k $\in \mathbb{Z}$.

É bom salientar que as raízes têm todas o mesmo módulo, $\sqrt[n]{|z|}$. Se $|z| \neq 0$, os afixos dessas raízes se situam em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$. Observemos também que dando valores inteiros a k, os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $2\pi/n$, o que mostra que essas raízes estão uniformemente espaçadas na circunferência. Se $|z| \neq 0$, os afixos dessas raízes são vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{|z|}$. Se $r = 0$, é claro que todas as raízes são iguais a 0.

Fazendo uma representação geométrica da radiciação, encontramos a figura abaixo, com os $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sendo os afixos os vértices do polígono, com a circunferência dividida em n partes congruentes entre si, cada uma de comprimento $\dfrac{2\pi|z_k|}{n}$.

Figura 15: Raízes n-ésimas do número complexo



Fonte: Autor, 2015.

Dessa forma, conhecendo uma das raízes e sabendo ao todo quantas são, é possível obter as $n-1$ raízes desconhecidas.

Como extensão da interpretação dada em Hefez (2012, p.34), ainda pode-se fazer uma menção do vínculo dos números complexos e exponenciais, estando o produto de dois números complexos associados a soma de seus argumentos principais.

Tal vínculo é dada pela fórmula:

$$e^{i\theta} = cos\theta + i \cdot sen\theta$$

Fórmula descoberta por Euler, que comparou-a as séries de Taylor do seno, do cosseno e da exponencial.

Como o exponencial $e^{i\theta}$ em sua forma de série infinita é dada por,

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots \tag{1}$$

e que do estudo dos Números Complexos temos,

$$\begin{cases} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), encontramos:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{(\theta)^2}{2!} - \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} - \dots$$

Agrupando a parte real e a parte imaginária, obtém-se:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{(\theta)^2}{2!} + \frac{(\theta)^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{(\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^5}{5!} - \dots\right) \tag{3}$$

E das séries infinitas trigonométricas podemos observar que,

$$sen\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \tag{4}$$

e

$$cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (5)$$

Substituindo, (4) e (5) na expressão (3), e considerando $\theta = \pi$, teremos:

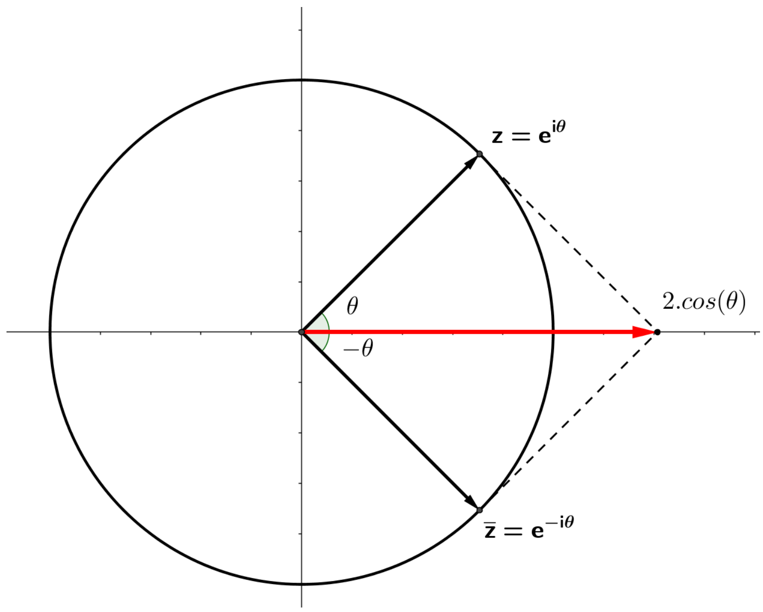
$$e^{i\pi} = cos\pi + i \cdot sen\pi = -1$$

Assim, a beleza desta fórmula é envolver cinco números importantes, $0, 1, e, \pi, i$, ou seja,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Realizando uma leitura gráfica, no plano de Argand, da identidade de Euler, considerando $z = e^{i\theta}$ e seu conjugado $\overline{z} = e^{-i\theta}$, no qual $z + \overline{z} = 2.cos(\theta)$ e $z - \overline{z} = 2i \cdot sen(\theta)$, obtemos a representação gráfica abaixo.

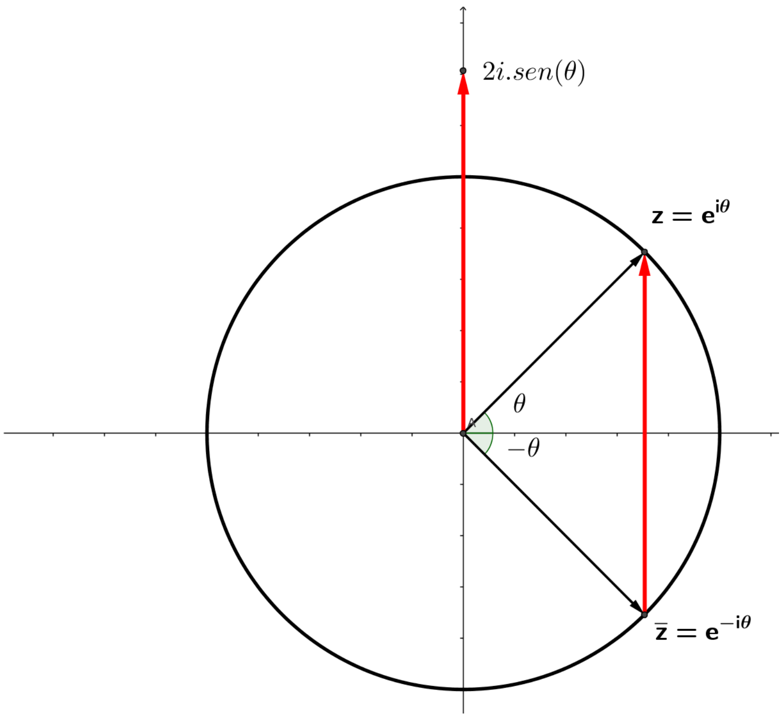
Figura 16: Relação de Euler para cosseno



Fonte: Autor, 2015.

Observemos que a soma de z e $\overline{z}$ expressa pela relação de Euler determina um segmento de reta orientado formando um quadrilátero, no qual seu valor $2cos(\theta)$ representa a diagonal deste quadrilátero.

Figura 17: Relação de Euler para seno



Fonte: Autor, 2015.

No esboço do gráfico para a diferença de z e $\overline{z}$, obtemos o segmento de reta no eixo das ordenadas. Por translação o segmento encontrado representa o segmento que formará o triângulo com os outros dois segmentos que partem da origem aos dois números complexos contidos na circunferência.

Como observamos, a soma $e^{i\theta}$ e de seu conjugado, mostra a adição de z e $\overline{z}$ contida no eixo real e a subtração de z e $\overline{z}$ mostra a representação contida no eixo imaginário.

Na atividade complementar 8 do capítulo 4, propomos uma atividade quanto a relação de Euler do ponto de vista geométrico.

Neste capítulo foi dado ênfase aos conceitos inerentes as operações com números complexos, permitindo um leve entrelaçamento da geometria com a álgebra, e que muitas vezes não é demonstrada mesmo que seja parte importante do conteúdo.

O professor muitas vezes observa uma barreira na transposição didática dos números complexos, permitindo que o aluno visualize algo seco, sem funcionalidade na prática cotidiana, e que muitas vezes é expressa na pergunta "serve pra quê?". Isso demonstra que ele deseja observar uma ponte de ligação entre o que estuda e o que é utilizável, e que muitas vezes está presente no seu cotidiano.

Portanto, a ideia no próximo capítulo é trabalhar os números complexos com auxílio da informática para mostrar a princípio o que cada “ferramenta” operatória permite fazer com elementos virtuais através de simples programação. Em seguida possibilitar que o professor tenha em mãos um arcabouço de ferramentas para melhorar sua didática possibilitando que o aluno desenvolva seu pensamento matemático. Arraigado nas ideias de Borba,

> Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento. (BORBA, 2003, p. 45).

Logo, é possível com os recursos tecnológicos, propriamente trabalhando com o programa Geogebra, permitir que o aluno através das construções cartesianas, polares e respectivas funções, possua uma perspectiva de como compreender sua representação algébrica, mesmo que não a construa geometricamente, saiba os caminhos antecipados de um esboço na sua mente, criando intercâmbios de conjecturas mais próxima da correta resolução. Enfim, possibilite também que o professor amplie e organize suas experiências levando a um estímulo para uma investigação com outros temas da matemática, com contribuição da informática no cotidiano das aulas de matemática.

4 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Criado por Markus Hohenwarter em 2001, o Geogebra (versão 5.0.154.0-3D, 25 de Setembro de 2015) é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário), auxiliando na educação matemática nas escolas. O Geogebra reúne recursos de geometria (plana e espacial), álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o Geogebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si, permitindo alterações dinâmicas, mesmo terminado a construção. Escrito em JAVA e disponível em português, o Geogebra é um software de multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS e tablets.

A integração do programa Geogebra com o ensino possibilita a elaboração de atividades semelhantes encontradas em livros didáticos, assim não distinguindo das tarefas que serão exigidas por escrito. Na construção do conhecimento, isso faculta ao aluno comprovar teorias, além de apresentar uma gama de atividades que proporcionem atividades de exploração construindo com isso o conceito matemático, permitindo testar conjecturas durante a resolução de problemas e validar a consistência das construções.

Implementando uma educação paralela a nova realidade que se entrelaça num ensinar dentro de novas perspectivas de situações didáticas que almejem as necessidades dos alunos, dá-se a grandeza de introduzir uma das tecnologias da informação (o computador) na escola, como meio de ratificar o compromisso de mudança à percepção humana num novo contexto de aprendizagem.

A introdução da informática no ambiente escolar possibilita ao professor em sua disciplina colocar para os alunos uma metodologia mais compreensível e dinâmica, particularmente à disciplina matemática. Softwares de construção de gráficos de geometria, ou manutenção de fórmulas que permitam o discutir, o planejar, o de criar e recriar situações permitiria verificar e comprovar dados que seriam de relevante importância, principalmente ao tratamento de informações.

Portanto, em todo esse contexto a experiência escolar com computadores e programas específicos, estabelece novas relações entre aluno-aluno e aluno-professor, uma vez que alguns alunos auxiliam aos professores em atividades alternativas computacionais na sala de aula.

A exploração de softwares de Geometria Dinâmica nos permite realizar investigações sobre propriedades geométricas que dificilmente conseguiríamos observar sem esse recurso numa sala de aula.

A tecnologia digital faz parte de um dos principais aspectos de transformação da sociedade, visto as últimas décadas e, principalmente a última década do século XX. Constante e alicerçada nesta objetividade de relação homem-máquina como desenvolvedora de aspectos no que enfatiza a produção do conhecimento, é de finalidade do projeto do programa Geogebra envolver metodologias matemáticas que retratam fatores visando a compreensão de uma sociedade em mudança. Em que se privam os saberes do senso comum e eruditos numa mesma via de relação pedagógica.

O objetivo da educação com a inserção de ferramentas tecnológicas sempre foi permitir o desenvolvimento cognitivo dos alunos, para que assim, se possam construir cidadãos ativos, autônomos, conscientes, críticos, atuantes e principalmente felizes. Assim, o ambiente de aprendizagem, quando possível, deverá ser interativo, possibilitando ao aluno aprender a encontrar a resposta necessária, na hora certa, para tomar uma decisão certa.

4.1 Trabalhando números complexos com o Geogebra

A ideia desta seção, nas atividades que se seguem, é explorar a parte das representações que os alunos geralmente não possuem dos números complexos, e como se apresentam no plano $\mathbb{R}^2$ possibilitando que a visualização no plano seja capaz de aguçar outras descobertas, mesmo já conhecidas, porém redescoberta pelo aluno e contribuindo para a construção do conhecimento quanto a reinterpretação e visualização das propriedades por um novo panorama.

No primeiro momento realizamos explanações do conteúdo esboçando seus conceitos e propriedades e paralelamente fazendo uso dos recursos do programa de geometria dinâmica com atividades que mostrem como se apresentam os números complexos no plano, assim deliberando interpretações algébricas a partir da geométrica.

É conveniente ressaltar que nas atividades propostas neste trabalho falaremos em *vetor*, por comodidade de linguagem explicativa. Entretanto, para o aluno foi ressaltado o número complexo como sendo um ponto no plano, e que a ideia de representar por vetor realça visualmente as operações propostas. A fim de adaptação de linguagem simbólica do Geogebra, utilizamos inicialmente a letra **u** para denotar um número complexo ao invés de z_1.

Quanto às atividades, temos na seção 4.2, o objetivo de apresentá-las com números complexos na forma trigonométrica e na seção 4.3, é apresentar a translação, rotação, dilatação e reflexão das figuras geométricas no plano complexo. Desta forma norteando o aluno quanto a aplicação dos conceitos e propriedades dos números complexos, bem como das propriedades geométricas das operações dos mesmos. Com isso, não pretendemos diminuir o papel da álgebra, mas mostrar um significado geométrico que muitas vezes é cabível de entendimento e que configura uma ponte ao processo algébrico.

Destacamos que o professor que desejar utilizar as atividades nas suas aulas, tenha a atenção de primeiramente realizar representações de operações simples, permitindo que o aluno faça análises elementares para em seguida, se assim o convier, propor as atividades que estão neste trabalho. Como por exemplo, atividades envolvendo multiplicação e potenciação de números complexos.

Primeiramente, vamos propor um exemplo simples de atividade para visualizarmos algumas ferramentas simples e didáticas de utilização no programa Geogebra. Para isso, propomos representar geometricamente a soma dos números complexos $u+w$, exposto também por vetores.

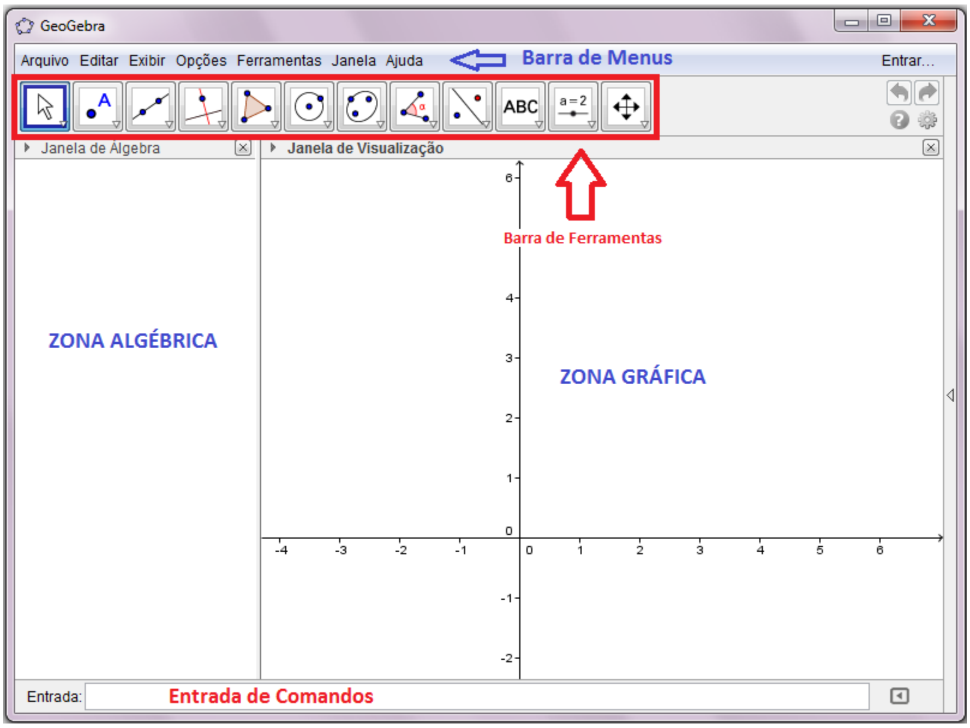
Apresentamos uma atividade de exemplificação realçando cada execução de tarefa, entrentanto, nas atividades subsequentes, por didática visual preferimos não realizar esse destaque, bastando chamar a atenção por aspas o nome da ferramenta ou campo de entrada.

Atividade de exemplificação

Abaixo temos a janela do programa Geogebra e destacamos as barras de ferramentas, barra de menus e janelas de visualização divididas em *zona algébrica* e *zona gráfica*.

Na execução da atividade podemos construir a figura geométrica diretamente na zona gráfica ou inserindo comandos pelo campo “Entrada”.

Figura 18: Tela de visualização do Geogebra



Fonte: Autor, 2015.

Apresentamos em seguida um esboço de atividade simples com destaque a cada utilização de ferramenta.

Vamos representar os números complexos geometricamente.

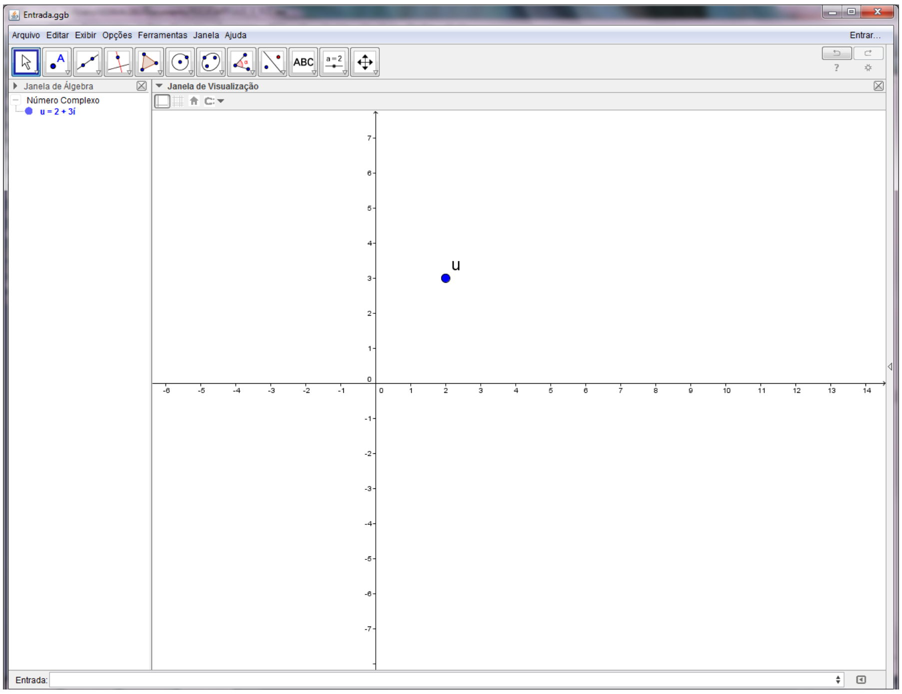
No campo “Entrada” digite $u = 2 + 3i$ [Enter].

Figura 19: Campo Entrada

Fonte: Autor, 2015.

O número complexo se apresentará na tela do programa como figura abaixo.

Figura 20: Apresentação do número complexo u



Fonte: Autor, 2015.

Em seguida no campo "Entrada", digite $w = 5 - 2i$ [Enter].

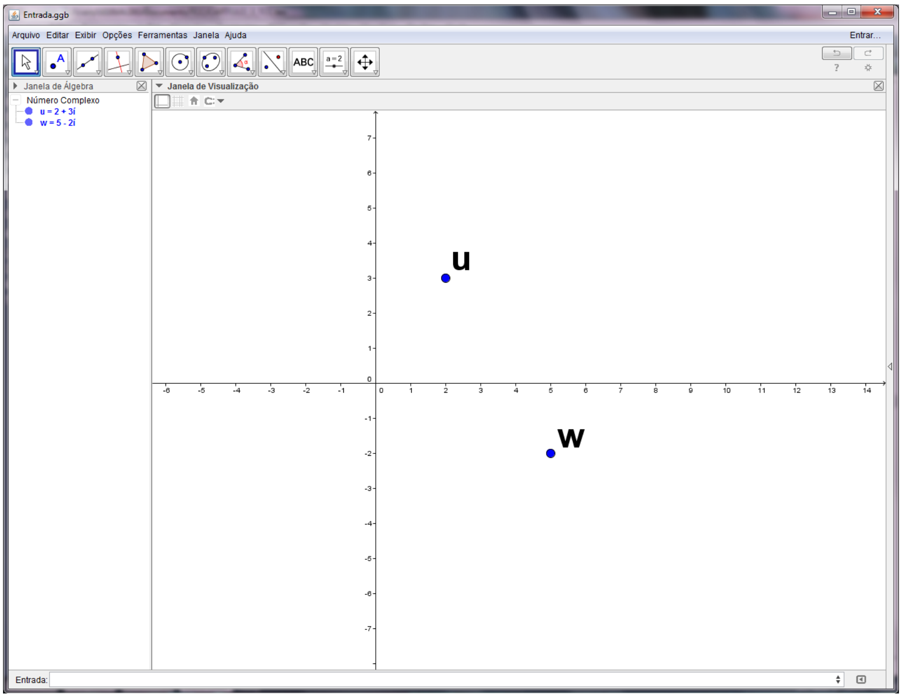
Figura 21: Campo Entrada

Fonte: Autor, 2015.

A seguir, apresentação da tela dos pontos u e w.

Observe que a representação algébrica dos pontos u e w também se apresenta na tela a esquerda (zona algébrica).

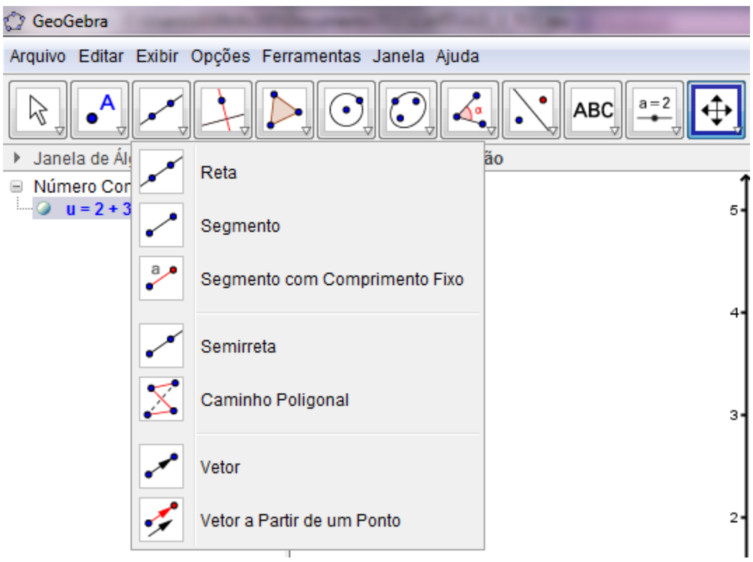
Figura 22: Apresentação do número complexo w



Fonte: Autor, 2015.

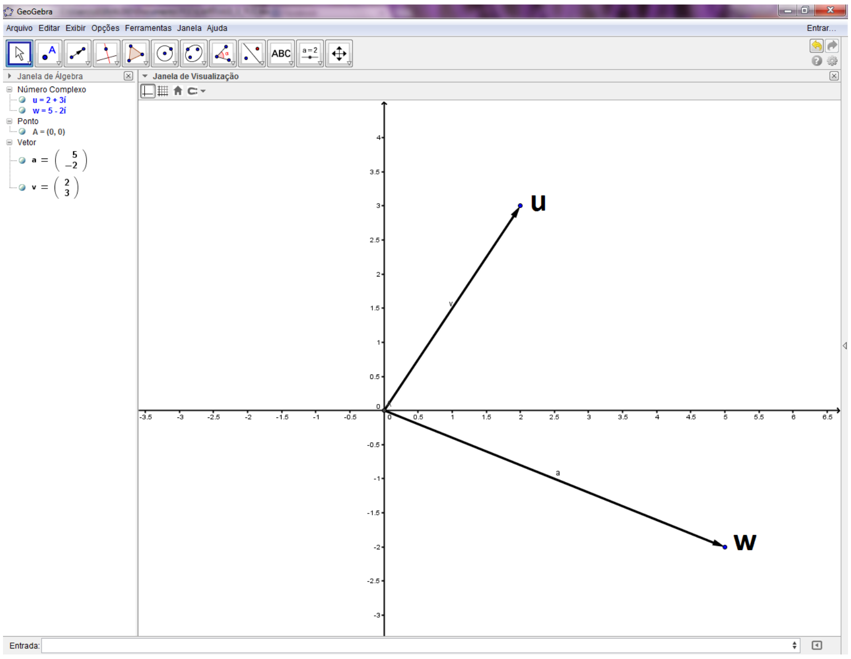
No ícone “Reta”, selecione a opção “Vetor” e trace vetores do ponto (0,0) aos números complexos *u* e *w*.

Figura 23: Barra de ferramentas - opção vetor



Fonte: Autor, 2015.

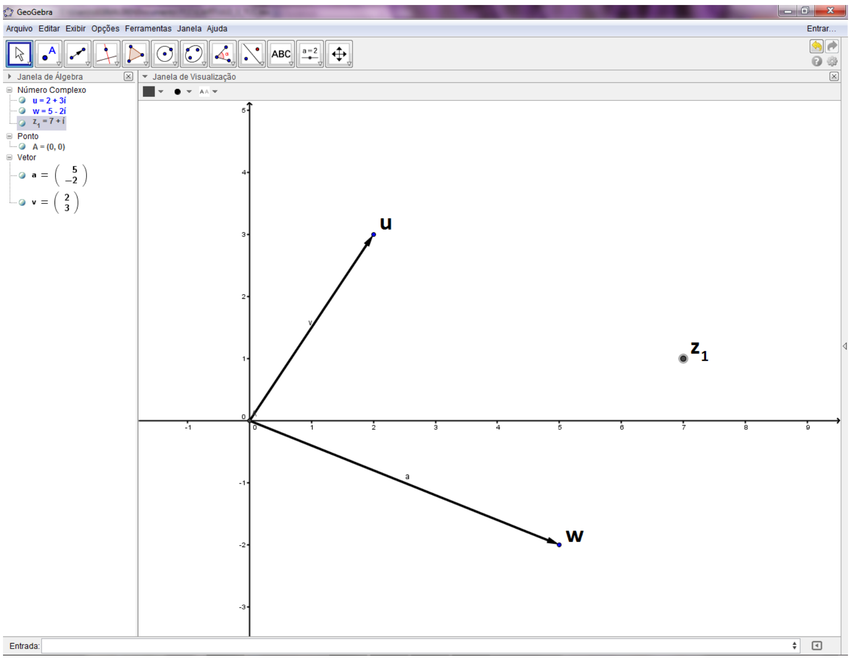
Figura 24: Vetores u e w



Fonte: Autor, 2015.

No Campo “Entrada” digite $u+w$ [Enter]. Será criado o ponto z_1.

Figura 25: Ponto z_1

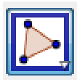


Fonte: Autor, 2015.

(a) Quando move-se qualquer um dos pontos determinados anteriormente, o que acontece com o novo ponto z_1?

(b) Utilizando a ferramenta "Polígono", clique em cada ponto (A, u, w e z_1) os interligando.

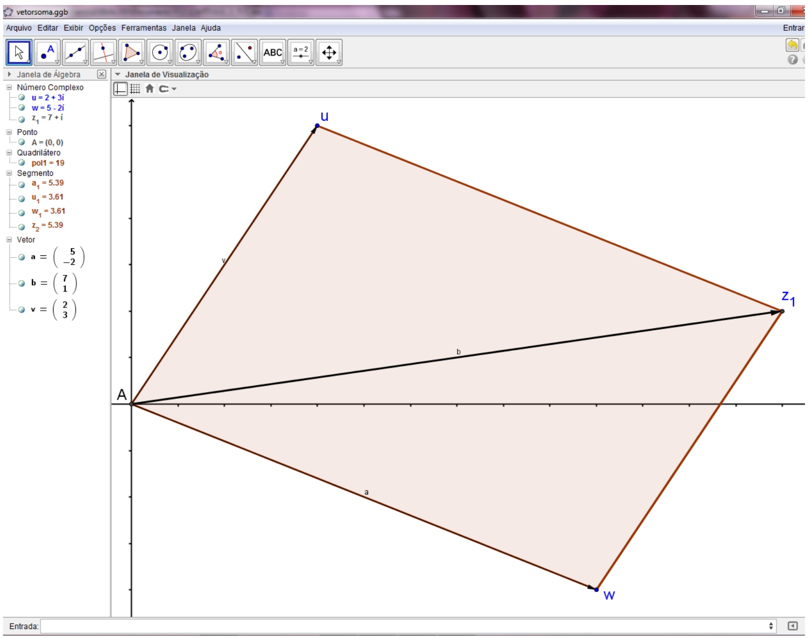
Figura 26: Ferramenta Polígono



Fonte: Autor, 2015.

Ao mover o ponto **u** ou **w**, qual relação você encontra entre a figura formada e o ponto z_1? Você consegue encontrar alguma relação entre os pontos (a,b) representados no gráfico por u e z_1? (Para uma melhor visualização identificar por um vetor do ponto da origem a z_1).

Figura 27: Representação da atividade do item (b)



Fonte: Autor, 2015.

Comentário: o objetivo da atividade é, reconhecer que na adição há uma relação entre partes reais e partes imaginárias de **u** e **w**, e permitir que o aluno relacione com o método do paralelogramo, o que facilita geometricamente a localização do ponto resultante.

4.1.1 Atividades propostas

Atividade 1

No campo de “Entrada”, digite as expressões $u = 2+3i$, $w = 5-2i$ e $v = 7+1i$, após cada expressão tecle “Enter”. Com a ferramenta “Vetor”, trace vetores do ponto de origem a u, w e v para melhor visualização das operações.

No campo “Entrada” digite $u-w$. automaticamente o ponto z_1 é criado.

(a) Após os processos anteriores, você observa algo distinto ao ponto z_1 em relação v? Justifique?

(b) Ao mover um dos pontos determinados anteriormente, o que acontece com z_1?

(c) Você consegue encontrar alguma relação entre os pontos (a,b) representados no gráfico por u e z_1?

(d) Com a ferramenta “Polígono”, selecione todos os pontos e novamente selecione o primeiro ponto u, w, v e ponto origem $A = (0,0)$ que figura ele sempre forma? É possível encontrarmos uma relação entre os números complexos u e w com o número complexo $u+w$?

(e) Digite no campo “Entrada” $-w$ [Enter], é criado o ponto z_2. Novamente com a ferramenta “Polígono”, selecione os pontos z_1, z_2, A e u que conclusão você obtém observando geometricamente a configuração no plano entre os números complexos v e z_1?

Comentário: automaticamente é criado o ponto z_1, que ao mover os pontos u e w, z_1 também se move, entretanto, em outra posição, já que temos a operação subtração. Com isto, entende-se que a relação do vetor oposto no plano complexo com os demais vetores como leitura de $u-w$ para $u+(-w)$ possui um sentido próprio de interpretação na configuração geométrica.

Atividade 2

Ainda utilizando os números complexos $u = 2+3i$ e $w = 5-2i$; digite no campo “Entrada” $u \cdot w$, em seguida é criado o ponto z_1. Da origem ao ponto z_1 trace um vetor.

(a) Observe o comportamento do ponto z_1 criado a partir do produto $u \cdot w$. Em qual situação este ponto (representado pelo vetor) sofre compressão ou dilatação?

(b) É possível dilatar o novo ponto alterando a posição do ponto u e em seguida comprimi-lo alterando a posição do ponto w ? Justifique.

Observação: a cada alteração realizada visualize as alterações na "janela de álgebra" do programa.

Atividade 3

Nesta atividade, calcularemos o produto de número complexo por uma constante, no entanto, utilizando pares ordenados.

Digite no campo "Entrada" $A = (3,2)$. Em seguida da origem ao ponto A, crie um vetor (chamaremos de vetor u).

(a) No campo "Entrada", digite $3 * u$ [Enter]. Qual relação observa-se entre o vetor u e $3 * u$?

(b) Se dilatarmos ou comprimirmos o vetor u, o que acontece com o novo vetor (3*u)?

Comentário: o aluno deverá observar que alterando o ponto u, o novo ponto sofrerá alteração proporcional, ou seja, numa relação de 1/3 ao movimento realizado.

Atividade 4

Nesta atividade, iremos propor novamente uma multiplicação, porém, com algumas observações a analisar.

Considerando os números complexos $u = 1 + 2i$ e $w = 2 + 3i$, traçando seus respectivos vetores. Em seguida calcule o módulo de u e w.

(a) Multiplique u por w, em seguida, clique no vetor w e desloque progressivamente para as posições $(2,1)$, $(3,1)$ e $(4,1)$. Qual relação consegue observar tanto na parte algébrica quanto na geométrica no número complexo dado por $u \cdot w$?

(b) Crie os pontos $(2,0)$ e $(0,0)$. Com a ferramenta "ângulo", clique em $(2,0)$, $(0,0)$ e em w. Crie também dois outros ângulos clicando em u, (0,0) e $u \cdot w$ e em seguida $(2,0)$, $(0,0)$ e u. Após mover os números complexos u ou w, quais conclusões retiram-se sobre os ângulos formados e suas respectivas alterações?

Comentário: o aluno perceberá primeiramente que existirá uma dependência de ângulo entre o número complexo w com o eixo X. Porém, ao mover também u, o ângulo entre o ponto z, $(0,0)$ e z_1, conterá o excedente entre os dois ângulos formados de z e w com o eixo X. Assim, deduzindo que haverá a soma entre os mesmos ângulos com citado eixo.

Atividade 5

Crie no programa Geogebra um número complexo, o identificando por um vetor. Em seguida, multiplique este número por i.

Utilizando-se da ferramenta “ângulo”, meça o ângulo formado entre o primeiro número complexo e o criado após a multiplicação por i.

Com a visualização geométrica, altere a posição do primeiro número complexo e encontre uma relação do papel do i na multiplicação com um número complexo?

Comentário: com atividade simples, porém de relevância para aprendizagem propomos que o aluno saiba encontrar o papel do i na representação dos números complexos, determinando que geometricamente o papel do i é rotacionar em $90°$ o número no plano.

Atividade 6

Qual procedimento algébrico podemos realizar para rotacionar um número complexo em $180°$?

Comentário: com esta atividade o aluno observará que i^2 representa uma rotação de $180°$ em relação ao número complexo dado. Ou seja, no plano temos agora a descrição do $+1$ e -1, e também de $+i$ e $-i$, dividindo-o em quadrantes.

Atividade 7

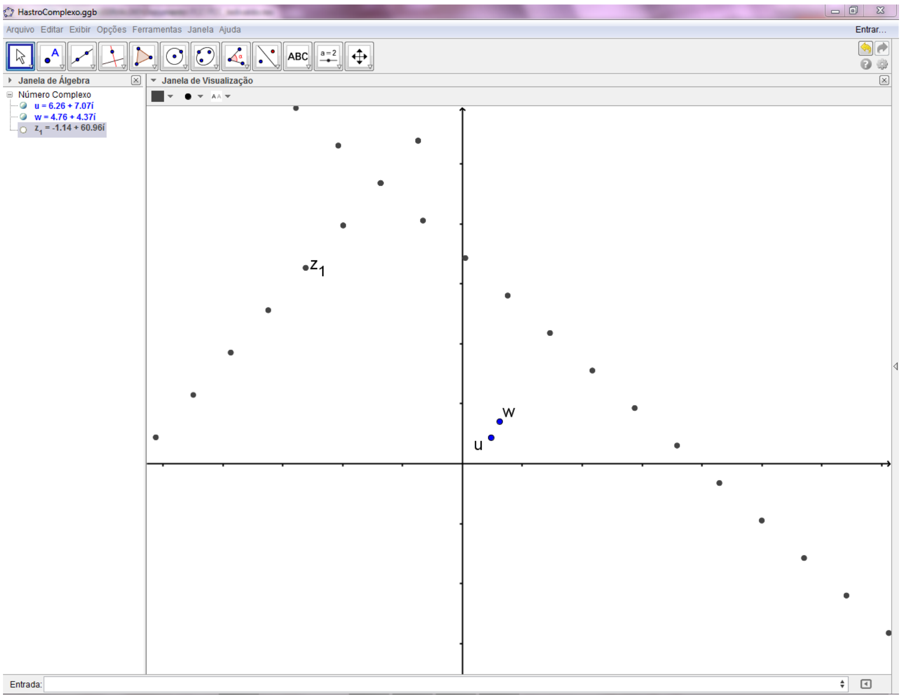
Vamos realizar uma observação em particular com a multiplicação de números complexos na forma algébrica sobre a visualização geométrica desta.

Considere os números complexos $u = a+bi$ e $w = c+di$. Sabendo que a multiplicação de $u.w$ pode ser representada por $(a+bi)\cdot c+(a+bi)\cdot di$, com os números complexos $u = 1+2i$ e $w = 2+3i$, também podemos representar por $(1+2i)\cdot 2+(1+2i)\cdot 3i$.

No programa com o campo “Entrada” represente os números u e w, em seguida $u\cdot w$. Depois ative a opção “Habilitar rastro” com o botão direito do mouse, clicando no ponto formado por $u\cdot w$. Em seguida, clicando no ponto w, arraste-o horizontalmente, e anote suas observações.

Novamente, clicando no ponto w, arraste-o verticalmente, e anote suas observações.

Figura 28: Representação da atividade proposta



Fonte: Autor, 2015.

É possível concluir o papel da parte real e da parte imaginária na multiplicação entre dois números complexos? Justifique.

Comentário: conforme já indicado no Capítulo 3, e com interpelações do professor, o aluno poderá ser capaz de identificar vetorialmente que o processo da multiplicação, corresponde a três itens:

i) o número real multiplicado por um número complexo, corresponde a dilatação do mesmo;

ii) o produto do número complexo pela parte imaginária e uma constante (d), permite uma dilatação e uma rotação de 90° da parte (real ou imaginária) do número complexo que se queira multiplicar.

iii) assim, essas duas opções indicarão que está havendo ao multiplicar número complexo com número complexo uma dilatação e rotação do mesmo.

Atividade 8

Considerando ainda os números complexos $u = 1 + 2i$ e $w = 2 + 3i$, e seus respectivos vetores, faça a atividade seguinte:

(a) Divida u por w, em seguida, clique no vetor w e desloque progressivamente para as posições $(2,1)$, $(3,1)$ e $(4,1)$. Qual relação você consegue observar no vetor quociente u por w?

(b) Crie os pontos $(2,0)$ e $(0,0)$. Com a ferramenta "ângulo", clique em $(2,0)$, $(0,0)$ e em w. Crie também dois outros ângulos clicando em u, $(0,0)$ e u/w e em seguida $(2,0)$, $(0,0)$ e u. Após mover os vetores u ou w, quais conclusões você possui sobre os ângulos formados e suas respectivas alterações?

Comentário: as observações almejadas serão as mesmas da atividade 5, porém com dedução diferente, uma vez que queremos a análise para u/w.

4.2 Atividades com números complexos na forma trigonométrica

Já sabemos do capítulo 3 da representatividade de módulo e da forma trigonométrica dos números complexos, agora vamos observar no plano a representação gráfica. É conveniente ressaltar que apesar destas atividades não indicar a forma algébrica, o professor em sala utilizará esse recurso da geometria dinâmica para apresentar a relação entre a álgebra e a geometria no estudo dos números complexos.

Atividade 1

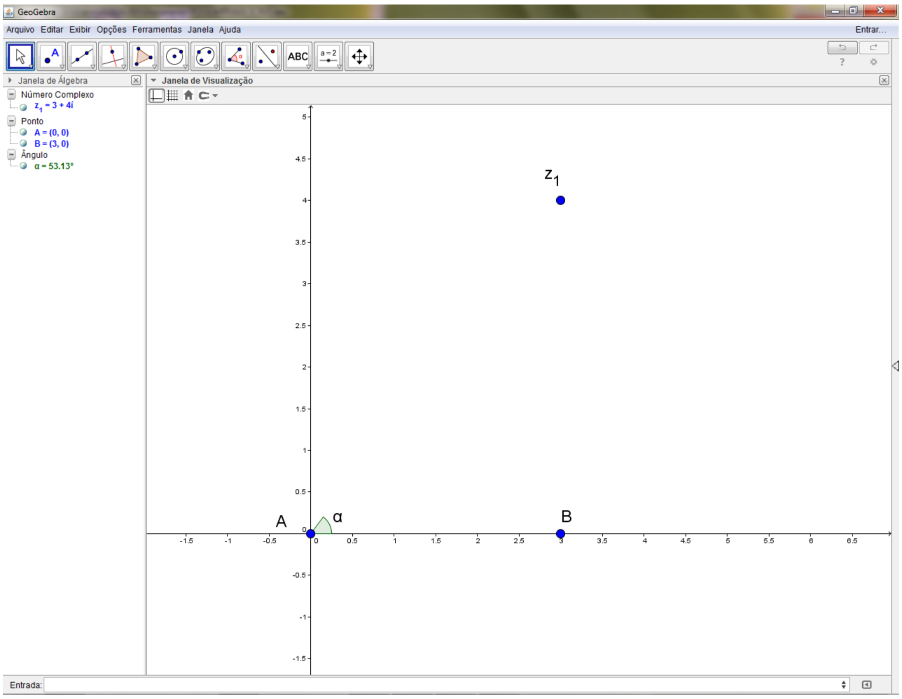
Comentário1: inicialmente vamos trabalhar com uma atividade simples na ideia de representar o *argumento* no Geogebra, assim como dar os primeiros passos que auxiliarão a resolução em outras atividades envolvendo tal conceito.

No campo "Entrada", digite $3+4i$ [Enter] (aparecerá na tela o ponto z_1). Em seguida, digite $A=(0,0)$ [Enter], novamente digite $B=(3,0)$ [Enter].

Ainda no campo "Entrada", digite o seguinte comando "ângulo[B,A,z_1]" e depois tecle [Enter].

Comentário2: podemos mover o ponto z_1 e verificar automaticamente a variação do ângulo na tela. Após esta atividade o professor poderá indicar ângulos determinados nos outros três quadrantes, permitindo esclarecer o motivo de representar o ângulo convenientemente sempre no sentido positivo.

Figura 29: Representação do argumento



Fonte: Autor, 2015.

Atividade 2

Com a ferramenta "controle deslizante", determine um ponto qualquer (que o programa provavelmente denotará por **a**). Em seguida, determine também um controle deslizante para um ângulo (que o programa denotará de α).

No campo "Entrada" digite a expressão de z na forma trigonométrica, $u = a * (cos(\alpha) + i * sin(\alpha))$. Em seguida, insira um vetor da origem ao ponto u. Mova os controles deslizantes **a** e α.

Diante das observações, responda as questões:

(a) Ao mover o controle α como se apresenta o ponto u?

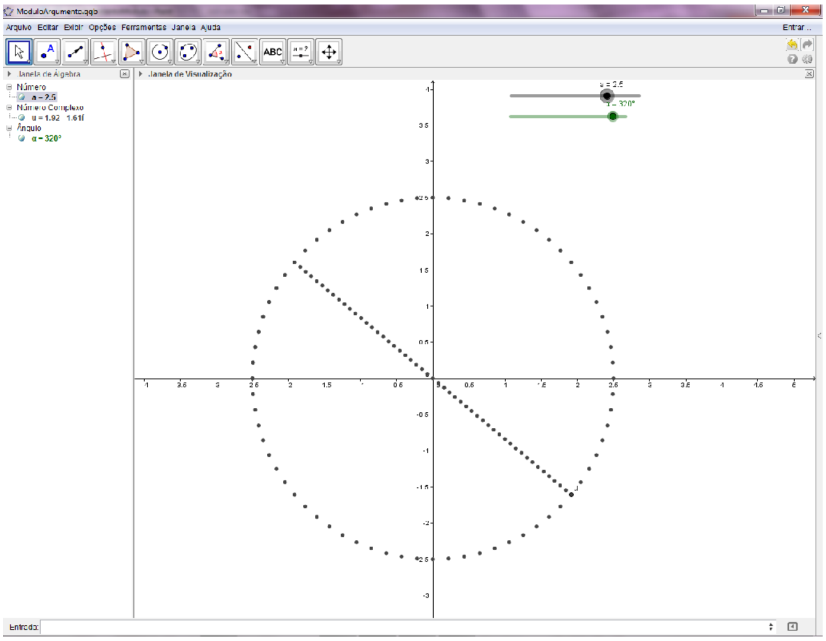
(b) Ao mover também o controle **a**, qual o comportamento do ponto u?

(c) É possível o ponto u passar pelo ponto de origem (0,0)? Se afirmativo, como devem ser os valores de **a** e α?

Comentário: no item (a), o aluno deve observar que o ponto u esboçará um circulo, onde o mesmo poderá fazer referência ao ciclo trigonométrico. No item (b), espera-se que o aluno observe que existirá um limite onde o ponto u atingirá, seja qual for o ângulo dado, com o item (a), concluirá que o controle α representará o diâmetro do circulo. Nesse momento pode ser citado sobre a definição de módulo e argumento.

O esboço do desenho deve está representada como na figura a seguir.

Figura 30: Representação da atividade proposta



Fonte: Autor, 2015.

Atividade 3

No Capítulo 3, foi dada a expressão algébrica do cálculo do produto u por w. Agora, vamos determinar através do programa Geogebra a posição do ponto do produto $u \cdot w$.

Crie os pares ordenados $u = 2 + 2i$ e $w = 2 - 2i$. Utilizando a fórmula do produto de dois números complexos, determine:

(a) O produto dos módulos e a soma dos argumentos com as ferramentas já vistas;

(b) Agora, no campo "Entrada", digite $u \cdot w$, e observe se o valor encontrado corresponde aos cálculos encontrado no item (a);

(c) Qual o fator determinante a permanência do ponto originado de $u \cdot w$ para que permaneça no eixo X ao deslocar os pontos u ou w?

Atividade 4

Comentário: vamos rotacionar um ponto em relação a origem no sentido anti-horário.

Determine no plano o ponto A=(2,5). Em seguida, encontre as novas coordenadas após uma rotação de 90º.

a) Deve-se multiplicar o complexo $u = 2 + 5i$ por qual número?

b) Qual melhor representação dos números complexos para permitir a melhor manipulação das operações?

Atividade 5

Na subsubseção 3.2.6.5, temos a expressão que nos permite calcular a radiciação de números complexos na forma polar. Vamos apresentá-la através de atividade.

Usando a expressão seguinte, determine as raízes cúbicas de 8.

$$\sqrt[n]{|z|} \cdot \left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i.sen\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \text{, com } k \in \mathbb{Z}.$$

Para tanto calcule separadamente $\sqrt[n]{|z|}$ e o argumento de z. Com as raízes encontradas, determine os pontos numa circunferência, com centro $(0,0)$ utilizando o campo "Entrada". Trace segmentos de reta entre os pontos encontrados (opcional: segmentos tracejados).

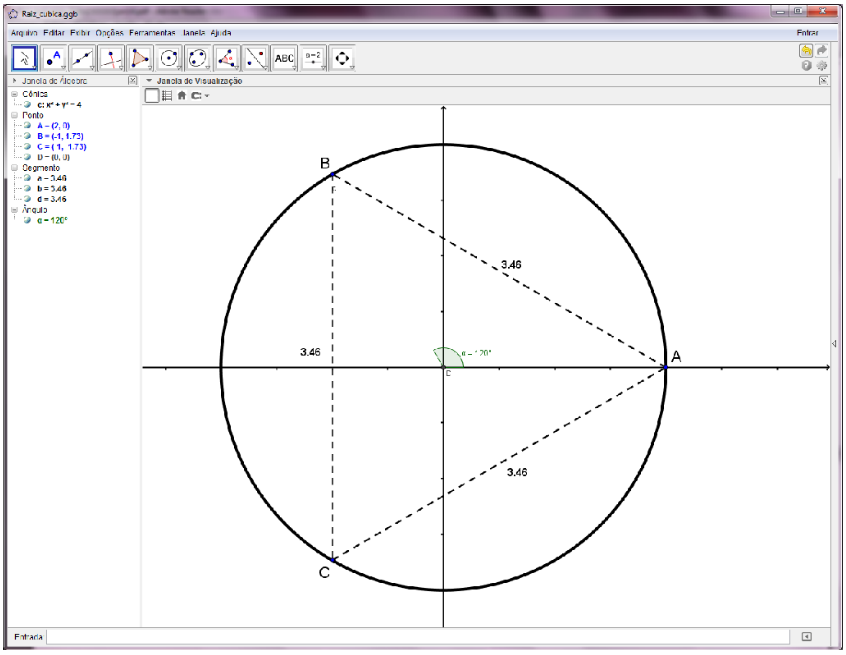
(a) Com a ferramenta "Distância" meça cada segmento e relate os motivos de eles terem distâncias iguais. Estes pontos podem variar, diminuindo a distância entre um e outro? Justifique.

(b) Qual o ângulo formado entre cada ponto e a origem $(0,0)$? Estes ângulos podem variar? Justifique.

(c) Represente graficamente as raízes cúbicas de 8; também meça os ângulos entre cada vértice que dividem a circunferência.

Comentário: a proposta dessa atividade é que o aluno reconheça que as raízes de um número complexo podem assumir um papel fundamental quanto a interpretação geométrica, pois permite esboçar polígonos regulares inscritos num círculo, no qual cada vértice encontrado representa uma raiz de um número complexo que dividem em n partes iguais o círculo de raio $\sqrt[n]{r}$.

Figura 31: Representação da atividade proposta



Fonte: Autor, 2015.

Atividade 6

Comentário: atividade referente a visualização dinâmica da radiciação dos números complexos e sua interpretação aplicada a circunferência. Com essa atividade tentamos mostrar ao aluno os recursos do programa de geometria dinâmica que podem auxiliar nas conclusões no aspecto algébrico e geométrico, podendo expandir suas experimentações para uma justificativa coerente.

A atividade consistirá nos passos seguintes:

(a) Digite no campo "Entrada" $u = 1 + 2i$;

(b) Em seguida, digite $A = (1,0)$. E depois, $O = (0,0)$;

(c) Com a ferramenta "Ângulo" determine o ângulo entre A, O, u (nesta ordem);

(d) Insira um "Controle Deslizante". Na guia Intervalo, na caixa de diálogo "min", digite 3, em "max" digite 9 e em "Incremento" digite 1;

(e) Selecione o ícone "Rotação em torno de um ponto". Depois selecione o ponto A e O, aparecerá uma caixa de diálogo na qual você digitará α/a (Surgirá o ponto A');

(f) Trace uma semirreta com origem em O passando por A';

(g) Selecionando o ícone "Círculo dados Centro e Raio", trace um círculo com centro em O e medida do raio 2;

(h) Interseccione o círculo com a semirreta; utilize a ferramenta "Interseção de dois objetos";

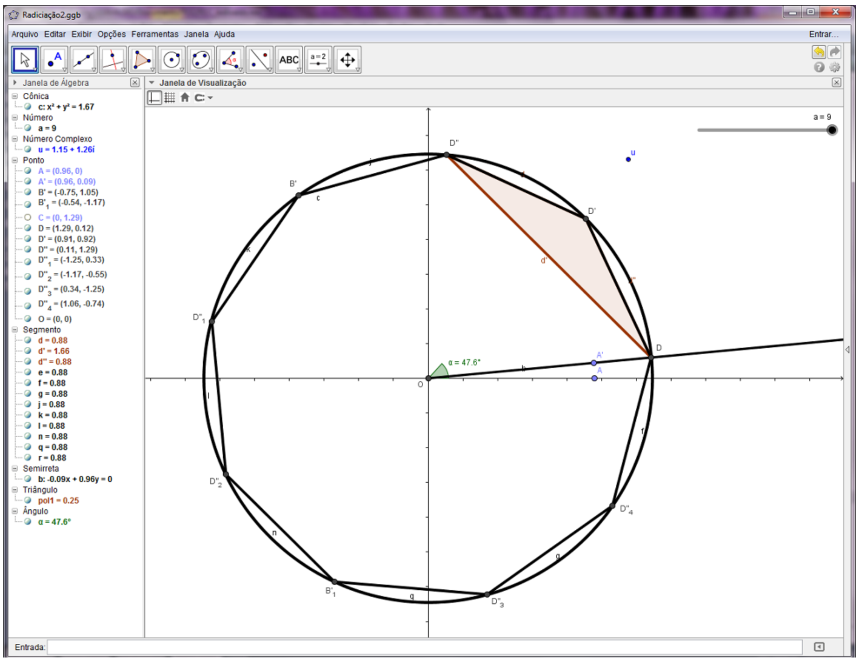
(i) Crie seguidamente 8 pontos, realizando o processo de: clicar no ícone "Rotação em torno de um ponto", selecionando o ponto B e O, e digitando na caixa de diálogo para cada ponto a ser determinado os ângulos 360°/a [Enter]; e repita este passo para 720°/a, 1080°/a, 1440°/a, 1800º/a, 2160°/a, 2520°/a e 2880°/a;

(j) Com o controle deslizante na posição 3, clique na ferramenta "Polígono" e selecione os três pontos no círculo;

(l) Agora, com o controle deslizante na posição 9, trace segmentos de retas aos vértices sucessivos até o ponto do vértice inicial.

Ressaltamos que no item (i) pode-se criar mais pontos, para isto, deve-se adicionar 360° ao último ângulo. A figura, segue abaixo.

Figura 32: Representação da radiciação no círculo



Fonte: Autor, 2015.

Questionamento:

a) Qual relação entre o ângulo determinado inicialmente e o ângulo central entre cada vértice?

Relate o processo que realizará no programa de geometria para que seja necessário justificar suas conclusões.

b) Ao deslizar o controle para numerações distintas, o ângulo determinado comprova o argumento procurado pela expressão $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$?

Atividade 7

Digite no campo "Entrada" $u = 5 - 2i$. Em seguida na ferramenta "Controle deslizante", adicione um seletor com a opção para *ângulo*. Voltando ao campo "Entrada", digite $u*(cos(\alpha) + i*sin(\alpha))$.

Clique com o botão direito no ponto criado z_1 e ative a opção "Habilitar rastro". Em seguida, mova o ponto do "Controle Deslizante" e veja o efeito criado.

(a) É possível criarmos circunferências concêntricas? Relate a estratégia se sua resposta for afirmativa.

(b) O que acontece com o módulo destas novas circunferências?

Comentário: o objetivo é que o aluno visualize o efeito da alteração do número complexo na forma trigonométrica representada geometricamente com alteração do ângulo.

4.3 Atividades com figuras poligonais com auxílio de números complexos

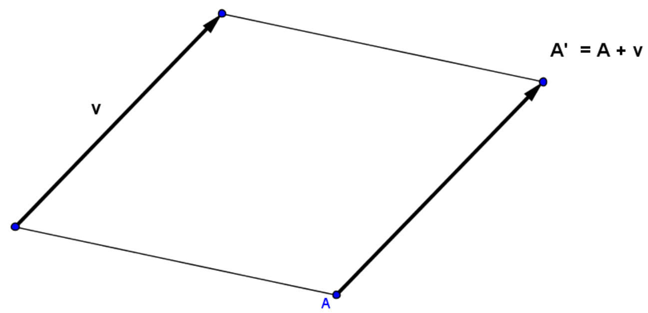
Nesta seção, vamos trabalhar números complexos com construção de figuras poligonais e as transformações geométricas possíveis de realizar.

Wagner (2007, p.70), afirma: "Uma transformação T no plano Π é uma função T:$\Pi \rightarrow \Pi$ que associa a cada ponto A do plano um outro ponto A' = T(A) do plano chamado *imagem* de A por T." Assim, vamos analisar a *translação, reflexão, rotação e dilatação* com recursos do programa de geometria dinâmica.

4.3.1 Translações

Quanto a transformação isométrica pode-se afirmar que, “a translação determinada pelo vetor v é a transformação $T_v : \Pi \to \Pi$ que leva cada ponto A do plano Π no ponto A´= A + v desse plano” (WAGNER,2007, p.71).

Figura 33: Translação determinada pelo vetor v



Fonte: WAGNER, 2007, p.71.

Para translandarmos uma figura basta somar com outro número complexo para obtermos a mudança de posicionamento do ponto.

Vejamos a atividade abaixo.

Atividade 1

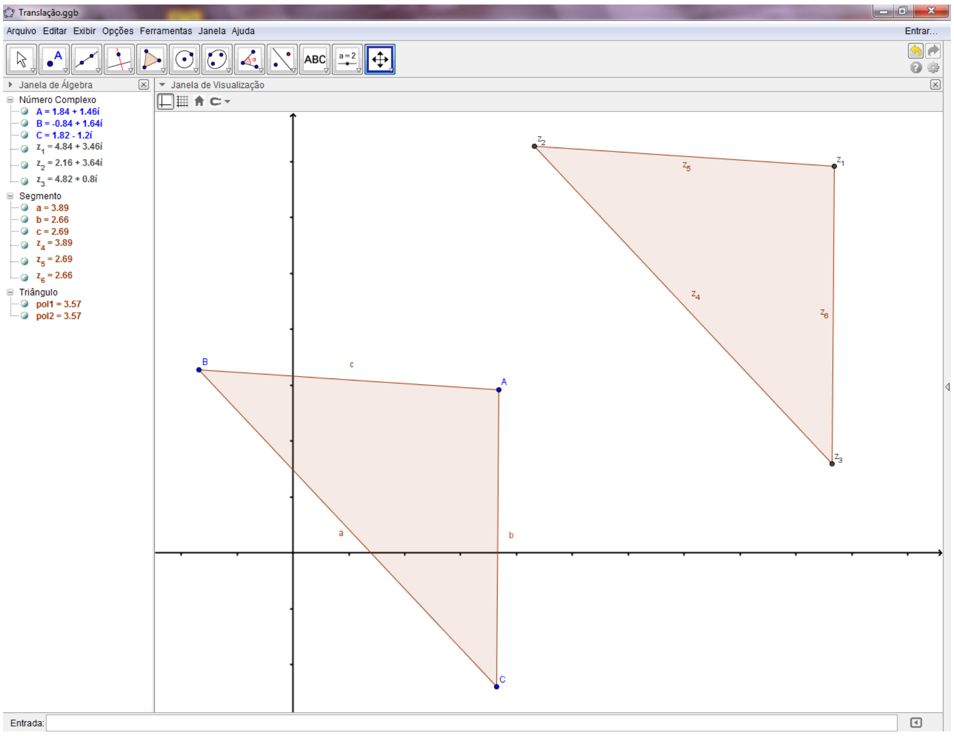
Insira três números complexos quaisquer no plano, vamos chamá-los de z_1, z_2 e z_3. A cada ponto deste, some no campo entrada ao número $u = 3 + 2i$. Clique na ferramenta “Polígono” e selecione todos os vértices, e então, clique novamente no vértice inicial.

Repita o processo com a ferramenta “Polígono” para os três novos pontos determinados.

Em seguida, justifique como se apresentam os novos pontos, determinando o que ocorre algebricamente com os pontos z_1, z_2 ou z_3 transladados. Em seguida mova um dos pontos e observe o efeito, justificando a movimentação do outro ponto virtualmente.

Comentário: a proposta desta atividade é permitir que o aluno visualize que a segunda figura construída possui as mesmas propriedades da primeira, apresentando a ideia geometrica da translação. Entretanto, esta representação de translação fica estática na tela, dando a ideia também de que houve uma duplicidade da figura. Na atividade seguinte, propomos também representar a translação, destacando o movimento de uma única figura.

Figura 34: Representação da atividade proposta



Fonte: Autor, 2015.

Atividade 2

Insira três números complexos quaisquer no plano, vamos denominá-los novamente de z_1, z_2 e z_3. Clique na ferramenta "Polígono" e selecione todos os vértices, e então, clique novamente no vértice inicial.

Crie um controle deslizante a. Em seguida, no campo "Entrada" digite três expressões separadamente. $z_1 + a$, $z_2 + a$ e $z_3 + a$. Mova o controle deslizante a, e observe o resultado.

(a) Ao mover o controle deslizante, explique por que há somente o movimento horizontal da figura?

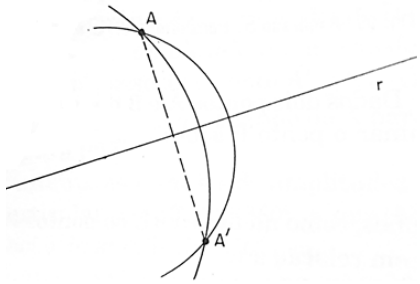
(b) O que é necessário para permitir um deslocamento vertical da figura? justifique criando a expressão matemática.

Comentário: esta atividade permite que o aluno tenha um conceito claro do papel da parte real e da parte imaginária na representação geométrica de um número complexo. E com a opção "Animar" (menu do botão direito), podemos criar ao mesmo tempo um movimento horizontal e vertical da figura. O item (b) poderia ser resolvido, acrescentando um controle deslizante b, no qual teríamos as expressões $z_1 + a + b * i$, $z_2 + a + b * i$ e $z_3 + a + b * i$ como solução.

4.3.2 Reflexões

"A reflexão em torno da reta r é a transformação S_r que faz corresponder a cada ponto A do plano o ponto $A' = S_r(A)$, simétrico de A em relação a r" (WAGNER,2007, p.73).

Figura 35: Reflexão



Fonte: WAGNER, 2007, p. 73.

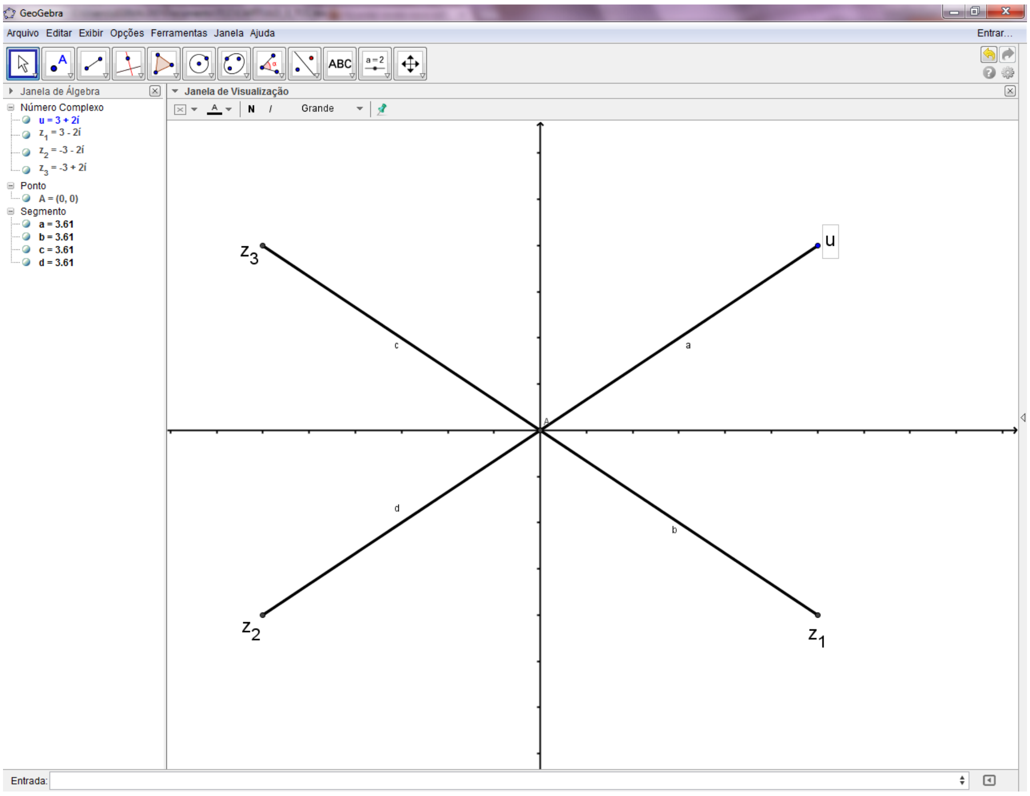
Atividade 3

(a) Utilizando o campo "Entrada", digite $u = 3 + 2i$, e em seguida também no campo "Entrada", digite *conjugado(u)*. Trace um segmento de reta da origem ao ponto u e da origem ao ponto z_1 (anteriormente criado pelo programa). Ao mover o ponto u, o ponto z_1 se move também. Em relação ao quê, este ponto z_1 tem como referência?

(b) É possível criar mais três pontos referenciais ao ponto u? Se afirmativo, descreva os passos para que ao mover o ponto u, outros três pontos também se movam.

Comentário: no item (a) esse processo de reflexão traz ao ambiente discursivo e contextual, a analogia quanto ao princípio da reflexão da luz nos espelhos planos estudado em Física. No item (b), estimula-se a percepção de simetria, com isto, o aluno poderá criar os pontos referenciais digitando no campo "Entrada", $-u$ e $-z_1$, respectivamente. Para observação do efeito ao mover o ponto u, optamos a traçar segmentos de reta da origem a cada um dos quatro pontos.

Figura 36: Representação da atividade proposta do item b

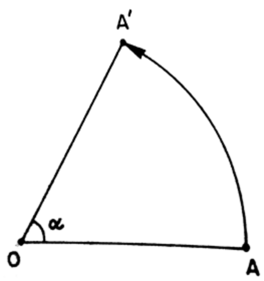


Fonte: Autor, 2015.

4.3.3 Rotações

"Dado um ângulo α, a rotação de centro O e amplitude α é a transformação que a cada ponto A do plano Π associa o ponto A'= R_α(A) de forma que se tenha OA'= OA, $\widehat{AOA}$' = α e o sentido de A para A' positivo" (WAGNER,2007, p.75).

Figura 37: Rotação



Fonte: WAGNER, 2007, p. 75.

Diante da explanação anterior, podemos criar as atividades 4, 5 e 6.

Atividade 4

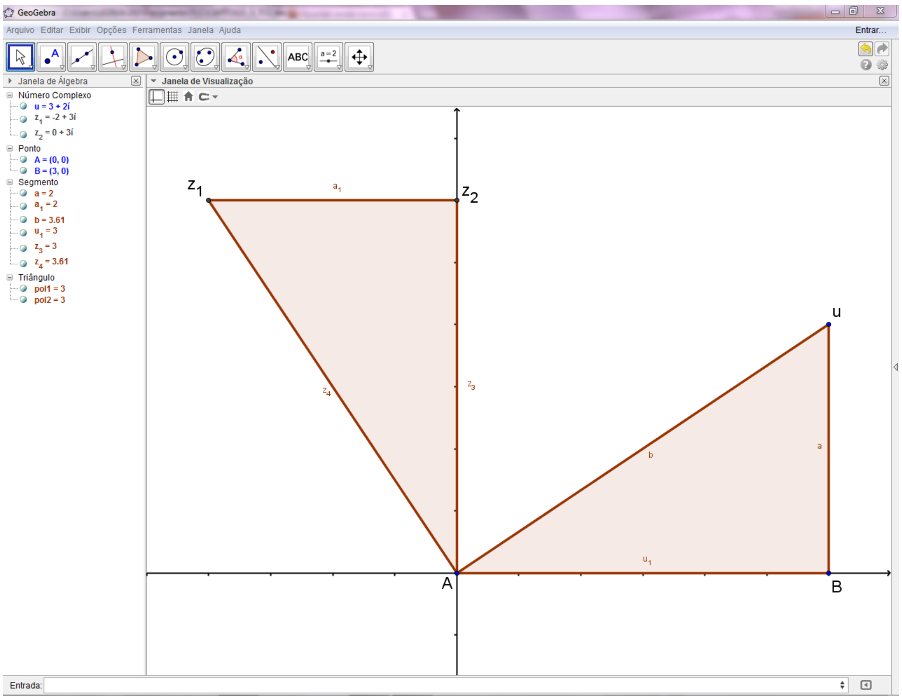
No campo “Entrada”, digite um número complexo qualquer u ($u = a + bi$). Depois digite outro número, agora B = (3,0) e o ponto A = (0,0).

Use a ferramenta “Polígono” formando um triângulo com vértices em u, B e A.

Sabendo dos processos algébricos para rotacionar a figura formada em 90°, rotacione esta figura em relação ao ponto A. Descreva os processos utilizados no Geogebra para realização da atividade.

Comentário: requer com esta atividade que o aluno pense no número complexo $u = a + bi$ representado por um vetor e que observe que a multiplicação de um número complexo por unidade imaginária i, resulta noutro número complexo da forma $v = -b + ai$, assim havendo uma rotação de 90° com o número $z = a + bi$.

Figura 38: Representação da atividade proposta



Fonte: Autor, 2015.

Atividade 5

Na rotação devemos preservar as distâncias (módulo). Assim, vamos criar um "controle deslizante" com a opção ângulo na página do Geogebra para auxiliar-nos quanto a visualização da rotação.

Na caixa "Entrada" digite $cos(\alpha) + i * sin(\alpha)$ (o número complexo z_1 é criado).

Em seguida, novamente digite no campo "Entrada", $2(cos(\alpha) + i * sen(\alpha))$, o número complexo z_2 é criado. Novamente no campo "Entrada", digite $z_1 \cdot z_2$ [Enter].

Em seguida, arraste o controle de movimento para observar o efeito de rotação.

(a) Descreva algebricamente as operações efetuadas anteriormente com os números complexos.

(b) É possível determinar porque a rotação preserva distâncias, enquanto a posição do novo ponto altera-se progressivamente? Justifique.

Comentário: esta atividade propõe verificar as mesmas propriedades na atividade anterior, no entanto com a utilização do controle deslizante ou mesmo a animação da figura, observamos o movimento dinâmico da mesma.

Atividade 6

Vamos rotacionar uma figura, por exemplo, um triângulo. Para isto, basta determinarmos, três números complexos.

Primeiramente, determine três "controles deslizantes" com a opção ângulo na área de trabalho do geogebra (os quais aparecerão com controles α, β e γ).

Em seguida no campo "Entrada", digite os números complexos na forma trigonométrica $z_1 = cos(\alpha) + i * sin(\alpha)$, $z_2 = 2 * (cos(\beta) + i * sin(\beta))$ e $z_3 = 3 * (cos(\gamma) + i * sin(\gamma))$.

Depois, com o botão direito, clique no controle β, selecione *Propriedades*, onde na guia *Básico*, na caixa de diálogo *Definição*, redigite o valor para $\alpha + 40°$.

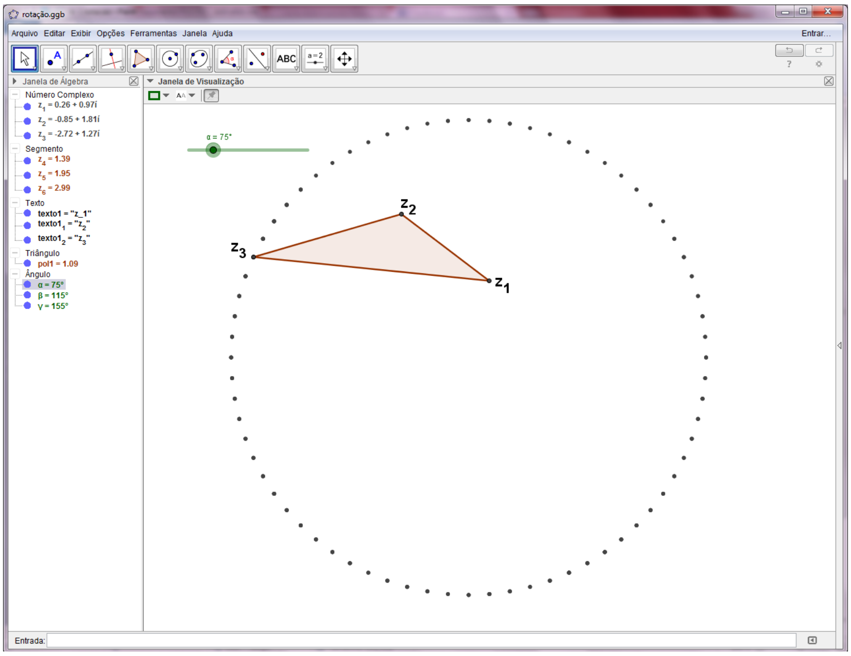
Repita o processo para o controle γ e alterando a caixa de diálogo *Definição* para $\alpha + 80°$, feche a tela Propriedades e veja o triângulo formado.

Para observar melhor a figura, com a ferramenta "Polígono", desenhe um triângulo com os três pontos. Agora, altere o controle deslizante α e observe o efeito criado.

Com a mesma proposta acima, desenhe com as mesmas propriedades angulares e de módulo um quadrilátero. Descreva o processo.

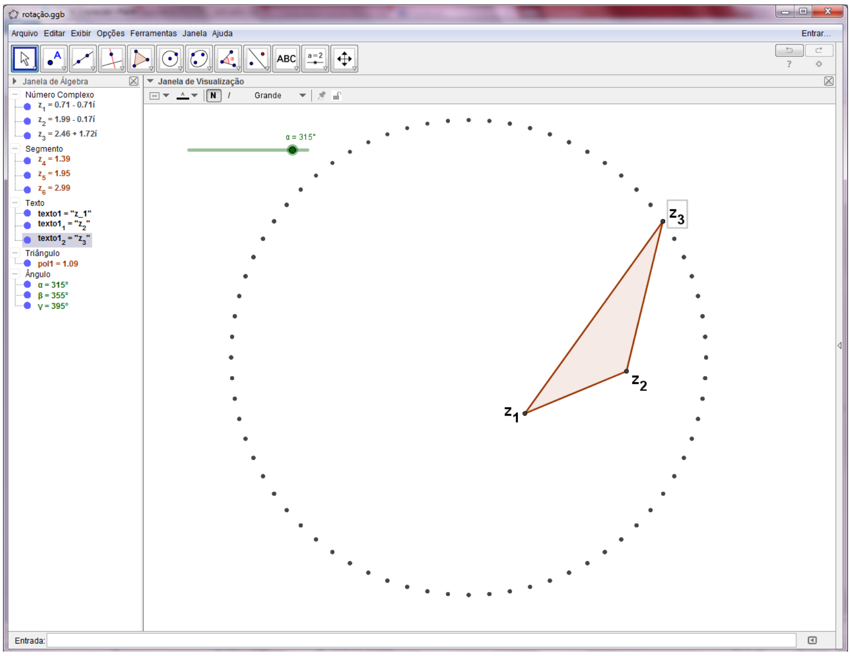
Para melhor destaque da representação selecionamos a opção "Habilitar rastro".

Figura 39: Representação da figura a rotacionar



Fonte: Autor, 2015.

Figura 40: Representação da rotação



Fonte: Autor, 2015.

4.3.4 Dilatações

A dilatação analisada no campo complexo, representa um número complexo z que é transformado em z' de mesmo argumento de z, multiplicado por uma constante k, com $k > 1$. Se $0 < k < 1$, teremos uma contração de z.

Atividade 7

Daremos um exemplo de dilatação utilizando um número complexo u, onde o argumento é o mesmo, no entanto, o módulo altera-se.

Na nossa atividade, primeiro vamos adicionar um *controle deslizante*, selecionando a opção *ângulo*, e no campo "Entrada" digite os números complexos $u = cos(\alpha)i * sin(\alpha)$ e em em seguida $w = 1 + 0i$. Multiplique $u \cdot w$ e analise os seguintes fatos:

(a) Da multiplicação de u por w, como se apresenta o novo ponto?

(b) Ao arrastar o ponto w na tela, como se apresenta o número da multiplicação de u por w:

(i) quando w > 1?

(ii) quando 0 < w < 1?

(iii) e quando w < 0?

Comentário: nesta atividade, o aluno deverá compreender que dependendo do valor de w, nos itens (i), (ii) ou (iii), o valor de z_1, se deslocará para posição maior que u, estará entre 0 e o ponto u, e deslocará para menor que zero. No qual, juntamente destacando o ponto z_1 por um vetor, tem-se a noção de dilatação e compressão.

Atividade 8

Vamos propor a dilatação de um triângulo. Em particular, para um triângulo vamos considerar o ponto $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 + 1.5i$ e $z_3 = 2 + 3i$, os quais devem ser digitados no campo "Entrada". Em seguida, crie um controle deslizante com a opção "número". Após adicionar o controle, digita novamente no campo "Entrada", a*z_1, a*z_2 e a*z_3.

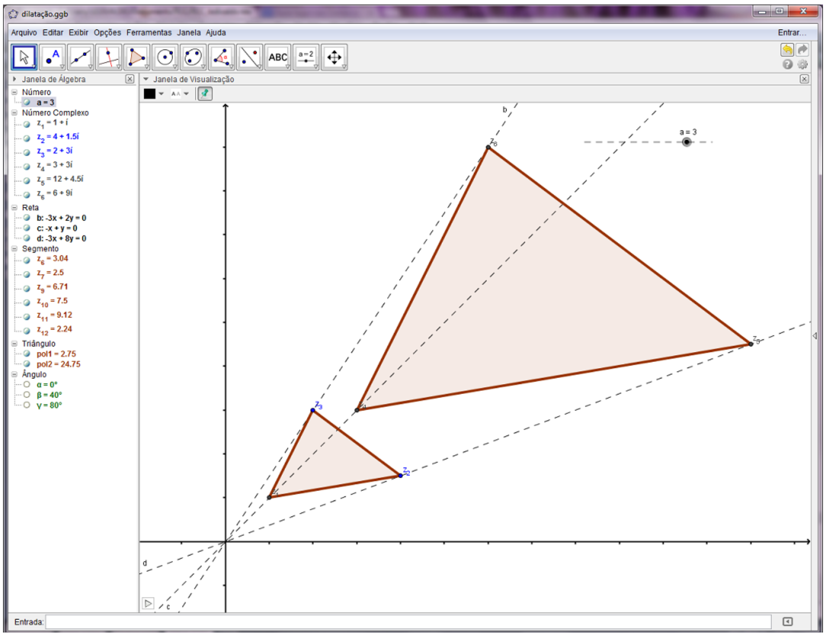
Para melhor visualização com a ferramenta "Polígono" desenhe triângulos tendo como vértices z_1, z_2, z_3 e outro triângulo para os pontos z_4, z_5, z_6. Em seguida mova o controle deslizante e veja o resultado.

Calcule algebricamente a distância entre os pontos z_1 e z_2, em seguida a distância entre os pontos z_4 e z_5. Qual conclusão você obtêm quanto ao resultado da distância de z_1 e z_2 e de z_4 e

z_5? É possível associar algum caso de congruência?

Veja abaixo uma possível figura, traçada com as indicações anteriores.

Figura 41: Representação de uma dilatação



Fonte: Autor, 2015.

Responda, o que acontece com a figura quando o número do controle:

(a) for maior que 1;

(b) quando estiver entre 0 e 1;

(c) ou for menor do que 0?

Comentário: com esta atividade anterior, o professor pode trabalhar proporcionalidade dos lados dos triângulos, e permitir que deduza qual a função da constante ao multiplicar um número complexo.

Atividade 9

Vamos propor uma atividade somente como observação de analisar rotação e dilatação juntas. Assim, o aluno poderá variar livremente o numero complexo z_1, z_2 e z_3. Esperamos que o aluno perceba que a transformação sofrida pelo caso particular, o triângulo, seja a composição de uma rotação e de uma dilatação ou contração.

Como recurso auxiliar, coloque um “Controle Deslizante” com a opção *Número* e três controles deslizantes com a opção *Ângulo* representados por α, β e γ. Em seguida digite no campo "Entrada", $z_1 = a(cos(\alpha) + i * sin(\alpha))$ [Enter], $z_2 = 2a(cos(\beta) + i * sin(\beta))$ [Enter] e $z_3 = 3a(cos(\gamma) + i * sin(\gamma))$ [Enter].

Após adicioná-los, utilize a ferramenta "Polígono" para os pontos z_1, z_2 e z_3 tornando-os vértices de um triângulo. Faça o mesmo para os novos pontos.

Enfim, para observar somente a rotação das figuras, selecione os três seletores; com o botão direito clique em um seletor e ative a opção "Animar".

Para observar a rotação e dilatação, selecione os quatro seletores e também ative a opção "Animar".

Quando o seletor chega no ângulo 0 ou 360°, a figura sofre rotação em relação a si própria?

Atividade 10

Esta atividade tem como objetivo visualizar os números complexos quanto às potências, possibilitando aos alunos construírem uma representação geométrica das potências, assim como uma representação artística.[1]

Para construção da representação geométrica das potências de um valor qualquer, que denotaremos de A (complexo), devemos seguir os passos abaixo:

a) Utilizando a ferramenta *"Ponto"*, determine um ponto no plano, denominado pelo programa de A;

b) Clique com o botão direito no ponto A, depois em *Propriedades*, em seguida clique na guia *Álgebra* e na opção *Coordenadas* selecione "Número Complexo";

c) Na guia Básico, em "Exibir Rótulo" selecione "Nome & Valor". Em seguida feche a tela;

d) No menu Exibir, selecione Planilha;

e) Na célula A1, digite "=A";

f) E na célula A2, digite "=A1*A$1";

g) Na alça de seleção da célula A2, puxe a alça até a célula A100;

h) Na célula B2, digite "=segmento[A1,A2]";

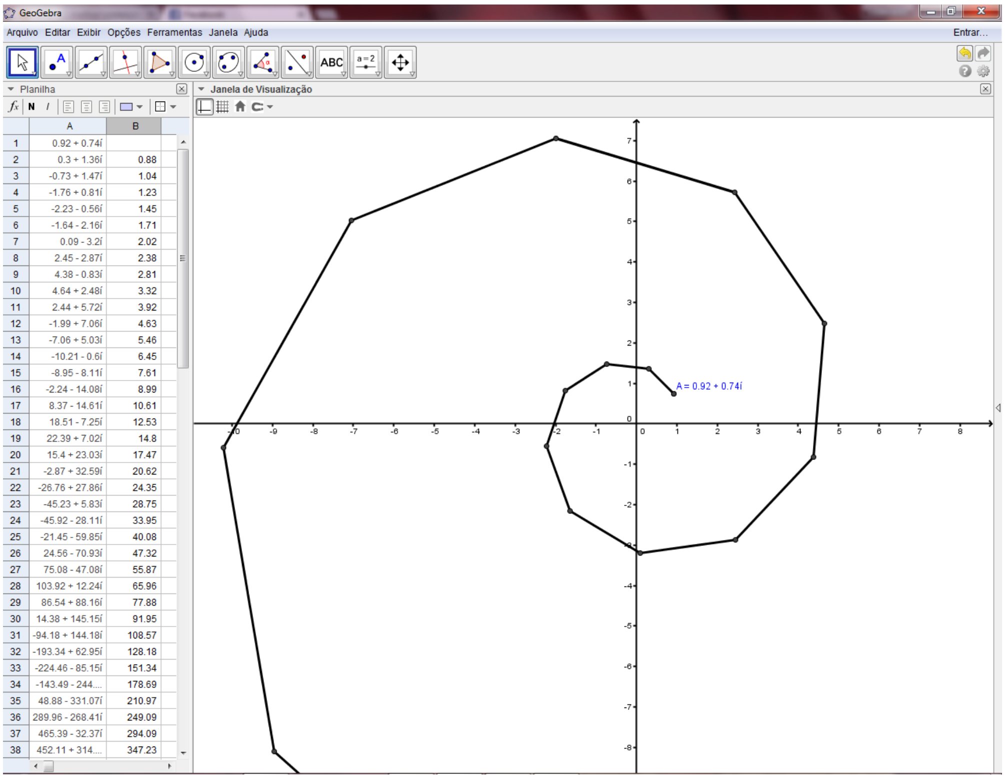
i) Na alça de seleção da célula B2, puxe a alça até a célula A100;

[1] Atividade disponível em https://www.youtube.com/watch?v=4grJkq2pw-Q

Observação: o programa Geogebra é atualizado quase mensalmente, portanto, talvez alguns processos descritos nesta atividade não tenha sido realizado completamente, por exemplo, o item (h), dependendo da versão mesmo atualizada, não construa automaticamente todos os segmentos, sendo necessário construir o segmento no campo “Entrada” individualmente.

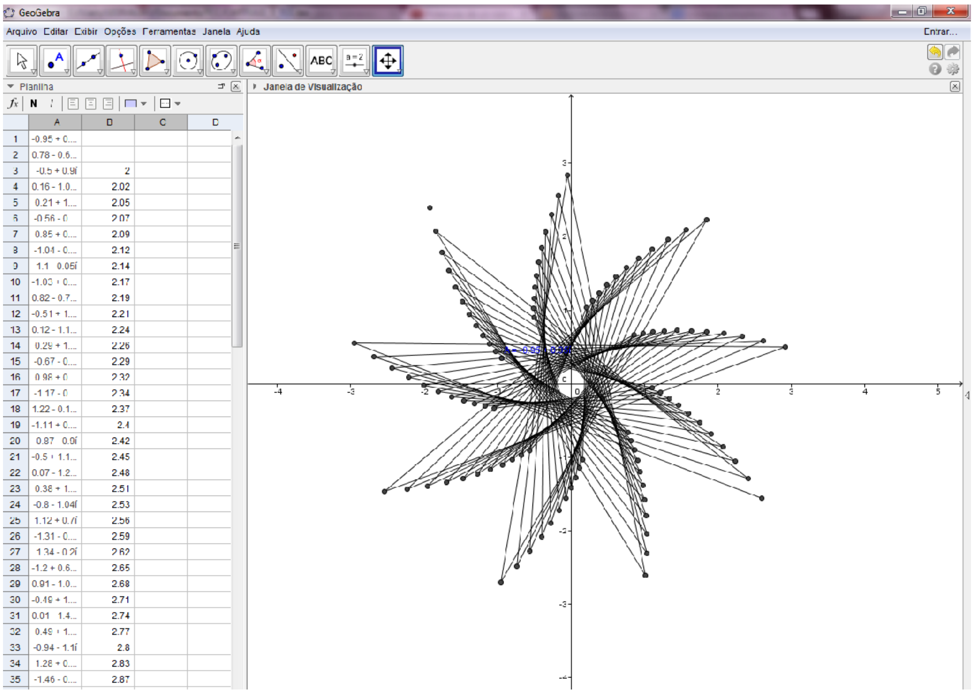
Ao término da atividade, possivelmente deverá apresentar-se como mostrado na primeira figura abaixo. Se movimentarmos o ponto A, poderemos observar outro formato possível, como observamos na segunda figura.

Figura 42: Representação geométrica das potências de A



Fonte: Autor, 2015.

Figura 43: Representação Artística das potências de A



Fonte: Autor, 2015.

Atividade 11

No mesmo foco da atividade matemática com potenciação de i e também associar a uma visualização artística, temos a seguinte atividade.[2]

a) Clique na opção “Circulo dados centro e raio”, e depois clique em (0,0). Na caixa de diálogo Raio, digite 1 [Enter];

b) Selecione a ferramenta *“Ponto”* e insira um ponto no circulo;

c) Clique com o botão direito no ponto B, depois em Propriedades, em seguida clique na guia *Álgebra* e na opção *Coordenadas* selecione “Número Complexo”;

d) Na guia Básico, em “Exibir Rótulo”   selecione “Nome & Valor”. Em seguida feche a tela;

e) No menu Exibir, selecione Planilha;

f) Na célula A1, digite “=B”;

g) Na célula A2, digite “=A1*A$1”. E na célula B2, digite “=segmento[A1,A2]”;

h) Selecione as células A2 e B2, e na alça de seleção da célula B2, puxe a alça de seleção

[2]https://www.youtube.com/watch?v=4grJkq2pw-Q

até a célula A50;

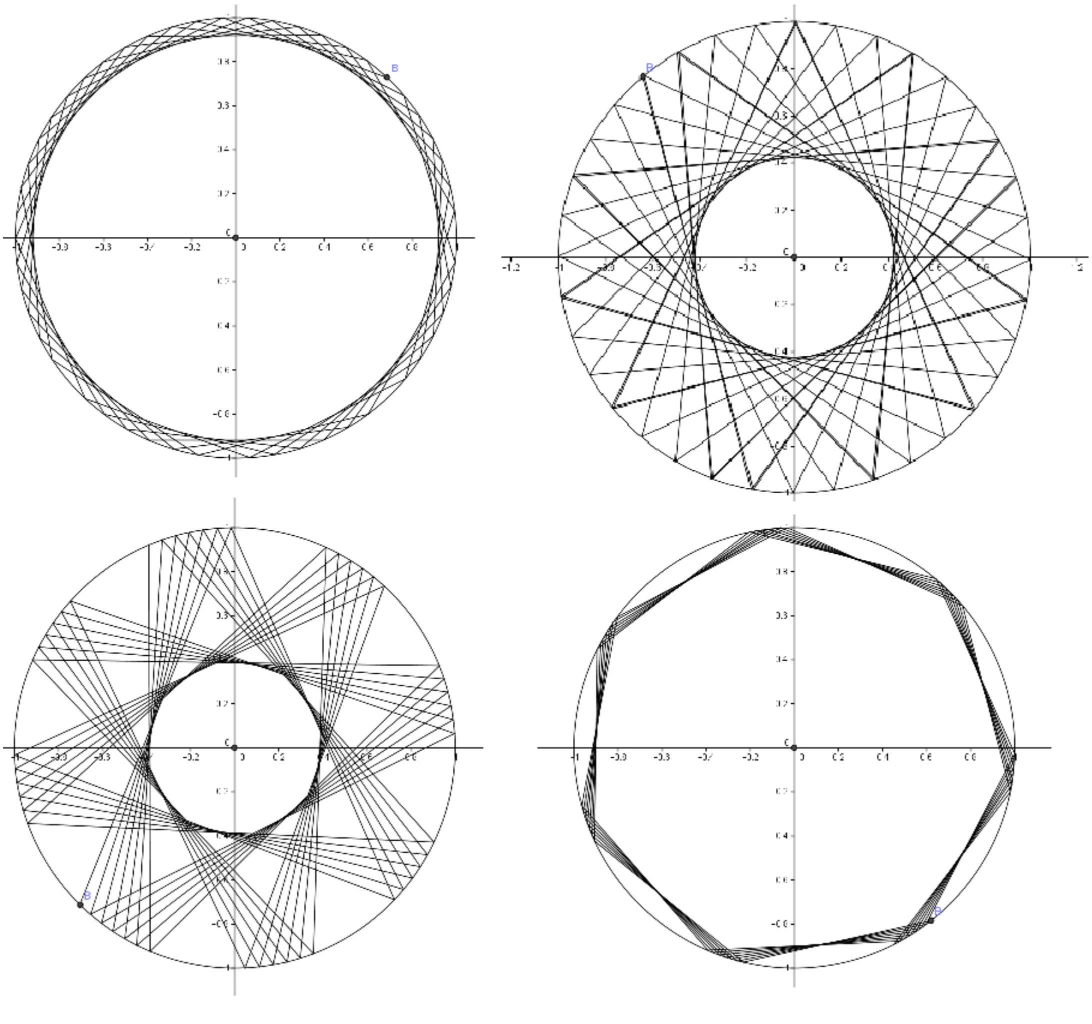
i) Para melhor visualização do efeito, selecione as células de A2 a B50, clique com o botão direito do mouse, opção Propriedades. Na guia "Básico" desmarque a opção "Exibir Objetos" (feche a tela);

j) Movimente o ponto B (ou A1) e veja o efeito da construção.

Qual interpretação podemos obter quanto a rotação do ponto B e aumento (ou diminuição) dos segmentos de reta no círculo?

Observe quatro diferentes posições do ponto B e suas respectivas ilustrações a partir da atividade anterior.

Figura 44: Representação geométrica das potências de A



Fonte: Autor, 2015.

Atividade contextualizada

Há um famoso problema matemático, a Ilha do Tesouro [3], problema este que apresenta-se de forma contextualizada envolvendo números complexos. Na atividade vamos também utilizar as ferramentas do programa de geometria dinâmica para uma primeira visualização geométrica. No apêndice B, resolvemos algebricamente o problema.

Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhe, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo um ângulo de 90°, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90°, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio entre as duas marcas.

Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe. Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: "Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui". Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

Vamos a uma construção visual do problema no Geogebra.

a) Na tela principal do programa, clique no ícone Janela de Visualização e desative a visualização dos eixos;

b) Com a ferramenta "Ponto", determine três pontos quaisquer na tela;

c) Em seguida, trace segmentos de reta AB e BC;

d) Na caixa de "Entrada", digite "$(B-A)*(-i)+A$" [Enter];

e) Em seguida, também digite "$(B-C)*i+C$";

f) Trace segmento de reta de A a z_1, de C a z_2 , de A a B, de B a C e de z_1 a z_2.

g) Na caixa de "Entrada", digite "pontomédio[e]".

Pronto! geometricamente você encontrou o tesouro, simbolizado pelo ponto médio de z_1 a z_2. E comprovando que o pirata era um matemático.

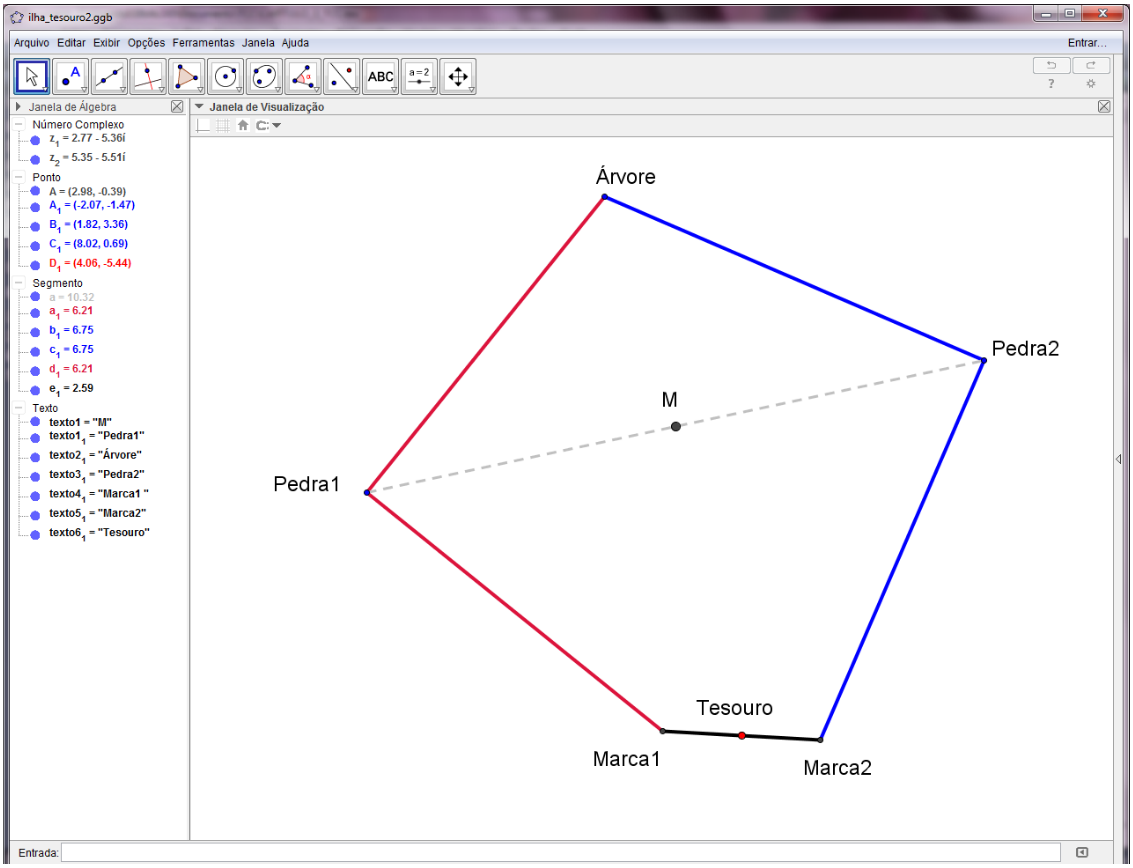
Mova o ponto B, e verifique que independentemente da posição de B, o tesouro sempre ficará na mesma posição.

[3]Problema retirado da Revista do Professor de Matemática, nº 47

Comentário1: o problema poderá ser refeito com supressões dos itens (d) e (e). O professor poderá encaminhar um diálogo, solicitando aos alunos argumentações que auxiliassem a resolução da complementaridade do problema.

Comentário2: quanto ao mover o ponto B, o aluno verificaria visualmente que o mesmo independe da sua localização; com o professor em seguida justificando algebricamente a sua ausência de relação. Sendo assim, bastaria calcular o ponto médio entre as pedras A e C, dobrariam à esquerda com um ângulo de 90° e percorreriam a mesma distância, encontrando o ponto do tesouro D.

Figura 45: Representação da atividade (ilha do tesouro)



Fonte: Autor, 2015.

4.4 Atividades complementares quanto às transformações geométricas

A proposta das atividades complementares é de que o professor as utilize como proposta desafiante ou de análise crítica para estudo de um item específico.

Atividade Complementar 1

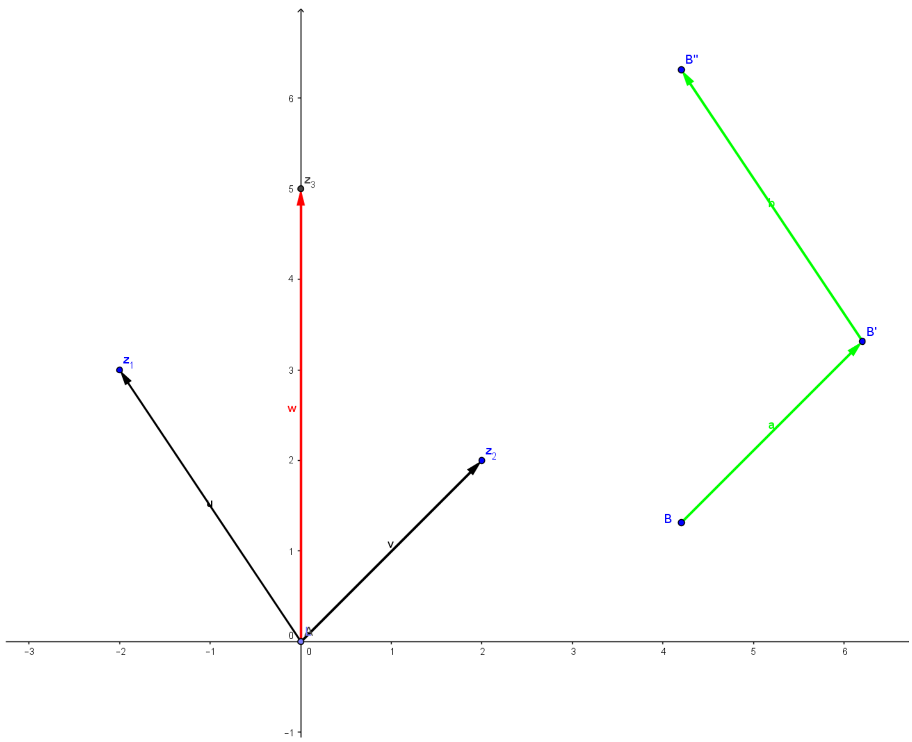
1) Uma pessoa desloca uma caixa de o ponto B ao ponto B', em seguida do ponto B' ao ponto B". Qual o deslocamento equivalente entre o ponto BB"?

Solução:

Utilizando-se dos recursos do Geogebra, vamos imaginar que a posição de chegada em cada trajeto por B"$= z_1 = -2+3i$ e $B' = z_2 = 2+2i$.

Basta observar que utilizando a adição de números complexos no plano complexo determinaremos o deslocamento equivalente. Assim, basta digitar na caixa "Entrada", $z_1 + z_2$, e teclar [Enter].

Figura 46: Atividade complementar 1



Fonte: Autor, 2015.

Atividade Complementar 2

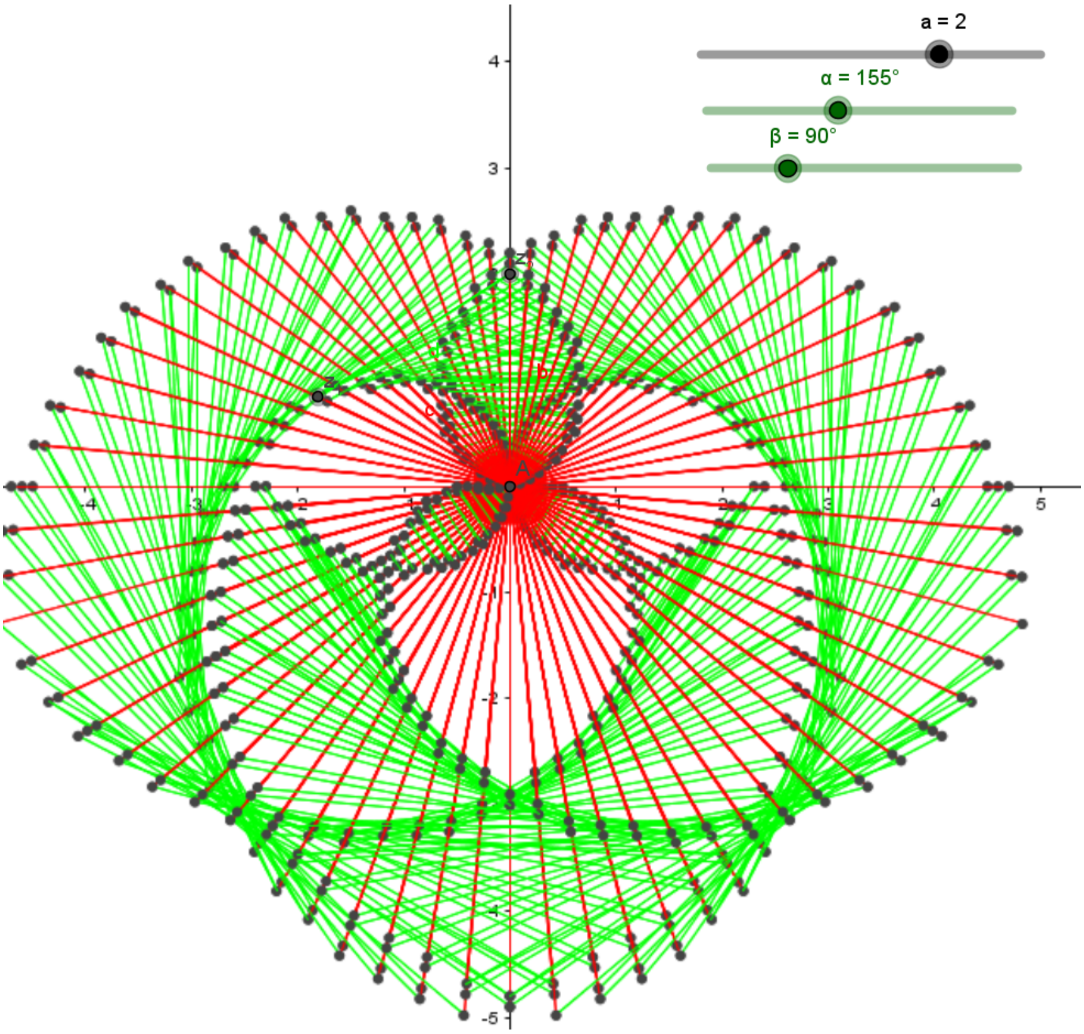
A segunda atividade tem como objetivo criar uma arte virtual, utilizando-se de operações com números complexos. Abaixo a descrição do processo.

1) Crie um “Controle deslizante” de número *a*;
2) Em seguida crie mais dois “Controles deslizantes” de ângulos α e β;
3) Na caixa de “Entrada” digite, a*(cos(α) + i*sen(α)) e tecle [Enter];
4) Novamente na caixa de “Entrada” digite, a*(cos(β) + i*sen(β)) e tecle [Enter];
5) Com a seleção da ferramenta “Ponto”, determine um ponto na origem (0,0);
6) Em seguida determine segmentos do ponto A ao z_1, A ao z_1 e z_1 ao z_2;
7) Ative a opção “Habilitar rastro” nos pontos z_1 e z_2;
8) Ative novamente a opção “Habilitar rastro” para os três segmentos de reta existentes;
9) Clique com o botão direito do mouse no controle deslizante e selecione a opção “Animar”.

Observação: a mudança dos controles deslizantes para outros valores, antes de selecionar a opção *Animar*, permite criar outros formatos de figuras.

Abaixo, um esboço da figura proposta.

Figura 47: Atividade complementar 2



Fonte: Autor, 2015.

Atividade Complementar 3

Esta atividade propõe mostrar um exemplo de dilatação com o processo de rotação para construir uma determinada figura.

Segue-se os passos abaixo:

1) Na caixa de "Entrada" digite $z_1 = 4+4i$, em seguida $z_2 = 3+0i$ [Enter], $z_3 = 0+i$ e $1+0i$ [Enter];

2) Com a ferramenta "Polígono", selecione os vértices A, z_1, z_2 e z_3 descrevendo um polígono;

3) Em seguida na caixa de "Entrada" digite $i*z_1$ [Enter], $i*z_2$ [Enter], $i*z_3$ [Enter], $i*A$ [Enter];

4) Novamente com a ferramenta "Polígono", selecione os vértices z_7, z_8, z_9 e z_{10} descrevendo um polígono;

5) Noutro passo da atividade, na caixa de "Entrada" digite $i*z_{14}$ [Enter], $i*z_{15}$ [Enter], $i*z_{16}$ [Enter], $i*z_{17}$ [Enter];

6) E trace novamente um polígono pelos pontos criados;

7) Crie um "Controle deslizante" número a;

8) Na caixa de "Entrada", digite z_1*a, z_2*a, z_3*a e $A*a$;

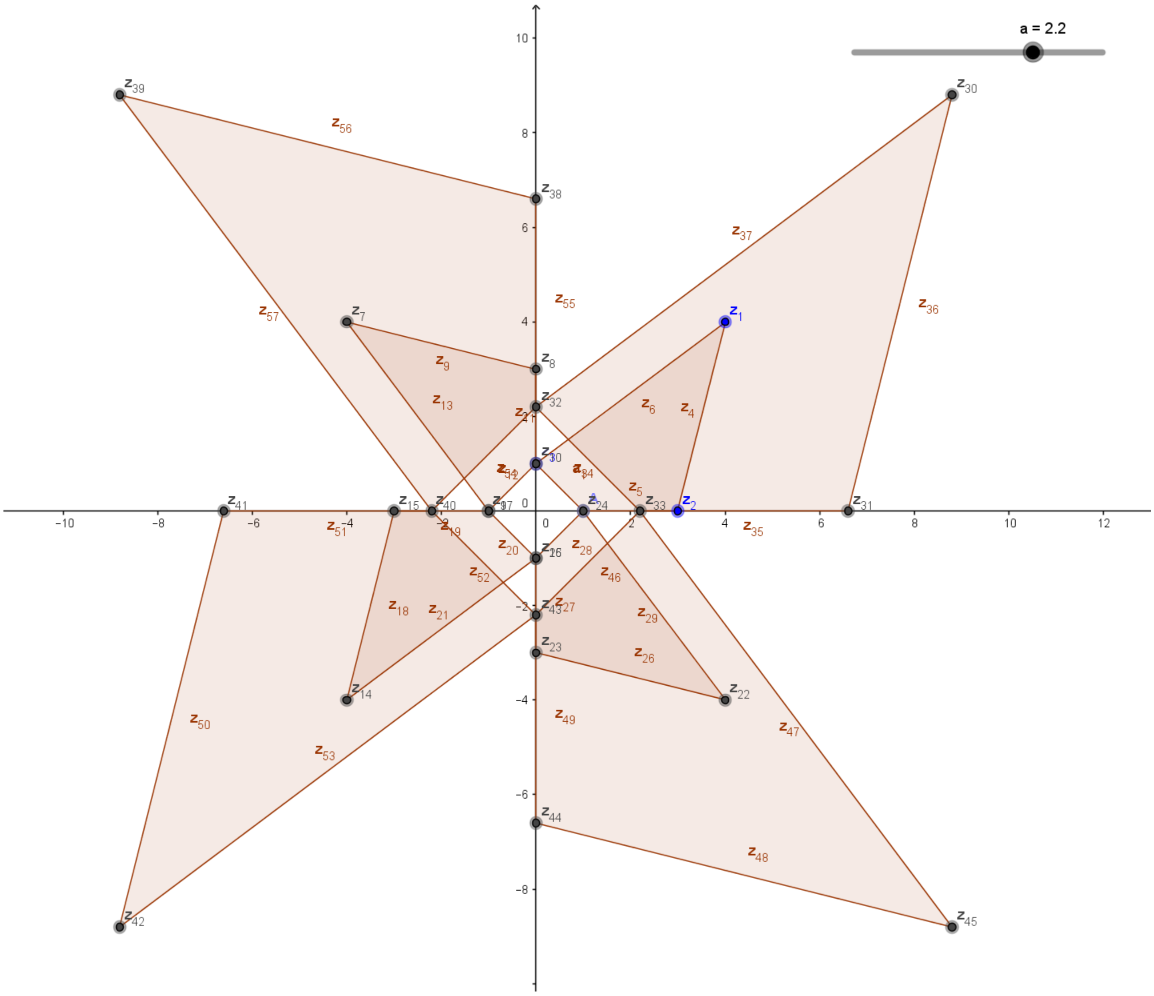
9) Crie um polígono por estes últimos pontos criados;

10) Repetindo os passos anteriores, na caixa de "Entrada", digite z_8*a, z_7*a, $z_{17}*a$, $z_{15}*a$ e em seguida descreva um polígono por estes pontos;

11) Faça os mesmos passos, digitando na caixa de "Entrada", $z_{14}*a$, $z_{16}*a$, $z_{22}*a$ e $z_{23}*a$, finalizando com a construção do polígono passando por estes pontos.

Mova o controle deslizante e observe o efeito criado.

Figura 48: Atividade complementar 3



Fonte: Autor, 2015.

Atividade Complementar 4

Atividade mostra como desenhar um catavento. Siga os passos abaixo:

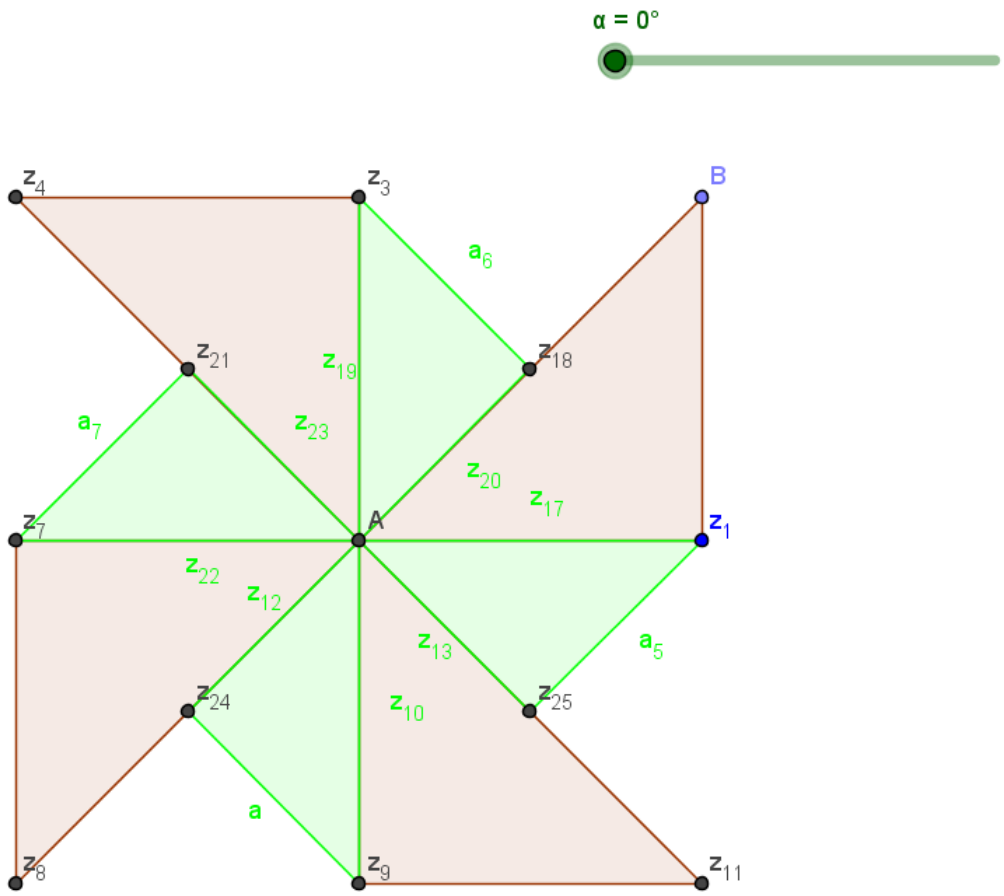
1) Insira o "Controle deslizante" na opção para ângulo α;
2) Insira um ponto na origem (0,0);
3) No campo "Entrada" digite 2*(cos(α) + i*sen(α)), [Enter];
4) Em seguida no campo "Entrada" digite $\alpha + 45°$ [Enter];
5) Ainda no campo "Entrada" digite $8^\wedge(1/2)$*(cos(β) + i*sen(β)) [Enter];
6) Com a ferramenta "Polígono" selecione os três vértices;
7) No campo "Entrada" digite $z_1 * i$ [Enter]; $B * i$ [Enter];
8) Com a ferramente "Polígono" selecione os vértices A, z_3 e z_4;
9) Novamente digite no campo "Entrada" $z_3 * i$, $z_4 * i$, $z_7 * i$ e $z_8 * i$ [Enter];
10) No campo "Entrada" digite $(8^\wedge(1/2))$/2*(cos(β) + i*sen(β)) [Enter];
11) Em seguida digite também as três expressões:

    $(8^\wedge(1/2))$/2*(cos($\beta + 90°$) + i*sen($\beta + 90°$)) [Enter];

    $(8^\wedge(1/2))$/2*(cos($\beta + 180°$) + i*sen($\beta + 180°$)) [Enter];

    $(8^\wedge(1/2))$/2*(cos($\beta + 270°$) + i*sen($\beta + 270°$)) [Enter];
12) Com a ferramenta "Polígono" selecione o ponto médio do maior lado do triângulo, a origem e o vértice do ângulo reto do triângulo posterior. Selecione outra cor para essa nova figura triangular;
13) Com o botão direito selecione o "Controle deslizante" e clique em "Animar".

Figura 49: Atividade complementar 4



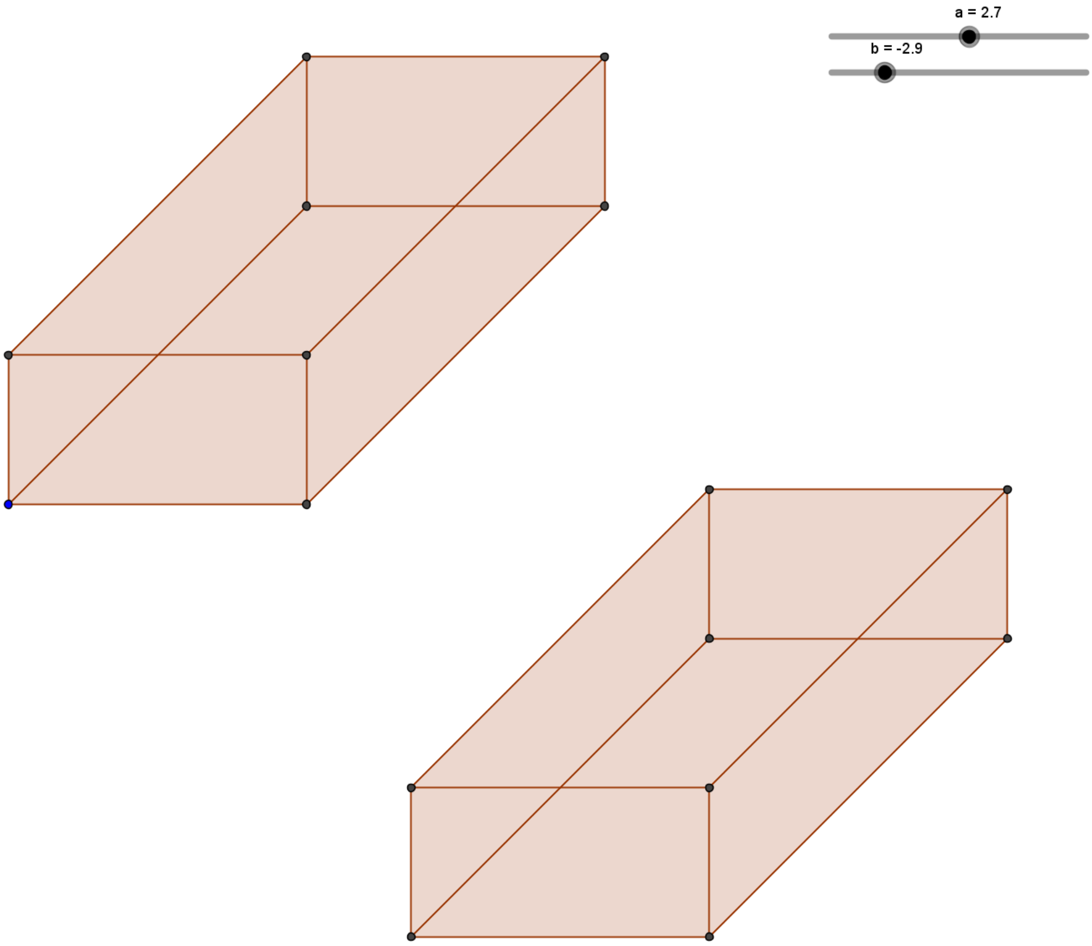
Fonte: Autor, 2015.

Atividade Complementar 5

Vamos mostrar como construir dois blocos no qual um deles sofre translação horizontal e vertical. Para isso, vamos utilizar das operações dos números complexos. Siga os passos abaixo:

1) Crie dois "Controles deslizantes" de números (a) e (b);
2) No campo de "Entrada", digite "4 + 2i" [Enter]; "$z_1 + 2$" [Enter]; "$z_1 + i$" [Enter]; "$z_1 + 2 + i$" [Enter];
3) Com a ferramenta "Polígono" selecione os quatro vértices;
4) Novamente no campo "Entrada" digite "$z_1 + 2 + 2i$" [Enter]; "$z_2 + 2 + 2i$" [Enter]; "$z_3 + 2 + 2i$" [Enter]; "$z_4 + 2 + 2i$" [Enter];
5) Com a ferramenta "Polígono" selecione os novos quatro vértices;
6) Ainda com a ferramenta "Polígono" construa as faces laterais e das bases que ao final formará um paralelepípedo;
7) Em seguida, no campo "Entrada" digite $z_2 + a + bi$ [Enter]; $z_3 + a + bi$ [Enter]; $z_4 + a + bi$ [Enter]; $z_9 + a + bi$ [Enter]; $z_{10} + a + bi$ [Enter]; $z_{11} + a + bi$ [Enter]; $z_{12} + a + bi$ [Enter]; $z_1 + a + bi$ [Enter];
8) Feche a figura com a ferramenta "Polígono";
9) Oculte os rótulos e os eixos;
10) Mova os controles a e b e observe o movimento translação criado.

Figura 50: Atividade complementar 5



Fonte: Autor, 2015.

Atividade Complementar 6

Vamos propor uma atividade que promova uma ação de rotação e dilatação de uma figura. Siga os passos abaixo:

1) Adicione três “Controles deslizantes”, um com estilo “Número”, e dois com estilo “Ângulo”;

2) No campo “Entrada” digite os comandos a*(cos(α) + i*sen(α)) [Enter] e a*(cos(β) + i*sen(β)) [Enter];

3) Em seguida, adicione qualquer imagem, selecionando o menu "Editar"e clicando opção “Inserir imagem de”;

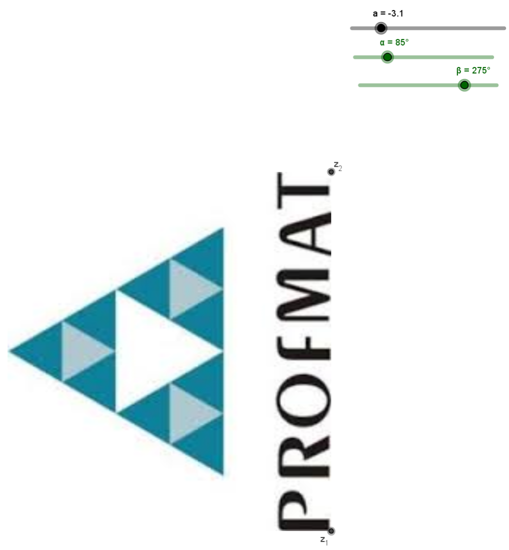
4) Após inserir a imagem, clique com o botão direito na mesma, na opção “Propriedades”, selecione a aba “Posição”; e altere os itens “Canto1” e “CornerModel” para z_1 e z_2.

Altere os controles deslizantes e observe a rotação indicadas pelos controles α e β, e a dilatação provocada pelo controle *a*.

Figura 51: Atividade complementar 6

Fonte: Autor, 2015.

Figura 52: Figura rotacionada



Fonte: Autor, 2015.

Atividade Complementar 7

Nesta atividade vamos criar um efeito de rotação, movimento da figura horizontal e verticalmente e ampliação da figura.

Segue a descrição do processo:

a) Crie três "Controles deslizantes" com a opção número denominados de a, b e c e um "Controle deslizante" com a opção ângulo α;

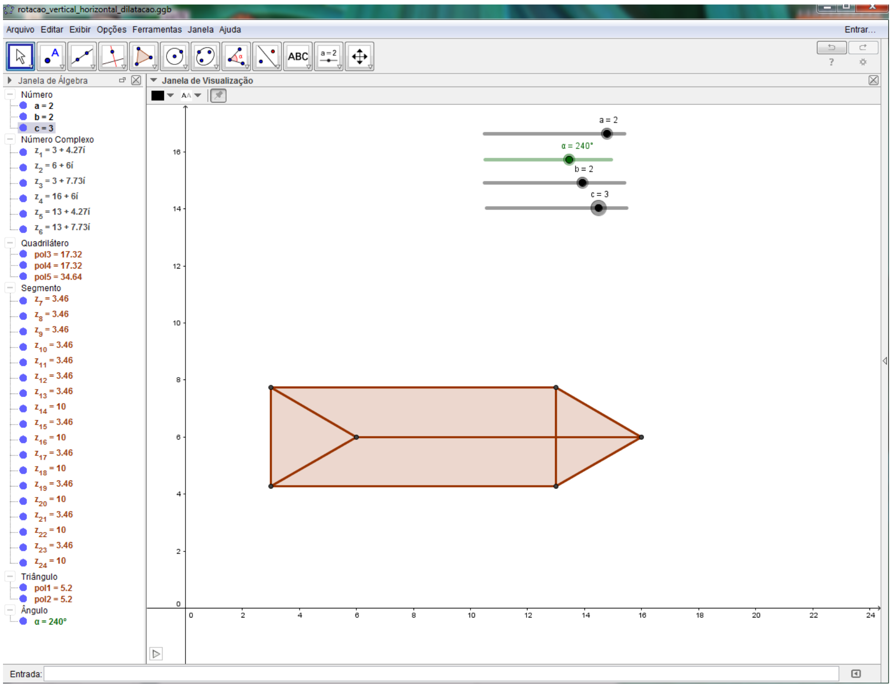
b) No campo "Entrada" digite: a*(cos(α + 120°) + b + i*sen(α + 120°) + c*i) [Enter];
a*(cos(α + 240°) + b + i*sen(α + 240°) + c*i) [Enter];
a*(cos(α + 120°) + 5 + b + i*sen(α + 120°) + c*i) [Enter];
a*(cos(α) + 5 + b + i*sen(α) + c*i) [Enter];
a*(cos(α + 240°) + 5 + b + i*sen(α + 240°) + c*i) [Enter];
a*(cos(α) + b + i*sen(α) + c*i) [Enter];

c) Com a ferramenta "Polígono" desenhe as faces do prisma de base triangular formado.

Mova cada um dos controles deslizantes na tela e observe o que as operações acima executadas permite realizar com a figura.

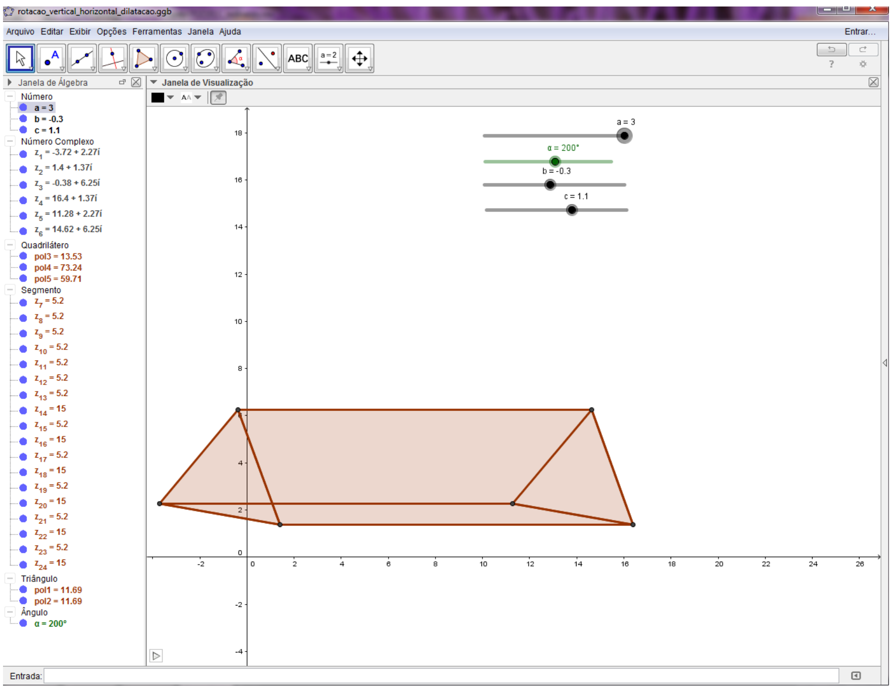
Para uma melhor visualização, selecione os segmentos na "Janela de álgebra", e com o botão direito do mouse desative a opção "Exibir rótulo".

Figura 53: Atividade complementar 7



Fonte: Autor, 2015.

Figura 54: Ativ. complementar 7 com modificação dos controles deslizantes



Fonte: Autor, 2015.

Atividade Complementar 8

Nesta atividade, haverá um exemplo de utilização da notação de Euler para números complexos no Geogebra.

Passos para a construção da figura:

a) Crie um “Controle deslizante” com a opção *ângulo a*;

b) No campo “Entrada” digite a expressão $e^\wedge(i*\alpha)$ [Enter]; Depois $e^\wedge(-i*\alpha)$ [Enter];

c) Em seguida digite 2*i*sen(α) [Enter]; E a expressão 2*cos(α) + i*0 [Enter];

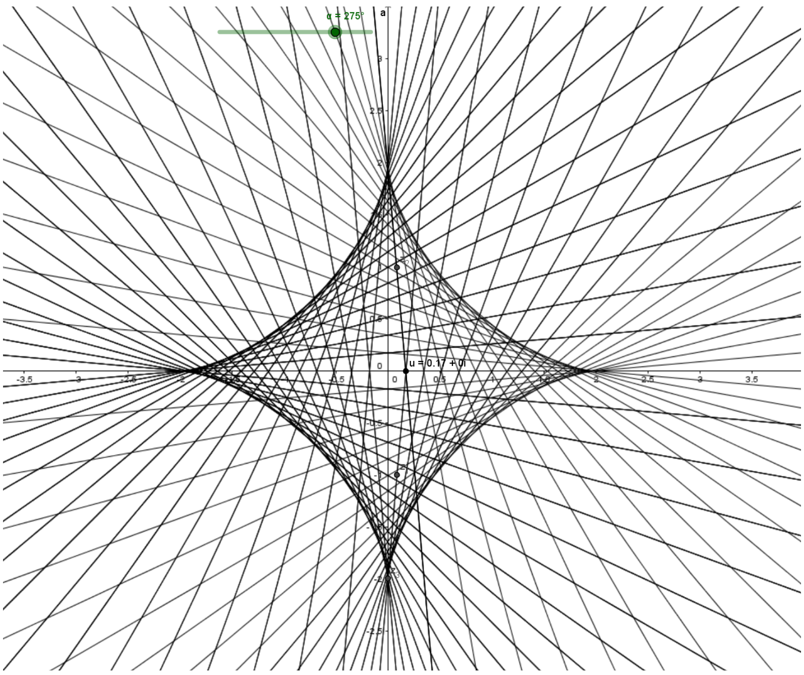
d) Clique no ícone “Reta” e selecione os pontos u e z_2;

e) Clique com o botão direito na reta e selecione a opção “Rastro”;

f) Finalmente, clique com o botão direito do mouse no *controle deslizante* e ative a opção “Animar”.

Abaixo está descrita a figura após esses passos anteriores.

Figura 55: Ativ. complementar 8



Fonte: Autor, 2015.

4.5 Problemas e resultados observados

Após a realização das atividades propostas temos algumas considerações a pontuar devido principalmente quantos aos recursos computacionais utilizados no ensino dos números complexos.

Observamos que os alunos apesar de não conhecerem o programa Geogebra, não tiveram dificuldades significativas que implicassem no irregular desenvolvimento das atividades. Entretanto, é bom ressaltar que os mesmos alunos já dispunham de um conhecimento das ferramentas digitais, pois tinham computadores em casa, ou dispunham de *lan-houses* para o acesso a internet e aplicativos.

Inicialmente foi objetivo desta pesquisa trabalhar com as ferramentas digitais a compreensão geométrica dos números complexos e sua representação no plano de Argand-Gauss. No entanto, ao longo das atividades realizadas com os alunos foi necessário realizar uma abordagem mais coesa quanto ao entendimento, por exemplo, da representação geométrica de números complexos representados por vetores tipo **u** e **-u**, com **u = a + bi**, possibilitando uma visualização que exprime com mais clareza.

Nesta fase de compreensão geométrica dos números complexos, houve um entendimento dos alunos quanto a soma e multiplicação dos mesmos, interpretando a soma como a resultante de um ponto localizado no plano permitindo “o fechamento de uma figura” — nas palavras dos alunos — e que deu-se a complementação pelo professor de informar que representava o método do paralelogramo, e a multiplicação de uma constante por um número complexo como dilatação ou compressão de um vetor.

De forma mais incisiva, em vários momentos foi indispensável que o professor agisse de forma interpelativa em busca de justificativas dos alunos que realçassem a compreensão dos mesmos quanto a atividade, uma vez que a mesma era realizada com sucesso, mais querendo não somente a manipulação das ferramentas e o objetivo desejado quanto ao enunciado era necessário indagar quanto ao conceito do objeto de estudo e a construção deste conceito por parte do educando.

Um dos destaques de atenção quanto “mágica” — frase de um aluno — foi a multiplicação de números complexos por números complexos, onde observaram que (a + bi).(c + di) produz a subtração da multiplicação das partes reais com as partes imaginárias somado com a soma das multiplicações dos extremos de (a + bi).(c + di). Destacou-se também quanto a esse aspecto multiplicativo, o papel do i, com o auxílio do programa de geometria dinâmica, de mostrar que a atribuição dele é rotacionar um número complexo, deixando de visualizá-lo como "letra estranha" e muitas vezes "decorativa" a parte imaginária.

Com alguns exemplos, perceberam que era mais prático após análise geométrica transcrever a multiplicação pelo processo (ac - bd) + (ad + bc)i. Assim, destacaram que primeiro observando o processo geométrico possibilitava realizar o processo algébrico com mais eficiência e concisão. A preocupação inicial era que os alunos não encontrassem um "macete" ou "esquema prático" para resolução do problema sem antes construir o processo matemático envolto na resolução. Como não houve uma preparação anterior quanto a manipulação do software geométrico, foi necessário de um tempo maior para adequação por parte dos alunos das ferramentas do programa em relação a atividade que era proposta, porém, isso não atrapalhou o objetivo educativo proposto.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estudo dos números complexos com auxílio do programa de geometria dinâmica, foi possível verificar a diminuição do abismo entre a abstração e a aplicabilidade destes no universo tecnológico.

Como citado no trabalho, os livros didáticos não trazem a abordagem geométrica das operações que envolvem os números complexos, ou quando o fazem apresentam de forma simplista, talvez seja, que por laços históricos não seja um fator preponderante em avaliações externas, entenda-se, vestibulares no formato antigo ou o ENEM. Como mencionado no texto, somente o autor Dante aplica nos exercícios uma ideia mais próxima da temática deste trabalho, dedicando também uma seção do capítulo ao enfoque da interpretação geométrica de um número complexo multiplicado pela parte imaginária. Além disso, o conhecimento dos números complexos ainda se faz pelo estudo de raízes quadradas de números negativos e dando ênfase ao tratamento algébrico, e portanto, tornando-se aspectos iniciais ao estudo dos números complexos no ensino médio.

Como observado nas atividades, foi utilizado o mínimo de esboço algébrico para privilegiar a construção geométrica. Utilizamos o programa Geogebra, que possui o ambiente algébrico e geométrico presentes na mesma tela, possibilitando verificar paralelamente a construção algébrica e geométrica do mesmo objeto em estudo.

A intenção foi permitir que os alunos conhecessem os conceitos e operações na forma algébrica como é apresentada em sala de aula, e em seguida pudessem a princípio somente visualizar a representação no plano complexo para que posteriormente as transformações algébricas operativas também pudessem ser observadas geometricamente.

A investigação dos processos que envolveram os alunos permitiu uma construção do conhecimento, verificando suas falhas, assim como sua melhor compreensão do que era mediamente apreendido pelo aluno. Esta compreensão inicia-se pelo desenho no ambiente da geometria dinâmica para em seguida construir a ideia matemática a partir das suas propriedades do elemento em estudo.

Essa intervenção da informática no campo da "aula formal", possibilitou avaliar outras ferramentas didáticas que possam contribuir para o desenvolvimento do raciocínio, como possibilitar que a álgebra interaja com a geometria de forma coesa, como por exemplo, a apresentação de números reais multiplicado por um número imaginário puro, onde menosprezou-se a apresentação de “jogo de sinais” para uma apresentação mais direta e historicamente correta, como simplesmente tratando da rotação na reta real do dado número.

As atitudes dos participantes e seus questionamentos permitiram verificar que a aprendizagem foi coerente com os objetivos propostos. Entretanto, é bom ressaltar que se deve existir um planejamento mais perspicaz quanto às atividades para que não ocorram visões superficiais de aprendizagem pelo envolvimento do aluno. Para isso, com as atividades ao serem realizadas no programa, tinham de serem relatadas as estratégias quanto a resolução geométrica, e que mesmo utilizando o desenvolvimento escrito algébrico, fizesse uma correlação com a construção geométrica.

É inexorável que as atividades apresentadas neste trabalho explanam uma relação entre a pessoa e a tecnologia levando à transformação da aprendizagem matemática. Compreender o potencial de diferentes ferramentas com distintos enfoques é um aspecto fundamental tanto para o aluno como para o professor.

Se o aluno for capaz de representar geometricamente através de comandos as operações e transformações de imagens na medida em que consiga deduzir e mostrar os processos que estão envoltos dos números complexos, pode-se concluir que houve um caminho valioso para se aprender matemática. Mesmo que as atividades sejam de visualização através da utilização das ferramentas digitais, incita o mínimo de compreensão dos processos algébricos que são trabalhados na sala de aula.

Assim, é de grande papel qualificativo no trabalho do professor que o pensar sobre o desenvolvimento de novas maneiras de ensino com esta ferramenta, seja um dos aspectos de reflexão quanto às orientações pedagógicas que tanto necessita de uma “engenharia didática” para restabelecer o mínimo de construção do pensamento matemático. Claro que no trabalho efetivo em sala de aula o recurso tecnológico auxilia de forma incisiva, não prejudicando o currículo proposto anualmente, mas é essencial que o professor tenha uma visão ampla do que e como trabalhar sem ferir as competências e habilidades requeridas no ensino.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de. Computador na sala de aula. **RPM**, n^o 67, pp. 43-47. São Paulo: SBM, 2008.

BENTLEY, Peter. **O livro dos números: uma história ilustrada da matemática**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

BIEMBENGUT, Maria Salett. HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo:Contexto, 2003.

BORBA, Marcelo de Carvalho. PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

______; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **PCN+ Ensino Médio Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, SEB, 2002. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ cienciasnatureza.pdf>. Acesso: 10 nov. 2014.

______. DIPRO/FNDE/MEC. **Programa gestão da aprendizagem escolar - Gestar II**. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 3 - TP3. Brasília. DF. 2008.

______. DIPRO/FNDE/MEC. **Programa gestão da aprendizagem escolar - Gestar II**. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 5 - TP5. Brasília. DF. 2008.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria, números complexos**. Coleção do professor de matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos números complexos. **RPM**, n^o 55, pp. 15-24. São Paulo: SBM 2004.

______. LINO, Paulo Sérgio C. Reflexões em espelhos usando números complexos. **RPM**, n^o 76, pp. 37-41. São Paulo: SBM, 2011.

D´AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática - elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. 2. ed. ref. São Paulo: Ática, 2003.

DIAS, Ana Lúcia Braz. **Modelagem matemática**. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 2 - TP2. MEC/SEB, Brasília, DF. 2008.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

______. Decorar é preciso. Demonstrar também é. **RPM**, nº 68, pp. 01-06. São Paulo: SBM, 2009.

GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco. **Recursos computacionais no ensino de matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lucia Torres. **Polinômios e equações algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

______. **Curso de álgebra**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. Vol.6. Complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LEONARDO, Fabio Martins de. (Resp.) **Conexões com a matemática**. Vol. 3. Obra coletiva. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios**. Paulo Cezar Pinto Carvalho (Col.). 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

LIMA, Elon Lages. et al. **A matemática do ensino médio**. Coleção do professor de matemática, vol. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MILIES, C. P. A emergência dos números complexos. **RPM**. nº 24, pp. 5-15. São Paulo: SBM, 1993.

______. A solução de Tartaglia para a equação de 3º grau. **RPM**, nº 25, pp. 15-22. São Paulo: SBM, 1994.

NEVES, Regina da Silva Pina. **Aprender e ensinar geometria: um desafio permanente**. Matemática: Caderno de Teoria e Prática 3 - TP3. MEC/SEB, Brasília, DF. 2008.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**; uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**, vol.3 . 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PONTE, João Pedro da. BROCARDO, Joana. OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**, Rio de Janeiro: SBM, 2012.

______. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática**, Ensino Médio, 8. ed. São Paulo:

Saraiva, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar matemática**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SUTHERLAND, Rosamund. **Ensino eficaz de matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WAGNER, Eduardo. **Construções geométricas**. Colaboração de José Paulo Q. Carneiro. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

APÊNDICE A - Folha do aluno

Nome:____ Série: ______________

OBS.:
Em todos os números complexos representados no plano foi utilizado a ferramenta vetor para melhor visualização geométrica.

1) Nesta atividade vamos representar através de vetores os números complexos $u = 1 + 2i$ e $v = 3 + 1i$. No campo Entrada digite: $u + v$.

Observe o novo vetor (ou novo número complexo) que surgiu foi z_1.

Determine a posição de z_1 no plano. Registre sua observação.

2) O que necessariamente aconteceu com o valor real e imaginário de z_1 geometricamente?

3) (Opcional) Determine geometricamente a posição do número complexo $u + v = -3 + 2i$. É possível determinar os vetores u e v individualmente? Se afirmativo, determine estes números complexos.

4) No programa digite os possíveis números complexos que determinam $u + v = -3 + 2i$. Depois no campo ENTRADA, digite os comandos $u + v$ e observe seu resultado. Movendo os vetores u e v separadamente é possível combinar para que u e v corresponda a $u + v = -3 + 2i$? Justifique sua resposta.

5) Digite no campo ENTRADA: $u = 3 + 2i$, dê Enter . No mesmo campo ENTRADA digite $-u$ e tecle Enter. Diante dessas informações que aparecerão na tela, justifique a relação geométrica entre os vetores, por exemplo, u e $-u$.

6) No campo ENTRADA, digite $u = 3 + 2i$, dê Enter. Em seguida $v = 1 + 2i$ e dê Enter.
No mesmo campo ENTRADA digite $u + v$ e Enter. Depois, $u - v$ e Enter. Qual relação geométrica é possível visualizar entre a soma e diferença de vetores representados por números complexos?

7) Vamos analisar a multiplicação de uma constante por um número complexo.
No campo ENTRADA, digite $u = 2 + 1i$ e dê Enter.
Em seguida, multiplique o número por uma constante qualquer. Exemplo $3 * u$.
Relate ao professor sua observação quanto a modificação geométrica que aconteceu.

7.1) Para visualizar mais objetivamente o papel da constante ao multiplicar o número complexo u, realize os passos seguintes:

a) Insira um CONTROLE DESLIZANTE na tela. Aparecerá uma caixa de diálogo, em seguida clique em APLICAR.

b) No campo ENTRADA, digite $a * u$ e tecle ENTER.

c) Mova o controle deslizante e faça suas observações. Com a observação realizada, conclua qual o papel do produto da constante pelo número complexo.

8) Atividade referente a multiplicação de um número complexo por outro número complexo.

Sejam os vetores $u = 3 + 1i$ e $v = 1 + 2i$. Realize por escrito a multiplicação de u por v.
Em seguida, represente no plano do programa, os números complexos u e v. Depois, digite no campo ENTRADA, $u * v$ (ENTER).
a) Registre sua observação geométrica sobre $u * v$.

b) Observe que se $u = a + bi$ e $v = c + di$, ao multiplicarmos $u * v$ obtemos $u.v = ac - bd + (ad + bc)i$.
Na multiplicação de $u = 3 + 1i$ e $v = 1 + 2i$, você é capaz de observar alguma relação com as informações numéricas com aquelas apresentadas geometricamente no plano? Ou seja, é possível perceber a relação de $ab - bd$ e $ad + bc$ geometricamente? Justifique sua resposta identificando a relação observada.

9) Qual procedimento podemos realizar para rotacionar em 180° um número complexo?

10) Quais as características principais que possui um número complexo na forma trigonométrica?

11) Sem utilizar o programa GeoGebra, você saberia localizar aproximadamente a posição do produto v*u, sabendo que $v = 4 + 1i$ e $u = 2 - 1i$.

Preenchendo a tabela abaixo, observe alguma regularidade entre os coeficientes de u e v e o resultado do produto u por v.

Vetor v	Vetor u	u*v
4 + 1i	2 - 1i	
5 + 1i	3 - 1i	
6 + 1i	3 - 1i	

Expresse a ideia da relação entre os coeficientes de u e v com o resultado $u * v$.

12) Para visualizarmos o objetivo da função trigonométrica realize os passos de construção abaixo:

a) Clique no ícone CONTROLE DESLIZANTE e crie dois controles com a opção ÂNGULO (um será chamado de α e o outro de β).

b) Crie os números complexos utilizando o campo ENTRADA, por exemplo, $u = 3 + 1i$ e $v = 1 - 2i$.

c) Com a opção SEGMENTO, a partir do ponto (0,0) construa o segmento ao ponto u e depois a v. Você observará que será automaticamente criada duas letras próximas aos segmentos (talvez a e b).

d) No campo ENTRADA digite, $a * b * (cos(\alpha + \beta) + i * sen(\alpha + \beta))$. Será criado um novo número complexo.

e) Com o botão direito do mouse, clique no controle deslizante e acione a opção ANIMAR. Faça isso nos dois controles.

Veja o resultado com a animação criada na sua tela.

Agora, vamos a atividade.

Construa com a expressão para forma trigonométrica de números complexos, como no exemplo anterior, um vetor que também se dilate ou se comprima.

Quais as necessidades algébricas para obter uma dilatação e compressão do vetor?

13) Usando a expressão,

$$\sqrt[n]{|z|.(cos\theta + i.sen\theta)} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i.sen\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), com \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Determine as raízes cúbicas de 8. Para tanto calcule separadamente $\sqrt[n]{|z|}$ e o argumento de z.

Com as raízes encontradas, determine os pontos numa circunferência, com centro (0,0) utilizando o campo ENTRADA. Trace segmentos de reta entre os pontos encontrados.

a) Com a ferramenta "Distância" meça cada segmento e relate os motivos de eles terem distâncias iguais. Estes pontos podem variar, diminuindo a distância entre um e outro? Justifique.

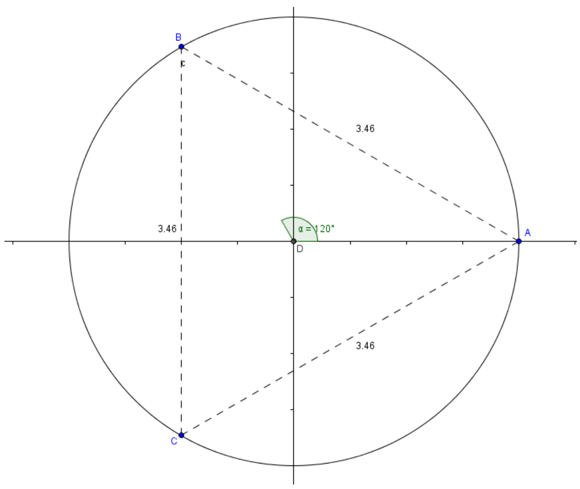
b) Qual o ângulo formado entre cada ponto e a origem (0,0)? Estes ângulos podem variar? Justifique.

Interpretação Geométrica.
Sabendo que as raízes cúbicas de 8 são 2, $-1+i\sqrt{3}$ e $-1-i\sqrt{3}$, vamos representá-las geometricamente.

Desenhe um círculo de centro (0,0) com comprimento do raio 2. Em seguida digite no campo ENTRADA, $z_1 = 2+0i$ (tecle ENTER), $z_2 = -1+\sqrt{3}i$ (ENTER), $z_3 = -1-\sqrt{3}i$ (ENTER).

Com a ferramenta POLÍGONO, selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial.

A figura deve está como abaixo mostrado:



APÊNDICE B - Resolução da atividade sobre a ilha do tesouro

Considerando os números complexos z e w representado pelos vetores $\overrightarrow{BA}$, com $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{Az_1}$ e $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{Cz_2}$, temos no primeiro caso:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Az_1} &= \overrightarrow{AB}.i \\ z_1 - A &= (B - A).(-i) \\ z_1 - A &= -Bi + Ai \\ z_1 &= A - Bi + Ai \end{aligned} \tag{6}$$

Para o segundo caso de vetores, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Cz_2} &= \overrightarrow{CB}.i \\ z_2 - C &= (B - C).i \\ z_2 - C &= Bi - Ci \\ z_2 &= C + Bi - Ci \end{aligned} \tag{7}$$

Formando um sistema com as expressões (6) e (7), obtemos,

$$\begin{cases} z_1 = A - Bi + Ai \\ z_2 = C + Bi - Ci \end{cases} .$$

Resolvendo as duas equações, temos,

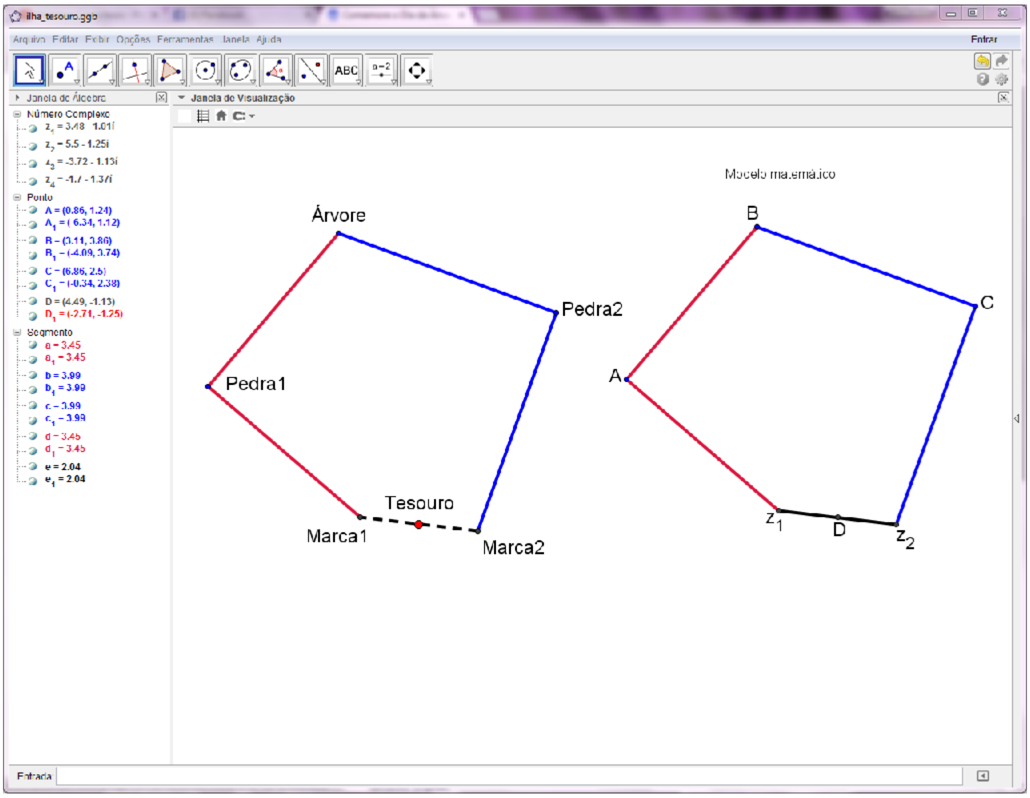
$$z_1 + z_2 = A + C + Ai - Ci$$

Dividindo por 2, os dois membros, encontramos,

$$\frac{A + C + Ai - Ci}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2} = D$$

Com D representando o local do tesouro. Observemos que a posição do tesouro D não depende da posição de B, justificado também na parte geométrica no Geogebra.

Figura 56: Representação geométrica da ilha do tesouro



Fonte: Autor, 2015.

APÊNDICE C - CD-ROM

Neste CD-ROM constam arquivos do software Geogebra desenvolvidos para representação algébrica e geométrica da maioria das ilustrações presentes neste trabalho. Assim como, as atividades realizadas, no qual ativando no menu *Exibir* a função *Protocolo de Construção* verão o passo a passo do desenvolvimento das construções.

Para melhor localização das ilustrações os arquivos foram nomeados de acordo com a numeração das figuras.