SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ESTUDANDO MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

Antonio Sérgio Florindo dos Santos

Porto Velho/RO

2015

Antonio Sérgio Florindo dos Santos

ESTUDANDO MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Orientador: Prof. Dr. Adeilton Fernandes da Costa

Porto Velho/RO

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES

S237e

Santos, Antonio Sérgio Florindo dos.
Estudando matrizes e transformações geométricas com o geogebra / Antonio Sérgio Florindo dos Santos. -- Vilhena, Rondônia, 2015.
62 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Adeilton Fernandes da Costa
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR.

1. Matrizes. 2. Transformações geométricas. 3. Geogebra. I. Costa, Adeilton Fernandes da . II. Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR. III. Título.

CDD: 512.943

Bibliotecária Responsável: Marlene Fouz da Silva CRB 11/949

Antonio Sérgio Florindo dos Santos

Estudando matrizes e transformações geométricas com o geogebra

Este trabalho foi julgado e aprovado para obtenção do titulo de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Campus de Porto Velho - RO.

Porto Velho, 04 de dezembro de 2015

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Adeilton Fernandes da Costa
Orientador/Presidente
PROFMAT / UNIR

Prof. Ms. Carlos Vinicius da Costa Ramos
PROFMAT / UNIR

Prof. Dr. Eudes Barroso Junior
UNIR

Dedico este trabalho à minha esposa Luciana e às minhas filhas Vitória e Stéfany, pela paciência e compreensão diante da minha ausência por conta dos estudos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao Senhor nosso Deus que me deu força e saúde para seguir nessa caminhada.

A nossos professores: Adeilton Fernandes da Costa, Marinaldo Felipe da Silva, Tomás Daniel Menéndez Rodriguéz, Flávio Batista Simão, Ronaldo Chaves Cavalcanti e Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz pela dedicação no desenvolvimento de suas aulas.

Aos meus amigos Édson e Aulecir pelo acolhimento em sua residência.

Enfim, a todos os meus colegas do curso pela a amizade que construímos.

RESUMO

Diante da grande dificuldade no ensino da Matemática, buscaremos com este trabalho mostrar caminhos que proporcionem, ao ensino da Matemática, em especial ao ensino das Matrizes, aulas atrativas e dinâmicas, tendo em vista que o conteúdo de Matrizes é apresentado, muitas vezes, de forma mecânica e sistemática, sem apresentar nenhum convencimento sobre o motivo ou a origem das formas apresentadas nas suas operações. Este estudo é voltado à utilização do software geogebra, como recurso no processo ensino aprendizagem da matemática, no qual o aluno tem a oportunidade de comparar o ensino tradicional (aulas expositivas e estáticas) com um ensino dinâmico e participativo, em que os mesmos são levados a criar, explorando seu raciocínio e sua criatividade. O objetivo principal deste estudo é proporcionar novos caminhos na busca de um ensino de qualidade, voltado para o aluno, capaz de superar as barreiras naturais e históricas no ensino e aprendizagem da matemática, apresentando uma reflexão sobre a sequência didática para o estudo das matrizes a partir das transformações geométricas. No primeiro momento foi realizado um breve histórico do surgimento das matrizes, bem como suas discussões nos documentos oficiais. Explanamos a importância da Geometria Dinâmica no ensino e aprendizagem das matrizes. Em seguida, enfatizamos os conceitos das transformações geométricas, construindo as matrizes de transformações capazes de dilatar, contrair, rotacionar e cisalhar vetores e polígonos. O resultado final foi um excelente material visual da aplicação de matrizes nas transformações geométricas a partir do software geogebra.

PALAVRAS CHAVE: Matrizes. Transformações geométricas. Geogebra.

ABSTRACT

In the face of great difficulty in the teaching of mathematics, we will pursue this work show paths that provide, to the teaching of mathematics, in particular the teaching of the arrays, attractive and dynamic classes, since the contents of arrays are often mechanically and systematically, without any convincing about the reason or the origin of the forms presented in its operations. This study is aimed to use geogebra as software application in case teaching learning of mathematics, in which the student has the opportunity to compare the traditional teaching (lectures and static) with a dynamic and participatory education, in which they are driven to create, exploring your reasoning and your creativity. The main objective of this study is to provide new paths in search of a quality education, focused on the learner, able to overcome natural and historical barriers in the teaching and learning of mathematics, presenting a reflection on didactic sequence for the study of the arrays from the geometric transformations. The first time we conducted a brief history of the emergence of the arrays, as well as its discussions in official documents. Explanamos the importance of dynamic geometry in the teaching and learning of the arrays. Then, we emphasize the concepts of geometric transformations, building transformation matrices able to dilate, Contracting, rotate, and shear vectors and polygons. The end result was an excellent visual material the use of arrays in geometric transformations from the software geogebra.

.

Key words: Matrices. Geometric transformations. Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Arthur Cayley (1821 - 1895)..15
Figura 2: Dilatação do vetor v = (2,1) 23
Figura 3: Contração do vetor v = (1,2) 23
Figura 4: Reflexão do vetor v = (1,2) em torno da origem......................................24
Figura 5: Reflexão do vetor v = (1,2) em torno do Eixo-x.......................................24
Figura 6: Reflexão do vetor v = (2,1) em torno do Eixo-y.......................................25
Figura 7: Cisalhamento do vetor v = (1,2) na direção do Eixo-x............................25
Figura 8: Cisalhamento do vetor v = (1,2) na direção do Eixo-y............................26
Figura 9: Rotação do vetor v = (x, y) em um ângulo θ...26
Figura 10: Rotação do vetor v = (2,1) 27
Figura 11: Adição de matrizes..33
Figura 12: Produto de matrizes...33
Figura 13: Matriz Transposta 34
Figura 14: Matriz inversa de A...34
Figura 15: Matriz Inversa de M..35
Figura 16: Vetor v = (1,2)...36
Figura 17: Controle Deslizante...36
Figura 18: Vetor w = A.v 37
Figura 19: Propriedades do vetor v = (1,2)..37
Figura 20: Dilação e contração do vetor v = (1,2)...37
Figura 21: vetor v = (1,2) 38
Figura 22: Cisalhamento vertical do vetor v = (2,1) 38
Figura 23: Cisalhamento horizontal do vetor v = (1,2) 39
Figura 24: vetor v = (1,2) com controle deslizante θ...39
Figura 25: Rotação do vetor v = (1,2) em 90° 40
Figura 26: Translação do vetor v = (1,2)...40
Figura 27: Transformação composta (multiplicação de matrizes) 41
Figura 28: Multiplicação de matrizes...41
Figura 29: Matriz M com controle deslizante a, b, c e d 42
Figura 30: Polígono ABCD 42
Figura 31: Transformação no polígono A’B’C’D’..43
Figura 32: Transformação por escala 43
Figura 33: Cisalhamento do polígono ABCD 44
Figura 34: Transformações do polígono ABCD 44
Figura 35: Rotação de 90° do polígono ABCD..45
Figura 36: Rotação de 180° do polígono ABCD 45
Figura 37: Ilustração do Haberdasher’s Puzzle..46
Figura 38: Condição para exibir objeto..47
Figura 39: Triângulo equilátero..49
Figura 40: Haberdasher’s Puzzle..49
Figura 41: Tela inicial do GeoGebra 5.0.82.0-3D...55

Figura 42: Barra de Ferramentas 55
Figura 43: Ícone F1: Mover e rotacionar em torno de um ponto 56
Figura 44: Ícone F2: Ponto, interseção de dois objetos, ponto médio. 56
Figura 45: Ícone F3: Reta, segmento, vetor... 56
Figura 46: Ícone F4: Reta paralelas, retas concorrentes, bissetriz, mediatriz. 57
Figura 47: Ícone F5: Polígono, polígono regular. 57
Figura 48: Ícone F6: Círculo, semicírculo. 58
Figura 49: Ícone F7: Elipse, hipérbole, parábola... 58
Figura 50: Ícone F8: Ângulo, Ângulo com amplitude, inclinação. 59
Figura 51: Ícone F9: Reflexão em relação a uma reta, rotação em torno de um ponto. 59
Figura 52: Ícone F10: Texto, caneta, relação. 60
Figura 53: Ícone F11: Controle deslizante, caixa para exibir/esconder objeto. 60
Figura 54: Ícone F12: Mover janela de visualização, ampliar, reduzir. 61
Figura 55: Seleção de um objeto 61
Figura 56: Propriedade de um objeto 62

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.. 09

CAPÍTULO 1 - Softwares Educativos e o Ensino da Matemática.. 12

CAPÍTULO 2 - Surgimento das Matrizes.. 15

CAPÍTULO 3 - O Ensino das Matrizes nos documentos oficiais.. 17

CAPÍTULO 4 - Fundamentação Teórica 19

4.1 Geometria Dinâmica 19

4.2 Matrizes e as transformações geométricas 20

4.3 Teoria de Matrizes 28

CAPÍTULO 5 - Aplicações de matrizes 32

CONSIDERAÇÕES FINAIS 50

REFERÊNCIAS 51

ANEXO I 55

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática, nos últimos anos, enfrenta dificuldades entre nossos jovens. Segundo o sexto relatório de monitoramento das cinco (5) Metas do **Todos Pela Educação** (movimento da sociedade civil brasileira que tem como missão contribuir para que até 2022 o país assegure a todas as crianças e jovens o direito de Educação Básica de qualidade, fundada em 2006): **De Olho nas Metas**, em torno de 8% dos jovens brasileiros têm aprendizado adequado em matemática ao final do ensino médio, sendo o Distrito Federal com maior índice (17%) e Roraima com menor (2,7%). Os dados têm como base o resultado da Prova Brasil/Saeb 2013 divulgado pelo Ministério da Educação no segundo semestre de 2014, mostrando que em algumas localidades há retrocesso nos indicadores.

A falta de interesse e/ou motivação são os grandes propulsores desses resultados, e o professor, segundo Kunz (2001), tem a forma de motivar e incentivar os alunos, podendo desenvolver inúmeras atividades, além de estimular a criatividade e criar um ambiente de afeto possibilitando maior liberdade do aluno na escola.

Segundo pesquisa realizada pela Fundação Getúlio Vargas – FGV-RJ, coordenada pelo economista Marcelo Neri, mostra que, apesar de estudos demonstrarem que a Educação tem um impacto na qualidade de vida e na renda dos indivíduos, em 2006, 17,8% de jovens entre 15 e 17 anos estavam fora da escola. De acordo com a pesquisa, 40% deles evadem simplesmente porque acredita que a escola é desinteressante e em segundo lugar a necessidade de trabalhar, com 27% das respostas. Para Marcelo Neri: “O que a pesquisa está mostrando é que não basta garantir o acesso ou criar programas de transferência de renda para assegurar que esse jovem permaneça na escola, é preciso torná-la mais atrativa, interessante e cativante”.

Não podemos ficar parados diante dessa crise na educação e ensinarmos do mesmo modo que nos foi ensinado no passado. O professor de matemática precisa incorporar nas suas aulas instrumentos que despertem a atenção e o interesse do aluno, promovendo, assim, aulas mais dinâmicas e atrativas.

De acordo com Moraes (1996, p. 105 *apud* XAVIER 2000, p.28)

> O novo senário cibernético, informático e informacional não vem marcando apenas o nosso cotidiano através das modificações socioeconômicas e culturais, mas também, vem mudando a maneira como pensamos, conhecemos e apreendemos o mundo. Isso porque a nova cidadania da cultura informatizada requer a aquisição de

> hábitos intelectuais de simbolização, formalização de conhecimento, manejo de signos, representações, utilizando equipamentos computacionais.

O uso do computador nas aulas de Matemática tem tomado espaço cada vez mais importante, considerando que nossos alunos vivem rodeados das Tecnologias de Informações e Comunicações[1] - TICs, que são as tecnologias usadas como meios de comunicação, como equipamentos de informática, celulares, sites de web, software, entre outros.

Diante dos fatos, apresentaremos um estudo visando à utilização de softwares na potencialização do ensino aprendizagem em matemática, de forma significativa e divertida para o aluno. Em especial, trataremos da aplicação do software Geogebra no ensino das Matrizes e suas aplicações, possibilitando o estudo de transformações geométricas simples (rotações, translações, dilatação, contrações, dentre outras) que podem ser, possivelmente, trabalhados no Ensino Médio, possibilitando, com isso, excelente oportunidade de explorar a noção de matrizes e suas operações.

Nosso objetivo, nesse estudo, é proporcionar um material que contribua para o planejamento e execução das aulas de matrizes, saindo do paradigma de uma disciplina estática, servindo como referência para o leitor na elaboração de suas aulas.

No primeiro capítulo, enfatizaremos a necessidade da utilização dos softwares no ensino da matemática, abordando estudos já realizados, por Perrenoud (2000), Romero (2006), Silva (2009).

No segundo capítulo, faremos um breve histórico do surgimento das matrizes.

No terceiro capítulo relataremos as discussões na reestruturação das reformas curriculares na década de 90, iniciada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) criando, assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) que busca ações que visem melhoraria da qualidade da educação brasileira. Neste capítulo também serão abordadas as sugestões dos conteúdos a serem estudados nos Ensinos Fundamentais e Médio, bem como o estudo das matrizes.

O quarto capítulo traz uma fundamentação teórica, ilustrando a importância da Geometria Dinâmica no ensino e aprendizagem de matrizes na disciplina de Matemática, as

---

[1]Tecnologias de Informação e Comunicação – TICs são os recursos tecnológicos que permitem o trânsito de informações: “Os meios eletrônicos que incluem as tecnologias mais tradicionais, como rádio, televisão, gravação de áudio e vídeo, além de sistemas multimídias, redes telemáticas, robótica e outros”. Apesar dos PCNs trazerem um conceito mais amplo das TICs, compreendendo “[...] os diferentes meios de comunicação (jornalismo impresso, rádio e televisão), os livros, os computadores, etc.” (BRASIL, 1998, p. 135)

formas matriciais das transformações estudadas, bem como um estudo teórico das matrizes para melhor desenvolvermos nosso trabalho.

No quinto capítulo foram desenvolvidas atividades envolvendo matrizes e transformações geométricas utilizando o software geogebra.

Por fim, teremos as Considerações Finais.

CAPÍTULO 1

1.1 Softwares Educativos e o Ensino da Matemática

Muito se tem falado sobre os softwares no ensino da Matemática, mas ainda é tímida sua utilização como recurso pedagógico. Segundo a Avaliação do Plano Nacional de Educação 2001-2008, a utilização das mídias educativas nas escolas brasileiras tem se dado de forma muito tímida, porque as escolas com acesso a essas mídias, em sua maioria, não sabem como integrá-las ao seu projeto político pedagógico. Encontrando ainda, a resistência de muitos professores na utilização desses recursos.

O professor deve melhorar suas competências e atualizar-se na utilização dessas novas Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação.

> Para Tarouco (et al., 2004), a importância do uso dos computadores e das novas tecnologias na educação deve-se não somente ao impacto desta ferramenta na nossa sociedade e às novas exigências sociais e culturais que se impõem, mas também ao surgimento da Tecnologia Educativa. Eles começaram a ser utilizados no contexto educativo a partir do rompimento com o paradigma tradicional e surgimento do construtivismo, que enfatiza a participação e experimentação do sujeito na construção de seu próprio conhecimento, através de suas interações.

O computador não se constitui apenas como uma ferramenta com propósitos educacionais e de práticas pedagógicas, mas também como estímulo e compreensão de mundo.

Nesse sentido, Miskulin (2003), sublinha que uma nova cultura profissional se estabelece com a disseminação das tecnologias, e também, são criadas novas maneiras para atuar no meio educacional. De acordo a autora, quando a tecnologia é incluída na escola, algo novo estará ocorrendo, então o conhecimento passa, assim, a ser produzido na integração com as tecnologias que, quando bem utilizadas, podem gerar mudanças nos conhecimentos individuais e, consequentemente, nos coletivos.

Perrenoud (2000) destaca como uma das dez competências fundamentais do professor, a de conhecer as possibilidades e dominar os recursos computacionais existentes, cabendo-lhe atualizar-se constantemente, buscando novas práticas educativas que possam contribuir para um processo educacional qualificado.

Muitos trabalhos e estudos estão sendo realizados: a modelagem matemática, a etnomatemática e a utilização da tecnologia, como recurso de ensino aprendizagem da Matemática, significativo e motivador, de modo, que o aluno não venha a ser mero ouvinte, passivo de conhecimentos. Mas, um agente participante na construção de sua aprendizagem no qual, seu conhecimento, sua vivência sejam levados em consideração e explorados no âmbito escolar. Algumas tendências como Etnomatemática, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, História da Matemática, dentre outras são modelos matemáticos que visam não só à aprendizagem matemática, mas também explorar os conhecimentos preexistentes ou adquiridos, ou seja, devemos, como profissionais na área de matemática, explorar, dos nossos alunos, os conhecimentos já adquiridos com as TICs.

Segundo Romero, na sua concepção acerca do ensino com o auxílio de softwares em sala de aula:

> A tecnologia, especificamente os softwares educacionais disponibiliza oportunidade de motivação e apropriação do conteúdo estudado em sala de aula, uma vez que em muitas escolas de rede pública e particular, professores utilizam recursos didáticos como lousa e giz para ministrarem suas aulas, este é um dos diversos problemas que causam o crescimento da qualidade não satisfatória de ensino, principalmente na rede estadual. (ROMERO, 2006, 1).

Os recursos são diversos quando falamos das tecnologias para o ensino da matemática, como as calculadoras gráficas, o data-show, os quadros interativos entre outros. Tais recursos já estão, há algum tempo disponíveis, mas é claro, não se encontram de forma aceitável, inseridos na prática docente do professor de matemática ou até mesmo as escolas não se dispõem de recursos financeiros para adquiri-los.

Romero (2006) salienta que “ensinar Matemática é desenvolver o raciocínio lógico, estimulando a criatividade e capacidade de resolver problemas, assim como procurar alternativas para aumentar a motivação pela aprendizagem, desenvolver a organização, concentração e a atenção dos estudantes em sala de aula.”

Dessa forma, o professor torna-se indispensável na orientação do processo de aprendizagem, podendo, assim, dispor de meios tecnológicos para atender os alunos de forma diversificada e motivadora, de acordo com suas necessidades.

Vale salientar que, como toda tendência de ensino, as TICs não serão a solução final dos problemas de ensino aprendizagem da matemática, mas se espera, com elas, minimizar os problemas, aproximando-os de uma adequação satisfatória.

Mas, segundo Josselene B. da Silva no seu trabalho Estudo da Influência de Softwares Educativos para o Ensino da Matemática-2009, quando bem utilizados, o computador, a internet e os *softwares*, apresentam papel fundamental e de grande importância na formação educacional, por proporcionar um mundo de conhecimentos nas diversas áreas. A escola não é mais a única fonte em que alunos podem buscar conhecimentos. Com a era digital, faz-se necessário que professores busquem entender o funcionamento dessas novas tecnologias, como meio para auxiliar os seus alunos na aquisição de novos conhecimentos.

O uso dessas novas tecnologias, inserindo os softwares, não propicia ao aluno apenas um crescimento no ensino aprendizagem, mas o coloca como agente ativo e participante no processo.

CAPÍTULO 2

2.1 Surgimento das Matrizes

Sabemos que "existem indícios que as matrizes surgiram no século II a.C. com os babilônios que estudavam problemas e buscaram técnicas para a solução de sistemas lineares de duas variáveis e de duas equações por volta de 300 a.C. e preservaram esses problemas em tabletes de argila. Mas, por volta de 200 a.C. e 100 a.C., os chineses conseguiram chegar bem mais perto das matrizes com o texto "*Nove Capítulos da Arte Matemática*" que foi escrito durante a dinastia Han que contém o primeiro exemplo conhecido de método de matrizes". (SANTOS, 2013, p.12).

Mas, segundo Kilhian (2010), o início da teoria das matrizes remonta a um artigo de Cayley em 1855. Nesse artigo Cayley fez questão de salientar que, embora logicamente a ideia de matrizes preceda a de determinante, historicamente ocorreu o contrário, de fato, os determinantes já eram usados há muito na solução de sistemas lineares.

Em 1683 o matemático Seki Kowa (1637-1708) publicou suas ideias e escreveu *Método de resolver problemas dissimulados que contém métodos matriciais* com tabelas da mesma forma com que foram construídos os métodos chineses. (SANTOS, 2013, p.12).

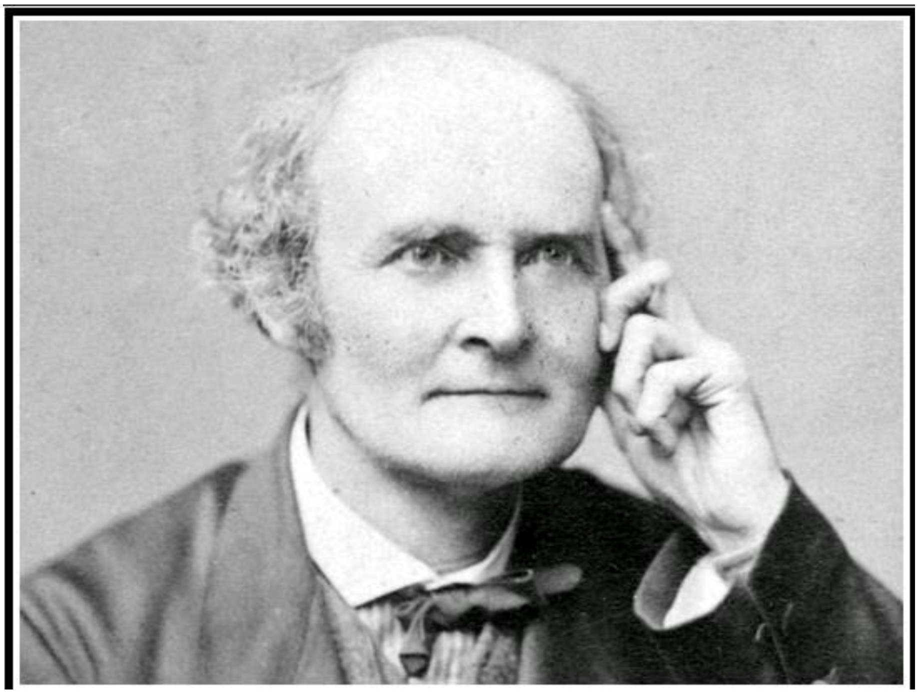


Figura 1: Arthur Cayley (1821 - 1895).

Natural de Richmond, Inglaterra, Cayley descendia de família que conciliava talento e tradição. Desde muito cedo demonstrou grande aptidão para os estudos. Diante disso, e atendendo a sugestões de alguns de seus professores, os pais resolveram enviá-lo para estudar em Cambridge, em vez de iniciá-lo aos negócios da família. Assim, em 1838, ingressa no Trinity College, onde iria se graduar com distinção máxima. Logo em seguida inicia-se no ensino, no próprio Trinity, mas desiste três anos depois, pois sua permanência exigira abraçar a carreira religiosa, o que não estava em seus planos. Nos quinze anos seguintes dedicou-se à advocacia, mas, com certeza, não integralmente, como o mostram os artigos que publicou no período, na área da matemática (KILHIAN, 2010).

De acordo com Kilhian (2010), "em volume de produções matemáticas, em todos os tempos, Cayley só seja superado por Euler e Cauchy". E embora sua obra seja bastante diversificada, foi no campo da álgebra que mais se destacou. Cayley contribuiu também na geometria analítica n-dimensional, em 1843, cuja elaboração utiliza determinantes e coordenadas homogêneas como instrumentos essenciais.

No que se referem às matrizes, Cayley introduziu a notação de uma transformação geométrica, ou seja,

$$\begin{cases} ax + by = x' \\ cx + dy = y' \end{cases} \text{ se escreve como } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{(I)}$$

A partir dessas observações surgiu-lhe a definição de produto de matrizes e daí a ideia de inversa de uma matriz. Mas, somente três anos depois, Cayley introduziu o conceito de adição e de multiplicação de matrizes por um escalar.

Ao introduzir a teoria das matrizes, entre outros assuntos, Cayley tinha uma grande preocupação quanto à forma e à estrutura em álgebra.

A partir de Cauchy, além de Cayley, outros matemáticos como Jacobi e James J. Sylvester desenvolveram e sistematizaram definições e propriedades que são, até hoje, utilizadas, como, por exemplo: Sylvester foi o primeiro a usar o termo *matriz* e a definiu como um arranjo retangular de termos (SANTOS, 2013, p.13).

CAPÍTULO 3

3.1 O Ensino das Matrizes nos documentos oficiais

A educação no Brasil tem passado por diversas discussões quanto suas reestruturações nas reformas curriculares, organizadas por políticas públicas e estudos direcionados, buscando qualidade na educação pública. A partir da década de 90 se intensificaram as orientações para tais reformas iniciadas e conduzidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB de 1996, lei que garantiu a ampliação da educação básica e estabeleceu novas diretrizes ao ensino escolar (BRASIL, 1996).

Mas, antecedendo a esse fato, segundo Gadotti (1993), em 1930, a burguesia urbana industrial chegou ao poder e passou a defender a educação pública, então, somente na Constituição de 1934 criou-se um capítulo inteiro dedicado à Educação, trazendo para a União a responsabilidade por traçar "diretrizes da educação nacional".

No entanto, somente no ano de 1961 é apresentada a primeira LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), propondo os direitos e os deveres do Estado e da família para com a educação de todos os brasileiros. Essa primeira LDB afirmava que a educação pública era um direito de todos, mas somente o ensino primário era obrigatório, ou seja, o ginasial e colegial eram públicos, mas não obrigatórios (LAUTÉRIO e NEHRING, 2012, p.2).

Mesmo com a publicação da LDB de 1996, até o final de década de 20 o pensamento pedagógico no Brasil ainda reproduzia um pensamento arcaico, retrógado, memorístico e repetitivo baseado na educação jesuítica tradicional.

No que tange ao Ensino Médio, a organização de orientações curriculares para o Ensino Médio seguiu o modelo das orientações já proposto ao Ensino Fundamental em 1997.

No documento dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCNEM destaca-se a busca de novos recursos ao ensino, visto a limitação do ensino tradicional.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - DCNEM propõem uma formação segundo os princípios da contextualização e da interdisciplinaridade além de indicar as competências e as habilidades que se espera serem adquiridas pelos alunos, não se limitando apenas a transferência de conhecimento e sim desenvolvendo as competências e habilidades já adquiridas pelo aluno (PCNEM, 2000).

A LDB, nº 9.394, indica, como finalidades do Ensino Médio, a compreensão dos fundamentos científico e tecnológicos dos processos produtivos, relacionada à teoria e prática de tal forma que os alunos sejam capazes de dominar os princípios científicos e tecnológicos ao final desse nível de ensino (BRASIL, 1996).

No que se referem às Matrizes, as aulas ainda acontecem de forma sistemática e tradicional, enfocando apenas a forma algébrica, de modo que aluno olhe o conteúdo não vendo nenhuma relação com sua realidade e sua aplicação.

Barbosa (2013) afirma que "as transformações geométricas se apresentam como recurso ideal para dar significado geométrico às matrizes e às suas operações".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) sugerem que os conteúdos abordados no Ensino Médio sejam a ampliação e o aprofundamento daqueles já estudados no Ensino Fundamental, os quais os Parâmetros Curriculares do terceiro e quarto ciclos da educação básica destacam que, do pensamento geométrico, o ensino da Matemática vise resolver "situações-problemas que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução" (BRASIL,1998, p. 65).

As transformações geométricas são mencionadas diversas vezes nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (PCNEF), dando grande importância de sua abordagem em sala de aula:

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais "dinâmico" para esse estudo. Atualmente, existem *softwares* que exploram problemas envolvendo transformações das figuras [...] O estudo das transformações isométricas (transformações no plano euclidiano que conservem comprimentos, ângulos e ordem de pontos alinhados) que é excelente ponto de partida para a construção de noções de congruências. As principais isometrias são: reflexão numa reta (ou simetria axial), translação, rotação, reflexão num ponto (ou simetria central) e identidade. [...] nota-se, por exemplo, que as simetrias estão muito presentes no cotidiano. Em inúmeros objetos físicos que ocorrem aproximações de planos de simetria de reflexão (BRASIL, 1998 p. 124).

Como é sugerido nos PCNEM de ampliação e aprofundamento dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental, o tema transformações geométricas não é dado referência explícita como nos PCNEF, o qual é abordado apenas com sugestão de tema complementar ao estudo dos números complexos. Veja texto: [...] "explorar as conexões entre as operações com números complexos a as transformações geométricas no plano" (BRASIL, 2006, p. 94), e a eventual abordagem de simetrias com "valorização da matemática no seu aspecto estético" (BRASIL, 2006, p. 93).

CAPÍTULO 4

Fundamentação Teórica

4.1 Geometria Dinâmica

As mudanças e as transformações que o mundo vem sofrendo nos últimos anos, principalmente no que diz respeito às TICs são muito rápidas. Segundo Silva (2009) "essa velocidade com que a tecnologia avança causa a obsolescência dos objetos e do próprio conhecimento". De acordo com Lévy (1999), a maioria das competências adquiridas por uma pessoa no início de seu percurso profissional estará obsoleta no final de sua carreira.

A grande evolução da informação e dos novos conceitos da geometria traz oportunidade de empregar novos recursos tecnológicos para o ensino, motivando ainda mais os alunos e propiciando melhoria no processo de aprendizagem (SCHMIDT, 2002, p. 4).

Para Penteado (2001) engajar-se em trabalhos que fazem uso de tecnologia de informática é algo como sair de uma zona de conforto proporcionada pela previsibilidade e o controle da situação, em que para atuar numa zona de risco se faz necessária uma avaliação constante das ações propostas.

Para Borba e Penteado (2001)

> Ao caminhar em direção à zona de risco, o professor pode usufruir o potencial que a tecnologia informática tem a oferecer para aperfeiçoar sua prática profissional. Aspectos como incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento [...] do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem (p.63).

Diante dos fatos, é preciso que o professor abrace essa causa, e estabeleça a ligação das TIC's com o processo ensino e aprendizagem. Como afirma SILVA (2009) "a necessidade de estudos e pesquisas envolvendo vários temas. Um desses temas é o trabalho com *softwar*es de *Geometria Dinâmica* (GD) aliado ao desenvolvimento de atividade investigativa."

> Entende-se por softwares de Geometria Dinâmica aqueles capazes de construir e manipular objetos geométricos na tela do computador. Além disso, o que diferencia um software de Geometria Dinâmica dos demais é a possibilidade de "arrastar" a figura construída utilizando o mouse. Esse procedimento permite a transformação da figura em tempo real. Softwares deste tipo possibilitam trabalhar com Geometria Euclidiana Plana, Geometria Não-Euclidiana e Geometria Analítica, sendo possível

> também tratar de alguns assuntos não geométricos, como funções, por exemplo. (Silva, 2009).

Um dos *softwares* de Geometria Dinâmica disponível no mercado com as características citadas por Silva é o *software* GeoGebra, utilizado neste trabalho. Este software é livre, de fácil download, desenvolvido por Markus Hohenwater[2], que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística entre outros e ao mesmo tempo tem uma interface fácil de usar. A nova versão GeoGebra 5.082.0-3D está disponível em www.geogebra.org/download.

4.2 Matrizes e as transformações geométricas

Mesmo que as transformações geométricas há tempo venham sendo sugeridas pelos PCNs como temas a serem abordados nas séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, os conteúdos de matrizes ainda são apresentados sem nenhuma relação à qual se deu sua origem ou sua aplicação.

Nas cinco coleções de livros didáticos para o Ensino Médio, todas avaliadas e aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM), analisados por Stormowski (2008) em seu trabalho, as definições de matrizes são abordadas como tabelas seguidas de definições algébricas formais, não dando referência ao tema de transformações geométricas. Somente em uma única obra foi verificada a relação de matrizes e transformações, mas não como ponto de partida para o estudo do conceito, apenas como uma aplicação de matrizes.

Nesse estudo das transformações geométricas e sua representação matricial, esperamos que o aluno perceba, além da compreensão na construção do conhecimento como processo histórico (BRASIL, 2002, p. 117), mas que compreenda que as operações entre matrizes não foram definidas de forma arbitrária e sim estão ligadas a conceitos matemáticos.

Segundo Eves (2010), na álgebra das matrizes, descoberta pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895) em 1857, as matrizes surgiram ligadas a transformações geométricas do tipo $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ onde *a, b, c* e *d* são números reais. Tal situação é uma transformação do R^2 em R^2, ou seja, é uma aplicação que leva o ponto (x, y) no ponto (x', y'). Podendo ser representada pelo sistema

---

[2] Docente do departamento de Matemática Aplicada de Universidade de Slazburgo, Áustria.

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{Representação matricial, } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{(II)}$$

A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é chamada matriz da transformação.

- Duas transformações são iguais se, e somente se, elas possuem os mesmos coeficientes, então podemos dizer que as matrizes transformações

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \qquad \text{(III)}$$

são iguais se, e somente se, *a = e, b = f, c = g e d = h. (igualdade de Matrizes)*

- Se a transformação dada for seguida da transformação anterior, teremos

$$\begin{cases} x'' = ex' + fy' \\ y'' = gx' + hy' \end{cases}$$

Fazendo as substituições necessárias, por meio da álgebra elementar, a transformação é dada por

$$\begin{cases} x'' = (ae + cf)x + (be + df)y \\ y'' = (ag + ch)x + (bg + dh)y \end{cases}$$

O que nos leva à definição de ***produto de duas matrizes***, ou seja,

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix} \qquad \text{(IV)}$$

- Somando transformações das espécies consideradas, temos

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} + \begin{cases} x'' = ex + fy \\ y'' = gx + hy \end{cases} = \begin{cases} x''' = (a + e)x + (b + f)y \\ y''' = (c + g)x + (d + h)y \end{cases}$$

O que nos leva à definição de ***adição de matrizes***, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \qquad \text{(V)}$$

- Se *m* é um número real e a transformação das espécies consideradas, temos

$$\begin{cases} x' = ma.x + mb.y \\ y' = mc.x + md.y \end{cases}$$

O que nos leva à definição do produto de um escalar por uma matriz, ou seja,

$$m.\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ma & ma \\ mc & md \end{bmatrix} \qquad \text{(VI)}$$

4.2.1 Transformações Geométricas

As transformações geométricas há algum tempo são fortemente sugeridas pelos PCNs como tema de abordagem desde as séries finais do Ensino Fundamental e Médio e, no entanto, as mesmas são quase esquecidas, inclusive pelos livros didáticos, que apenas recentemente resolveram abordar o assunto, mas ainda de forma muito superficial, afirma Stormowski (2008, p. 2).

Barbosa (2013) afirma que “as transformações geométricas se apresentam como recurso ideal para dar significado geométrico às matrizes e às suas operações. Conteúdo que, em geral, é estudado de forma bastante mecânica, privilegiando os métodos algébricos” (BARBOSA, 2013, p.19).

Stormowski (2008) afirma também que as transformações geométricas possibilitam uma ampliação sobre os assuntos tratados na Geometria, que muitas vezes fica restrita ao cálculo de área de superfícies e volumes de sólidos. “Ao mesmo tempo propicia uma abordagem que relaciona geometria e álgebra, tópicos que quase sempre são estudados de forma muito estanque no colégio, indo de encontro ao estudo compartimentado da matemática” (STORMOWSKI, 2008, p. 3).

Segundo Lima (2001),

> A justificativa elementar para o estudo de matrizes são as transformações geométricas e os sistemas lineares. Mas no Ensino Médio brasileiro as noções fundamentais de rotação, homotetia (mais geralmente isometria e semelhança), bem como outras transformações geométricas de grande relevância (translações, por exemplo), são praticamente ignoradas. (LIMA, 2001, p.360).

Apresentaremos neste capítulo uma visão geométrica das transformações no plano $(R^2 \to R^2)$ algebricamente, de modo que o aluno perceba a aplicação das matrizes nas transformações geométricas.

4.2.2 Expansão e Contração

Uma transformação linear *T*: $R^2 \to R^2$, que cada vetor v é associado um múltiplo deste, ou seja, $v \mapsto \alpha.v$, com $\alpha \in R$, é denominada expansão ou contração, conforme o valor $|\alpha|$. A saber respectivamente, $|\alpha| > 1$ ou $0 < |\alpha| < 1$.

Se $|\alpha| < 1$, *T* contrai o vetor.

Se $|\alpha| > 1$, *T* dilata o vetor.

Se $\alpha = 1$, *T* é a identidade.
Se $\alpha < 0$, *T* inverte o sentido do vetor.
Se $\alpha > 0$, *T* mantém o mesmo sentido do vetor.
Matricialmente, temos

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \alpha.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{(VII)}$$

Geometricamente, para $\alpha > 0$ obtém-se:

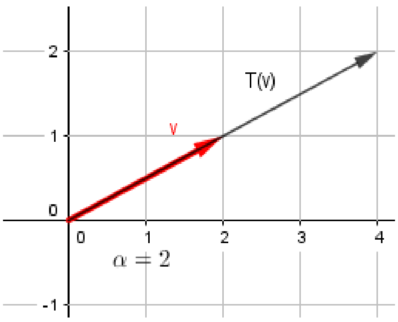


Figura 2: Dilatação do vetor v = (2,1)

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

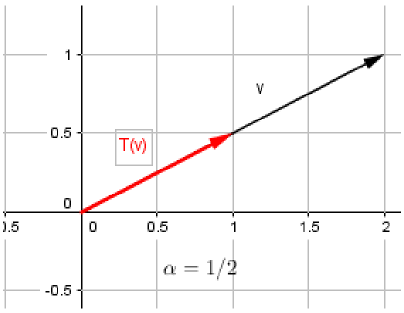


Figura 3: Contração do vetor v = (1,2)

$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

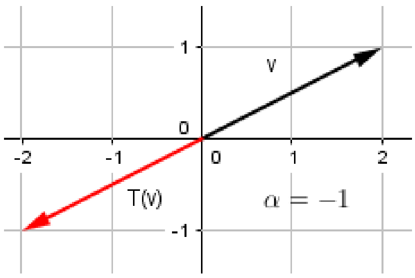
4.2.3 Reflexão em torno da Origem

Uma transformação linear *T*: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = -1.(x, y) = (-x, -y)$ leva um vetor ao seu simétrico, em relação a origem.

Escrevemos de forma matricial, com:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{(VIII)}$$

Geometricamente, tem-se:



$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

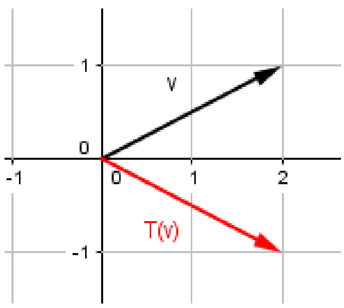
Figura 4: Reflexão do vetor v = (1,2) em torno da origem

4.2.4 Reflexão em Torno do Eixo-x

A transformação linear *T*: $R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (x, -y)$ é chamada reflexão em torno do Eixo-x.

Matricialmente, tem-se: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (IX)

Seja um vetor v = (2,1), aplicando a transformação T(v) = (2,-1), temos o seguinte resultado representado na Figura 5:



$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

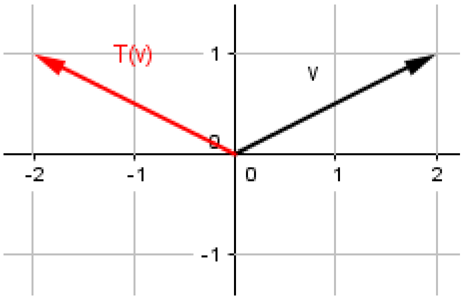
Figura 5: Reflexão do vetor v = (1,2) em torno do Eixo-x

4.2.5 Reflexão em Torno do Eixo-y

A transformação linear *T: R*^{2} → *R*^{2}, tal que *T(x, y) = (-x, y)* é chamada reflexão em torno do Eixo-y.

Matricialmente, tem-se: $v=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ (X)

Seja um vetor v = (2,1), aplicando a transformação T(v) = (-2,1), temos o seguinte resultado representado na Figura 6:



$$v=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

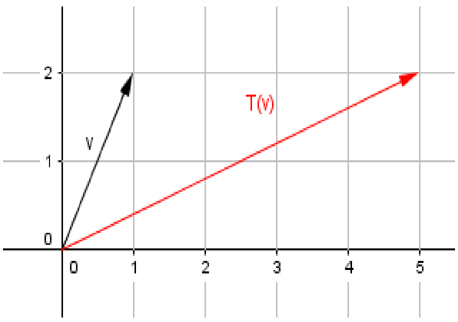
Figura 6: Reflexão do vetor v = (2,1) em torno do Eixo-y

4.2.6 Cisalhamento na direção do Eixo-x

A transformação linear *T: R*^{2} → *R*^{2}, tal que *T(x, y) = (x+αy, y)* é chamada cisalhamento na direção do Eixo-x

Matricialmente, tem-se: $v=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}x+\alpha y\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\alpha\\0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

Seja um vetor v = (1,2), aplicando a transformação T(v) = (5,2), tem-se o seguinte resultado representado na Figura 7:



$$v=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad \text{(XI)}$$

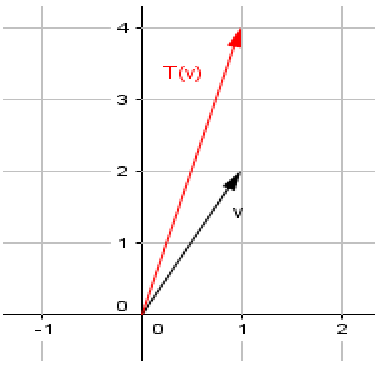
Figura 7: Cisalhamento do vetor v = (1,2) na direção do Eixo-x

4.2.7 Cisalhamento na direção do Eixo-y

A transformação linear $T: R^2 \rightarrow R^2$, tal que $T(x, y) = (x, \alpha x+y)$ é chamada cisalhamento na direção do Eixo-y

Matricialmente, tem-se: $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ \alpha x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (XII)

Seja um vetor v = (1,2), aplicando a transformação T(v) = (4,1), tem-se o seguinte resultado representado na Figura 8:



$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Figura 8: Cisalhamento do vetor v = (1,2) na direção do Eixo-y

4.2.8 Rotação do vetor *v = (x, y)* em um ângulo *θ*

Definimos Rotação no plano de um ângulo θ a transformação $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $|T(v)| = |v|$ e o ângulo entre os vetores $T(v)$ e v é θ.

Geometricamente,

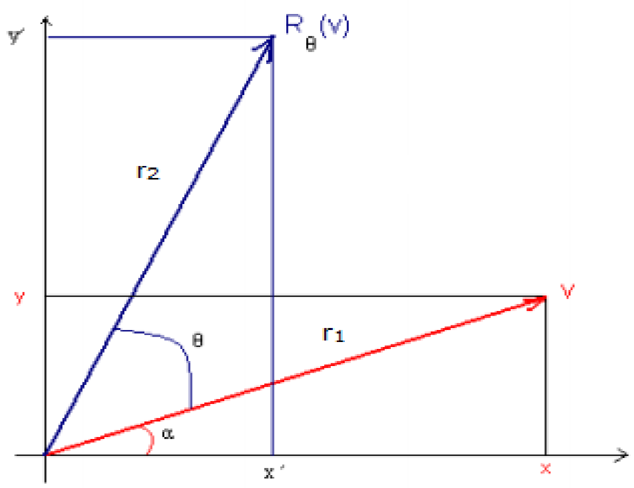


Figura 9: Rotação do vetor v = (x, y) em um ângulo θ

A matriz da transformação rotação de um ângulo θ é dada por:

$$R_\theta : R^2 \to R^2 \text{ tal que } R_\theta(x, y) = (x', y')$$

Da Figura 9 e usando as relações trigonométricas tem-se:

$$x' = r.\ cos(\alpha+\theta) = r.cos\alpha.cos\theta - r.sin\alpha.sin\theta$$

Mas

$$r.\ cos\alpha = x$$
$$r.\ sin\alpha = y$$

então,

$$x' = x.cos\theta - y.sin\theta$$

Analogamente

$$y' = r.\ sin(\alpha+\theta) = r.sin\alpha.cos\theta + r.sin\theta.cos\alpha$$

$$y' = y.cos\theta + x.sin\theta = x.sin\theta + y.cos\theta$$

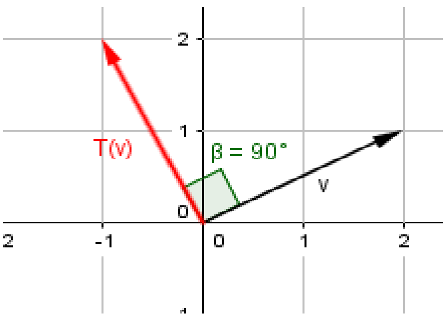
Assim

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

Matricialmente obtém-se:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{(XIII)}$$

Dado o vetor v = (2,1), aplicando a transformação $T(v) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ e fazendo o vetor *v* rotacionar 90° no sentido anti-horário teremos o seguinte resultado representado na Figura 10.



$$v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(90^o) & -\sin(90^o) \\ \sin(90^o) & \cos(90^o) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Figura 10: Rotação do vetor v = (2,1)

4.3 Teórica das Matrizes

Normalmente as aulas de matemática têm caráter estático, são ministradas em salas de aulas, com aulas tradicionais e com uso de livros. Muitas vezes esses tipos de aulas fazem com que os alunos não façam a assimilação do que é dito pelo professor tornando a aula um conjunto de símbolos, palavras e desenhos sem quaisquer significados (SANTOS, 2013, p. 36).

Neste capítulo apresentaremos um resumo teórico sobre os conceitos de matrizes como definição, matrizes especiais, propriedades, operações, etc. Ilustrando as formas abordadas nos livros didáticos.

4.3.1 Definição e Representação de Matriz

Uma matriz *m x n* é um conjunto ***A*** de *m . n* números $a_{ij} \in N$, onde *i = 1, ..., m* e *j = 1, ..., n*. Neste caso os números a_{ij}, são chamados de entradas ou, elementos da matriz *A* e dizemos que *A* tem *m* linha e *n* colunas ou, que ela é uma matriz de ordem *m x n (leia "m por n").*

Denotamos uma matriz A com entradas a_{ij} das seguintes formas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & {}_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou

$$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn} = \{a_{ij} / i = 1,...,m \quad e \quad j = 1,...,n\}$$

4.3.2 Tipos de Matrizes

4.3.2.1 Uma matriz *m x n*, quando *m = 1* a matriz é chamada de matriz linha.

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}]_{1xn}$$

4.3.2.2 Uma matriz *m x n*, quando *n = 1* a matriz é chamada de matriz coluna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{mx1}$$

4.3.2.3 Uma matriz a_{ij} de ordem *m x n*, quando *m* = *n* a matriz é chamada de matriz quadrada. E denotamos por $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, neste caso dizemos que a matriz é quadrado do tipo *n x n*, ou seja, de ordem *n*.

Os elementos da forma a_{ij}, com *i* = *j* constitui a diagonal principal.

Os elementos a_{ij} em que *i* + *j* = *n* + 1 constitui a diagonal secundária.

4.3.2.4 Uma matriz quadrada não nula $A = [a_{ij}]_{nxn}$, é denominada matriz diagonal, quando todos os seus elementos $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Os elementos a_{ij}, com *i* = *j* são todos chamados elementos diagonais.

Notação: *diag (A)* = $\{a_{11}, \cdots, a_{nn}\}$

4.3.2.5 A matriz diagonal a qual os elementos da sua diagonal principal são iguais a 1, é chamada de *matriz identidade*.

Indica-se a matriz identidade de ordem *n* por I_n ou simplesmente *I*.

4.3.3 Operações com matrizes

4.3.3.1 Igualdade de matrizes

Consideremos as matrizes $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B = [b_{ij}]_{mxn}$. As matrizes *A* e *B* são ditas iguais se, e somente se, todos os elementos correspondentes são iguais, ou seja:

$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$, para todo *i = 1, ..., m* e *j = 1, ..., n.*

A negação de *A* = *B* é representada por $A \neq B$, que significa que *A* e *B* são de tipos diferentes ou que *A* e *B* são do mesmo tipo, mas pelo menos um elemento de *A* é diferente do elemento de mesma posição de *B*.

4.3.3.2 Adição de matrizes

Consideremos as matrizes $A=[a_{ij}]_{mxn}$ e $B=[b_{ij}]_{mxn}$. A matriz soma de *A* e *B*, denotada por *A* + *B*, é a matriz *C* = [c_{ij}] tal que c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, ou seja,

$$C = A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \qquad \text{(XIV)}$$

4.3.3.3 Multiplicação por escalar

Seja a matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e k um número real. O produto $k \in R$ pela matriz A, denotada por *k.A*, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de *A* por *k*. Isto é:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} k.a_{11} & \cdots & k.a_{1n} \\ k.a_{21} & \cdots & k.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k.a_{m1} & \cdots & k.a_{mn} \end{bmatrix} = [k.a_{ij}]_{m\times n} \qquad \text{(XV)}$$

Propriedades:

i) k(A + B) = kA + kB

ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$

iii) $0_1 . A = 0_2$, onde 0_1 é real e 0_2 é a matriz nula.

iv) $k_1(k_2A) = k_1k_2A$

4.3.3.4 Multiplicação de matrizes

Sejam as matrizes $A=[a_{ij}]_{mxn}$ e $B=[b_{ij}]_{q\times p}$. Para multiplicar *A* com *B* e determinar o produto *AB* é necessário que *n* = *q* quando isso ocorre *AB* está bem definida, ou seja, $C = AB = [c_{ij}]_{m\times p}$, em que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \qquad \text{(XVI)}$$

Propriedade da multiplicação de matrizes

i) *AI* = *IA* = *A*, onde *I* é a matriz identidade.

ii) $A(B + C) = AB + AC$

iii) $(AB)C = A(BC)$

iv) $0A = A0 = 0$, onde 0 é uma matriz nula quadrada.

4.3.4 Matriz transposta

A transposta de uma matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ é a matriz $A^T = [a_{ji}]_{nxm}$ obtida através de troca da *i-ésima* linha de *A* pela *i-ésima* coluna de *A*, ou seja, A^T é a transposta de *A*.

Propriedade da matriz transposta

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$*, onde* λ *é um número real.*

iii) $(A^T)^T = A$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

4.3.5 Matriz inversa

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é invertível se existe uma matriz inversa $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ que satisfaça a igualdade, $AB = BA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade. Diz-se que *B* é a inversa de *A* e denota-se por A^{-1}, ou seja,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \qquad \text{(XVII)}$$

CAPÍTULO 5

5.1 Aplicações de Matrizes

Neste capítulo apresentaremos algumas atividades de matrizes que podem ser desenvolvidas com os alunos utilizando o *software* geogebra tanto, ilustrando as atividades desenvolvidas algebricamente, como suas aplicações nas transformações geométricas.

Segundo Santos (2013), o uso do computador possibilita a interatividade, a qual concretiza a ação mental do aluno, mostrando-as na tela do computador, possibilitando que ele manipule os objetos pensados. Assim, os alunos podem fazer diversas representações, as quais representam diferentes ideais, o que possibilita uma melhor exploração dos conceitos matemáticos (SANTOS 2013, p. 36).

As quatro primeiras atividades são de conhecimento investigativo proporcionando ao aluno a possibilidade de confirmar os resultados obtidos nas resoluções de atividades desenvolvidas de forma tradicional, como nas operações de matrizes (adição, subtração, multiplicação) e para determinar matrizes especiais (matriz transposta, matriz inversa, matriz escalonada, etc.).

Nas atividades seguintes ilustraremos algumas aplicações de matrizes nas transformações geométricas possibilitando ao aluno a compreensão, diante de algumas propriedades geométricas, de suas operações.

A ideia dessas atividades é construir uma sequência didática que possibilite ao leitor visualizar e comparar a relação entre a forma tradicional (o estudo das matrizes sem nexo nenhum com outras disciplinas ou sem aplicação) e uma forma dinâmica de aprender matrizes, de modo, que os alunos compreendam as operações de matrizes de forma que refaçam o processo histórico da origem da multiplicação, por exemplo, tal como o matemático inglês Arthur Cayley definindo a partir da composição de transformações geométricas.

Nessa etapa o aluno terá a oportunidade de manipular os resultados, no *software geogebra,* facilitando a visualização das transformações bem como analisar as alterações com as matrizes correspondentes.

O *software* geogebra possibilita trabalhos investigativos realizando as provas das conjecturas realizadas nas atividades desenvolvidas algebricamente, de forma simples e direta, como soma, subtração, multiplicação de matrizes. É possível também com o *software* geogebra determinarmos as matrizes especiais (matriz transposta, matriz inversa, entre outras).

Atividade 1. Operações com matriz no geogebra, adição, multiplicação, matriz transposta e matriz inversa.

1.1 Insira a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, digitando na *Entrada de Comando* do software.

A= {{2,-5},{3,1}} e aperte *Enter*. Da mesma forma insira a matriz $B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$. Em seguida digite na *Entrada de Comando*, C = A + B apertando *Enter*, *Figura 11*.

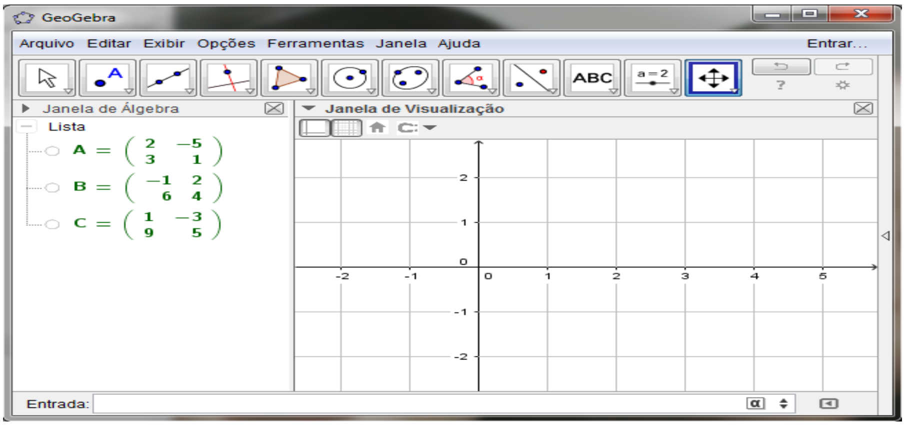


Figura 11: Adição de matrizes

Para obtermos o produto entre as matrizes A e B, digite C = A*B no *Entrada de Comando* e apertar *Enter*, *Figura 12.*

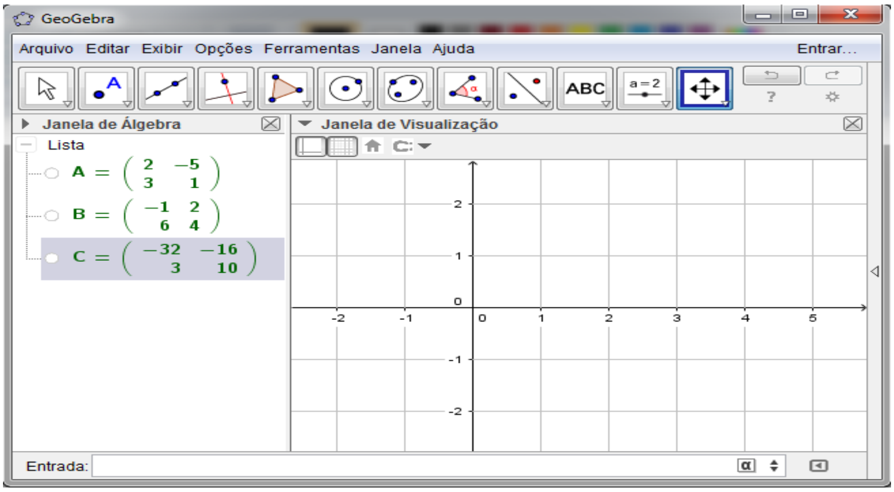


Figura 12: Produto de matrizes

Nesse momento o professor pode solicitar aos alunos que realizem soma subtração e multiplicação com outras matrizes algebricamente e em seguida realizar tais atividades no *software*, confirmando assim os resultados.

1.2 Insira a matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 5 & 0 & -2\end{bmatrix}$, digitando A = {{1,-3,4},{5,0,-2}} na *Entrada de Comando* e aperte *Enter*. Digite *MatrizTransposta[A]* na *Entrada de Comando* e aperte *Enter*, Figura 13.

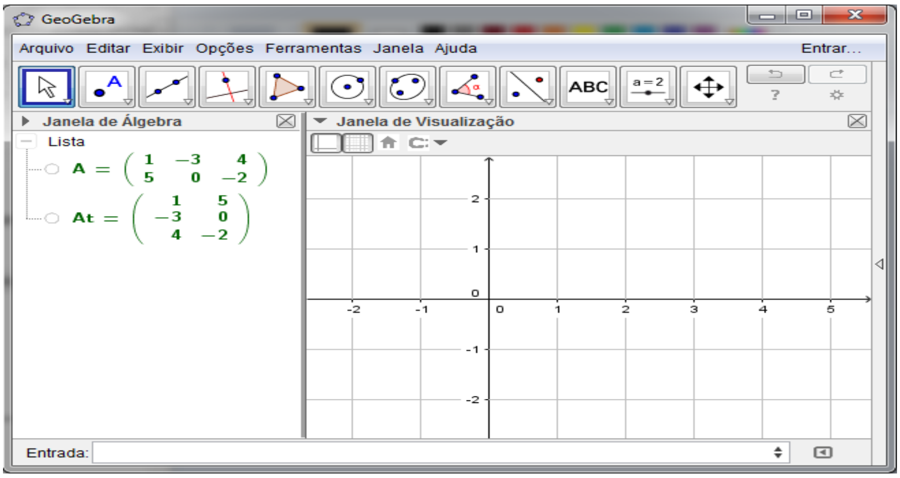


Figura 13: Matriz Transposta

1.3 Considerando uma matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$, digite A = {{1,2}, {6,4}} na *Entrada de Comando* e aperte *Enter*. Em seguida digite na *Entrada de Comando: MatrizInversa[A]* e aperte *Enter*, *Figura 14.*

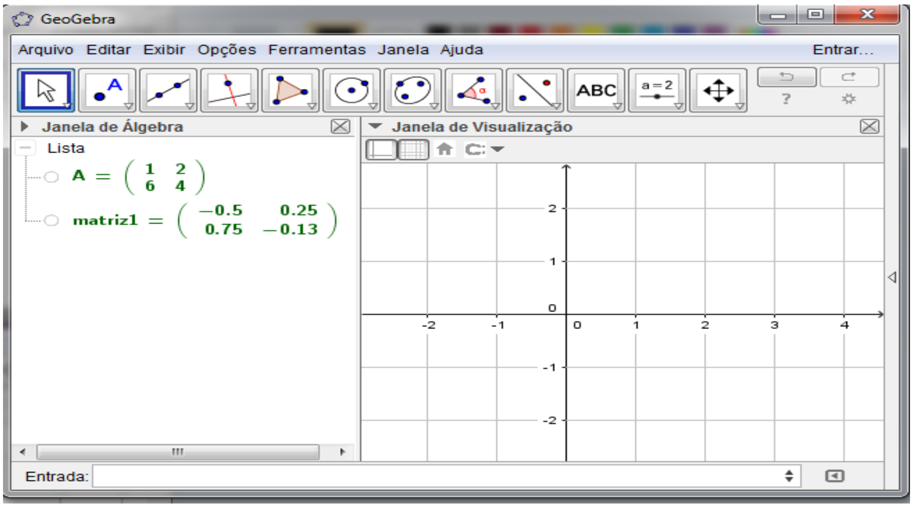


Figura 14: Matriz inversa de A

1.4 Dada uma matriz $M=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 5\end{bmatrix}$, digite

M = {{2, 3, -1}, {3, 1, 0}, {1, 0, 5}} na *Entrada de Comando* e aperte *Enter*. Em seguida digite na *Entrada de Comando: MatrizInversa[A]* e dê *Enter*, Figura 15.

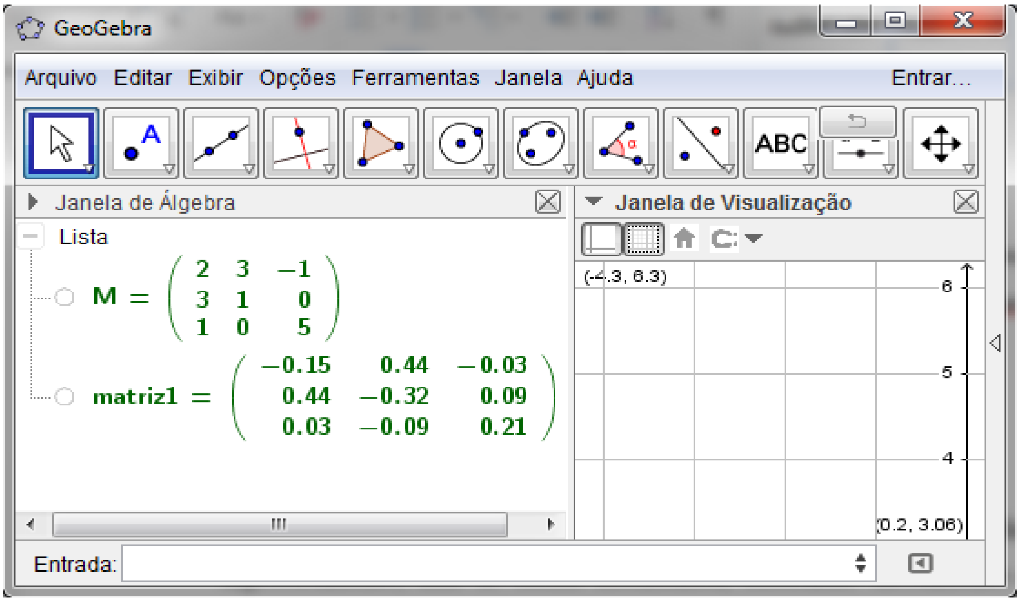


Figura 15: Matriz Inversa de M

Repare que na atividade 1 observamos apenas a confirmação do que fazemos algebricamente, mas de forma instantânea, ilustrando diretamente os resultados, ou seja, de caráter comprobatório.

No intuito de proporcionar alternativas didático pedagógicas para a realização de um ensino significativo de Matrizes, buscaremos nas atividades seguintes incentivar uma investigação matemática. Como destaca Corradi (2011), que as atividades investigativas

> [...] devem provocar a capacidade de raciocínio, além de possibilitar o emprego de conceitos matemáticos para trabalhar nas atividades propostas. Para que isso aconteça é preciso que haja uma mudança significativa em relação à metodologia utilizada pelo professor a fim de que haja envolvimento dos alunos com as tarefas realizadas por eles [...] (CORRADI, 2011, p. 169).

Em cada questão será apresentado um tutorial a ser seguido no seu desenvolvimento, utilizando o *software* geogebra, de modo que no final da atividade o aluno possa investigar as operações realizadas com matrizes e procedimentos para cada resultado encontrado.

Atividade 2. Transformações geométricas no geogebra

O *software* geogebra também nos fornece um recurso para apresentar as transformações geométricas, que nos propicia a representação gráfica com movimentos (geometria dinâmica) que nos possibilita confrontar com a “imobilidade” do desenho manual (STORMOWSKI, 2008, p. 93).

2.1 Seja o operador linear $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(v) = \alpha \cdot v$. Determinemos as transformações geométricas de ***dilatação*** e ***contração***.

No *software* geogebra, insira um vetor *v = (1,2)* na *Entrada de Comando* e aperte *Enter*, como na Figura 16.

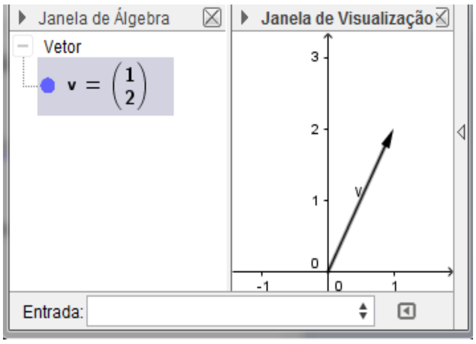


Figura 16: Vetor v = (1,2)

Em seguida defina um controle deslizante α (*ícone F11*, veja Anexo I), use o intervalo de -5 a 5 e o incremento 0,1 e aperte OK, Figura 17.

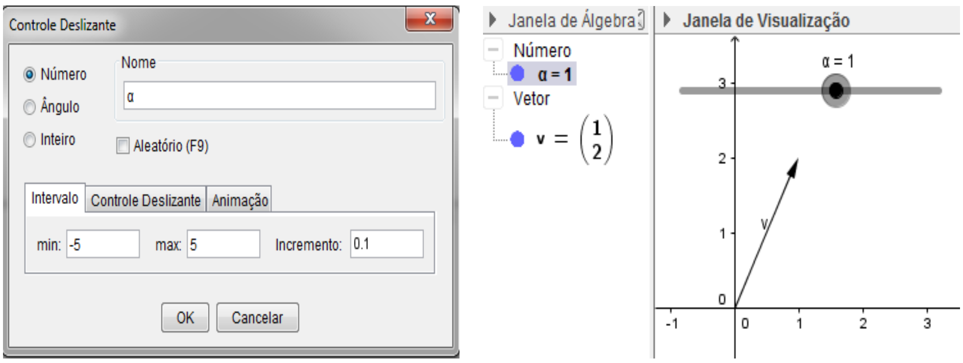


Figura 17: Controle Deslizante

Insira a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ na *Entrada de Comando* e depois o vetor *w = A*v, Figura 18.*

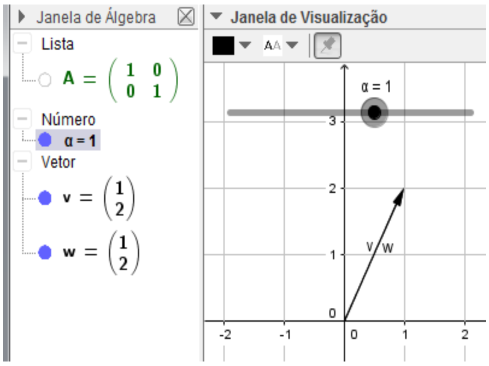


Figura 18: Vetor w = A.v

Clique no vetor *w* com mouse direito e escolha propriedades, selecionando em cor: vermelha; em estilo: espessura 4, opacidade 50, Figura 19.

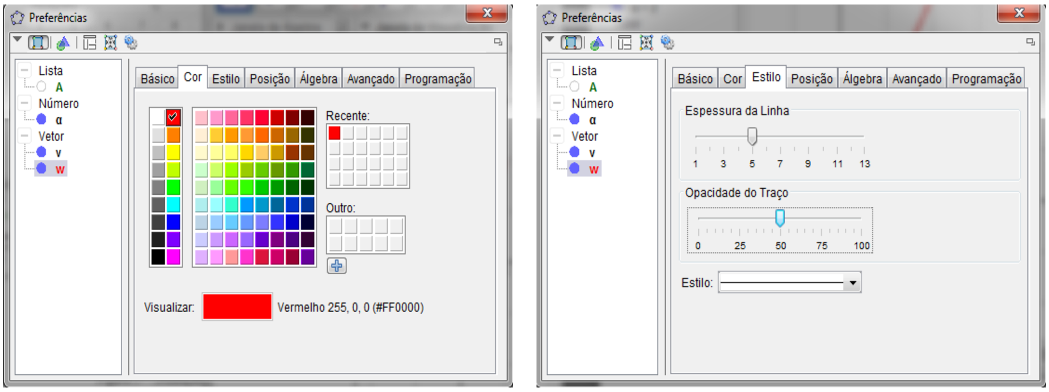


Figura 19: Propriedades do vetor v = (1,2)

Deslize o controle deslizante observando as propriedades de dilatação e contração, Figura 20.

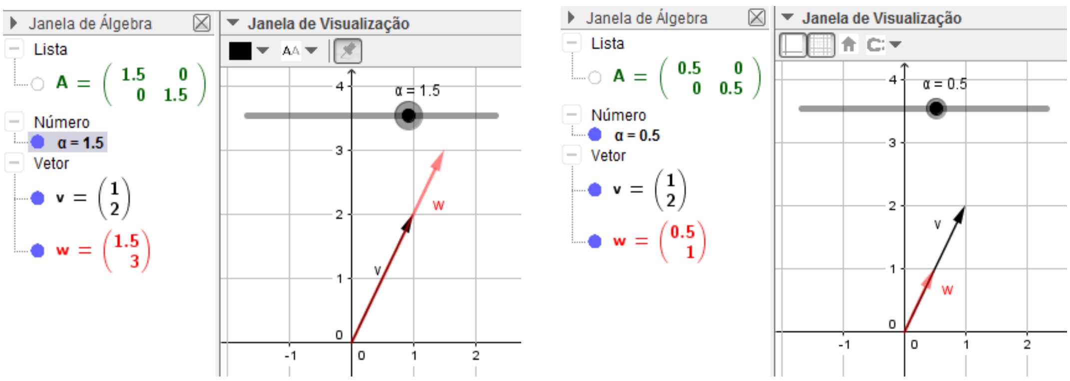


Figura 20: Dilação e contração do vetor v = (1,2)

O professor, nesse momento, pode pedir aos alunos que investiguem as operações realizadas entre a matriz *A e* o vetor *v* para obter os resultados no vetor transformação *w*, explorando a ideia de multiplicação de matrizes, podendo também explorar as reflexões em torno da origem.

2.2 Seja o operador linear $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(v) = \alpha \cdot v$. Determinemos as transformações geométricas de **cisalhamento vertical** e **horizontal** do vetor v = (1,2).

Insira o vetor *v = (1,2)* como no item 2.1 e defina um controle deslizante α (*ícone F11*) no intervalo de -5 a 5 e incremento 1, digite a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$ na *Entrada de Comando*, Figura 21.

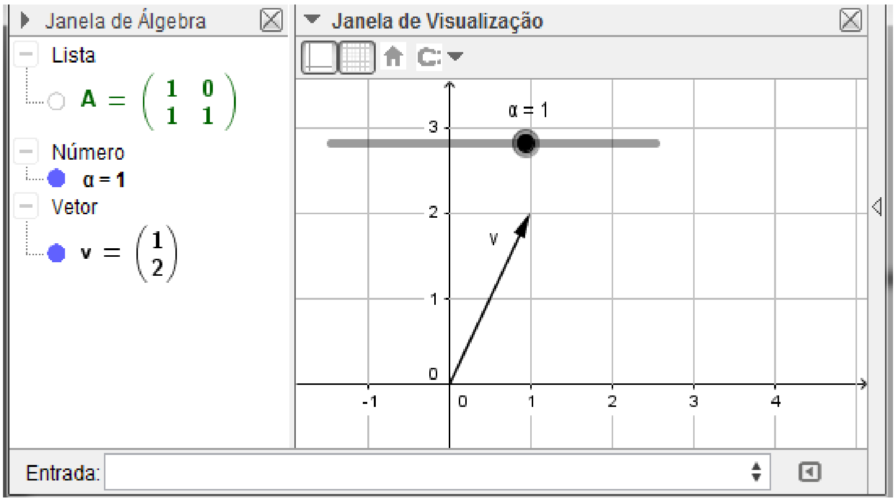


Figura 21: vetor v = (1,2)

Digite na *Entrada de Comando* o vetor *u* = *A**v* selecionando-o, logo após, na cor vermelho. Em seguida deslize o controle deslizante até o valor α = 2, Figura 22.

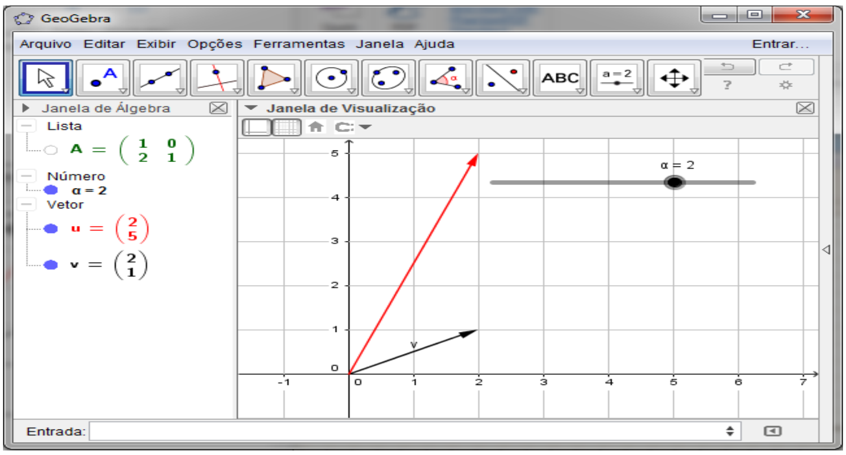


Figura 22: Cisalhamento vertical do vetor v = (2,1)

Da mesma forma, trocando apenas a matriz por $A=\begin{bmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, teremos o cisalhamento horizontal, Figura 23.

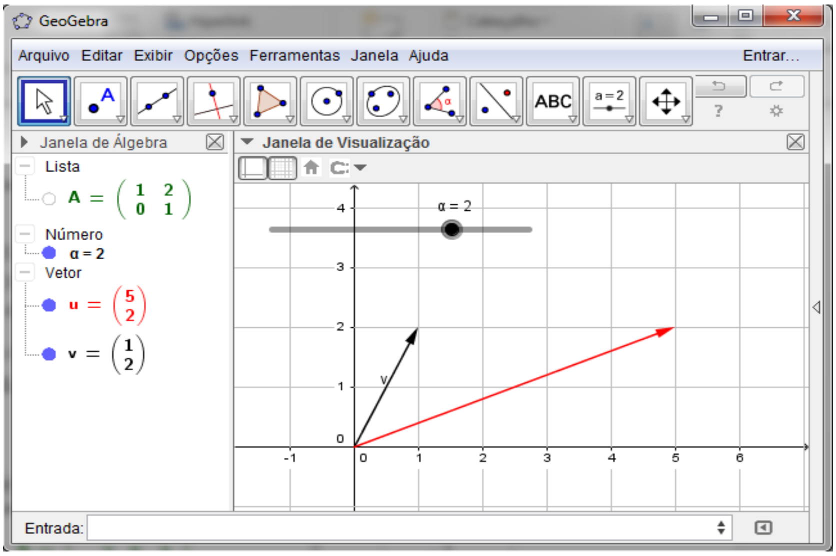


Figura 23: Cisalhamento horizontal do vetor v = (1,2)

2.3 Seja o operador linear $T:R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T(v)=\alpha \cdot v$. Determinemos as transformações geométricas de **rotação** do vetor *v = (1,2)* no software geogebra .

Digite o vetor *v* na *Entrada de Comando* e em seguida defina um controle deslizante θ (*ícone F11*), selecionando ângulo, use o intervalo de 0 a 360° e o incremento 1°, Figura 24.

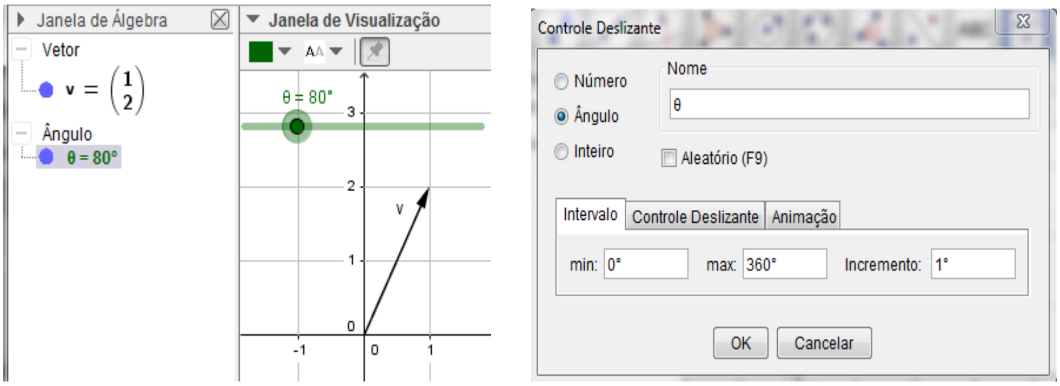


Figura 24: vetor v = (1,2) com controle deslizante θ

Insira a matriz $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ na *Entrada de Comando* e em seguida o vetor *w = A*v*, destaque o vetor *w* em vermelho. Selecione θ = 90°, Figura 25.

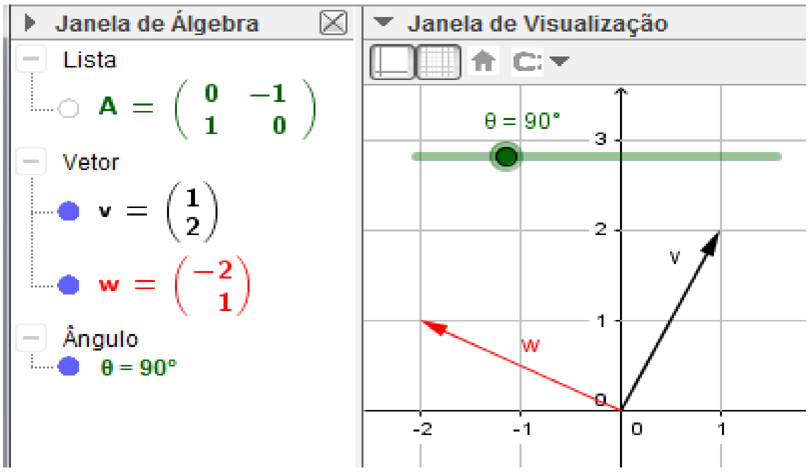


Figura 25: Rotação do vetor v = (1,2) em 90^o

Veja a variação de θ deslizando o controle deslizante, analisando a rotação do vetor *v* para cada ângulo θ.

Atividade 3. Nesta atividade mostraremos geometricamente a origem da multiplicação com matrizes realizando duas transformações em sequência. Como ilustrado no esquema.

$$(x, y) \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} (x', y') \xrightarrow{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}} (x'', y'')$$

Insira o vetor *v = (1,2)* na *Entrada de Comando*, em seguida a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Determine a transformação de *v* dado por *u = A*v*, em propriedade selecione o vetor *u* na cor azul, Figura 26.

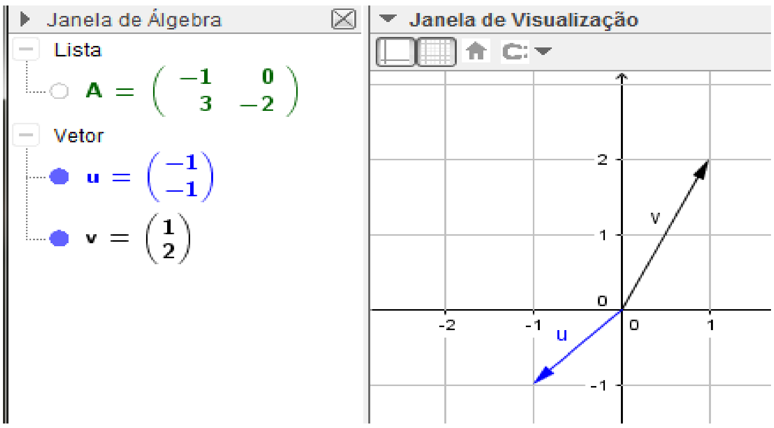


Figura 26: Translação do vetor v = (1,2)

Agora insira a matriz $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ e determine a transformação de *u* dado por *w* = *B*u*, selecione o vetor *w* em *Estilo* escolhendo espessura 9 e estilo tracejado, Figura 27.

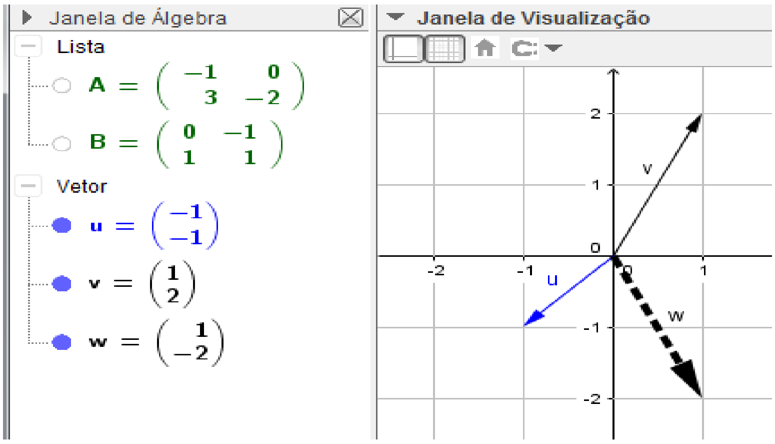


Figura 27: Transformação composta (multiplicação de matrizes)

Nesse momento o professor pode abrir uma discussão pedindo aos alunos que busquem outra forma de obter o vetor *w*. Observe que o vetor *w* pode ser determinado pelo produto do produto das matrizes A e B e o vetor *v*, ou seja, *w = (A*B) *v*.

Insira na *Entrada de Comando* a matriz C = B * A. Obtenha o vetor *e*, digitando na *Entrada de Comando e = C*v*; escolha para o vetor *e*, espessura 7 e opacidade 75, Figura 28.

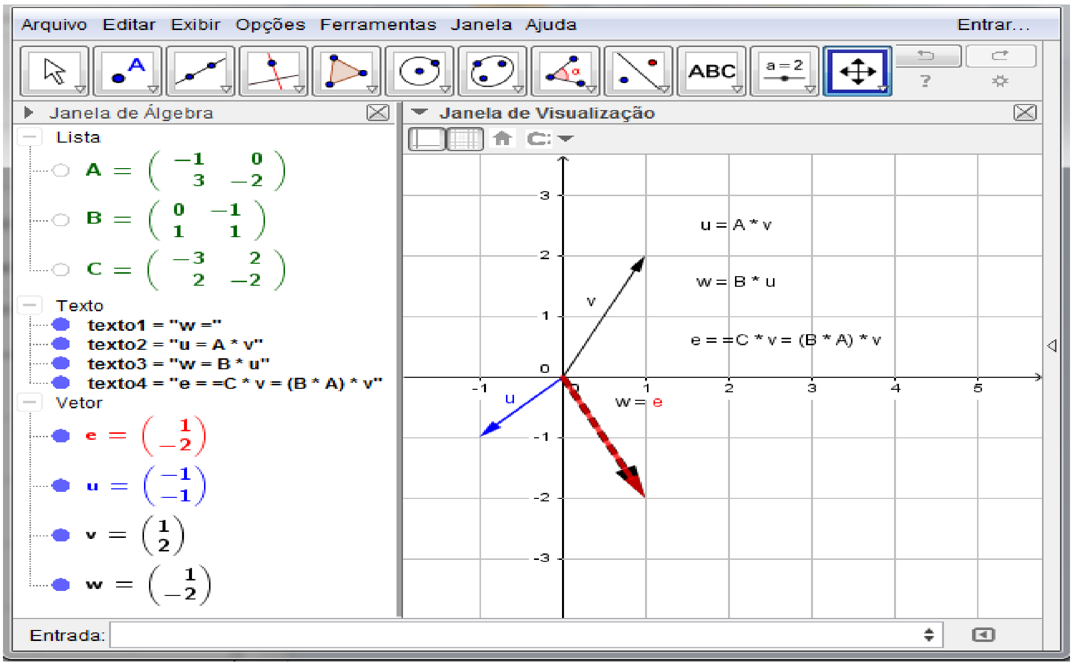


Figura 28: Multiplicação de matrizes

Observe que o vetor *w* é igual ao vetor *e*, ou seja, uma transformação composta determina a multiplicação de duas matrizes. Os textos 1, 2, 3 e 4 são inseridos selecionando a ferramenta *F10*: texto.

Atividade 4. Nesta atividade ilustraremos aplicações de matrizes nas transformações em um polígono qualquer.

4.1 Transformação por **escalar** e **cisalhamento** no polígono ABCD.

Iniciamos inserindo quatro seletores ***a***, ***b***, ***c*** e ***d*** utilizando a *F11*: *controle deslizante*, escolha variação de -5 a 5 e incremento 1. Crie a matriz M = {{a, b}, {c, d}}, arraste-a da janela algébrica para janela de visualização, Figura 29.

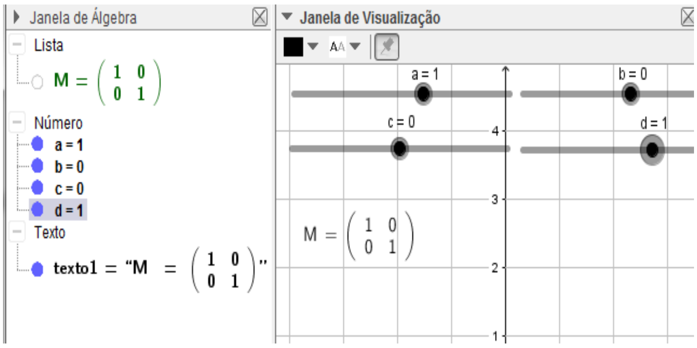


Figura 29: Matriz M com controle deslizante a, b, c e d

Insira os pontos A = (0,0), B = (3,0), C = (3,2) e D = (0,2), digitando-os na *Entrada de Comando* um por vez e apertando *Enter*. Em seguida crie o polígono ABCD (pol1) selecionando a ferramenta *F4*: polígono, clique nos quatro pontos A, B, C, D que aparecem na *Janela de Visualização* formando o polígono. Selecione os lados do polígono e clique em *Exibir Rótulo*, Figura 30.

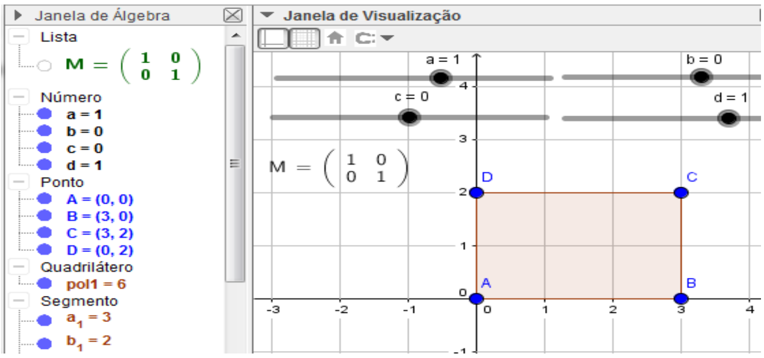


Figura 30: Polígono ABCD

Determine os pontos A’, B’, C’ e D’ multiplicando, respectivamente, a matriz M pelos pontos A, B, C e D. Nesse caso os pontos A, B, C e D serão considerados como vetores, Figura 31.

Crie o polígono de vértices A’, B’, C’ e D’ digitando na *Entrada de Comando*, Polígono [A’, B’, C’, D’] em seguida aperte *Enter*. Selecione os lados do polígono A’B’C’D’ (pol2) e clique em *Exibir Rótulo*. Mude a cor do polígono A’B’C’D’ (pol2) para azul.

Movimente os seletores alterando os valores da matriz dinâmica, observando as transformações do polígono ABCD, Figuras 31, 32, 33 e 34.

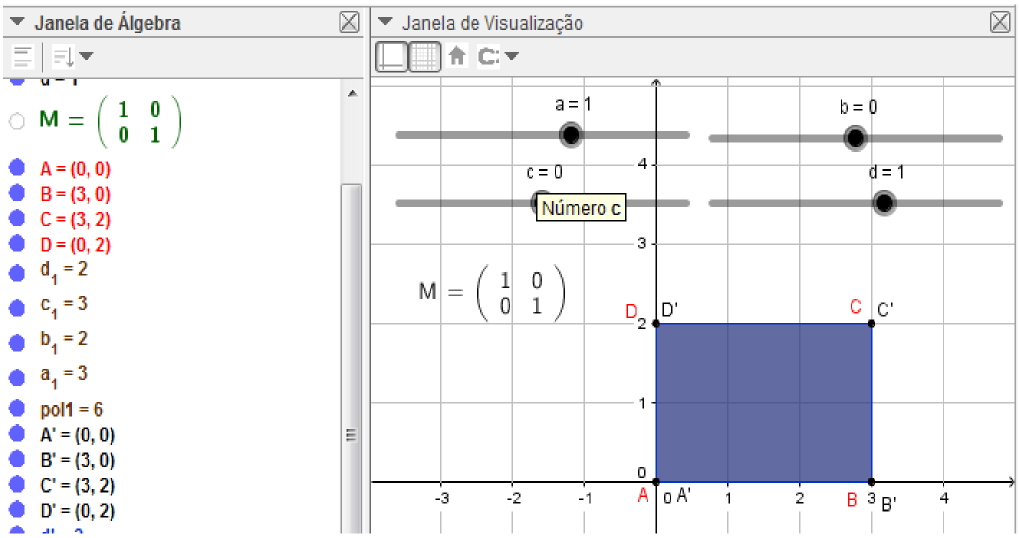


Figura 31: Transformação no polígono A’B’C’D’

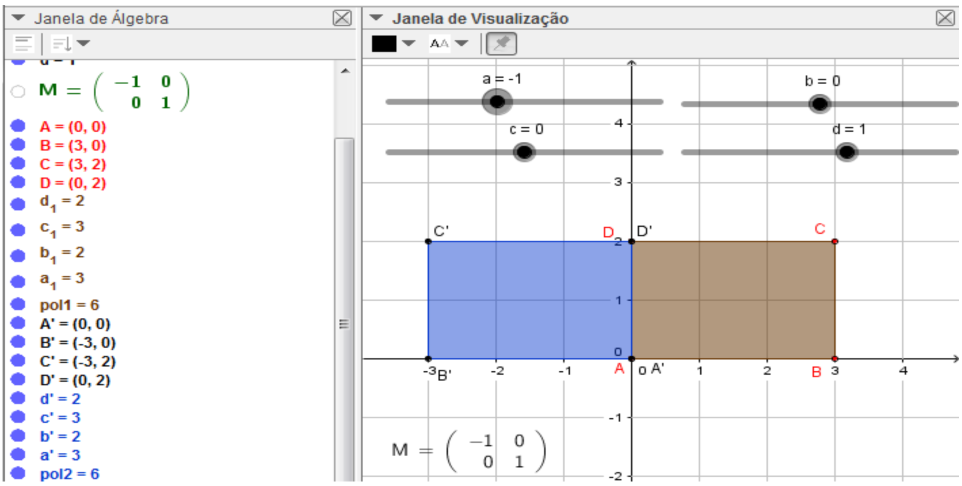


Figura 32: Transformação por escala

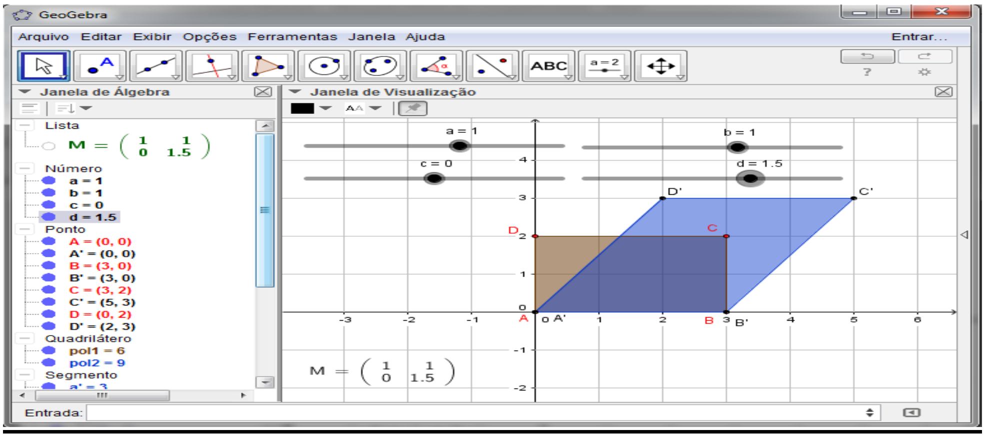


Figura 33: Cisalhamento do polígono ABCD

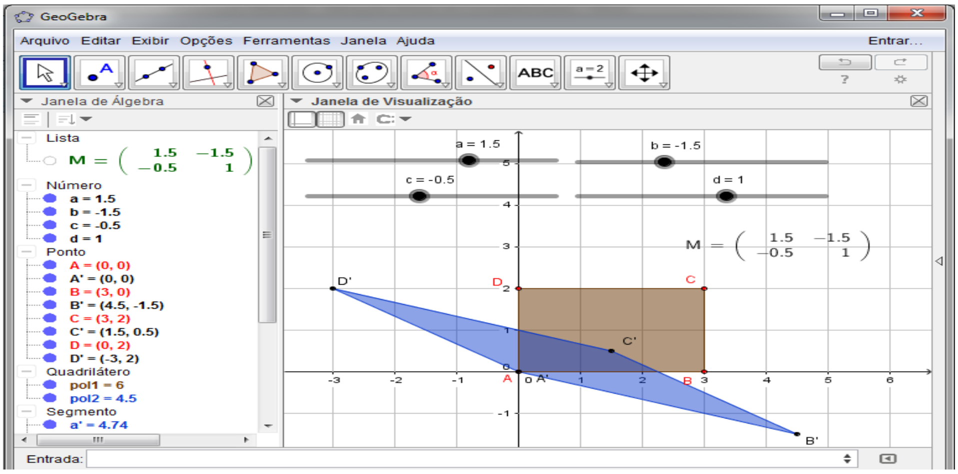


Figura 34: Transformações do polígono ABCD

Observe que na Atividade 4.1, há uma transformação simultânea dos vetores definidos pelos os pontos A, B, C e D quando multiplicados pela matriz M, fazendo com que o polígono ABCD se deforme com as transformações dos vetores. Neste caso, o professor pode pedir aos alunos que localizem os pontos A', B', C' e D' a partir da matriz M, explorando novamente as multiplicações de matrizes.

4.2 Transformação de **rotação** do polígono ABCD

Para verificarmos as transformações de rotação do polígono ABCD, crie um seletor α (Ferramenta F11: *controle deslizante*), selecione ângulo com intervalo: 0 a 360^o e incremento: 30^o. Em seguida insira a matriz rotação R = {{cos (α), - sin (α)}, {sin (α), cos (α)}}, arraste-a para a janela de visualização. Crie o polígono (pol1) de vértices A = (0,0), B = (3,0), C = (3,2) e D = (0,2), determinando em seguida os pontos A', B', C' e D' multiplicando, respectivamente, a matriz R pelos pontos A, B, C e D.

Na *Entrada de Comando* digite *Polígono [A', B', C', D']* criando, assim, o polígono 2 (*pol2*); selecione-o e defina cor azul. Selecione *pol2* e clique em *Habilitar Rastro*.

Movimente o seletor alterando os valores da matriz dinâmica, observando as transformações do polígono ABCD, Figura 35.

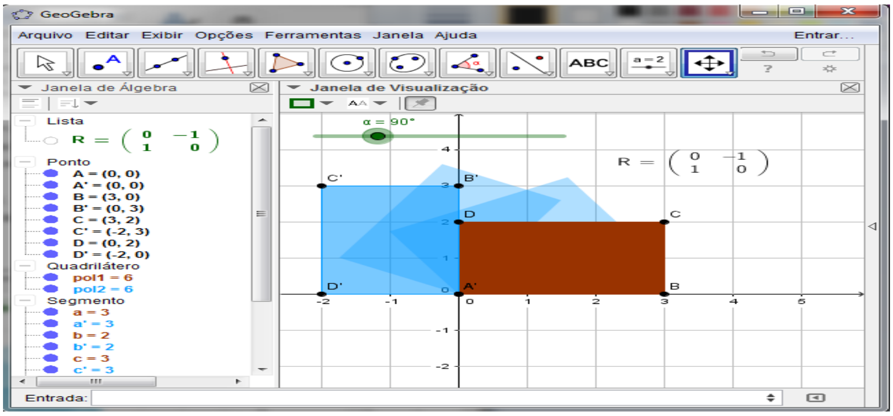


Figura 35: Rotação de 90^{o} do polígono ABCD

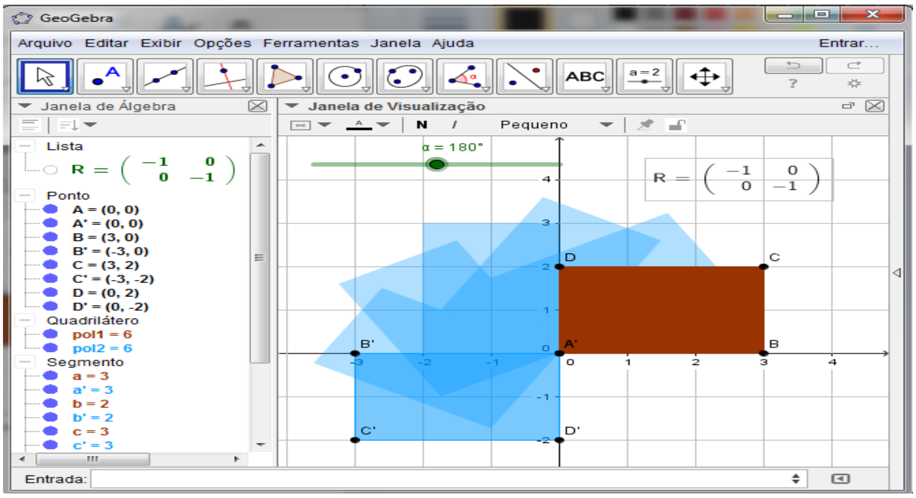


Figura 36: Rotação de 180^{o} do polígono ABCD

Observe que, quando multiplicamos a matriz transformação R por cada ponto do polígono ABCD, como os pontos são tratados como vetores, estes rotacionam α graus, fazendo o polígono ABCD rotacionar α graus, Figura 36.

Atividade 5. Construção do Haberdasher's Puzzle em geometria dinâmica.

Existem diversos quebra-cabeças matemáticos que podem ser usados explorando as transformações geométricas (translação, rotação, entre outras) na sua construção, utilizando ambientes da geometria dinâmica.

Nesta atividade, apresentaremos uma proposta de uso do GeoGebra para explorar a construção dinâmica de um quebra-cabeças geométrico criado por *Henry Dudeney*[3] em 1902: o *Haberdasher's Puzzle*. O quebra-cabeça consiste em realizar diversos cortes retilíneos em um triângulo equilátero para montar um retângulo com os pedaços recortados, Figura 37.

[foto:http://es.wikipedia.org/wiki/Henry Dudeney]

Figura 37: Ilustração do Haberdasher's Puzzle

No *Haberdasher's Puzzle*, para a montagem do retângulo é necessário obter pedaços com quatro ângulos retos para os quais são suficientes três cortes retilíneos. Esses cortes dividem o triângulo equilátero em três pedaços quadrangulares e um pedaço triangular.
A seguir apresentaremos um tutorial para construção do *Haberdasher's Puzzle* no *software GeoGebra*.

1. Crie os pontos A = (0,0) e B = (6,0).
2. Insira a matriz rotação R = {{cos (60º), -sin(60º)},{sin(60º), cos(60º)}}.

Observação: o símbolo º da unidade de graus deve ser selecionado na caixa de escolha logo ao lado do campo de *Entrada*.

3. Defina o ponto C = R*B.
4. Crie o segmento a = Segmento [B, C].
5. Crie o segmento b = Segmento [A, C].
6. Crie o segmento c = Segmento [A, B].

Observação: desabilitar a exibição dos rótulos dos segmentos a, b e c.

7. Defina o ponto médio D = PontoMédio [B, C].
8. Defina o ponto médio E = PontoMédio [A, C].
9. Defina o ponto F = Ponto [Segmento [A, PontoMédio [A, B]]].

Observação: provavelmente o ponto F será criado sobre o ponto A, movimente-o para próximo do vértice A.

[3] Henry Ernest Dudeney (1857 - 1930) foi um matemático inglês autor de diversos jogos e quebra-cabeças matemáticos.

10. Crie o ponto G = F + Vetor [A, B]/2.

11. Digite corte1 = Segmento [F, D] na *Entrada de Comando* e desabilite exibição de rótulo.

12. Defina o ponto H = Interseção [corte1, Perpendicular [G, corte1]]].

13. Crie o corte2 = Segmento [G, H] e desabilite *Exibir Rótulo.*

14. Defina o ponto I = Interseção [corte1, Perpendicular [E, corte1]]].

15. Crie o corte3 = Segmento [E, I] e clique em desabilitar exibição de rótulo.

16. Defina o pedaço1 = Polígono [C, D, I, E], renomear seus lados de c_1, c_2, c_3 e c_4 e em seguida selecione em propriedade cor: Vermelho.

17. Modifique as propriedades/estilo das linhas c_1, c_2, c_3 e c_4 para pontilhado e desmarque *Exibir Rótulo*.

18. Defina o pedaço2 = Polígono [B, D, H, G], denominando seus lados de d_1, d_2, d_3 e d_4 e em seguida selecione em propriedade cor: Azul.

19. Modifique as propriedades/estilo das linhas d_1, d_2, d_3 e d_4 para pontilhado e desmarque *Exibir Rótulo*.

20. Construa um seletor de ângulo α, ferramenta *F11: Controle deslizante*, variando de 0^o a 180^o.

21. Selecionando o *pedaço2,* defina propriedade, *Avançado: condição para exibir objeto*, para $\alpha = 0^o$.

Dica: o símbolo de graus não pode ser digitado pelo teclado, deve ser selecionado na janela de símbolos no canto direito, Figura 38.

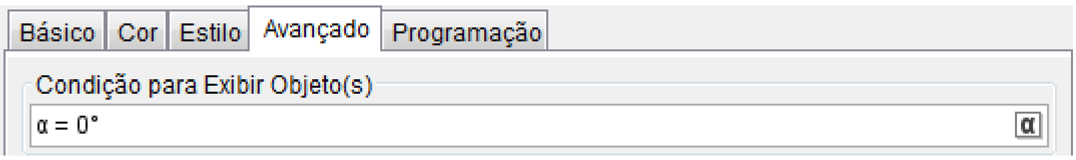


Figura 38: Condição para exibir objeto

22. Defina o pedaço3 = Polígono [A, E, I, F], denominando seus lados de e_1, e_2, e_3 e e_4 e em seguida selecione em propriedade cor: Verde.

23. Modifique as propriedades/estilo das linhas e_1, e_2, e_3 e e_4 para pontilhado e desmarque *Exibir Rótulo*.

24. Selecionando o *pedaço3,* defina propriedade, *Avançado: condição para exibir objeto*, para $\alpha = 0^o$.

25. Defina o *pedaço4* = Polígono [F, G, H], denominando seus lados de f_1, f_2, f_3 e f_4 e em seguida selecione em propriedade cor: Amarelo.

26. Modifique as propriedades/estilo das linhas f_1, f_2, f_3 e f_4 para pontilhado e desmarque *Exibir Rótulo*.

27. Selecionando o *pedaço4,* defina propriedade, *Avançado: condição para exibir objeto*, para $\alpha < 180^o$.

28. Na ferramenta *F8: Ângulo com amplitude fixa* será criado um ponto fixo D de modo que *pedaço2* gire em função do ângulo correspondente do seletor α. Clique no B e em seguida no ponto D, que será o centro e então defina o ângulo α escolhendo a opção sentido anti-horário e dê OK. Será criado um novo ponto B'.

Faça o mesmo com os pontos G e H criando os pontos G' e H'.

29. Construa o polígono dos pontos D, B', G' e H'. Denomine-o de *pedaço5* e seus seguimentos de g_1, g_2, g_3 e g_4 selecionando sua cor em Azul. Defina propriedade *Avançado: condição para exibir objeto*, para $\alpha = 180^o$.

30. Na ferramenta *F8: Ângulo com amplitude fixa* será criado um ponto fixo E de modo que *pedaço3* gire em função do ângulo correspondente do seletor α. Clique no ponto A e em seguida no ponto D, que será o centro e então defina o ângulo α escolhendo a opção sentido horário e dê OK. Será criado um novo ponto A'.

Faça o mesmo com os pontos F e I criando os pontos F' e I'.

31. Construa o polígono dos pontos A', E, I' e F'. Denomine-o de *pedaço6* e seus seguimentos de h_1, h_2, h_3 e h_4 selecionando sua cor em *verde*. Defina propriedade *Avançado: condição para exibir objeto*, para $\alpha = 180^o$.

32. Digite na *Entrada de Comando*: *pedaço7* = Transladar[Transladar[Polígono[F, G, H], Vetor[F, C]], Vetor[F, A]] e aperte *Enter*. Defina-o cor amarelo.

33. Selecionando o *pedaço7,* defina propriedade, *Avançado: condição para exibir objeto*, para $\alpha = 180^o$.

34. Selecione para não *Exibir Rótulo* de todos os objetos, deixando apenas os rótulos dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H.

35. Esconda os segmentos a, b, c, corte1, corte2 e corte3.

36. Movendo o seletor α, o triângulo ABC (Figura 39) se transforma em retângulo (Figura 40).

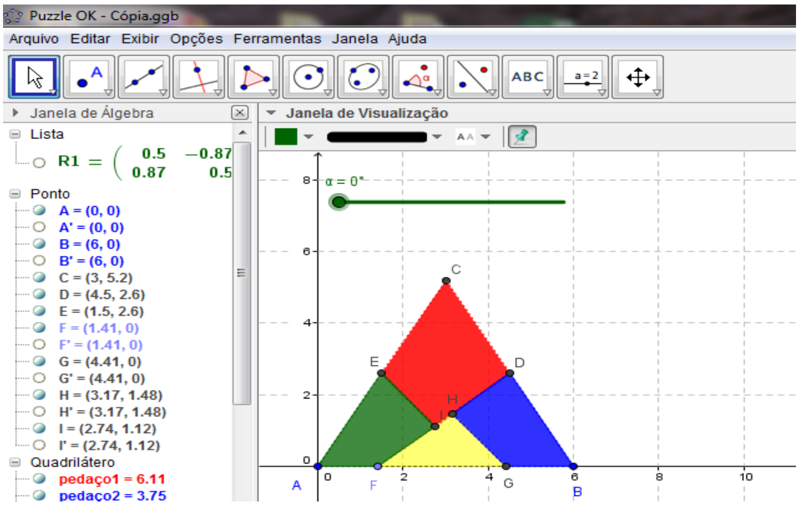


Figura 39: Triângulo equilátero

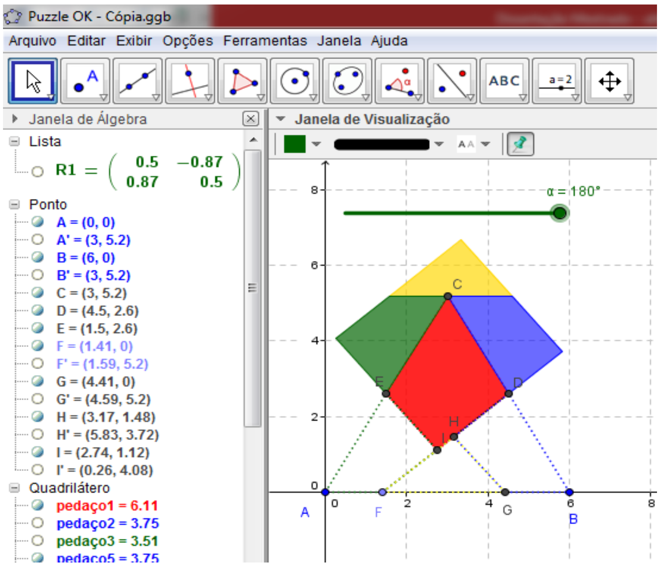


Figura 40: Haberdasher’s Puzzle

Na atividade 5 ilustramos várias transformações, rotação e translação, para girar os pedaços para transformar o triângulo equilátero em um quadrilátero retângulo, pois os ângulos retos que estavam escondidos dentro do triângulo se tornaram os ângulos retos do retângulo. Dependendo da posição do ponto F o retângulo será um quadrado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho mostra algumas aplicações de matrizes, valorizando o ensino aprendizagem através da utilização do *software* geogebra buscando promover aos alunos aulas investigativas, participativas, desenvolvendo um raciocínio crítico. Mostrando um novo paradigma no ensino de matrizes, em que o aluno deixa de ser mero receptor de conhecimentos e se torna um agente ativo no processo, atuando na construção de seu conhecimento.

A utilização da informática no ambiente de aprendizagem leva o aluno a descobrir novos caminhos no ensino aprendizagem e estabelece uma relação com as TICs e a educação, pois, os mesmos, detêm um conhecimento nato, no que diz respeito à informática, sem perceber o poder de controle que têm nas mãos diante do processo de aprendizagem.

Certamente iniciativas que auxilia a aprendizagem de matemática é de suma importância, uma vez que grande parte dos jovens têm aprendizagem inadequada para com a mesma. E a utilização do software geogebra nas aulas de matemática vem propiciar ao aluno um desenvolvimento da aprendizagem de forma atrativa e motivadora.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, M. O. H. **O uso de Transformações Geométricas em temas do Ensino Médio**. Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/299/2011_ MAURICIO_DE_OLIVEIRA_HORTA_BARBOSA.pdf?sequence=1. Acessado no dia 13/11/2015.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M.G. **Informática e Educação Matemática** – 2. Ed. Belo Horizonte – Autêntica, 2001.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**. Brasília, MEC – DF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. (1997) **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - Ensino de 1a a 4a série**. Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. LDB (1996). Lei n. 9394 de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília. DF, 24 de dez. 1996. Disponível em: <https: //portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/tvescola/leis/lein9394.pdf>. Acessado no dia 13/11/2015.

CORRADI, D. K. S. **Investigações Matemáticas**. Revista da Educação Matemática da UFOP. v. 1, 2011. Disponível em: http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/ article/ viewFile/346/303. Acessado no dia 13/112015.

De Olho nas Metas, **Apenas 10% dos alunos aprendem o ideal em matemática no ensino médio.** Disponível em: http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/03/apenas-10-dos-alunos-aprendem-o-ideal-em-matematica-no-ensino-medio.html. Acessado no dia 27/10/2015.

De Olho nas Metas. Disponível em: http://www.todospelaeducacao.org.br/ arquivos/ biblioteca/de_olho_nas_metas_2013_141.pdf Acessado no dia 6/11/2015.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Higyno H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

GADOTTI, Moacir, ***História das Ideias Pedagógicas***. São Paulo – SP. Editora Ática, 1993. Série Educação.

KILHIAN, Kleber (2010)**. Cayley e a Teoria das Matrizes**. Disponível em: http://obdm2.blogspot.com.br/2014/10/281110.html. Acessado no dia 26/09/2015.

KUNZ, Elenor. **Educação Física: ensino e mudanças**. 2º ed. Ijuí: Unijuí, 2001.

LAUTÉRIO, A. Q.; NEHNING, C. M. **Reestruturação do Currículo Escolar: A Trajetória do Ensino Médio e o Conceito de Contextualização**. Disponível em: http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/viewFile/561/117. Acessado no dia 26/09/2015.

LEVY, P. **Cibercultura**. Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Ed.34, 1999, 264p. (Coleção TRANS). Disponível em: http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20 Ensinodematematica/_artigo17.pdf. Acessado no dia 10/11/2015.

LIMA, Elon Lages (Ed.) **Exame de Textos**: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

MISKULIN, R. G. S. **As possibilidades didático-pedagógicas de Ambientes Computacionais na Formação Colaborativa de Professores de Matemática**. In: FIORENTINI, D. (Org). Formação de Professores de Matemática. Campinas, SP: Ed. Mercado de Letras, 2003.

MORAES, Maria Cândida de. **O paradigma educacional emergente**. Tese de doutorado - PUC/SP, 1996.

NERI, Marcelo. **Motivo da Evasão Escolar.** Disponível em: http://www.institutounibanco. org.br/wpcontent/uploads/2013/07/motivos_da_evasao_escolar.pdf. Acessado no dia 13/11/2015.

PCNEM 2000. **Parâmetro Curriculares Nacionais Ensino Médio**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf. Acessado no dia 7/11/2015.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

ROMERO, Claudia Severino. **Recursos Tecnológicos nas Instituições de Ensino: planejar aulas de matemática utilizando Softwares Educacionais**. UNIMESP – Centro Universitário Metropolitano de São Paulo. Novembro/2006. Disponível em: http://www.fig.br/fignovo /graduacao. Acessado no dia 20/10/2015.

SANTO, Ildalio. **Ensino e Aplicações de Matrizes**. Disponível em http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/834/2011_00610_ILDALIO_AGUIAR_DE_SOUZA_SANTOS.pdf?sequence=1. Acessado no dia 6/11/2015.

SCHMIDT, Alexsandra. **O Uso da Geometria Dinâmica na Transformação de Figuras**. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96621/Alexsandra_Schimidt.PDF?sequence=1. Acessado no dia 13/11/2015.

SILVA, G. H. O **Trabalho Docente com Geometria Dinâmica em uma Perspectiva Investigativa**. Disponível em: http://www.sinect.com.br/anais2009/artigos/10%20EnsinoDematematica/Ensinodematematica_artigo17.pdf. Acessado no dia 10/11/2015.

SILVA, J. Barbosa, **Estudo da Influência de Software Educativo para a Aprendizagem de Matemática, 2009.** Disponível em: http://www.ffb.edu.br/sites/default/files/tcc-20092-josselene-barbosa-da-silva.pdf. Acessado no dia 15/04/2013.

STORMOWSKI, V. **Estudando Matrizes a partir de Transformações Geométricas**. 2008. 157f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/14965/000673105.pdf. Acessado no dia 11/10/2015.

TAROUCO, L.; ROLAND, L., FABRE, M.C.; and KONRATH, M.R. (2004). **Jogos educacionais**. In *Renote Revista Novas Tecnologias na Educação*, n^{o}. 1, vol. 2:1-7. Porto Alegre: UFRGS.

Todos pela Educação. Disponível em: http://www.todospelaeducacao.org.br/educacao-na-midia/indice/4018/novos-rumos-para-a-educacao/. Acessado no dia 13/11/2015.

XAVIER, Regina. **A utilização “construcionista” de computadores buscando o desenvolvimento da cooperação, da autonomia e da autoestima.** 2000. 96f**.** Disponível em: http://www.inf.ufsc.br/~edla/orientacoes/oteroregina.pdf. Acessado no dia 10/11/2015.

ANEXO I

Tutorial do Software Geogebra

Interface do software geogebra, Figura 41.

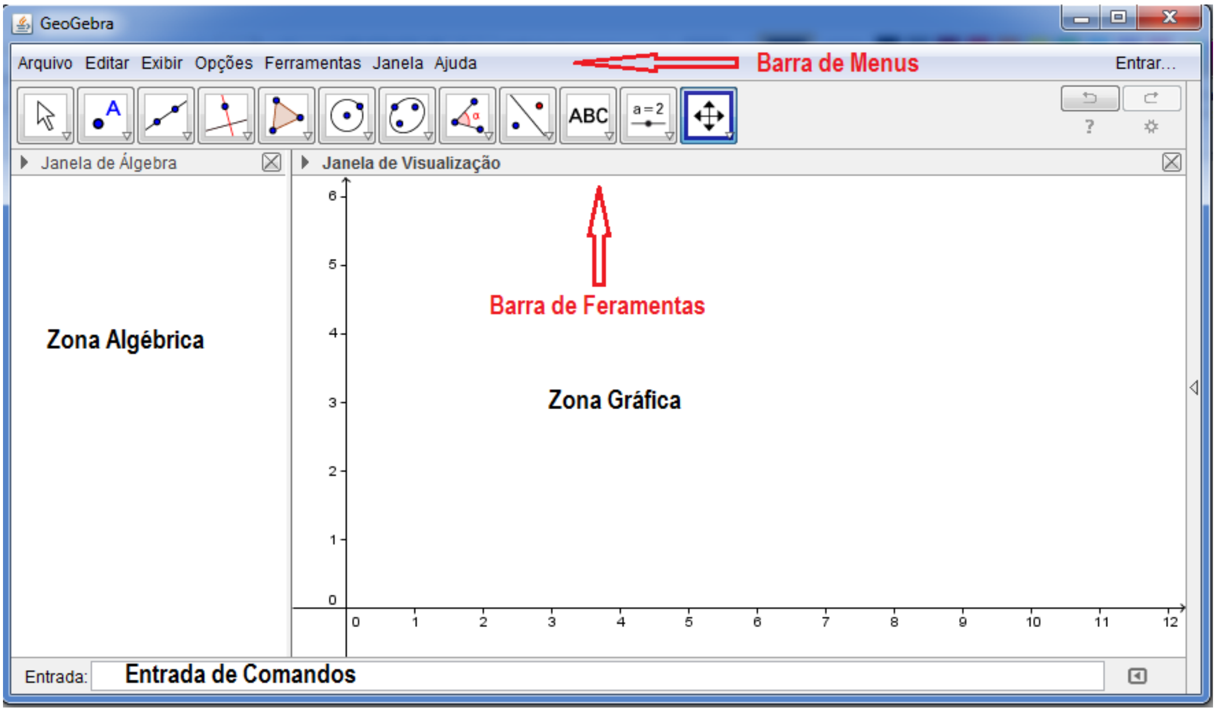


Figura 41: Tela inicial do GeoGebra 5.0.82.0-3D
Disponível em: http://www.geogebra.org/download

Em seguida será mostrada a barra de ferramentas, versão 5.0, a qual é composta de 12 ícones. Para facilitar a visualização denotaremos cada ícone por F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10, F11 e F12. Figura 42 a 54.

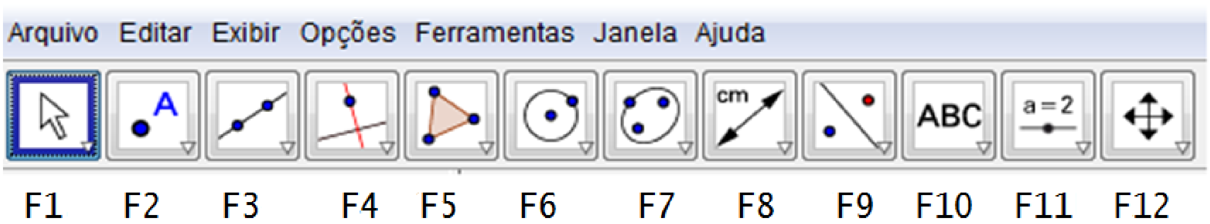


Figura 42: Barra de Ferramentas

Ícone F1

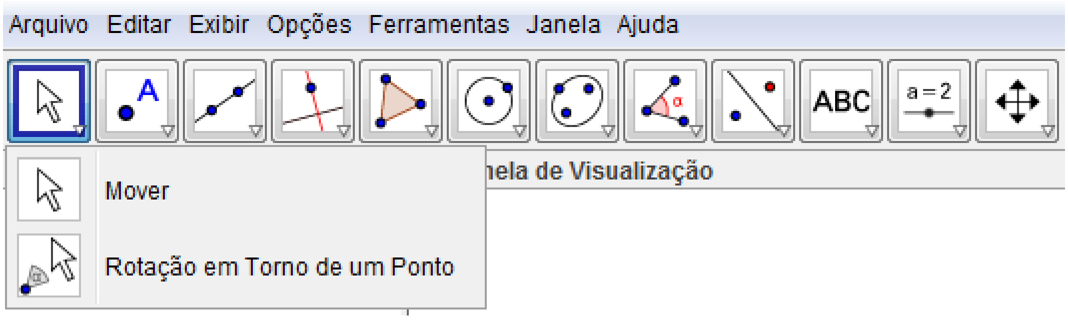


Figura 43: Ícone F1: Mover e rotacionar em torno de um ponto

Ícone F2

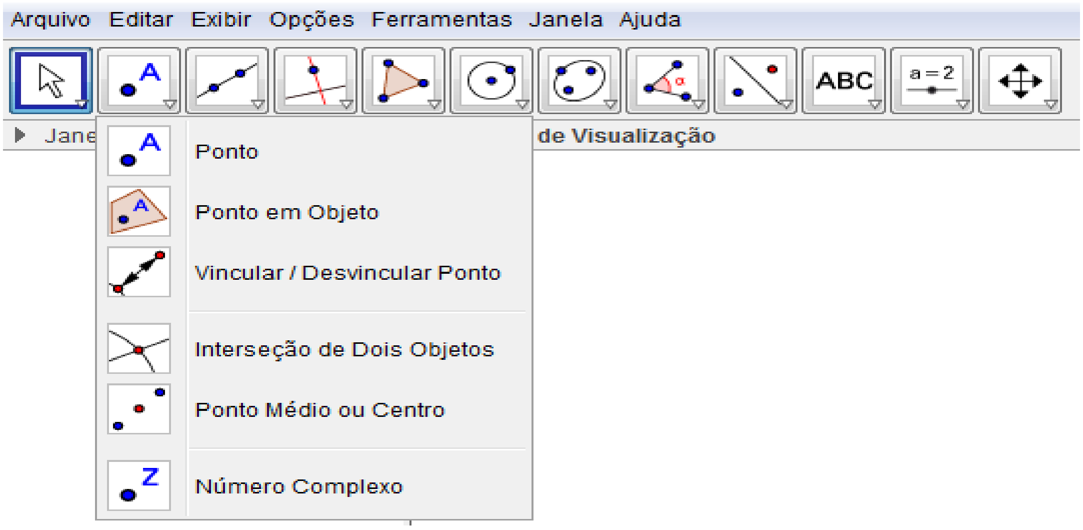


Figura 44: Ícone F2: Ponto, interseção de dois objetos, ponto médio.

Ícone F3

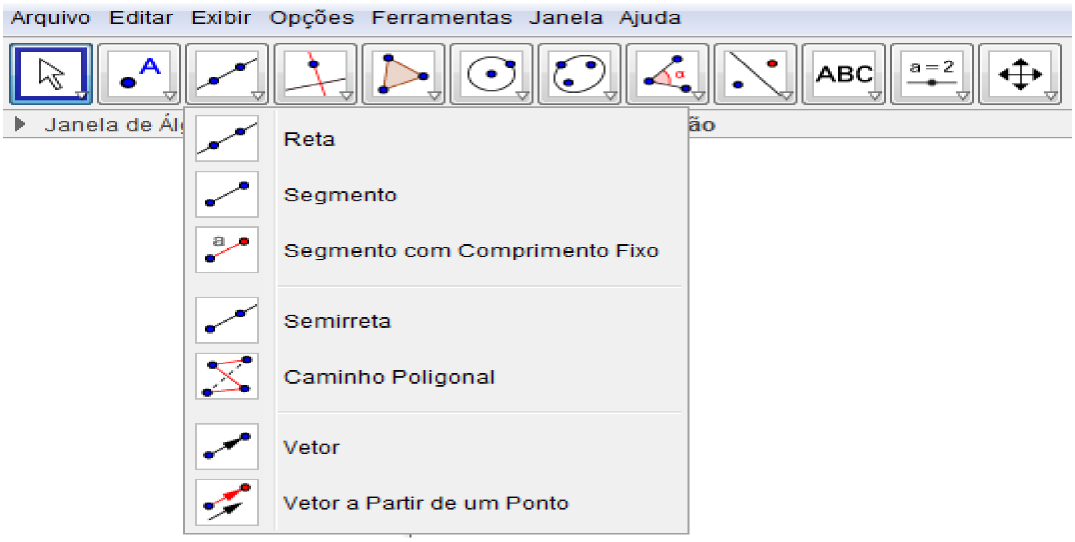


Figura 45: Ícone F3: Reta, segmento, vetor.

Ícone F4

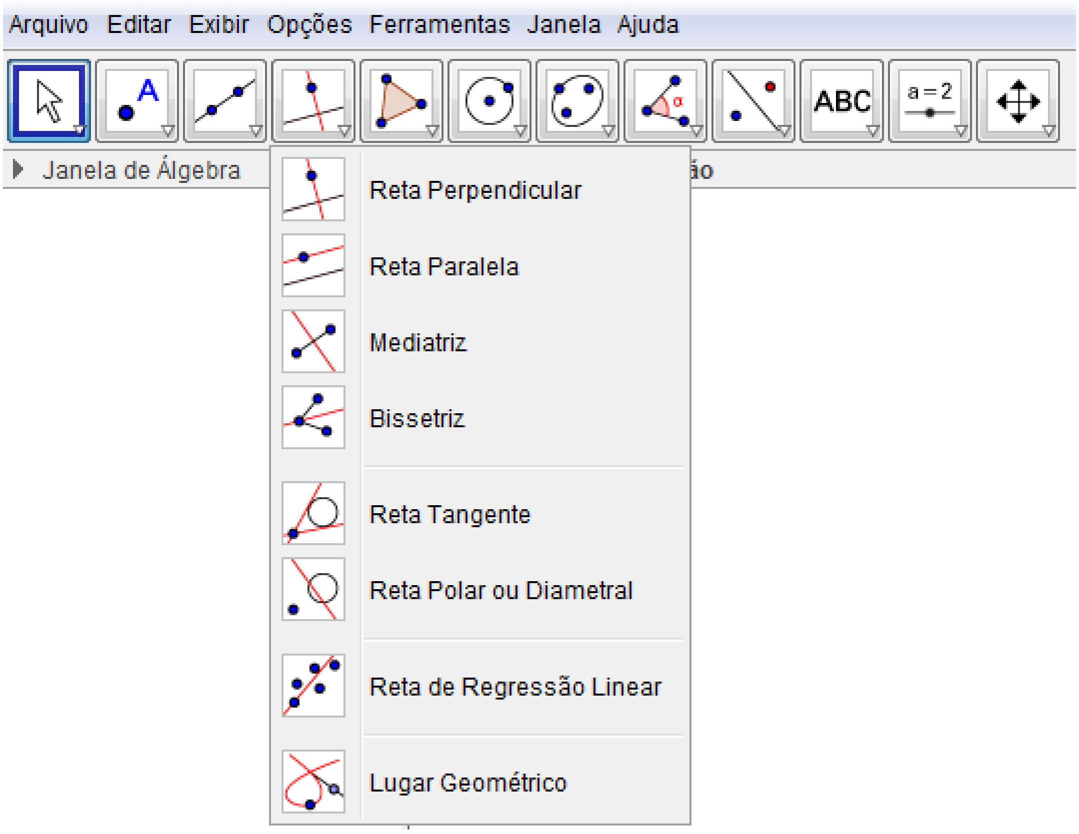


Figura 46: Ícone F4: Reta paralelas, retas concorrentes, bissetriz, mediatriz.

Ícone F5

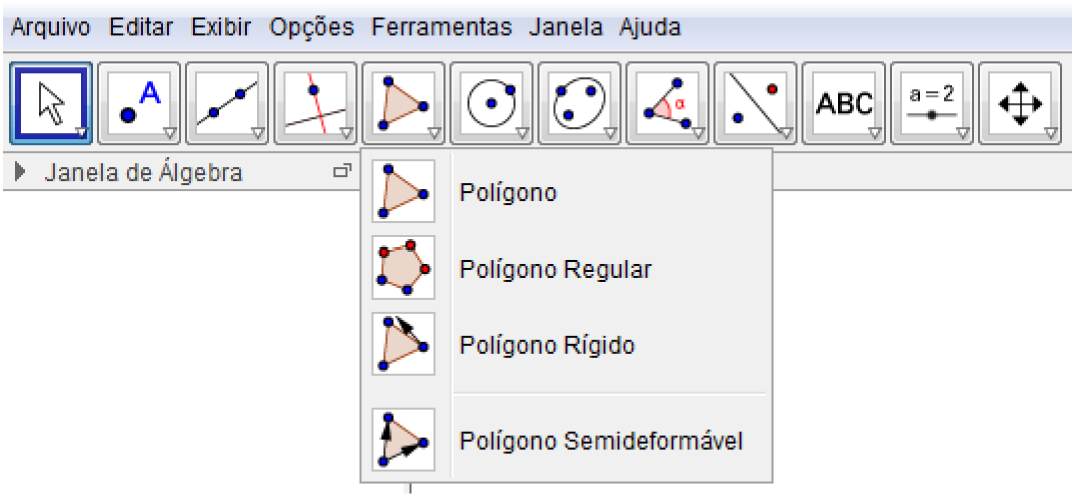


Figura 47: Ícone F5: Polígono, polígono regular.

Ícone F6

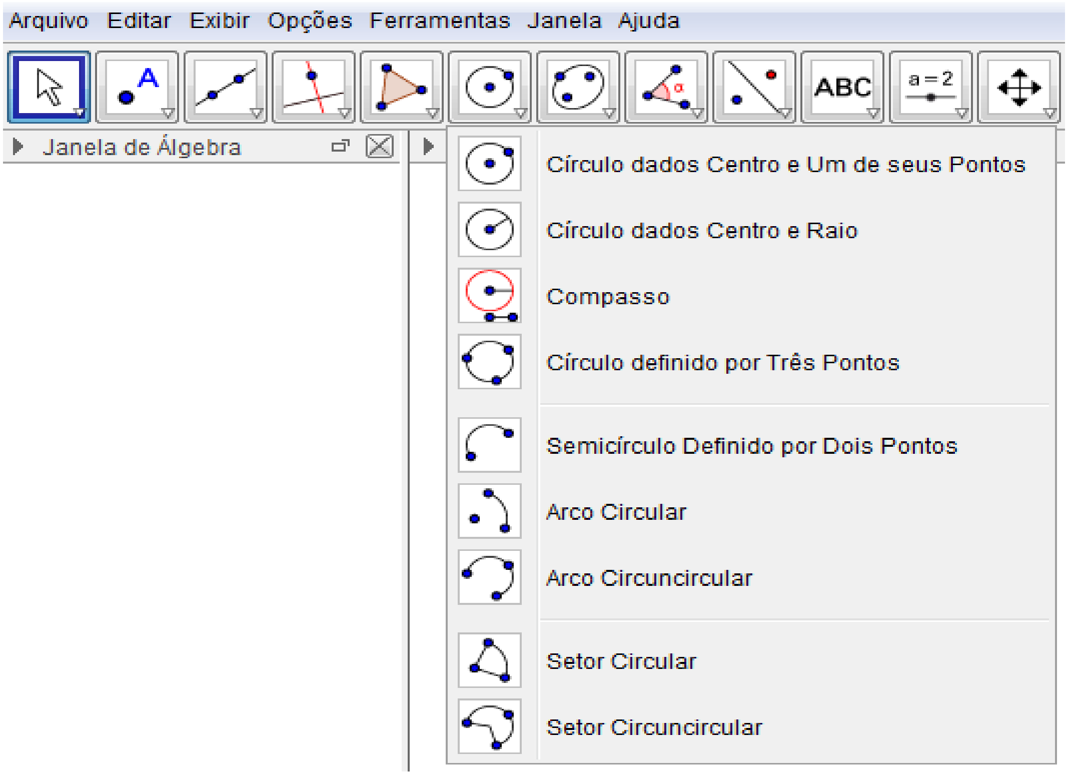


Figura 48: Ícone F6: Círculo, semicírculo.

Ícone F7

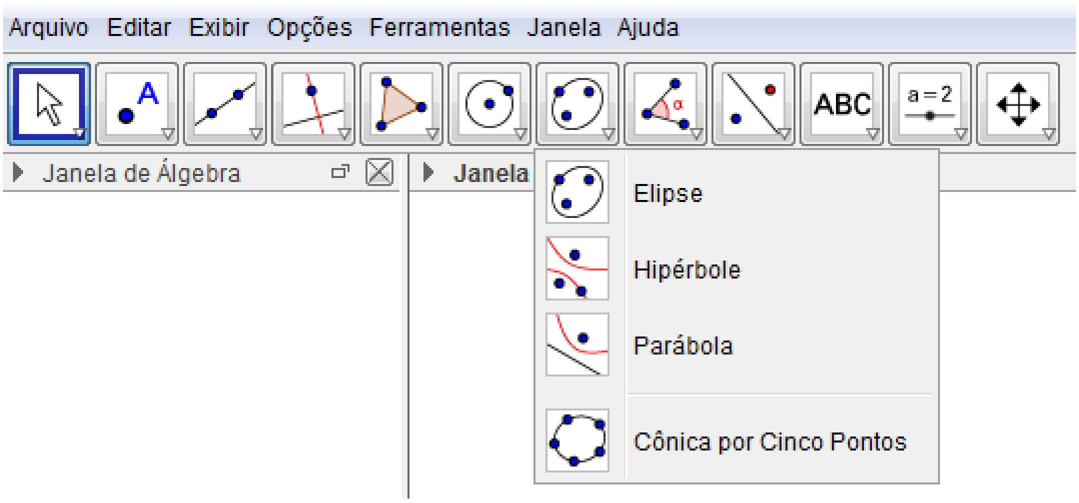


Figura 49: Ícone F7: Elipse, hipérbole, parábola.

<u>Ícone F8</u>

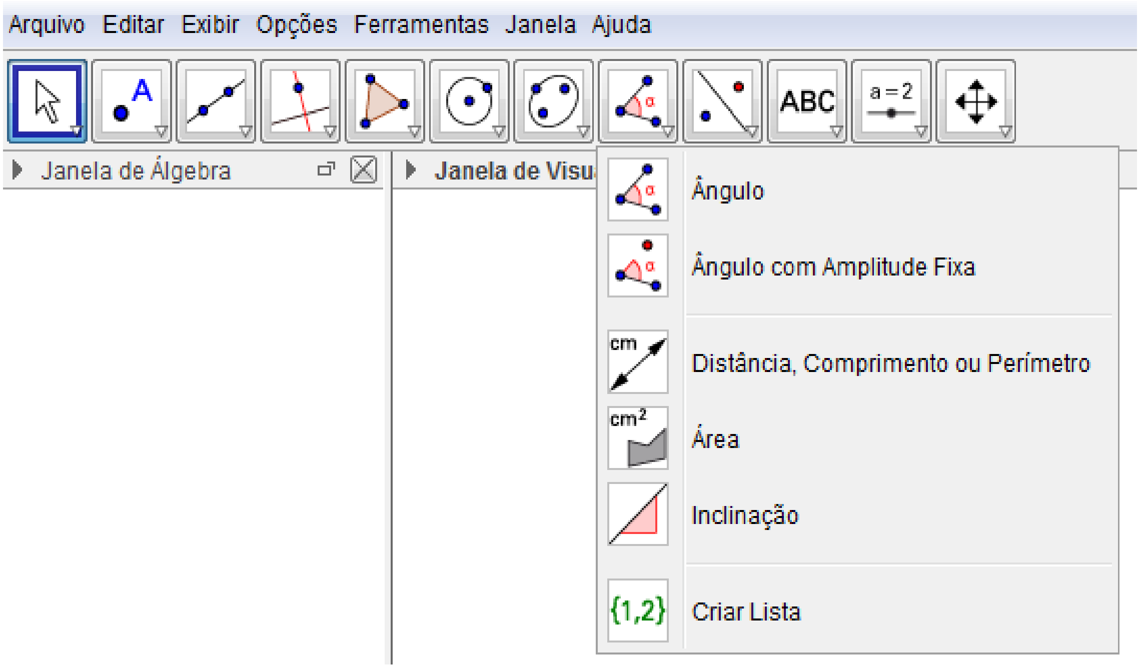


Figura 50: Ícone F8: Ângulo, Ângulo com amplitude, inclinação.

<u>Ícone F9</u>

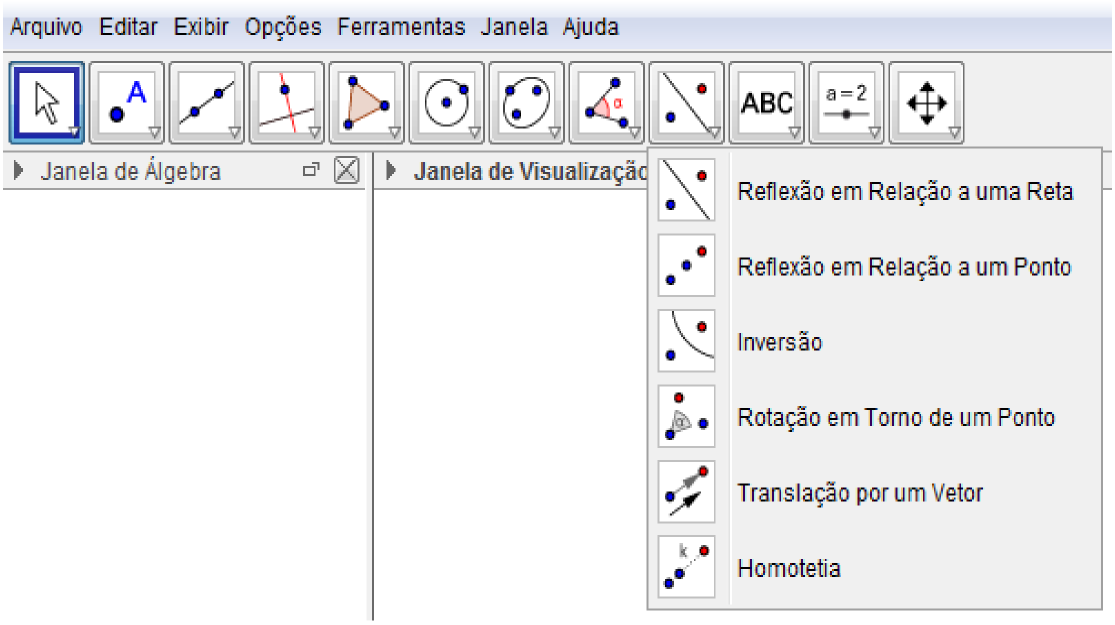


Figura 51: Ícone F9: Reflexão em relação a uma reta, rotação em torno de um ponto.

Ícone F10

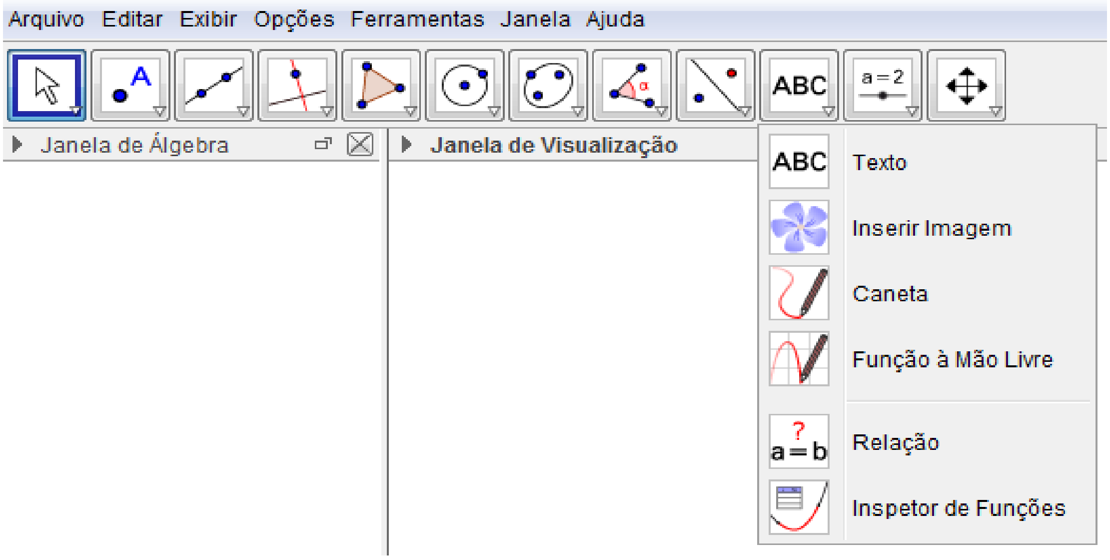


Figura 52: Ícone F10: Texto, caneta, relação.

Ícone F11

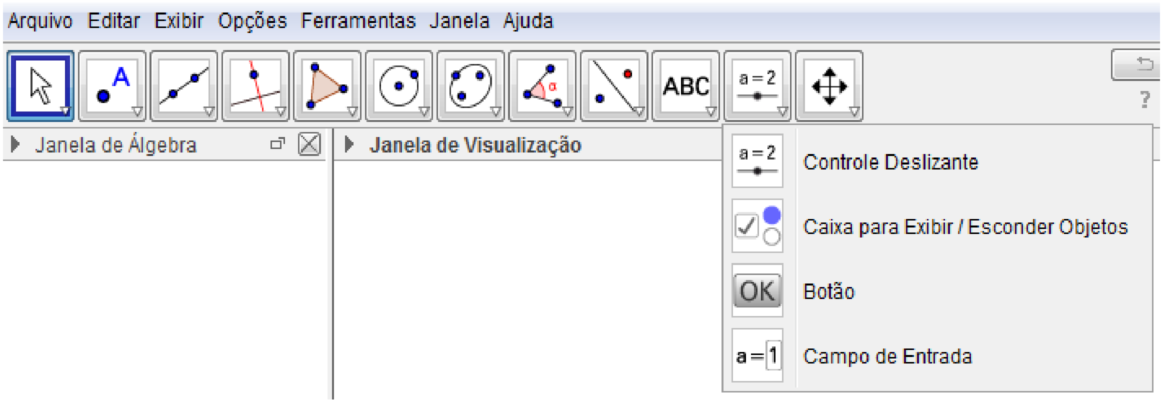


Figura 53: Ícone F11: Controle deslizante, caixa para exibir/esconder objeto.

Ícone F12

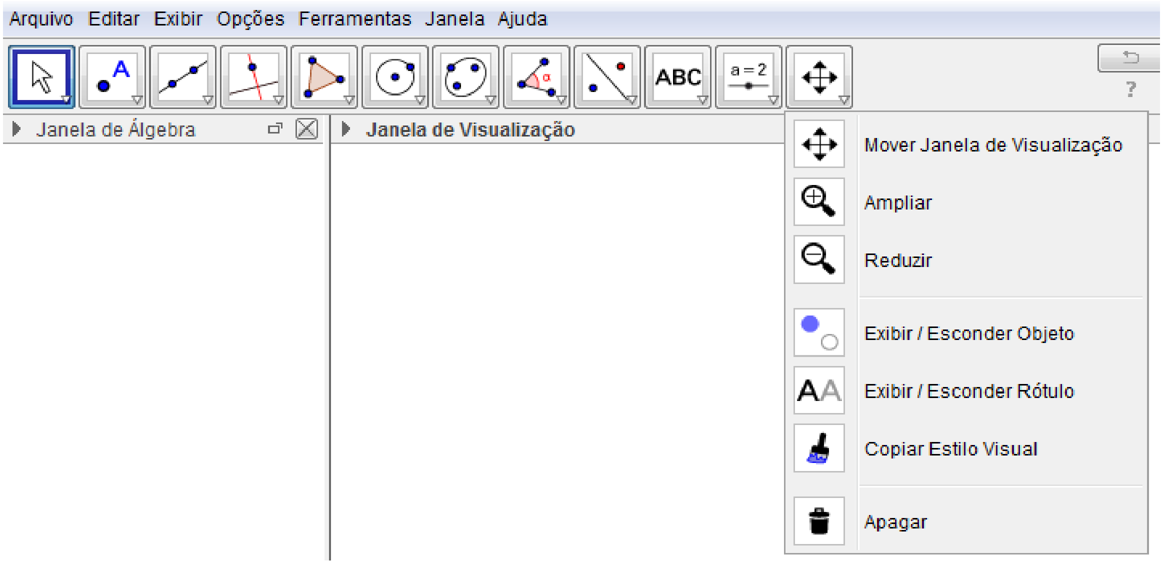


Figura 54: Ícone F12: Mover janela de visualização, ampliar, reduzir.

Propriedades de um objeto

Insira um objeto qualquer (ponto, reta, segmento, vetor, etc.) na janela de visualização do GeoGebra, selecione-o com mouse esquerdo e faça as alterações convenientes, Figura 56 a 57.

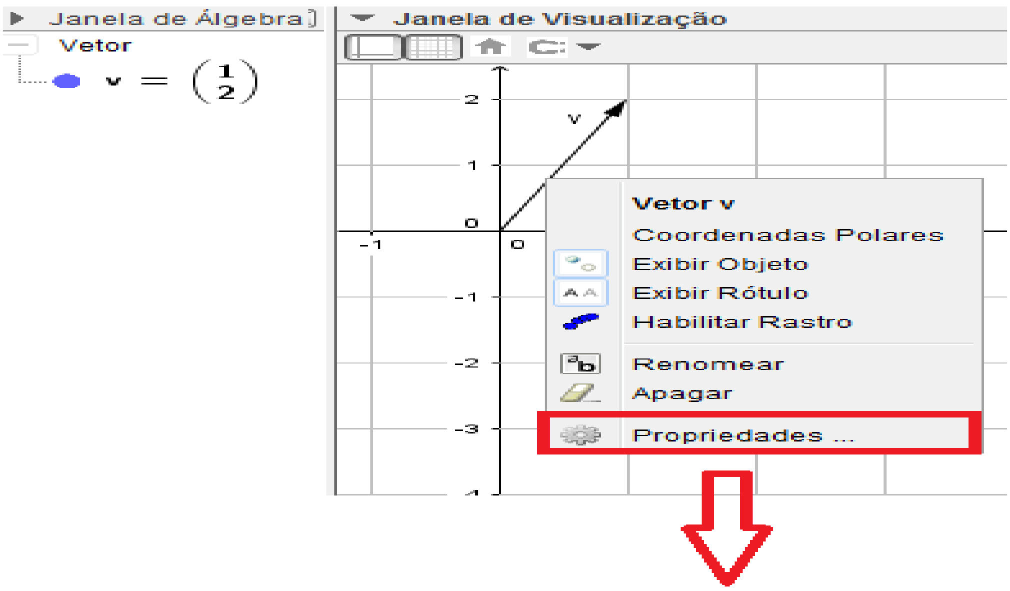


Figura 55: Seleção de um objeto

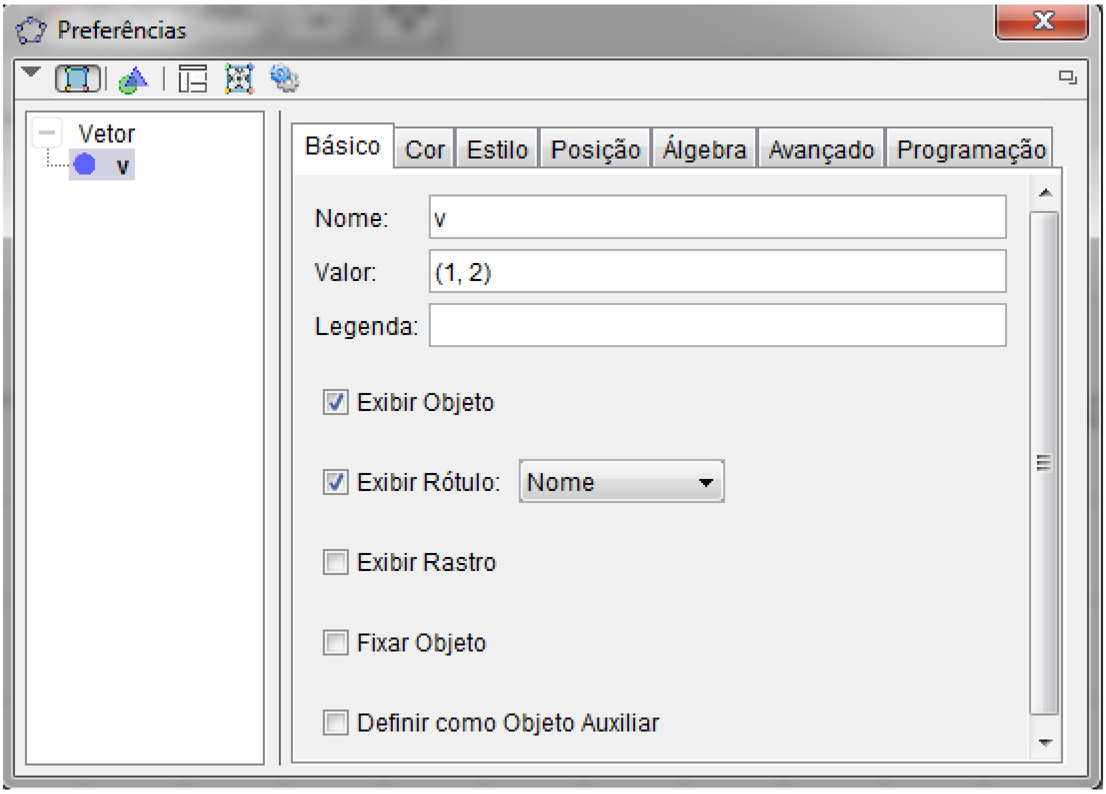


Figura 56: Propriedade de um objeto