UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

EM REDE NACIONAL - PROFMAT

(Mestrado)

AMARILDO DE PAULA LEITE

FUNÇÕES ELEMENTARES DE PRIMITIVA NÃO ELEMENTAR

Maringá-PR

2013

AMARILDO DE PAULA LEITE

FUNÇÕES ELEMENTARES DE PRIMITIVA NÃO ELEMENTAR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. GLEB GERMANOVITCH DORONIN

Maringá
2013

FUNÇÕES ELEMENTARES DE PRIMITIVA NÃO ELEMENTAR

AMARILDO DE PAULA LEITE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. GLEB GERMANOVITCH DORONIN - Orientador
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Prof. Dr. JUAN AMADEO SORIANO PALOMINO
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Prof. Dra. LUCI HARUE FATORI
Universidade Estadual de Londrina (UEL)

Aprovada em: 15 de março de 2013.
Local de defesa: Anfiteatro do DMA, Bloco F-67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho a minha esposa Mara, por entender a importância deste para mim. Por todo amor, carinho, compreensão e incentivo, pelos momentos de angústias, preocupações e pelas minhas ausências, dedico-lhe esta conquista com gratidão e amor.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A CAPES, pelo fundamental apoio financeiro.

A minha esposa, Mara, meus filhos Marcos e Gabriel e minha enteada Jéssica, pelo apoio, carinho e compreensão.

Ao professor Gleb Germanovitch Doronin, pela excelente orientação e disponibilidade.

Aos meus colegas de Curso, especialmente a Cleonice Salateski, Priscila Gleden, Roberto Spenthof e Ronaldo Menezes, pelo apoio sempre que precisei e pelas viagens maravilhosas que me proporcionaram.

A todos os professores que ministraram aulas para minha turma.

“Os grandes feitos são conseguidos não pela força,

mas pela perseverança.”

Samuel Johnson.

Resumo

Neste trabalho verifica-se que algumas funções elementares tais como, e^{-x^2}, $\frac{e^x}{x}$, entre outras, não tem primitiva dada por meio de funções elementares. Para isto utiliza-se o Teorema de Liouville como ferramenta principal, o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema Fundamental da Álgebra como suporte. Em caso afirmativo, estuda-se como aproximar as primitivas destas funções com auxilio de Série de Taylor.

Palavras chave: Funções não elementares, Teorema de Liouville, primitivas.

Abstract

This work shows that certain functions such as, e^{-x^2}, $\frac{e^x}{x}$, among others, have no primitive given by elementary functions. For this we use the Liouville theorem as the main tool, Fundamental Theorem of Calculus and the Fundamental Theorem of Algebra as support. For these functions, we study how to get their primitives by integration of corresponding Taylor's series.

Keywords: not elementary functions, Theorem Liouville, primitive.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Um teorema muito conhecido por alunos de graduação é o Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 0.1. (TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO)

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e x um número qualquer em $[a, b]$. Se F é a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

então F é derivável em [a,b] e

$$F'(x) = f(x). \tag{2}$$

Em geral uma função derivável $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, chama-se primitiva de f, se $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. É fácil ver que se F for uma primitiva de f, então qualquer outra primitiva G é da forma $G(x) = F(x) + C$, onde C é constante. O conjunto de todas as primitivas de f é chamado integral indefinida de f e é denotado por $\int f(x)\,dx$. Neste caso o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser escrito como $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. E mais ainda, para f que possui primitiva, mostra-se que $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f. Assim, a existência de primitiva de uma função (não necessariamente contínua) f torna-se um tópico principal de todo o Cálculo Diferencial e Integral.

Mas nem sempre a primitiva de uma função pode ser expressa em termos de funções elementares. Isto foi provado por Joseph Liouville. Nos livros de cálculo pouco se fala a respeito de primitivas de funções que não são funções elementares. Com isso não é claro como aplicar a fórmula (2).

Neste trabalho, apresentaremos num primeiro momento, algumas destas funções. Em seguida decidiremos, a partir de resultados obtidos por Liouville, se as funções apresentadas podem ou não ter primitivas que são expressas por funções elementares. Num terceiro momento apresentaremos formas alternativas de realizar a integração destas funções.

Capítulo 1

Funções Elementares

1.1 Conceitos básicos

O que são funções elementares?

Vamos definir $\mathbb{E}$, o conjunto das funções elementares. Este conjunto é constituído pelas funções a seguir:

- Funções polinomiais:

  Um polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$ é uma função polinomial da forma

$$P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

  onde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

- Funções racionais:

  Funções racionais são aquelas que podem ser escritas como quociente de polinômios, isto é:

$$Q_m(x) = \frac{P_n(x)}{Q_p(x)} \tag{1.2}$$

  com $Q_p(x) \neq 0$.

- Funções algébricas:

  Uma função y é algébrica, se y for solução de uma equação algébrica da forma abaixo:

$$G(y) = P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + P_{n-2}(x)y^{n-2} + ... + P_0(x) = 0, \quad (1.3)$$

ou seja, uma equação na variável y, tendo como coeficientes $P_0, P_1, ..., P_{n-1}, P_n$ polinômios na variável x.

De forma equivalente, uma função é algébrica se for contínua num intervalo e definida implicitamente por uma equação polinomial em x e y, conforme segue:

$$a_1x^{n_1}y^{m_1} + a_2x^{n_2}y^{m_2} + ... + a_kx^{n_k}y^{m_k} = 0. \quad (1.4)$$

- Funções exponenciais, particularmente $f(x) = e^x$;
- Funções logarítmicas, particularmente $f(x) = \ln x$;
- Funções trigonométricas;
- Enfim, todas as funções, que por um número finito de etapas possam ser construídas com as funções anteriores, por meio de operações de soma, produto e composição de funções.

1.2 Exemplos

- A função $y = \sqrt{2 + x^3}$ é elementar pois é algébrica, solução da equação $y^2 - x^3 - 2 = 0$;
- A função $y = x^{\frac{1}{3}}$ é elementar pois é algébrica, solução da equação $y^3 - x = 0$;
- A função $y = \frac{x+1}{3-x^2}$ é elementar pois é uma função racional;
- A função $y = e^{-x^2}$ é elementar pois é composição das funções e^x e $-x^2$;
- A função $y = \frac{senx}{x}$ é elementar pois é produto das funções $senx$ e $\frac{1}{x}$.

Capítulo 2

O Teorema de Liouville

Joseph Liouville viveu entre os anos de 1809 a 1882, ele teve uma contribuição muito importante para decidir se a primitiva de uma função pertence ou não a classe das funções elementares. Os primeiros e mais significativos teoremas com relação a saber se $\int f(x)dx \in \mathbb{E}$ seguiram dos estudos feitos por ele.

O teorema a seguir é devido a Liouville, e sua demonstração será omitida, pois foge ao escopo deste trabalho. O leitor interessado pode ver sua demonstração em Hardy [1].

Teorema 2.1. (LIOUVILLE)

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_k$ funções da variável x, cujas derivadas $\frac{dy_i}{dx}$ são funções elementares de $x, y_1, y_2, \ldots, y_k$. Se F é uma função elementar e $\int F(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)dx \in \mathbb{E}$ então tem-se

$$\begin{aligned} \int F(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)\, dx &= z_0(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{r} a_i \ln z_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_k), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde z_i são funções elementares e a_i são constantes.

2.1 A função $\int e^{-x^2}dx \in \mathbb{E}$?

Para responder a esta pergunta, enunciaremos um caso particular do Teorema 2.1.

Teorema 2.2. (LIOUVILLE)

Se S e T são funções racionais, $T \neq$ constante, tais que $\int S(x)e^{T(x)}dx \in \mathbb{E}$, então

$$\int S(x)e^{T(x)}dx = R(x)e^{T(x)}, \tag{2.2}$$

onde $R(x)$ é uma função racional.

Demonstração. Para esta demonstração, utilizaremos o Teorema 2.1. Neste caso temos que $y_1 = S(x)$, $y_2 = e^{T(x)}$, $\frac{dy_1}{dx}$ é racional, $\frac{dy_2}{dx} = e^{T(x)}T'(x) = y_2T'(x)$, e que $F(x, y_1, y_2) = y_1y_2$ é uma função elementar. Portanto temos que, por hipótese como $\int S(x)e^{T(x)}dx \in \mathbb{E}$, assim o Teorema 2.1 garante que essa primitiva tem a seguinte forma:

$$z_0(x, S(x), e^{T(x)}) + a_1 \ln z_1(x, S(x), e^{T(x)}) + \cdots + a_r \ln z_r(x, S(x), e^{T(x)}, \tag{2.3}$$

onde z_i são racionais, digamos $z_i = \frac{P_i}{Q_i}$. Portanto,

$$\frac{P_0}{Q_0}(x, S(x), e^{T(x)}) + a_1 \ln \frac{P_1}{Q_1}(x, S(x), e^{T(x)}) + \cdots + a_r \ln \frac{P_r}{Q_r}(x, S(x), e^{T(x)}), \tag{2.4}$$

e, aplicando propriedade de logaritmos, temos

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0}(x, S(x), e^{T(x)}) &+ a_1 \ln P_1(x, S(x), e^{T(x)}) - a_1 \ln Q_1(x, S(x), e^{T(x)}) + \ldots \\ &+ a_r \ln P_r(x, S(x), e^{T(x)}) - a_r \ln Q_r(x, S(x), e^{T(x)}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Organizando os termos como

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0}(x, S(x), e^{T(x)}) &- a_1 \ln Q_1(x, S(x), e^{T(x)}) - \cdots - a_r \ln Q_r(x, S(x), e^{T(x)}) + \\ &+ a_1 \ln P_1(x, S(x), e^{T(x)}) + \cdots + a_r \ln P_r(x, S(x), e^{T(x)}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

e fazendo

$$\begin{aligned} R_0(x,S(x),e^{T(x)}) &= \frac{P_0}{Q_0}(x,S(x),e^{T(x)}) - a_1 \ln Q_1(x,S(x),e^{T(x)}) - \ldots \\ &- a_r \ln Q_r(x,S(x),e^{T(x)}), \end{aligned} \tag{2.7}$$

teremos

$$\begin{aligned} \int S(x)e^{T(x)}dx &= R_0(x,S(x),e^{T(x)}) + a_1 \ln P_1(x,S(x),e^{T(x)}) + \ldots \\ &+ a_r \ln P_r(x,S(x),e^{T(x)}), \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde R_0 é função racional e P_i são polinômios.

Aqui devemos fazer algumas observações intuitivas, as quais, porém, podem ser provadas rigorosamente.

1. O termo $e^{T(x)}$ deve obrigatoriamente aparecer de forma linear na expressão (2.8). Suponhamos por absurdo que este termo não apareça linearmente, por exemplo $[e^{T(x)}]^2$ e suponha que $T(x) = x^2 + 1$. Temos que a derivada de $[e^{T(x)}]^2$ é

$$\left\{[e^{T(x)}]^2\right\}' = [e^{x^2+1}]^{2'} = 2e^{x^2+1}e^{x^2+1}2x = 4x[e^{x^2+1}]^2 = 4x[e^{T(x)}]^2. \tag{2.9}$$

   Assim o termo $e^{T(x)}$ não teria como aparecer linearmente após derivarmos (2.8).

2. Note que ao derivarmos uma expressão que tenha $e^{T(x)}$ no denominador como no exemplo abaixo

$$f(x) = \frac{r(x)}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{r'(x)e^x - r(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{r'(x) - r(x)}{e^x}, \tag{2.10}$$

   o termo $e^{T(x)}$ não desaparece do denominador da expressão. Por este motivo o termo $e^{T(x)}$ não pode aparecer no denominador de R_0, pois isto contraria o fato de R_0 ser uma função racional.

3. O termo $e^{T(x)}$ não pode aparecer nos polinômios, isto é, nos P_i pelo mesmo motivo acima, porque ao derivarmos a expressão (2.8) não encontraríamos a expressão $S(x)e^{T(x)}$, visto que, aplicando as propriedades do logaritmo e colocando o termo $e^{T(x)}$ em evidência, ao derivarmos (2.8) este termo deveria aparecer também depois do sinal de adição, fato que também não ocorre.

   Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, para que possamos gerar a expressão $S(x)e^{T(x)}$ ao derivarmos (2.8), devemos ter que $R_0(x, S(x), e^{T(x)}) = S(x)e^{T(x)}$ e que todos a_i sejam iguais a zero, isto é $a_i = 0, \forall i$.

□

Voltando a pergunta principal dessa seção (2.1), observamos que a função e^{-x^2} é contínua em $\mathbb{R}$ e, conforme Teorema 0.1 ela tem primitiva. Suponhamos $\int e^{-x^2}dx \in \mathbb{E}$, então pelo Teorema 2.2 temos que

$$\int e^{-x^2}dx = R(x)e^{-x^2}. \tag{2.11}$$

Derivando ambos os lados desta expressão, temos

$$e^{-x^2} = R'(x)e^{-x^2} + R(x)e^{-x^2}(-2x) \Rightarrow 1 = R'(x) - 2xR(x) \tag{2.12}$$

Afim de darmos continuidade a demonstração, necessitamos da seguinte definição:

Definição 2.1. Dois polinômios $f(x)$, $g(x)$ são primos entre si se $MDC(f, g) = 1$. Ou seja, se não possuírem raízes comuns.

Como $R(x)$ é racional, seja $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q primos entre si (conforme definição abaixo) e $Q \neq 0$. Assim,

$$1 = \left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]' - 2x\frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{2.13}$$

Desenvolvendo a derivada, temos

$$1 = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2} - 2x\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{2.14}$$

e multiplicando ambos os membros por $Q(x)^2$, resulta em

$$Q(x)^2 = P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) - 2xP(x)Q(x), \tag{2.15}$$

donde

$$Q(x)^2 - P'(x)Q(x) + 2xP(x)Q(x) = -P(x)Q'(x). \tag{2.16}$$

Portanto,

$$Q(x)[Q(x) - P'(x) + 2xP(x)] = -P(x)Q'(x). \tag{2.17}$$

Antes de continuarmos, vamos abrir um parágrafo para falarmos um pouco sobre o teorema fundamental da álgebra, de um lema e duas definições, conceitos importantes para prosseguirmos com a demonstração.

Definição 2.2. Um número a é raiz ou zero de um polinômio $P(x)$, quando $P(a) = 0$.

Definição 2.3. Se $P(x) = 0$ possuir r raizes iguais a a, então dizemos que a é uma raiz de multiplicidade r.

Lema 2.4. *Seja P um polinômio com uma raiz $x = a$ de multiplicidade $r > 0$ por exemplo: $P(x) = (x-a)^r h(x)$, com h um polinômio tal que $h(a) \neq 0$. Então $x = a$ é uma raiz de multiplicidade $r - 1$ de sua derivada P', isto é, $P'(x) = (x-a)^{r-1}q(x)$ com q um polinômio tal que $q(a) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $x = a$ uma raiz de multiplicidade r de um polinômio $P(x)$ qualquer , ou seja: $P(x) = (x-a)^r h(x)$, onde $h(a) \neq 0$. Temos então que

$$\begin{aligned} P'(x) &= r(x-a)^{r-1}h(x) + (x-a)^r h'(x) \\ &= (x-a)^{r-1}[rh(x) + (x-a)h'(x)] \end{aligned} \tag{2.18}$$

fazendo $q(x) = rh(x) + (x-a)h'(x)$, temos $q(a) = rh(a) \neq 0$, pois $h(a) \neq 0$ logo

$$P'(x) = (x-a)^{r-1}q(x) \tag{2.19}$$

Portanto $x = a$ é raiz de multiplicidade $r-1$ de $P'(x)$.

□

Teorema 2.3. (TEORMEMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA)

Todo polinômio $P(z)$ com coeficientes complexos de uma variável complexa e de grau $n \geq 1$ tem pelo menos uma raiz.

Este teorema foi demonstrado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) no ano de 1799 em sua tese de doutorado.

Suponha que $gr(Q) > 0$, então pelo Teorema 2.3, $Q(x)$ possui uma raiz, digamos $x = \alpha$, de multiplicidade $r > 0$, sabemos que $P(\alpha) \neq 0$, pois P e Q são primos entre si.
Assim do lado direito de (2.17) α é raiz de multiplicidade $r-1$ e do esquerdo de (2.17) α é raiz de no mínimo multiplicidade r. Com esta contradição concluímos que o polinômio $Q(x)$ é constante.
Fazendo $Q(x) = c$, então a equação (2.13) assume o seguinte formato:

$$1 = \left[\frac{P(x)}{c}\right]' - 2x\frac{P(x)}{c}, \tag{2.20}$$

multiplicando tudo por c, teremos

$$c = P'(x) - 2xP(x), \tag{2.21}$$

portanto

$$P'(x) = 2xP(x) + c. \tag{2.22}$$

Mas isto é um absurdo, pois $gr(P'(x)) < gr(2xP(x)+c)$, donde conclui-se que $\int e^{-x^2}dx \notin \mathbb{E}$.

2.2 A função $\int \frac{e^x}{x}dx \in \mathbb{E}$?

Suponha que $\int \frac{e^x}{x}dx \in \mathbb{E}$, então por (2.2), Teorema 2.2 teríamos $\int \frac{e^x}{x}dx = R(x)e^x$, para alguma função racional R. Derivando ambos os membros desta equação, temos

$$\frac{e^x}{x} = R'(x)e^x + R(x)e^x, \tag{2.23}$$

ou seja

$$\frac{1}{x} = R'(x) + R(x). \tag{2.24}$$

Fazendo
$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q primos entre si e $Q \neq 0$, teremos

$$\frac{1}{x} = [\frac{P(x)}{Q(x)}]' + \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{2.25}$$

desenvolvendo a derivada, a expressão toma a seguinte forma

$$\frac{1}{x} = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{[Q(x)]^2} + \frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{2.26}$$

Multiplicando ambos os membros por $Q(x)^2$, obtemos

$$\frac{[Q(x)]^2}{x} = P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x) + P(x)Q(x), \tag{2.27}$$

e, organizando como

$$[Q(x)]^2 - xP'(x)Q(x) - xP(x)Q(x) = -xP(x)Q'(x), \tag{2.28}$$

temos

$$Q(x)[Q(x) - xP'(x) - xP(x)] = -xP(x)Q'(x). \tag{2.29}$$

Suponha que $gr(Q) > 0$, então pelo Teorema 2.3, $Q(x)$ possui uma raiz, digamos $x = \alpha$, de multiplicidade $r > 0$. Sabemos ainda que $P(\alpha) \neq 0$, pois P e Q são primos entre si.

Assim do lado direito de (2.29) α é raiz de multiplicidade $r - 1$ e do esquerdo de (2.29) α é raiz de no mínimo multiplicidade r. Com esta contradição concluímos que o polinômio $Q(x)$ é constante.

Fazendo $Q(x) = c$, a equação (2.29) assume o seguinte formato:

$$c[c - xP'(x) - xP(x)] = 0 \Rightarrow c - xP'(x) - xP(x) = 0, \tag{2.30}$$

logo

$$c - xP'(x) = xP(x). \tag{2.31}$$

Mas isto é um absurdo pois $gr(c - xP'(x)) < gr(xP(x))$. Portanto,

$$\int \frac{e^x}{x} dx \notin \mathbb{E}. \tag{2.32}$$

2.3 A função $\int \frac{1}{\ln x} dx \in \mathbb{E}$?

Vimos anteriormente que $\int \frac{e^x}{x} dx \notin \mathbb{E}$

Fazendo $e^x = y$ e aplicando ln a ambos os lados, temos $x = \ln y$, logo $dx = \frac{1}{y} dy$, e assim

$$\int \frac{e^x}{x} dx = \int \frac{y}{\ln y} \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{\ln y} dy. \tag{2.33}$$

Portanto, $\int \frac{1}{\ln x} dx \notin \mathbb{E}$.

2.4 A função $\int e^{e^x} dx \in \mathbb{E}$?

Fazendo $y = e^x \Rightarrow dy = e^x dx \Rightarrow dy = y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$,

temos

$$\int e^{e^x} dx = \int \frac{e^y}{y} dy. \tag{2.34}$$

Portanto, como já vimos anteriormente, a função acima não pertence a $\mathbb{E}$.

2.5 A função $\int e^x \ln x \, dx \in \mathbb{E}$?

Seja $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$ e $dv = \ln x dx \Rightarrow v = \frac{1}{x}$.

Logo,

$$\int e^x \ln x \, dx = \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x} dx, \tag{2.35}$$

portanto, como visto anteriormente,

$$\int e^x \ln x \, dx \notin \mathbb{E}. \tag{2.36}$$

2.6 A função $\int \ln \ln x \, dx \in \mathbb{E}$?

Fazendo $y = \ln x$, temos $x = e^y$ e $dy = \frac{1}{x} dx \Rightarrow x dy = dx \Rightarrow e^y dy = dx$,

logo

$$\int \ln \ln x \, dx = \int e^y \ln y \, dy. \tag{2.37}$$

Portanto como visto anteriormente

$$\int \ln \ln x \, dx \notin \mathbb{E}. \tag{2.38}$$

Todas as funções apresentadas anteriormente são elementares de primitiva não elementar. Segue abaixo um exemplo de função elementar com primitiva elementar.

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \tag{2.39}$$

Capítulo 3

Série de Taylor

3.1 Conceitos básicos

Se $f \in C^\infty$ tiver uma representação (expansão) em série de potências em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \qquad |x-a| < R, \tag{3.1}$$

então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{3.2}$$

Substituindo (3.2) em (3.1), temos a seguinte expressão

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{3.3}$$

A série em (3.3) é chamada série de Taylor da função f em a. Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{3.4}$$

A forma acima recebe o nome especial de série de Maclaurin.

3.2 Propriedades de uma série de Taylor

No curso de análise mais avançado estuda-se as questões de convergência de séries de Taylor, o seu raio de convergência e a possibilidade de derivar e integrar uma série de Taylor termo a termo dentro do intervalo de convergência. Deixaremos esse e outros assuntos fascinantes como objetivo de estudos futuros. O leitor interessado pode encontrar esses assuntos em detalhes nos livros Lima E. L. [2] e Figueiredo D. G. [3].

Encontremos a série de Maclaurin da função $f(x) = e^x$ e seu raio de convergência. Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, assim $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a série de Maclaurin é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots . \tag{3.5}$$

Para encontrar o raio de convergência, façamos $a_n = \frac{x^n}{n!}$ e utilizamos o teste da razão:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x^n x}{(n+1)n!} \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| . \tag{3.6}$$

Logo, $\forall x \in \mathbb{R}$, fixo, tem-se

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{(n+1)} \to 0 < 1. \tag{3.7}$$

Portanto, pelo Teste da Razão, a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Concluímos que a expansão em série de potências, em torno de zero, para e^x é

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{3.8}$$

substituindo em (3.8), $-x^2$ no lugar de x, teremos

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}. \tag{3.9}$$

De acordo com (3.2), integrando ambos os membros da equação (3.9), obtem-se

$$\int e^{-x^2} dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \right) dx. \tag{3.10}$$

Logo,

$$\int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots , \tag{3.11}$$

e assim

$$\int e^{-x^2} dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)n!}. \tag{3.12}$$

Esta série converge para todo x, pela mesma razão que a série original. De fato, agindo como anteriormente temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}x^{2n+1}}{(2n+1)(n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)n!}}\right| \\
&= \left|\frac{(-1)^{n+1}(-1)x^{2n}x}{(2n+1)(n+1)n!} \frac{(2n-1)n!}{(-1)^{n+1}x^{2n}x^{(-1)}}\right| \\
&= \left|\frac{(-1)x^2}{(2n+1)(n+1)}(2n-1)\right| \\
&= \frac{(2n-1)}{(2n+1)(n+1)}x^2
\end{aligned} \tag{3.13}$$

logo $\forall\, x$ fixo, temos

$$\frac{(2n-1)}{(2n+1)(n+1)}x^2 \leq \frac{(2n+1)}{(2n+1)(n+1)}x^2 = \frac{1}{(n+1)}x^2 \to 0. \tag{3.14}$$

Portanto, pelo Teste da Razão, a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Apesar de não sabermos a forma elementar da primitiva $F(x)$ da função e^{-x^2}, para utilizar a fórmula $\int_0^A e^{-x^2} dx = F(A) - F(0)$, podemos interpretar os nossos cálculos geometricamente. De fato, o valor de $\int_0^A e^{-x^2} dx$ é a área hachurada sob o gráfico de e^{-x^2} de $x = 0$ até $x = A$. Na figura podemos observar o gráfico de $f(x) = e^{-x^2}$, em preto e o gráfico formado pelos quatro primeiros termos da série em (3.9), em vermelho.

Quanto mais termos acrescentarmos a série, mais próxima à área determinada sob o gráfico da série estará da área sob o gráfico da função.

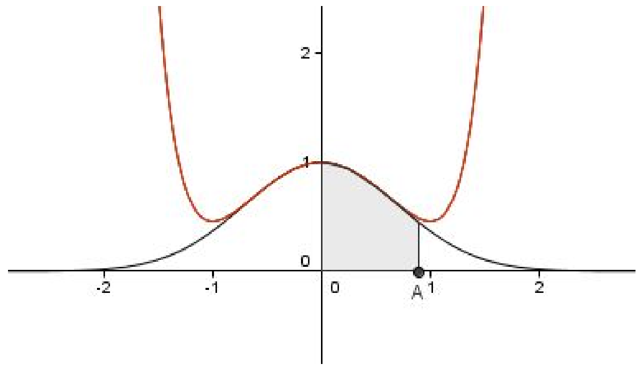

Figura 3.1: Aproximação por 4 termos da série

Capítulo 4

Sugestão de aplicação para o Ensino Médio

Vamos calcular a área aproximada sob o gráfico da função $f(x) = \frac{e^x}{x}$ no intervalo $[1, 2]$

Primeiro passo:

Construir o gráfico da função com o uso do geogebra.

Para isto basta digitar no campo entrada o seguinte comando: $f(x) = e^x/x$, conforme figura abaixo.

Figura 4.1: Campo entrada

A figura abaixo mostra uma parte do gráfico que aparecerá na área de trabalho do geogebra:

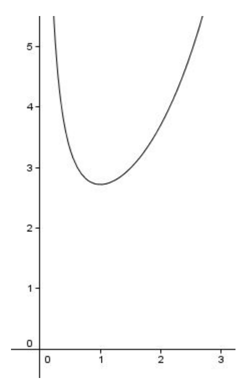

Figura 4.2: Parte do gráfico da função $f(x) = \frac{e^x}{x}$

A seguir digite no campo entrada o seguinte comando $integral[f, 1, 2]$, conforme figura abaixo:

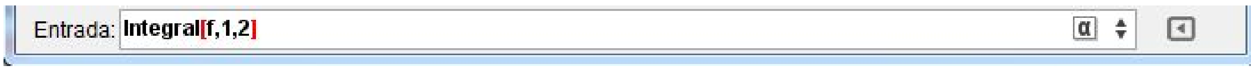

Figura 4.3: Comando para o cálculo aproximado da área

A área sob o gráfico no intervalo pedido aparece hachurada na figura

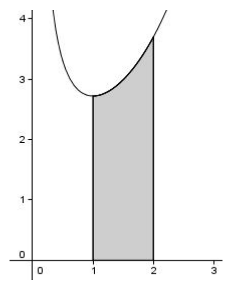

Figura 4.4: Representação da área

O valor aproximado da área sob o gráfico da função $f(x) = \frac{e^x}{x}$ no intervalo $[1, 2]$, aparecerá na janela de álgebra do geogebra a esquerda da tela, conforme figura abaixo:

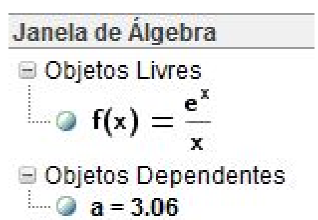

Figura 4.5: Valor da área aproximada

A área aproximada é de $3,06\,cm^2$.

Capítulo 5

Conclusão

Ao longo deste trabalho encontramos algumas dificuldades, principalmente de bibliografia. Após uma longa pesquisa, encontramos três trabalhos que nortearam o desenvolvimento do tema proposto: uma dissertação de mestrado de autoria de Débora Rampanelli, uma monografia assinada por Maurício Pessoa da Cunha Meneses e um artigo sugerido pelo meu orientador de autoria do professor Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho.

Todos os trabalhos citados anteriormente tiveram como fonte de pesquisa o livro "The Integration of Functions of a Single Variable"escrito por G. H. Hardy. Este livro traz uma demonstração do teorema principal deste texto, o Teorema de Liouville. Como já mencionamos brevemente, Joseph Liouville viveu no século XIX, e foi o primeiro matemático a demonstrar que certas funções não tem primitivas elementares. Outro matemático citado neste trabalho foi, Carl Friedrich Gauss que demonstrou, em sua tese de doutorado, o Teorema Fundamental da Álgebra, resultado utilizado na demonstração do Teorema de Liouville.

O Teorema Fundamental do Cálculo foi outro resultado utilizado; a primeira prova conhecida deste teorema é creditada ao matemático James Gregory 1638 a 1675.

Inicialmente queríamos saber qual a primitiva de $f(x) = e^{-x^2}$, mas no decorrer das pesquisas outras funções mostraram-se interessante e resolvemos incluí-las no trabalho. Mais precisamente essas funções são: $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $f(x) = e^{e^x}$ e $f(x) = \ln \ln x$.

Após concluirmos que as funções citadas acima não possuem primitivas elementares apresentamos, através de série de Taylor uma aproximação para a primitiva de e^{-x^2}. Vimos que o gráfico da função dada pela série de Taylor, se aproxima cada vez mais ao gráfico da função e^{-x^2}, bastando para isso acrescentar cada vez mais termos a série $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$.

Este tema deveria ser abordado com maior ênfase nos cursos de graduação, tendo em vista a aplicabilidade destas funções no desenvolvimento de diversas áreas. Como exemplo, podemos citar a função erro (ou integral de erro) $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, relacionada com a distribuição normal em cursos de estatística.

Com o desenvolvimento desse trabalho tivemos a oportunidade de adquirir alguns conhecimentos importantes para aplicação no ensino médio, como por exemplo: elaborar um trabalho científico, deixar um texto matemático escrito de forma profissional com o uso do LaTeX, uso do software Geogebra para construção de gráficos e para determinar a área de uma região sob o gráfico de uma função, formação de uma apresentação com o uso do LaTeX.

Bibliografia

[1] HARDY, G.H, The Integration of Functions of a Single Variable, Cambridge University Press, Second Edition (1928).

[2] LIMA, Elon Lages, Curso de Análise Vol. 1, Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Décima Segunda Edição (2007).

[3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Análise I, Segunda Edição (1996).

[4] STEWART, James, Traduzido por Antonio Carlos Moretti Cálculo, Vol. 2, Sexta Edição (2010).

[5] LEITHOLD, Louis, Traduzido por Antonio Paques, Vol. 1, Segunda Edição (2010).

[6] FILHO, D.C.M., *Professor, qual a primitiva de* $\frac{e^x}{x}$ *?!.* http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/ Conteudo/n31/n31_Artigo05.pdf, acessado (2012).

[7] RAMPANELLI, D., *O Teorema de Liouville sobre Integrais Elementares.* http://www.preprint.impa.br/FullText/Rampanelli_Tue_Dec_15_15_27_56_BRDT_2009/tese10.pdf, acessado (2012).

[8] MENEZES, M.P.C., *Funções Integráveis sem Integral Elementar.* http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia_MauricioPessoa.pdf, acessado (2012).