SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – SBM
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA – UNIR
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LUIZ ANDERSON DE MORAIS SANTOS

UTILIZAÇÃO DE MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE MATEMÁTICA:
Uma Experiência com o Teodolito Caseiro no Ensino de Trigonometria

PORTO VELHO-RO
2015

LUIZ ANDERSON DE MORAIS SANTOS

UTILIZAÇÃO DE MATERIAL CONCRETO NO ENSINO DE MATEMÁTICA:
Uma Experiência com o Teodolito Caseiro no Ensino de Trigonometria

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática do Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, sob a orientação do professor **Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodrigues** e co-orientação do professor Dr. **Adeilton Fernandes da Costa**.

PORTO VELHO-RO
2015

FICHA CATALOGRÁFICA

BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES

S237u

Santos, Luiz Anderson de Morais.
Utilização de material concreto no ensino de matemática: uma experiência com o teodolito caseiro no ensino de trigonometria / Luiz Anderson de Morais Santos. -- Porto Velho, Rondônia, 2015.
87 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodríguez
Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática) - Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR.

1. Matemática – Ensino aprendizagem. 2. Trigonometria. 3. Teodolito caseiro. I. Rodríguez, Tomás Daniel Menéndez. II. Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR. III. Título.

CDU:512

Bibliotecária Responsável: Edoneia Sampaio CRB 11/947

Luiz Anderson de Moraes Santos

Utilização de Material Concreto no Ensino de Matemática: Uma Experiência com o Teodolito Caseiro no Ensino de Trigonometria

Este trabalho foi julgado e aprovado para obtenção do titulo de Mestre em Matemática do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal de Rondônia, Campus de Porto Velho - RO.

Porto Velho, 16 de dezembro de 2015

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Adeilton Fernandes da Costa
Co-Orientador/Presidente
PROFMAT / UNIR

Profª. Ms. Marizete Nink de Carvalho
PROFMAT / UNIR

Profª. Drª. Maria das Graças Viana de Sousa
UNIR

Dedico essa dissertação a minha esposa (Yanna), aos meus filhos (Yasmin) e (Anderson) que são as razões da minha vida.

Dedico também ao meu pai (Luiz) que sempre foi um exemplo de hombridade, de luta e de superação, que sempre me inspirou a ser um ser humano melhor.

E em especial a minha mãe (Joana) falecida em 2014, que não pôde presenciar o final dessa etapa, mas sempre me colocou em primeiro lugar em sua vida, buscando sempre o melhor para mim e me dando a oportunidade de realizar os meus sonhos, é por esse motivo que tenho certeza que onde quer que ela esteja torce para que alcance meus objetivos. (Saudades)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a DEUS por me guiar, iluminar e me dar tranquilidade para seguir em frente.

Meus profundos agradecimentos ao meu Co-orientador Professor Dr. Adeilton Fernandes da Costa**,** pela orientação valiosa, pela dedicação, pela confiança e acima de tudo por ter acreditado e aceitado participar desse trabalho, contribuindo de forma determinante na realização desse sonho.

Ao meu orientador Professor Dr. Tomás Daniel Menéndez Rodrigues, meus sinceros agradecimentos, pela dedicação, carinho, humildade e imensa capacidade que tem em transmitir conhecimentos. Não deixando de agradecer pelo grande apoio e colaboração que dedicou na orientação desse trabalho.

Aos professores Dr. Abel Ahbid Ahmed Delgado Ortiz e Dr. Marinaldo Felipe da Silva, que contribuíram de maneira expressiva em minha formação acadêmica dentro do Programa.

Aos colegas de mestrado pelo companheirismo, solidariedade e amizade compartilhada durante todos os momentos dessa jornada.

Aos amigos Gilmar e Guilherme, que não hesitaram em me substituir em sala de aula para que eu pudesse concluir esse trabalho.

Ao meu amigo João Vericio que durante 20 dias em que estive em Porto Velho para finalizar esse trabalho, me acolheu em sua residência, abstendo-se de sua privacidade, e demonstrando o quanto é valiosa uma verdadeira amizade.

A minha prima Vera Lúcia e seu esposo Wande, que durante um ano e meio, quando me deslocava nos finais de semana para Porto Velho, a fim de participara das aulas do Mestrado, me acolheram em sua residência.

A tia Verônica e tia Maria, que desde pequeno me tratam como se eu fosse filho. Sendo que não posso deixar de agradecer a tia Maria, que nos dias que antecediam minhas viagens (sempre de madrugada) com destino a Porto Velho para estudar, zelava pela minha segurança e ligava perguntando “Meu filho você vai sozinho para o Mestrado?”, se dispondo a me acompanhar e consigo trazia aquela garrafinha de café. Meu muito obrigado.

Ao meu pai Luiz Santos e a minha mãe Joana Santos. Na verdade, não sei nem como agradecer essas duas pessoas, no entanto, sei que o mestrado me proporcionou uma quantidade imensurável de conhecimentos, mas sei também que essa quantidade não chega nem próximo do que aprendi com eles, foram tantos conhecimentos transmitidos na forma de amor e valores, que moldaram a pessoa que hoje me tornei.

Aos meus irmãos, Lucyana Grasiela e Lucyano Bruno, que sempre estiveram presentes, me ajudando, me apoiando, demonstrando amizade e carinho, em alguns momentos pareciam até pai e mãe, pois também me aconselhavam e protegiam. Por isso a vocês registro meus sinceros agradecimentos, certo de que nossa relação não se reduz apenas a uma mera semelhança genética e sim ao um sentimento "guardado do lado esquerdo do peito".

Com um carinho todo especial a minha alma gêmea, Yanna Santos, com quem tenho dividido todos os momentos de minha vida. Pessoa que sempre me apoia e nos momentos em que pensei em desistir, me fez acreditar que chegaria ao final dessa difícil, porém gratificante etapa. Por isso seu valioso e incondicional apoio foi definitivo para que esse trabalho fosse concluído. Obrigado meu AMOR.

Por fim, tenho muito a agradecer aos meus filhos Yasmin Joana e Anderson Luiz, não apenas pela compreensão das minhas ausências durante as aulas e os estudos, mas principalmente por tudo o que me fazem aprender e sentir nos momentos que passamos juntos. Amo vocês "Pretinha" e "Pocote".

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo relatar a experiência com a utilização de material concreto "Teodolito caseiro" nas aulas de trigonometria, e fazer algumas reflexões desta prática como uma proposta didático-pedagógica para melhoria do ensino de matemática.
A aula prática foi realizada sobre uma perspectiva diferenciada, transformando-a em uma ferramenta facilitadora para o ensino aprendizagem, diminuindo assim a distância entre a teoria ensinada na sala de aula e a sua utilização no cotidiano. A proposta foi plicada com 24 alunos do 2º ano do curso técnico de nível médio na forma integrada do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas - IFAM/Campus Humaitá, contendo aulas teóricas de revisão dos conceitos prévios relacionados aos conteúdos de trigonometria e aulas práticas envolvendo a confecção do teodolito caseiro, seu uso e sua aplicabilidade no ensino de trigonometria. Após a aplicação da aula prática, foi possível verificar a motivação e entusiasmo dos alunos com a nova metodologia aplicada, gerando um aumento significativo dos conhecimentos adquiridos, principalmente com relação ao cálculo de distâncias inacessíveis e o uso das razões trigonométricas.

Palavras-chave: Ensino. Material Concreto. Trigonometria. Teodolito Caseiro.

ABSTRACT

This study aims to report the experience with the use of concrete material "homemade Theodolite" in trigonometry classes, and do some thinking this practice as a didactic and pedagogical approach to improving the teaching of mathematics.
The practice session was held on a different perspective, turning it into a facilitating tool for teaching learning, thus narrowing the gap between the theory taught in the classroom and their use in everyday life. The proposal was fissured with 24 students of the 2nd year of high-level technical course in an integrated manner at the Federal Institute of Education, Amazon Science and Technology - IFAM / Campus Humaita, containing lectures review of previous concepts related to trigonometry content and practical classes involving the making of homemade theodolite, its use and its application in teaching trigonometry. After applying the practice session, we found the motivation and enthusiasm of the students with the new methodology applied, generating a significant increase in knowledge gained, particularly regarding the calculation of inaccessible distances and the use of the trigonometric ratios.

Keywords : Teaching. Concrete Material. Trigonometry. Homemade Theodolite.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dentro da realidade educacional brasileira os profissionais da educação básica, em especial professores de matemática, enfrentam uma luta constante, para manter vivo o processo de ensino e aprendizagem em suas salas de aula. No entanto, vemos que paralelo a isso a matemática, na maioria das vezes, é vista por muitos como uma disciplina pronta e acabada, sem espaço para a criatividade.

Atualmente percebe-se que a maioria dos alunos, independente do ano escolar, apresentam dificuldades na compreensão e assimilação dos conceitos relacionados à trigonometria, isso acaba gerando uma grande aversão a disciplina de matemática, fazendo com que acreditem que a matemática é abstrata, algo difícil, muito além da realidade e, muitas vezes, sem utilidade. Esse tipo de pensamento não condiz com a essência e finalidades inicias da trigonometria, que é uma disciplina puramente prática, cujos os conceitos foram surgindo das necessidades de expansão territorial e intelectual da sociedade humana.

A trigonometria é considerada um dos tópicos da matemática mais rico em aplicações práticas nas diversas áreas da atuação humana, podemos usar esse fato para enriquecer as aulas com diversos tipos de atividades práticas que permitem ao aluno compreender sua importância para o desenvolvimento de habilidades, além de propiciar a integração com outros componentes curriculares.

Diante dessa realidade, o presente trabalho tem por objetivo relatar a experiência pedagógica da utilização de material concreto "Teodolito caseiro", e fazer algumas reflexões desta prática como uma proposta didático-pedagógica para melhoria do ensino de matemática. Uma vez que tal prática tem a função de desassociar a ideia do aluno de que a trigonometria é abstrata, é algo de difícil compreensão e longe da realidade, mostrando com isso que a mesma é um campo fértil para se trabalhar através de situações-problemas do cotidiano.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000, p.58), são enfáticos quando destacam os benefícios do emprego de materiais concretos pelos professores como um recurso metodológico alternativo, que pode tornar bastante expressivo o processo de ensino-aprendizagem da matemática.

A ideia de trabalhar com o auxílio do teodolito caseiro nas aulas de trigonometria, surgiu a partir de um diálogo com alguns alunos do 2º ano do curso técnico de nível médio na forma integrada do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Amazonas IFAM/Campus

Humaitá, que relataram a dificuldade que tinham com relação às aulas de trigonometria, tendo em vista que os mesmos não se sentiam capazes de resolver alguns exercícios a eles propostos.

Diante dessa situação foi realizada uma pesquisa no campo metodológico, para encontrar ferramentas que poderiam auxiliar e facilitar o ensino aprendizagem dessa disciplina. Surgindo assim a proposta de utilização do “Teodolito Caseiro” como instrumento prático no ensino de trigonometria, uma vez que o aluno e professor vivenciariam a aplicação dos conteúdos matemáticos integrados ao uso do material concreto, a fim de tornar a matemática mais prazerosa e facilitando com isso o processo de ensino-aprendizagem.

A proposta da utilização do “Teodolito Caseiro”, foi aplicada no 1º semestre de 2015 contando com a participação de 24 alunos voluntários das turmas do 2º ano do curso técnico de nível médio na forma integrada do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Amazonas_IFAM/Campus Humaitá.

Além da presente introdução, os capítulos deste trabalho estão organizados e estruturados da seguinte forma:

O 1º capítulo é dividido em duas partes, uma retrata o ensino da matemática, e tem por objetivo refletir sobre as teorias ligadas a aprendizagem matemática, bem como seu histórico e evolução no contexto nacional. A segunda parte se refere à trigonometria, com o objetivo de apresentar seu histórico e conceitos básicos, como ângulos, semelhança de triângulos, casos de semelhança de triângulos, triangulo retângulo, relações métricas no triângulo retângulo e razões trigonométricas, temas esse que auxiliarão os alunos no desenvolvimento da presente proposta.

No 2º capítulo apresentaremos o teodolito, sua definição, função e seu histórico. Além de fazer uma breve reflexão da relação entre a trigonometria, o teodolito e o ensino da matemática.

O 3º Capítulo será a parte descritiva da atividade prática com o uso do teodolito caseiro, que consiste nas aulas de revisão, construção do teodolito e execução da proposta do uso do teodolito.

Finalizando o trabalho com as considerações finais a respeito da aula prática realizada junto com alunos.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Ensino da Matemática

É no início de sua vida escolar que a criança entra em contato com processo de alfabetização, não só em sua língua materna como também na linguagem simbólica e matemática, construindo o seu conhecimento segundo as diferentes etapas de desenvolvimento cognitivo.

Com relação aos conhecimentos prévios que a criança absorve antes de iniciar sua vida escolar, Vygotsky afirma que,

> [...] o aprendizado das crianças começa muito antes delas frequentarem a escola. Qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola tem sempre uma história prévia. Por exemplo, as crianças começam a estudar aritmética na escola, mas muito antes elas tiveram alguma experiência com quantidades – elas tiveram que lidar com operações de divisão, adição, subtração e determinação de tamanho. Consequentemente, as crianças têm a sua própria aritmética pré-escolar, que somente psicólogos míopes podem ignorar (VYGOTSKY, 1989, p. 94-95).

Em geral, o ensino da matemática precisa estar interligado e contextualizado junto as outras áreas do conhecimento, de forma a criar um paralelo com as situações práticas do cotidiano. Portanto os conceitos matemáticos no processo de aprendizagem devem ser abordados, explicitando sua origem e finalidade, contribuindo assim para a formação integral do aluno.

Miguel relata que esse processo ocorre além das dimensões científicas e tecnológicas,

> Para além das dimensões científica e tecnológica, a Matemática se consolida como fundamental componente da cultura geral do cidadão que pode ser observada na linguagem corrente, na imprensa, nas leis, na propaganda, nos jogos, nas brincadeiras e em muitas outras situações do cotidiano. (MIGUEL, 2005, p.378)

Ressalta também, que para melhor viabilizar a formação de conceitos matemáticos, devem-se ser seguidas algumas perspectivas:

> a) Contextualização: consideração no trabalho pedagógico com matemática dos aportes socioculturais do alunado para criar condições de se considerar na matemática escolar situações vivenciadas pelos alunos fora da escola, o que se poderia denominar

de matemática cultural, isto é, as diversas formas de matematização desenvolvidas pelos diversos grupos sociais, de modo a permitir a interação entre essas duas formas de pensamento matemático.
b) Historicização: mostrar aos alunos a forma como as ideias matemáticas evoluem e se complementam formando um todo orgânico e flexível, mas rigorosamente articulado, é pressuposto básico para se compreender a matemática como um processo de construção. Não é possível construir aquilo que está pronto.
c) Enredamento: organização das ideias matemáticas em articulação com as diversas áreas do conhecimento posto que elas não surgem do nada; pelo contrário, muitas ideias matemáticas nem surgiram em contextos exclusivamente matemáticos como, por exemplo, a bela teoria dos exponenciais. (MIGUEL, 2005, p.378-379)

Sobre as aplicações do conhecimento matemático Lima escreveu:

As aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a autoestima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. [...] as aplicações são a parte ancilar da matemática. São a conexão entre a abstração e a realidade. Para um grande número de alunos, são o lado mais atraente das aulas, o despertador que os acorda, o estímulo que os incita a pensar. (LIMA, 2003, p.184)

Mediante a isso, o que caracteriza o ensino/aprendizagem na educação matemática é a interação direta entre quem ensina (Professor) e quem busca o conhecimento (Aluno), em um processo mútuo, em que a aprendizagem caminha em paralelo com processo de ensino fazendo ~~assim~~ com que essa interação possa vir a favorecer tanto a compreensão, como também a ampliação do conhecimento dos envolvidos.

1.1.1 Uma Retrospectiva do Ensino de Matemática no Brasil

O ensino de matemática no Brasil sofreu algumas mudanças no decorrer dos tempos. Para que se possa entender a realidade em que se encontra a educação no país, é de suma importância a compreensão de como ocorreu seu desenvolvimento, fazendo isso através da observação de alguns fatos importantes de sua história, fatos esses que irão colaborar para um melhor entendimento da evolução da educação no Brasil até os dias atuais.

Esses fatos são bem expostos por Parra.

O mundo atual é rapidamente mutável, a escola como os educadores devem estar em continuo estado de alerta para adaptar-se ao ensino, seja em conteúdo como a metodologia, a evolução dessas mudanças que afetam tantas condições materiais de vida como do espírito com que os indivíduos se adaptam a tais mudanças. Em caso contrário, se a escola e os educadores descuidarem e se manterem estáticos ou com movimento vagaroso em comparação com a velocidade externa, origina-se um afastamento entre a escola e a realidade ambiental, que faz com que os alunos se

> sintam pouco atraídos pelas atividades de aula e busquem adquirir por meio de uma educação informal os conhecimentos que consideram necessários para compreender à sua maneira no mundo externo. (PARRA, 1996, p. 11)

A presente seção procura mostrar a necessidade de buscar melhorias para o ensino, levando em consideração que os alunos sempre estão em processo de mudanças, necessitando assim, que novas metodologias sejam moldadas a essas novas realidades e que as mesmas sejam capazes de auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem.

A Compreensão de fatos históricos da educação matemática ocorridos no Brasil é fundamental para que seja possível fazer algumas considerações sobre seu desenvolvimento no decorrer dos anos. Com isso, mostraremos um panorama histórico da Educação matemática e das áreas com ela relacionadas, dando uma visão clara das mudanças ocorridas no ensino da matemática.

Em 1549, liderado pelo padre Manuel da Nóbrega, chega ao Brasil o primeiro grupo de jesuítas formado por seis padres. A eles foram atribuídas as funções destinadas ao ensino, sendo assim grande parte de seus trabalhos foram determinantes para criação da primeira escola elementar, localizada na cidade de Salvador, onde o ensino tinha um caráter clássico-humanista, e dava ênfase aos estudos das civilizações humanas e o aprendizado do latim.

Entre 1549 e 1759 os jesuítas ampliaram a rede educacional brasileira, fundando outras escolas elementares~~,~~ em Porto Seguro, Ilhéus, São Vicente, Espírito Santo e São Paulo de Piratininga. Mesmos os jesuítas tendo nas bibliotecas dos colégios um acervo contendo muitos livros de matemática, era dada pouca importância para os conhecimentos matemáticos, com isso os estudos ligados a essa área do conhecimento eram pouco desenvolvidos pelos jesuítas, que de certa forma não viam a matemática com bons olhos.

> Muitos jesuítas não viam com bons olhos as matemáticas. Os estudos das relações misteriosas entre números e entre estes e as letras – a gematria – inquietavam os religiosos. Além disso, a "busca de relações abstratas que, aparentemente, não ocupam nenhum lugar na escala dos seres" era encarada como uma ciência vã. (MIORIM, 1998, p. 82)

Em 1599 a ordem jesuíta lança um documento pedagógico chamado "*Ratio Studiorum*", descrevendo como e quais as formas que os jesuítas deveriam ensinar. Neste documento estabeleceram-se o ensino de várias disciplinas, como humanidades, retórica e gramática, que eram ensinadas em um nível de estudo equivalente hoje ao ensino médio e era conhecido como "*studia inferiora*", enquanto as Ciências e a matemática eram ensinadas de forma meramente superficial nos cursos de Ciências e Filosofia no nível de ensino chamado de "*studia superiora*" equivalente hoje ao nível superior.

A matemática era ensinada quase exclusivamente para uma pequena parte da elite e nobreza, que concluíam o ensino superior nos colégios jesuítas ou em Portugal, e mesmo assim, pouco se aprendia ou ensinava a acerca de matemática. Neste período, não havia universidades no Brasil, no entanto existiam mais de 17 escolas superiores jesuítas em todo o território brasileiro. Apenas oito dos colégios jesuítas ofereciam os cursos de Filosofia ou de Artes, ou seja, em apenas nesses existia algum tipo de ensino de matemática.

Em 1757, dois anos antes da expulsão dos jesuítas, foi inaugurada a Faculdade de matemática no Colégio da Bahia, que trazia como conteúdos programáticos, as disciplinas de Geometria Euclidiana, Perspectiva, Trigonometria, Equações Algébricas, Razão, Proporção e Juros.

Sebastião José de Carvalho e Melo (1699-1782) conhecido como Marques de Pombal, resolveu expulsar os jesuítas do país fechando seus estabelecimentos e confiscando seus bens, partindo da premissa de que o governo português começou a perceber que a educação dos padres jesuíta mais interessava a própria à igreja do que a Portugal, e de certa forma não atendia mais seus interesses, colocando em sério risco o poder da coroa portuguesa, tanto no campo político-ideológico, como no campo comercial.

> Em 1759, Sebastião José de Carvalho e Melo, o marquês de Pombal, primeiro-ministro de Portugal no período 1750-1777, ordenou a expulsão dos jesuítas de todas as colônias. Como esses padres eram os responsáveis pela maior parte das instituições educacionais no Brasil – havia 17 colégios em vários locais nesse momento –, considera-se que sua retirada do país é um marco importante na história da educação brasileira. Restaram poucas escolas, dirigidas por outras ordens religiosas e instituições de ensino militar. (GOMES, 2012, p. 14)

Gomes relata, que em 1798 ocorreu a fundação do Seminário de Olinda pelo Bispo de Olinda Dom Azevedo Coutinho, um evento de relevante importância no ensino de matemática no Brasil.

> Uma ocorrência importante, no Brasil do fim do século XVIII, no que diz respeito ao destaque à matemática e às ciências, foi a criação do Seminário de Olinda pelo bispo de Pernambuco, Dom Azeredo Coutinho, em 1798. Essa instituição, que funcionou a partir de 1800 e não formava somente padres, tornou-se uma das melhores escolas secundárias do Brasil. Ela conferiu importância ao ensino dos temas matemáticos e científicos, e era estruturada em termos de sequenciamento dos conteúdos, duração dos cursos, reunião dos estudantes em classes e trabalho de acordo com um planejamento prévio. (GOMES, 2012, p. 15)

Em 1808 com a chegada da Corte Portuguesa ao Brasil, foi fundada a primeira faculdade brasileira, a Academia Real Militar. Existia na Academia, o curso de matemática que durava quatro anos e um curso militar que durava três anos. Posteriormente começa no Brasil a institucionalização do ensino da matemática Superior. Porém não era obrigatório a todos os alunos a conclusão do curso em sete anos, conforme descreve J. Motta:

> Os alunos destinados a Infantaria e a Cavalaria apenas estudavam as matérias do primeiro ano (matemática Elementar), e os assuntos militares do quinto. Só para artilheiros e engenheiros eram exigidos os estudos do curso completo... (MOTTA, J., 1976, p. 20, apud, SILVA, 1992)

Neste período por volta do ano de 1822 ocorreu a proclamação da independência, em seguida a Assembleia Constituinte deu início a instalação dos trabalhos para elaboração e aprovação da constituição em 1824. Dom Pedro I chamou a atenção para a criação de leis destinadas a educação pública, sendo criada com isso a 1ª lei de Instrução Elementar Brasileira de 1824, onde determinava a criação de Escolas primarias gratuitas, e em 1827 a lei de 15 de outubro determinou que fosse criada escolas em todas a cidades e vilas do território brasileiro.

Tal avanço educacional colaborou para criação das primeiras universidades brasileiras no dia 11 de agosto de 1827 em Olinda e no Largo São Francisco em São Paulo. Em 1837 o ministro Bernardo Pereira de Vasconcelos transformou o seminário de São Joaquim no Rio de Janeiro no Imperial Colégio Pedro II, onde eram ministradas em todas as séries do ensino secundário as disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria. Estes fatos foram importantes para incentivar e acelerar o desenvolvimento do ensino da matemática no país.

> No Rio de Janeiro, o Município da Corte, em 1837, o ministro Bernardo Pereira de Vasconcelos, inspirado na organização dos colégios franceses, criou o Imperial Colégio de Pedro II, concebido para funcionar como internato e externato. O Colégio dava o grau de bacharel em letras aos alunos aprovados em todas as disciplinas durante os sete anos do curso e os alunos concluintes eram dispensados dos exames de ingresso aos cursos superiores.
> As matemáticas, que eram as disciplinas de Aritmética, Álgebra, Geometria, e, posteriormente a Trigonometria, apesar do predomínio das disciplinas literárias e humanistas, estavam presentes em todas as séries do curso do Colégio de Pedro II, em todas as várias reformas que modificaram o seu plano de estudos ao longo do tempo (GOMES, 2012, p. 15).

Para Miorim o plano de estudo das matemáticas nos moldes dos colégios Franceses ocorre no Imperial Colégio Pedro II da seguinte forma:

> Nesse plano de estudo, nos moldes dos colégios franceses, predominaram as disciplinas clássico-humanistas. Apesar disso, as matemáticas, as línguas modernas, as ciências naturais e físicas e a história seriam também contempladas, mostrando uma tentativa de conciliação ente o ensino clássico e as tendências modernas [...] as matemáticas – aritmética, geometria e álgebra – tiveram, assim, seu lugar garantido e apareceram em todas as oito séries do curso. (MIORIM, 1998, p. 87)

Com a fundação das primeiras universidades brasileiras, das escolas primarias e a fundação do Imperial Colégio Dom Pedro II, houve a partir de 1830, a elaboração de uma grande variedade de livros na área de matemática e de apostilas para cursos preparatórios, atualmente parecidas com as apostilas de exames vestibulares.

Com a proclamação da República, houve em 1890 a primeira reforma feita por Benjamin Constant Botelho de Magalhães (1837-1891), o então primeiro Ministro da Instrução, Correios e Telégrafos. A reforma contribuiu de forma grandiosa para ensino da matemática, buscando adotar um currículo que privilegiaria as disciplinas de ciências e matemática.

Uma nova reforma no ensino ocorreu em 1920, no que se diz respeito ao ensino primário e na formação de professores, conhecida como Escola Nova ou Escola Ativa, conforme afirma Gomes em sua obra:

> Na década de 1920, num contexto de profundas mudanças políticas, econômicas e sociais, realizaram-se, em diversos estados brasileiros e no Distrito Federal, reformas no sistema de ensino relativas à educação primária e à formação de professores para esse nível. As mudanças efetivadas pelas legislações estaduais e do Distrito Federal vinculavam-se ao movimento pedagógico conhecido, entre outras denominações, como Escola Nova ou Escola Ativa. (GOMES, 2012, p. 17-18).

Com as reformas realizadas por Francisco Campos em 1929 em Minas Gerais e o surgimento das Escolas de aperfeiçoamento, o governo começa a preparar adequadamente os docentes para seguirem as novas diretrizes pedagógicas e os princípios da Nova Escola.

> Em Minas Gerais, no contexto das reformas realizadas por Francisco Campos (1891-1968), o titular da secretaria do governo estadual responsável pela educação, começou a funcionar, a partir de 1929, a Escola de Aperfeiçoamento. Esta instituição situava-se na capital do estado, Belo Horizonte, com o objetivo de oferecer às docentes mineiras em exercício no ensino primário um curso sintonizado com os princípios da Escola Nova, a fim de preparar adequadamente profissionais que seguissem as novas diretrizes pedagógicas. (GOMES, 2012, p. 18)

Entre 1925 a 1930, o diretor do externato do Colégio Pedro II, o Professor Euclides Roxo (1890-1950), implementou algumas mudanças no ensino do Colégio Pedro II, seguindo algumas tendências de âmbito global, cujo principal objetivo era a restruturação da educação matemática, Roxo faz a unificação das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria que faziam parte do currículo, onde generalizou e transformou em uma disciplina intitulada “Matemática”.

Tal evolução no ensino da matemática elementar, objetivava a implementação da matemática nas séries escolares de maneira gradual, conforme constatação extraída de um trecho do Relatório elaborado por Euclides Roxo ao Diretor do Departamento Nacional de Ensino:

> Na cadeira de matemática fez-se uma completa renovação, de acordo com as atuais diretivas pedagógicas dominantes, quanto a essa disciplina, em quase todos os países civilizados. Adotados somente para o 1º ano em 1929, será a nova orientação estendida, em 1930, ao 2º ano e, assim sucessivamente, a todos os anos do curso. Em consequência dessa reforma, deverão os alunos, ao invés de um exame final de Aritmética, outro de Álgebra e um terceiro de Geometria, fazer, no 4º ano, um exame final único de Matemática, sendo os do 1º, 2º e 3º de simples promoção. (ROXO apud ROCHA, 2001, p. 33)

Com um conceito mais amplo e ideias para modernização ~~dos~~ curricular da nova disciplina matemática, a reforma proposta por Francisco Campos propõe as finalidades do ensino da matemática.

> O ensino da matemática tem por fim desenvolver a cultura espiritual do aluno pelo conhecimento dos processos matemáticos, habilitando-o, ao mesmo tempo, à concisão e ao rigor do raciocínio pela exposição clara do pensamento em linguagem precisa. Além disso, para atender ao interesse imediato da sua utilidade e ao valor educativo dos seus métodos, procurará, não só despertar no aluno a capacidade de resolver e agir com presteza e atenção, como ainda favorecer-lhe o desenvolvimento da capacidade de compreensão e de análise das relações quantitativas e espaciais, necessárias às aplicações nos diversos domínios da vida prática e à interpretação exata e profunda do mundo objetivo. (GOMES, 2012, p. 20)

A partir de 1930 houve um avanço significativo no desenvolvimento da matemática no Brasil, nesse período foi fundada a USP (Universidade de São Paulo) em 1934. Fazendo com que São Paulo despontasse nas décadas de 30, 40 e 50 como centro intelectual nos estudos de matemáticas no Brasil.

Na USP começou um novo ciclo, que trazia em evidência o ensino e desenvolvimento dos estudos ligados a matemáticas, criando o primeiro curso de graduação em matemática, destinado à formação matemática (Bacharelado) e Professores de matemática tanto para o ensino superior como para o ensino secundário, trazendo uma nova concepção para o ensino superior no Brasil, que até então era denominado por alguns como “país dos bacharéis”.

Surge em 1959 na França com a Conferência Mundial de Matemática o Movimento da Matemática Moderna, que contou com a presença de especialistas de vários países. Trazendo influências diretas para o Brasil, que neste mesmo ano, organizou o 3º Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática, realizado no Rio de Janeiro, dando início as primeiras manifestações a respeito do Movimento da Matemática Moderna.

Henrique Guimarães Roxo retrata em sua obra que no período após a década de 50 o ensino de matemática ocorreu da seguinte forma:

> “No período do pós-guerra e ao longo dos anos 50, em muitos países da Europa e também em países desenvolvidos do outro lado do Atlântico, muito em particular nos Estados Unidos da América, começou a tomar corpo a ideia de que se tornava necessário e urgente uma reforma no ensino da Matemática. Na verdade, durante toda a década de 50, foram tendo lugar numerosas iniciativas e realizações, de natureza variada e com propósitos diversificados, que tinham em comum a intenção de modificar os currículos do ensino da Matemática visando a atualização dos temas matemáticos ensinados, bem como a introdução de novas reorganizações curriculares e de novos métodos de ensino”. (ROXO, 2007, p. 21)

O GEEM (Grupos de Estudos sobre o Ensino da Matemática) apropriando-se das novas diretrizes propostas pelo Movimento da Matemática Moderna contribuiu diretamente na capacitação dos professores,

> Em 1961, foi fundado, em São Paulo, o GEEM (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática), que contribuiu de maneira decisiva, através de cursos de sensibilização e de treinamento de professores e da edição de livros textos, para a difusão do ideário modernista. (FIORENTINI, 1995, p.14)

O GEEM tinha como objetivo principal coordenar, e divulgar a introdução da matemática moderna no Brasil. Portanto o GEEM tinha por finalidade atualizar a matemática, bem como de incentivar, coordenar e divulgar o ensino da matemática nos cursos primário, secundário e normal, além de promover os fundamentos da matemática contemporânea através de parcerias com entidades de ensino e Centros Universitários brasileiros e estrangeiros, a fim de introduzir tais fundamentos no ensino de matemática no Brasil.

Em 1961, começa mais uma reforma educacional no país, através da Lei de diretrizes e Bases da Educação (LDB) – Lei 4024 de 20 de dezembro de 1961. Esta lei inclui a matemática em todas as séries do ginásio e em algumas do Colegial, incluindo-a também em cursos técnicos e normais. A LBB/1961 estipula que fica a cargo dos Conselhos Estaduais de Educação determinarem as suas propostas curriculares, permitindo aos professores criarem seus planos de aulas.

No IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática realizado em julho de 1962, em Belém do Pará, no qual se fez pela primeira vez, referência direta ao Movimento da Matemática Moderna no ensino secundário, através de um trabalho apresentado pelo GEEM, em parceria com a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE-SP). Miorim comenta em sua obra intitulada História da Educação Matemática a participação GEEM no IV Congresso Brasileiro de Ensino da Matemática

> Durante o IV Congresso Nacional de Ensino da Matemática, realizado em Belém – PA, em 1962, o GEEM levou alguns exemplos de trabalhos bem-sucedidos com a Matemática moderna e apresentou uma proposta de programa para a escola secundária, orientado pelas ideias modernizadoras. (MIORIM 1998, p.114)

Durante a ditadura militar houve um crescente aumento na quantidade de escolas públicas, necessitando de formação para professores, mesmo que de forma prematura e deficitária, conforme afirma Pavanello:

> A ampliação das redes públicas de ensino de 1º e 2º graus, acentuada a partir de 68, impõe a necessidade da preparação de um maior contingente de profissionais para suprir este mercado. (...) Os cursos de licenciaturas até então existentes já eram bastante criticados, especialmente quanto à falta de 'unidade' entre as disciplinas de conteúdo e as pedagógicas. (PAVANELLO, 1993, p. 14)

Em 1971, houve nova reformulação no ensino no Brasil com a Lei de diretrizes e Bases da Educação (LDB) – Lei 5692 de 1971, tendo destaque com a divisão do ensino em dois níveis conforme escreveu Gomes:

> Um ponto importante a ser destacado na história da organização do ensino brasileiro são as mudanças trazidas pela Lei de Diretrizes e Bases para o Ensino de 1º e 2º graus (LDB 5692) de 1971. Essa lei dividiu o ensino em dois níveis. O primeiro grau, com duração de oito anos, unia os antigos primário e ginásio sem a necessidade de que o estudante se submetesse, como anteriormente, ao chamado Exame de Admissão que o habilitava a prosseguir os estudos depois dos quatro primeiros anos de escolarização. O 2º grau foi proposto como curso de preparação profissional, buscando desviar parte da demanda pelo ensino superior, que não oferecia vagas suficientes para todos os concluintes da escola secundária. (GOMES 2012, p. 25)

No início da década de 70 houve a criação e implantação de programas de pós-graduação em matemática, visando a capacitação de profissionais na área de matemática, sendo importante fator para a melhoria de qualidade dos professores de graduação existente no país.

> Outros marcos relevantes quanto ao ensino da Matemática no Brasil, nos últimos trinta anos do século XX, são a implantação de programas de pós-graduação em Matemática nas universidades, desde 1971, e, a partir de 1987, a criação de cursos específicos de pós-graduação em Educação Matemática, em nível de especialização, mestrado e doutorado, em vários estados brasileiros (GOMES 2012, p. 26).

Para Brito, a implantação dos programas de pós-graduação impulsionou o ensino de matemática, de forma que as universidades passaram a oferecer regularmente curso de verão, dando ênfase a iniciação científica, graduação, extensão universitária e aperfeiçoamento. Além do mais tal feito passou a favorecer o interesse da publicação de artigos brasileiros em várias revistas internacionais.

> A criação dos programas de pós-graduação em matemática foi um importante fator para a melhoria de qualidade dos professores de graduação existente no país. A partir de 1970 várias instituições passaram a ofertar regularmente curso de verão versando sobre iniciação científica, graduação, extensão universitária, aperfeiçoamento ou mesmo de pós-graduação. De 1970 a 1980 as instituições Instituto de Matemática e Estatística IME – USP, Instituto de Matemática – IM – UFRJ, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação – IMECC da Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP e o IMPA passaram a ofertar programas de doutorado e mestrado em áreas matemáticas. Com a implantação dos programas acima mencionados logo surgiram ótimos resultados. Na década de 1970 vários artigos foram escritos e publicados por jovens brasileiros em conceituadas revistas internacionais. Esses artigos abrangiam áreas como: Álgebra, Análise Matemática, Equações Diferenciais e Geometria dentre outros. (BRITO, 2007, p. 18 e 19)

Na década de 80, houve uma análise crítica sobre o Movimento Matemática Moderna em paralelo ao processo de ensino e aprendizagem da matemática nas escolas brasileira, evidenciando uma quebra ideológica e conceitual, que dava suporte ao ensino de matemática e seu currículo, conforme cita Santos:

> A importância de se tomar esse movimento deve-se ao fato de que a partir daí constitui-se um campo de ideias concernentes aos currículos e ao ensino de Matemática que, em cada país, dará suporte a um ensino que observará, desde então, características culturais e condições locais e que é destinado a estudantes particulares, portanto, é situado. As dimensões desse ensino, que por ventura sejam de natureza global, assim como as ações que delas decorrerão, são identificadas com base em variáveis que não seja exclusivamente a Matemática. A despeito de mudanças ocorridas no ensino de Matemática não se identificam, de lá para cá, rupturas, com esse campo de ideias. (SANTOS 2008, p. 2)

Santos também evidencia um documento denominado *An agenda for action: recomendations for School Mathematics of 1980, do National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1980), servindo para gerar referencias, com intuito de promover discussões relacionadas ao currículo no ensino da matemática.

> [...] tais orientações tinham a finalidade de atender melhor às necessidades matemáticas de uma população diversificada de estudantes em uma sociedade marcada progressivamente pela presença de tecnologias. As recomendações foram: a resolução de problemas como foco; as destrezas básicas deveriam ir além do cálculo; obter vantagens do uso de calculadoras e computadores; aplicar Standards rigorosos de eficácia e rendimento; avaliar o êxito dos programas de matemática; desenvolver currículo flexível para promover o acesso com grande variedade de opções; ajuda pública para o ensino de matemática para se alcançar níveis compatíveis com a importância da compreensão matemática. (SANTOS, 2008, p. 4)

Com o crescente avanço do ensino no país, foi realizada em 1996 uma nova reformulação na Lei de diretrizes e Bases da Educação (LDB), que contém a restruturação da educação no país, bem como, os principais parâmetros a ela ligados. Tal restruturação trouxe algumas mudanças e a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN's, conforme menciona Gomes em seu livro História do Ensino da Matemática: uma introdução.

> As mudanças ocorridas em relação às recomendações para o ensino da Matemática vinculadas à crise do Movimento da Matemática Moderna, à emergência e ao desenvolvimento da área da Educação Matemática, com a realização de um número enorme de pesquisas que contemplam muitas tendências e os mais diversos contextos em que se ensina a Matemática, têm repercutido nas propostas curriculares mais recentes. Entre elas, a de maior relevo é a dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, de responsabilidade do Ministério da Educação – MEC –, publicada em 1997-1998. (GOMES 2012, p. 27)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's estabelecem como ponto central:

> O propósito do Ministério da Educação e do Desporto, ao consolidar os Parâmetros, é apontar metas de qualidade que ajudem o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres. (BRASIL, 1997, p. 8)

Levando em consideração que durante décadas o ensino de matemática no Brasil era voltado a conceitos formais e muitas vezes abstratos, os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN's, vêm idealizando um ensino mais crítico em paralelo ao cotidiano dos alunos, sem deixar de considerar as especificidades de cada contexto regional.

> O direcionamento do Ensino Fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores; - a importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; - a ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas. (BRASIL, 1997, p. 21)

As estratégias atribuídas ao ensino/aprendizagem da matemática, que possibilitem ao aluno atribuir sentido as teorias matemáticas e construir um significado às ideias matemáticas, superando o mecanicismo e não se retendo em apenas calcular ou fixar conceitos pela memorização ou fixação de exercícios, são bem destacadas por Telma Weizs, por meio do modelo construtivista:

> O aprendiz é um sujeito, protagonista do seu próprio processo de aprendizagem, alguém que vai produzir a transformação que converte a informação em conhecimento próprio. Essa construção pelo aprendiz, não se dá por si mesma e no vazio, mas a partir de situações nas quais ela possa agir sobre o que é objeto do seu conhecimento, pensar sobre ele, sendo desafiado a refletir, interagindo com outras pessoas. (WEISZ, 2000, p.60-61)

Existe uma luta constante para que os alunos decodifiquem o raciocínio, a aplicação lógica e analise as situações ao seu redor, tornando acessíveis os cálculos de qualquer gênero ou situação, relacionando-as a aplicações ou conceitos matemáticos. Perante essa situação os PCN’s determinam:

> A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Faz parte da vida de todas as pessoas nas experiências mais simples como contar, comparar e operar sobre quantidades. Nos cálculos relativos a salários, pagamentos e consumo, na organização de atividades como agricultura e pesca, a Matemática se apresenta como um conhecimento de muita aplicabilidade.
> Também é um instrumental importante para diferentes áreas do conhecimento, por ser utilizada em estudos tanto ligados às ciências da natureza como às ciências sociais e por estar presente na composição musical, na coreografia (BRASIL, 1997. p.30-31).

De acordo com essas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN’s, os conteúdos de matemática para o Ensino Fundamental estão organizados em quatro blocos:

- Números e operações;
- Espaço e forma;
- Grandezas e medidas;
- Tratamento da informação;

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio PCNEM, os conteúdos de matemática para o Ensino Médio estão organizados em quatro blocos:

- Números e operações;
- Funções;
- Geometria;
- Análise de dados e probabilidade.

No ponto de vista de Sá , há algumas ideias básicas sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Na minha leitura, os Parâmetros Curriculares Nacionais em Matemática apresentam outras ideias básicas, a saber:
> - Eliminação do ensino mecânico da Matemática;
> - Prioridade para a resolução de problemas;
> - Conteúdo como meio para desenvolver ideias matemáticas fundamentais (proporcionalidade, equivalência, igualdade, inclusão, função, entre outras);
> - Ênfase ao ensino da Geometria;
> - Introdução de noções de Estatística e probabilidade e estimativa;
> - Organização dos conteúdos em espiral e não em forma linear, desprivilegiando a ideia de pré-requisitos como condição única para a organização dos mesmos;
> - Uso da história da Matemática como auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos;
> - Revigoramento do cálculo mental, em detrimento da Matemática do "papel e lápis";
> - Uso de recursos didáticos (calculadoras, computadores, jogos) durante todo Ensino Fundamental;
> - Ênfase ao trabalho em pequenos grupos em sala de aula;
> - Atenção aos procedimentos e às atitudes a serem trabalhadas, além dos conteúdos propriamente ditos, como já foi mencionado acima;
> - Avaliação como processo contínuo no fazer pedagógico (SÁ, 2000, p.3).

Os PCN's comentam que o ensino da matemática foi mudado e reformulado com o passar dos anos, e que tais alterações buscam adaptar o ensino da matemática com a realidade e transformações ocorridas em cada época. Todavia nota-se que as mudanças deverão ser continuas tendo em vista as transformações futuras que vierem ocorrer na educação brasileira.

1.1.2 O Ensino da Trigonometria

Usualmente no Brasil, o ensino de trigonometria na Educação Básica, ocorre no final do ensino fundamental, onde são abordados conceitos básicos que introduzem as razões trigonométricas no triangulo retângulo, e no ensino médio, onde são introduzidos os conceitos de ângulos, arcos, trigonometria na circunferência, caracterização do círculo trigonométrico, razões e identidades trigonométricas na circunferência, equações trigonométricas e o estudo das funções trigonométricas, sendo que posteriormente no final do ensino médio os conceitos de trigonometria são associados aos estudos de geometria analítica.

A proposta de matemática dos PCNEM sugere uma estruturação para o desenvolvimento dos conteúdos nas três séries do Ensino Médio, abordando uma seleção de temas que venham a possibilitar o desenvolvimento significativo de competências, que foram sistematizados em três eixos e denominados temas estruturadores, que são:

Álgebra: números e funções. Aqui são incluídos os conteúdos: Conjuntos numéricos, Funções, Sequências numéricas, Matrizes, Sistemas de equações lineares, Polinômios, Equações algébricas e Trigonometria.

Geometrias e Medidas: Aqui são incluídos os conteúdos: Geometria plana, Geometria espacial, Geometria analítica e Medidas.

Análise de Dados: Aqui são incluídos os conteúdos: Matemática financeira, Análise combinatória, Probabilidade e Estatística.

O excesso de formalismo no ensino de Trigonometria torna-a, para alguns alunos uma disciplina de difícil aplicação, formal e abstrata, onde muitas vezes são evidenciadas as contínuas resoluções de cálculos algébricos, fazendo assim, com que as aulas fiquem cansativas e pouco atrativas. Conforme enfatiza os PCNEM, a trigonometria aparece no primeiro tema estruturador (Álgebra) e é indicado para ser trabalhado no primeiro e no segundo ano do ensino médio, onde é assegurado suas aplicações na resolução de problemas de medições contextualizadas junto ao cotidiano do aluno, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, além da construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Quanto ao desenvolvimento das habilidades relacionadas a esse assunto os PCNEM destacam que:

> Tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa (BRASIL, 2000, p. 44).

Segundo os PCNEM (2000), o ensino da trigonometria é de relevante importância, levando em consideração a possibilidade de utilização de artifícios pedagógicos visando o aprimoramento do ensino/aprendizagem da matemática.

Um dos objetivos primordiais dos PCNEM é orientar os professores, bem como também as instituições que promovem o ensino na Educação Básica, com relação às competências e habilidades que serão adquiridas pelo aluno em sua permanência na escola.

Os PCNEM destacam ainda, quais são essas habilidade e competências que devem ser desenvolvidas no estudo de matemática:

> **Representação e comunicação**
> - Ler e interpretar textos de matemática.
> - Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.).
> - Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
> - Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
> - Produzir textos matemáticos adequados.
> - Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
> - Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
>
> **Investigação e compreensão**
> - Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
> - Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> - Formular hipóteses e prever resultados.
> - Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> - Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> - Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> - Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> - Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
>
> **Contextualização sociocultural.**
> - Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real.
> - Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> - Relacionar etapas da história da matemática com a evolução da humanidade.
> - Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades (BRASIL, 2000, p. 46).

É de extrema importância que o professor conheça as habilidades que os alunos deverão adquirir ao final dos conteúdos de trigonometria trabalhados, bem como, que os alunos ao concluírem tais conteúdos tenham assimilado essas habilidades, para que possam executá-las quando necessário no desenrolar de sua vida escolar e também possam relaciona-las com suas atividades cotidianas.

A trigonometria deve se apoiar em conceitos elementares como o das razões trigonométricas e relações métricas no triângulo retângulo, sendo que estabelecendo de forma efetiva esses conceitos, a contextualização e a generalização deste tema será exponencialmente facilitada para os discentes, fazendo com que os mesmos venham a ampliar suas compreensões relacionadas à trigonometria.

> Apesar de sua importância, tradicionalmente a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico das 122 identidades e equações em detrimento dos aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Dessa forma, o estudo deve se ater às funções seno, cosseno e tangente com ênfase ao seu estudo na primeira volta do círculo trigonométrico e à perspectiva histórica das aplicações das relações trigonométricas. Outro aspecto importante do estudo deste tema é o fato desse conhecimento ter sido responsável pelo avanço tecnológico em diferentes épocas, como é o caso do período das navegações ou, atualmente, na agrimensura, o que permite aos alunos perceberem o conhecimento matemático como forma de resolver problemas que os homens se propuseram e continuam se propondo (BRASIL, 2000, p.121-122).

O ensino da Trigonometria exige alguns pré-requisitos. A teoria que retrata esse conhecimento prévio para aquisição de conhecimentos é citada por David Ausubel como aprendizagem significativa, na qual expõe o processo de assimilação que ocorre com o aluno na construção do conhecimento.

> O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo "saber" que envolve a interação entre ideias "logicamente" (culturalmente) significativas, ideias anteriores "ancoradas" relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o "mecanismo" mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos (AUSUBEL, 2003, folha de rosto).

Baseada na teoria de Ausubel, onde o processo em que o aluno adquire nova informação interage simultaneamente com a estrutura do conhecimento específico, ~~no qual~~ é denominado de conceito subsunçor, Briguenti relata que os subsunçores fazem com que os alunos se motivem para adquirirem novo conhecimento.

> Assim, podemos entender que a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual um novo conceito é ancorado a estrutura cognitiva, particular, prévia, a qual é conhecida como subsunçor. Dessa forma podemos entender que na estrutura cognitiva do aluno já possui conceitos relevantes e que dessa forma vai ajudá-lo a organizar os novos conhecimentos. Por isso é de fundamental importância o papel do professor e que suas aulas haja uma interação com o aluno, assim o professor ajuda o

> aluno a construir novos subsunçores e ao mesmo tempo modificar os velhos. Nessa concepção os subsunçores não devem ser vistos apenas como conceito suporte da nova informação e sim como conceito claro e com estabilidade que proporciona a integração entre o novo e o antigo conhecimento, facilitando a aprendizagem. (Briguenti, 2003, p.22)

Para os PCNEM,

> O conhecimento prévio dos alunos, tema que tem mobilizado educadores, especialmente nas últimas duas décadas, é particularmente relevante para o aprendizado cientifico e matemático. Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico (PCNEM 2000, p.52).

Portanto nota-se que o ensino de trigonometria deve ser abordado pelo professor de forma a motivar o aluno a relembrar os conhecimentos prévios, associando-os ao novo conteúdo, de forma a contextualizar o conjunto de informações com o dia a dia do aluno ~~e~~ fazendo com que ele venha a assimilar os conceitos trigonométricos com maior facilidade.

1.1.3 Métodos e Meios no Ensino da Matemática

Quando se trata de Ensino de matemática o primeiro aspecto a ser considerado, é a visão de que a matemática é algo pronto, acabado, longe da realidade, sem espaço para criatividade e que só é acessível a alunos considerados inteligentes e que possuem um índice de rendimento elevado.

> A matemática associada à ciência tem sido entendida como uma entidade que habita uma esfera superior, na qual poucos podem compreendê-la, devido a sua complexidade, ao rigor lógico associado e a sua linguagem quase que hermética, apesar dela estar sempre presente em nossas ações cotidianas. Mas esta visão distorcida reforça o modo como a matemática vem sendo trabalhada nas escolas. (KLÜSENER, 2007, p.179 e 180)

Nesse contexto de manipulação de material concreto no ensino de matemática, Carvalho escreveu:

> Cabe, então, ao professor propor-lhe situações problematizadas: elas lhes permitirão vivenciar experiências que complementam e tornam mais complexo o seu conhecimento anterior sobre os conceitos e propriedades envolvidos nos temas abordados. Desse modo, a criança irá estabelecer relações entre os diversos aspectos

> de uma mesma noção e poderá adquirir, de maneira significativa, a linguagem matemática. (CARVALHO, 1994, p. 20)

Nota-se que muitas vezes os alunos tornam-se passivos na disciplina de matemática, comportamento muitas vezes causado por aversão ao método de ensino de matemática ao qual ele já foi exposto, refletindo diretamente na resolução de atividades proposta em sala de aula, onde esse aluno não se dedica em tentar solucionar a atividade e espera pela resolução do professor.

Diante dessa problemática enfrentada por muitos professores de matemática com relação a aprendizagem dos alunos, far-se-á necessário encontrar alternativas metodológicas especificas para poder contextualizar separadamente cada conteúdo proposto, de forma a propiciar ao aluno a construção do conhecimento.

Sobre esse aspecto Silveira escreveu,

> Incluir metodologias que busquem inovar e contextualizar o ensino na sala de aula no intuito de levar o estudante a construir e compreender a matemática e seus procedimentos que o auxilie na formalização de diferentes conceitos da disciplina parece ser uma alternativa para desmistificar ou "descomplicar" a matemática. (SILVEIRA *et al*, 2011)

No sentido etimológico da palavra, método quer dizer: caminho para chegar a um fim, portanto é a maneira de guiar o pensamento, ou ainda ação para alcançar um objetivo.

Para Nerici (1991, p.192), método de ensino é um conjunto de técnicas logicamente coordenadas, usadas pelo professor, para guiar a aprendizagem do aluno levando-o a construir os conhecimentos.

Libâneo, (2006, p150), conceitua método de ensino como uma ferramenta para alcançar objetivos gerais e específicos do ensino, ou seja, as ações a serem realizadas pelo professor e alunos para atingir aprendizagem dos conteúdos.

Sendo assim, pode-se definir método de ensino como conjunto de ações, seja ela de cunho material ou conceptual, preparadas pelo professor no sentido de organizar as atividades de ensino, a fim de levar os educandos a construir ou adquirir novos conhecimentos dentro dos objetivos pré-definidos.

Para Machado,

> O método de ensino é a categoria mais dinâmica do processo de ensino-aprendizagem, já que é determinado por objetivos que mudam em função do dinamismo da realidade sociocultural em que o processo está inserido. Além disso, o método de ensino

> trabalha com conteúdo que, pelo mesmo motivo, também sofrem permanente revisão (MACHADO, 2006).

Considerando tudo isso, devemos atentar para o fato de que, por mais que os métodos de ensino aplicados tenham obtidos êxitos comprovados em algumas situações, não devem ser generalizados e considerados respostas definitivas a quaisquer problemas educacionais ligados ao ensino/aprendizagem, principalmente levando em consideração que estamos diante de um campo que sofre tanto com as mais diversas e até mesmo complexas variáveis internas e externas ao processo.

Ainda na concepção de Machado (2006), o método de ensino ainda depende de algo importante, os Meios de Ensino. Sendo que o conceito de Meios de Ensino são vários, às vezes conceituados de forma bem específica e outras vezes bem abrangente.

Para o Pedagogo Alemão Lothar Klingberg, a definição de Meios de Ensino é,

> Meios de ensino denomina-se a todos os meios materiais precisados pelo maestro ou o aluno para uma estruturação e condução efetiva e racional do processo de instrução e educação a todos os níveis, em todas as esferas de nosso sistema educacional e para todas as matérias para satisfazer as exigências do plano de ensino. (KLINGBERG 1972, p. 420)

Pode-se pensar que os meios de ensino, por serem meros instrumentos auxiliares do professor, tenha uma participação passiva no processo de ensino-aprendizagem, por outro lado o desenvolvimento dos meios nesse processo pode ~~vim a~~ promover mudanças consideráveis, tendo em vista, que em vários casos o Meios de Ensino são de extrema importância para alcance dos objetivos pretendidos.

Fica claro que, os meios como instrumentos exercem grande influência sobre os métodos, pois os métodos devem se adequar permanentemente às mudanças e inovações tecnológicas que vêm ocorrendo em cada época e região, buscando propostas motivadoras através dos meios de ensino, propiciando ao aluno associar de forma cognitiva os conteúdos transmitidos.

1.1.4 Material Concreto "Materiais Manipuláveis" como Instrumento no Ensino de Trigonometria

Materiais Concretos ou Materiais Manipuláveis funcionam como um subsídio para o ensino dos conceitos matemáticos, pois proporciona uma aprendizagem prazerosa através da manipulação de objetos, onde o aluno pode explorar o material e consequentemente definir sua associação com o cotidiano, ~~e~~ contribuindo para concepção de um novo conhecimento.

> Uma das definições de materiais manipuláveis mais conhecidas é a de Reys (1971), citada por Matos e Serrazina (1996), que define materiais manipuláveis como ‘objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia' (*Apud*: ROCCO; FLORES, 2007, p.1).

Para melhorar sua metodologia de ensino, o professor poderá, através do planejamento pedagógico, programar aulas diferenciadas e motivadoras com o uso material concreto, ferramenta que de maneira clara e objetiva relacionar à teoria com a realidade do aluno, auxiliando-o no processo de ensino aprendizagem.

Sobre a perspectiva de que o Material Concreto deve estar relacionado ao conteúdo matemático e não ser apenas uma ferramenta de distração, Freitas e Bittar comentam que: “Muitas vezes, esses materiais assumem o lugar principal no ensino e não cumprem sua função que é a de permitir que o aluno, através de manipulações do material, construa seu conhecimento” (FREITAS e BITTAR, 2004, p. 29).

A aplicação do material concreto em sala de aula faz com que o aluno, entenda e compreenda o assunto estudado sem possíveis abstrações. Para Mendes o aluno não pode ser mero espectador, portanto o professor de matemática deve usufruir do uso desse meio de ensino.

> […] Estas atividades têm uma estrutura matemática a ser descoberta pelo aluno que, assim, se torna um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático. Infelizmente, o professor frequentemente usa o material concreto de forma inadequada, como uma peça motivadora ocasional, ou pior, como uma demonstração feita por ele, em que o aluno é um mero espectador. (MENDES, 2009, p.11)

Segundo Nehring e Pozzobon (2007), na utilização de materiais concretos a ação e o raciocínio do aluno são elementos importantes para aprendizagem, portando a apresentação para o aluno do material deve anteceder a conceituação teórica, sendo necessário que o mesmo tenha tempo e liberdade para descobrir o funcionamento do material concreto, construindo conceitos práticos após explorá-lo, conceitos esse que serão associados à teoria do conteúdo proposto.

No momento em que existe uma troca de ideias entre alunos e o professor a respeito da funcionalidade do material, é que as relações e conceitos matemáticos começam a ser entendidas e pontuadas. O professor de matemática como mediador do processo de ensino/aprendizagem, deve tratar tal recurso como um convite ao raciocínio, a exploração e descoberta, trazendo a construção de conhecimento matemático ao alcance do aluno.

> Para o aluno perceber que os materiais são potencializadores de representações do objeto matemático, o professor precisará planejar sua intervenção, na perspectiva de desafiá-lo para o estabelecimento de relações, abstrações, generalizações, desencadeando a coordenação entre diferentes registros de representação. (NEHRING e POZZOBON, 2007, p.11)

Com uma aula planejada e utilizando-se de materiais concretos, o professor poderá propor ao aluno atividades diretamente ligadas à vivência do cotidiano, além de favorecer um ambiente agradável, onde o mesmo poderá absorver o conhecimento matemático trabalhado. No entanto esse tipo de abordagem traz alguns desafios e dificuldades, conforme descreve Micotti:

> O caráter abstrato dos estudos matemáticos surpreende os principiantes nos primeiros contatos com o mundo de ideias e representações, desprovidas das particularidades das coisas materiais. Apesar de a matemática ser utilizada e estar presente na vida diária, exceto para quem já compartilha desse saber, as ideias e os procedimentos matemáticos parecem muito diferentes dos utilizados na experiência prática ou na vida diária (MICOTTI, 1999, p.162).

Nesse contexto, far-se-á necessário a intervenção do professor, no sentido de preparação mental do aluno, conforme ressalta Lorenzato:

> [...] convém termos sempre em mente que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental, por parte do aluno. E o MD pode ser um excelente catalisador para o aluno construir seu saber matemático (LORENZATO, 2006, p. 21).

Cabe ressaltar alguns cuidados com relação ao uso de Materiais Concretos, tendo em vista que alguns professores utilizam o material concreto em suas aulas sem nenhuma finalidade contextual, trazendo-o apenas como um instrumento de distração ou descontração, evidenciando apenas suas características lúdicas e estéticas do material, sem tomar cuidado com a reflexão destes com os conceitos matemáticos no qual eles poderiam estar representando.

Diante disso Passos revela que:

> Qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas. Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma a ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam (PASSOS, 2006, p. 81).

Portanto, nesse contexto nota-se que não é possível aprender conceitos matemáticos apenas com o uso ou manipulação de objetos, isto é, a concepção de conceitos matemáticos não aparece de forma transparente e assimilável somente no material, fazendo-se necessário que haja uma atividade de cunho mental por parte do aluno, a qual deverá ser orientada e mediada pelo professor, vindo acompanhada de reflexões sobre a ação a qual foi submetido, fazendo assim com que o aluno reconheça as relações que o levem a pensar, analisar e agir.

Com o uso de materiais concretos em aula o aluno é desafiado, de modo a despertar o encanto e fascinação pelo estudo de matemática, estabelecendo de forma crítica e dinâmica a construção do seu próprio conhecimento, uma vez que fica iminente a possibilidade de abstrair o conhecimento sobre os conteúdos abordados quando se consegue concretizar e manipular as suas aplicações. Cabendo ao professor ser a ponte que liga o uso dos materiais concretos a construção do conhecimento matemático, promovendo o trabalho em grupo, de forma a propor uma maior interação e troca de conhecimento entre os alunos, instigando-os a buscar e compreender através de atividades direcionadas a compreensão contextual do conteúdo matemático abordado. Tornando imprescindível o papel do professor, conforme destaca Ribeiro:

> Manipular os materiais concretos permite aos alunos criar imagens mentais de conceitos abstratos. Porém, ele sozinho não consegue atingir essas funções. É preciso uma participação ativa do professor, pois, materiais concretos sozinhos não garantem a compreensão de conceitos. Ao utilizar um material é necessário que o professor o conheça bem, saiba aplicá-lo e tenha claro os seus objetivos ao utilizá-lo. Os professores devem criar uma sequência didática que promova a reflexão e a construção de significados pelo aluno (RIBEIRO, 2011, p.9).

Em relação ao exposto, o professor poderá com o uso do material concreto buscar estratégias como formulação de questões associadas a atividade e conteúdos propostos, de forma a permitir que aluno passe do concreto ao abstrato por meio de construções de conhecimento bem estruturada nas definições e conceitos matemáticos.

1.2 Trigonometria

Nesta seção iremos discorrer sobre os fatos históricos relacionados à trigonometria, desde os primeiros indícios e relatos até os dias atuais. Também será realizada uma abordagem sobre os conceitos básicos da trigonometria, que serão relevantes como conceitos prévios para realização da aula prática.

1.2.1 História da Trigonometria

Como instrumento metodológico, a história da matemática tem a função de agir como meio motivacional para a inserção de conceitos matemáticos em sala de aula. Segundo os PCN's (1998) os conceitos matemáticos trabalhados inicialmente por meio de fatos história, são veículos que transmitem informações no âmbito cultural, sociológico e antropológico de considerável valor no que diz respeito à formação do conhecimento, além do mais a história da matemática de certa forma colabora para o resgate da própria identidade cultural. Sendo assim a História da matemática contribui de forma efetiva com algumas respostas aos "porquês" dos estudantes, motivando-os e fazendo com que os mesmos encontrem utilidades para o que estão aprendendo.

> Ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração (BRASIL, 1998, p. 42-43).

Desde seus primórdios a matemática, bem como, os ramos ligados a ela estão conectados intimamente com o desenvolvimento histórico das civilizações, as quais visando tal desenvolvimento buscavam através dos princípios matemáticos solucionar necessidades e curiosidades de seu cotidiano.

> As práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade (D`AMBRÓSIO, 1999).

A busca insaciável das civilizações pelo desconhecido e pela compreensão do universo, fez com que a trigonometria se tornasse uma ferramenta fundamental para os povos gregos, egípcios, babilônios, hindus e árabes. Que por sua vez deram contribuições primordiais para a descoberta, desenvolvimento e aperfeiçoamento desse ramo tão importante da matemática.

A origem da trigonometria é desconhecida, algo incerto. Tal descoberta não poderá ser atribuída a uma única pessoa, pois seu desenvolvimento contou diretamente com as contribuições de vários estudiosos, que realizavam seus trabalhos em lugares diferentes, porém em alguns casos em períodos simultâneos. Apesar dessa incerteza, atribui-se sua origem aos estudos ligados a agrimensura, astronomia e navegação.

> A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem ou nação. Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que "Trigonometria", a medida das partes de um triângulo. Com os gregos pela primeira vez encontramos um estudo sistemático de relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos de cordas que se subtendem. As propriedades das cordas, como medidas de ângulos centrais ou inscritos em círculos, eram conhecidas dos gregos do tempo de Hipócrates, e é provável que Eudoxo tenha usado razões e medidas de ângulos para determinar o tamanho da terra e as distâncias relativas do sol e da lua (BOYER,1996, p.108).

Apesar dos estudos a respeito da trigonometria terem registros a partir do século V a.C., o termo "trigonometria" só veio a ser usado por Bartholomeus Pitiscus (1561-1613), conforme Boyer escreveu,

> A identificação desses recursos pelo nome de "trigonometria" só veio a acontecer em 1595 quando, Bartolomeu Pitiscus (1561-1613), usou este vocábulo como título de uma exposição, que foi publicada nessa época como suplemento a um livro sobre esféricas, que foi publicado e novamente, em separado, em 1600, 1606 e 1612 (BOYER, 1996, p.213, apud Lindegger).

Os estudos iniciais de trigonometria estão diretamente ligados aos babilônios e egípcios, que tinham interesse em obter tais conhecimentos para aplicações práticas na construção de benfeitorias, e divisão de terrenos para produção agrícola.

É possível encontrar problemas envolvendo cotangente no Papiro de *Ahmes*, conhecido como Papiro de *Rhind* (Figura 01), um documento egípcio medindo 5,5m x 0,34m, escrito aproximadamente no ano de 1650 a.C., que contém 84 problemas, dos quais, quatro deles estão relacionados a "*seqt*" de uma pirâmide que enfatizava a razão entre o deslocamento horizontal e o deslocamento vertical, com intuito de fazer com que as faces da pirâmide permanecessem com uma inclinação constante.

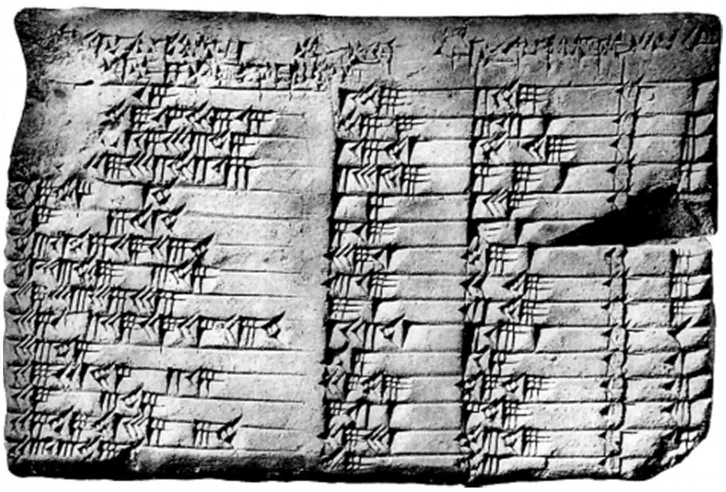
> Os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o "percurso" e a "Elevação" – isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Tomava-se como unidade vertical o cúbico e como unidade horizontal a mão, havia sete mãos num cúbico. Utilizando-se essa unidade de medida, chamava-se seqt de uma pirâmide a medida da inclinação. (EVES, 2011, p.83)

Figura 01- Papiro de Rhind.

Fonte: http://www.matematica.br/historia/prhind.htm

Na Babilônia entre 1900 e 1600 a.C. foi confeccionada uma tábua cuneiforme conhecida como *Plimpton* 322 (Figura 02), contendo texto escrito enfatizando problemas envolvendo secantes.

Figura 02- *Plimpton* 322.



Fonte: http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html

Apesar de haver uma relação direta entre o conhecimento matemáticos dos egípcios e babilônios, foi nos fenômenos astronômicos que os babilônios concentraram seus interesses, tanto por questões ligadas a religião como para criação de calendários que auxiliariam os agricultores na época do plantio. Era imprescindível que os babilônios tivessem conhecimentos sobre triângulos, escalas e sistemas de unidades de medidas, onde tais conhecimentos seriam associados aos conhecimentos de trigonometria, para estipular de forma mais precisa as estações do ano, fases da lua e pontos cardiais.

A partir desses avanços os babilônios conseguiram construir calendários astrológicos e por volta de 747 a.C. determinaram as datas dos eclipses lunares, através da confecção de calendários lunares (Figura 03), que são precisos até os dias atuais. Neste período tiveram grande êxito em suas contribuições direcionadas a cálculos para determinação de distâncias inacessíveis e mapas para orientação das navegações.

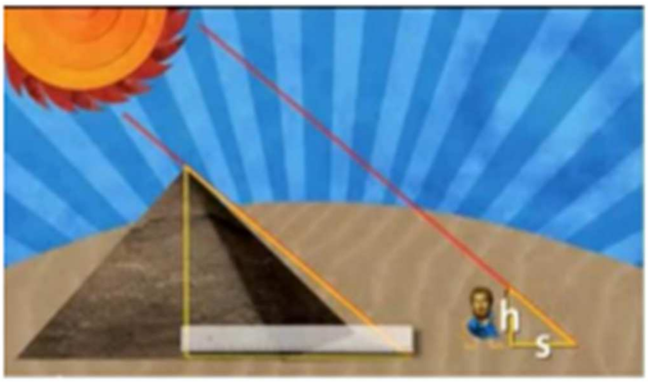
Figura 03- Calendário lunar babilônio.

Fonte: Fonte: http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html

No ocidente os estudos relacionados à trigonometria tiveram grandes avanços com os gregos, que se baseavam nos conhecimentos dos egípcios e babilônios. Hierônimos de Rodes atribui a Tales (624-548 a.C.) o método mais simples para medir a altura de uma pirâmide (Figura 04), método esse concebido por Talles em uma viagem para o Egito, onde começou a interessar-se por astronomia e geometria.

Tales também organizou a geometria de forma dedutiva, e juntamente com seu discípulo Pitágoras (570 - 495 a.C.) avançaram nos estudos de semelhança de triângulo, que foram fundamentais para os avanços nos estudos direcionados a trigonometria.

Figura 04- Esquema da medida da altura da pirâmide (Tales).



Fonte: http://www.youtube.com/watch?v=cWkU6fGoYA8.

Conjectura-se que Pitágoras tenha realizado a primeira demonstração do teorema que leva seu nome: “Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos”. No entanto, segundo Boyer, as obras de Tales e Pitágoras são imprecisas.

> Não sobreviveu nenhuma obra de Tales ou Pitágoras, nem se sabe se Tales ou Pitágoras jamais compuseram tal obra. O que fizeram deve ser reconstruído com base numa tradição, não muito digna de confiança, que se formou em torno desses dois matemáticos antigos. (BOYER, 1996, P. 31)

Deve-se considerar que o teorema de Pitágoras, contribuiu de forma efetiva nos estudos ligados a trigonometria, servindo como base para demonstração da relação fundamental da trigonometria.

Por volta do ano 200 a.C. vários astrônomos que viviam na Grécia tinham grande interesse em calcular a distância entre dois pontos inacessíveis na superfície terrestre e aguçavam a curiosidade sobre a medida o raio terrestre. Mas quem obteve grande prestígio foi Erastóstenes de Cirene (276 – 196 a.C.), que usando semelhança de triângulos, conseguiu a mais precisa medida da antiguidade para o raio da terra, tal feito o levou a perceber a importância de obter relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas.

É importante salientar que para tal feito realizado por Erastóstenes, foi necessário, além do conhecimento sobre semelhança de triângulos, absorver conhecimentos diretamente ligados aos conceitos de razões trigonométricas, medidas de ângulo, simetria entre ângulos e cordas. O tratado conhecido como “Sobre a medida da Terra” escrito por Erastóstenes resume todo seu trabalho, no entanto, esses escritos foram perdidos com o passar dos anos, restando apenas citações em trabalhos realizados por Ptolomeu e Heron.

A primeira contribuição grega documentada para o estudo da trigonometria deve-se a Hipsícles por volta de 180 a.C., que influenciado pelos conhecimentos dos babilônios, dividiu o círculo zodíaco em 360 partes.

> Os babilônicos por volta de 300 a.C., optaram por dividir o ângulo total subtendido de uma circunferência em 360 partes, ou 360 graus (um múltiplo de 60, base do sistema de numeração usado pelos babilônicos), e definiram as subdivisões do grau, o minuto, $\frac{1}{60}$ de grau, e o segundo, $\frac{1}{60}$ de minuto. Hiparco, ao inaugurar a trigonometria, adotou o sistema babilônico de medidas. (KENNDY, 1992)

Por 250 anos na Grécia, período compreendido entre Hipócrates e Erastóstenes, nota-se que, mesmo com a determinação do raio da terra atribuída a Erastóstenes e vários trabalhos realizados por Hipócrates, os historiadores afirmam que a trigonometria apenas "engatinhava" a um ritmo lento, ideia essa sustentada por Boyer (1974, p.118), "...de Hipócrates a Erastóstenes os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. "

Hiparco de Niceia (180-125 a.C.), surge como um "divisor de águas" no avanço da trigonometria, pois diretamente influenciado pela matemática babilônica e das contribuições trazidas e difundidas por Hipsícles, resolveu ampliar tal conhecimento introduzindo a ideia de medidas sexagesimais para qualquer círculo e a aplicou na Astronomia. Foi Hiparco quem atribuiu a nomenclatura arco de 1 grau, após dividir a circunferência em 360 partes. Dividindo também cada arco de 1 grau em 60 partes, denominando cada parte como arco de 1 minuto.

Hiparco de Niceia também lançou uma coleção de 12 volumes voltada a trigonometria, que abordava com propriedade os conceitos e demonstrava um conhecimento profundo sobre o tema. Tendo como maior feito a criação da 1ª tabela trigonométrica, usando os valores das cordas em sequência de ângulos compreendidos entre 0º e 180º, utilizando para isso o conceito de interpolação linear. Por tal feito Hiparco recebeu o título de "fundador da Trigonometria"

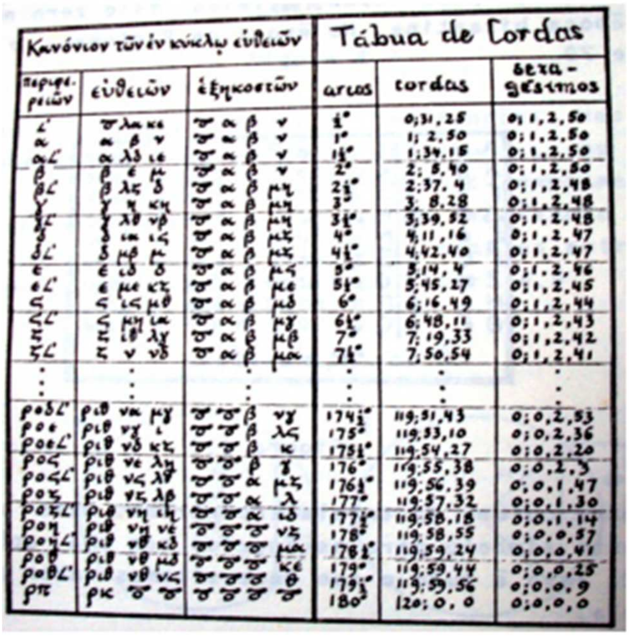
Menelau de Alexandria (70 – 130 d.C.), escreveu por volta do ano 100 d.C. um tratado contendo 6 volumes, onde discorre sobre cordas e círculos, porém muitos dele se perderam com o passar dos tempos. Seu trabalho mais importante é o tratado denominado "Sphaérica", constituído de 3 volumes, sendo esta a obra mais antiga da época que retrata os estudos sobre triângulos esféricos. No terceiro livro dessa obra é apresentado o conceituado e conhecido teorema de Menelau.

Outra personalidade importante foi klaúdios Ptolemaiuos (90 – 168 d.C.) ou como é comumente conhecido Ptolomeu de Alexandria, ele foi o autor da obra de trigonometria mais relevante da antiguidade "*Syntaxis mathemática*", obra constituída por treze volumes. Ficou conhecida pelos árabes por Almagesto que significa "a maior", isso por que os tradutores árabes consideravam esta a maior obra ligada a astronomia existente na época. Kennedy sobre tal reflexão escreve:

> A Syntaxis matematica (síntese matemática) é a obra mais influente e significativa da Trigonometria da antiguidade, esta síntese era distinguida de outro grupo de tratados astronômicos por outros autores, como Aristarco (310− 230 a.C., astrônomo e matemático grego, sendo o primeiro cientista a propor que a Terra gira em torno do Sol), por ser a obra de Ptolomeu chamada a coleção "maior" e a de Aristarco e outros a coleção "menor", e também devido às frequentes referências a primeira como *magíster* surgiu mais tarde na Arábia o costume de chamar o livro de Ptolomeu o Almagesto (o maior) (KENNEDY, 1992)

Nos capítulos dez e onze do primeiro livro da obra Almagesto, Ptolomeu discorreu sobre trigonometria. É no capítulo onze que se encontra a tabela de cordas (Figura 05), considerada mais completa que a de Hiparco, e no capítulo dez, demonstra como a tabela é calculada.

Figura 05- Tabela de Cordas de Ptolomeu.



Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Tábua de Cordas		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcos	cordas	sexagésimos
∠'	ο λα κε	ο α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ο α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠'	α λδ ιε	ο α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ο α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠'	β λζ δ	ο α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ο α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠'	γ λθ νβ	ο α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ιϛ	ο α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠'	δ μβ μ	ο α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ο α β μϛ	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠'	ε με κζ	ο α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ϛ	ϛ ιϛ μθ	ο α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ϛ∠'	ϛ μη ια	ο α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ο α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ∠'	ζ ν νδ	ο α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠'	ριθ να μγ	ο ο β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ο ο β λϛ	175°	119;53,10	0;0,2,36
ροε∠'	ριθ νδ κζ	ο ο β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ροϛ	ριθ νε λη	ο ο β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ροϛ∠'	ριθ νϛ λθ	ο ο α μζ	176½°	119;56,39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ο ο α λ	177°	119;57,32	0;0,1,30
ροζ∠'	ριθ νη ιη	ο ο α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ο ο ο νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠'	ριθ νθ κδ	ο ο ο μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ο ο ο κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠'	ριθ νθ νϛ	ο ο ο θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ο ο	ο ο ο ο	180°	120;0,0	0;0,0,0

Fonte: AABOA, Asger. Episódios da história antiga da matemática. Página 129.

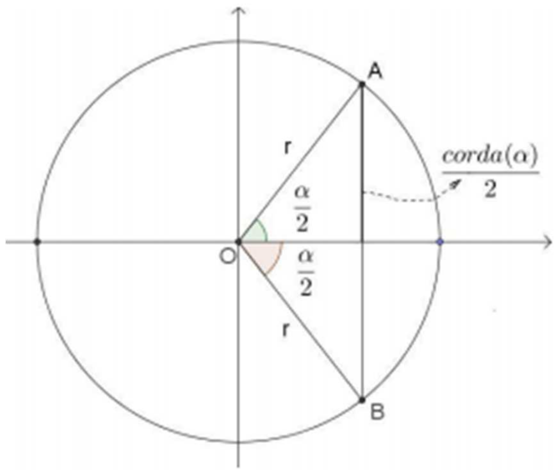
A partir do século IV de nossa era, houve uma queda no desenvolvimento da trigonometria na Europa Ocidental, decorrente das invasões dos bárbaros e da queda do império romano, ocasionando com isso o deslocamento do centro cultural para a Índia, o que proporcionou uma revolução na trigonometria.

Segundo Kennedy (1992), o que conhecemos de trigonometria dos Hindus pode ser visto através de um texto épico escrito por Aryabhata, denominado *Surya Siddhanta*, que quer dizer sistemas do sol, onde encontraremos o surgimento do seno de um ângulo.

Os hindus compreenderam e assimilaram os conhecimentos de trigonometria estudados pelos gregos, e com o avanço de seus estudos substituíram as tabelas de cordas de Ptolomeu e Hiparco mediante a introdução de um novo conceito que hoje conhecemos como função seno.

No período compreendido entre 200 a 1200 d.C., os hindus fizeram grandes avanços em trigonometria, seus estudos relacionavam a metade da corda com a metade do ângulo central da circunferência (Figura 06), facilitando assim a identificação do triângulo retângulo em uma circunferência e consequentemente a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, conhecida na época pelos hindus por "*jiva*". Seguindo esse contexto, começou-se a trabalhar a trigonometria a partir da semelhança de triângulos e não apenas a partir de cordas de um círculo.

Figura 06- Circunferência (determinação metade de corda).



Fonte: pt.wikibooks.org/wiki/Guia_de_problemas_matemáticos/Geometria_plana/Flecha

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{corda(\alpha)}{2}}{r}$$

$$\boldsymbol{corda(\alpha) = 2rsen\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{(I)}$$

Duas das poucas obras que se têm conhecimento e que foram conservadas neste período foram o *Siddhantas* e o *Aryabhatiya*, das quais surgiram as primeiras referências a respeito da Tábua de senos e de algumas demonstrações de identidades trigonométricas. Os hindus introduziram os conceitos de semi corda e de seno, além de demostrarem algumas identidades trigonométricas, com destaque para Varahamihira (505 - 587), que publicou um tratado onde é possível encontramos uma equação equivalente a $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$.

Esse processo para determinar as meias cordas tem uma grande semelhança ao usado atualmente para obter o valor do seno, no entanto com uma leve diferença, a de que para obter o valor do seno calculamos a razão entre a metade da corda e o raio unitário do círculo. Como não havia especificamente um único método para calcular e determinar a tabela de cordas, os matemáticos hindus da época desenvolveram algumas técnicas de aproximação, para calcular o comprimento da corda de um ângulo arbitrário com precisão.

Segundo Boyer (2003, p.147), os hindus usaram um raciocínio que atualmente em nossa linguagem, mostra que o valor do seno de um ângulo pequeno é aproximadamente igual à medida em radianos do ângulo.

Entre os séculos VI e VII, os estudos desenvolvidos por Aryabhata e Baskara, revelaram algumas técnicas sofisticadas para determinar essas aproximações. Essas técnicas e métodos foram anteriores a algumas ideias aprimoradas posteriormente na Europa.

Do fim do século VIII até o século XI, a expansão do império árabe, propiciou um extraordinário desenvolvimento no campo das ciências, tendo um papel importante na história da matemática, pois nesse período houve um grande esforço para traduzir e preservar várias obras antigas, entre elas as relacionadas ao estudo da trigonometria, difundindo assim o conhecimento entre vários intelectuais mulçumanos.

Após a fundação da Escola de Bagdad, no século IX, é notória o início da influência árabe no campo da matemática, dando destaque ao príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como AL Battani (850 a 929 d.C.) e intitulado Ptolomeu de Bagdá, que conseguiu reunir todas as demonstrações, quer de origem grega, quer de origem indiana, até então conhecidas e usadas em Trigonometria.

Após o declínio da Escola de Bagdad, o centro das atividades intelectuais passou a ser desenvolvida no sul da Europa. A história matemática no século XII ficou conhecida como o século dos tradutores, dos quais podemos citar Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Robert de Chester. Com isso, a Europa teve acesso à matemática·árabe e à herança grega que havia sido conservada, na medida do possível. A partir desse período os estudos envolvendo trigonometria como ciência, começaram a ter autonomia em relação à Astronomia. Destacam-se após esse período alguns estudiosos como:

Fibonacci (1170-1250) com a aplicação da trigonometria árabe na agrimensura.

Nicole Oresme (1323 -1382) com seu "*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*", no qual através dos conhecimentos árabes introduziu a noção de funcionalidade entre as grandezas velocidade e tempo, usando uma representação gráfica.

Purbach no século XIV, que após retomar os trabalhos de Ptolomeu, computou uma nova tábua de senos, que foi muito difundida e utilizada pelos estudiosos europeus.

Regiomontanus (1436-1475), discípulo de Purbach que se tornou um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, estabelecendo a Trigonometria como um ramo independente da Astronomia.

Rhaeticus (1514- 1574), que no ano de 1542, publica capítulos do livro de Copérnico, sobre trigonometria.

Viéte (1540-1603), em 1580 estudou a trigonometria usando um tratamento analítico. Conseguiu grande progresso na aplicação da trigonometria com sistemas algébricos, sendo pioneiro no uso letras para representar coeficientes gerais.

Bartholomeus Pitiscus (1561-1613) em 1595 publicou um tratado modernizando e corrigindo as tábuas de Rhaeticus. Sendo o primeiro a usar o termo trigonometria, usando-o como título de um dos seus livros.

John Newton (1622-1678), junto com Gellibrans introduziu as divisões centesimais do ângulo nas tábuas trigonométricas.

Leonhard Paul Euler (1707-1783), através de seus trabalhos a trigonometria começou a adquirir sua forma atual, e foi em 1748 que Euler passou a determinar a medida do raio de um círculo como uma unidade e começou a definir funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então.

1.2.2 Conceitos Básicos de Trigonometria

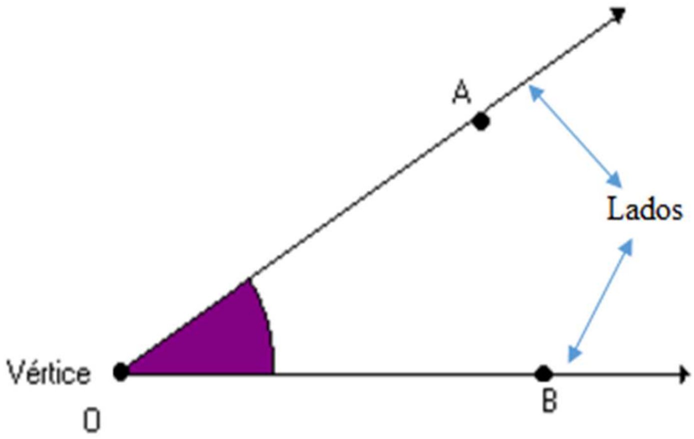
Os conceitos ligados à trigonometria têm grande importância para sociedade, tendo em vista que a mesma foi criada e desenvolvida para sanar necessidades de situações cotidianas, sendo assim, tais conhecimentos permitem efetuar cálculos elementares de situações do dia a dia, bem como algumas situações mais elaboradas e de maior complexidade. As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, permitem realizar com facilidade cálculos para determinar medidas inacessíveis de forma simples e eficiente.

1.2.2.1 Ângulos

O termo ângulo tem origem no latim “*angulu*” que significa canto ou esquina, e também no grego “*gonas*” que significa reunião de duas semirretas de mesma origem não colineares.

Considerando duas semirretas de mesma origem, não opostas, a região compreendida entre as retas é chamada de ângulo. Dizemos que as semirretas OA e OB são os lados do ângulo e fazem parte dele. Sendo que a origem comum aos lados é denominada de vértice do ângulo, Figura 07.

Figura 07- Ângulo.

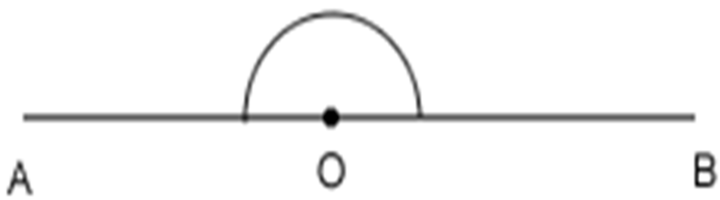


Fonte: http://www.somatematica.com.br/fundam/angulos/angulos.php

Se o ponto O é o vértice e os pontos B e A pertencem individualmente, um a cada semirreta que forma o ângulo, este ângulo poderá se denotado por $A\hat{O}B$ ou $B\hat{O}A$.

Caso as semirretas sejam opostas, denominamos o ângulo como ângulo raso, medindo $180°$, Figura 08.

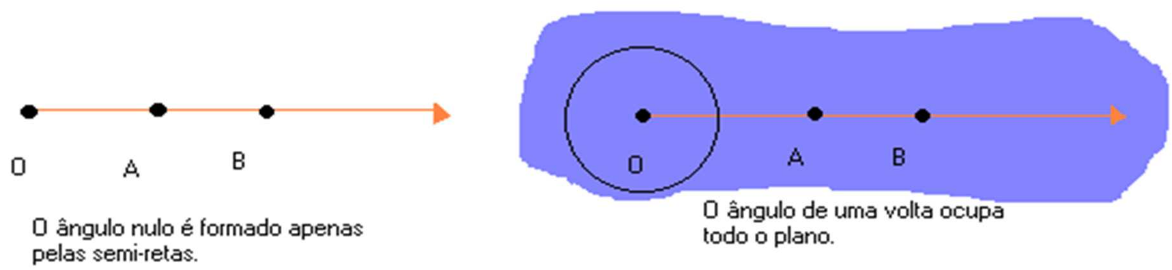
Figura 08- Ângulo raso.



Fonte: http://professorjanildoarantes.blogspot.com.br/2010/10/angulos-agudo-obtuso-reto-e-raso.html

Se as semirretas são coincidentes, dizemos que temos um par de ângulos: um ângulo denominado ângulo nulo $(0°)$ que se reduz à semirreta e um ângulo de uma volta, ou seja, um ângulo de $360°$. Considera-se que nos dois casos que *O* é o ponto de origem. (Figura 09)

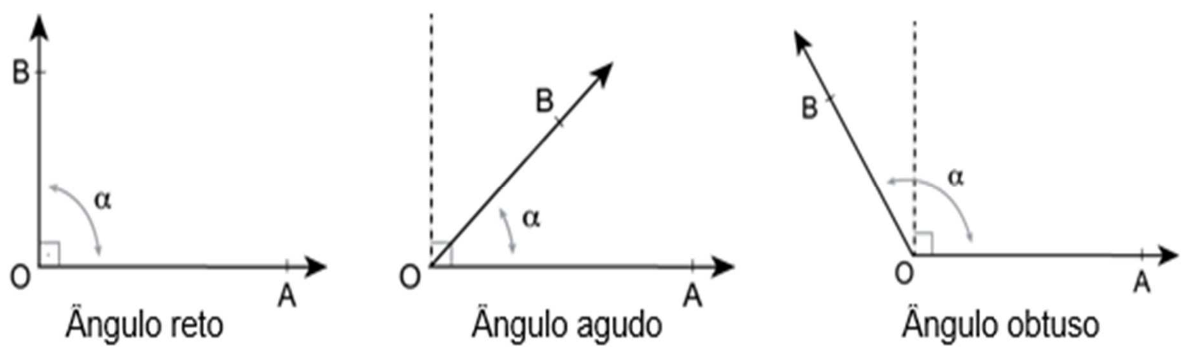
Figura 09- Ângulo nulo e Volta completa.



Fonte: http://www.somatematica.com.br/fundam/angulos/angulos2.php

O ângulo que possui $\frac{1}{4}$ de volta, medindo $90°$ é conhecido como ângulo reto. Possuindo uma medida inferior a $\frac{1}{4}$ de volta será denominada ângulo agudo e quando possuir uma medida superior a $\frac{1}{4}$ de volta será denominado ângulo obtuso. (Figura 10)

Figura 10- Ângulos reto, agudo e obtuso.

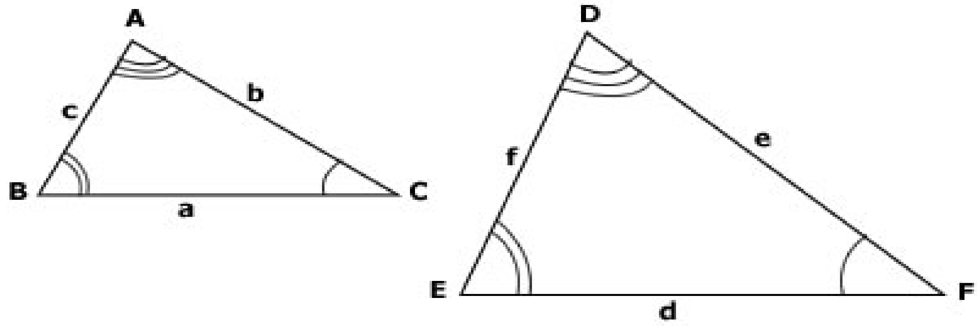


Fonte: http://escolakids.uol.com.br/angulo.htm

1.2.2.2 Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma relação biunívoca, que relacione (associe) os três vértices de um triângulo aos três vértices do outro triangulo, de forma que, ordenadamente ângulos correspondentes são congruentes e lados opostos aos ângulos correspondentes são proporcionais. (Figura 11)

Figura 11 – Triângulos semelhantes.



Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos/

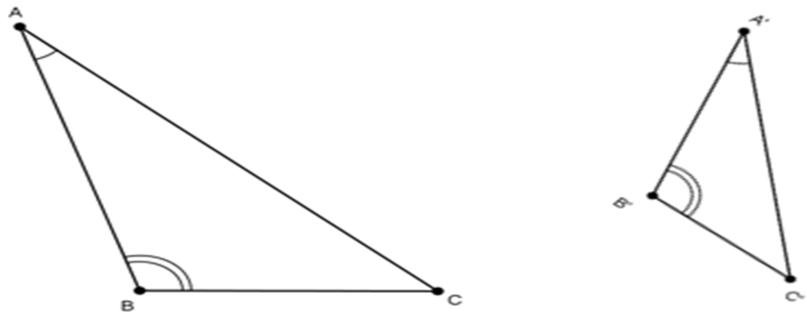
$$\Delta ABC \sim \Delta DEF$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \iff \begin{cases} B\hat{A}C \cong F\hat{D}E \\ A\hat{B}C \cong D\hat{E}F \\ A\hat{C}B \cong E\hat{F}D \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \dfrac{c}{f} = \dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} \end{cases}$$

1.2.2.3 Casos de Semelhança de Triângulos

Caso AA (ângulo-ângulo): Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos correspondentes congruentes. (Figura 12)

Figura 12 – Caso AA de semelhança de Triângulos

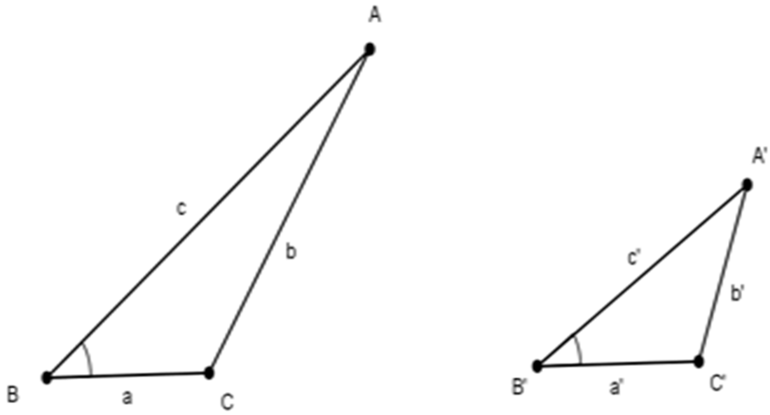


Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos

$$\left.\begin{array}{l} B\widehat{A}\,C \cong B'\widehat{A'}C' \\ A\widehat{B}\,C \cong A'\widehat{B'}C' \end{array}\right\} \iff \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado): Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados, correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, Figura 13.

Figura 13 – Caso LAL de semelhança de Triângulos.

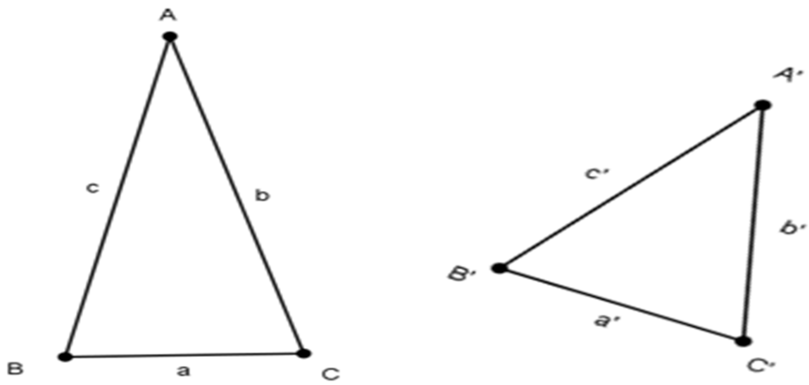


Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\ A\widehat{B}\,C \cong A'\widehat{B'}C'\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Caso LLL (Lado-Lado-Lado): Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente proporcionais, Figura 14.

Figura 14 – Caso LLL de semelhança de Triângulos.



Fonte: http://www.blogviche.com.br/2006/12/15/semelhanca-entre-triangulos

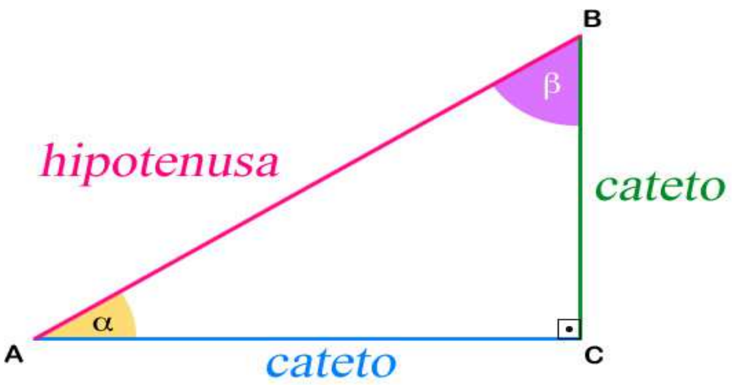
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

1.2.2.4 Triângulo Retângulo

Triângulo Retângulo é uma figura plana que possui três lados e três ângulos internos, onde um de seus ângulos é reto, isto é, um dos seus ângulos mede noventa graus, daí o nome triângulo retângulo.

Os lados de um triângulo retângulo possuem nomes específicos, nos quais lhes são atribuídos de acordo com a suas posições em relação ao ângulo reto. O lado oposto ao ângulo reto é chamado de Hipotenusa e os outros dois lados recebem o nome de catetos, Figura 15.

Figura 15 – Triângulo Retângulo.



Fonte: http://www.profcardy.com/cardicas/tangente-no-triangulo-retangulo.php

1.2.2.5 Relação Métrica no Triângulo Retângulo

É possível encontrar e demonstrar algumas relações notáveis relacionadas aos segmentos de um triângulo retângulo, Figura 16.

Seja o triângulo ΔABC reto no vértice A com as seguintes características e notações:

$\overline{AE} = h$, altura do triângulo ΔABC relativa a hipotenusa.

$\overline{AC} = b$, cateto do triângulo ΔABC e hipotenusa do triângulo ΔAEC.

$\overline{AB} = c$, cateto do triângulo ΔABC e hipotenusa do ΔAEB.

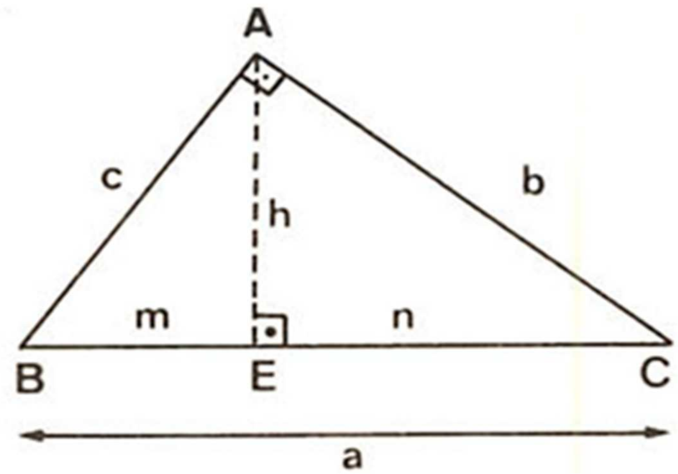
$\overline{BC} = a$, hipotenusa do triângulo ΔABC.

$\overline{BE} = m$, projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa do triângulo ΔABC.

$\overline{EC} = n$, projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa do triângulo ΔABC.

$\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} = m + n = a$

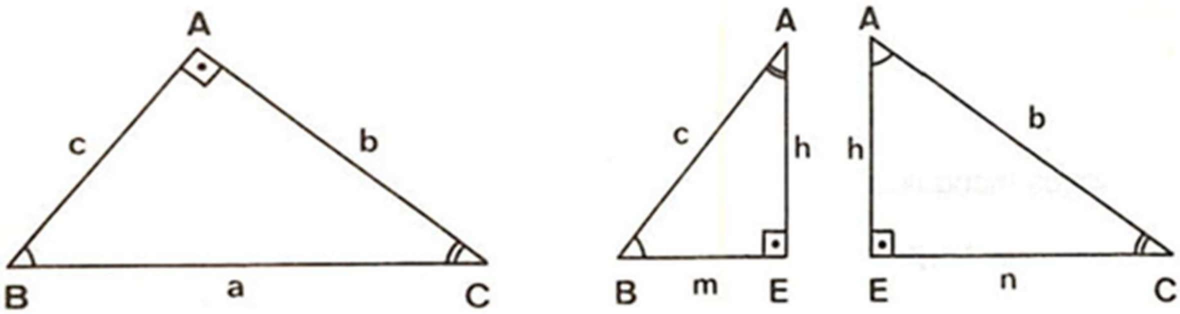
Figura 16 – Triângulo Retângulo (Relções métricas I).



Fonte: http://tempodematematica.blogspot.com.br/2014/07/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo.html

Na Figura 16, podemos observar, três triângulos ΔABC, ΔAEB e ΔAEC, que são semelhantes pelo critério de semelhança de triângulo AA, Figura 17.

Figura 17 – Triângulo Retângulo (Relações métricas II).



Fonte: http://tempodematematica.blogspot.com.br/2014/07/relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo.html

1ª Relação:

A medida de cada cateto é a média geométrica entre a medida da hipotenusa e a medida da projeção do cateto sobre a mesma

Partindo da semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔAEC, temos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Rightarrow \boldsymbol{b^2 = a \cdot n} \qquad \text{(II)}$$

Partindo da semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔAEB, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Rightarrow \boldsymbol{c^2 = a \cdot m} \qquad \text{(III)}$$

2ª Relação:

A medida da altura à hipotenusa é a média geométrica entre as medidas das projeções dos catetos sobre a mesma.

Partindo da semelhança entre os triângulos ΔAEC e ΔAEB, temos que:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boldsymbol{h = m \cdot n} \qquad \text{(IV)}$$

3ª Relação:

O produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à mesma.

Partindo da semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔAEB, temos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow \boldsymbol{b \cdot c = a \cdot h} \qquad \text{(V)}$$

4ª Relação: Teorema de Pitágoras

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma do quadrado das medidas dos catetos.

Para demonstrar a relação mais conhecida referente ao triângulo retângulo, soma-se as equações (II) e (III). Com isso tem-se:

$$b^2 + c^2 = a \cdot n + a \cdot m = a(n + m) = a \cdot a = a^2$$

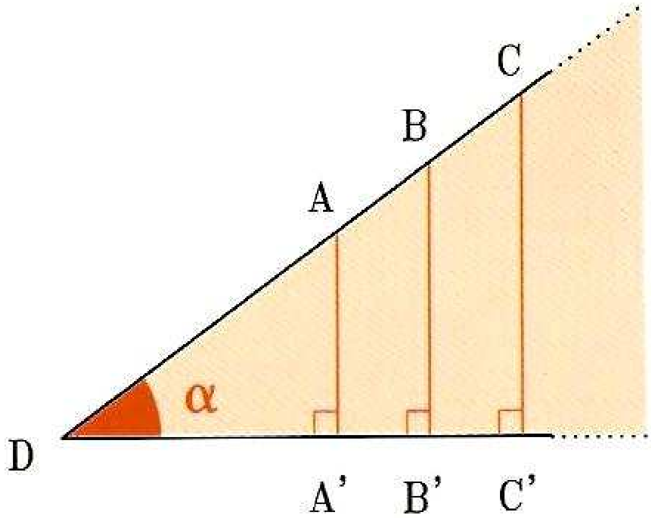
Logo:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2} \qquad \text{(VI)}$$

1.2.2.6 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Sejam os triângulos $\Delta ADA'$, $\Delta BDB'$, $\Delta CDC'$,....... retângulos, conforme a Figura 18. Verifica-se pelo critério de semelhança de triângulo AA, que os triângulos $\Delta ADA'$, $\Delta BDB'$, $\Delta CDC'$,.........., assim como uma infinidade de triângulos de ângulo α são semelhantes, logo a razão entre a medida de lados correspondente é sempre uma constante. Sendo assim, temos:

Figura 18 – Triângulo Retângulo (Razões trigonométricas).



Fonte: http://www.profcardy.com/cardicas/tangente-no-triangulo-retangulo.php

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{DC}} = \cdots$$

Como os seguimentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, ... são catetos opostos ao ângulo α e o seguimentos $\overline{DA'}$, $\overline{DB'}$, $\overline{DC'}$, ... são as hipotenusas dos triângulos (Figura 18), a constante $\frac{\overline{AA'}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{DC}} = \cdots$ será a razão entre o comprimento do cateto oposto a $\boldsymbol{\alpha}$ e o da hipotenusa.

Essa razão é conhecida por seno do ângulo α.

$$\boldsymbol{sen\ (\alpha)} = \frac{\boldsymbol{cateto\ oposto}}{\boldsymbol{hipotenusa}} \qquad \text{(VII)}$$

Considerando as outras razões:

$$\frac{\overline{DA'}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DC'}}{\overline{DC}} = \cdots \qquad \frac{\overline{AA'}}{\overline{DA'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{DB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{DC'}} = \cdots$$

Pode-se de forma análoga definir respectivamente as razões cosseno do ângulo α e tangente do ângulo α.

$$cos\ (\alpha) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa} \tag{VIII}$$

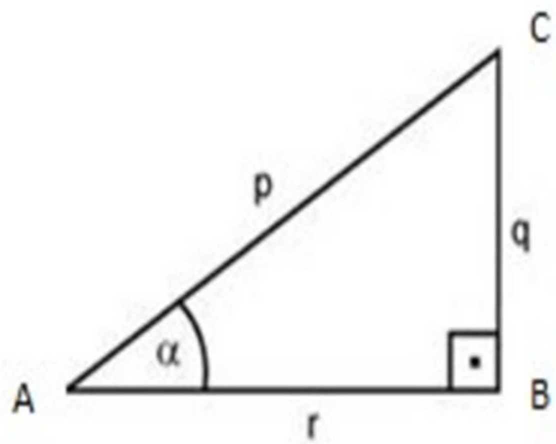
$$tg\ (\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} \tag{IX}$$

1.2.2.7 Relações Importantes entre Seno, Cosseno e Tangente

Relação fundamental do triângulo retângulo;

Seja um ângulo $\propto$ de vértice A e um triângulo retângulo ΔABC, Figura 19.

Figura 19– Relação Fundamental da Trigonometria.



Fonte: http://www.infoescola.com/matematica/razoes-trigonometricas/

Aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$$\boldsymbol{p^2 = r^2 + q^2} \qquad \text{(X)}$$

Pelas razões trigonométricas seno e cosseno aplicados referentes ao ângulo α temos:

$$sen\alpha = \frac{q}{p} \Longrightarrow \boldsymbol{sen^2\alpha = \frac{q^2}{p^2}} \qquad \text{(XI)}$$

$$cos\alpha = \frac{r}{p} \Longrightarrow \boldsymbol{cos^2\alpha = \frac{r^2}{p^2}} \qquad \text{(XII)}$$

Somando membro a membro (XI) e (XII) temos:

$$sen^2 \propto + cos^2 \propto = \frac{q^2}{p^2} + \frac{r^2}{p^2} = \frac{q^2 + r^2}{p^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1$$

Logo:

$$\boldsymbol{sen^2 \propto + cos^2 \propto = 1} \qquad \text{(XIII)}$$

Razão entre o seno e cosseno de um ângulo α.

Usando o triângulo ΔABC da Figura 19, temos: as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente aplicadas ao ângulo α são:

$$sen\alpha = \frac{q}{p}, \qquad cos\alpha = \frac{r}{p} \quad \text{e} \quad tg\alpha = \frac{q}{r}$$

Fazendo a razão entre $sen\alpha$ e $cos\alpha$ temos,

$$\frac{sen \propto}{cos \propto} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{r}{p}} = \frac{q}{p} \cdot \frac{p}{r} = \frac{q}{r} = tan \propto$$

Logo,

$$\boldsymbol{tan \propto = \frac{sen \propto}{cos \propto}} \qquad \text{(XIV)}$$

Como os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, pode-se demonstrar, a partir da definição, de razões trigonométricas que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complemento e a recíproca é verdadeira.

Usando o triângulo ΔABC da Figura 19, e chamando de β o outro ângulo agudo do triângulo temos:

Razões trigonométricas seno, cosseno e tangente aplicadas ao ângulo $\alpha \; e \; \beta.$

$$sen\alpha = \frac{q}{p}, \qquad cos\alpha = \frac{r}{p}, \qquad sen\beta = \frac{r}{p} \quad \text{e} \quad cos\beta = \frac{q}{p}$$

É fácil verificar que:

$$sen\alpha = \frac{q}{p} = cos\beta \qquad cos\alpha = \frac{r}{p} = sen\beta$$

Logo,

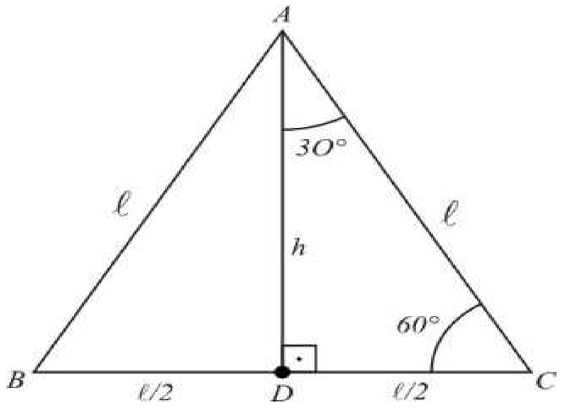
$$sen\alpha = cos\beta \qquad cos\alpha = sen\beta$$

1.2.2.8 Seno, Cosseno e Tangente de Ângulos Notáveis

No triângulo retângulo, as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) são constantemente trabalhadas e alguns ângulos presentes nesse tipo de triângulo são usados com maior frequência, eles recebem o nome de ângulos notáveis e seus valores são de 30º, 45º e 60º.

Para demonstrar os valores de seno, cosseno e tangente de $30° \; e \; 60°$, consideremos um triangulo equilátero ΔABC de lados ℓ e de altura h, Figura 20.

Figura 20 – Triângulo equilátero – ângulos notáveis.



Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/05/demonstracao-dos-angulos-notaveis.html.

Pelo teorema de Pitágoras aplicado no triângulo ΔACD temos que $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando as razões seno, cosseno e tangente referentes aos ângulos de $30°\ e\ 60°$ temos:

Para o ângulo de $30°$ temos,

$$sen30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$cos30° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para o ângulo de $60°$ temos,

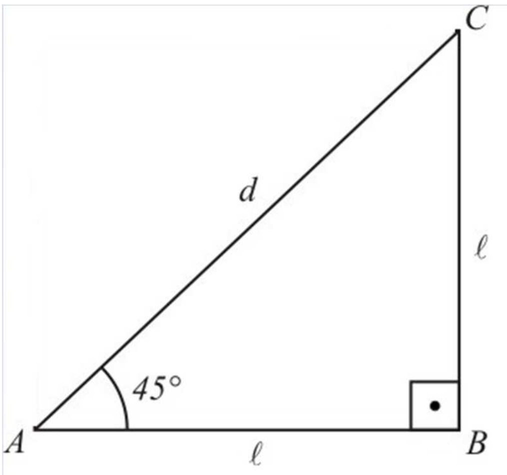
$$sen60° = \frac{h}{\ell} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

Para demonstrar os valores de seno, cosseno e tangente de 45°, consideremos um triangulo retângulo isósceles ΔABC de lados congruentes iguais a ℓ e de hipotenusa d, Figura 21.

Figura 21 – Triangulo equilátero – angulos notáveis.



Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2010/05/demonstracao-dos-angulos-notaveis.html.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ΔACD temos que, $d = \ell\sqrt{2}$.

Aplicando as razões seno, cosseno e tangente referentes ao ângulo de 45° temos:

$$sen45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Sendo assim temos a Tabela 01 contendo os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

Tabela 01 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nota-se que na Tabela 01 os valores da linha correspondente a razão seno aparecem na linha da razão cosseno, porém no sentido contrário. Isso ocorre porque 30º e 60º são complementares, e 45º é complementar de si mesmo, conforme demostrado na seção 1.2.2.7, em que vimos que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do seu complemento.

Desta forma, a tabela dos ângulos notáveis, fica sendo de fácil memorização e poderá ser usada em vários exercícios envolvendo as razões trigonométricas. No entanto, para as razões trigonométricas dos demais ângulos, o interessante seria o uso de uma calculadora científica ou consulta em uma tabela trigonométrica.

2 HISTÓRIA E FUNCIONALIDADE DO TEODOLITO

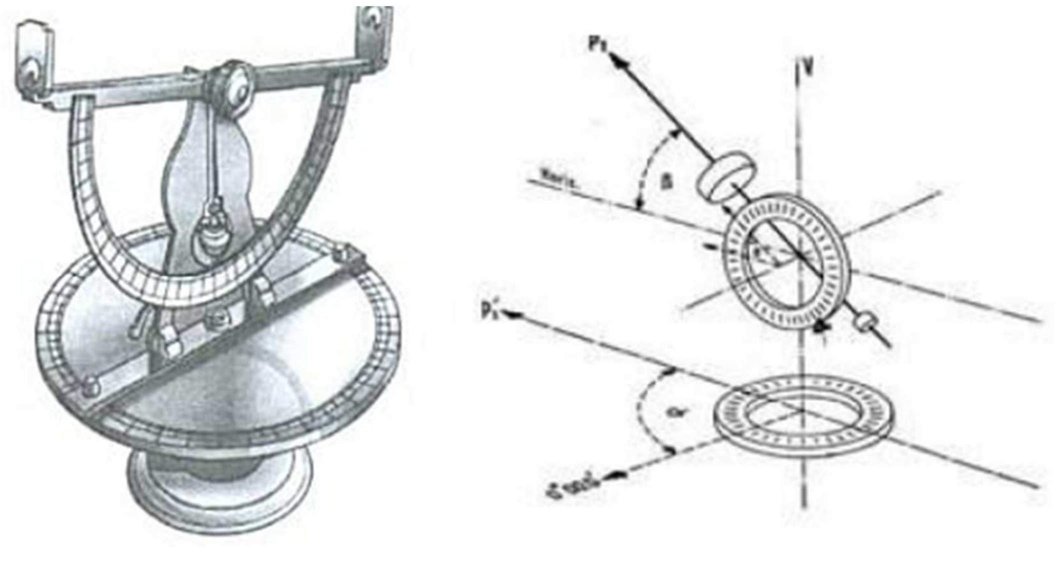
2.1 Definição e Função do Teodolito

Segundo Ferreira (2000 p.668), o teodolito é um “instrumento óptico para medir com precisão ângulos horizontais e verticais”, ou seja, é um instrumento de geodesia, no qual sua finalidade é medir ângulos reduzidos no horizonte, distâncias e medição de posições relativas. É um instrumento que pode facilitar os cálculos de distâncias e alturas, permitindo a elaboração de mapas em escalas.

Souza (2010, p.44) define a utilidade do teodolito da seguinte forma, “[...]Eles podem ser utilizados para medir distâncias que relacionadas com os ângulos verticais permitem obter tanto a distância horizontal entre dois pontos, quanto a diferença de nível entre os mesmos”.

O termo teodolito foi introduzido por Leonard Digges no seu livro Pantometria, publicado na Inglaterra na primeira metade do século XVI, Figura 22.

Figura 22 – Teodolito de Leonard Digges



Fonte: http://www.ehow.com.br/historia-teodolito-sobre_93553/

O teodolito é montado num tripé, com indicadores de nível, permitindo uma total liberdade de rotação horizontal ou vertical. A composição básica do teodolito consiste em duas partes, a óptica e a mecânica. Utilizam-se de lentes e prismas no seu interior que ao desviar o raio de luz permite uma rápida e simples leitura dos limbos graduados em graus, minutos e segundos, Figura 23.

Figura 23 – Teodolito atual

Fonte: http://es.123rf.com/imagenes-de-archivo/surveying_the_site.html

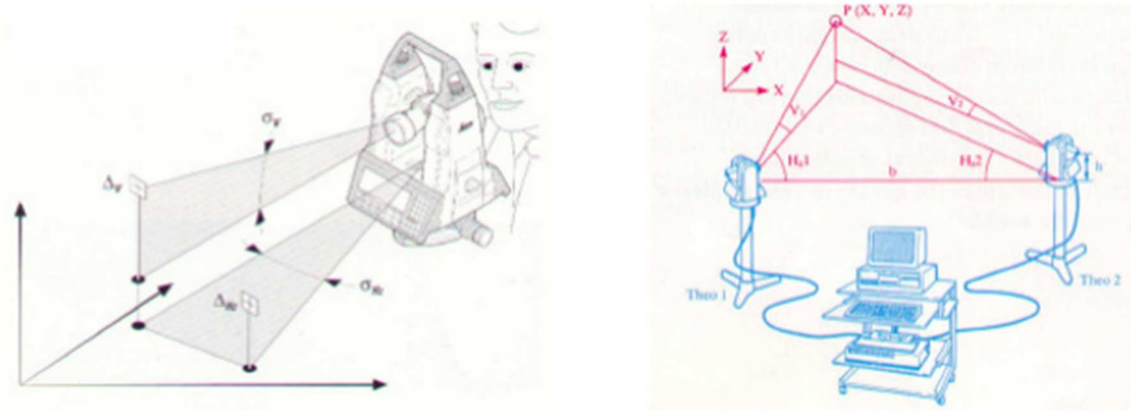
A maioria dos teodolitos possuem uma luneta que permite uma visão precisa em qualquer direcionamento, uma placa horizontal embaixo da luneta parecida com um transferidor que fornece leituras do horizonte em graus e seus submúltiplos, contando também com uma placa e uma escala verticais, montadas à esquerda da luneta, que permitem a tomada de leituras verticais. O teodolito é dividido em duas partes com relação a sua estrutura, parte fixa, conhecida como "base", a qual serve para estabilizar e fixar o teodolito no solo e a parte móvel, chamada de "alidade", a qual se movimenta em torno do eixo horizontal e vertical.

De forma mais elementar o teodolito quando associado ao ensino é um instrumento equivalente à régua graduada e ao transferidor quando trabalhados no papel.

Basicamente existem dois os tipos de teodolitos, nos quais apresentam princípios distintos de funcionamento. São eles: Teodolito Standard e o Teodolito Total ou Estação Total.

O Teodolito Standard é um instrumento utilizado para medição de ângulos (horizontal e vertical) e utiliza um telescópio para o foco preciso do centro do alvo. Com os ângulos verticais e horizontais, a combinação de dois ou mais teodolitos em relação aos alvos e a posição relativa entre eles, pode-se estabelecer, através de uma triangulação, a posição dos alvos em X, Y e Z no espaço, Figura 24.

Figura 24 – Teodolito Standard (Medição de ângulo e Triangulação)



Fonte: Catálogo Leica Mobile 3D metrology – Measurably Better - p. 4 – Ref.UI-241E – VII.92

O Teodolito Total ou Estação Total é um instrumento que afere o ângulo vertical e horizontal. Através de um raio infravermelho posicionado no centro da luneta é possível a determinar da distância de um alvo, isso ocorre quando o infravermelho atingir um refletor e retorna para o ponto de partida, e tomando como referência o comprimento de onda do raio infravermelho é possível calcular a distância do ponto. E através do ângulo vertical, ângulo horizontal e da distância, um ponto pode ser especificado em coordenada polar, e um software converte para coordenada retangular, ou seja, X, Y e Z. Hoje os modelos mais atuais podem rastrear e reconhecer automaticamente o alvo, Figura 25.

Figura 25 – Teodolito Total ou Estação Total

Fonte: http://eptci.com/site/equipamentos

2.2 Teodolito: Um Breve Histórico

O teodolito é instrumento fundamental para a Topografia que é a ciência ligada aos estudos que evidenciam e analisam as representações detalhadas de uma porção da superfície terrestre. Na antiguidade fazia necessário que o ser humano começasse a demarcar seu território, e a partir desse fato começaram a aplicação e desenvolvimento da topografia e consequentemente o surgimento de instrumentos que foram sendo aprimorados até chegar ao teodolito.

A fim de atender a necessidades como demarcações territoriais e elaboração de mapas, surgiram instrumentos de geodesia. Há registros evidenciais sobre atividades relacionadas a geodesia que datam de 3000 anos a.C., e se entrelaçam a história da trigonometria. Momento esse em que as civilizações do Egito e da Babilônia precisaram dividir terras, construir estradas e determinar algumas distâncias.

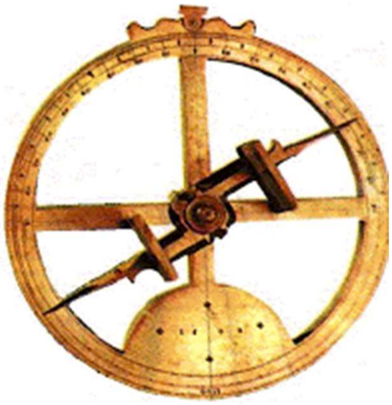
Na Mesopotâmia e no Egito Antigo, registram-se as primeiras evidências materiais de instrumentos para esse fim, conforme afirmam Granato e Miranda,

> "Suas evidências materiais mais antigas vêm da Mesopotâmia e do Egito Antigo, onde agrimensores trabalhavam nas planícies inundadas dos rios Tigre, Eufrates e Nilo, irrigando, medindo, registrando, e valorando terra agricultável. Tinham função também na construção de monumentos, assegurando que as estruturas fossem eretas e devidamente alinhadas" (GRANATO e MIRANDA, 2011).

Os estudos no campo de trigonometria e geometria aliado ao uso de dispositivos mecânicos (ferramentas) como: cordas de nós, prumos, círculos graduados e arcos setoriais, representavam e caracterizavam a geodesia até o século XVI. Tais instrumentos vinham sendo utilizados das formas mais variadas.

Segundo Zilkha (2014) o Astrolábio, desenvolvido por Hiparco, é considerado um precursor do Teodolito. Este foi desenvolvido em 1720 por Jonathan Sisson e inicialmente possuía 4 parafusos niveladores, Figura 26.

Figura 26 – Astrolábio



Fonte: http://osdescobridoresbiju.blogspot.com.br/p/instrumentos-nauticos.html

Teodolitos, taqueômetros, sextantes, câmeras fotogramétricas e outros instrumentos foram sendo mais utilizados e com o passar do tempo evoluindo à medida que eram desenvolvidos as técnicas industriais de manufatura e os materiais optomecânicos.

Jim A. Bennett citado por Granato e Miranda, descreve sobre a evolução dos teodolitos nos séculos XVIII e XIX.

> Jim A. Bennett analisou detalhadamente a evolução dos teodolitos nos séculos XVIII e XIX, mostrando as alterações que foram ocorrendo no projeto desse instrumento. Vale destacar a diferenciação entre teodolitos "planos" e de "trânsito", sendo os primeiros paulatinamente substituídos pelos últimos, à medida que o século XIX avançava. O teodolito plano - fabricado no século XVIII, representado pelos fabricantes Simms & Troughton, Ramsden e Simms - apresentava dois discos com 4 parafusos niveladores que fixavam o eixo vertical, que, por sua vez, suportava dois discos horizontais. A borda do disco inferior era dividida em 30 minutos; o disco superior carregava dois verniers para leituras de até um minuto. O disco superior suportava também uma bússola, dois níveis de bolha e dois suportes tipo A do eixo horizontal. O disco vertical, também com verniers, permitia leituras até a mesma precisão. O telescópio estava fixado nos suportes tipo Y, montados no topo do semicírculo vertical (Bennett, apud, GRANATO e MIRANDA, 2011).

Surge em 1840 o teodolito de trânsito, tendo como inovação a mobilidade do telescópio do teodolito, no qual podia rotacionar em 180º sobre o eixo, de forma a confrontar cada direção e em 1868, já era desenvolvida ideias sobre o teodolito plano, Figura 27.

Figura 27 – Teodolito de transito (século XIX)

Fonte: http://www.mast.br/multimidia_instrumentos/teodolito_funcao.html

Granato e Miranda afirmam que, na década de 50 o teodolito como instrumento geodésicos teve grandes avanços.

> Por volta de 1950, iniciaram-se mudanças tecnológicas, trazendo para os instrumentos de Geodesia efeitos muito mais rápidos e amplos do que quaisquer outros anteriores. Iniciava-se, então, uma nova era nessa ciência. Embora componentes elétricos já tivessem sido incorporados várias décadas antes, somente em 1950 o advento da eletrônica, particularmente do transistor (e, mais tarde, dos circuitos integrados), trouxe a mais recente transformação dos instrumentos dessa área. Nos últimos anos, ocorreram mais transformações do que nos 7 mil anos anteriores (GRANATO e MIRANDA, 2011).

Nos dias atuais o crescente avanço tecnológico, e o crescimento gradual no setor construção civil, fez com que os teodolitos se tornassem cada vez mais eficientes e precisos.

2.3 Relação: Teodolito/Trigonometria/Ensino

Desde os primórdios da civilização até os dias atuais, o homem sempre teve a necessidade e curiosidade de buscar conhecer distâncias inacessíveis. Na realidade, são relativamente poucas as distâncias que podem ser medidas de forma direta usando um instrumento de medida básico, como uma trena. A trigonometria nos dá suporte matemático para praticamente todas as distâncias que desejamos conhecer.

Quando existe a necessidade da realização de estudos topográficos de determinada área ou região e até mesmo analisar dimensões ou distância entre dois pontos inacessíveis, como largura de um rio e altura de objetos, torna-se necessário o uso do teodolito para a realização de medidas indiretas, que serão aplicadas a conceitos da trigonometria e geometria.

Podemos associar os conhecimentos de trigonometria ao uso do teodolito e da trena como meios de ensino para medir uma distância inacessível, transcrevendo observações de ângulos ou medidas de distâncias relativamente pequenas para o papel com o auxílio de transferidor (representando o teodolito) e a régua (representando a trena). Dessa forma será iniciada a concretização do conhecimento abstrato de trigonometria para a realidade dos alunos.

Compreende-se que a contextualização de conceitos matemáticos com o cotidiano do aluno facilita a formulação de novos conhecimentos e a relação destes com os conhecimentos anteriores, o PCNEM destaca que esta é uma forma bastante significativa para o desenvolvimento global do educando.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2000, p. 111).

Por tanto o professor pode propor a seus alunos a construção de um teodolito, com o intuito de facilitar a visualização de conceitos trigonométricos, onde serão explorados os espaços físicos ao seu redor, assim instigando a curiosidade do aluno e associando-a a compreensão do raciocínio lógico e cognitivo. Esse tipo de atividade pode servir para contextualizar os problemas que envolvem cálculos de medidas e alturas com conceitos básicos da trigonometria, fazendo com que dessa forma o processo de ensino possa superar a concepção baseada nas repetições e memorizações, deixando de lado a mecanização do aprendizado e facilitando a compreensão com relação aos conceitos, interpretações e resoluções de problemas, além das possíveis interações entre alunos/alunos e alunos/professor.

Diante da contextualização do teórico com prático e suas relações no cotidiano, Luckesi (2005) afirma que, "[...] não tem sentido o aluno ter assimilado uma quantidade considerável de conceitos se esses não têm uma relação com a sua vida, com o dia a dia. Relacionar os conteúdos com o cotidiano dá verdadeiro sentido ao ensino-aprendizagem".

Sobre a utilização do teodolito caseiro como material concreto no processo de aprendizagem, no qual não pode ser trabalhado de forma "solta" ou desconexa com a teoria e realidade, Carraher (1988, p. 180) relata, "apesar de ser formado por objetos, pode ser considerado como um conjunto de objetos ‘abstratos’ porque esses objetos existem apenas na escola, para a finalidade de ensino, e não têm qualquer conexão com o mundo da criança”.

Carvalho também defende uma ação centrada não no material concreto, mas na construção do conhecimento que se realizam sobre ele:

> Na manipulação do material didático a ênfase não está sobre os objetos e sim sobre as operações que com eles se realizam. Discordo das propostas pedagógicas em que o material didático tem a mera função ilustrativa. O aluno permanece passivo, recebendo a ilustração proposta pelo professor respondendo sim ou não a perguntas feitas por ele (CARVALHO, 1994. p. 107).

Sendo assim o professor ao abordar os conceitos de trigonometria com o uso do teodolito na perspectiva do ensino/aprendizagem, deverá os fazer com muita clareza, para que os alunos não venham a compreendê-los de forma abstrata, mas de forma correlata ao contexto ao qual o aluno se insere.

3 UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA: CONFECÇÃO E USO DO TEODOLITO CASEIRO

Apresentaremos neste capítulo um relato de experiência com o uso de um teodolito caseiro como proposta metodológica para o ensino prático de trigonometria. O desenvolvimento dessa atividade que tem por objetivo envolver e motivar os alunos e, instigá-los a trabalhar os conceitos relacionados à trigonometria, em especial a razão trigonométrica tangente, interligando a atividade prática, o conteúdo matemático e o meio em que eles vivem, de forma que, o aluno com o auxílio do professor possa de forma satisfatória construir seu próprio conhecimento.

Nota-se que, para a estruturação e compreensão do conhecimento teórico, faz-se necessários recursos relacionados às bases intuitivas, assim como aquele dirigido à atividade experimental, ou seja, o professor deve propiciar ao aluno os instrumentos, ao qual considere está correlacionado com o particular e o geral, com o concreto e o abstrato, isso em harmonia com a representação conceitual, para que facilite a aprendizagem do aluno.

Dessa forma, o aluno poderá vivenciar um método motivador e diferenciado de ensinar e aprender matemática, fazendo com que o aluno possa explorar outros ambientes externos a sala de aula, podendo assim interagir e trocar conhecimentos com outros alunos e com o próprio professor, possibilitando que o processo de ensino/aprendizagem se torne prazeroso e interessante para ambos os envolvidos nas atividades.

A atividade prática foi aplicada no 1º semestre de 2015 contando com a participação de 24 alunos voluntários das turmas do 2º ano do curso técnico de nível médio na forma integrada do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia IFAM/Campus Humaitá.

3.1 Exposição de conteúdo sobre Trigonometria

Como vimos anteriormente na seção 1.1.2, que a utilização do conhecimento prévio é de extrema importância para aquisição de um novo conhecimento. Neste aspecto, usamos os conceitos relacionados às razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, com intuito de fazer com que os alunos possam, no momento da realização de suas atividades práticas, correlacioná-las com os conhecimentos prévios adquiridos.

Foram realizadas 3 aulas para exposição dos conteúdos e situações problemas, de forma a preparar os alunos para atividade prática.

3.1.1 Primeira Aula

O primeiro contato com os alunos participantes da atividade prática, foi realizado no dia 27 de abril de 2015, com duração de 100 min, onde foi preparada uma aula de revisão sobre alguns conceitos de trigonometria como:

- Conceitos de ângulos,
- Semelhança de Triângulos,
- Casos de semelhança de triângulos,
- Triângulo retângulo.

Seguida da resolução de algumas situações problemas. Que serviram para relembrar e fixar os conhecimentos prévios necessários para o próximo encontro.

3.1.2 Segunda Aula

O segundo encontro foi realizado no dia 5 de maio de 2015, com duração de 100 min. Conforme visto na seção 1.1.4, Nehring e Pozzobon (2007) diz que a utilização de materiais concretos deve anteceder a conceituação teórica, para que o aluno tenha tempo e liberdade para explorar e descobrir o funcionamento do material concreto, e posteriormente associá-lo a teoria.

Seguindo esse aspecto, no início do segundo encontro foi apresentado aos alunos o teodolito caseiro, e feita uma pequena exposição sobre história e finalidades do uso do teodolito.

Foram usados alguns minutos para breves comentários a respeito do material concreto entregue aos alunos, foi realizada a última revisão acerca das relações métricas no triângulo retângulo, seguindo de resoluções de alguns exercícios envolvendo situações problemas.

3.1.3 Terceira Aula;

O terceiro e último contato com os alunos participantes da atividade prática nesta etapa, foi realizada no dia 18 de maio de 2015, com duração de 120 min, onde foi feita uma aula de revisão sobre os seguintes conceitos de trigonometria:

- Razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente;
- Relações importantes entre seno, cosseno e tangente;

Também foi apresentada aos alunos a Tabela Trigonométrica contendo os valores de seno, cosseno e tangente, dos ângulos compreendidos ente 1° e 90°, Tabela 02.

Tabela 2 – Seno, cosseno e tangente de ângulos agudos.

Ângulo	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
0	0,000	1,000	0,000
1	0,017	1,000	0,017
2	0,035	0,999	0,035
3	0,052	0,999	0,052
4	0,070	0,998	0,070
5	0,087	0,996	0,087
6	0,105	0,995	0,105
7	0,122	0,993	0,123
8	0,139	0,990	0,141
9	0,156	0,988	0,158
11	0,174	0,985	0,176
12	0,191	0,982	0,194
13	0,208	0,978	0,213
14	0,225	0,974	0,231
15	0,242	0,970	0,249
16	0,259	0,966	0,268
17	0,276	0,961	0,287
18	0,292	0,956	0,306
19	0,309	0,951	0,325
20	0,326	0,946	0,344
21	0,342	0,940	0,364
22	0,358	0,934	0,384
23	0,375	0,927	0,404
24	0,391	0,921	0,424
25	0,407	0,914	0,445
26	0,423	0,906	0,466
27	0,438	0,899	0,488
28	0,454	0,891	0,510
29	0,469	0,883	0,532
30	0,485	0,875	0,554
31	0,500	0,866	0,577
32	0,515	0,857	0,601
33	0,530	0,848	0,625
34	0,545	0,839	0,649
35	0,559	0,829	0,675
36	0,574	0,819	0,700
37	0,588	0,809	0,727
38	0,602	0,799	0,754
39	0,616	0,788	0,781
40	0,629	0,777	0,810
41	0,643	0,766	0,839
42	0,656	0,755	0,869
43	0,669	0,743	0,900
44	0,682	0,731	0,933
45	0,695	0,719	0,966

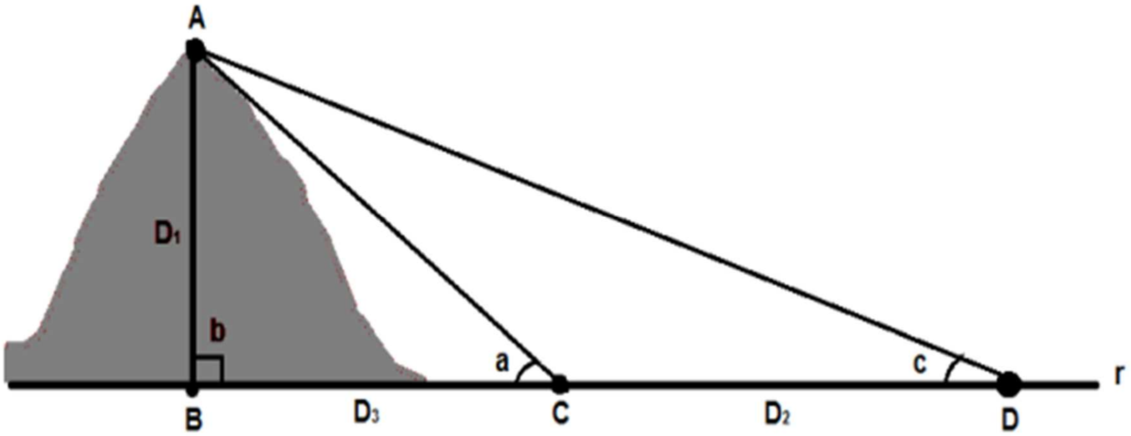
Ângulo	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
46	0,719	0,695	1,036
47	0,731	0,682	1,072
48	0,743	0,669	1,111
49	0,755	0,656	1,150
50	0,766	0,643	1,192
51	0,777	0,629	1,235
52	0,788	0,616	1,280
53	0,799	0,602	1,327
54	0,809	0,588	1,376
55	0,819	0,574	1,428
56	0,829	0,559	1,483
57	0,839	0,545	1,540
58	0,848	0,530	1,600
59	0,857	0,515	1,664
60	0,866	0,500	1,732
61	0,875	0,485	1,804
62	0,883	0,469	1,881
63	0,891	0,454	1,963
64	0,899	0,438	2,050
65	0,906	0,423	2,145
66	0,914	0,407	2,246
67	0,921	0,391	2,356
68	0,927	0,375	2,475
69	0,934	0,358	2,605
70	0,940	0,342	2,747
71	0,946	0,326	2,904
72	0,951	0,309	3,078
73	0,956	0,292	3,271
74	0,961	0,276	3,487
75	0,966	0,259	3,732
76	0,970	0,242	4,011
77	0,974	0,225	4,331
78	0,978	0,208	4,705
79	0,982	0,191	5,145
80	0,985	0,174	5,671
81	0,988	0,156	6,314
82	0,990	0,139	7,115
83	0,993	0,122	8,144
84	0,995	0,105	9,514
85	0,996	0,087	11,430
86	0,998	0,070	14,301
87	0,999	0,052	19,081
88	0,999	0,035	28,636
89	1,000	0,017	57,290
90	1,000	0,000	$\nexists$

Foram enfatizadas duas situações que calculam distâncias inacessíveis através da trigonometria, onde tais cálculos foram generalizados em termos da razão tangente.

Calcular a altura de um objeto considerando que não é possível chegar até a sua base (Local inacessível).

Imagine ter que calcular a altura de uma montanha conhecendo a medida D_2, Figura 28.

Figura 28 – Altura da montanha



Fonte: http://www.profezequias.net/trigonometria.html

Podemos verificar dois triângulos retângulos $\Delta ABC\ e\ \Delta ABD$, sendo os dois retos no vértice B.

Usando a tangente no ângulo α no triângulo ΔABC, temos,

$$tg(\text{a}) = \frac{D_1}{D_3} \Longrightarrow \boldsymbol{D_3} = \frac{\boldsymbol{D_1}}{\boldsymbol{tg}(\text{a})} \qquad \text{(XV)}$$

Aplicando a tangente no ângulo c no triângulo ΔABD, temos,

$$tg(c) = \frac{D_1}{D_3 + D_2} \Longrightarrow D_3 + D_2 = \frac{D_1}{tg(c)} \Longrightarrow \boldsymbol{D_3} = \frac{\boldsymbol{D_1}}{\boldsymbol{tg(c)}} - \boldsymbol{D_2} \qquad \text{(XVI)}$$

Igualando as equações $(XV)\ e\ (XVI)$, temos,

$$\frac{D_1}{tg(a)} = \frac{D_1}{tg(c)} - D_2 \Rightarrow D_2 = \frac{D_1}{tg(c)} - \frac{D_1}{tg(a)} = \frac{D_1 \cdot tg(\mathrm{a}) - \mathrm{D}_1 \cdot \mathrm{tg}(\mathrm{c})}{\mathrm{tg}(\mathrm{c}) \cdot \mathrm{tg}(\mathrm{a})} \Rightarrow$$

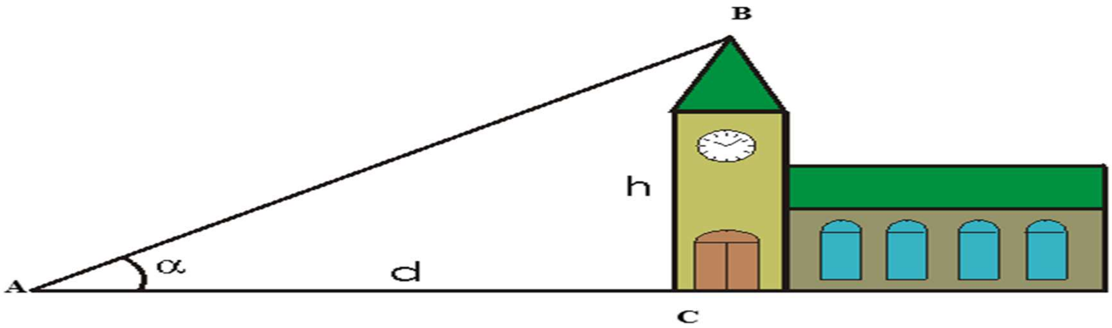
$$\Rightarrow D_2 = \mathrm{D}_1 \cdot \frac{\left(\mathrm{tg}(\mathrm{a}) - \mathrm{tg}(\mathrm{c})\right)}{\mathrm{tg}(\mathrm{c}) \cdot \mathrm{tg}(\mathrm{a})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{D_1} = \mathbf{D_2} \cdot \frac{\mathbf{tg}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{tg}(\mathbf{a})}{\left(\mathbf{tg}(\mathbf{a}) - \mathbf{tg}(\mathbf{c})\right)} \qquad \text{(XVII)}$$

Calcular a altura de um objeto considerando que seja possível chegar até a sua base (Local inacessível).

Imagine ter que calcular a altura de um prédio conhecendo uma medida d, Figura 29.

Figura 29 – Altura da Igreja



Fonte: http://www.profezequias.net/trigonometria.html

Podemos verificar o triângulo ΔABC , retângulo em C.

Usando a tangente no ângulo α no triângulo ΔABC, temos,

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{d}}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{tg}(\boldsymbol{\alpha}) \qquad \text{(VXI)}$$

3.2 Construção do Teodolito caseiro

Nesta etapa foi construído um instrumento rudimentar que chamaremos de "Teodolito Caseiro", sendo que o mesmo é semelhante ao Astrolábio um do precursor dos teodolitos atuais, que tem por finalidade medir ângulos verticais em relação ao plano horizontal.

3.2.1 Materiais Usados

Para construir o “Teodolito Caseiro” foram utilizados os seguintes materiais:

- Isopor
- Transferidor de 360°
- Estilete
- Cola de silicone;
- Barbante;
- Varetas de fixação de balão ou canudo.

Figura 30 – Materiais usados na construção do Teodolito

Fonte: Elaborado pelo autor

3.2.2 Modo de Construção

A construção deu-se no 4° encontro com os alunos, realizado no dia 22 de maio de 2015 com duração de 100 minutos. Para construção do “Teodolito Alternativo” foi solicitado aos alunos no terceiro encontro que se organizassem em grupo de 4 participantes e que fosse providenciado os materiais necessários para construção do “Teodolito Caseiro”, Figura 31.

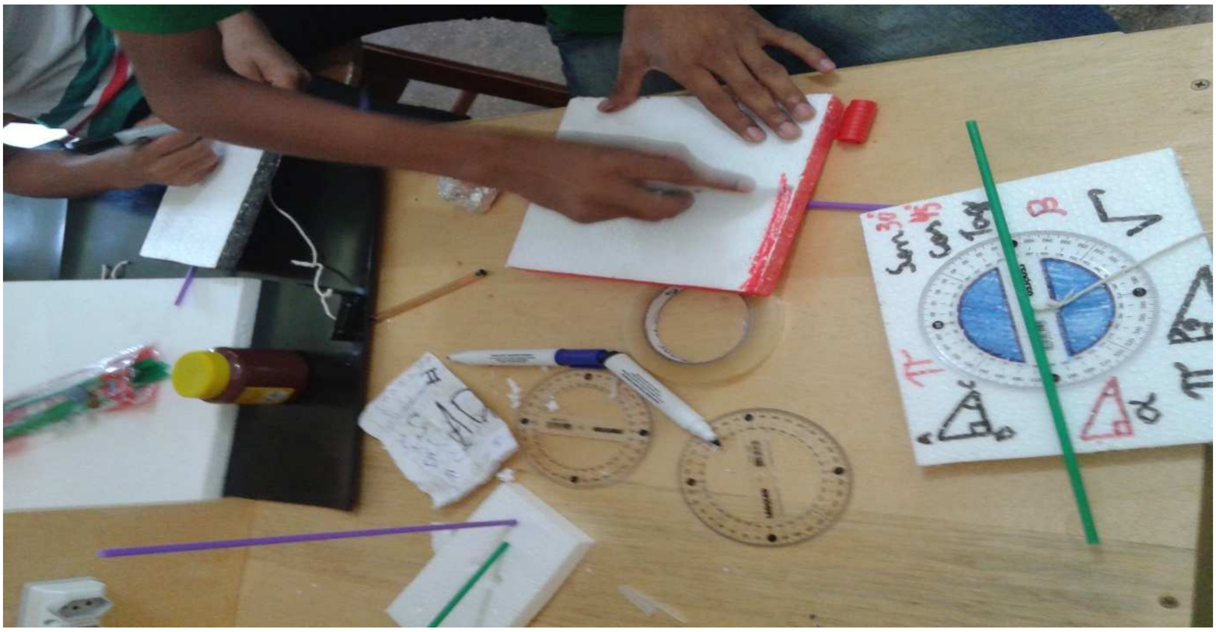
No início do encontro os alunos com os grupos já organizados e de posse do material a ser usado, foi repassado os passos de construção do instrumento, conforme roteiro:

1º Passo: esse passo será responsabilidade do professor. Com o auxílio de uma furadeira elétrica fazer um orifício na parte central do transferidor,

2° Passo: Amarrar um barbante de 45 centímetros passando no orifício feito no 1º passo.

3° Passo: Cortar o isopor em um quadrado de 12cm x 12cm usando o estilete;

Figura 31 – construção do Teodolito (Corte do isopor)



Fonte: Elaborado pelos alunos

4º Passo: Com o uso da cola de silicone, colar o transferidor no isopor de modo que o mesmo fique centralizado. Aguardando três minutos após fixar o transferidor no isopor, para secagem da cola.

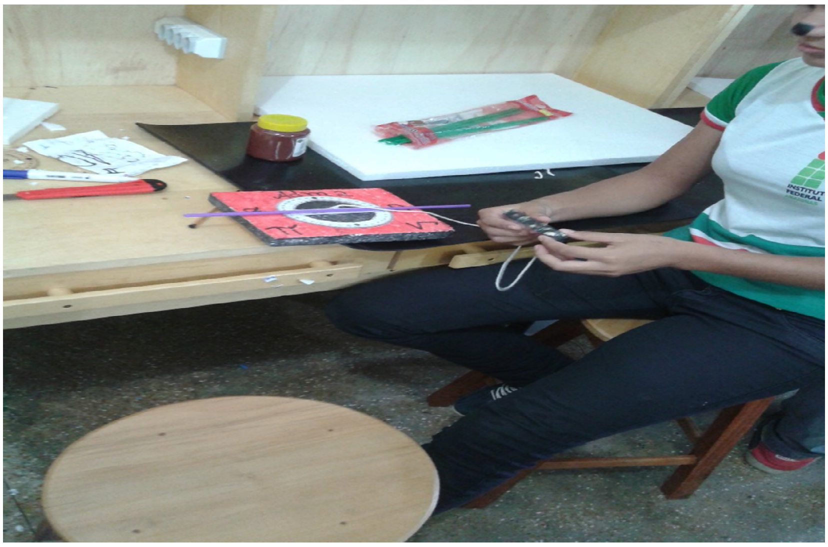
5º Passo: Com o uso da cola de silicone, colar a vareta de fixação de balões ou canudo no transferidor, de modo que ele passe pelo diâmetro do transferidor, ou seja, fique sobre os ângulos de 0° e 180°. Aguardando três minutos após fixar a vareta de fixação de balões no transferidor, para secagem da cola, Figura 32.

Figura 32 – construção do Teodolito (Colagem do canudo)

Fonte: Elaborado pelos alunos

6° Passo: Amarrar na outra extremidade do barbante um peso para manter o fio esticado, Figura 33.

Figura 33 – construção do Teodolito (amarração do peso na extremidade do barbante)



Fonte: Elaborado pelos alunos

7° Passo: Livre para ornamentação do "Teodolito alternativo". Esse passo também pode ser realizado antes do passo 4.

8° **Passo**: Teste de qualidade do "Teodolito Alternativo", Figura 34.

Figura 34 – Alunos treinando no teodolito

Fonte: Fonte: Elaborado pelos alunos

Foi evidente que durante essa etapa, os estudantes estavam motivados e demonstraram interesse e satisfação quanto à realização das atividades, interagindo com os colegas e com o professor.

3.2.3 Prática com o Uso do Teodolito

Com relação à promoção de aulas com participação ativa dos alunos, Cury escreve:

> Os professores devem promover a educação participativa. Os alunos devem ser estimulados de todas as maneiras a deixarem de ser espectadores passivos que se sentam em suas carteiras e ouvem inertes a transmissão do conhecimento. Esse Tipo de passividade esmaga a criatividade, a liberdade e o espírito empreendedor. (CURY 2007, p.62).

A prática com o uso do teodolito ocorreu no dia 22 de maio de 2015 com duração de 150 minutos. Os alunos continuaram organizados em grupos de quatro integrantes para realizar a atividade propostas.

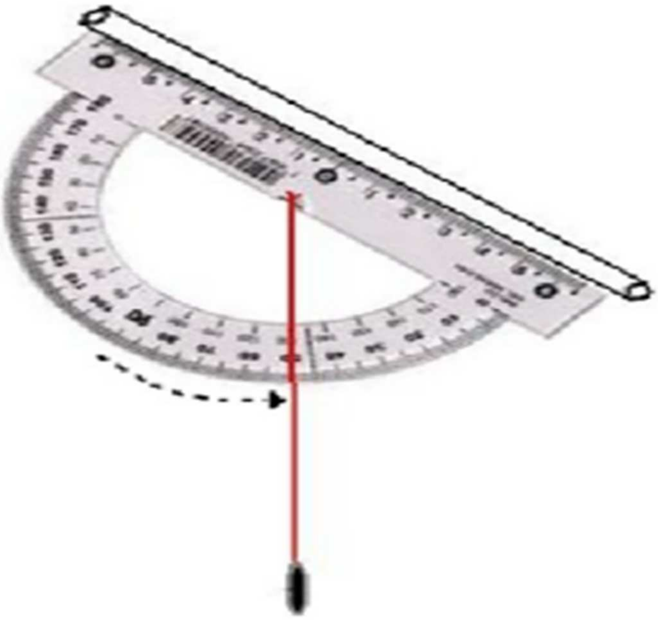
Para realização desta atividade os grupos deveriam usar o “Teodolito Caseiro” e trena, seguindo os seguintes passos para calcular uma determinada altura:

Passo 1: Medir a altura do observador, na qual deve ser considerada para determinações de medidas verticais.

Passo 2: Posicionar o teodolito horizontal com o barbante perpendicular a vareta (canudo) alinhado com a marca dos 90° sobre o limbo do transferidor.

A medida em que, se eleva a vareta (canudo), para visualização do ponto onde deseja-se medir o ângulo relacionado a linha horizontal, o barbante irá determinar uma nova leitura sobre o transferidor do teodolito, sendo assim, para determinar esse ângulo de elevação calcula-se o complementar desse ângulo, Figura 35.

Figura 35 – Determinação do Ângulo



Fonte: Ana Berenice Pedroso Biazutti Celso

Passo 3: Medir a distância do observado a base do objeto que desejasse determinar a atura. No caso em que não é possível chegar à base do objeto (local inacessível), deslocasse para traz uma determinada medida que deverá ser aferida.

Passo 4: Calcular a altura a partir da tangente do ângulo encontrado conforme explicitado na seção 3.1.2.

Levando em consideração os conceitos de trigonometria trabalhados juntamente com resolução de situações-problemas nos três primeiros encontros de nossa atividade prática, e a construção do instrumento de medição de ângulo "Teodolito Caseiro", foi proposto aos alunos as seguintes atividades:

I. Calcular a altura da caixa d'água do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Amazonas IFAM/Campus Humaitá, usando trena e o "Teodolito Caseiro", levando em consideração que não seria possível chegar até a base da caixa d'água (Local inacessível).

II. Calcular altura da caixa d'água do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Amazonas IFAM/Campus Humaitá, usando trena e o "Teodolito Caseiro", levando em consideração que seria possível chegar até a base da caixa d'água.

III. Compare os Resultados dos itens I e II.

Os alunos iniciaram a atividade, fazendo a medição do ângulo de elevação entre a linha do horizonte e o ponto mais alto da caixa d’água com o uso do “Teodolito Caseiro” e a medição da distância horizontal com o uso da trena. Com as medições encerradas foram feitos esboços, que representavam a situação prática observada, a partir dos esboços os alunos conseguiram associa-los com os conteúdos previamente trabalhados, determinando assim a altura aproximada da caixa d’água. Após as medições e resolução da atividade proposta, os alunos foram ao quadro branco para mostrar o desenvolvimento dos cálculos e resultados obtidos, compartilhando suas experiências com os demais colegas. Figuras 36, 37, 38 e 39.

Figura 36 – Alunos medinho os ângulos com o teodolito

Fonte: Fonte: Elaborado pelo auto

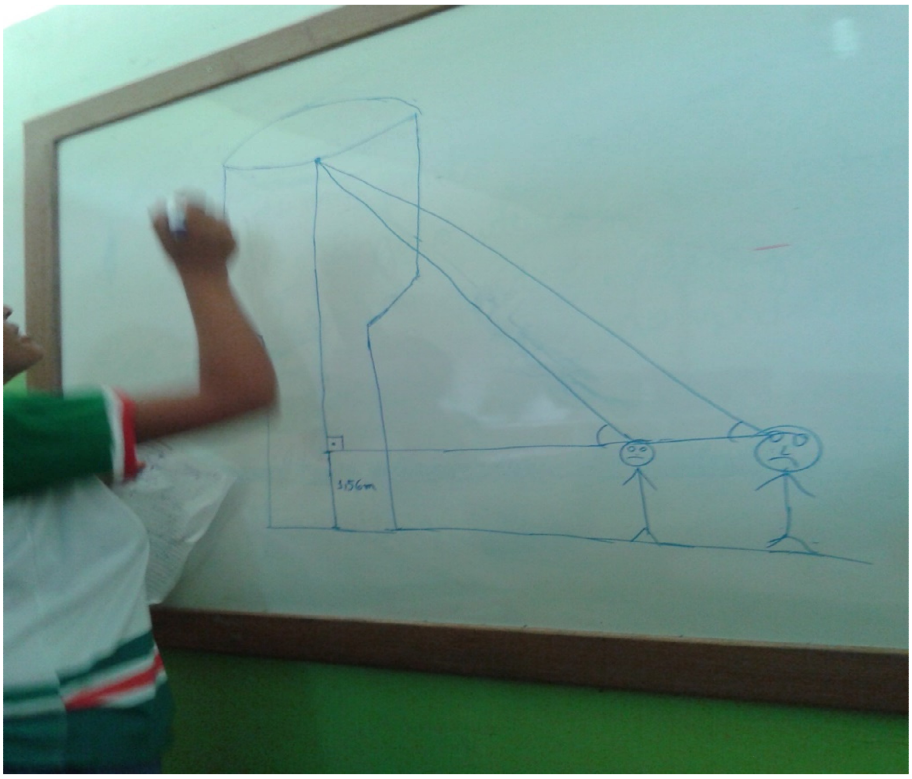
Figura 37 – Alunos medinho a distância entre os pontos de observações dos ângulos.

Fonte: Fonte: Elaborado pelo auto

Figura 38 – Fazendo o esboço da prática.

Fonte: Fonte: Elaborado pelo auto

Figura 39 – resolução da atividade no quadro branco



Fonte: Fonte: Elaborado pelo auto

3.3 Reflexões e Avaliação sobre a Prática do Uso do "Teodolito Caseiro"

Na etapa de resolução no quadro branco e troca de experiência, foi notório o entusiasmo dos alunos com relação à atividade prática. Também observou-se o quanto o contato entre a realidade e a teoria aliados a manipulação de material concreto (Teodolito Alternativo), foi significativo para a assimilação da teoria matemática.

Em alguns relatos feitos pelos alunos notou-se também como a atividade os instigou a querer buscar o conhecimento e através da curiosidade buscar algo a mais, conforme questionou um dos alunos no compartilhamento de experiência.

"Será possível adaptar o teodolito que construímos para medir distâncias horizontais, de tal forma que possamos medir o comprimento do campo de futebol de nossa Escola? Ou até mesmo utilizar para medir distâncias maiores como a distância entre planetas conforme era medido na antiguidade?"

Com relação à atividade proposta, todos os grupos executaram suas medições e resoluções dos cálculos das distâncias de forma correta e satisfatória, além de tecerem comentários sobre as diferenças nas medidas obtidas pelos grupos.

Portando a atividade prática proposta atingiu o seu objetivo de contribuir de forma significante para o aprendizado dos alunos sobre os conceitos relacionados às razões trigonométricas, em especial a tangente. Além sanar a visível dificuldade que os alunos do 2º ano do curso técnico de nível médio na forma integrada tinham com relação à resolução de situações problemas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Experiência com a atividade prática no ensino de matemática é de suma importância no processo de ensino-aprendizagem, pois mostra ao aluno que a matemática não é exclusividade de poucos, e sim uma disciplina que está diretamente ligada ao nosso cotidiano dentro ou fora de ambientes educacionais.

Essa nova tendência em buscar metodologias para o ensino da matemática através da inter-relação entre a realidade e os conceitos matemáticos, deve se tornar prática constante para professores em nossas escolas, visando a motivação do aluno em aprender, fazendo com que essa proposta venha a refletir diretamente no seu desempenho escolar e na sua vida social.

Quando ensinamos a matemática apenas baseados em problemas presentes em livros, que muitas vezes foram elaborados para uma realidade totalmente diferente da que os alunos costumam estar inserido, dificilmente estaremos nos aproximando de situações reais do cotidiano.

Portanto, verificou-se que, com a aplicação dessa proposta a aula ficou bem mais atrativa, refletindo diretamente na empolgação, motivação, interesse e criatividade dos alunos.

No entanto, além da interação e troca de experiências entre aluno/aluno e professor/aluno, notou-se também que os alunos passaram a ser mais ativos e participativos, construindo de forma efetiva e contextualizada o novo conhecimento.

Enfim, ainda ressalto que a atividade proposta foi de extrema importância para minha vida profissional, portanto vejo que nesse contexto o professor deverá se esforçar ao máximo para estar se aperfeiçoando, no intuito de buscar novas alternativas metodológicas que venham contribuir de forma positiva no processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David. P. Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BOYER, **Carl B. História da matemática.** (Tradução de Elza F. Gomide) - 2ª ed.-São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL, **Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental.** Brasília: MEC, 2000. 88p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. **–** Brasília : MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998. 148 p.

BRIGHENTI, Maria José Lourenção. **Representações Gráficas: atividades para o ensino e a aprendizagem de conceitos trigonométricos**. Bauru: EDUSC, 2003.

BRITO, Maria das Dores Costa. **A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO BRASIL.** 2007. 20 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2007. Cap. 2. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/.pdf>. Acesso em: 28 nov. 2015.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1988.

CARVALHO, Dione Lucchesi. **Metodologia do Ensino da Matemática**. 2 Ed- São Paulo:Cortez,1994.

CURY, Augusto. **Treinando a emoção para ser feliz**. Rio de Janeiro: Sextante, 2007.
FREIRE, Paulo. Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

D´AMBROSIO, U. **A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática.** In: BICUDO, M. A. V.(org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática** - tradução Hygino H. Domingues, 5ª Ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Miniaurélio **Século XXI: O Minidicionário de Língua Portuguesa;** Coordenação de edição, Margarida dos Anjos, Maria Baird Ferreira...[et al.]. 4ª edição. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

FIORENTINI D. **Alguns modos de ver e conceber o ensino de Matemática no Brasil**. Revista Zetetikê, Ano 3, nº 4, Unicamp, Campinas / São Paulo: 1995, p. 1-35.

FREITAS, J. L. M de. e BITTAR, M. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental. 2.** ed. Campo Grande: UFMS, 2004.

GOMES, M.L.M. **História do Ensino da Matemática: uma introdução**. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead/acervo/livros/historia%20do%20ensino.pdf>. Acesso em: 20/12/15 às 08h25mim.

GRANATO, Marcus e Luiz Roberto Martins de Miranda. 2011. **A Restauração na Trajetória de um Teodolito do Acervo do MAST.** Anais do Museu Paulista(Impresso) (19):47-80.

KENNEDY, E. S**. Tópicos de História da matemática para Uso em Sala de Aula**, volume 5: Trigonometria, trad. De Hygino H.Domingues - Ed Atual Ltda, 1992.

KLINGBERG, Lothar. **Introducción a la didáctica general. Editorial Pueblo y educación;** Ciudad de la Habana, 1972.

KLÜSENER, Renita et al. Ler e Escrever: **Compromisso de Todas as Áreas**. Porto Alegre: UFRGS, 2007.

LIBÂNEO, José Carlos (2006), **Didáctica,** SP, Brasil.

LIMA, E. L.: **Matemática e Ensino (Coleção do Professor de Matemática)** - 2a. edição. SBM: Rio de Janeiro, 2003.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino da matemátia**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**. 17ª ed. São Paulo, SP: Cortez, 2005.

MACHADO, Arthur Versiani. **Métodos e meios de ensino: categorias básicas da Tecnologia Educacional.** Publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso. Disponível em http://www.ufmt.br/revista/arquivo/rev16/ acessado em 19/11/2008 às 10h30min

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.** Editora Livraria da Física, 2009.

MENDES, Juliana Elvira. **A trigonometria na educação básica com foco em sua evolução histórica e suas aplicações contemporâneas**. 2013. 144 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. **O Ensino e as Propostas Pedagógicas**. In.: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, (p. 153 a 157).

MIGUEL, J. C. . **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas**., In: Sheila Zambello de Pinho; José Roberto Corrêa Saglietti. (Org.). Núcleos de Ensino - PROGRAD - UNESP. Ied. São Paulo - SP: Editora UNESP, 2005, v. I, p. 375-394.

MIORIM, Maria Ângela. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

NEHRING, Cátia Maria. POZZOBON, Marta Cristina Cezar. **Refletindo sobre o material manipulável e a ação docente.** 2007.

NÈRICI, Imídeo G. Didáctica: **uma introdução**. Editora Átlas. 2ed, São Paulo. 1989.

PARRA, C. Saiz, I. **Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre, Artmed (Artes Médicas). 1996. 258p.

PASSOS, C. L. B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática.** In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PAVANELLO, R .M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: consequências**. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2611>. Acesso em:08/10/15 às 10h16min.

Ribeiro, E. C. **Material concreto para o ensino de trigonometria**. 29 f. Monografia de Especialização – Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciência Exatas - ICEX, Belo Horizonte,2011.

ROCCO, Cristiani Maria Kusma; FLORES, Cláudia Regina. **O Ensino de geometria: problematizando o uso de Materiais Manipuláveis.** 2007. Disponivél em http//www.2rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/123-1 Agt5_rocco_ta..pdf. acessado em 28/11/2015.

ROCHA, José Lourenço da. **A Matemática do curso secundário na Reforma Francisco Campos.** Dissertação (Mestrado em Matemática). PUC/ RJ. Rio de Janeiro, 2001.

ROXO, Euclides. Colégio Pedro II – Externato, **Relatório concernente aos anos letivos de 1927 a 1929**. Apresentado ao Exmº Sr. Diretor Geral do Departamento Nacional de Ensino pelo prof. Euclides de Medeiros Guimarães Roxo – Diretor do mesmo Externato. Rio de Janeiro, 1930.

SÁ, I. **Os pcn's e o ensino fundamental em matemática: um avanço ou um retrocesso?,** s/d Disponível em: http://ilydio.files.wordpress.com/2007/08/pcns.pdf, Acessado dia 28/11/2014 às 13h14mim

SANTOS, V. M. **Ensino de Matemática em outros países: análise comparativa**. (Texto elaborado para prova escrita do Concurso de Livre Docência em Metodologia do Ensino de Matemática, na Faculdade de Educação da USP, 2008.

SILVA, Clóvis Pereira. **Matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento**. Curitiba: Editora da UFPR, 1992.

SILVEIRA, Daniel da Silva et al. **Reflexões sobre o ensino de matemática atrelado ao uso do material concreto nos anos iniciais de escolarização**. Disponível em:<http://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/5654_3244.pdf>. Acesso em: 22/11/15 às 00h25min.

SOUSA, Boaventura S. A **Universidade no século XXI: Para uma reforma democrática e emancipatória da Universidade**. 3. Ed. São Paulo: Cortez, 2010;

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Livraria Martins Fontes, 1989.

WEISZ, T. **O Diálogo entre o Ensino e a Aprendizagem**. São Paulo: Editora Ática, 2000.

ZILKHA, Esther. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos – Teodolito.** Dissertação de Mestrado – Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.