UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Aplicações do Estudo de Matrizes no Ensino Médio

Marcio Mendes Marcelino

RIO DE JANEIRO

2015

Marcio Mendes Marcelino

Aplicações do Estudo de Matrizes no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Silas Fantin

Rio de Janeiro
2015

Marcelino, Marcio Mendes

Aplicações do Estudo de Matrizes no Ensino Médio.
/ Marcio Mendes Marcelino – 2015

88. p.

1.Matemática 2. Álgebra. I. Título

CDU 536.21

Marcio Mendes Marcelino

APLICAÇÕES DO ESTUDO DE MATRIZES NO ENSINO MÉDIO

Trabalho Final de Curso apresentado a Coordenação de Pós-Graduação *Strictu-sensu* da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática pelo Programa PROFMAT.

Aprovada em 07 de outubro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Dr. Silas Fantin – UNIRIO - Orientador

Dr. José Teixeira Cal Neto - UNIRIO

Dr. Eduardo Dias Corrêa - UERJ

Dedicatória

À minha amada esposa Michele que me apoiou em todos os momentos e foi imprescindível para a conclusão deste curso. Aos meus filhos Daniel e Lucas, que foram o meu maior estímulo nessa jornada superando e compreendendo minha ausência por várias vezes.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso do programa de Pós-Graduação em matemática PROFMAT da UNIRIO, apresentamos como conceitos elementares abordados no ensino médio tais como potenciação e radiciação de números, além da noção de ângulos entre dois vetores podem ser estendidos para matrizes.

Entre as diversas aplicações do estudo de matrizes, destacamos: teoria de grafos, codificação e decodificação de uma mensagem, determinação do termo geral da sequência de Fibonacci e classificação de cônicas.

Optamos por utilizar uma linguagem adequada a alunos do ensino médio, visando que as mesmas pudessem ser compreendidas por um número maior de leitores.

Palavras-chaves: Potenciação, Radiciação e aplicações de Matrizes.

Abstract

In this work, we show how to extend to matrices some elementary concepts and operations already known in the real number context. We work in particular with exponentiation, extraction of roots and also with the notion of angle between two elements of a vector space.

Among the various applications of matrices, we focused on graph theory, cryptography, computation of terms in the Fibonacci sequence and classification of conics.

We chose to use a more basic language, since it is our hope that this work be read by high-school students.

Keywords: Potentiation, root extraction and matrix applications.

Agradecimentos

Primordialmente ao Senhor Deus Todo Poderoso, pois a Ele toda honra, toda glória e todo louvor, por ter me concedido saúde e forças para cumprir cada etapa deste curso que foi e será tão importante em minha vida. *("Não a nós, Senhor, não a nós, mas ao teu nome dá glória, por amor da tua benignidade e da tua verdade." Salmos 115.1*)

À minha amada esposa que, mesmo privada de minha presença por várias vezes, me deu todo apoio, carinho e compreensão para ultrapassar as dificuldades encontradas.

Aos meus filhos Daniel e Lucas, pelas orações, compreensão e carinho. Eles que juntamente com a minha esposa Michele foram o meu combustível nesta jornada.

Aos meus pais, familiares e amigos que me incentivaram a continuar estudando.

Em particular, a minha diretora Gisele Thomaz Lancates pela sua compreensão e ajuda que foram fundamentais para a realização do curso.

Aos professores da UNIRIO que se mostraram mais que docentes, foram companheiros e amigos durante todo o curso.

Em especial, ao professor Silas Fantin pelo extraordinário apoio durante todo o curso e na valiosa orientação deste Trabalho de Conclusão de Curso.

À CAPES, pelo suporte financeiro, que permitiu a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo de matrizes realizado no ensino médio está quase que exclusivamente ligada à resolução de sistemas lineares. Esta prática pode levar o aluno a formar o conceito de matriz como uma mera lista ordenada de números cuja finalidade é a discussão da solução de um sistema linear. Esta concepção encobre boa parte da funcionalidade de se operar com matrizes.

Neste texto procuramos romper com essa concepção, operando com as mesmas de forma não tradicional, ou seja, associando matrizes a outros conteúdos da matemática e fazendo aplicações dos mesmos. Um primeiro passo nesse sentido é analisar as matrizes como elementos de um conjunto e não apenas como tabelas. Desta forma, podemos pensar em questões como: Se a multiplicação entre matrizes está bem definida, será que o mesmo ocorre com as potências com matrizes? E quanto à radiciação? Será que, dispomos de um método para o cálculo das potências e raízes? O que se pode afirmar sobre existência e unicidade dessas raízes? Como as matrizes se comportam nessas operações? Questões com estas serão exploradas no decorrer deste texto.

A proposta deste trabalho é verificar como podemos estender os conceitos de potenciação, radiciação, ângulo e norma quando operamos com matrizes. Sempre que for possível, faremos um paralelo do comportamento desses conceitos com números reais e matrizes.

Além disso, faremos algumas aplicações desses conteúdos nas áreas de criptografia, teoria de grafos e na sequência de Fibonacci. Também utilizaremos o estudo de matrizes como instrumento facilitador no cálculo de áreas e volumes e na classificação de cônicas.

Mostraremos também que algumas dessas aplicações como, por exemplo, a teoria de grafos e criptografia, podem ser exploradas a partir de atividades simples, aplicáveis em turmas do ensino médio e que podem ser enriquecidas com um teor lúdico e interdisciplinar.

Apresentaremos agora uma descrição sucinta de cada capítulo.

No primeiro capítulo apresentamos os conceitos preliminares que serão necessários para a compreensão dos assuntos abordados. Ressaltamos que nem toda a teoria da qual utilizaremos está contida nesse capítulo. Conceitos mais sofisticados como diagonalização de matrizes, Teorema Espectral de Operadores Simétricos, entre outros, estão diluídos nos demais capítulos à medida que o desenvolvimento dos conteúdos exigia tais resultados. Esta diluição da teoria tem por finalidade tornar mais suave a leitura deste trabalho.

No segundo capítulo apresentamos algumas conexões entre matrizes e outros conteúdos explorados no ensino médio. Além disso, exibiremos um procedimento prático para o cálculo de potências e raízes de um determinado grupo de matrizes, as *matrizes diagonalizáveis*. Portanto, neste momento, se fez necessário abordar o conteúdo da diagonalização de matrizes.

No terceiro capítulo, veremos como resolver sistemas lineares de maneira simplificada através da fatoração LU, como determinar o termo geral da sequência de Fibonacci, como criptografar uma mensagem para a transmissão de informação de forma segura. Além disso, daremos uma aplicação da teoria de grafos e como realizar a classificação de cônicas.

CAPÍTULO 1

O presente capítulo destina-se a apresentar os pré-requisitos que serão necessários para a compreensão deste trabalho. Algumas definições e resultados mais específicos serão apresentados nas subseções dos capítulos posteriores. Procuramos, sempre que possível, apresentar cada conceito seguido de exemplos numéricos, para que o leitor tenha uma compreensão melhor dos conteúdos abordados.

Iniciaremos esse capítulo com alguns conceitos envolvendo apenas vetores de números reais, em seguida apresentaremos conceitos básicos envolvendo matrizes. Alguns conceitos mais sofisticados, ou que serão amplamente utilizados no decorrer do trabalho, como por exemplo, o procedimento para encontrar autovalores e autovetores, serão abordados em subseções específicas.

1.1 – Conceitos básicos com vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

As definições e resultados apresentados nesta subseção são apresentados para $\mathbb{R}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 2$, mas os conjuntos onde aplicaremos estes conceitos são o $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Definição 1.1 (Distância entre dois pontos de um plano): Sejam $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ pontos do plano π dados pelas suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY dado.

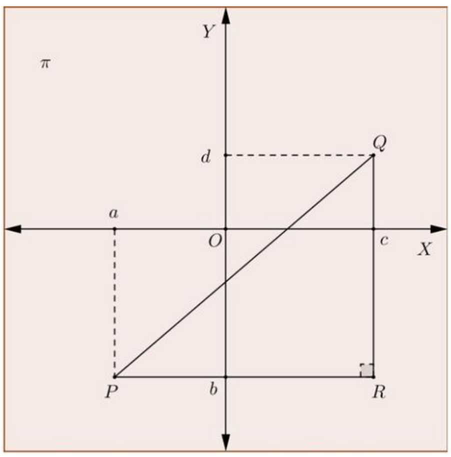


Figura 1.1: Distância entre dois pontos de um plano

Seja $R = (c, b)$ (figura 1.1). A distância de P a Q, que designamos $d(P, Q)$, é a medida da hipotenusa PQ do triângulo retângulo $\Delta\, PQR$ de catetos PR e QR.

Sendo a distância entre dois pontos de um eixo medida pelo módulo da diferença das suas coordenadas, as medidas desses catetos são, respectivamente,

$$|PR| = |a - c| \quad \text{e} \quad |QR| = |b - d|.$$

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$$d(P, Q) = |PQ| = \sqrt{|PR|^2 + |QR|^2} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Assim, a distância de $P = (a, b)$ a $Q = (c, d)$ é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças das coordenadas correspondentes.

O conceito de distância entre pontos pode ser estendido para pontos no espaço. Considerando os pontos $P, Q \in \mathbb{R}^3$, com $P = (x_1.y_1.z_1)$ e $Q = (x_2.y_2.z_2)$, a distância entre os pontos P e Q é dada por:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Podemos generalizar a definição de distância em $\mathbb{R}^n$. Seja $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pontos em $\mathbb{R}^n$, definimos $d(U,V)$ como:

$$d(U,V) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + \cdots + (v_n - u_n)^2}$$

Exemplo 1.2 Determine a distâncias entre os pontos A = (-3, 1) e B = (10, -4).

Solução:

$$d(A, B) = \sqrt{(10 - (-3))^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{169 + 25} = \sqrt{194}$$

Exemplo 1.3 Determine a distância entre os pontos C=(1, -2, 0) e D=(3, 4, -3).

Solução:

$$d(C, D) = \sqrt{(3-1)^2 + (4 - (-2))^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

Ao mencionarmos a palavra *vetor*, estaremos subentendendo que o mesmo possui uma *norma euclidiana* (ou *módulo*), uma *direção* e um *sentido*. Essas três componentes do vetor estão ilustradas na figura a seguir.

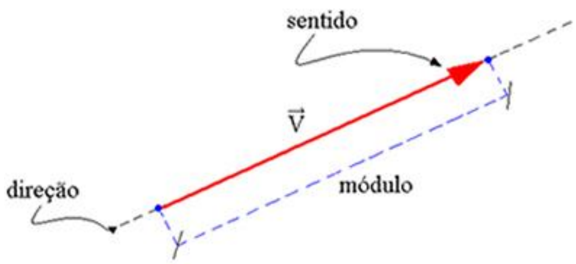


Figura 1.2: Vetor

Fonte: http://www.mundoeducacao.com/fisica/conceito-vetor.htm

Portanto, dados dois pontos distintos A e B em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) e estabelecendo uma ordem, ou seja, um sentido entre eles, fica definido um único vetor em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$). Denotamos esse vetor por $\overrightarrow{AB}$ (caso o sentido seja de A para B) ou $\overrightarrow{BA}$ (caso contrário). Observe que, com esta definição sempre temos $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$. O vetor $\overrightarrow{AA}$ é chamado de *vetor nulo* e será denotado por $\vec{0}$.

Chamamos de *norma* de um vetor e a denotamos por $\| \ \|$, a distância entre os pontos que definem este vetor. Por exemplo, nos exemplos 1.2 e 1.3 temos $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{194}$ e $\| \overrightarrow{CD} \| = 7$, respectivamente.

Exemplo 1.4 Dados os pontos A = (3, -2, 1) e B = (4, -1, 3) podemos definir um único vetor $\overrightarrow{AB}$ em $\mathbb{R}^3$, onde:

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-(-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

a direção de $\overrightarrow{AB}$ é a mesma da única reta em $\mathbb{R}^3$ que contém A e B, e o sentido é de A para B.

É comum encontramos a expressão $\| \vec{v} \|$ onde $\vec{v} = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ (ou $v = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$), sem denotar explicitamente qual o é o ponto de origem do vetor v. Nesses casos, o ponto de origem do vetor é o vetor nulo $\vec{0} = (0,0)$ (ou $\vec{0} = (0,0,0)$) e a norma desse vetor fica definida por $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ou $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). Podemos observar algumas propriedades da norma de um vetor que resultam diretamente da definição desse conceito, são elas:

$i)$ $\|v\| \geq 0 \quad e \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$;

$ii)$ $\|k.v\| = |k|.\|v\| \qquad onde\ k \in \mathbb{R}$.

Definição 1.5 (Operações com Vetores) Sejam $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{R}$. Definimos:

- *Soma* $\quad u + v = (u_1 + v_1\ , u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$

- *Multiplicação por escalar* $\quad k.v = (ku_1,\ ku_2, \ldots, ku_n)$

Exemplo 1.6 Dados os vetores *u* = (-3, 6) e *v* = (4, -2) determine o vetor 3*u*- 2*v*.

Solução:

3*u*- 2*v* = 3.*u* + 2.(-*v*) = 3.(-3, 6) + 2.(-4, 2) = (-9, 18) + (-8, 4) = (-17, 22)

Vetores cuja norma é igual a 1 são chamados de *vetores unitários*, por exemplo, os vetores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $v = (0, 1)$ são vetores unitários em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Em muitas situações, que veremos no decorrer deste trabalho, precisamos operar com vetores unitários e nem sempre eles surgem naturalmente. Mas, dado qualquer vetor $v \neq \vec{0}$ no $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) podemos *normalizar* esse vetor, ou seja, transformá-lo num vetor unitário que preserve a direção e sentido do vetor original. Esse vetor unitário, denotado por *w*, é dado por $w = \frac{1}{\|v\|}.v$. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 1.7 Encontre vetores unitários que possuam a mesma direção e sentido dos vetores *v* = (4, -3) e *u* = (1, -5, 7)

Solução:

Chamemos de *w* e *t* os vetores unitários associados à *v e u*, respectivamente.

$$\|v\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5 \quad \Rightarrow w = \frac{1}{5}(4,-3) \Rightarrow w = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + 7^2} = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow t = \frac{1}{5\sqrt{3}}(1,-5,7) \Rightarrow t = \left(\frac{\sqrt{3}}{15}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{7\sqrt{3}}{15},\right)$$

Definição 1.8 (Vetores Equipolentes) Dizemos que os vetores *AB* e *CD* são *equipolentes* e denotamos por $AB \equiv CD$, quando satisfazem às seguintes três propriedades:

i) tem a mesma norma;
ii) tem o mesmo sentido;
iii) tem a mesma direção.

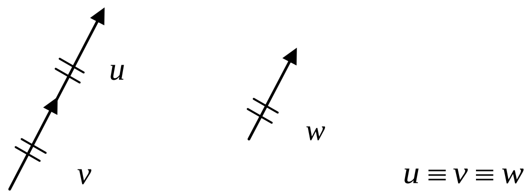


Figura 1.3: Vetores Equipolentes

Observe que dado qualquer vetor em $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$, temos uma infinidade de vetores equipolentes a esse vetor dado. Além disso, dados dois vetores distintos *u* e *v*, sempre podemos encontrar um vetor equipolente a um desses vetores, de tal forma que ambos tenham o mesmo ponto inicial, ou seja, sempre há um ângulo entre dois vetores quaisquer em $\mathbb{R}^2$ ou no $\mathbb{R}^3$. (Figura 1.4)

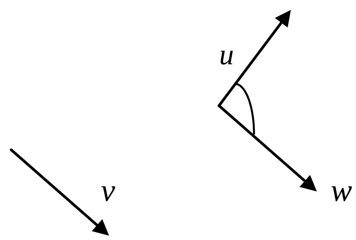


Figura 1.4: Vetores Equipolentes $w \equiv v$

Definição 1.9 (Ângulo entre Vetores) Sejam *u* e *v* dois vetores distintos em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$). Definimos o *ângulo entre u e v*, denotado por $\measuredangle u,v$ como sendo o menor ângulo formado pelos vetores *u* e *v*. Dessa forma temos $0 \leq \measuredangle u,v \leq \pi$.

O próximo conceito a ser abordado é o *produto interno*, que é uma função $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \mathrm{x} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que associa um par de vetores a um número real. Esse produto tem aplicação direta no cálculo de volume de sólidos no espaço e ângulo entre matrizes (assuntos que serão explorados no próximo capítulo).

Definição 1.10 (Produto interno): Seja $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$. Um *produto interno* sobre $\mathbb{R}^n$ é uma função dada por $\langle\ ,\ \rangle$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que atribui a cada par ordenado de vetores u e v em $\mathbb{R}^n$ um número real $\langle u, v\rangle$ que satisfaz as propriedades a seguir:

i.	$\langle v, v\rangle \geq 0$	$\forall\ v \in \mathbb{R}^n$ e $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$
ii.	$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$	$\forall\ u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
iii.	$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$	$\forall\ u, v, w \in \mathbb{R}^n$
iv.	$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$	$\forall\ u, v \in \mathbb{R}^n$.

Definimos como *produto escalar*, também chamado de *produto interno canônico*, a função que atribui aos vetores $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ e $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ ambos em $\mathbb{R}^n$ ao número real

$$\langle u,v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

é fácil verificar que o produto escalar satisfaz as propriedades da definição 1.10. Observe que com essa definição podemos reescrever a norma de um vetor $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n) \in \mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

Exemplo 1.11 Determine o produto escalar entre os vetores *u* = (-3, 2, 0) e *v* = (4, -3, 8).

Solução:

$\langle u,v\rangle = \langle(-3,2,0),(4,-3,8)\rangle = -3.4 + 2.(-3) + 0.8 = -12 - 6 = -1$

Definição 1.12 (Projeção Ortogonal) Sejam *u* e *v* dois vetores distintos em $\mathbb{R}^n$. A *projeção ortogonal* do vetor *u* sobre *v*, denotado por $proj_v\, u$, é o vetor dado por:

$$proj_v u = \frac{\langle u\,,\,v\rangle}{\|v\|^2}v$$

Definição 1.13 (Norma da Projeção Ortogonal) Sejam *u* e *v* dois vetores distintos em $\mathbb{R}^n$. A *norma da projeção ortogonal de u sobre v* é dada por:

$$\|proj_v u\| = \frac{|\langle u\,,\,v\rangle|}{\|v\|}$$

Abaixo, na figura 1.5, temos a interpretação geométrica da projeção ortogonal e sua norma. Onde *N* é um vetor que é perpendicular aos vetores *u* e *v*, (mais adiante, veremos que o vetor *N* é o produto vetorial dos vetores *u* e *v)* e $h = proj_N w$.

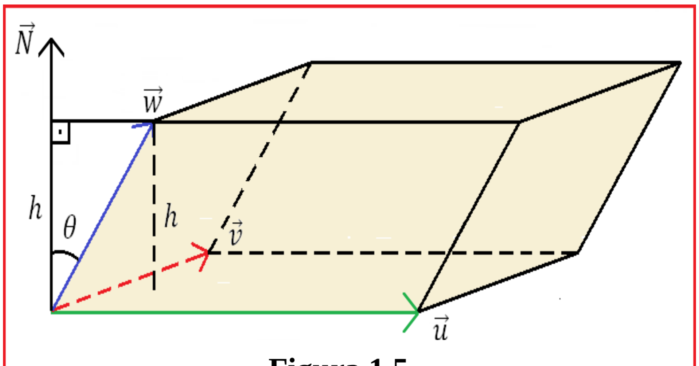


Figura 1.5

.

Exemplo 1.14 Encontre as componentes da projeção ortogonal do vetor $u=(1,1,1)$ sobre o vetor $v=(0,2,-1)$.

Solução:

$$proj_v u = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v = \frac{\langle (1,1,1),(0,2-1)\rangle}{0^2+2^2+(-1)^2}(0,2-1) = \frac{0+2-1}{5}(0,2-1)$$
$$= \left(0,\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$$

As definições de projeção ortogonal e norma da projeção ortogonal (definições 1.12 e 1.13) são muito úteis no cálculo do ângulo entre esses vetores. A figura 1.6 ilustrará a construção de uma expressão que determina o ângulo θ em função das normas dos vetores *u* e *v*, e do produto interno entre ambos.

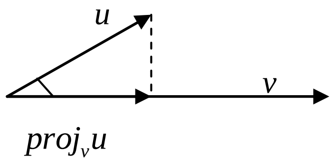


Figura 1.6

Escrevendo $\cos\theta$ em função das normas dos vetores *u* e $proj_v u$, temos:

$$\cos\theta = \frac{\|proj_v u\|}{\|u\|} = \frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \qquad (1)$$

como $-1\le\cos\theta\le 1$, podemos reescrever a equação (1) da seguinte forma:

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \qquad (2)$$

logo temos $\theta = arc\cos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\right)$.

A equação (2) nos fornece outra expressão que define o produto interno, pois podemos reescrevê-la como:

$$\langle u,v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta \qquad (3)$$

com isso, mostramos a equivalência entre o produto escalar e a equação (2), ou seja,

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$$
$$u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

A definição de produto interno dada pela equação (3) tem um caráter mais geométrico ao passo que a definição 1.10, tem um caráter mais algébrico. Uma consequência direta desse caráter geométrico é a caracterização de vetores ortogonais. Pela equação (3), se tivermos $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow u \perp v$. Observe que não é possível chegar a essa conclusão apenas pela definição 1.10. Doravante, usaremos a definição de produto interno que for mais conveniente, de acordo com o problema que estaremos trabalhando.

Exemplo 1.15 Encontre o ângulo θ entre os vetores *u* = (3, 1, 4) e *v* = (2, 2, -4).

Solução:

$$\cos\theta = \frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{3.2 + 1.2 + 4.(-4)}{\sqrt{3^2+1^2+4^2}.\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}} = \frac{-8}{\sqrt{26}\sqrt{24}} = \frac{-8}{4\sqrt{39}} = \frac{-2}{\sqrt{39}}$$

$$\theta = arc\cos\left(\frac{-2}{\sqrt{39}}\right)$$

Observe que $\cos\theta < 0$ e $0 \le \theta \le \pi$, então θ é obtusângulo.

Definição 1.16 (Combinação Linear): Sejam os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$, em $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ $(n \ge 2)$ e os números reais $a_1, a_2, \dots, a_k$. Chamaremos de *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$, o vetor $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k$ também pertencente a $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.17 Escreva o vetor *v* = (3, -5) como combinação linear dos vetores *u* = (2, -1) e *t* = (0, 4).

Solução: Precisamos encontrar os valores de *a* e *b* tais que *au* + *bt* = *v*, ou seja, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2a + 0b = 3 \\ -a + 4b = -5 \end{cases}$$

cuja solução é $a = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{7}{8}$. Portanto temos $(3,-5) = \frac{3}{2}(2,-1) - \frac{7}{8}(0,4)$.

Definição 1.18 (Dependência e Independência Linear): Dados os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}\ (n \geq 2)$ e os números reais $a_1, a_2, \ldots, a_k$, diremos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é *linearmente independente* (LI) se a equação $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0$ implica em $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Se existir algum $a_i \neq 0$ diremos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é *linearmente dependente* (LD).

Exemplo 1.19 Verifique se os vetores (2, 2, 2), (0, 0, 3) e (0, 1, 1) são LI ou LD.

Solução:

Precisamos saber quais os valores de a, b e c em $a(2,2,2) + b(0,0,3) + c(0,1,1) = (0,0,0)$, ou seja, precisamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2a + 0b + 0c = 0 \\ 2a + 0b + c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

da primeira equação temos $a = 0$, substituindo $a = 0$ na segunda equação temos $c = 0$, substituindo $a = 0$ e $c = 0$ na terceira equação temos $b = 0$. Portanto, $a = b = c = 0$, ou seja, (2,2,2), (0,0,3) e (0,1,1) são LI.

É fácil verificar que existem a, b e $c \in \mathbb{R}$, tais que qualquer vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $a(2,2,2) + b(0,0,3) + c(0,1,1)$. Dizemos então que os vetores (2,2,2), (0,0,3) e (0,1,1) *geram* o espaço $\mathbb{R}^3$ e denotamos por $[(2,2,2),(0,0,3),(0,1,1)] \equiv \mathbb{R}^3$.

Exemplo 1.20 Mostre que os vetores (3,1,4), (2,-3,5), (5,-2,9) e (1,4,-1) são LD.

Solução: Precisamos mostrar que, pelo menos um dos coeficientes a, b, c ou d é diferente de zero na equação a(3,1,4) + b(2,-3,5) + c(5,-2,9) + d(1,4,-1) = (0,0,0). Observe que (3,1,4) + (2,-3,5) =(5,-2,9), fazendo $a = b = 1$, $c = -1$ e $d = 0$ temos:

1.(3,1,4) + 1.(2,-3,5) – 1(5,-2,9) + 0.(1,4,-1) = (3+2-5+0, 1-3+2+0, 4+5-9+0) = (0,0,0)

Portanto, os vetores (3,1,4), (2,-3,5), (5,-2,9) e (1,4,-1) são LD.

Definição 1.21 (Base): Diremos que um conjunto finito de vetores do $\mathbb{R}^n$ é uma base do $\mathbb{R}^n$ se todo vetor $v \in \mathbb{R}^n$ puder ser escrito como combinação linear dos vetores deste conjunto e todos os elementos deste conjunto sejam realmente necessários para gerar $\mathbb{R}^n$. Em linguagem algébrica, diremos que o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores de $\mathbb{R}^n$, será uma base de $\mathbb{R}^n$ se:

$i)$ $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI;

$ii)$ $[v_1, v_2, \ldots, v_n] \equiv \mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.22: O conjunto $e_1 = (1,0,0), e_1 = (0,1,0)\ e\ e_3 = (0,0,1)$ é claramente uma base do $\mathbb{R}^3$, e devido a sua simplicidade é conhecida como *base canônica* de $\mathbb{R}^3$. Estes vetores são denominados referencial padrão do plano, pois as coordenadas de um vetor arbitrário $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nesta base, são dadas pelas coordenadas do próprio vetor.

$$v = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

É comum denotar os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ por $i = (1,0,0),\ j = (0,1,0)$ e $k = (0,0,1)$. Observe ainda que todos os vetores da base canônica são unitários.

1.2 – Conceitos Básicos sobre Matrizes

Nesta subseção apresentaremos algumas matrizes especiais e alguns procedimentos básicos com essas matrizes, como por exemplo, as operações com matrizes e o cálculo da matriz inversa. Outras técnicas mais específicas envolvendo matrizes serão apresentadas em outras subseções nos demais capítulos.

Uma lista de números reais (ou complexos) dispostas em linhas e colunas é o que chamamos de *matriz*. Para representar uma matriz com *m* linhas e *n* colunas usamos a notação $A_{m\,x\,n} = a_{ij}$, onde *A* é o nome da matriz (pode ser utilizada qualquer letra maiúscula), *i* é o número de linhas e *j* é o número de colunas $(1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n)$ e a_{ij} é o elemento que está na *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna.

Exemplo 1.23 A matriz $A_{3\,x\,4} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 6 & 8 \\ -3 & \frac{3}{4} & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz com 3 linhas e 4 colunas

Uma matriz $A_{n\,x\,n}$ é dita uma *matriz quadrada* quando o número de linhas for igual ao número de colunas. A matriz $A_{n\,x\,n}$ também é chamada de matriz quadrada de ordem *n*.

Exemplo 1.24 As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ são matrizes de ordens 2, 3 e 4 , respectivamente.

Uma matriz que só possui uma linha é chamada de *matriz linha*. Analogamente se define uma *matriz coluna*.

Exemplo 1.25 As matrizes $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1{,}2 \\ -3 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes linha e coluna, respectivamente.

Uma matriz em que todos os elementos são nulos é chamada de *matriz nula*.

Exemplo 1.26 As matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes nulas.

Dada uma matriz quadrada $A_{n\,x\,n}$, os elementos a_{ii} com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ são chamados *diagonal* da matriz *A*. Algumas características dos elementos da diagonal de uma matriz *A* determinam um tipo específico de matriz. Vejamos algumas delas.

Uma matriz quadrada $A_{n\,x\,n}$ é chamada de *matriz diagonal* se todos os elementos que não estão na diagonal são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo 1.27 As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ são matrizes diagonais.

Uma matriz quadrada $I_{n\,x\,n}$ é chamada de *matriz identidade* se todos os elementos da diagonal são iguais a 1 e os demais elementos são nulos, ou seja, $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$. Utilizamos sempre a notação I_n para designar a matriz identidade de ordem *n*.

Exemplo 1.28 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

são exemplos de matrizes identidades.

Uma matriz quadrada onde todos os elementos $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$, ou seja, com todos elementos abaixo da diagonal iguais a zero, é chamada de *matriz triangular* *inferior*. Analogamente definimos a *matriz triangular superior* como a matriz quadrada onde $a_{ij} = 0 \;\; \forall i > j$.

Exemplo 1.29 As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -7 & 0 \\ 13 & 9 & 3{,}1 & 1 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes triangulares superior e inferior, respectivamente.

Seja $A_{m\,x\,n}$ uma matriz qualquer chamamos de *matriz transposta de A*, e denotamos por A^T, a matriz cujas linhas são as colunas da matriz *A* em determinada ordem (ou, equivalentemente, a matriz cujas colunas são as linhas da matriz *A*, respeitando a ordem das mesmas).

Exemplo 1.30 Seja $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 9 \\ 6 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Dadas as matrizes *A* e *B*, ambas com *m* linhas e *n* colunas, afirmar que $A = B$ implica dizer que $a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall\, 1 \le i \le m \;\; e \;\; \forall 1 \le j \le n$. Vejamos agora como estão definidas as operações aritméticas com matrizes.

Definição 1.31 (Adição de Matrizes) Sejam dadas as matrizes $A_{m\,x\,n} = a_{ij}$ e $B_{m\,x\,n} = b_{ij}$. Definimos a matriz $(A+B)_{m\,x\,n} = c_{ij}$, onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Definição 1.32 (Multiplicação por Escalar) Dados uma matriz A e um escalar $k \in \mathbb{R}$, definimos a matriz $B = k\,A$ como $B = b_{ij}$ onde $b_{ij} = k\,a_{ij}$.

Observe que com estas definições também fica definida a operação de subtração com matrizes, uma vez que dadas duas matrizes *A* e *B*, de mesmo tamanho, definimos $A - B = A + (-1)B$.

Exemplo 1.33 Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, determine a matriz $3A - 2B$.

Solução:

$$3A - 2B = 3A + (-2)B = 3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 15 & 12 & 3 \\ -9 & 21 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 4 & -6 & -8 \\ 0 & -10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 19 & 6 & -5 \\ -9 & 11 & 2 \end{bmatrix}$$

Definição 1.36 (Multiplicação de Matrizes) Sejam $A_{m\,x\,n} = a_{ij}$ e $B_{n\,x\,p} = b_{ij}$. Definimos $(AB)_{m\,x\,p} = c_{uv}$, onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}\, b_{kv} = a_{u1}\, b_{1v} + \cdots + a_{un}\, b_{nv}$$

Observe que pela definição acima o produto *AB* só faz sentido se o número de colunas da matriz *A* for igual ao número de linhas da matriz *B*. Caso isto não ocorra o produto *AB* não está definido. Outra observação é que o elemento c_{ij} (o elemento da *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna da matriz *AB*) é dado pelo produto escalar da *i*-ésima linha da matriz *A* pela *j*-ésima coluna da matriz *B*. Em outras palavras, o produto *AB* entre as matrizes *A* e *B* pode ser visto como o produto das matrizes linhas de *A* pelas matrizes colunas de *B*. O exemplo abaixo ilustrará melhor esta operação.

Exemplo 1.34 Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine os produtos *AB*.

Solução: $AB = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 + 0.0 & 3.(-1) + 0.2 \\ -1.4 + 2.0 & -1.(-1) + 2.2 \\ 1.4 + 1.0 & 1.(-1) + 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

É fácil ver que a multiplicação de matrizes não satisfaz a propriedade comutativa.

Exemplo 1.35 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Determine os produtos *AB* e *BA*.

Solução:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O estudo de matrizes também está intimamente ligado à resolução de sistemas lineares. Por exemplo, dado o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 5y \quad\quad = 1 \\ 2x \quad\quad + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

podemos associar a este sistema as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$, denominada *matriz dos coeficientes*;

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$, denominada *matriz das incógnitas*;

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$, denominada *matriz dos termos independentes*;

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$, denominada *matriz ampliada*.

Observe que o sistema original pode ser escrito na forma matricial como $AX = B$. Para resolver sistemas lineares utilizando matrizes precisamos fazer o que chamamos de *operações elementares* sobre as linhas da matriz ampliada do sistema. As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

1) A permuta da *i*-ésima linha pela *j*-ésima linha, denotado por $l_i \leftrightarrow l_j$;
2) A multiplicação da *i*-ésima linha por um escalar *k* não nulo, denotado por $l_i = kl_i$;
3) A substituição da *i*-ésima linha pela *i*-ésima linha adicionada de *k* vezes a *j*-ésima linha, denotado por $l_i = l_i + kl_j$.

A ordem com que essas operações são efetuadas sobre a matriz ampliada é no sentido de deixar essa matriz na *forma escalonada por linhas, ou* simplesmente, *forma escalonada*, que definiremos a seguir.

Definição 1.36 (Forma Escalonada por Linhas) Dada uma matriz qualquer dizemos que ela está na forma escalonada por linhas quando ela satisfizer as seguintes propriedades:

i) Se uma linha não consistir inteiramente de zeros, então o primeiro elemento não nulo da linha é 1. Chamamos esse número 1 de *pivô*;

ii) Se existirem linhas constituídas inteiramente de zeros, então elas estão agrupadas juntas nas linhas inferiores da matriz;

iii) Em quaisquer duas linhas sucessivas que não consistam só de zeros, o pivô da linha inferior ocorre mais à direita do que o pivô da linha superior;

iv) Cada coluna que contém um pivô tem zeros nas demais entradas.

Exemplo 1.37 Reduza a forma escalonada por linhas a matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_2 = l_2 - 2l_1 \\ l_3 = l_3 - 3l_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ l_2 = -\frac{1}{5} l_2 \right.$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_1 = l_1 + 2l_2 \\ l_3 = l_3 - 7l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{5} & -3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{63}{5} & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ l_3 = -\frac{5}{63} l_3 \right.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{5} & -3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{65}{63} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_1 = l_1 - \frac{23}{5} l_3 \\ l_2 = l_2 - \frac{4}{5} l_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{110}{63} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{63} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{65}{63} \end{bmatrix}$$

Retomando o sistema (1), vamos escalonar a matriz ampliada e verificar como isto facilita a resolução do mesmo.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{ l_1 = \frac{1}{3} l_1 \right. \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_2 = l_2 - 2l_1 \\ l_3 = l_3 - 5l_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{10}{3} & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{22}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{ l_2 = -\frac{3}{10} l_2 \right. \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} \\ 0 & -\frac{22}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_1 = l_1 - \frac{5}{3} l_2 \\ l_3 = l_3 + \frac{22}{3} l_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & -\frac{34}{5} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{ l_3 = -\frac{5}{16} l_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_1 = l_1 - \frac{1}{2} l_3 \\ l_2 = l_2 + \frac{3}{10} l_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{bmatrix} \right.$$

Como a última coluna representa a matriz coluna dos termos independentes, podemos reescrever o sistema como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{16} \\ -\frac{1}{16} \\ \frac{17}{8} \end{bmatrix}$$

que determina a solução do sistema $x = \frac{7}{16}$, $y = -\frac{1}{16}$ e $z = \frac{17}{8}$.

Definição 1.38 (Matriz Inversa) Seja *A* uma matriz quadrada de ordem *n*. Se existir uma matriz quadrada *B* de ordem *n*, tal que $AB = BA = I_n$, diremos que a matriz *A* é *invertível* e a matriz *B* é chamada de inversa da matriz *A* que será denotada por $A^{-1} = B$

Exemplo 1.39 Verifique se a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

Solução:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.\frac{2}{7} + 3.\frac{3}{7} & -1.\frac{2}{7} + 3.\frac{1}{7} \\ 3.\frac{2}{7} - 2.\frac{3}{7} & 3.\frac{2}{7} - 2.\frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7}.(-1) + \frac{3}{7}.3 & \frac{2}{7}.(-1) + \frac{1}{7}.3 \\ \frac{2}{7}.3 + \frac{3}{7}.(-2) & \frac{2}{7}.3 + \frac{3}{7}.(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Portanto, é a inversa de $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Neste momento, cabem algumas reflexões sobre matriz inversa, como: se existe um procedimento para determinar a inversa de uma matriz, em que condições podemos afirmar a existência da inversa de uma matriz dada. Inicialmente apresentaremos um método para determinar a inversa de uma matriz e em seguida forneceremos uma condição necessária e suficiente para garantir a existência da inversa de uma matriz.

Pela definição 1.38, a inversa de uma matriz está definida apenas para matrizes quadradas, logo não tem sentido em falar da inversa de uma matriz não quadrada. Seja A uma matriz de ordem n. Construamos a matriz $\left[A|I_n\right]_{n\,x\,2n}$, em seguida escalonamos essa matriz até obtermos sua forma escalonada por linhas. Se A for invertível, então a forma escalonada por linhas de A é I_n, e se aplicarmos as mesmas operações elementares que foram aplicadas na matriz A, na mesma ordem, em I_n obtemos A^{-1}. Estes são dois teoremas cujas demonstrações podem ser consultadas em **[2]** p.86.

Exemplo 1.40 Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$, determine A^{-1}.

Solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow l_1 = \frac{1}{2} l_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} l_2 = l_2 - 3l_1 \\ l_3 = l_3 - 4l_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow l_2 \leftrightarrow l_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow l_2 = -\frac{1}{3} l_2 \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow l_3 = \frac{2}{7} l_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} l_1 = l_1 + \frac{1}{2} l_3 \\ l_2 = l_2 + 3l_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{array}\right]$$

Portanto, temos $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{13}{21} & \frac{6}{7} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{bmatrix}$.

Definição 1.41 (Matriz Simétrica) Dada uma matriz quadrada *A*, dizemos que *A* é uma matriz simétrica quando *A* for igual a sua transposta, ou seja, quando $A = A^T$.

Exemplo 1.42 A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica, pois $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} = A$.

Definição 1.43 (Matriz Ortogonal) Dada uma matriz quadrada *A* de ordem *n*, dizemos que *A* é uma *matriz ortogonal* se $A\,.\,A^T = A^T.A = I_n$. Em outras palavras, podemos definir que *A* é matriz ortogonal se $A^{-1} = A^T$.

Exemplo 1.44 A matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é ortogonal, pois:

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + sen^2\theta & -\cos\theta\, sen\theta + sen\theta\cos\theta \\ -sen\theta\cos\theta + \cos\theta\, sen\theta & sen^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + sen^2\theta & \cos\theta\, sen\theta - sen\theta\cos\theta \\ sen\theta\cos\theta - \cos\theta\, sen\theta & sen^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Definição 1.45 (Matriz Coordenada): Sejam $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ onde $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$. Chamamos os números reais $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de coordenadas de v em relação à base β e denotamos por

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.46 Considere a base $\beta = \{(2,0),(0,-2)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e o vetor $v = (-8,10)$. Podemos escrever $v = -4(2,0) - 5(0,-2)$, logo $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \end{bmatrix}$.

1.3 – Matriz de Mudança de Base

Em determinadas situações dispomos de uma base para $\mathbb{R}^n$ na qual a resolução de problemas é trabalhosa, porém se tomarmos outra base, o mesmo problema fica significativamente mais simples. Este recurso é conhecido na literatura como *mudança de base*, veremos que essa mudança pode ser feita a partir de uma matriz, chamada matriz mudança de base. Uma aplicação de mudança de base será abordada na seção 2.4. Mostraremos como construir essa matriz e fazer a mudança de base.

Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ bases do $\mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Então podemos escrever:

$$v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \qquad e \qquad v = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n \qquad (*)$$

Na forma matricial temos:

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad e \qquad [v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Como α e β são bases do $\mathbb{R}^n$, podemos expressar de forma única os vetores de β como combinação linear dos vetores de α. Desta forma temos:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n \\ \qquad \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{cases} \qquad (**)$$

Substituindo (**) em (*) temos:

$$v = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_n w_n$$
$$v = (a_{11}u_1 + \cdots + a_{n1}u_n)y_1 + \cdots + (a_{1n}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n)y_n$$
$$v = (a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n)u_1 + \cdots + (a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n)u_n$$

Podemos reescrever (*) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{n1}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + \cdots + a_{n2}y_n \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

ou, na forma matricial escrevemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ é chamada de *matriz de mudança de base* β *para a base* α e é denotada por $[I]_{\alpha}^{\beta}$. Observe que temos a seguinte relação entre as coordenadas de um vetor *v* nas bases α e β.

$$[v]_{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\beta}[v]_{\beta}$$

Exemplo 1.47 Considere as bases α e β do $\mathbb{R}^2$, onde $\alpha = \{(2, 2), (4, -1)\}$ e $\beta = \{(1, 3), (-1, -1)\}$. Determine:

a) a matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$;

b) as coordenadas do vetor $[w]_{\beta}$, onde $[w]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Solução:

a) Vamos escrever os vetores de α como combinação linear dos vetores de β.

$$(2,2)=a_{11}(1,3)+a_{21}(-1,-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{11}-a_{21}=2 \\ 3a_{11}-a_{21}=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_{11}=0 \quad e \quad a_{21}=-2$$

$$(4,-1)=a_{11}(1,3)+a_{21}(-1,-1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{12}-a_{22}=4 \\ 3a_{12}-a_{22}=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a_{12}=-\frac{5}{2} \quad e \quad a_{22}=-\frac{13}{2}$$

Portanto, $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix}$.

b) $[w]_\beta = [I]_\beta^\alpha \, [w]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3-\frac{5}{2}.(-5) \\ -2.3-\frac{13}{2}.(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{2} \\ \frac{53}{2} \end{bmatrix}$

Definição 1.48 (Transformação Linear): Uma *transformação linear* é uma função $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com n e m números inteiros positivos, que satisfaz as seguintes condições:

i. $T(u+v)=T(u)+T(v)$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$.
ii. $T(kv)=kT(v)$, para todo $k \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Ressaltamos que quando se tem $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, T é chamado de *operador linear*.

A seguir daremos alguns exemplos de transformações lineares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, assim como a consequência das mesmas no plano e no espaço.

Exemplo 1.49 Para as transformações considere $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) $T(x_1,x_2)=(x_1,-x_2)$, onde *T* gera a reflexão dos vetores em relação ao eixo *x*.

b) $T(x_1,x_2)=(-x_1,x_2)$, onde *T* gera a reflexão dos vetores em relação ao eixo *y*.

c) $T(x_1,x_2)=(-x_1,-x_2)$, onde *T* gera a reflexão dos vetores em relação a origem.

d) $T(x_1,x_2)=(x_1\cos\theta - x_2\, sen\theta,\, x_1\, sen\theta + x_2\cos\theta)$, onde T gera a rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário.

Exemplo 1.50 Para as transformações considere $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,-x_3)$, onde *T* gera a reflexão dos vetores em relação ao plano *xy*.

b) $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2,x_3)$, onde *T* gera a reflexão dos vetores em relação ao plano *xz*

c) $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$, onde T gera a reflexão dos vetores em relação ao plano *yz*.

As transformações lineares estão intimamente ligadas ao estudo de matrizes. De certa forma, podemos afirmar que o estudo das transformações lineares fica reduzido ao estudo das matrizes, ou seja, dada qualquer transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ podemos encontrar uma matiz $A_{m\,x\,n}$, tal que

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_m) = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Essa matriz A está associada à T e as bases α e β de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Em outras palavras, temos a relação $A = [T]^{\alpha}_{\beta}$. Quando as bases α e β não forem mencionadas, tomaremos α e β como as bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

Exemplo 1.51 Apresentaremos as matrizes associadas às transformações lineares exploradas no exemplo 1.48, nesse exemplo foi tomada a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

$$a)\ T(1,0) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (1,0) \Rightarrow a_{11} = 1\ e\ a_{21} = 0$$
$$T(0,1) = a_{12}(1,0) + a_{22}(0,1) = (0,-1) \Rightarrow a_{12} = 0\ e\ a_{22} = -1$$
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = (x_1, -x_2)$$

$$b)\ T(1,0) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (-1,0) \Rightarrow a_{11} = -1\ e\ a_{21} = 0$$
$$T(0,1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (0,1) \Rightarrow a_{12} = 0\ e\ a_{22} = 1$$
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = (-x_1, x_2)$$

$$c)\ T(1,0) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (-1,0) \Rightarrow a_{11} = -1\ e\ a_{21} = 0$$
$$T(0,1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (0,-1) \Rightarrow a_{12} = 0\ e\ a_{22} = -1$$
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(x,y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 \end{bmatrix} = (-x_1, -x_2)$$

$$d)\, T(1,0) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (\cos\theta,\, sen\theta) \Rightarrow a_{11} = \cos\theta \;\; e \;\; a_{21} = sen\theta$$

$$T(0,1) = a_{11}(1,0) + a_{21}(0,1) = (-sen\theta, \cos\theta) \Rightarrow a_{12} = -sen\theta \; e \; a_{22} = \cos\theta$$

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos\theta - x_2 \; sen\theta & sen\theta + x_2 \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 \cos\theta - x_2 \; sen\theta,\, x_1 \; sen\theta + x_2 \cos\theta) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Exemplo 1.52 Apresentaremos as matrizes associadas às transformações lineares exploradas no exemplo 1.50, nesse exemplo foi tomada a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

$$a)\, T(1, 0, 0) = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(0, 0, 1) = (1, 0, 0) \Rightarrow a_{11} = 1 \; e \; a_{21} = a_{31} = 0$$

$$T(0, 1, 0) = a_{12}(1, 0, 0) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(0, 0, 1) = (0, 1, 0) \Rightarrow a_{12} = a_{32} = 0 \; e \; a_{22} = 1$$

$$T(0, 0, 1) = a_{13}(1, 0, 0) + a_{23}(0, 1, 0) + a_{33}(0, 0, 1) = (0, 0, -1) \Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0 \; e \; a_{23} = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = (x_1, x_2, -x_3)$$

$$b)\, T(1, 0, 0) = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(0, 0, 1) = (1, 0, 0) \Rightarrow a_{11} = 1 \; e \; a_{21} = a_{31} = 0$$

$$T(0, 1, 0) = a_{12}(1, 0, 0) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(0, 0, 1) = (0, -1, 0) \Rightarrow a_{12} = a_{32} = 0 \; e \; a_{22} = -1$$

$$T(0, 0, 1) = a_{13}(1, 0, 0) + a_{23}(0, 1, 0) + a_{33}(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0 \; e \; a_{23} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 \end{bmatrix} = (x_1, -x_2, x_3)$$

$$c)\, T(1, 0, 0) = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(0, 0, 1) = (-1, 0, 0) \Rightarrow a_{11} = -1 \; e \; a_{21} = a_{31} = 0$$

$$T(0, 1, 0) = a_{12}(1, 0, 0) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(0, 0, 1) = (0, 1, 0) \Rightarrow a_{12} = a_{32} = 0 \; e \; a_{22} = 1$$

$$T(0, 0, 1) = a_{13}(1, 0, 0) + a_{23}(0, 1, 0) + a_{33}(0, 0, 1) = (0, 0, 1) \Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0 \; e \; a_{23} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = (-x_1, x_2, x_3)$$

1.4 – Autovalores e Autovetores

Definição 1.53 (Autovalores e Autovetores) Seja $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear. Se existirem $v \in \mathbb{R}^n$, com $v \neq 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T\,v = \lambda\,v$, λ é um *autovalor* e v um *autovetor* de T associado a λ.

Geometricamente, os autovetores de T são vetores em $\mathbb{R}^n$ que preservam a direção quando aplicamos T, e os autovalores indicam se os autovetores sofreram uma contração $(0 < \lambda < 1)$ ou uma dilatação $(\lambda > 1)$. Observe ainda que se $\lambda = 1$ for o único autovalor, então temos que T é um operador identidade e todos os vetores permanecem inalterados quanto à direção, sentido e norma. Autovalores negativos indicam que os autovetores mudaram de sentido podendo (ou não) ter sofrido alguma contração $(-1 < \lambda < 0)$, ou uma dilatação $(\lambda < -1)$ ou apenas uma reflexão em torno da origem $(\lambda = -1)$.

A seguir daremos alguns exemplos de autovetores com operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, cuja finalidade é explorar o aspecto geométrico desses vetores. Mais adiante apresentaremos um método algébrico para encontrar esses autovetores.

Exemplo 1.54 Considere a transformação linear do exemplo 1.49 (a), dada por $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Vimos que essa transformação gera uma reflexão em torno do eixo x.

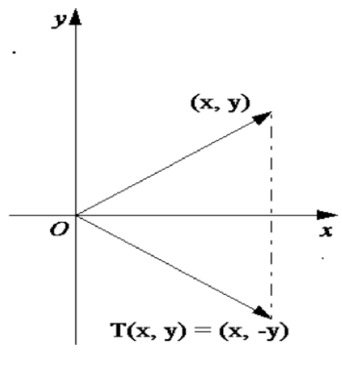


Figura 1.7

Afirmamos que o único autovetor de T é o $v = (1,0)$ Pois os únicos vetores em $\mathbb{R}^2$ que permanecem com a mesma direção quando refletidos em relação ao eixo x são os vetores que estão sobre o eixo x, ou seja, vetores do tipo $(x,0)$ com $x \in \mathbb{R}$, e esses vetores podem ser escritos como combinação linear do vetor $v = (1,0)$. ■

Exemplo 1.55 Considere a transformação linear do exemplo 1.50 (b), dada por $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2,x_3)$. Vimos que essa transformação gera uma reflexão em torno do plano *xz*.

Afirmamos que os autovetores de T são os vetores $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$. Pois os únicos vetores,em $\mathbb{R}^2$, que permanecem com a mesma direção quando refletidos em relação ao plano *xz*, são os vetores que estão sobre o plano *xz*, ou seja, vetores do tipo $(x,0,z)$ com $x,z \in \mathbb{R}$, e $(1,0,0)$ e $(0,0,1)$ é uma base do plano *xz*. ■

Nem todas as transformações lineares possuem autovetores. Por exemplo, a transformação apresentada no exemplo 1.49 (d), a qual gera uma rotação de um ângulo θ, com $0<\theta<\pi$ no sentido anti-horário em $\mathbb{R}^2$ altera a direção de todos os vetores não nulos do plano, isto é, essa transformação não possui autovetores.

Já vimos que dado um operador linear $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, existe uma matriz quadrada A_{nxn} associada à base canônica do $\mathbb{R}^n$, tal que $T(v)=Av$. Determinar os autovalores de T significa encontrar os vetores $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, tais que

$$T(v)=\lambda v \Rightarrow Av=\lambda v \qquad (*)$$

Reescrevendo (*) em notação matricial temos:

$$Av=\lambda I_n v \Rightarrow v(A-\lambda)=0$$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (**)$$

A expressão (**) representa um sistema de equações lineares homogêneo com n incógnitas e n equações. Desta forma, se o determinante da matriz dos coeficientes for não nulo o sistema tem solução única, que é a solução nula. Porém esta solução não nos interessa, pois queremos encontrar os autovetores, que por definição são não nulos. Então devemos procurar valores de λ tais que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo. O polinômio $\det(A-\lambda I)=0$ é chamado de *polinômio característico* e será denotado por $P_A(\lambda)$. Observe que as raízes do polinômio característico fornecem os autovalores de T.

Exemplo 1.56 Determine os autovalores e os autovetores do operador linear T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_3,-x_1+x_3,x_1+x_2+2x_3)$.

Solução: A matriz associada à T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ é $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}$.

Para determinar os autovalores de T precisamos achar as raízes de $P_A(\lambda)$, que é dado por:

$$P_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)\Rightarrow\det\begin{bmatrix}1-\lambda&0&2\\-1&-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{bmatrix}\Rightarrow P_A(\lambda)=(1-\lambda)(-\lambda)(2-\lambda)-2+2\lambda-(1-\lambda)$$

cujas raízes são $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ e $\lambda_3=3$. Esses são os autovalores de T.

Uma vez determinado os autovalores, precisamos resolver a equação $Av=\lambda v$ onde $v\in\mathbb{R}^3$ para cada valor de λ encontrado.

i) Para $\lambda_1=1$, temos:

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=1.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=x_1\\-x_1+x_3=x_2\\x_1+x_2+2x_3=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_3=0\\-x_1+x_3=x_2\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

Da primeira equação extraímos que $x_3=0$ e das outras equações vemos que $x_1=-x_2$, ou seja, os autovetores associados a são do tipo $(-y,y,0)$ com $y\in\mathbb{R}$. Esses autovetores são gerados por múltiplos do vetor $(-1,1,0)$;

ii) Para $\lambda_2=-1$, temos:

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=-1.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=-x_1\\-x_1+x_3=-x_2\\x_1+x_2+2x_3=-x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\-x_1+x_3=x_2\\x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}$$

Das duas primeiras equações extraímos que $x_1=-x_3$ e $x_2=-2x_3$. Essas condições satisfazem a terceira equação do sistema, portanto os autovetores associados a $\lambda_2=-1$ são do tipo $(-z,-2z,z)$ com $z\in\mathbb{R}$. Esses autovetores são gerados por múltiplos do vetor $(-1,-2,1)$;

iii) Para $\lambda_3=3$, temos:

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&0&1\\1&1&2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=-3.\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_3=3x_1\\-x_1+x_3=3x_2\\x_1+x_2+2x_3=3x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1=2x_3\\-x_1-3x_2+x_3=0\\x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

Das duas primeiras equações extraímos que $x_1 = x_3$ e $x_2 = 0$. Essas condições satisfazem a terceira equação do sistema, portanto os autovetores associados a $\lambda_2 = -1$ são do tipo $(x, 0, x)$ com $x \in \mathbb{R}$. Esses autovetores são gerados por múltiplos do vetor $(1,0,1)$.

Definição 1.57 Se *A* for uma matriz quadrada, então o *traço de A*, denotado por tr(*A*), é definido pela soma das entradas na diagonal principal de *A*. O traço de *A* não é definido se *A* não for uma matriz quadrada.

Exemplo 1.58 Determine o tr(*A*) onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Solução: $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 3 + 4 - 1 + 6 = 12.$

Teorema 1.59 *A* é uma matriz ortogonal se, e somente se, os vetores linhas de *A* são ortonormais.

Prova: A entrada na *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna da matriz produto AA^T é o produto escalar do *i*-ésimo vetor linha de *A* com o *j*-ésimo vetor coluna de A^T. No entanto, exceto notação, o *i*-ésimo vetor coluna de A^T é o *j*-ésimo vetor linha de *A*. Assim, se $r_1, r_2, \ldots, r_n$ forem os vetores linha de *A*, então o produto matricial AA^T pode ser expresso por:

$$AA^T = \begin{bmatrix} r_1.r_1 & r_1.r_2 & \cdots & r_1.r_{n1} \\ r_2.r_1 & r_2.r_2 & \cdots & r_2.r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_n.r_1 & r_n.r_2 & \cdots & r_n.r_{n1} \end{bmatrix}$$

Assim, segue que $AA^T = I$ se, e só se,

$$r_1.r_1 = r_2.r_2 = \cdots = r_n.r_n = 1 \quad \text{e} \quad r_i.r_j = 0 \text{ quando } i \neq j$$

que valem se, e só se, $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ for um conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

O mesmo resultado vale para os vetores colunas de uma matriz ortogonal *A*. A seguir enunciaremos um resultado para matrizes simétricas que é bastante útil, porém não daremos a sua demonstração, pois envolve conceitos de espaços vetoriais complexos. Essa demonstração pode ser encontrada em **[2]** p.322.

Teorema 1.60 Se *A* for uma matriz simétrica com entradas reais, então seus autovalores são reais.

CAPÍTULO 2

Neste capítulo faremos uma abordagem sobre as aplicações de matrizes em alguns conteúdos relacionados ao currículo de matemática do ensino médio. Veremos que, em algumas situações, fazer uso de determinadas matrizes e determinantes facilita a resolução de muitos problemas como, por exemplo, no cálculo de áreas e volumes (seção 2.5).

2.1 – Potenciação de Matrizes

Ao se falar em potência para um aluno do ensino médio, fatalmente ele pensará numa potência envolvendo número inteiro, talvez alguns pensem numa potência com número racional, mas provavelmente nenhum deles pensaria numa potência envolvendo matrizes. Talvez isto ocorra, porque a ideia de potenciação perde um pouco o sentido, para o aluno, quando falamos em potência de matrizes, mesmo sabendo que o produto entre matrizes está bem definido.

Sabemos que a operação de potenciação está bem determinada para todos os números complexos, isto é, dado qualquer número complexo é possível calcular qualquer potência desse determinado número.

Exemplo 2.1 Calcule as potências:

$a) 12^4 = 12.12.12.12 = 20736$

$$b)\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{243}$$

$$c)(2+i)^3 = (2+i).(2+i).(2+i) = (3+4i).(2+i) = 6+3i+8i-4 = 2+11i$$

Quando operamos com potências em $\mathbb{C}$, o cálculo pode ser muito trabalhoso quando calculado apenas pela definição de potência. Observe o trabalho que teríamos se, no item (c) do exemplo 2.1, ao invés do expoente três tivéssemos expoente quinze, por exemplo. Porém, ainda em $\mathbb{C}$, dispomos de uma maneira eficaz para o cálculo de uma potência, basta escrever o número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, na forma polar:

$$z = r\,(\cos\theta + i\ sen\theta)\,, \qquad onde\ \ r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Desta forma, dado um $n \in \mathbb{N}$, o cálculo de z^n, que pela definição de potência era calculado por $z^n = \underbrace{(a+bi).(a+bi)\cdots(a+bi)}_{n\ vezes}$ e que necessariamente deve ser calculada aos pares $(a+bi).(a+bi)$, quando escrita na forma polar fica reduzida a $z^n = r^n(\cos n\theta + i\ sen\, n\theta)$ onde θ é o argumento de z. A seguir, o exemplo 2.2 mostra a praticidade do cálculo dessas potências na forma polar.

Exemplo 2.2 Seja $z = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\,i\right)$. Determine z^{10}.

Solução

$$(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\,i)^{10} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)\cos\theta \quad + i\ \left(\frac{3}{2}\right)sen\ \theta\right)^{10} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}(\cos(10\theta)) + i\left(\frac{3}{2}\right)^{10}(sen(10\theta))$$

Desta forma, vimos que a operação de potenciação está bem definida em todo $\mathbb{C}$. Porém, o mesmo, não ocorre para as matrizes, pois pela própria definição do produto entre matrizes, por exemplo, *A.B*, só faz sentido se o número de colunas de *A* for igual ao número de linhas de *B*. Como estamos falando em potências, isto implica dizer que o número de linhas deve ser igual ao número de colunas, ou seja, a potência de matrizes está definida apenas para as matrizes quadradas.

É fato que podemos calcular potência de qualquer matriz quadrada usando apenas a definição de produto matricial, mas com um custo operacional alto, ou seja, com cálculos que podem ser muito trabalhosos. Abaixo, no exemplo 2.3, mostramos o cálculo de uma potência de uma matriz de ordem dois.

Exemplo 2.3 Calcule a potência $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^3$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ 20 & 19 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 43 \\ 115 & 97 \end{bmatrix}$$

Quando falamos em custo operacional alto, estamos falando, por exemplo, do trabalho que teríamos se a matriz do exemplo acima fosse de ordem bem superior a dois, ou ainda, mesmo com a matriz de ordem dois, mas com expoente superior a três (pense, por exemplo, num expoente igual a quinze). Concluímos então que calcular potências com matrizes usando apenas o produto matricial não representa um método viável para o cálculo dessas potências.

Por outro lado, a potenciação fica significativamente mais simples para um tipo especial de matriz, que são as matrizes diagonais. O exemplo 2.4 mostra a praticidade de cálculos com esse tipo de matrizes.

Exemplo 2.4 Dada a matriz $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ com $a, b, c \in R$, determine D^{2015}.

Solução:

$$D^{2015} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{2015 \ \ vezes} = \begin{bmatrix} 2^{2015} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{2015} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2015} \end{bmatrix}$$

Diante desse impasse, o que faremos é substituir, sempre que possível, a matriz original por uma matriz diagonal, desde que essa nova matriz preserve as principais características da matriz original. Essa substituição de que estamos falando, na literatura é conhecida como *diagonalização de matrizes*. Mas, antes de apresentarmos a definição de diagonalização de matrizes precisamos de algumas definições e resultados que serão explorados a seguir.

Definição 2.5 (Matrizes Semelhantes) Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem. Dizemos que uma matriz B é *semelhante* a uma matriz A se existir uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$.

Observe que se A é semelhante a B a recíproca é verdadeira, ou seja, existe uma matriz invertível Q tal que $A = Q^{-1}.B.Q$, basta tomar $Q = P^{-1}$. Pois, tomando $Q = P^{-1}$, temos:

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow PB = AP \Rightarrow A = PBP^{-1} \Rightarrow A = Q^{-1}BQ$$

Por comodidade, diremos apenas que A e B são *semelhantes*, para denotar que A é semelhantes a B e vice-versa.

Teorema 2.6 *Se A e B são matrizes semelhantes, então:*

(a) *A e B tem o mesmo determinante;*
(b) *A é invertível se, e somente se, B for invertível;*
(c) *A e B tem o mesmo polinômio característico;*
(d) *A e B tem os mesmos autovalores;*

Prova:

$$(a)\ \det(A) = \det(P^{-1}BP) = \det(P^{-1}).\det(B).\det(P) = \frac{1}{\det(P)}.\det(B).\det(P) = \det(B)$$

(b) A é invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \underset{(a)}{\Leftrightarrow} \det(B) \neq 0 \Leftrightarrow B$ é invertível.

(c) Como $B = PAP^{-1}$ temos:

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(\lambda I - B), com\ I = PP^{-1} \\ &= \det(\lambda PP^{-1} - PAP^{-1}) \\ &= \det(P(\lambda I - A)P^{-1}) \\ &= \det P.\det(\lambda I - A).\det(P^{-1}) \\ &= \det(\lambda I - A) \\ &= P_A(\lambda) \end{aligned}$$

(d) Decorre imediatamente do item (c), visto que os autovalores são as raízes do polinômio característico. ■

Teorema 2.7 *Autovetores associados a autovalores distintos são LI.*

Prova: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ autovalores distintos de uma matriz $A_{n\,x\,n}$. Mostraremos primeiramente para o caso de dois autovalores distintos, $\lambda_1\ e\ \lambda_2$.

Considere a equação $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$. Apliquemos a essa equação, a transformação T-$\lambda_2 I$. Temos então:

$$\begin{aligned} &T(a_1v_1 + a_2v_2) - \lambda_2 I(a_1v_1 + a_2v_2) = T(0) \\ &a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_2 v_2 - \lambda_2 a_1 v_1 - \lambda_2 a_2 v_2 = 0 \\ &a_1v_1(\lambda_1 - \lambda_2) + a_2v_2(\lambda_2 - \lambda_2) = 0 \\ &a_1v_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2\ e\ v_1 \neq 0$ temos que $a_1 = 0$. Voltando a equação original e aplicando a transformação $T - \lambda_1 I$, de forma análoga, encontramos $a_2 = 0$. Logo $v_1\ e\ v_2$, são LI.

A demonstração para o caso geral é feita de maneira análoga. Basta tomar a equação $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ e aplicar sucessivamente as transformações $T - \lambda_1 I, \cdots, T - \lambda_n I$ para concluirmos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$ ■

Definição 2.8 (Diagonalização de Matrizes) Uma matriz *A* é *diagonalizável* quando *A* for semelhante a uma matriz diagonal *D*, ou seja, se existir uma matriz invertível *P*, tal que $A = P.D.P^{-1}$, onde *D* é uma matriz diagonal.

A matriz *P* é chamada de matriz que diagonaliza a matriz *A*. Para determinar a matriz *P*, basta encontrar os autovetores LI da matriz A que serão as colunas da matriz *P*. Observe, que pela definição acima, a matriz *P* tem que ser quadrada e de mesma ordem das matrizes *A* e *D*. Iniciando por essa argumentação podemos chegar ao seguinte resultado:

Teorema 2.9 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A é diagonalizável se, e somente se A tem n autovetores LI.*

Prova: Suponha que A seja semelhante a D. Então $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal, logo

$$AP = PD \quad (1).$$

Seja $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ e seja v_j, j=1, 2, ... , n, a j-ésima coluna de P. Sabemos que a j-ésima coluna de AP é Av_j e a j-ésima coluna de PD é $\lambda_j v$. Dessa maneira, de (1) temos:

$$Av_{j=}\lambda_j v_j \qquad (2)$$

Como P é uma matriz invertível, suas colunas são LI e, portanto, λ_j é uma autovalor de A e v_j é um autovetor correspondente.

Reciprocamente, considere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ como os n autovalores de A e que os autovetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ correspondentes são LI. Seja $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ a matriz cuja j-ésima coluna é x_j. Como as colunas de P são LI, segue que P é invertível. De (1) obtemos (2), que implica que A é diagonalizável. ■

Exemplo 2.10 Dada à matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ verifique se existe uma matriz P que diagonalize A.

Solução: Vamos determinar o polinômio característico da matriz A.

$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda).(3-\lambda)^2$, que tem por autovalores $\lambda_1 = 2 \quad e \quad \lambda_2 = 3$. Vamos calcular os autovetores v_{λ_1} e v_{λ_2} associados a λ_1 e λ_2.

Para $\lambda_1 = 2$ temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 2x \\ 3y = 2y \\ 3z = 2z \end{cases}$$

o que implica que os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$, são do tipo v_{λ_1} = (x,0,0), com $x \in R$. Então v_{λ_1} pode ser gerado pelo vetor (1,0,0), ou seja, v_{λ_1} = [(1,0,0)]

Para $\lambda_2 = 3$, temos:

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3. \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 3x \\ 3y = 3y \\ 3z = 3z \end{cases}$ o que implica que os autovetores associados

a $\lambda_2 = 3$ são do tipo $v_{\lambda_2} = (-2z, y, z)$ com $y \; e \; z \in R.$ Então v_{λ_2} pode ser gerado pelos vetores (0,1,0) e (-2,0,1), ou seja, v_{λ_2} =[(0,1,0), (-2,0,1)] . Como a matriz A_{3x3} possui uma base de autovetores, então A é diagonalizável. Portanto a matriz P é $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calculando P^{-1} encontramos $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a matriz D_{3x3} é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os autovalores de *A*, ou seja, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Como $PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A$

Temos que *P* é a matriz que diagonaliza a matriz *A*.

Observe que a ordem em que se toma os autovetores de *A* na composição da matriz *P*, só muda a ordem dos autovalores da matriz diagonal $D = P^{-1}AP$.

O cálculo das potências de uma matriz *A* fica bem mais simples se *A* for diagonalizável, pois para $A = PDP^{-1}$ temos que:

$$A^n = (P.D.P^{-1})^n = \underbrace{(P.D.P^{-1}) \; \ldots \; (P.D.P^{-1})}_{n \quad vezes} = P.D^n.P^{-1} \qquad , n \in Z$$

e como *D* é uma matriz diagonal, calcular A^n resume-se a calcular a n-ésima potência dos elementos da diagonal principal de *D*, além de determinar as matrizes $P \; e \; P^{-1}$.

Exemplo 2.11 Determine A^{11} onde $A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$

Solução: O polinômio característico de A é $P_A(\lambda) = (-1-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda)$ que tem os autovalores $\lambda = -2, \lambda = -1,$ e $\lambda = 1$.

Para $\lambda = -1$ temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+7y-z=-x \\ -y=-y \\ 15y-2z=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y=z \\ y=y \\ z=-5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

os autovetores associados a $\lambda = -1$ são do tipo $(k,0,0)$ com $k \in \mathbb{R}$, logo podemos representar esses autovetores por $(1,0,0)$.

Para $\lambda = 1$ temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+7y-z=x \\ y=y \\ 15y-2z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y-z=2x \\ y=y \\ z=5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y-5y=2x \\ y=0 \\ z=5s \end{cases}$$

os autovetores associados a $\lambda = 1$ são do tipo $(s,s,5s)$ com $s \in \mathbb{R}$, logo podemos representar esses autovetores por (1,1,5).

Para $\lambda = -2$ temos:

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x+7y-z=-2x \\ y=-2y \\ 15y-2z=-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$$

os autovetores associados a $\lambda = -2$ são do tipo $(t,0,t)$ com $t \in \mathbb{R}$, logo podemos representar esses autovetores por (1,0,1).

Logo a matriz P que diagonaliza a matriz A é $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculando P^{-1} temos

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$A^{11}=PD^{11}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{11}&0&0\\0&1^{11}&0\\0&0&(-2)^{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&-1\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2048\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&-1\\0&1&0\\0&-5&1\end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-4&1\\0&1&0\\0&10.240&-2048\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&10.237&-2047\\0&1&0\\0&10.245&-2048\end{bmatrix}$$

Observe que no exemplo acima a maior parte do trabalho consiste em diagonalizar a matriz *A*. Feita essa diagonalização, o cálculo da potência de *A* não requer grandes esforços. Sabemos que a potenciação de matrizes não está definida para todas as matrizes. Então, quando possível, reescrevemos essa matriz como um produto de matrizes onde uma das matrizes é diagonal, o que na realidade é a diagonalização dessa matriz, e o Teorema 2.9 nos dá condições de verificar a possibilidade (ou não) da diagonalização (vide exemplo 2.10).

A diagonalização de matrizes se apresenta como um método bem eficaz no cálculo de potências envolvendo matrizes. É fato que nem todas as matrizes são diagonalizáveis, o que não quer dizer que não podemos calcular potências de matrizes não-diagonalizáveis. O que ocorre é que para tais matrizes não dispomos de um método eficaz para calcularmos potências. O cálculo das potências dessas matrizes é feito via definição de produto matricial. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 2.12 Sendo $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ calcule A^4.

Solução:

Vejamos se A é diagonalizável. $P_A(\lambda)=(3-\lambda)^3$, logo A só possui o autovalor $\lambda=3$ (com multiplicidade algébrica 3). Os autovetores associados a $\lambda=3$ são dados por

$$\begin{cases}3x+y=3x\Rightarrow y=0\\3y+z=3y\Rightarrow z=0\\\quad 3z=3z\Rightarrow z=k\end{cases}$$

que são do tipo (k,0,0) com $k\in\mathbb{R}$, ou seja, (1,0,0) é um autovetor associado a $\lambda=3$. Logo, pelo Teorema 2.9, *A* não é diagonalizável. Portanto temos calcular a potência pela definição de produto matricial.

$$A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 108 & 54 \\ 0 & 81 & 108 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}$$

Com base nos exemplos 2.10 e 2.11, observamos que operar com matrizes diagonais é, quando possível, bem menos trabalhoso do que matrizes não diagonais. Outro grupo de matrizes que tem essa característica são as matrizes triangulares (superiores e inferiores), veremos uma aplicação dessas matrizes no Capítulo 3, na seção 3.1 (Fatoração LU).

Diante dessa facilidade de operar com as matrizes diagonais, vejamos como elas se comportam com relação às propriedades de potenciação que já conhecemos com números reais. Quando uma matriz *A* é diagonalizável, podemos verificar com mais facilidade, como elas se comportam com relação às propriedades de potenciação. Porém, antes de fazermos algumas dessas verificações, vamos fazer uma breve abordagem do cálculo de potências de uma matriz diagonal.

Seja $A_{n\,x\,n}$ uma matriz diagonal, onde $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$. Sabemos que as potências $A^k, k \in N$, são definidas como:

$$A^k = \begin{cases} a_{ij} = 0 \; se\, i \neq j \\ a_{ij} = (a_{ij})^k \;\; se\, i = j \end{cases} \quad \text{então, } A^k . A^s = \begin{cases} a_{ij} = 0 \quad se \quad i \neq j \\ a_{ij} = (a_{ij})^{k+s} \quad se \quad i = j \end{cases} \quad \text{, com } k, s \in N$$

Portanto, quando *A* é diagonalizável fica mais fácil perceber que $A^k . A^s = A^{k+s}$. Certamente, pois existe uma matriz invertível *P* e uma matriz diagonal *D* tal que:

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow \begin{cases} A^k = PD^k P^{-1} \\ A^s = PD^s P^{-1} \end{cases} \Rightarrow A^k . A^s = PD^k D^s P^{-1} = PD^{k+s} P^{-1} = A^{k+s}$$

Considerando ainda a mesma matriz *A*, temos:

$$(A^k)^s = \underbrace{(PD^k P^{-1}).(PD^k P^{-1}) \cdots (PD^k P^{-1})}_{s \quad vezes} = P\underbrace{D^k . D^k \cdots D^k}_{s \quad vezes} P^{-1} = PD^{k.s} P^{-1} = A^{k.s}$$

com essa argumentação vemos facilmente que $(A^k)^s = A^{k.s}$ quando *A* é diagonalizável. Ressaltamos que as propriedades apresentadas até aqui também valem se *A* não for diagonalizável. Nesses casos, mais uma vez, não dispomos de um método prático de verificação como a diagonalização.

Convém lembrar ainda dois fatos: 1º) a divisão não está definida para matrizes; 2º) o produto matricial não é comutativo. Desta forma, decorrem desses dois fatos que as propriedades $\frac{A^k}{A^s} = A^{k-s}$ e $(A.B)^k = A^k . B^k$ que são válidas para números reais não valem para matrizes.

2.2 – Radiciação de Matrizes

Iniciaremos esta subseção abordando o conceito de raiz com índice par para matrizes e depois generalizaremos para uma raiz *n*-ésima.

Sabemos que a radiciação com índice par não está definida para todos os números reais. A fim de que ela esteja bem definida, devemos impor uma condição sobre o radicando que deve ser não negativo. Algo semelhante ocorre quando estamos operando com matrizes com entradas reais.

Seja A uma matriz com entradas reais. Afirmamos que se $\sqrt[2n]{A} \quad (n \in N)$ existe, então $\det(A) \geq 0$. Certamente, pois:

$$B = \sqrt[2n]{A} \Rightarrow B^{2n} = A \Rightarrow \det(B^{2n}) = \det(A) \Rightarrow \underbrace{\det(B).\det(B)\ldots\det(B)}_{2n \quad vezes} = \det(A) \Rightarrow$$

$$(\det(B))^{2n} = \det(A) \Rightarrow \det(A) \geq 0$$

Exemplo 2.13 É possível encontrar uma raiz quadrada para $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$?

Solução: Não, pois $\det(A) = -6 \leq 0$.

A radiciação de matrizes não é tão imediata como a radiciação com números reais, ou seja, dada uma matriz *A*, não é imediato encontrar uma matriz *B* tal que $B^2 = A$. Porém se a matriz *A* for uma matriz diagonal, encontrar $\sqrt[2n]{A} \quad (n \in N)$ se torna imediato. Vejamos esse fato no exemplo abaixo.

Exemplo 2.14 Determine $\sqrt{D}$ onde $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1}&0&0\\0&\sqrt{4}&0\\0&0&\sqrt{9}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sqrt{1}&0&0\\0&\sqrt{4}&0\\0&0&\sqrt{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

Ao contrário do que se tem com números reais (não negativos), a raiz quadrada de uma matriz não é única. É fácil verificar que todas as matrizes abaixo são raiz quadrada da matriz *A*.

$$B=\sqrt{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\ ,\ \sqrt{D}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\ ,\ \sqrt{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\ ,\ \sqrt{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

$$\sqrt{D}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\ ,\sqrt{D}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\ ,\ \sqrt{D}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\ ,\sqrt{D}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

Neste caso, A_{3x3} possui 8 raízes. Concluímos que, se $A_{n\,x\,n}$ for diagonalizável e com seus autovalores não negativos, então existem 2^n matrizes *B*, tais que $A=B^n$. Essa quantidade de matrizes *B* representa o total de posições do(s) sinal(is) de menos ao longo da diagonal principal. Caso haja autovalores nulos a quantidade de matrizes *B* com $A=B^n$ é inferior a 2^n.

Exemplo 2.15 Determine $\sqrt[4]{D}$ onde $D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&16&0&0\\0&0&81&0\\0&0&0&256\end{bmatrix}$

Solução:

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&16&0&0\\0&0&81&0\\0&0&0&256\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

Logo $\sqrt[4]{D}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$ é uma das 16 raízes de *D*.

Assim como a potenciação de matrizes se torna muito mais simples se a matriz for diagonalizável, algo semelhante ocorre na radiciação de matrizes. De maneira geral, se *A* for diagonalizável, com seus autovalores não negativos, podemos escrever $A=PDP^{-1}$ o que implica que $\sqrt[n]{A}=P.\sqrt[n]{D}.P^{-1}$. Vejamos:

$$\left(\sqrt[n]{A}\right)^n=A \qquad (1)$$

$$\left(P.\sqrt[n]{D}.P^{-1}\right)^n=P.(\sqrt[n]{D})^n.P^{-1}\underbrace{=}_{*}P.D.P^{-1}=A \qquad (2)$$

a igualdade (*) se justifica pelo fato de *D* ser uma matriz diagonal. De (1) e (2) vemos que é válida a expressão $\sqrt[n]{A}=P.\sqrt[n]{D}.P^{-1}$. Vale lembrar que se o índice *n* for par, precisamos que $\det(D)\geq 0$.

Exemplo 2.16 Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$. Vamos calcular uma $B=\sqrt{A}$.

Vimos no exemplo 2.10 que *A* é diagonalizável e que:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}}_{D}.\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{P^{-1}}=P.D.P^{-1}$$

Então sabemos que $B=P.\sqrt{D}.P^{-1}$. Consideremos $\sqrt{D}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}$. Fazendo as contas $P.\sqrt{D}.P^{-1}$ encontramos $B=\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}$ que é uma das 8 raízes de *A*. Podemos facilmente verificar a veracidade desse resultado observando que

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0&2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=A$$

Quando A não for diagonalizável e seus autovalores são não negativos, não temos uma maneira eficiente de calcular $B=\sqrt{A}$. Porém, em alguns casos, ainda que a matriz A não seja diagonalizável, ainda assim é possível calcular $B=\sqrt{A}$. O exemplo 2.17 mostra uma situação desse tipo, mas antes precisamos relembrar alguns resultados sobre rotação de vetores no plano.

Sabemos que a matriz R_θ associada à transformação linear que define uma rotação de um ângulo θ em $\mathbb{R}^2$ é $R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\theta\\ sen\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. Também sabemos, que a rotação de um ângulo θ, com $\theta\neq\theta+2k\pi \quad \forall k\in\mathbb{Z}$, altera a direção de todos os vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$, o que equivale a dizer que a matriz R_θ não possui autovetores. Logo, R_θ não é diagonalizável, mas ainda sim podemos calcular $\sqrt{R_\theta}$. É o que faremos no exemplo abaixo.

Exemplo 2.17 Mostraremos que $R_{\frac{\pi}{6}}=\sqrt{R_{\frac{\pi}{3}}}$.

Solução:

$$\left(R_{\frac{\pi}{6}}\right)^2=\left(R_{\frac{\pi}{6}}\right)\left(R_{\frac{\pi}{6}}\right)=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-sen\left(\frac{\pi}{6}\right)sen\left(\frac{\pi}{6}\right) & -2sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) & -sen\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\\ sen\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\end{bmatrix}=R_{\frac{\pi}{3}}$$

■

2.3 – Ângulo entre Matrizes

Quando olhamos para as matrizes como vetores do $\mathbb{R}^n$ (onde $n=2,3$) e não apenas como uma lista (ou tabela) de números dispostos em linhas e em colunas, podemos formalizar conceitos que, num primeiro momento, pareciam sem sentido como, por exemplo, a potenciação e a radiciação, e agora veremos como podemos trabalhar com ângulos entre matrizes.

A fim de mostrar que o ângulo entre matrizes está bem definido, utilizaremos fortemente a definição de produto interno (seção 1.1 do capítulo 1). No exemplo a seguir relembraremos como é fundamental o uso de um produto interno para o cálculo do ângulo entre dois vetores no $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.18 Considere $\mathbb{R}^2$ com o produto interno canônico. Determine o ângulo entre os vetores *u* = (1,-3) e *v* = (2,4).

Solução:

$$\langle u,v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \quad , \quad \textit{então temos}:$$

$$\cos\theta = \frac{\langle (1,-3),(2,4)\rangle}{\|(1,-3\|\,\|(2,4)\|} = \frac{1.2-3.4}{\sqrt{1^2+(-3)^2}.\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\theta = arc\cos\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right).$

No exemplo acima utilizamos o produto interno canônico. Para determinarmos o ângulo entre duas matrizes, precisamos definir uma expressão para o produto interno de matrizes onde sejam satisfeitas as condições da definição 1.10.

Seja $M_{n\,x\,n}$ o conjunto formado pelas matrizes quadradas de ordem *n*. Considere $U,V \in M_{n\,x\,n}$, afirmamos que uma expressão que define um produto interno em $M_{n\,x\,n}$ é dada por:

$$\langle U,V\rangle = tr(U^TV)$$

Sejam $U = u_{ij}$, $V = v_{ij}$, $W = w_{ij}$, $(U^TV) = k_{ij}$. Mostraremos que essa expressão satisfaz as condições da definição 1.10.

$i)$ $\langle U,U\rangle = tr\,(U^TU) = (u_{11}^2.u_{21}^2.\cdots u_{n1}^2) + (u_{12}^2.u_{22}^2.\cdots u_{n2}^2) + \cdots + (u_{1n}^2.u_{2n}^2.\cdots u_{nn}^2) \geq 0$

$ii)$ $\langle \alpha U,V\rangle = tr((\alpha U)^TV) = tr(\alpha U^TV) = \alpha k_{11} + \alpha k_{22} + \cdots + \alpha k_{n\,n} = \alpha(k_{11}+k_{22}+\cdots+k_{n\,n}) =$
$\alpha\, tr(U^TV) = \alpha\langle U,V\rangle$

$iii)\ \langle U+V,W\rangle = tr\,((U+V)^T W) = tr\,((U^T+V^T)W) = tr\ (U^TW+V^TW) = tr(U^TW)+tr(V^TW)$
$= \langle U,W\rangle + \langle V,W\rangle.$

$iv)\ \langle U,V\rangle = tr\ (U^TV) = k_{11}+k_{22}+\cdots+k_{n\,n} =$
$(u_{11}v_{11}+u_{21}v_{21}+\cdots+u_{n1}v_{n1})+\cdots+(u_{1n}v_{1n}+u_{2n}v_{2n}+\cdots+u_{nn}v_{nn}) =$
$= (v_{11}u_{11}+v_{21}u_{21}+\cdots+v_{n1}u_{n1})++\cdots+(v_{1n}u_{1n}+v_{2n}u_{2n}+\cdots+v_{nn}u_{nn})$
$= tr\ (V^TU) = \langle V,U\rangle$

Exemplo 2.19 Determine o ângulo entre as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\langle A,B\rangle = tr(A^TB) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} = 7+12 = 19$$

$$\|A\| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{tr(A^TA)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 45 \end{bmatrix}} = \sqrt{50}$$

$$\|B\| = \sqrt{\langle B,B\rangle} = \sqrt{tr(B^TB)} = \sqrt{tr\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{tr\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\|B\|} = \frac{19}{\sqrt{50}.\sqrt{14}} = \frac{19}{10\sqrt{7}} \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\cos\left(\frac{19}{10\sqrt{7}}\right)$$

2.4 – Áreas e Volumes

Os conceitos de área e volume são trabalhados do ensino fundamental ao ensino médio e são um dos conteúdos com várias aplicações ao mundo físico. Porém, em muitos dos casos, esses conceitos são trabalhados apenas como aplicações de fórmulas prontas e aplicadas em situações bem particulares. Por exemplo, dado um triângulo em $\mathbb{R}^2$ onde se conheça a base e a altura desse triângulo, e, nesse cenário, pede-se ao aluno que calcule a área desse triângulo. Em situações desse tipo não configura nem ensino e nem aprendizagem do conceito de área.

Nesta subseção, mostraremos como as matrizes e determinantes podem ser bastante úteis nos cálculos de áreas e volumes. Para tal, abordaremos esses conceitos precedidos de dois conceitos, *produto vetorial e produto misto*. O cálculo de (áreas e volumes) ganha praticidade, principalmente em situações nas quais a aplicação das fórmulas tradicionais de áreas e volumes fica bastante trabalhosa. Ressaltamos que os conceitos de produto vetorial e produto misto estão definidos apenas para $\mathbb{R}^3$.

No decorrer desta seção, abordaremos um problema típico de áreas de figuras planas de duas formas distintas: uma usando o produto vetorial e outra utilizando as fórmulas tradicionais de área e volume, cuja finalidade é mostrar a praticidade dos conceitos de produtos vetorial e misto, em situações aparentemente desfavoráveis.

Definição 2.20 (Produto Vetorial) Se $u=(u_1,u_2,u_3)$ e $v=(v_1,v_2,v_3)$ em $\mathbb{R}^3$, então o *produto vetorial*, denotado por ***u* x *v***, é o vetor definido por:

$$u\ x\ v = \det\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

onde $i=(1,0,0)$, $j=(0,1,0)$ e $k=(0,0,1)$. Também podemos reescrever o produto vetorial de *u* e *v* como: $u\ x\ v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$.

Exemplo 2.21 Dados *u* = (3,2,-1) e *v* = (0,2,-3) determine *u x v*.

Solução:

$$u\ x\ v = (2.(-3)-(-1).2\ ,\ 3.(-3)-(-1).0\ ,\ 3.2-2.0) = (-2\ ,\ -9\ ,\ 6)$$

Observe que o resultado do produto vetorial é um vetor, diferente do que ocorre com o produto escalar (seção 1.1) onde o resultado final é um valor numérico. O vetor resultante de um produto vetorial tem propriedades associadas ao produto escalar que são fundamentais para no cálculo de áreas. No teorema abaixo, pontuamos algumas dessas propriedades.

Teorema 2.22 Se *u* e *v* são vetores em $\mathbb{R}^3$, então:

$(i)\ \langle u\ , u\ x\ v \rangle = 0$

$(ii)\ \langle v\ , u\ x\ v \rangle = 0$

$(iii)\ \|u\ x\ v\|^2 = \|u\|^2 . \|v\|^2 - (u\ ,\ v)$

Prova:

$$(i)\ u\ .\ (u\ x\ v) = (u_1,u_2,u_3)\ .\ (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) =$$
$$= u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) = 0$$

(ii) *Idem ao item* (i).

$(iii)\ \|u\ x\ v\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$ (1)

$\|u\|^2.\|v\|^2 - (u\ .\ v) = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)\ (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$ (2)

Desenvolvendo (1) e (2) chegamos a igualdade $\|u\ x\ v\| = \|u\|^2.\|v\|^2 - (u\ ,\ v)$.

O Teorema 2.22 nos garantem propriedades geométricas do vetor *u* x *v* que serão bastante úteis, por exemplo, o item (*iii*) é conhecido na literatura como a *identidade de Lagrange*, esse resultado nos permitirá o cálculo de algumas áreas, já os itens (*i*) e (*ii*), nos garante que o vetor *u* x *v* é ortogonal aos vetores *u* e *v* simultaneamente, conforme ilustra a figura a seguir.

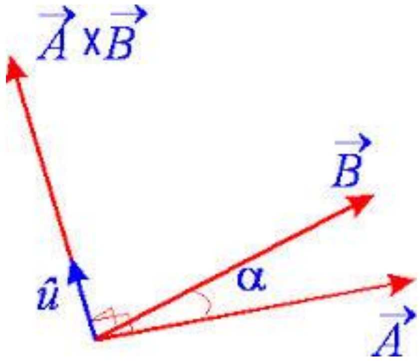


Figura 2.3

Fonte: **www.ufpe.br**

O sentido do vetor *u* x *v* pode ainda ser facilmente determinado por uma regra bem simples, conhecida como a *regra da mão direita.* Essa regra diz que se *a* e *b* forem vetores não nulos e $\angle a, b = \alpha$, colocamos o dedos indicador da mão direita na direção de um desses vetores e o dedo médio na direção do outro vetor, giramos um dos dedos pelo ângulo α, quando os dedos da mão direita se fecharem o polegar indica (aproximadamente) o sentido do vetor *u* x *v*, conforme ilustra a figura a seguir.

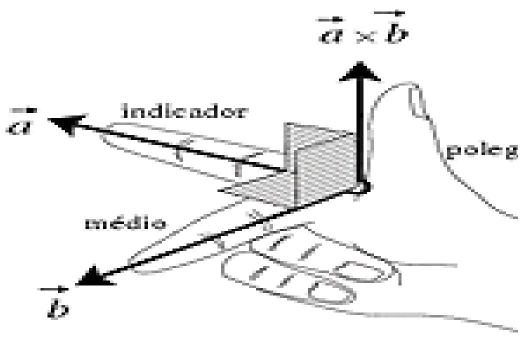


Figura 2.4

Fonte: **www.mundofisico.joinville.udesc.br**

Observe que na figura 2.4 temos $\alpha = 90^{\circ}$, mas a regra vale para qualquer $0 \le \alpha \le 180^{\circ}$.

Neste momento vamos explorar outra propriedade geométrica do Teorema 2.22, cuja finalidade é associar o produto vetorial ao cálculo de algumas áreas e, consequentemente, associar o cálculo das áreas aos determinantes envolvidos na definição de produto vetorial (definição 2.23).

Retomando a identidade de Lagrange (item (iii) do Teorema 2.22) e substituindo nela a definição de produto escalar (definição 1.10) temos:

$$\|u\ x\ v\|^2 = \|u\|^2 . \|v\|^2 - (u\ .\ v) = \|u\|^2 . \|v\|^2 - \|u\|^2 . \|v\|^2 \cos^2\theta$$

$$= \|u\|^2 . \|v\|^2 - \|u\|^2 . \|v\|^2 (1 - sen^2\theta) = \|u\|^2 . \|v\|^2 sen^2\theta \qquad (1)$$

Da definição de ângulo entre vetores (definição 1.9) temos que $0 \le \theta \le 180^{\circ}$, portanto a equação (1) pode ser reescrita como:

$$\|u\ x\ v\| = \|v\|\,\|u\|\ sen\theta \qquad (2)$$

Observando a figura 2.5 vemos que $\|u\|\ sen\theta$ é a altura *h* do paralelogramo definido pelos vetores *u* e *v*.

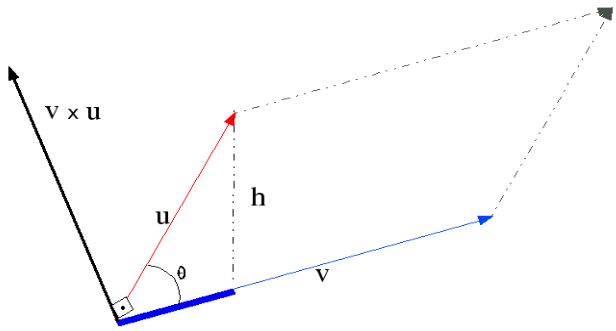


Figura 2.5

Fonte: www.pt.wikibooks.org

Observe que a altura do paralelogramo que tem por lados adjacentes, os vetores *u* e *v é* $h = \|u\|\ sen\theta$. Portanto, a equação (2) representa a **área desse paralelogramo** (A_1), pois:

$$A_1 = \text{(base) x (altura)} = \|v\| . \left(\|v\|\ sen\theta\right) = \|u\ x\ v\| \qquad (3)$$

Considerando $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ em $\mathbb{R}^3$, podemos reescrever a equação (3) em função dos determinantes da seguinte forma:

$$A_1 = \|u \; x \; v\| = \sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (4)$$

Por consequência, temos que a **área do triângulo** (A_2) que tem os vetores u e v como lados é dada por

$$A_1 = \frac{1}{2}\|u \; x \; v\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2} \qquad (5)$$

Exemplo 2.23 Encontre a área do paralelogramo determinado pelos vértices u = (2,3,0) e v = (-1,2,-2).

Solução:

$$\|u \; x \; v\| = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{101}$$

Observe que resolvendo o exemplo 2.26 pela tradicional fórmula de área (base x altura), sem o uso dos conceitos de produtos escalar e vetorial, teríamos um esforço muito maior, pois seria necessário calcular: 1º) os lados desse paralelogramo, ou seja, $\|u\|$ e $\|v\|$; 2º) determinar a equação da reta que passa por u é perpendicular à v (ou vice-versa); 3º) determinar o ponto de interseção dessa reta com o vetor v (ou u); 4º) calcular a distância entre esse ponto de interseção e o vértice u, e esta distância seria a altura; 5º) então, utilizar a fórmula tradicional Área = base x altura. Portanto, em casos onde só conhecemos as coordenadas de dois ou mais vértices de um paralelogramo, o cálculo da área do mesmo fica bem mais simplificada com o uso do produto vetorial expresso em função dos determinantes. Vejamos mais outro exemplo.

Exemplo 2.24 Determine a área do triângulo cujos vértices são A=(2,6,-1), B=(1,1,1) e C=(4,6,2)

Solução:

Seja $\overrightarrow{AB}$=(-1,-5,2) e $\overrightarrow{AC}$=(2,0,3). Vamos calcular o produto vetorial $\overrightarrow{AB}$ x $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right)^2 + \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-15)^2 + 7^2 + 10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{374}$$

Exemplo 2.25 Seja θ o ângulo entre os vetores u e v em $\mathbb{R}^3$ e $u \cdot v \neq 0$. Prove que $tg\theta = \dfrac{\|u\ x\ v\|}{\langle u\ .\ v\rangle}$.

Solução:

Sabemos das definições de produto escalar e da norma do produto vetorial que

$$\cos\theta = \frac{\langle u\ .\ v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \qquad e \qquad sen\theta = \frac{\|u\ x\ v\|}{\|u\|\,\|v\|}$$

como $tg\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$, temos $tg\theta = \dfrac{\|u\ x\ v\|}{\langle u\ .\ v\rangle}$.

A próxima definição nos servirá de suporte para a compreensão do Teorema 2.29 que relaciona o produto misto entre vetores do $\mathbb{R}^3$ com o volume de paralelepípedo formado por esses vetores.

Definição 2.26 (Produto Misto) Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. Chamamos de *produto misto de u,v e w* a expressão:

$$u\ .\ (v\ x\ w)$$

que também pode ser expresso pelo determinante $u\ .\ (v\ x\ w) = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.27 Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. O valor absoluto do produto misto é igual ao volume do paralelepípedo determinado pelos vetores u, v e w, ou seja,

$$V = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

onde V representa o volume do paralelepípedo definido por u, v e w.

Prova:

O volume V do paralelepípedo é dado por:

V=(área da base) x (altura) = $\|v\ x\ w\| \, . \, \|proj_{u\ x\ v} w\| = \|v\ x\ w\| \, . \, \dfrac{|u\ .\ (v\ x\ w)|}{\|v\ x\ w\|} = |u\ .\ (v\ x\ w)|$,

que pela definição 2.5.7 temos $V = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.28 Determine o volume do paralelepípedo definido pelos vetores u = (2,-6,2), v = (0,4,-2) e w = (2,2,-4).

Solução: $V = \det \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = |-32 + 24 + 0 - 16 + 8 - 0| = 16$

Assim como no exemplo 2.26, se fizéssemos o exemplo acima pela tradicional fórmula do volume de paralelepípedo teríamos um custo muito maior em termos de cálculos e tempo. Portanto, mais uma vez vemos como o uso dos determinantes pode ser muito útil em situações nas quais só conhecemos as coordenadas dos vértices do paralelepípedo.

Finalizando esta subseção, apresentaremos uma atividade que pode ser desenvolvida em turmas de 2º ou 3º ano do ensino médio. O objetivo dessa atividade é que os alunos construam a condição para que três vetores no espaço sejam coplanares, a partir do conceito de produto misto.

Atividade 2.29 Considere os vetores u = (5,-2,1), v = (4,-1,1) e w = (1,-1,0).

a) Determine o volume do paralelepípedo definido por *u, v e w*;
b) Como você interpretaria geometricamente os vetores *u, v e w*?
c) Que relação podemos estabelecer entre os resultados dos itens (a) e (b)?

Nessa atividade o que se espera do aluno é que ele conclua que quando o volume do paralelepípedo for nulo então os vetores são coplanares, ou seja:

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u\ ,v \text{ e } w \text{ são coplanares.}$$

Uma atividade análoga a essa poderia ser usada para mostrar que $u\ x\ v = 0$ se, e somente se u e v são colineares.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo abordaremos algumas aplicações do estudo sobre matrizes desenvolvido no capítulo anterior e que podem ser exploradas no âmbito do ensino médio. Tais aplicações a serem apresentadas como resolução de sistemas, sequência de Fibonacci, criptografia e Teoria de Grafos, irão mostrar que conceitos matemáticos completamente distintos (pelo menos num primeiro momento) podem estar intimamente interligados através de uma abordagem matricial.

Portanto a matemática, como ciência, está longe de ser vista como algo pronto e imutável.

3.1 – FATORAÇÃO LU

A busca por métodos que resolvam com eficiência e rapidez, sistemas lineares do tipo $\boldsymbol{Ax = b}$ (onde $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n*, chamada de matriz dos coeficientes), foi objeto de estudo de grandes matemáticos por várias décadas. Um desses métodos, utilizados hoje por programas como *Matlab e Maple*, é a fatoração da matriz *A* como *A=LU*, onde *L* é uma matriz triangular inferior e *U* é uma matriz triangular superior, ou seja, faremos a substituição:

$$Ax = LU\,x = b \qquad (1)$$

Os principais fatores que justificam a grande utilização desse método são: o grande número de aplicações que recaem na resolução de um sistema do tipo (1) e a relativa facilidade de resolver sistemas desse tipo. Primeiramente apresentaremos a idéia da resolução de um sistema com fatoração *LU*, em seguida mostraremos como obter a fatoração *LU*. Temos então,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} . \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

o sistema $Ax = b$ foi substituído por $LU\,x = b$. Chamemos $U\,x$ de y, temos então o sistema $L\,y = b$.

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

O sistema (2) é resolvido no método que chamamos de **substituição direta**, onde:

$$l_{11}y_1 = b_1 \Rightarrow y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$l_{21}y_1 + l_{22}y_2 = b_2 \Rightarrow y_2 = \frac{b_2 - l_{21}y_1}{l_{22}}$$

De maneira similar para $j = 3, \cdots, n$

$$y_j = \frac{b_j - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}.l_k}{l_{jj}}$$

Substituímos a solução do sistema (2) em $U\,x = y$ temos o sistema:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & u_{(n-1)(n-1)} & u_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

O sistema (3) é resolvido no método que chamamos de **substituição reversa**, onde:

$$u_{nn}\, x_n = y_n \Rightarrow x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

$$u_{(n-1)(n-1)}\, x_{n-1} + u_{nn}\, x_n = y_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{y_{n-1} - u_{(n-1)n} x_n}{u_{(n-1)(n-1)}}$$

De maneira similar para $j = 1, \cdots, n-2$

$$x_j = \frac{y_j - \sum_{k=j+1}^{n} u_{jk} . x_k}{u_{jj}}$$

Faremos um exemplo numérico para fixar melhor a ideia da resolução apresentada acima, para tal, já daremos a decomposição *LU* da matriz *A*.

Exemplo 3.1 Resolva o sistema abaixo utilizando a fatoração *LU* fornecida:

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 \qquad + 6x_3 = -22 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chamemos $U\,x = y$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

substituímos **y** em $LU\,x = b$ e temos o novo sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -22 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Resolvendo o sistema (**) de cima para baixo temos

$$y_1 = \frac{-3}{3} = -1$$
$$y_2 = \frac{-22 - 2y_1}{4} = \frac{-22 - 2.(-1)}{4} = -5$$
$$y_3 = \frac{3 + 4y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 4(-1) + (-5)}{2} = -3$$

Substituímos as soluções de (**) em (*) e teremos o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Resolvendo esse sistema de baixo para cima temos:

$$\begin{aligned} &x_3 = -3 \\ &x_2 = -5 - 2x_3 = -5 + 6 = 1 \\ &x_1 = -1 + 2x_2 + x_3 = -1 + 2 - 3 = -2 \end{aligned}$$

que é a solução do sistema inicial.

Ressaltamos que quando falamos sobre a relativa facilidade de resolver sistemas lineares do tipo $Ax=b$ (sendo A uma matriz quadrada) usando a fatoração LU, em geral, estamos pensando em sistemas cuja matriz A (de ordem n) para n relativamente grande, pois para sistemas de pequeno porte, como o exemplo acima, dispomos de métodos de resolução mais rápidos (lembrando que no exemplo já foi fornecida a fatoração LU, o que na prática teríamos que calcular).

De posse da fatoração LU da matriz A, já vimos que não há maiores dificuldades em resolver o sistema $Ax=b$. Mas algumas questões ainda não estão claras como: Como achar a fatoração LU da matriz A? Sempre é possível achar a fatoração LU da matriz A? Uma vez achada a fatoração LU da matriz A, ela é única? Responderemos essas questões no decorrer do texto. A seguir forneceremos um modelo para construção de uma fatoração LU de uma matriz A dada:

***Etapa 1**. Reduza a matriz A à forma escalonada por linhas U por eliminação de Gauss, sem permutação de linhas (para maiores informações sobre eliminação de Gauss consulte [2] pp.57-63). Armazene os multiplicadores para introdução dos pivôs (primeiro elemento não nulo de cada linha) e os multiplicadores usados para introdução dos zeros abaixo dos pivôs.*

***Etapa 2**. Em cada posição ao longo da diagonal principal da matriz L, coloque o inverso do multiplicador dos pivôs de cada linha.*

***Etapa 3**. Abaixo de cada elemento da diagonal principal de L coloque o simétrico dos respectivos multiplicadores para a introdução dos zeros em cada posição. Todos os elementos acima da diagonal principal de L são zeros, pois L é triangular inferior.*

***Etapa 4.** Forme a fatoração A=LU.*

Exemplo 3.2 Vamos fazer a fatoração *LU* da matriz ***A***= $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} l_1 \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow l_2 = -\frac{1}{6} l_2 \Rightarrow U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow L_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & * & * \end{pmatrix}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow l_3 = 2l_2 + l_3 \Rightarrow U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow L_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & * \end{pmatrix}$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow l_3 = \frac{1}{8} l_3 \Rightarrow U_5 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \Rightarrow L_5 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}}_{L}$$

Deste modo, segue que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Em geral, uma matriz quadrada A tem mais de uma fatoração *LU*, por exemplo, a matriz do exemplo 2 dada por $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, possui também a seguinte fatoração *LU*

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que para matrizes em que algum(ns) termo(s) da diagonal principal for igual a zero o método apresentado é falho. Nestes casos, o que pode ser feito é rearranjar as equações do sistema e recomeçar a fatoração *LU* (o que vai alterar a matriz *A*). Portanto afirmamos que não existe fatoração *LU* para todas as matrizes quadradas.

No método que demonstramos para a fatoração *LU* de uma matriz *A* dada, não é permitido a operação elementar sobre *A* de permutação de linhas. O que pode ser feito nesses casos é criar uma nova matriz, a matriz *Q*, chamada de *matriz de permutação*, que é o resultado do produto, em sequência, de matrizes elementares (portanto Q é invertível) que produzem permutação de linhas em A. Desta forma podemos garantir que o produto QA pode ser escalonado por linhas sem permutação de linhas, ou seja,

$$QA = LU \qquad (4)$$

como Q é invertível, temos as equivalências de sistemas:

$$Ax = b \Leftrightarrow QAx = Qb \Leftrightarrow LUx = Qb$$

Na literatura, encontramos a expressão (4) escrita como $A = PLU$, onde $P = Q^{-1}$. Essa decomposição é conhecida como ***decomposição PLU*** de A ou ***fatoração PLU*** *de A*.

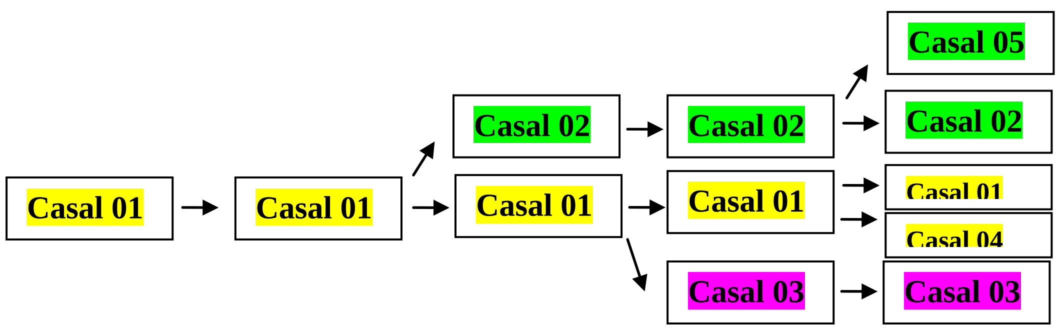
3.2 – SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa, também conhecido como *Fibonacci* (filho de Bonaccio), nascido em Pisa na Itália (1170-1250), mas foi na África, acompanhando seu pai numa viagem de fins comerciais, que teve sua base matemática solidificada. Teve contato com os métodos algébricos arábes, os números indo-arábicos além dos cálculos com os mesmos. Retornando para Itália resolve disseminar seu aprendizado na África através de várias publicações, entre elas, a mais famosa, o livro *Liber Abaci* (ou livro do Ábaco), o qual contém o seu problema mais famoso que dará origem a chamada **seqüência de Fibonacci**.

Este é o problema que abordaremos nesta subseção, também conhecido como o problema dos coelhos, é de fácil enunciação e bem acessível ao estudante do ensino médio, ele pode ser expresso da seguinte forma:

Um casal de coelhos recém-nascidos começou a cruzar com a idade de um mês, sabe-se que o período de gestação de um coelho é também de um mês. A partir de então, cada casal de coelhos gera um casal de coelhos por mês. Suponha que iniciemos com um casal de coelhos e que nenhum dos filhotes morreu. Quantos casais de coelhos haverá no início de cada mês?

Ilustraremos abaixo o início dessa população de coelhos em função do tempo denotado por **n** (em meses):



n= 0 **n= 1** **n= 2** **n= 3** **n= 4**

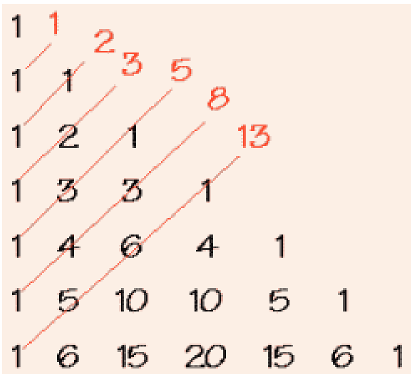
A sequencia que representa a quantidade de casais a cada mês, {1,1,2,3,5,...} é a famosa *sequencia de Fibonacci*. Uma propriedade importante dessa sequencia é que a razão entre dois números consecutivos dela aproxima-se cada vez mais do número 0,618034.... O valor limite é exatamente $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, que é chamado de *número áureo*, geralmente denotado por ∅. Uma proporção do tipo $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ é chamada de *proporção áurea.*

Voltando ao problema dos coelhos, observamos que a medida em que os meses passam, fica cada vez mais complexo determinar, via diagramas como mostrado acima, a quantidade de casais de coelhos em determinado mês. Essa dificuldade nos motiva a tentar responder a seguinte pergunta:

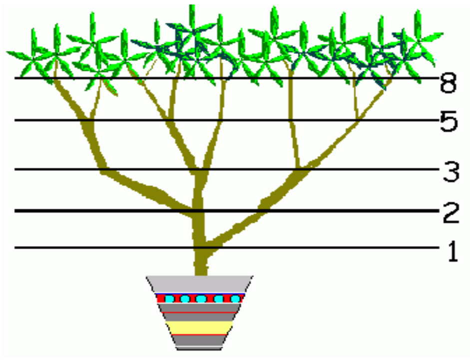
Será que existe alguma expressão algébrica que determine a quantidade de casais de coelhos em função dos meses?"

Antes de responder essa pergunta, vale ressaltar que a importância de determinar tal fórmula não é simplesmente uma maneira para determinar termos de uma sequência numérica. Suas inúmeras aplicações em outros campos da Matemática como, por exemplo, na estatística, nas diagonais do triângulo de Pascal, na aritmética, etc, assim como em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, na biologia, na música, nas artes visuais (proporções entre elementos e formas, na arquitetura, etc), justificam a magnitude de tal expressão algébrica, caso ela exista.

Exemplo 3.3 Fibonacci observou que essa sequencia aparecia na soma dos coeficientes binomiais das diagonais do triângulo de Pascal



Exemplo 3.4 Certas plantas mostram os numeros de Fibonacci no crescimento de seus galhos. Suponhamos que nasça um novo broto de um galho a cada mês, sendo que um broto leva dois meses para produzir o seu primeiro broto.



Existem várias plantas cujo crescimento se parecem com o descrito aqui. A planta *Achillea ptarmica* possui essas características. (Extraído de **[12]**)

Exemplo 3.5 Um instrumento musical que apresenta referências inequívocas a respeito da aplicação da sequencia de Fibonacci, é o piano. No teclado de um piano, uma oitava consiste de treze teclas, sendo oito teclas brancas e cinco pretas. As cinco teclas pretas formam entre si um grupo constituído de duas teclas e outro de três, como vemos na Figura abaixo. Os números 2, 3, 5, 8 e 13 formam números consecutivos de Fibonacci.

Teclas Pretas (2 grupos)

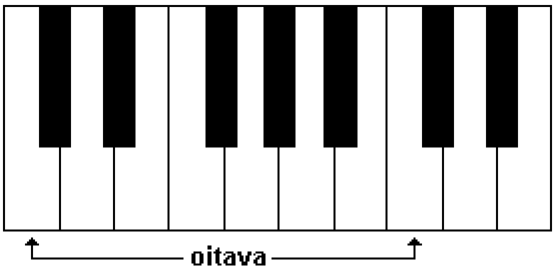
Grupo 1 = **2** teclas

Grupo 2 = **3** teclas

Total de teclas pretas = **5** teclas

Total de teclas brancas = **8** teclas

Total de teclas da oitava = **13** teclas



A aplicação da Proporção Áurea à música tem sido muito freqüente. Bach e Beethoven a teriam utilizado. Debussy e Béla Bartók também. Em Debussy (1862-1918), a Proporção Áurea ocorre freqüentemente para controlar a forma e "vitalidade" da sua música. O clímax normalmente está inscrito numa peça na proporção de $0{,}618 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ do total [exemplo: numa peça de 100 compassos, o clímax ocorre no compasso nº 62 (61,8). (Adaptado de **[13]**).

Observando como essa sequencia é construída, vemos que podemos defini-la recursivamente, ou seja, podemos deduzir a quantidade de coelhos de um determinado mês desde que saibamos alguns resultados anteriores.

Para determinar o número de casais num determinado mês (u_n), basta observar que no mês *n*, temos o número de casais do mês anterior (u_{n-1}), pois estamos assumindo que nenhum coelho morreu, mais o número de casais que estão "aptos" a se reproduzirem, ou seja, é o número de casais que se tinha há dois meses. Definido recursivamente essa sequencia temos:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

De posse dessa recorrência podemos construir toda a sequencia de Fibonacci, porém quanto maior for o índice *n*, mais trabalhoso será encontrar u_n, pois é necessário conhecer todo o "histórico" dessa sequencia até o mês *n-1*.

Podemos reformular a nossa pergunta da seguinte maneira: *"Será que existe alguma expressão algébrica que determine, de forma direta, o termo geral da sequência de Fibonacci?"*

Para tentar responder a essa nova pergunta, faremos uma abordagem matricial dessa recorrência, tendo em vista buscar condições para que possamos usar o processo de diagonalização, para então determinar diretamente o termo u_n da sequencia de Fibonacci sem a necessidade de ter que encontrar todos os u_k com $k \in \{0,1, \dots , n\text{-}1\}$.

Sabemos que:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \\ u_{n-1} = u_{n-1} \end{cases} \qquad (1)$$

reescrevendo (1) em forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Definindo $w_i = \begin{bmatrix} u_{i+1} \\ u_i \end{bmatrix}$ temos que

$$w_0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \cdots$$

e chamando $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, podemos escrever (2) como:

$$w_n = A \,.\, w_{n-1} \qquad (3)$$

Colocando cada w_i em função de w_0 obtemos as expressões:

$$\begin{array}{llll} w_1 = A\,w_0 & & & \\ w_2 = A\,w_1 & = A(Aw_0) & = A^2 w_0 & \\ w_3 = A\,w_2 & = A(A^2 w_0) & = A^3 w_0 & \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \\ w_{n-1} = A\,w_{n-2} & = A(A^{n-2} w_0) & = A^{n-1} w_0 & \end{array}$$

A expressão acima fornece uma forma para achar diretamente o termo u_n, porém é necessário calcular $A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ o que pode ser bastante trabalhoso. A fim de evitar esse transtorno, vejamos se a matriz A é diagonalizável.

O polinômio característico da matriz A é $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Calculando os autovalores de A temos:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-1)}}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Como A_{2x2} tem dois autovalores distintos, A tem uma base formada por autovetores, ou seja, $A = PDP^{-1}$, onde $D = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$. Calculando os autovetores $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ associados à $\lambda_1\ e\ \lambda_2$ respectivamente encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} x_1 \\ \\ x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} y_1 \end{cases}$$

logo $v_1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \alpha, \alpha \right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, portanto podemos escrever $v_1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right)$.

Calculando v_2 temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + y_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} x_2 \\ \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} y_2 \end{cases}$$

logo $v_2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \beta, \beta \right) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^*$, portanto podemos escrever $v_2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} ,1 \right)$. Então a matriz P que diagonaliza a matriz A é escrita como:

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e sua inversa é } P^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Diante desses resultados já podemos expressar u_n em função apenas de n sem necessariamente expressar nenhum termo anterior da sequencia como na recorrência que define a sequencia de Fibonacci. A expressão é dada por:

$$w_{n-1} = A^{n-1} w_0 = PD^{n-1}P^{-1} w_0$$

Escrita na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ \\ 0 & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ \\ \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n & \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\left(-\frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5}\right)+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\right) \\ \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5}\right)+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n & \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\left(-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\left(-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) \\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left(-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix}u_n\\u_{n-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\left[1-\frac{1-\sqrt5}{2}\right]+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\left[-1+\frac{1+\sqrt5}{2}\right] \\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left[1-\frac{1-\sqrt5}{2}\right]+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\left[-1+\frac{1+\sqrt5}{2}\right] \end{bmatrix}$$

Fazendo as operações e simplificando, temos que:

$$\begin{bmatrix}u_n\\u_{n-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1} \\ \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n} \end{bmatrix}$$

Assim, encontramos uma expressão direta para determinar qualquer termo da sequência de Fibonacci, que é dada por :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\ n \in \mathbb{N}.$$

Observe que apesar da expressão acima conter raízes, $u_n \in \mathbb{Z}$.

3.3 – CRIPTOGRAFIA

No mundo moderno de hoje, nunca se investiu tanto em comunicação como nessas últimas décadas. E esta comunicação precisa ser cada vez mais *veloz* e *segura* para atender as necessidades desse mundo globalizado. Quanto ao aspecto da velocidade, os computadores estão sendo aperfeiçoados a cada dia para reduzir, com eficácia, tempo e fronteiras. Quanto ao aspecto de segurança, no sentido de garantir a privacidade na comunicação de informações, muitas técnicas fazem um vasto uso da álgebra linear. Nesta subseção mostraremos, de forma breve, algumas dessas técnicas e principalmente o importante papel que as matrizes desempenham nesses processos. Ao processo de transformação de uma mensagem original para uma mensagem codificada, onde somente o remetente e o destinatário sabem como retornar a mensagem original é chamado de *criptografia*.

O processo de criptografia que apresentaremos consiste basicamente em três passos, são eles: transformar a mensagem original numa mensagem numérica, codificar essa mensagem numérica através de um produto da mensagem numérica (que será disposta na forma de matriz com número de linhas convenientes) por uma matriz invertível (*matriz codificadora*), que chamaremos de *mensagem codificada* e em seguida, decodificar essa mensagem através de um novo produto da mensagem codificada pela a matriz inversa da matriz codificadora. Em linguagem algébrica, esse processo se resume em:

$$\text{Remetente: } \begin{cases} M \Rightarrow \textit{mensagem numérica} \\ A \Rightarrow \textit{matriz codificadora} \\ AM \Rightarrow \textit{mensagem codificada} \end{cases}$$

$$\text{Destinatário: } \begin{cases} AM \Rightarrow \textit{mensagem codificada} \\ B = A^{-1} \Rightarrow \textit{matriz decodificadora} \\ BAM = A^{-1}AM = M \Rightarrow \textit{mensagem numérica} \end{cases}$$

Primeiramente precisamos estabelecer uma codificação inicial que transforme a mensagem original numa mensagem numérica. Para tal usaremos somente os números inteiros seguindo a tabela a seguir.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	,	.	?	#
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	0

Tabela 3.1

Usamos o símbolo # para denotar os espaços entre as palavras da mensagem. Podemos utilizar números inteiros maiores que 29 na mensagem numérica, desde que seja estabelecida uma regra bem definida entre remetente e destinatário, como por exemplo, utilizando a aritmética modular. Em todos os exemplos desta subseção, usaremos a tabela 3.3.1 para compor a mensagem numérica.

Exemplo 3.6 Supomos que a mensagem a ser transmitida seja: "*O TEMPO EXPIROU.*" Chamemos de M a mensagem numérica e $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz codificadora. A mensagem numérica, segundo a tabela 3.3.1, é dada por:

O#TEMPO#EXPIROU. $\Rightarrow$15, 0, 20, 5, 13, 16, 15, 0, 5, 24, 16, 9, 18, 15, 21, 28

(usamos as vírgulas somente para facilitar a visualização). Como a matriz A é 2x2, temos que dispor a mensagem numérica numa matriz M com duas linhas. Caso a mensagem tivesse um número ímpar de caracteres, completamos no final com 0, que representa um espaço em branco (nulo). Temos então:

$$M = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 20 & 5 & 13 & 16 & 15 & 0 \\ 5 & 24 & 16 & 9 & 18 & 15 & 21 & 28 \end{bmatrix} \Rightarrow \textit{Mensagem numérica}$$

$$AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 20 & 5 & 13 & 16 & 15 & 0 \\ 5 & 24 & 16 & 9 & 18 & 15 & 21 & 28 \end{bmatrix}$$

$$AM = \begin{bmatrix} 5 & 24 & 16 & 9 & 18 & 15 & 21 & 28 \\ 15 & 0 & 20 & 5 & 13 & 16 & 15 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \textit{Mensagem codificada}$$

a mensagem codificada, em caracteres, segundo a tabela 3.1 é:

EXPIROU.O#TEMPO#

Observe que A é ortogonal, pois os vetores colunas são ortonormais. Portanto, $A^{-1} = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, logo a mensagem decodificada pelo destinatário é dada por:

$$A^T AM = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 24 & 16 & 9 & 18 & 15 & 21 & 28 \\ 15 & 0 & 20 & 5 & 13 & 16 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 & 20 & 5 & 13 & 16 & 15 & 0 \\ 5 & 24 & 16 & 9 & 18 & 15 & 21 & 28 \end{bmatrix} = M$$

A mensagem numérica será lida na ordem 15,0,20,5,13,16,15,0,5,24,16,9,18,15,21,28, cuja leitura via tabela 3.1 é: *O#TEMPO#EXPIROU.*

Observe que essa codificação poderia facilmente ser quebrada. Isto se deve ao fato de que a matriz codificadora escolhida é uma matriz bem simples (é a matriz identidade seguida de uma troca de linhas). Mas o que queremos mostrar com esse exemplo, é que essa técnica é válida para qualquer matriz ortogonal e possui a vantagem de eliminar o cálculo da matriz inversa (matriz decodificadora).

Outra possibilidade de codificação seria utilizar uma matriz diagonalizável A, invertível, escolher um $n \in \mathbb{N}$ e tomar A^n como matriz codificadora. Observe que, sendo A invertível temos $det(A) \neq 0$, como $det(A^n) = det(A).det(A)..det(A) \neq 0$, portanto A^n é invertível e faz sentido então tomar A^n como matriz codificadora. E como matriz decodificadora tomamos a matriz $(A^n)^{-1}$. Abaixo daremos um exemplo numérico dessa técnica.

Exemplo 3.7 Supomos que precisamos transmitir a mensagem: "*O#PLANO#ESTA #COMPROMETIDO.*" Tomemos a matriz diagonalizável (e invertível) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ do exemplo 2.1.9 e escolhemos A^2 como matriz codificadora. No exemplo 2.1.9, vimos que $A = P.D.P^{-1}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então, A^2 é dada por $A^2 = P.D^2 P^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -10 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ é a matriz codificadora. Como A^2 é 3x3, a matriz M da mensagem numérica fica disposta em três linhas da seguinte forma:

$$M = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 16 & 12 & 1 & 14 & 15 & 0 & 5 \\ 19 & 20 & 1 & 0 & 3 & 15 & 13 & 16 & 18 \\ 15 & 13 & 5 & 20 & 9 & 4 & 15 & 28 & 0 \end{bmatrix}$$

e a mensagem codificada fica expressa por:

$$A^2M = \begin{bmatrix} -90 & -130 & 14 & -152 & -86 & 16 & -90 & -280 & 20 \\ 171 & 180 & 9 & 0 & 27 & 135 & 117 & 144 & 162 \\ 135 & 117 & 45 & 180 & 81 & 36 & 135 & 252 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando $(A^2)^{-1}$, encontramos $(A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{18} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$.

Então, decodificando a mensagem temos:

$$(A^2)^{-1}AM = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{5}{18} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -90 & -130 & 14 & -152 & -86 & 16 & -90 & -280 & 20 \\ 171 & 180 & 9 & 0 & 27 & 135 & 117 & 144 & 162 \\ 135 & 117 & 45 & 180 & 81 & 36 & 135 & 252 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}AM = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 16 & 12 & 1 & 14 & 15 & 0 & 5 \\ 19 & 20 & 1 & 0 & 3 & 15 & 13 & 16 & 18 \\ 15 & 13 & 5 & 20 & 9 & 4 & 15 & 28 & 0 \end{bmatrix} = M$$

A mensagem numérica é lida na ordem 15, 0, 16, 12, 1, 14, 15, 0, 5, 19, 20, 1, 0, 3, 15, 13, 16, 18, 15, 13, 5, 20, 9, 4, 15, 28, 0, cuja leitura via tabela 3.1 é: *O#PLANO#ESTA#COMPROMETIDO.*

Observe que ao usarmos A^n (n = 2) para a matriz codificadora, essa técnica é mais segura, pois ainda que a atriz A seja descoberta, é fundamental saber o valor de n, o qual foi escolhido de modo aleatório em $\mathbb{N}$.

Poderíamos ainda fazer uma variação dessa técnica tomando a matriz P da diagonalização da matriz A como a matriz codificadora. Para tal precisamos que os autovalores de A sejam distintos e os autovetores de A sejam unitários e ortogonais. Nessas condições P é ortogonal e a matriz decodificadora é $P^{-1} = P^T$, e mais uma vez eliminaríamos o cálculo da inversa.

Para finalizar esta subseção deixamos uma sugestão de atividade que pode ser explorada em sala de aula. Esta atividade envolve os conceitos de radiciação de matrizes e criptografia. A atividade foi pensada dividindo a classe em dois grupos.

Atividade 3.8 Descreveremos passo a passo como se desenvolverá a atividade. O tempo estimado para a atividade é de 60 minutos. A atividade é desdobrada em três momentos.

<u>1º Momento</u>

1) 1º) A classe será dividida em dois grupos, digamos X e Y;
2) Os dois grupos mandarão uma mensagem codificada para o professor utilizando como matriz codificadora uma das raízes quadradas da matriz A, onde $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. (Detalhe: Cada grupo deve informar secretamente ao professor qual das $\sqrt{A}$ o grupo está utilizando como matriz codificadora);
3) O professor irá informar ao grupo X a mensagem codificada que recebeu do grupo Y e vice-versa;
4) Vence o desafio o grupo que decifrar a mensagem do grupo rival primeiro.

<u>2º Momento</u>

1º) Repetir o mesmo processo do 1º momento utilizando a matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (exemplo 2.16). Obviamente com mensagens distintas das do 1º momento.

<u>3º Momento</u>

1) Discutir com a classe o grau de dificuldade de quebra da mensagem codificada em função da quantidade de matrizes que podem ser raiz quadrada da matriz *A*.
2) Discutir a relação entre as quantidades de matrizes que são raiz quadrada de *A* e o tamanho da matriz *A*.

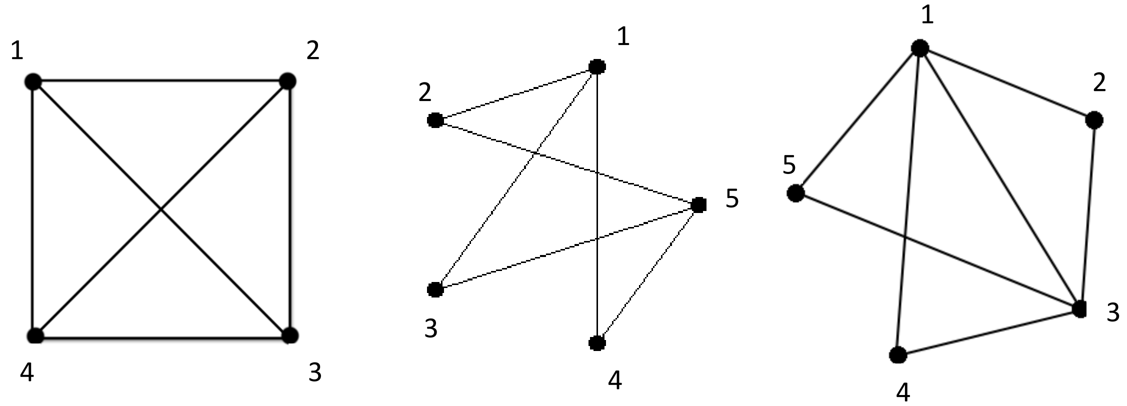
3.4 – TEORIA DE GRAFOS

Na sociedade em que vivemos há muitos problemas e situações que envolvem um número finito de elementos que, de alguma forma, se relacionam entre si. Por exemplo, essa relação pode ser um elemento que domina outro, um elemento que se comunica com outro, um elemento que depende de outro, etc. Essas relações podem ser unilaterais, bilaterais ou até mesmo, ocorrer de um (ou mais) elemento não se relacionar com os demais. Em áreas como sociologia, comunicações, economia, ciências físicas e outras, é que problemas com essas características aparecem com maior frequência.

Nesta seção faremos uma breve abordagem desses tipos de problemas e associado ao estudo de matrizes que fizemos até aqui, veremos que com uma abordagem matricial relativamente simples, podemos resolver problemas de complexidade considerável. Uma das áreas da matemática que estuda problemas dessa natureza é a *Teoria dos Grafos*. Existem grafos orientados e não orientados, neste texto trabalharemos apenas com grafos não orientados. Neste momento, veremos algumas definições e resultados da Teoria de Grafos que nos serão muito úteis.

Definição 3.9 (Grafo não orientado) Um grafo $G(V,E)$ é formado por um conjunto finito de vértices $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ e um conjunto E de subconjuntos de dois elementos de V chamado de arestas.

Exemplo 3.10: Abaixo daremos alguns exemplos de grafos.



(a) (b) (c)

Se $e=\{v_i,v_j\}\in E$, então dizemos que a aresta e incide sobre v_i e v_j, e que v_i e v_j são *adjacentes*. O número de arestas incidente sobre o vértice v_i é chamado de *grau* do vértice v_i e é denotado por $d(v_i)$. Por exemplo, no grafo (b) do exemplo acima, temos $d(v_5)=3$.

O conceito de grafo pode ser construído de forma lúdica e atraente em turmas dos ensinos médio e fundamental. Abaixo deixamos um exemplo de atividade interdisciplinar que ilustra como isso pode ser feito.

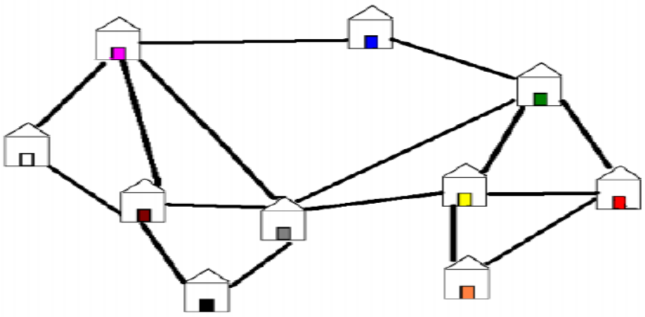
Atividade 3.11: *O grafo dos estados do Brasil é definido assim: cada vértice é um dos estados da República Federativa do Brasil; dois estados são adjacentes se têm uma fronteira comum. Quantos vértices tem o grafo? Quantas arestas?* (Adaptado de **[11]** p.10)

Definição 3.12 (Cadeia e Caminho) Uma *cadeia* de v_i a v_k é uma sequência $v_1, v_2, \cdots, v_k$ de vértices de um grafo tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, para $1 \leq i \leq k-1$. Uma cadeia em que o primeiro e o último vértices são iguais é denominada *cadeia fechada*. Um *caminho* é uma cadeia de vértices distintos.

Um grafo é dito *conexo* quando dados quaisquer pares de vértices do mesmo sempre existe um caminho que liga esse par de vértices. Por exemplo, o grafo do exemplo 3.11 (a) é um grafo conexo.

Abaixo damos outra atividade onde os conceitos de cadeia e caminho, e que podem ser explorados nos níveis fundamental e médio.

Atividade 3.13: (*Ajude ao carteiro!*) Determine um caminho para o carteiro, de tal forma que ele consiga entregar as cartas de todas as casas passando uma única vez pelas ruas que as ligam. Esse caminho é único? (Adaptado de **[9]** p.82)



Nesta abordagem vamos considerar apenas *grafos simples*, ou seja, grafos sem *laços* (arestas ligando um vértice nele mesmo), não orientados e sem arestas múltiplas (arestas incidindo num mesmo par de vértices).

Vejamos agora como as matrizes se inserem nesse contexto da Teoria de Grafos e qual sua importância na mesma.

Definição 3.14 (Matriz de Adjacência) Dado um grafo $G = (V, E)$ com n vértices e conjunto $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, a matriz de adjacência $A(G)$ é uma matriz quadrada de ordem n, construída da seguinte forma:

$$A(G) = a_{ij} \qquad onde \quad \begin{cases} 1 & se \quad v_i \ e \ v_j \ são \ adjacentes; \\ 0 & caso \ contrário \end{cases}$$

Exemplo 3.15 A seguir estão as matrizes de adjacência dos grafos apresentados no exemplo 3.10.

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}\qquad A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1\\1&0&0&0&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}\qquad A(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&0&0\\1&1&0&1&1\\1&0&1&0&0\\1&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

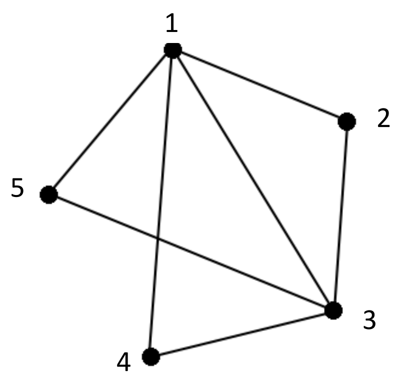
Observe que, como não estamos trabalhando com grafo orientado, as arestas (v_i,v_j) e (v_j,v_i) representam a mesma aresta. Este fato acarreta que a matriz de adjacência *A(G)* sempre será uma matriz simétrica com a diagonal principal formada por zeros.

No capítulo 1 (seção 1.4), vimos que todos os autovalores de matrizes simétricas são números reais. Neste momento, enunciaremos um resultado bastante conhecido em Álgebra Linear chamado *Teorema Espectral*, que será apresentado na sua versão matricial. Omitiremos a demonstração desse teorema, mas a mesma pode ser consultada em **[9]** p.254.

Teorema 3.16 (Teorema Espectral_Versão Matricial) Se *A* é uma matriz simétrica com entradas reais, então existe uma matriz ortogonal *P* tal que $P^{-1}AP=D$, onde *D* é uma matriz diagonal. Além disso, os elementos da diagonal principal de *D* são os autovalores de *A*.

O Teorema Espectral nos garante que toda matriz simétrica com entradas reais é diagonalizável. Este fato é extremamente relevante no cálculo das potências de matrizes, conforme vimos na seção 2.1 do capítulo 2. Mais adiante veremos uma aplicação com matrizes de adjacência, na qual o Teorema Espectral é parte fundamental do embasamento teórico.

Retomando as definições que utilizaremos , chamamos de *comprimento* de uma cadeia, denotado por l, à quantidade de arestas que ocorre na mesma. Por exemplo, no grafo *G* do exemplo 3.10 (c),



podemos fazer três caminhos para ir do vértice v_1 ao vértice v_5. São eles: (v_1,v_5), (v_1,v_3,v_5) e (v_1,v_2,v_3,v_5), que são denominados caminhos de *um* passo, de *dois* passos e de *três* passos, respectivamente. Generalizando, um caminho de *n* passos é um caminho formado por *n* arestas.

É bastante tedioso e difícil a tarefa de contar esses caminhos à medida que o número de vértices aumenta. O teorema abaixo nos fornecerá um método para encontrarmos o total de caminhos de *n* passos de um determinado vértice para outro.

Teorema 3.17 *O número de cadeias de compriento l ligando os vértices* v_i *e* v_j *em um grafo G é dado pelo elemento ij da matriz* A^l *, onde A é a matriz de adjacência de G.*

Prova:

O reultado vale para $l = 1$, pois as cadeias de tamanho um entre v_i e v_j são as arestas, e a existência delas é indicada pela entrada a_{ij} da matriz $A(G)$, por definição.

Supondo que o resultado seja válido para a matriz A^l, queremos encontrar números de cadeias de tamanho $l+1$ ligando v_i a v_j. Esse número pode ser calculado somando as cadeias de tamanho *l* que vão de v_i a v_h (indicado por $(A^l)_{ih} = \langle e_i, A^l e_h \rangle$, onde e_k é o *k*-ésimo vetor da base canônica), para todos os vértices v_h adjacentes a v_j (qualidade indicada por a_{hj}),

$$\sum \langle e_i, A^l e_h \rangle a_{hj} = \langle e_i A^l, A e_j \rangle = (A^{l+1})_{ij}$$

A igualdade pode ser confirmada observando que a soma dos produtos identifica o produto da *i*-ésima linha de A^l com a *j*-ésima coluna de *A*. Portanto, por indução em *l*, concluímos o resultado. ■

Exemplo 3.18: Considere a matriz de adjacência *A* que determina se há ou não voos entre cinco cidades.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Escolhida cidades 2 e 4, nesta ordem. Há uma rota de voos, ou seja, um caminho, que saia da cidade 2 e chegue a cidade 4?

Solução: Inicialmente, olhamos para a matriz *A* e vemos que não há voo direto da cidade 2 para a cidade 4, pois $a_{24} = 0$. Então precisamos construir a potências da matriz de adjacência até A^4.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Observando A^2 vemos que não precisamos mais continuar as potências de *A*, pois em A^2 a entrada a_{24} é igual a 3, o que pelo Teorema 3.18 quer dizer que há quatro caminhos de dois passos, ou seja, há quatro rotas distintas de voos com uma escala em cada rota, que vai da cidade 2 à cidade 4.

Neste exemplo, poderíamos ter calculado a potência da matriz *A* utilizando a diagonalização de matrizes, porém por se tratar de uma potência de uma matriz de ordem pequena e com expoente baixo, é menos trabalhoso fazê-lo via produto matricial. Mas em geral a diagonalização é o caminho mais viável, conforme o exemplo que veremos a seguir.

Exemplo 3.19 Considere o problema de construir um metrô numa grande cidade.

São escolhidos n locais estratégicos, digamos $v_1, v_2, \cdots, v_n$*, que devem possuir estações de metrô. Estas estações, juntamente com as linhas de metrô definidas para fazerem a interligação entre elas, formam uma malha ou rede. Esta rede pode ser representada por um grafo, cujos vértices são as estações e as arestas indicam os trechos de metrô que as interligam.*

A questão que se coloca é: escolhendo-se duas estações quaisquer, sempre existe um caminho na rede que as interligue? Para uma resposta positiva, é necessário que o grafo seja conexo. Se A é a matriz de adjacência do grafo basta que $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$ *não tenha nenhuma entrada nula.*

Por exemplo, se $n = 10$ *e a matriz do grafo que representa a rede é*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a diagonalização de matrizes para calcular $A^2, A^3, \cdots, A^9$ *e calculando* $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^9$ *encontramos*

$$A + A^2 + \cdots + A^9 = \begin{bmatrix} 31 & 119 & 87 & 133 & 46 & 46 & 114 & 27 & 55 & 9 \\ 119 & 118 & 366 & 133 & 234 & 46 & 114 & 114 & 55 & 55 \\ 87 & 366 & 278 & 467 & 188 & 188 & 366 & 87 & 234 & 46 \\ 133 & 133 & 467 & 200 & 421 & 96 & 133 & 133 & 124 & 124 \\ 46 & 234 & 188 & 421 & 232 & 233 & 234 & 46 & 311 & 78 \\ 46 & 46 & 188 & 96 & 233 & 58 & 46 & 46 & 78 & 78 \\ 114 & 114 & 366 & 133 & 234 & 46 & 118 & 119 & 55 & 55 \\ 27 & 114 & 87 & 133 & 46 & 46 & 119 & 31 & 55 & 9 \\ 55 & 55 & 234 & 124 & 311 & 78 & 55 & 55 & 108 & 109 \\ 9 & 55 & 46 & 124 & 78 & 78 & 55 & 9 & 109 & 30 \end{bmatrix}$$

que tem todas as entradas diferentes de zero, garantindo a conexidade do grafo.
(Extraído de **[1]** p.33**)**

Observe que neste exemplo o Teorema Espectral é extremamente funcional, pois sendo *A* simétrica ele nos garante a existência da matriz *P* que diagonaliza *A*, o que torna possível o cálculo de cada potência $A^2, A^3, \cdots, A^9$. Vale lembrar que encontrar raízes de polinômios de grau maior ou igual a 3 é trabalhoso, mas existem programas que calculam essas raízes.

Definição 3.20 (Espectro) Dada uma matriz quadrada *A*, chamamos de espectro de *A*, e denotamos por *spect*(*A*), o multiconjunto das raízes do polinômio característico, lembrando de suas respectivas multiplicidades.

O conceito de espectro é muito aplicado na matriz de adjacência *A(G)* de um grafo G, nesses casos denotamos o espectro de *A(G)* apenas como *spect(G)*. É fato que determinar o espectro de um grafo, muitas vezes, não é um trabalho simples, pois significa determinar as raízes de um polinômio de grau igual ao número de vértices do grafo. Mas existem softwares que utilizam métodos numéricos que permitem encontrar aproximações bem próximas dessas raízes.

3.5 – Classificação das Cônicas

As cônicas são as seções determinadas por um plano sobre um cone reto. A classificação das cônicas pode ser feita através de uma manipulação algébrica nas equações das mesmas, porém, nesta subseção, mostraremos como identificar as cônicas através de uma álgebra matricial nas equações que descrevem essas curvas, usando a diagonalização de matrizes simétricas. Abaixo temos a figura 2.1 que ilustra as principais cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e a figura 2.2 que apresenta o gráfico e as equações dessas curvas. Quando o plano passa pelo vértice do cone temos as chamadas *cônicas degeneradas*, que serão exploradas mais adiante.

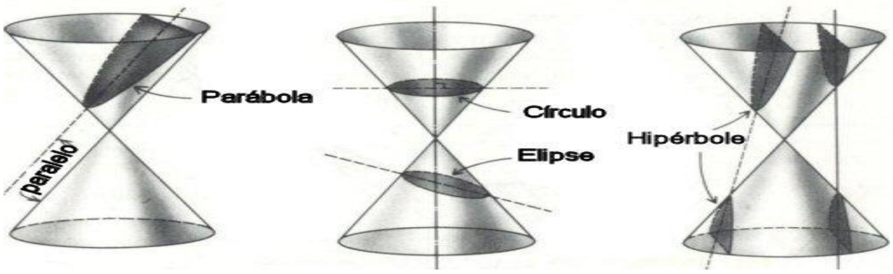
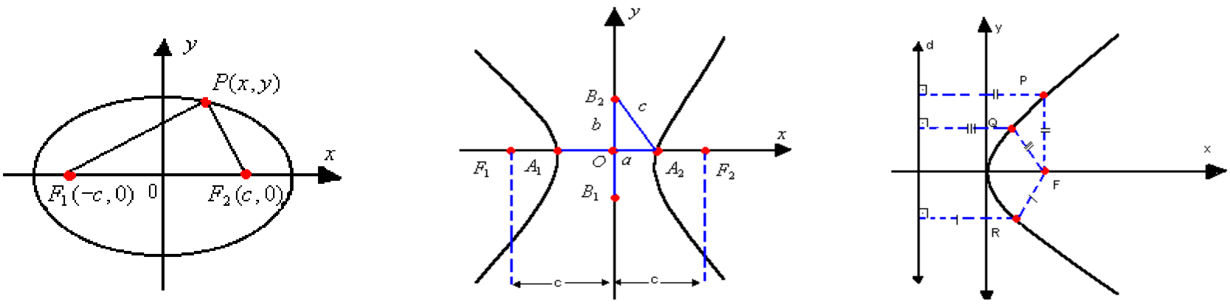


Figura 2.1

Fonte: http://astro.if.ufrgs.br/kepleis/node5.htm



Elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$a \geq b > 0$$

Hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$a > 0\,,\, b > 0$$

Parábola

$$y^2 = ax$$
$$a > 0$$

Figura 2.2

Fonte: www.somatematica.com.br

O gráfico das cônicas é descrito pela equação:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad (1)$$

onde *a, b, c, d, e, f* são números reais fixados, com *a* e *c* não simultaneamente nulos e *x* e *y* variam em $\mathbb{R}$. As cônicas em que $d = e = 0$ são chamadas de ***cônicas centrais***. Se uma cônica central tiver $b = 0$, ela é chamada de ***cônica central em posição canônica***.

Geometricamente, os coeficientes $d = e = 0$ indicam que a cônica está centrada na origem do plano cartesiano. Já o coeficiente $b = 0$, indica que a cônica não sofreu rotação. Observe que as cônicas descritas na figura 2.2 são cônicas centrais em posição canônica.

Neste momento, vamos reescrever a equação (1) em termos matriciais, mas antes daremos a definição a seguir, que nos será muito útil.

Definição 3.21 (Forma Quadrática) Sejam *a, b* e *c* números reais. A expressão $ax^2+bxy+cy^2$ é chamada de *forma quadrática em* $\mathbb{R}^2$. Generalizando, a expressão $a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2+$(todos os termos $a_kx_i\,x_j$ que $x_i\neq x_j$) é chamada de *forma quadrática em* $\mathbb{R}^n$. Em termos matriciais, podemos escrever a forma quadrática em $\mathbb{R}^n$ como X^TAX, onde $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$(com $a_{ij}=a_{ji}=\dfrac{k_s}{2}$, $\forall i\neq j$ onde k_s é o coeficiente do termo x_ix_j).

Retomando a equação (1) e considerando $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}, z=-f$, podemos reescrever a equação (1) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=z\Rightarrow X^TAX+\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}X=z \qquad (2)$$

Quando se tratar de uma cônica central em posição canônica a equação (2) fica reduzida a:

$$X^TAX=z \qquad (3)$$

Ao primeiro membro da equação (3) chamamos de *forma quadrática da matriz A*, que será denotada por Q_A, ou seja, $Q_A=X^TAX$. Observe que se *A* for uma matriz diagonal a forma quadrática de *A* em $\mathbb{R}^2$ fica reduzida a $ax_1^2+cx_2^2$.

No caso presente é conveniente fazer uma substituição de variáveis e substituí-la na forma quadrática, a fim de transformar a equação original numa equação mais simples num novo sistema de eixos. Essa substituição se dá fazendo $X=PY$, onde *P* é uma matriz conveniente e $Y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

Para a escolha dessa matriz *P* é fundamental observar que a matriz *A* é simétrica. Pois sendo *A* simétrica, *A* possui uma base formada por autovetores e *A* é ortogonalmente diagonalizável, ou seja, existe uma matriz ortogonal *P´*, tal que $(P')^TAP'=D$ onde *D* é uma matriz diagonal.

Escolhendo *P=P´*, temos:

$$X^T AX = z \Rightarrow (P'Y)^T AP'Y = z \Rightarrow Y^T (P'^T AP)Y = z \Rightarrow Y^T DY = k \Rightarrow \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 = z$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores de *A*. Com essa substituição (*X=P'Y)* encontramos um novo sistema de eixos coordenados ($y_1\ y_2$) em que essa mesma cônica se encontra na posição canônica. Em outras palavras, essa substituição desfaz qualquer rotação sofrida pela cônica no $\mathbb{R}^2$. Essa argumentação é conhecida na literatura como o *Teorema dos eixos principais*, que enunciaremos abaixo. Essa mudança de variáveis é chamada de *mudança de variáveis ortogonal*.

Teorema 3.22 (Teorema dos eixos principais) *Se A for uma matriz simétrica de ordem n, então existe uma mudança de variáveis ortogonal* $(X = PY)$ *que transforma a forma quadrática* $X^T AX$ *numa outra forma quadrática* $Y^T DY$ *, tal que:*

$$X^T AX = Y^T DY = \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *são os autovalores de A e D é uma matriz diagonal.(Para encontrar essa mudança de variáveis basta que P seja a matriz que diagonalize ortognalmente a matriz A)*

Então, se $X^T AX = z$ for a equação de uma cônica e se $z \neq 0$, podemos dividir a equação por *k* e teremos $X^T BX = 1$, onde $B = \frac{1}{z} A$. Observe que essa matriz *B* ainda é simétrica, portanto o teorema dos eixos principais nos garante que há um sistema de eixos $y_1\, y_2$ no qual essa cônica está na posição canônica. Portanto, temos:

$$X^T AX = z \Rightarrow X^T BX = 1 \Rightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 1 \qquad (4)$$

Comparando a equação (4) com as equações da figura 2.2, podemos identificar as cônicas em função dos autovalores λ_1 *e* λ_2 de acordo com a tabela abaixo.

λ_1 *e* λ_2 *não ambos nulos*		$\lambda_1 . \lambda_2 = 0$
$\lambda_1 . \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 . \lambda_2 < 0$	
elipse (*)	**hipérbole** (**)	**parábola (***)**

Tabela 2.3

Ressaltamos que em:
(*) o gráfico poderia ser um único ponto ou o conjunto vazio, é o que chamamos de *elipse degenerada;*

(**) o gráfico poderia ser duas retas concorrentes, é o que chamamos de *hipérbole degenerada;*

(***) o gráfico poderia ser duas retas paralelas ou uma única reta, é o que chamamos de *parábola degenerada.*

Exemplo 3.23 Identifique a cônica determinada pela equação $2x^2 - 4xy - y^2 + 8 = 0$.

Solução: Reescrevendo a equação em termos matriciais temos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = -8$$

A equação característica de A é dada por $(2-\lambda).(-1-\lambda) - 4 = 0$, resolvendo esta equação encontramos os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$. Calculando e normalizando os autovetores v_1 e v_2 associados à λ_1 e λ_2 respectivamente encontramos a base ortonormal formada por:

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \quad e \quad v_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

Logo $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ é a matriz que diagonaliza ortogonalmente a matriz *A*.

Segue do teorema dos eixos principais que:

$$X^T AX = Y^T DY = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -8 \Rightarrow -2y_1^2 + 3y_2^2 = -8 \Rightarrow \frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{8/3} = 1 \quad (*)$$

A equação (*) descreve uma hipérbole. Outra forma de observar é verificando que a forma quadrática $X^T BX = 1$ (onde $B = -\frac{1}{8}A$) e $\lambda_1.\lambda_2 < 0$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os anos de experiência lecionando em turmas do Ensino Médio, nos permitem prever as possíveis reações dos alunos e professores ao lidar com algo novo, no caso, uma abordagem não tradicional do estudo de matrizes. Neste cenário diversificado podem ser gerados comportamentos distintos como curiosidade, receio ou rejeição. Contudo, acreditamos que partir de conceitos já estabelecidos, como potenciação e radiciação, e fazer aplicações dos mesmos em outro cenário fortalecem o processo de ensino-aprendizagem.

Ao longo deste trabalho também procuramos evidenciar as conexões que há entre conteúdos distintos, como por exemplo, relacionar os conceitos de área e volume como aplicação de matrizes e classificar cônicas a partir de matrizes. Explorar essas conexões dão significado e funcionalidade aos conceitos trabalhados e isto acarreta na assimilação e acomodação de conteúdos.

O desenvolvimento dos conteúdos abordados, assim como a aplicação dos mesmos, foi feito ao nível de compreensão e maturidade matemática de um aluno do Ensino Médio. Portanto, evitamos uma formalização excessiva e uma linguagem que abrangesse conteúdos fora da sua grade curricular.

Ressaltamos que este texto não tem a pretensão de esgotar o estudo sobre matrizes, nem muito menos as suas aplicações.

Ao concluir esta dissertação, esperamos que este texto possa contribuir como estímulo e fonte de referência aos possíveis leitores interessados neste tipo de assunto, na busca de ampliar seus conhecimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] – Abreu N., Del-Vecchio R., Trevisan V., Vinagre C. – *Teoria Espectral de Grafos: Uma Introdução* – III Colóquio de Matemática Região Sul – Santa Catarina – Florianópolis, 2014.

[2] – Anton , Howard e Rorres Chris – Álgebra Linear com Aplicações – 10ª ed. - Editora Bookman, 2012.

[3] – Boldrini, José Luiz e Costa, Sueli I. Rodrigues e Figueiredo, Vera Lúcia e Wetzler, Henry G. *Álgebra Linear* - 3ª ed. - São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

[4] – Gómez, Jorge Joaquín Delgado e Frensel, Katia Rosenvald e Crissaff, Lhaylla dos Santos. *Geometria Analítica.* Coleção PROFMAT - 1ª ed. – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[5] – Hefez, Abramo e Fernandez, Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear* – Coleção PROFMAT – 1ª ed. – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[6] – Junior, Ronaldo C. M. – *Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem n x n* – Dissertação (Mestrado em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal de Goiás, Goiânia 2014.

[7] – Kolman, Bernard e Hill, David R. – *Introdução à Álgebra Linear com Aplicações* – 8 ª ed. – Rio de Janeiro : Editora LTC, 2006.

[8] – Lima, Elon Lages – *Álgebra Linear* – 5ª ed. – Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001.

[9] – Magalhães, Tiago Miranda – *Grafos como Ferramenta para o Ensino de Matemática*. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2014.

[10] – Peres, Eduardo dos Santos – *Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica*. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

Sites Consultados:

[11] - http://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/texto/TeoriaDosGrafos.pdf

[12] - http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

[13] - https://twiki.ufba.br/twiki/pub/PPGEFHC/DissertacoesPpgefhc/LCeluque.pdf

[14] - http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm