Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Carlos Henrique da Silva Cavaca

Um Estudo sobre o Uso de Problemas do Cotidiano como Fator Motivador para o Ensino de Matemática Financeira

Juiz de Fora

2015

Carlos Henrique da Silva Cavaca

Um Estudo sobre o Uso de Problemas do Cotidiano como Fator Motivador para o Ensino de Matemática Financeira

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cavaca, Carlos Henrique da Silva.
Um Estudo sobre o Uso de Problemas do Cotidiano como Fator Motivador para o Ensino de Matemática Financeira / Carlos Henrique da Silva Cavaca. – 2015.
115 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1. Matemática Financeira. 2. Problemas do cotidiano. I. Vasconcelos, Sérgio Guilherme de Assis. II. Título.

Carlos Henrique da Silva Cavaca

Um Estudo sobre o Uso de Problemas do Cotidiano como Fator Motivador para o Ensino de Matemática Financeira

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em: 17 de dezembro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Alexandre Miranda Alves
Universidade Federal de Viçosa

AGRADECIMENTOS

A Deus, por abençoar novamente minha vida com mais uma conquista.

Aos meus pais, pessoas de quem sinto tanta saudade, pelos valores que me ensinaram ao longo da vida, entre eles, o que não há conquistas sem esforço.

À minha esposa Andréia pelo amor que alimenta minha alma ao longo de todos esses anos. Muito obrigado por continuar me mostrando como ser uma pessoa melhor.

Às minhas filhas, Ana Luiza e Mariana, razões da minha vida, pelo incentivo e sabedoria na escolha de um método tão eficiente para que eu conseguisse aprovação no exame de proficiência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, pela atenção, paciência e apoio na escrita dessa dissertação. Além de seu orientando, também fui seu aluno e nos dois momentos me senti seguro por estar ao seu lado.

Aos prezados alunos da EPCAR, que ao aceitarem o convite para participar dessa pesquisa, o fizeram com compromisso e responsabilidade.

A meu amigo "Ari", especialmente. Creio que Deus coloca pessoas em nossas vidas que fazem papel de anjo da guarda. Vejo isso em você, meu caro Amigo. Passamos bons e maus pedaços durante esse curso e lhe sou eternamente grato por toda ajuda que me prestou. Que Deus o abençoe por isso. Não teria conseguido concluir meu trabalho sem sua ajuda.

Ao Alexandre. Meu amigo, foi você quem me apresentou o Profmat e também foi você, ao lado do meu orientador, que esteve comigo na elaboração e desenvolvimento da minha pesquisa. No começo e no fim, literalmente, esteve presente, superando momentos de sua vida particular para me atender. Assim como ao Ari, sou eternamente grato a você pela ajuda que me prestou.

À minha querida amiga Marisa, pelos cadernos com anotações das aulas de todo o curso que tanto ajudaram não só a mim mas também a tanta gente que passou e passa pelo Profmat.

Aos professores e aos colegas da turma 2013 do mestrado Profmat da Universidade de Juiz de Fora, por dividirem comigo os conflitos de tanto sacrifício e tantas alegrias ao longo dessa caminhada.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

Aos colegas de viagem, Célia, Josimar, Lívia e Marisa. Minha viagem era mais curta por estar em suas companhias.

À amiga Célia, além de companheira de viagem, querida colega de turma e grande guerreira. Sua garra é um grande exemplo para mim. Dividimos choros e risos no trajeto para Juiz de Fora, e nunca desistimos. Sei que minha vitória é motivo de alegria para você, e a sua, é só uma questão de tempo. Estarei ao seu lado, conte com isso.

À Ana Maria, querida colega de trabalho, não só pela ajuda na revisão literária da minha dissertação, mas também por sua doçura, acalmando um pouco minha ansiedade.

Ao Rodrigo Geoffroy, pelo esmero no apoio com o *Abstract*.

À Prefeitura Municipal de Barbacena, por me conceder férias prêmio no período de preparação para o Exame de Qualificação e também à Professora Rejane que, como minha substituta durante esse período, realizou um trabalho que me causou muita admiração.

À Escola Preparatória de Cadetes do Ar, pelo apoio, liberação e licença para que eu pudesse realizar com êxito o curso de mestrado. Em especial, à equipe de matemática dessa Escola, de que tanto me orgulho de fazer parte. Muito obrigado a todos vocês por tudo que fizeram para que eu conseguisse concluir esse curso com sucesso.

Aos amigos que compreenderam minha ausência em razão de meus estudos e me apoiaram nas horas de desânimo. Quanta falta eu senti do convívio com vocês. Vamos ter muito que comemorar.

A todos meus familiares, queridos alunos, amigos e colegas de trabalho pelas orações e palavras de apoio.

RESUMO

Este trabalho é o relato de uma pesquisa realizada com um grupo de alunos do segundo ano do ensino médio da EPCAR (Escola Preparatória de Cadetes do Ar) sobre o ensino de Matemática Financeira com o uso de problemas do cotidiano como estratégia de estímulo para tal aprendizado. Durante oito encontros com um grupo de dez alunos, ocorreu a seguinte ordem na abordagem da Matemática Financeira: apresentação dos conceitos, resolução de problemas simples e comuns encontrados nos livros didáticos e, finalmente, resolução de problemas levados à sala de aula, tirados, dentre outras fontes, de folheto de loja, constatando os valores informados em produtos vendidos à prestação, e também analisando criticamente esses valores. São estes problemas a principal razão desta pesquisa. Consideramos que os livros didáticos não exploram de modo consistente toda riqueza e proximidade da realidade que a Matemática Financeira oferece. Entendemos que o uso de folhetos de lojas que anunciam seus produtos, análise de boletos, consulta sobre empréstimos e aplicações financeiras, análise de financiamentos, são exemplos que podem e devem ser usados no ensino da Matemática Financeira por trazerem a realidade que qualquer cidadão vai se deparar em algum momento na trajetória da sua vida. Acreditamos que ao levar para sala de aula este tipo de situação há significante estímulo para o aprendizado da Matemática Financeira. Além disso, descobrimos ao longo da pesquisa a necessidade de se estabelecer um currículo comum na abordagem deste conteúdo para alunos do ensino médio, pois observamos que não há um consenso nos livros didáticos sobre até onde deve ser levado esse assunto.

Palavras-chave: Matemática Financeira. Problemas do cotidiano.

ABSTRACT

This study is an account of a research carried out with a group of 16-year-old high school students in EPCAR (Preparatory School of Air Cadets) on Financial Mathematics teaching by means of using everyday mathematical problems as a stimulus strategy for such learning. Throughout eight meetings with a group of ten students, the following scenario took place regarding Financial Mathematics approach: presenting concepts; solving simple and common mathematical problems found in textbooks; and finally problems from other sources such as store flyers brought to classroom in which it was possible not only to notice the installment payment prices of goods as well as critically analyze them. These problems are the main reason of this research. We believe that textbooks do not approach consistently all the richness and reality Financial Mathematics is able to provide. We understand that the use of store flyers that advertise their products, the analysis of bills together with the examination of loans and investments, and the financing analysis, are examples which can and shall be used in Financial Mathematics teaching for they are capable of bringing the reality any citizen will face some time in his/ her life. We believe that by presenting the classroom this kind of activity there is a significant stimulus for learning Financial Mathematics. In addition, we have discovered during the research the need to set a common high school curriculum to focus this subject for we have observed that there is no consensus in textbooks about how far this content should be dealt with.

Key-words: Financial Mathematics. Everyday mathematical problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Séries Uniformes 24
Figura 2 – Algoritmo das setas 31
Figura 3 – Algoritmo das setas do exemplo 32
Figura 4 – Algoritmo das setas para um período 33
Figura 5 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 0 33
Figura 6 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 1 33
Figura 7 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 2 33
Figura 8 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 3 34
Figura 9 – Algoritmo das setas para n períodos 34
Figura 10 – Resolução do Exercício 1 feita pelo Aluno C 35
Figura 11 – Resolução do Exercício 2 feita pelo Aluno D 35
Figura 12 – Resolução do Exercício 3 feita pelo Aluno I 35
Figura 13 – Resolução do Exercício 3 feita pelo Aluno E 35
Figura 14 – Item a do Problema 1 37
Figura 15 – Item b do Problema 1 37
Figura 16 – Item c do Problema 1 38
Figura 17 – Algoritmo da setas proposto para o Problema 2 38
Figura 18 – Resolução do Problema 2 feita pelo Aluno G 39
Figura 19 – Resolução do Problema 2 feita pelo Aluno F 39
Figura 20 – Resolução do Problema 3 - Transporte do tempo 28 para o tempo 29 . 40
Figura 21 – Resolução do Problema 3 - Transporte do tempo 27 para o tempo 29 . 41
Figura 22 – Resolução do Problema 3 - Transporte do tempo 26 para o tempo 29 . 41
Figura 23 – Resolução do Problema 3 feita pelo Aluno I 42
Figura 24 – Resolução do Item I para o Problema 4 43
Figura 25 – Resolução do Item II para o Problema 4 44
Figura 26 – Resolução do Item a, do Exercício 4, feita pelo Aluno H 44
Figura 27 – Resolução do Item b, do Exercício 4, feita pelo Aluno H 44
Figura 28 – Resolução do Exercício 5 feita pelo Aluno C 45
Figura 29 – Resolução do Exercíco 6 feita pelo Aluno B 45
Figura 30 – Resolução do Exercício 6 feita pelo Aluno F 45
Figura 31 – Algoritmo das setas para a resolução do Problema 5 46
Figura 32 – Anúncio do i-phone da revista promocional 47
Figura 33 – Algoritmo das setas para a resolução do Problema do i-phone 47
Figura 34 – Resolução do Problema 6 feita pelo Aluno E 49
Figura 35 – Resolução do Problema 6 feita pelo Aluno G 49
Figura 36 – Resolução do Problema 6 feita pelo Aluno H 50
Figura 37 – Algoritmo das setas usado para Séries Uniformes 51
Figura 38 – Algoritmo das setas para resolução do Exemplo 6 52

Figura 39 – Anúncio da Smart TV da revista promocional 53
Figura 40 – Algoritmo das setas para resolução do Problema 7 53
Figura 41 – Resolução do Problema 7 feita pelo Aluno G 54
Figura 42 – Resolução do Problema 7 feita pelo Aluno B 54
Figura 43 – Resolução do Problema 7 feita pelo Aluno F 54
Figura 44 – Resolução do Problema 8 feita pelo Aluno A 55
Figura 45 – Resolução do Problema 8 feita pelo Aluno J 56
Figura 46 – Resolução do problema 8 feita pelo Aluno I 56
Figura 47 – Algoritmo das setas para resolução do Problema 9 57
Figura 48 – Resolução do Problema 9 feita pelo Aluno J 58
Figura 49 – Resolução do Problema 9 feita pelo Aluno C 58
Figura 50 – Resolução do Exercício 7 feita pelo Aluno D 59
Figura 51 – Resolução do Exercício 7 feita pelo Aluno I 59
Figura 52 – Resolução do Exercício 8 feita pelo Aluno G 59
Figura 53 – Resolução do Exercício 8 feita pelo Aluno C 60
Figura 54 – Algoritmo das setas usado para relação entre taxas equivalentes 60
Figura 55 – Algoritmo das setas usado para solução do Exemplo 7 61
Figura 56 – Resolução do Exercício 9 feita pelo Aluno H 62
Figura 57 – Resolução do Exercício 9 feita pelo Aluno F 62
Figura 58 – Planilha Excel no estado inicial, após a abertura 64
Figura 59 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Cabeçalho 64
Figura 60 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Formatação da células . 65
Figura 61 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Inserção de dados 65
Figura 62 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Saldo inicial, juro e saldo no 1º pagamento 66
Figura 63 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Amortização no 1º pagamento 66
Figura 64 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Valor a ser pago no 1º mês 67
Figura 65 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Saldo no final do 1º mês 67
Figura 66 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Cálculo para os meses subsequentes 68
Figura 67 – Tabela SAC elaborada em Planilha Excel 69
Figura 68 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-a 71
Figura 69 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-b 72
Figura 70 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-c 73
Figura 71 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-d 74
Figura 72 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-e 74
Figura 73 – Tabulação das respostas dos alunos no item 4 79
Figura 74 – Tabulação dos desejos dos alunos no período de até um ano 80

Figura 75 – Tabulação dos desejos dos alunos que indicam itens que necessitam de financiamento 80
Figura 76 – Tabulação das respostas dos alunos quanto ao uso e necessidade da calculadora científica para problemas de Matemática Financeira 83

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sistema PRICE no primeiro ano de financiamento 26
Tabela 2 – Sistema PRICE nos quatro anos de financiamento 26
Tabela 3 – Sistema SAC no primeiro ano de financiamento 27
Tabela 4 – Sistema SAC nos quatro anos de financiamento 27
Tabela 5 – Tabela com os valores transportados 41
Tabela 6 – Respostas dos alunos aos itens *f*, *g* e *h*, da questão 5 do questionário . 76

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IMPA	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
Profmat	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
EPCAR	Escola Preparatória de Cadetes do Ar
AFA	Academia da Força Aérea
PNLEM	Programa Nacional do Livro Didático
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
PCNEM	Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
TAD	Teoria Antropológica do Didático
EMC	Educação Matemática Crítica
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	**14**
1.1	JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA	14
1.2	OBJETIVOS DO TRABALHO	15
1.3	CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA	15
1.4	ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	16
2	**A MATEMÁTICA FINANCEIRA NO PROFMAT**	**17**
3	**TÓPICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA**	**20**
3.1	DEFINIÇÃO DE CONCEITOS BÁSICOS	20
3.2	JUROS SIMPLES	21
3.3	JUROS COMPOSTOS	22
3.4	TAXAS EQUIVALENTES	23
3.5	SÉRIES UNIFORMES	24
3.6	PLANOS EQUIVALENTES DE FINANCIAMENTO	24
3.6.1	Modelo Price	25
3.6.2	Modelo SAC	25
4	**UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA TURMAS DO ENSINO MÉDIO**	**28**
4.1	OBJETIVO	28
4.2	QUESTÕES DE PESQUISA	28
4.3	CONSTRUÇÃO DE UM MATERIAL DE APOIO	29
4.4	PLANO DE AULAS	30
4.4.1	**Primeira Aula**	30
4.4.2	**Segunda Aula**	35
4.4.3	**Terceira Aula**	40
4.4.4	**Quarta Aula**	45
4.4.5	**Quinta Aula**	50
4.4.6	**Sexta Aula**	56
4.4.7	**Sétima Aula**	60
4.4.8	**Oitava Aula**	63
4.5	APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS	69
4.6	ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO	70
5	**CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**85**

REFERÊNCIAS **90**

APÊNDICE A – Termo de Consentimento **92**

APÊNDICE B – Apostila de Matemática Financeira **94**

APÊNDICE C – Questionário **103**

ANEXO A – Primeiro Anexo **109**

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

A motivação inicial para a escolha do tema desta dissertação está ligada ao vídeo que pode ser assistido em [6], de um curso organizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Em uma das aulas desse curso, a explanação do Professor Augusto Cesar Morgado (1944-2006), reconhecido contribuidor para a melhoria do ensino da matemática no Brasil, professor de vários cursos de extensão para professores, chamou minha atenção. Para que se possa dimensionar tal importância, fizemos a transcrição livre dessa parte como segue:

> Matemática financeira é um assunto que, inexplicavelmente, não costuma ser ensinado no ensino médio. Então, a gente chega no Brasil a essa situação absurda de um aluno com onze anos de matemática, oito no fundamental e três no médio, o aluno tem onze anos de matemática e ao final do ensino médio ele entra pra universidade, e ele não é capaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista com desconto e uma compra à prazo. Ao mesmo tempo ele aprendeu a fazer contas com matrizes, aprendeu o que são números complexos e é incapaz de decidir racionalmente entre uma compra à vista com desconto e uma compra à prazo. Isso é, na minha opinião, uma maluquice total... Matemática Financeira pode e deve ser ensinada no ensino médio... e a hora adequada é, exatamente, ligado a progressões geométricas, portanto, na primeira ou na segunda série, dependendo do currículo de cada escola.

Já se vão alguns anos dessa aula, pouco mais que quinze. Mesmo assim, o que o professor Morgado disse continua atual e nos causa grande incômodo. Ao conversar com colegas professores de matemática, não há sequer um que não concorde que é de fato importante e adequado oferecer esse conteúdo ao aluno do Ensino Médio. Como pode ser observado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Matemática Financeira faz parte da grade curricular, no entanto, é comum o relato de alunos e professores de como é mal explorada.

Até o ano de 2012, não se encontram muitas publicações sobre esse tema em dissertações de mestrado ou teses de doutorado. Sentimos que são escassas as publicações que tratam da condução desse tema em sala de aula. Com o advento do Profmat, e nesse momento ousamos ressaltar a importância que esse programa representa e aproveitamos para fazer nosso sincero elogio e agradecimento a ele, dissertações surgiram abordando esse tema confirmando anseios causados por esta situação. A partir de 2013, que é o ano das primeiras publicações dos trabalhos do Profmat, começam a surgir mais abordagens sobre o assunto. Trabalhos interessantíssimos, que serão citados no Capítulo 2, mostram como ainda temos que avançar na condução da matemática financeira em sala de aula e como ainda temos o que aprender para haver uma sintonia entre oferecer o conteúdo e este ser bem aproveitado pelo cidadão.

É diante desta realidade que este trabalho pretende dar a sua contribuição. Vamos tratar de uma abordagem do conteúdo da Matemática Financeira levando para sala de aula folhetos de lojas para que o aluno consiga constatar valores que ali estão, tenha argumento para negociar descontos, saiba criticar a prática do juro embutido, conheça quais os sistemas de financiamento mais praticados no mercado, consiga resolver problemas do próprio anseio como planejamento para compra do primeiro automóvel, de um celular, de uma viagem, vídeo game e outros. Acreditamos que esta é uma forma de motivar o aluno no entendimento deste assunto e traz junto um aprendizado que vai contribuir para sua cidadania, para uma postura mais crítica diante de ofertas enganosas, uma postura racional na hora de tomar uma decisão diante de situações financeiras.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo desta pesquisa é, especificamente, reconhecer se o uso de problemas específicos que abordam a verificação de valores apresentados em folhetos de lojas, e problemas sugeridos pelos próprios alunos a partir dos anseios deles de investimentos e financiamentos, é um fator que facilita e motiva a compreensão do conteúdo de Matemática Financeira.

Assim, baseando-nos em estudos anteriores, além de contar com nossa experiência docente, pretendemos propor uma forma de abordagem da Matemática Financeira com um conjunto de aulas que fizessem menção a problemas econômicos próximos da realidade dos nossos alunos e proporcionar-lhes escolhas racionais diante de situações reais.

Procuramos, também, identificar qual o conhecimento dos alunos sobre ferramentas eletrônicas, especificamente, calculadora científica e planilhas eletrônicas, em especial, usamos em nossa dissertação a Planilha Excel, que é paga. Há planilhas livres disponíveis que executam as mesmas funções e uma bem popular é a BrOffice-Calc. Para o professor que tiver dúvida no uso da planilha Excel vai encontrar em [23] um tutorial para seu auxílio; caso tenha dúvida no uso da planilha BrOffice-Calc, encontrará auxílio em [8].

1.3 CONTEXTO E PARTICIPANTES DA PESQUISA

Esta pesquisa foi realizada na Escola Preparatória de Cadetes do Ar – EPCAR, em Barbacena/MG. Trata-se de uma Escola Militar onde o aluno cursa o Ensino Médio e, simultaneamente, recebe também Instrução Militar. O ingresso dos alunos na EPCAR é feito através de concurso público de abrangência nacional, no qual, atualmente, podem ser candidatos aqueles que já concluíram o 9º ano do Ensino Fundamental e idade igual ou superior a 14 anos e menor que 18. A finalidade da EPCAR é preparar o aluno para ingressar na Academia da Força Aérea - AFA, em Pirassununga/SP, para seguir a carreira de piloto da Força Aérea. A EPCAR funciona em regime de internato, no qual os alunos têm liberação para ir para casa apenas aos finais de semana. No caso deste trabalho, houve uma facilitação da marcação dos encontros com os alunos pela disponibilidade deles propiciada pelo regime de internato na EPCAR.

Entendemos que a realidade do aluno da EPCAR proporciona campo fértil para pesquisas assim como já constataram Rodrigues (2010) [15], Cantaruti (2012) [4] e Simão (2014) [18].

Para a pesquisa, foram convidados dez alunos do 2º ano uma vez que era pré-requisito saber o conteúdo de progressões geométricas. Entendemos que o melhor momento para se trabalhar este conteúdo é no 2º ano do Ensino Médio, logo depois do ensino de progressões geométricas. Acreditamos que assim o estudo de progressões geométricas passa a ter mais significado, fica mais consistente e por consequência se torna muito mais interessante para o aluno. A escolha dos alunos foi feita de modo aleatório sem nada especial, bastava aceitar o convite. Nesse momento surgiu uma curiosidade: ao contrário do que normalmente se espera de um adolescente que tem muitas desculpas para escapar de uma aula extra, ficaram entusiasmados com o convite, confirmando como o conteúdo por si só desperta grande interesse. Soubemos que outros colegas gostariam de ter participado.

1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira: neste Capítulo Um, está justificada a relevância da investigação que propusemos e estão explicitados nossos objetivos e nossas questões de pesquisa. Fazemos um recorte do nosso contexto de pesquisa e dos participantes escolhidos para o acompanhamento das aulas que propusemos. O Capítulo Dois apresenta um apanhado dos trabalhos do Profmat a respeito do tema Matemática Financeira. O Capítulo Três traz um excerto da Matemática Financeira com os principais tópicos que entendemos que devem ser abordados em sala para alcançar nosso objetivo. O Capítulo Quatro traz a construção do nosso material e seu uso em oito aulas. O Capítulo Cinco aborda um questionário que elaboramos e aplicamos para os alunos. Finalmente, o Capítulo Seis descreve as conclusões e considerações finais sobre nossa pesquisa.

2 A MATEMÁTICA FINANCEIRA NO PROFMAT

Das Orientações Curriculares para o Ensino Médio [3], ao tratar das questões do conteúdo matemático, podemos destacar a seguinte indicação da importância do conteúdo de Matemática Financeira:

> "Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc." (p. 75).

Com a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais [2], o conteúdo de Matemática Financeira passa a fazer parte do currículo do Ensino Médio. Entretanto, mesmo com isso, acreditamos que a prática desse ensino está bem distante do ideal.

Pesquisando a literatura quanto a publicações de teses ou dissertações que tratassem do tema ensino e aprendizagem de matemática financeira, encontramos a dissertação de Rosa Novellino de Novaes [10]. Essa dissertação muito nos inspirou para abordar o conteúdo de Matemática Financeira em nossas aulas até que alcançássemos o momento de trabalhar os problemas que são a razão da nossa dissertação.

Novaes (2009) faz uma revisão da literatura até aquele momento. Ela constatou que havia poucos trabalhos tratando de estratégias didáticas para o ensino e para a aprendizagem de matemática financeira. Embora tenha encontrado algumas dissertações e teses que tratassem do assunto, elas não apresentavam um modo didático de abordá-lo em sala de aula. Observamos que alguns artigos que são citados na dissertação daquela pesquisadora são mais úteis para que o professor leve para sala de aula como forma de praticar o ensino do que as teses e dissertações que encontrou até aquele momento.

De 2009 até 2012, não encontramos, em nossa pesquisa bibliográfica, outro trabalho que apresentasse proposta para professores abordarem a Matemática Financeira de modo prático e direcionado à sala de aula. É a partir de 2013 que surgem dissertações abordando o tema e mostrando estratégias para seu ensino e aprendizagem, principalmente com o advento dos mestrados profissionais.

Como a Matemática Financeira é inegavelmente instigante e relativamente nova no currículo do Ensino Médio, e como também ainda há discrepâncias na forma que é trabalhada e na abordagem dada pelos diferentes livros didáticos, em especial, do PNLEM (Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio), é eminente o surgimento de trabalhos que a abordem nos TCC's do Profmat. Logo nos primeiros trabalhos, que são apresentados em 2013 (turma que ingressou em 2011), são muitas abordagens sobre a Matemática Financeira em diversas regiões, mostrando a preocupação com o rumo de sua prática de ensino.

Pensamos que o surgimento desses trabalhos está em consonância com o Artigo 25 do Regimento do Profmat [17] que deixa claro que "O Trabalho de Conclusão de Curso versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula".

Entre essas dissertações, está a de Leônidas Carneiro da Ponte (2013) [12] que analisa dois livros didáticos utilizados em escolas públicas de Santarém (PA) sob a ótica da TAD (Teoria Antropológica do Didático). Essa teoria, desenvolvida por Yves Chevallard, propõe aulas para melhorar limitações encontradas nesses livros, além de utilizar recursos como calculadora científica, planilha eletrônica, software de construção gráfica e o próprio livro didático.

Segundo Rafael Guilherme Gallas (2013) [5], a partir do que orientam o PCN, PCNEM e as Diretrizes Curriculares Estaduais, temos a análise de alguns livros didáticos usados no estado do Paraná para verificar se estão de acordo com o que os documentos preveem. Esse pesquisador propõe uma abordagem da matemática financeira mais simplificada, fundamentada em materiais que chegam até o aluno como panfletos de supermercados, como forma de incentivar seu estudo e reduzir o desinteresse das aulas.

Em sua dissertação, Fabiano Macêdo de Oliveira (2013) [11] elabora sugestões para professores trabalharem alguns tópicos de matemática financeira com alunos do Ensino Médio. Mais especificamente, a proposta é aplicar funções afim e exponencial, bem como suas caracterizações, passando por progressões aritméticas e geométricas para trabalhar a matemática financeira.

Henrique Matsumoto Toraete (2013) [21], motivado pelo que leva tantas pessoas ao endividamento, apresenta uma proposta didática para melhorar o ensino e a aprendizagem de matemática financeira no Ensino Médio.

Renato Afonso Rezende (2013) [14] fez um trabalho direcionado a professores de matemática da educação básica no qual propõe o ensino de matemática financeira através dos estudos de funções e das progressões aritmética e geométrica.

A pesquisa de Simone Regina dos Reis (2013) [13] apresenta sugestões para o ensino da matemática financeira baseadas na educação matemática crítica (EMC), que significa explorar e desenvolver competências que tornem os estudantes participativos e críticos quanto ao modo que a matemática financeira formata suas vidas.

Outro pesquisador, Herbert José Cavalcanti de Souza (2013) [20], aborda em seu trabalho os principais tópicos da matemática financeira associando a eventos de nossa realidade. Ele estuda também o uso de uma ferramenta eletrônica para resolução de problemas de cálculos extensos.

Alessandro da Silva Saadi (2013) [16] propõe atividade educacional para professores envolvendo situações-problema no ensino de matemática financeira para alunos do Ensino Médio, e também estudo de conteúdos matemáticos articulando os conteúdos de porcentagem com funções lineares, juros simples com funções afim e progressão aritmética.

Altamiro Batista da Rocha Júnior (2013) [7] traz uma proposta chamada de abordagem cronológica, que valoriza o correr natural do tempo, no qual o pesquisador analisa etapa por etapa a evolução de uma dívida ou investimento.

José Mateus Queiroz Sousa (2013) [19] propõe uma análise do ensino da matemática financeira no Ensino Médio, pois não acha que o conteúdo seja trabalhado com a profundidade e contextualização necessária. Ele discute uma nova abordagem desse conteúdo, dando subsídio ao professor para que construa uma visão crítica e explore com mais propriedade a matemática financeira.

Cristiano Marcell Isquierdo de Amorim (2014) [1] propõe avaliar os conteúdos de matemática financeira que são trabalhados nos Ensinos Fundamental e Médio e discutir se os alunos têm o entendimento necessário para tomada de decisões diante da facilidade de crédito oferecidas por instituições financeiras, ou para organizar suas contas.

Ainda que sejam poucas dissertações que citamos, mas que valorizam tanto a Matemática Financeira quanto a finalidade do Profmat, entendemos que há uma variedade de abordagens do assunto. Em nossa revisão de literatura, não encontramos abordagem igual ao nosso mote inicial.

Não pretendemos, de forma alguma, esgotar esse tema profícuo em nosso trabalho. Sempre haverá ideias complementares, no entanto, umas não excluem as outras. Dessa forma, nossa proposta é mais uma contribuição para esse campo temático, com a intenção de enriquecer as técnicas de sala de aula no ensino de Matemática Financeira para o Ensino Médio.

3 TÓPICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Nesta seção apresentaremos alguns conceito matemáticos importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Gostaríamos de ressaltar que a abordagem apresentada aqui se limita a um recorte da teoria apresentada pelos autores utilizados como referência. Caso o leitor julgue insuficiente a teoria apresentada aqui, sugerimos que busquem mais detalhes nas obras originais utilizadas para elaborar a mesma, que pode ser observada na bibliografia.

A Matemática Financeira estuda o comportamento do valor do dinheiro no decorrer do tempo a partir de modelos que permitem avaliar e comparar o valor do dinheiro em diversos instantes de tempo. Para uma melhor compreensão desta abordagem sobre matemática financeira, estabeleceremos uma linguagem própria para designar os diversos elementos, objetos de estudo neste trabalho.

3.1 DEFINIÇÃO DE CONCEITOS BÁSICOS

Os elementos básicos do estudo da matemática financeiras serão inicialmente apresentados por definições e a partir destas introduziremos os demais conceitos. Em alguns momentos estes serão vistos também, através de situações práticas.

Para o estudo da matemática financeira devemos ter alguns conceitos bem definidos, que são os elementos: **capital**, **taxa unitária de juros**, **Juros** e **Montante**. Seguiremos então com estas definições.

Definição 1 (Capital C)**.** *O Capital é o valor aplicado através de alguma operação financeira. Existem outras nomenclaturas também bastante utilizadas, como: Principal, Valor Atual, Valor Presente ou Valor Aplicado. Em língua inglesa, usa-se Present Value, de onde segue a notação PV que pode ser observada nas calculadoras financeiras.*

Definição 2 (Taxa unitária de juros i)**.** *A taxa unitária de juros, indicadas por i (do inglês interest, que significa juros), é expressa como porcentagem do capital. Ela representa os juros numa certa unidade de tempo, normalmente indicada da seguinte forma: ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a), etc.*

Definição 3 (Juros J)**.** *Os Juros representam a remuneração recebida por se empregar o Capital em alguma atividade produtiva por um certo período de tempo. Os juros podem ser capitalizados segundo os regimes: simples ou compostos, ou até mesmo, com algumas condições mistas. Desta forma, o juro no período é dado pela fórmula:*

$$J = C \cdot i$$

Exemplo 1. *Se o capital emprestado for R$ 8000,00 e a taxa, 1,5% ao mês, Qual será o juro pago no mês?*

Este problema é resolvido facilmente apenas aplicando diretamente a fórmula de juros que relacionam o capital inicial R$ 8.000,00 e a taxa de juros $1,5\% = 0,015$ ao mês.

$$J = C \cdot i = 8000,00 \cdot 0,015 = 120,00$$

Portando o investidor receberá R$ 120,00 de juros pelo capital emprestado.

Definição 4 (Montante)**.** *Montante é a soma do Capital com os juros. O montante também é conhecido como Valor Futuro. Em língua inglesa, usa-se Future Value, indicado nas calculadoras financeiras pela tecla FV. O montante é dado pela fórmula:*

$$M = C + J$$

Voltando ao exemplo 1, então, tem-se

$$M = C + J = 8.000,00 + 120,00 = 8.120,00$$

3.2 JUROS SIMPLES

Como o capital pode ser investido por um tempo superior à uma unidade de período, a fórmula para se obter a remuneração devida a este investimento pode ser obtida somando-se os juros obtidos em cada período investido, ou seja

$$J = C \cdot i \cdot n \tag{3.1}$$

onde n é o número de períodos contidos no tempo de investimento do capital. Esta forma de se calcular os juros é denominada **regime de juros simples**.

Se a taxa de juros for diária, mensal, trimestral ou anual, os períodos deverão estar respectivamente nas mesmas unidades, de modo que os conceitos de taxas de juros e períodos sejam compatíveis. Para os problemas em que o período e a taxa de juros forem fornecidas em unidades diferentes deverão ser feitas as devidas conversões de unidades.

Exemplo 2. *Determine os juros simples obtidos por um capital* $C = 1.300,00$ *durante 3 anos a taxa de 13% ao ano. São dados por:*

$$J = C \cdot i \cdot n = 1.300,00 \cdot 0,13 \cdot 3 = 507,00$$

Logo, os juros obtidos são de R$507,00.

Agora, da definição de montante podemos estabelecer uma fórmula para o regime de capitalização simples, que relacionam o capital inicial, a taxa de juros e o número de períodos que o capital foi investido.

$$M = C + J = C + C \cdot i \cdot n$$

Portanto,

$$M = C(1 + in). \tag{3.2}$$

Exemplo 3. *Quanto receberá um aplicador após ter investido R$ 28.000,00 por 15 meses à uma taxa de 3% ao mês, no regime de juros simples?*

Da equação 3.2, temos:

$$M = C(1 + in) = 28.000,00(1 + 0,03 \cdot 15) = 40.600,00$$

Portanto, o investidor regatará o montante de R$ 40.600,00.

3.3 JUROS COMPOSTOS

A outra forma de se calcular juros considera o caso em que o capital é investido por um tempo superior à uma unidade de período, e os juros são calculados sobre o investimento do início de cada período. Essa forma é denominada **regime de juros compostos**.

O regime de juros compostos possui grande importância em matemática financeira por ser realmente praticado no comércio. Neste, o juro gerado na aplicação é incorporado a mesma no final de cada período, gerando juros no período seguinte. Assim, os juros do 2º período são calculados sobre o montante do 1º, e não sobre o capital investido inicialmente; os juros do 3º período são calculados sobre o montante do 2º, e assim sucessivamente.

Dessa forma, considerando um capital C aplicado a juros compostos, a uma taxa i por período e durante n períodos de tempo, teremos o seguinte cálculo do montante dessa aplicação:

- Juros do 1º período e o montante após 1 período:

$$J_1 = C \cdot i$$

$$M_1 = C + J_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i)$$

- Juros do 2º período e o montante após 2 períodos:

$$J_2 = M_1 \cdot i$$

$$M_2 = M_1 + J_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2$$

- Juros do 3º período e o montante após 3 períodos:

$$J_3 = M_2 \cdot i$$

$$M_3 = M_2 + J_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1+i) = C \cdot (1+i)^2 \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^3$$

continuando dessa forma, tem-se

- Juros do n-ésimo período e o montante após n períodos:

$$J_n = M_{n-1} \cdot i$$

$$M_n = M_{n-1} + J_n = M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1}(1+i) = C \cdot (1+i)^{n-1} \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^n$$

Assim, para se calcular o montante aplicado sobre o regime de juro composto por n períodos, aplica-se a seguinte fórmula:

$$M = C \cdot (1+i)^n \tag{3.3}$$

Exemplo 4. *Determine o montante produzido por R\$ 4.000,00 aplicados em regime de juros compostos a 5% ao mês, durante 3 meses.*

Da equação 3.2, temos:

$$M = C \cdot (1+i)^n = 4.000,00(1+0,05)^3 = 4.630,50$$

Portanto, o montante produzido com este investimento será de R$ 4.630,50.

3.4 TAXAS EQUIVALENTES

Taxas equivalentes são taxas de juros com unidades de tempo diferentes que, aplicadas ao mesmo principal durante o mesmo prazo, produzem o mesmo montante, no regime de juros compostos.

Se a taxa de juros relativamente a determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que

$$1 + I = (1+i)^n.$$

Exemplo 5. *Qual a taxa anual de juros equivalente a* $12\% a.m.$*?*

Pela aplicação direta da fórmula, temos:

$$(1+I) = (1+0,12)^{12}$$

Daí segue que $I = 2,9 = 290\%$.

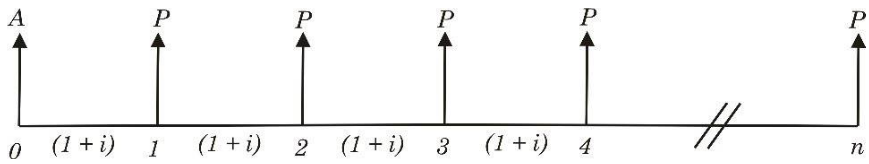
3.5 SÉRIES UNIFORMES

Um conjunto de quantias chamadas de pagamentos ou termos, referidas a épocas diversas, é chamada de Série. Se esses termos forem igualmente espaçados no tempo e iguais, a Série diz-se Uniforme.

O valor de uma Série Uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, a uma taxa de juros i, é igual a

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Figura 1 – Séries Uniformes



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O valor de A é dado pela seguinte soma

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$A = P \cdot [\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}]$$

que trata do produto de P pela soma dos termos de um progressão geométrica de razão $q = \dfrac{1}{(1+i)}$.

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+i} \cdot [(\frac{1}{1+i})^n - 1]}{(\frac{1}{1+i} - 1)} =$$

$$= \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Logo, temos

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

3.6 PLANOS EQUIVALENTES DE FINANCIAMENTO

Dois ou mais fluxos de caixa são equivalentes, a uma determinada taxa de juros, se seus valores presentes, calculados com essa mesma taxa, forem iguais.

Dizemos que dois ou mais planos de financiamento são equivalentes quando seus fluxos de caixa forem equivalentes.

Apresentaremos dois planos equivalentes de financiamento: o modelo PRICE e o Sistema de Amortização Constante (SAC).

Para abordar cada um deles, vamos adotar a seguinte simbologia: A_k, J_k e D_k, que representam a parcela de amortização, a parcela de juros e a prestação e o estado da dívida (valor da dívida após o pagamento da prestação) na época k.

3.6.1 Modelo Price

No sistema Price de amortização, também conhecido como Sistema Francês, sendo i a taxa de juros e n o número de pagamentos, temos:

$$P_k = D_0 \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$D_k = D_0 \cdot \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$J_k = i \cdot D_{k-1}, \quad A_k = P_k - J_k$$

Esse sistema se caracteriza por apresentar prestações iguais. Nele o financiamento é liquidado pelo pagamento de n prestações P_k.

São exemplos do uso deste sistema o financiamento imobiliário e de crédito direto ao consumidor.

3.6.2 Modelo SAC

Neste sistema de amortização, sendo i a taxa de juros e n o número de pagamentos, temos:

$$A_k = \frac{D_0}{n}$$

$$D_k = \frac{n-k}{n} \cdot D_0$$

$$J_k = i \cdot D_{k-1}$$

$$P_k = A_k + J_k$$

Aqui, ao contrário do sistema Price, as amortizações são constantes fazendo com que as prestações P_k decresçam com o passar do tempo.

São exemplos do uso deste sistema o financiamento imobiliário e o financiamento de longo prazo.

Exemplo 6. *Para entender melhor o conceito, vamos simular um financiamento nos dois sistemas considerando um principal* $P = 1.000,00$*, uma taxa* $i = 8\% a.a.$ *e* $n = 4 anos$*.*

- Plano PRICE - prestações iguais

Nesse plano, o financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações anuais calculadas da maneira que aprendemos nas séries uniformes; além disso, as prestações de cada ano são subdivididas em duas parcelas: juro do ano + amortização do principal, que se dá pela diferença entre o valor da prestação e os juros.

A Tabela 1 vai ajudar no entendimento do cálculo do financiamento.

Escrito o valor financiado, que no caso é de $R\$1.000,00$, na primeira linha do campo "saldo no início do ano", calculamos os juros multiplicando-se o "saldo no fim do ano antes do pagamento" por $0,08$. O "saldo antes do primeiro pagamento" é a soma das duas colunas anteriores.

Em seguida, fazemos o cálculo do valor das prestações (total dos pagamentos), que são fixas e que aprendemos a calcular em séries uniformes:

$$1.000,00 = P \cdot \frac{1-1,08^{-4}}{0,08}$$

$$P = 1000 \cdot \frac{0,08}{1-1,08^{-4}}$$

$$P = 301,92$$

Calculamos a amortização, que é a diferença entre o valor da prestação e o juro.

Finalmente, o "saldo no fim do ano após o pagamento" é a diferença entre "saldo no fim do ano antes do pagamento" e "pagamentos totais".

Tabela 1 – Sistema PRICE no primeiro ano de financiamento

Ano	**Saldo no início do ano**	**Juros**	**Saldo no fim do ano antes do pagamento**	**Pagamentos**			**Saldo no fim do ano após o pagamento**
				Juros	**Amortizações**	**Totais**	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	221,92	301,92	778,08
2							
3							
4							

A partir da primeira linha, preenchemos todas as outras de modo análogo como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 – Sistema PRICE nos quatro anos de financiamento

Ano	**Saldo no início do ano**	**Juros**	**Saldo no fim do ano antes do pagamento**	**Pagamentos**			**Saldo no fim do ano após o pagamento**
				Juros	**Amortizações**	**Totais**	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	221,92	301,92	778,08
2	778,08	62,25	840,33	62,25	239,67	301,92	538,40
3	538,40	43,07	581,48	43,07	258,85	301,92	279,56
4	279,56	22,36	301,92	22,36	279,56	301,92	0,00

- <u>Plano SAC - prestações decrescentes</u>

Nesse plano o financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações subdivididas em 2 parcelas: amortização do principal calculada pela razão entre o principal e o prazo da operação + juros do ano.

O cálculo nesse sistema segue os mesmos passos do sistema PRICE. A diferença aqui é que em vez de calcularmos o valor das prestações, que são fixas, calculamos o valor da amortização. No sistema SAC, esse valor é fixo.

Cálculo do valor da amortização:

$$\frac{1.000,00}{4} = 250,00$$

Assim, a coluna "totais" será calculada pela soma entre "juros" e "amortizações".

O uso da Tabela 3 vai auxiliar no entendimento do cálculo do financiamento.

Tabela 3 – Sistema SAC no primeiro ano de financiamento

Ano	**Saldo no início do ano**	**Juros**	**Saldo no fim do ano antes do pagamento**	**Pagamentos**			**Saldo no fim do ano após o pagamento**
				Juros	**Amortizações**	**Totais**	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	250,00	330,00	750,00
2							
3							
4							

A partir da primeira linha, preenchemos todas as outras de modo análogo como mostra a Tabela 4.

Tabela 4 – Sistema SAC nos quatro anos de financiamento

Ano	**Saldo no início do ano**	**Juros**	**Saldo no fim do ano antes do pagamento**	**Pagamentos**			**Saldo no fim do ano após o pagamento**
				Juros	**Amortizações**	**Totais**	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	250,00	330,00	750,00
2	750,00	60,00	810,00	60,00	250,00	310,00	500,00
3	500,00	40,00	540,00	40,00	250,00	290,00	250,00
4	250,00	20,00	270,00	20,00	250,00	270,00	0,00

4 UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA TURMAS DO ENSINO MÉDIO

Nessa seção, descrevemos uma proposta para o andamento de cada aula no ensino de Matemática Financeira, o objetivo de cada uma, as explicações e a análise do seu aproveitamento observando de modo especial qual o efeito motivador e de aprendizado traz a resolução de problemas específicos escolhidos do dia a dia ou propostos pelos próprios alunos, que são a razão desta dissertação. Nós tomamos a liberdade também de propor um currículo a ser oferecido para essa etapa escolar.

Além disso, relatamos as indagações dos alunos e mostramos resoluções por eles efetuadas. Tentamos mostrar também momentos inesperados e curiosos com intervenções dos alunos que enriqueceram as aulas e apontaram caminhos fora do que planejamos.

4.1 OBJETIVO

Como mencionado anteriormente, na Introdução deste relato, o objetivo desta pesquisa é reconhecer se o uso de problemas específicos que abordam a verificação de valores apresentados em folhetos de lojas e problemas sugeridos pelos próprios alunos a partir de seus anseios de investimentos e financiamentos é um fator que facilita e motiva a compreensão do conteúdo de Matemática Financeira.

Acreditamos que ao tratar de situações bem próximas da realidade do aluno, a compreensão dos conceitos e fórmulas que fazem parte desta matéria farão mais sentido no contexto de sala de aula. Cremos, também, que ao planejar o estudo da Matemática Financeira desta forma estaremos proporcionando situações semelhantes às que vão aparecer ao longo de toda sua vida.

4.2 QUESTÕES DE PESQUISA

Para lograr êxito nesses objetivos, pretendemos dar resposta a duas questões de pesquisa:

1) O uso de problemas específicos que abordam a verificação de valores apresentados em folhetos de lojas e problemas apresentados pelos próprios alunos a partir de seus anseios de investimentos e financiamentos é um fator que facilita e motiva a compreensão do conteúdo de Matemática Financeira?

2) Qual o conhecimento dos alunos sobre ferramentas eletrônicas, especificamente, calculadora científica e planilhas eletrônicas, anterior às aulas? E posteriormente? E fazer o uso destes instrumentos ajuda a compreender o conteúdo de Matemática Financeira?

É objetivo desta pesquisa também verificar se o uso da calculadora científica e de uma planilha eletrônica também pode motivar o aprendizado da Matemática Financeira.

4.3 CONSTRUÇÃO DE UM MATERIAL DE APOIO

Nesta seção, trazemos uma breve orientação de como pensamos o material de apoio que usamos em sala para condução das aulas, que ousamos chamá-lo de apostila. Os interessados nesse material, podem consultá-lo no Apêndice B em sua íntegra.

Antes de mais nada, desejamos esclarecer dois pontos acerca dessa apostila. O primeiro, é que poderíamos ter utilizado algum livro texto, adotado comumente em escolas, mas não o fizemos por vários motivos, dentre eles a duração do curso que queríamos propor que de certa forma é reduzido, com apenas oito aulas e, também, pela abrangência e maleabilidade que desejávamos alcançar. Assim, um material preparado e pensado para nosso aluno poderia ser mais interessante para eles próprios e com estreita relação a problemas ligados a suas próprias realidades. Um segundo ponto, trata da extensão e inesgotabilidade do material. Não pretendíamos esgotar todo o assunto de Matemática Financeira e nem seria possível com o número de aulas propostas e o nível de ensino. Além disso, o material estende-se ao objetivo traçado, permitindo adaptações constantes com o objetivo de cada usuário.

Assim, nossa apostila baseou-se inicialmente em nosso desejo de resolver problemas que se aproximassem da realidade de alunos do Ensino Médio e que isso despertasse neles uma consciência crítica para tomar decisões racionais e não emocionais diante de situações reais de financiamento e empréstimo. Entretanto, essa montagem não partiu do zero. Sob orientação do Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, consultamos o site [22] e observamos o material elaborado pelo Prof. Dr. Wilhelm Passarella Freire (Colaboração: Prof. Dr. André Arbex Hallack). A partir daí, com nossa experiência docente e o objetivo delineado, construímos o material que utilizamos e deixamos para que seja replicado e aperfeiçoado.

Antes, porém, de usarmos o material, devemos levar em conta as seguintes considerações:

- fizemos o uso de uma apostila onde procuramos oferecer o mínimo necessário para o desenvolvimento da matéria, dando mais importância para a resolução de problemas;
- a apostila apresenta espaços em branco para serem preenchidos pelos alunos no transcorrer das explicações;
- os problemas tratam de juros compostos, por isso, não houve a preocupação de abordar na apostila o conteúdo de juros simples, embora tenha sido falado em sala de aula;

- para abordar o conteúdo de Matemática Financeira, além de explicar os conceitos básicos necessários para o seu desenvolvimento, escolhemos uma estratégia que acreditamos ter um ótimo resultado. Ela consiste no uso de um desenho que vamos chamar de algoritmo das setas. Esse algoritmo foi apresentado pelo professor Morgado (sd) [6] numa aula de aperfeiçoamento para professores de matemática, e também foi tema da dissertação de Novaes (2009) [10];
- o aluno considerado para essa pesquisa deve ter o conhecimento de progressões geométricas.

No final deste texto, encontra-se um exemplar da apostila utilizada pelo aluno F.

Deve-se observar que alguns problemas estão em branco. Isto porque o aluno faltou ou não houve tempo para resolução em sala de aula. Nosso trabalho foi feito absolutamente todo durante os encontros em sala de aula, não havendo atividades para serem feitas extraclasse. Ao longo da próxima seção, descrevemos como utilizamos o material. Enriquecemos com resoluções que sugerimos e com resoluções dos próprios alunos, indicando o que apresentaram no entendimento dos exercícios/problemas da apostila.

As aulas seguiram a seguinte sequência: explicação do conteúdo, resolução de problemas simples e comuns nos livros didáticos de modo a assimilar as explicações até chegar em problemas que são razão deste trabalho: cálculos de prestações apresentadas em folhetos promocionais, observações sobre juros embutidos, resolução de problemas elaborados pelos próprios alunos diante de suas expectativas, cálculo de financiamentos.

4.4 PLANO DE AULAS

Nesta parte do texto, trazemos tanto para aquele que futuramente vai ler esta pesquisa quanto para nós mesmos, a sequência que planejamos as aulas para serem trabalhadas com os alunos selecionados nesta pesquisa. É nosso intuito fornecer ferramentas para uma possível aplicação desta pesquisa em salas de aula. Pensamos que isso pode ser um bom auxílio para professores que vão trabalhar o conteúdo de Matemática Financeira para turmas do Ensino Médio.

4.4.1 **Primeira Aula**

Os principais objetivos dessa aula são: apresentar um esquema que vamos chamar de **algoritmo das setas** e sua aplicação na movimentação do dinheiro no tempo, definir juro composto, associando sua fórmula ao algoritmo das setas, além, claro, de explicar o conteúdo básico inerente ao seu bom entendimento.

Para alcançarmos esses objetivos, primeiramente, definimos com bastante ênfase que Matemática Financeira é o **ramo da matemática que estuda o comportamento do dinheiro no tempo** (p. ex.: PONTE, 2013, p. 10; GALLAS, 2013, p. 14;). Embora seja simples assim, o aluno não pode achar que vai aprender, por exemplo, a fazer aplicações na bolsa de valores.

Em seguida, com o desenho da Figura 2, que está disponível dessa mesma forma na apostila, apresentamos a simbologia que será usada ao longo de toda matéria. O aluno foi orientado a preencher os espaços vazios, buscando sua interação na aula. Usamos valores aleatórios associados aos símbolos para exemplificar seu uso. Fizemos isso explicando que a operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo.

Figura 2 – Algoritmo das setas

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Preenchemos este algoritmo cumprindo as seguintes etapas:

i) escrevemos R$100,00 na seta do lado esquerdo explicando que é o valor a ser emprestado e será chamado de *principal* ou *capital inicial*;

ii) escrevemos, entre as duas setas, o período que esse valor será emprestado, que no nosso exemplo é de 2 meses e, logo abaixo de cada seta, 0 e 1 indicando a enumeração dos tempos;

iii) escrevemos R$130,00 na seta do lado esquerdo explicando que é o valor a ser pago e será chamado de *montante* ou *capital final*;

iv) no espaço abaixo do desenho, escrevemos que a subtração entre o montante e o principal é denominado juro, representado por J. Neste momento, ressaltamos na explicação que o juro é o preço que se cobra pelo "aluguel" do dinheiro e no exemplo será de

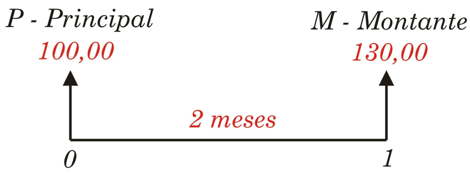
$$J = M - P = 130,00 - 100,00 = 30,00$$

v) e, finalmente, também no espaço abaixo do desenho, escrevemos que a razão entre o juro e o principal é denominada *taxa* e é representada por *i*. No exemplo, será de

$$i = \frac{J}{P} = \frac{30,00}{100,00} = 30\% = 0,3$$

Ao final, o desenho apresentou a seguinte formatação:

Figura 3 – Algoritmo das setas do exemplo



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Deve ser observado que esse desenho nos remete ao algoritmo das setas, dito anteriormente.

É importante recorrer a apostila e listar alguns erros comuns em raciocínios financeiros que enriquecem o bom entendimento da definição de matemática financeira vista anteriormente. Em nosso caso, a análise desses erros foi explorada dessa forma, ou seja, chamando a atenção para que o valor de uma quantia depende da época à qual ele se refere.

Alguns desses erros são:

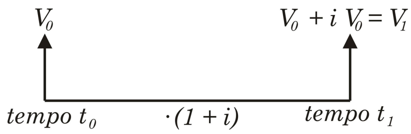
- achar que cem reais valem os mesmos cem reais daqui a alguns meses;
- somar quantias referidas a épocas diferentes;
- achar que 1% ao mês produzem sempre 12% ao ano, pois considerando o regime de juro composto, que, em geral, é o praticado no mercado, claro, está errado.

Continuando a apresentação dos conceitos básicos, definimos que capitalização é o processo que calcula o valor futuro a partir do valor presente aplicando-se a este os juros, que podem ser de dois tipos: simples ou compostos.

Fizemos a definição de cada um dos tipos de juros da mesma forma como apresentado no Capítulo Três desta dissertação. Ressaltamos que nossa pesquisa não abordou problemas de juros simples, apenas de juros compostos. Isso foi proposital, uma vez que esse é o tipo de juro mais comum no sistema financeiro e foi de problemas reais que tratamos nossa dissertação. Não queremos com isto tirar a importância de se saber resolver problemas com juro simples. Foi uma questão de escolha. Sugerimos aqui a dissertação de Alessandro Saadi [16], que trata de juro simples e apresenta problemas com enfoques semelhantes aos que são tema desta pesquisa.

Nesse momento, apresentamos o algoritmo das setas para um período. A Figura 4 mostra como é feito o uso desse algoritmo para um período. Nela, V_0 é o *valor inicial* ou *principal*, i é a taxa, t_0 e t_1 indicam os tempos 0 e 1, respectivamente, e V_1 o valor final após um período.

Figura 4 – Algoritmo das setas para um período



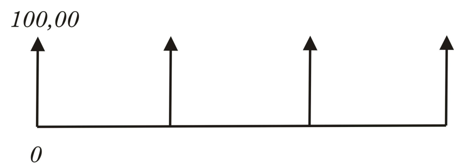
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Em nosso caso, exemplificamos o uso desse algoritmo para mais de um período associado ao conceito de juro composto com o seguinte problema:

Exemplo 7. *Qual a evolução de R$100,00 a juros compostos de 10% ao ano, durante 3 anos?*

Deixamos uma figura na apostila, tal como a Figura 5, de modo que auxiliasse o aluno na resolução do problema.

Figura 5 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 0

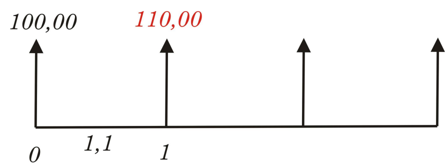


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir do desenho acima, resolvemos esse problema seguindo os seguintes passos:

- ao movimentar R$100,00 um período para o futuro, multiplicamos por $(1 + 10\%) = (1 + 0,10) = (1,1)$;

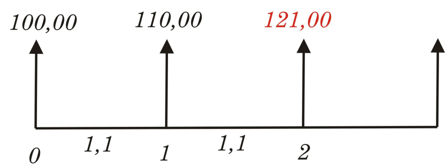
Figura 6 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- ao movimentar mais um período, multiplicamos novamente por $(1 + 10\%) = 1,1$, entretanto, dessa vez R$110,00, levando-se em conta que o sistema de juro é composto;

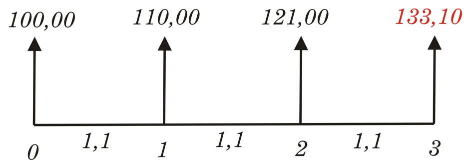
Figura 7 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 2



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- da mesma forma do período 2 para o 3.

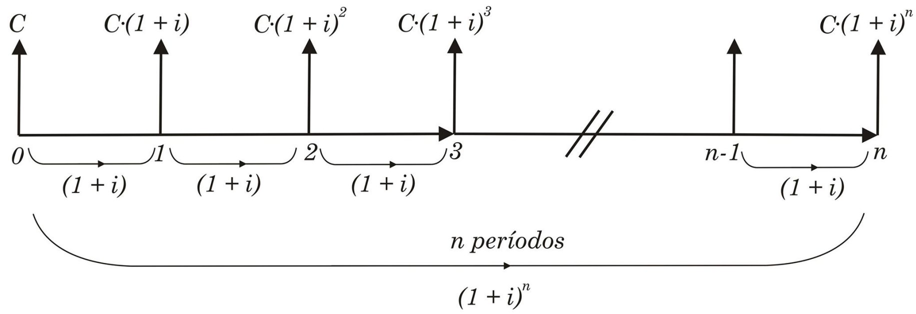
Figura 8 – Resolução do Exemplo 5 no tempo 3



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A partir desse exemplo, chegamos a fórmula dos juros compostos usando o mesmo algoritmo, considerando n períodos como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Algoritmo das setas para n períodos



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Esse desenvolvimento foi feito no quadro com auxílio de recurso multimídia, *data show*, e o acompanhamento dos alunos. Na apostila, há espaço para que os alunos fizessem esse esquema.

Através dessa dinâmica, esperamos que o aluno perceba que para levar um valor n períodos para o futuro, multiplica-se por $(1+i)^n$ e, para voltar um valor do futuro n períodos, divide-se por $(1+i)^n$.

Assim, o montante M de um capital C, aplicado a uma taxa i por n períodos, pode ser calculado aplicando a fórmula

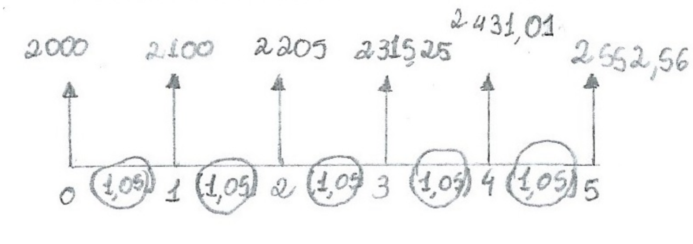
$$M = C \cdot (1+i)^n$$

Terminamos essa aula deixando os alunos tentarem resolver os três problemas propostos na apostila como exercício, para que treinassem o uso do algoritmo das setas no regime de juro composto. Orientamos que os problemas não fossem resolvidos usando-se diretamente a fórmula. Deveriam usá-la apenas para conferir o resultado.

Optamos por apresentar a resolução dos exercícios usando a própria escrita dos alunos. Por questões éticas, indicaremos os nomes deles por A, B, C, D, E, F, G, H, I e J.

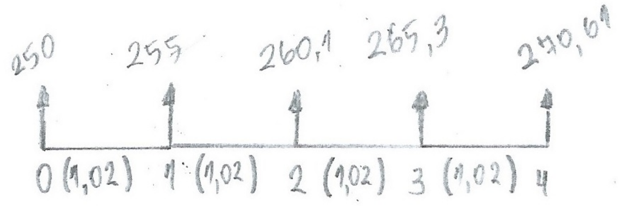
Exercício 1. *Considere um principal de R\$2.000,00, uma taxa de juros de 5% ao mês. Qual o montante após 5 meses?*

Figura 10 – Resolução do Exercício 1 feita pelo Aluno C



Exercício 2. *R\$250,00 valem quanto daqui a 4 meses com taxa de juro de 2% ao mês?*

Figura 11 – Resolução do Exercício 2 feita pelo Aluno D



Exercício 3. *Com o dinheiro custando 2% ao mês, R\$360,00 valiam quanto há 3 meses? E há 9?*

Figura 12 – Resolução do Exercício 3 feita pelo Aluno I

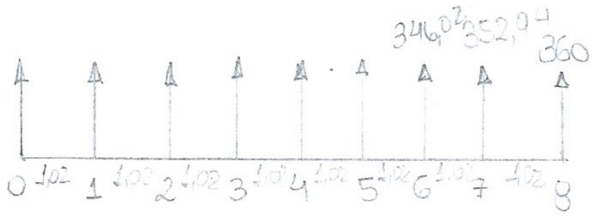
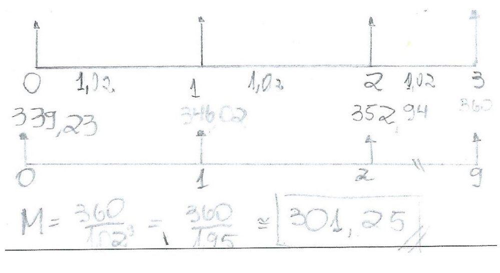


Figura 13 – Resolução do Exercício 3 feita pelo Aluno E



Ao final, solicitamos aos alunos que trouxessem calculadora científica para a próxima aula, caso tivessem.

4.4.2 Segunda Aula

Para começar essa aula, achamos muito importante falarmos aos alunos que os três problemas da apostila, propostos para que eles fizessem no final da primeira aula, servem tão somente para exercitar a movimentação do dinheiro no tempo usando o algoritmo das setas, no regime de juro composto.

Acreditamos que deve ficar claro para os alunos que um dos principais motivos para o estudo de Matemática Financeira é a tomada de decisão e não apenas para resolver problemas daquele tipo. Começamos a aula enfatizando essa observação.

Os problemas propostos na apostila, do número 4 ao 13, ilustram bem essa ideia. Sugerimos apresentar o problema 5 inicialmente. Ele é simples e deixa clara a ideia de tomada de decisão. Lembramos que a ordem dos problemas apresentada nesta dissertação não é a mesma apresentada na apostila. Sendo assim, o problema 5 sugerido será numerado como problema 1 que segue.

Deve-se orientar o aluno quanto a abreviaturas usadas para indicar períodos de capitalização: *a.a.* significa ao ano, *a.s.* ao semestre, *a.t.* ao trimestre, *a.b.* ao bimestre e *a.m.* ao mês.

No desenvolvimento da aula, então, resolvemos dois problemas da apostila como segue, observando que a numeração dos problemas na apostila não é a mesma na sequência aqui apresentada, deve-se levar em conta apenas o texto.

Problema 1. *Suponha o dinheiro valendo 5% a.m. A melhor opção para comprar algo que custa R$1.200,00 é:*

a) à vista, com 10% de desconto.

b) pagamento 1 mês após a compra, com 6% de desconto.

c) ou pagamento de 3 vezes, sem juro (0, 30, 60).

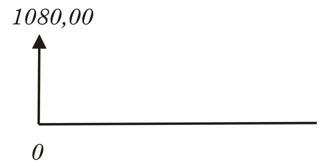
Para fazer a melhor escolha entre as opções apresentadas, basta eleger uma data, que a partir de agora chamaremos de *data focal*, e movimentar cada valor fora para ela. Na nossa resolução, escolhemos a data 0 (zero) como data focal. Assim, cada item ficará da seguinte forma:

a) Como 10% de 1.200,00 é igual a 120,00, então, à vista, o preço será

$$1.200,00 - 120,00 = 1.080,00$$

Considerando que à vista corresponde ao tempo 0, então, este é o desenho do algoritmo

Figura 14 – Item a do Problema 1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

b) Primeiramente, o valor de 6% de 1.200,00 é igual a 72,00. Logo, nessa opção, deve-se pagar no tempo 1, ou seja, um mês depois da compra, o valor de

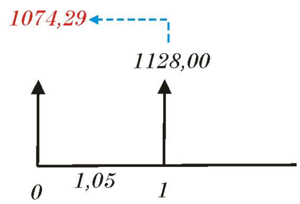
$$1.200,00 - 72,00 = 1.128,00$$

Efetuando o transporte do valor do tempo 1 para a data focal, ou seja, para o tempo 0, encontramos

$$\frac{1.128,00}{1,05} = 1.074,29$$

E seu algoritmo correspondente é

Figura 15 – Item b do Problema 1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

c) Nesta opção, temos o valor de 400,00 na data 0, o de 400,00 na data 1 que deverá ser transportado para a data 0, e o valor de 400,00 na data 2 que também deverá ser transportado para a data 0. As operações que devem ser feitas, então, são:

$$\frac{400,00}{1,05} = 380,95$$

para transportar 400,00 da data 1 para a data 0; e

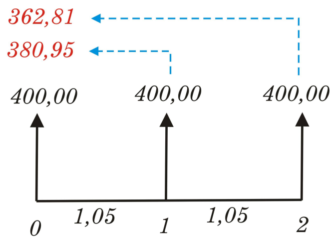
$$\frac{400,00}{1,05^2} = 362,81$$

para transportar 400,00 da data 2 para a data 0. Em seguida, basta somar os valores na data 0 e comparar com os outros itens.

$$362,81 + 380,95 + 400,00 = 1.143,76$$

E seu algoritmo correspondente é

Figura 16 – Item c do Problema 1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Logo, entre as três opções oferecidas, a melhor está no item b.

Fizemos um comentário com os alunos sobre a autonomia da escolha da data para qual queremos transportar o dinheiro para que façamos as comparações. É importante que ele observe que o mesmo problema poderia ter sido resolvido escolhendo outro tempo para levar os valores.

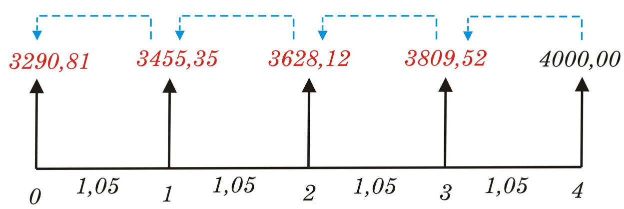
Pois bem, é nesta aula que deve ser proposto o primeiro problema que é tema desta dissertação. Para que este método seja eficiente é de fundamental importância conhecer a realidade do seu aluno, seus anseios, suas ambições. Por isso, cabe ao professor pesquisar e propor problemas que despertem a curiosidade do seu aluno, dentro da sua realidade.

Como o aluno da nossa escola recebe uma remuneração e começa a lidar com o dinheiro, uma das vontades que tem é de realizar uma viagem internacional quando estiver terminando o Ensino Médio. Essa vontade é acentuada quando os alunos das séries mais avançadas contam histórias de lugares que visitaram. Sendo assim, para o grupo de alunos que trabalhamos, propusemos um problema dessa natureza. Trata-se do número 6 da apostila, que aqui numeramos como Problema 2.

Problema 2. *Preciso de R$4.000,00 para viajar para a Eslováquia daqui a dois anos. Se uma determinada aplicação remunera 5% a.s. (juros compostos), qual a quantia mínima que devo aplicar hoje para que possa resgatar os R$4.000,00 daqui a 2 anos?*

Para resolver esse problema, basta transportar o valor de R$4.000,00 que se situará no tempo 4, pois 2 anos correspondem a 4 semestres, para o tempo 0 que seria a data atual, considerando a taxa de 5% a.s. Nós propusemos a Figura 17 com todos os valores:

Figura 17 – Algoritmo da setas proposto para o Problema 2



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os cálculos a serem feitos são

$$\frac{4.000,00}{1,05} = 3.809,52$$

para transportar da data 4 para data 3;

$$\frac{3.809,52}{1,05} = 3.628,12$$

para transportar da data 3 para data 2;

$$\frac{3.628,12}{1,05} = 3.455,35$$

para transportar da data 2 para data 1;

$$\frac{3.455,35}{1,05} = 3.290,81$$

para transportar da data 1 para data 0.

Logo, o valor necessário, hoje, para que se tenha R$4.000,00, à taxa de 5% a.s. daqui a dois anos, é de R$3.290,81.

Foi oportuno nesse momento mostrar que esse valor poderia ser obtido dividindo-se R$4.000,00 por $1,05^4$, ou seja, para trazer um valor 4 períodos para o presente, divide-o por $(1+i)^4$. Em nosso caso, haviam várias calculadoras em sala e esses cálculos foram feitos pelos alunos. O desenvolvimento dos alunos pode ser visto nas Figuras 18 e 19

Figura 18 – Resolução do Problema 2 feita pelo Aluno G

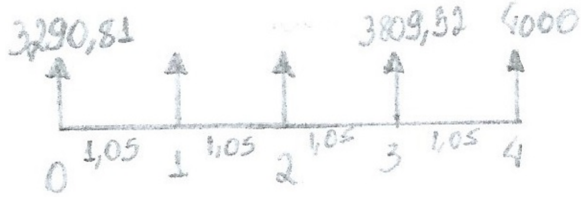
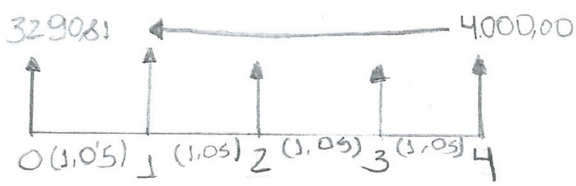


Figura 19 – Resolução do Problema 2 feita pelo Aluno F



Depois de analisada a resposta, esse problema motivou um próximo. Ao perceber que o valor necessário, hoje, para a projeção de R$4.000,00 daqui a 2 anos era expressivo, e que nenhum dos alunos dispunham dele, um deles perguntou: "...e se eu puder juntar um valor todo mês, tem jeito de calcular quanto vou ter no final de 2 anos?" (Aluno I)

A pergunta feita pelo Aluno I exemplifica bem como o método que propomos é motivador, confirmando nossas expectativas. Passou a ser vontade do aluno saber como fazer. Esse momento foi uma boa surpresa para nós mesmos. O professor que resolver usar a nossa ideia deve estar atento a autonomia que deve ter na condução dos problemas.

Como não havia tempo suficiente para explorar a pergunta do aluno, achamos por bem deixar para resolver o problema na terceira aula.

4.4.3 Terceira Aula

Essa aula teve início com o problema proposto pelo Aluno I na aula anterior. É importante observar que, uma vez proposto por um aluno no transcorrer da aula, esse problema não consta dos que estão na apostila. A resolução foi feita no verso de uma das folhas.

Problema 3. *Depositando R$200,00 todo mês durante 30 meses, quanto vou ter no final considerando a taxa de 0,5% a.m.?*

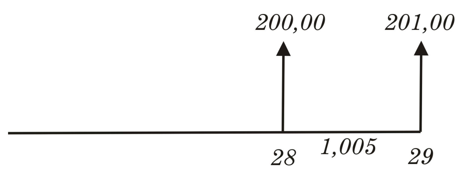
Nesse momento, é fundamental a interferência do professor na condução do problema. Devemos mostrar ao aluno que a solução está em transportar cada depósito de R$200,00, feito no seu devido tempo, para o tempo 29 (30 depósitos começando no tempo 0), usando o algoritmo das setas, aplicando a taxa de juro sugerida. Depois disso, efetuamos a soma de todos os valores encontrados.

Para fazer o aluno ver que se trata da soma dos termos de uma progressão geométrica finita, calculamos o transporte de alguns valores do fim para o começo. Seus desenhos correspondentes com seus devidos cálculos serão

para transportar R$200,00 do tempo 28 para o tempo 29:

$$200,00 \cdot 1,005 = 201,00$$

Figura 20 – Resolução do Problema 3 - Transporte do tempo 28 para o tempo 29

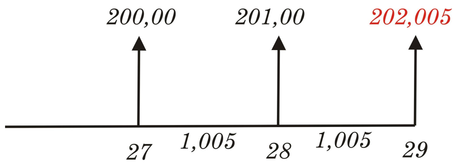


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

para transportar 200,00 do tempo 27 para o tempo 29:

$$200,00 \cdot 1,005^2 = 202,005$$

Figura 21 – Resolução do Problema 3 - Transporte do tempo 27 para o tempo 29

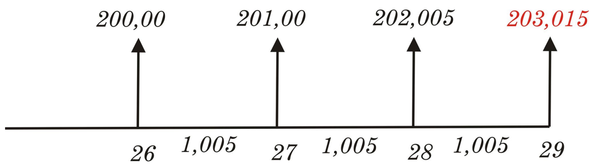


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

para transportar 200,00 do tempo 26 para o tempo 29:

$$200,00 \cdot 1,005^3 = 203,015$$

Figura 22 – Resolução do Problema 3 - Transporte do tempo 26 para o tempo 29



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

e assim, sucessivamente.

Numa tabela, esses valores ficariam assim:

Tabela 5 – Tabela com os valores transportados

Tranporte do tempo	para o tempo	Valor no tempo 29
29	29	200
28	29	201
27	29	202,005
26	29	203,015
...	...	...

Entendemos que essa é uma boa oportunidade para escrever no canto do quadro, como lembrete, a fórmula do termo geral e da soma dos n termos de uma progressão geométrica finita, fórmulas escritas no começo da apostila.

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

A soma a ser efetuada, então, possui 30 parcelas (do tempo 0 ao tempo 29) formadas pela sequência $(200; 201; 202,005; 203,015; ...; a_{30})$, indicada acima, que trata da soma dos 30 temos de uma P. G. de razão $q = 1,005$:

$$S \quad = \quad 200,00 + 201,00 + 202,005 + 203,015 + ... + a_{30} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \\
&= \frac{200 \cdot (1,005^{30} - 1)}{1,005 - 1}
\end{aligned}
$$

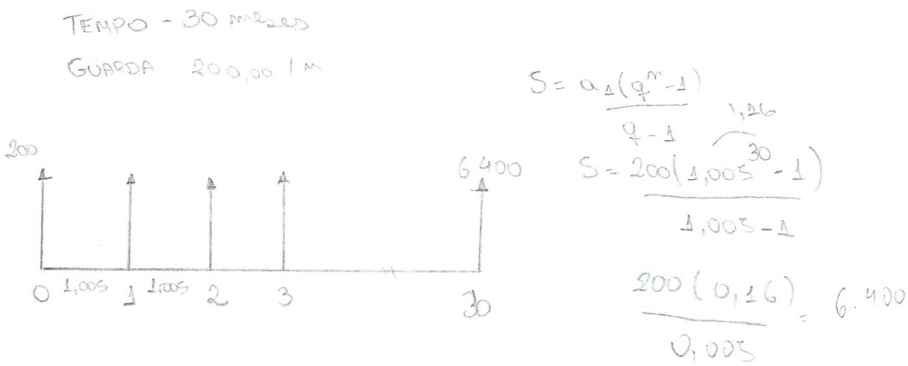
Esse é mais um momento oportuno para o uso da calculadora científica. Sugerimos que seja ensinado ao aluno como usar esse instrumento para resolução dessa expressão numérica de uma só vez. Ensiná-lo a dar os comandos certos para que consiga o resultado sem ter que ir resolvendo a expressão aos "pedaços". Nossa intenção, ao sugerir o uso da calculadora científica, é agregar um artifício motivador para o aprendizado do aluno da Matemática Financeira, como também do professor ao ensinar esse conteúdo.

Ele vai encontrar

$$S = R\$6.456,00$$

A resolução apresentada pelo Aluno I, o mesmo aluno que formulou o problema na aula anterior, está ilustrada na Figura 23:

Figura 23 – Resolução do Problema 3 feita pelo Aluno I



A justificativa que o Aluno deu para o resultado que encontrou, diferente do correto, foi o não uso da calculadora, uma vez que ele não tinha levado uma para a aula. Entendemos que esta situação deve ser explorada de modo a dar importância a esse instrumento que tanto ajuda nos cálculos de Matemática Financeira.

Achamos relevante dizer que estávamos atentos que esse problema nos remete a Séries Uniformes, por isso chamamos a atenção do professor que queira usar nosso trabalho para que, ao final da resolução do problema, diga a seus alunos que encontraríamos uma fórmula para resolução de problemas assim.

Em seguida, exploramos a vontade que os alunos possuem de comprar um carro. É um desejo comum a quase todo jovem, sobretudo os alunos da EPCAR, uma vez que vão para a Academia e desejam locomover-se com mais agilidade e independência. Assim, resolvemos o Problema 4 da apostila, que corresponde ao problema deste trabalho com a intenção provocante de que fizessem cálculos dentro de suas próprias condições.

Problema 4. *Quero comprar um carro novo e recebo as seguintes ofertas:*

A: Uma entrada de R$21.000,00 e mais duas parcelas anuais de R$21.000,00, cada uma;

B: Duas parcelas anuais de R$32.000,00, a primeira delas daqui a um ano (sem entrada).

Qual a melhor opção se você consegue 15% a.a. em aplicações financeiras?

Quanto dinheiro tenho que ter hoje para cumprir com a melhor opção?

Nós abordamos esse problema indicando que uma solução é escolher como data focal o tempo 0 e, depois de desenhar o algoritmo com cada valor no seu devido lugar, conforme descrito no problema, transportá-los para a data focal. Aí, então, é só somar e fazer as comparações.

A: Transportando 21.000,00 do tempo 1 para o tempo 0, tem-se

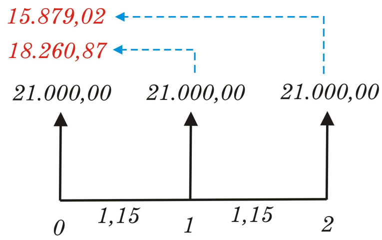
$$\frac{21.000,00}{1,15} = 18.260,87;$$

e transportando 21.000,00 do tempo 2 para o tempo 0, tem-se

$$\frac{21.000,00}{1,15^2} = 15.879,02$$

O algoritmo ficaria assim:

Figura 24 – Resolução do Item I para o Problema 4



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Portanto, no tempo 0, o total pago seria

$$15.879,02 + 18.260,87 + 21.000,00 = 55.139,89$$

B: Transportando 32.000,00 do tempo 1 para o tempo 0, tem-se

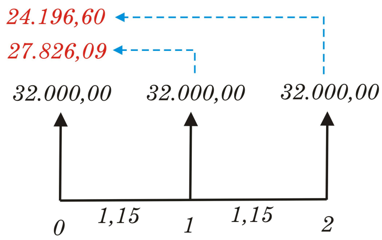
$$\frac{32.000,00}{1,15} = 27.826,09;$$

e transportando 32.000,00 do tempo 2 para o tempo 0, tem-se

$$\frac{32.000,00}{1,15^2} = 24.196,60$$

O algoritmo ficaria assim:

Figura 25 – Resolução do Item II para o Problema 4



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Portanto, no tempo 0, o total pago seria

$$27.826,09 + 24.196,60 = 52.022,69$$

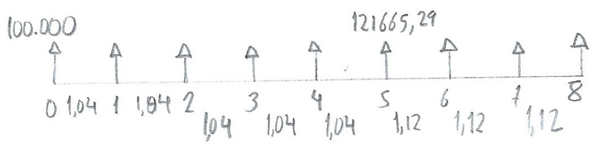
Comparando as duas somas, a melhor opção é a do item II, ou seja, deveria ter hoje R$52.022,69 para cumprir com a melhor opção.

Foram sugeridos alguns exercícios, em seguida, todos encontrados na apostila.

Exercício 4. *Apliquei uma quantia a 4% a m. Após 5 meses, a taxa foi elevada para 12% e meu capital ficou aplicado por mais 3 meses, quando, então, retirei o montante de R$170.930,97. Determine:*

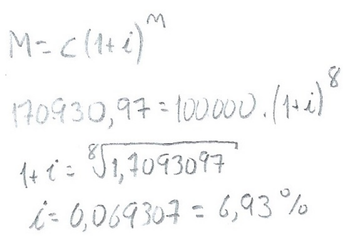
a) *O valor do capital inicial.*

Figura 26 – Resolução do Item a, do Exercício 4, feita pelo Aluno H



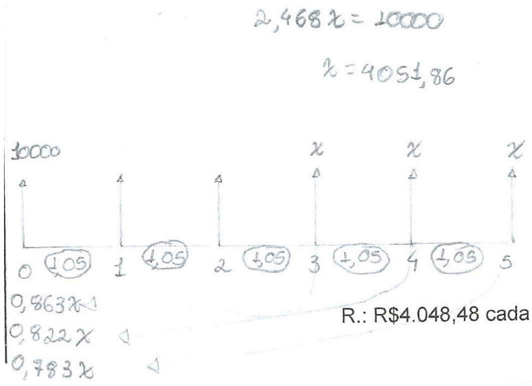
b) *A taxa média que esse capital ficou aplicado.*

Figura 27 – Resolução do Item b, do Exercício 4, feita pelo Aluno H



Exercício 5. *Uma pessoa tomou emprestados R$10.000,00 obrigando-se a pagá-los em 3 parcelas mensais iguais, com juros de 5% a.m. Qual o valor das parcelas se a 1ª vencer a 90 dias do empréstimo?*

Figura 28 – Resolução do Exercício 5 feita pelo Aluno C



Exercício 6. *Faltando 3 pagamentos mensais de R$50.400,00 para o término de um contrato, o devedor deseja liquidá-lo na data em que deveria efetuar o 1º desses pagamentos. Quanto deverá pagar se a taxa é de 3% a.m.?*

Figura 29 – Resolução do Exercíco 6 feita pelo Aluno B

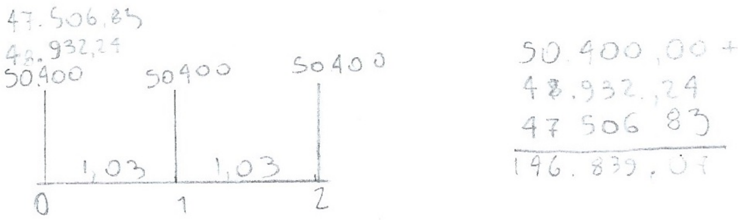
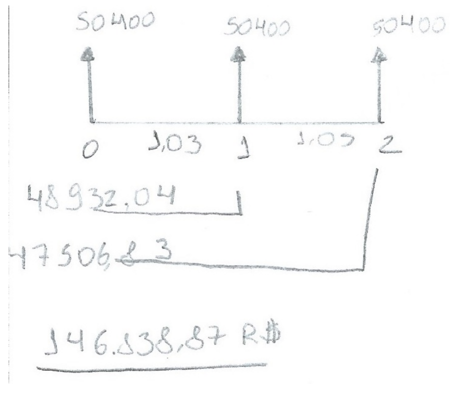


Figura 30 – Resolução do Exercício 6 feita pelo Aluno F



4.4.4 Quarta Aula

Nessa aula, trabalhamos outro problema que é razão da nossa dissertação. Nosso objetivo com essa aula é fazer o aluno efetuar alguns cálculos com anúncios em folhetos de loja. Ele deve terminar a aula com ferramentas para analisar, racionalmente, anúncios de produtos que apresentam juros embutidos.

Primeiramente propusemos a resolução de um problema da apostila. Ele é mais simples e apresenta cálculos fáceis e rápidos, mas a ideia desse problema será a mesma que vamos usar para o do anúncio de folheto de loja.

Problema 5. *Uma loja está anunciando uma geladeira por R$480,00 à vista ou em 3 pagamentos mensais e iguais a R$160,00, sendo o 1º no ato da compra. Considerando uma taxa de 6% a.m., qual o desconto que essa loja poderia dar para o pagamento à vista?*

Para resolver esse problema, transportamos cada prestação, a partir da data 1, para a data 0, somamos os valores encontrados e vamos ter o preço que a loja poderia cobrar para o pagamento à vista.

Transportando os valores vamos ter:

para levar do tempo 1 para o tempo 0,

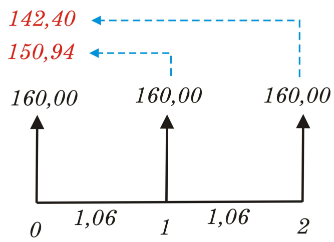
$$\frac{160,00}{1,06} = 150,94$$

e do tempo 2 para o tempo 0,

$$\frac{160,00}{1,06^2} = 142,40$$

Seu desenho correspondente é:

Figura 31 – Algoritmo das setas para a resolução do Problema 5



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Logo, no tempo 0, que corresponde ao pagamento à vista, a loja deveria cobrar

$$160,00 + 150,94 + 142,40 = 453,34$$

que corresponde ao desconto de

$$480,00 - 453,34 = 26,66$$

ou

$$\frac{26,66}{480,00} = 0,0555 = 5,55\%$$

Ao terminar, mostramos que aquela prática é comum nesse tipo de financiamento e se chama juro embutido.

A partir desse momento, pudemos trabalhar mais um problema que acreditamos motivar os alunos para o aprendizado da Matemática Financeira e na apostila ele tem o número 11.

Solicitamos que pegassem a revista promocional que foi entregue junto com a apostila na primeira aula. Pela convivência diária com adolescentes, sabemos que um dos sonhos de consumo dos alunos nessa idade é o telefone celular. Por isso pedimos que fosse observado nessa revista o modo como esse produto era anunciado. Orientamos que os alunos fizessem a multiplicação das prestações e constatassem que é o mesmo valor que o preço à vista.

Figura 32 – Anúncio do i-phone da revista promocional

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

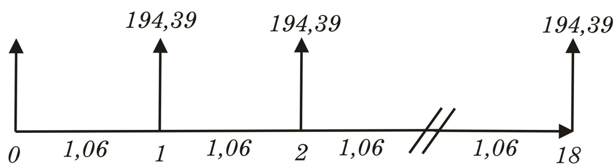
Eis o problema:

Problema 6. *O iphone 6 é anunciado por R\$3.499,00 à vista ou em 0+18 de R\$194,39 (18 parcelas de 194,39, sem entrada). A taxa praticada pela loja é de 6% a.m.. Qual o desconto que essa loja poderia dar para o pagamento à vista?*

Uma resolução desse problema é semelhante à do anterior, entretanto com muitos valores para serem somados no final.

Podemos transportar cada prestação de R\$194,39 para o tempo 0. Caso o aluno queira, o transporte pode ser feito para qualquer outra data.

Figura 33 – Algoritmo das setas para a resolução do Problema do i-phone



Fonte: magazineluiza

Do tempo 1 para o tempo 0:

$$\frac{194,39}{1,06} = 183,39$$

do tempo 2 para o tempo 0:

$$\frac{194,39}{1,06^2} = 173,01$$

do tempo 3 para o tempo 0:

$$\frac{194,39}{1,06^3} = 163,21$$

e assim, sucessivamente até chegar no tempo 18.

Assim como no problema 3, proposto na terceira aula, a sequência

$$(183,39; 173,01; 163,21; ...; a_{18})$$

também é uma P. G., sua razão é $q = \frac{1}{1,06}$, e a solução do problema é a soma dos seus 18 termos, ou seja,

$$\begin{aligned} S_{18} &= 183,39 + 173,01 + 163,21 + ... + a_{18} = \\ &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \\ &= \frac{183,39 \cdot [(\frac{1}{1,06})^{18} - 1)]}{\frac{1}{1,06} - 1} \\ &= 2.104,81 \end{aligned}$$

Estimulamos o uso da calculadora científica para, a partir da expressão numérica, encontrar o resultado final.

Logo, a loja poderia oferecer o desconto de

$$3.499,00 - 2.104,81 = 1.394,18$$

que equivale a

$$\frac{1.394,18}{3.499,00} = 0,39845 = 39,845\%$$

ou seja, aproximadamente 40% de desconto.

Destacamos as seguintes resoluções de alunos:

Figura 34 – Resolução do Problema 6 feita pelo Aluno E

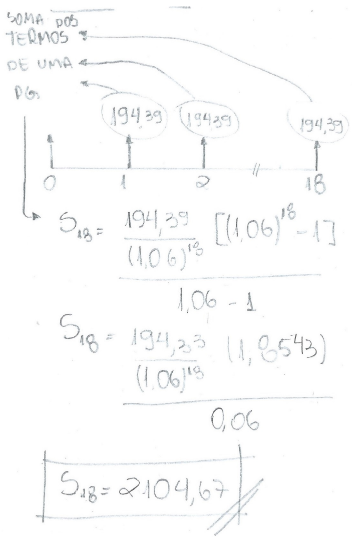


Figura 35 – Resolução do Problema 6 feita pelo Aluno G

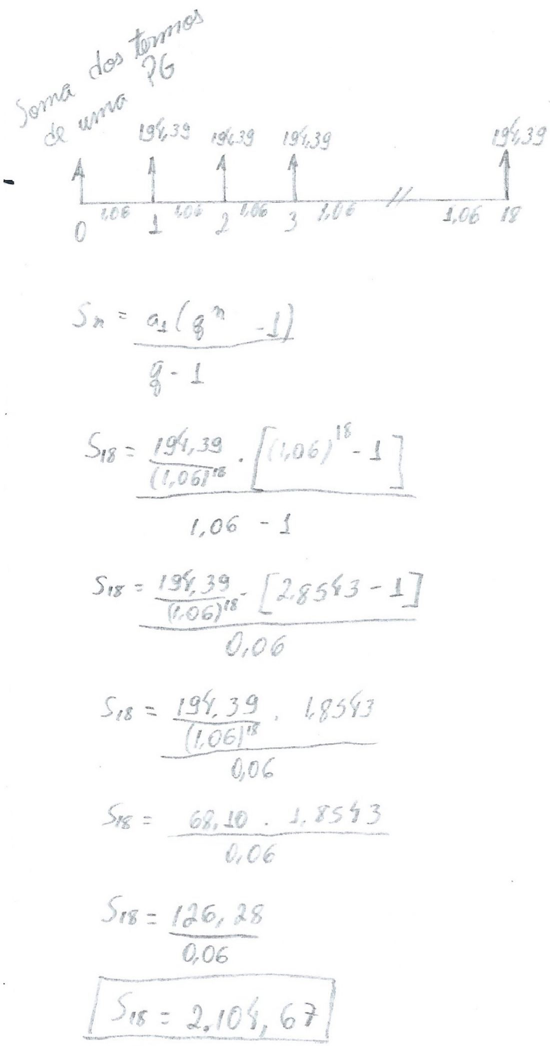
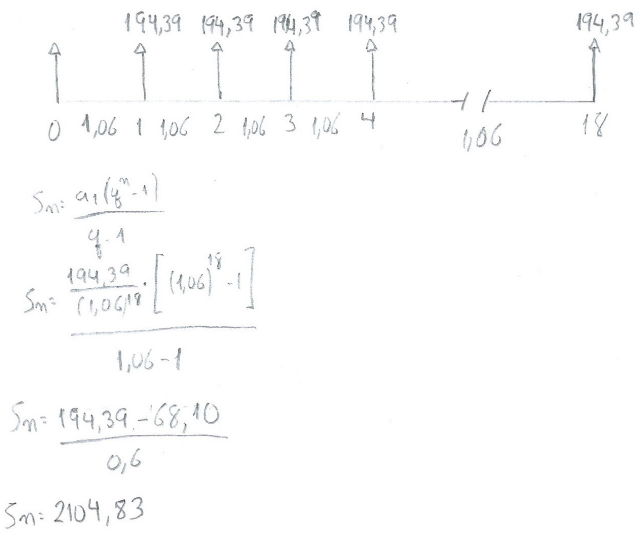


Figura 36 – Resolução do Problema 6 feita pelo Aluno H



Exploramos esse problema do ponto de vista crítico também. Não basta encontrar o resultado e passar para o próximo. Especificamente, falamos da prática do juro embutido. Pedimos aos alunos que folheassem a revista promocional e observassem outros produtos cuja soma das parcelas é maior que o preço à vista. Explicamos que a taxa de juro praticada pela loja para o pagamento parcelado, foi a mesma que usamos para fazer o cálculo para o pagamento à vista do produto que citamos no problema anterior. Provocamos a opinarem sobre essa prática e mostramos que são capazes de fazê-lo de modo racional tendo em vista os conhecimentos adquiridos.

Finalizamos esse instante de conversa deixando no ar a pergunta: seria possível encontrar uma fórmula para o cálculo que fizemos, para qualquer situação de parcelamento com valores iguais? Era a ligação para o próximo assunto.

4.4.5 **Quinta Aula**

Começamos essa aula definindo Taxas Efetivas, para que pudéssemos falar em Taxas Equivalentes posteriormente. Em seguida, definimos as Taxas Nominais de Juros, entretanto, o objetivo principal dessa aula é apresentar e definir uma fórmula para Séries Uniformes. Ao final, o aluno deverá ser capaz de calcular o valor de prestações fixas no regime de juro composto.

Taxas efetivas são taxas de juros cuja unidade de tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. São as taxas que temos trabalhado até aqui. Por exemplo: 10% a.m., 15% a.a., etc. Nesse modelo de taxa, 10% a.m. não significa 120% a.a. $(10 \cdot 12 meses = 120)$. Não é simples como parece.

As taxas nominais são taxas cujas unidades de tempo não coincidem com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. É exemplo de taxa nominal: 36% a.a. capitalizados mensalmente (que significa uma taxa efetiva implícita de 3% a.m. $(\frac{36}{12} = 3)$).

Devemos, portanto, ter cuidado com as taxas nominais de juro. Elas trazem implícitas as taxas efetivas a serem aplicadas no regime de juro composto.

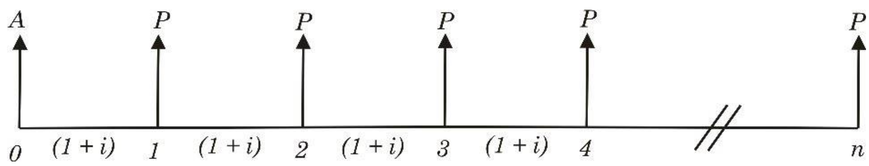
Em seguida, definimos séries uniformes: uma série uniforme é um conjunto de capitais de mesmo valor, ou seja, pagamentos que ocorrem em intervalos de tempo iguais. Quando compramos, por exemplo, uma smart tv de modo parcelado e as parcelas têm o mesmo valor, temos uma série uniforme.

É interessante que tenhamos uma fórmula para o cálculo dos pagamentos de séries uniformes. A razão disto é para que não tenhamos que ficar fazendo o transporte de valores no tempo, toda vez que tiver que resolver esse modelo de problema. Utilizando-se uma fórmula, seremos mais rápidos e práticos.

Os alunos são capazes, nesse momento do estudo, de encontrar essa fórmula. Basta eleger uma data focal para transportar o valor de cada prestação. E a data que vamos eleger é o primeiro período antes do primeiro pagamento. Escolhendo essa data, vamos encontrar uma fórmula mais simples de ser memorizada.

O desenho abaixo vai nos ajudar a calcular essa fórmula. Nele, n é o número de pagamentos, P é o valor de cada pagamento, A é o valor da série no primeiro período antes do primeiro pagamento e i é a taxa de juro.

Figura 37 – Algoritmo das setas usado para Séries Uniformes



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O valor de A é dado pela seguinte soma

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$A = P \cdot [\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}]$$

que trata do produto de P pela soma dos termos de um progressão geométrica de razão $q = \dfrac{1}{(1+i)}$.

$$\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+i} \cdot [(\frac{1}{1+i})^n - 1]}{(\frac{1}{1+i} - 1)} =$$

$$= \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Logo, temos

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

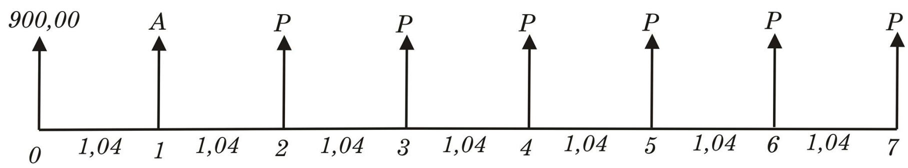
Essa fórmula, olhada isoladamente sem sua demonstração, causa resistência mesmo a um professor. No entanto, sua dedução envolve o conhecimento de transporte de valores no tempo através do algoritmo das setas e soma dos termos de uma progressão geométrica.

Para entendimento e aplicação dessa fórmula, propusemos um exemplo de compra de uma geladeira como consta na apostila.

Exemplo 8. *Uma geladeira custa, à vista, R\$900,00 e pode ser paga em 6 prestações mensais iguais, vencendo a primeira dois meses após a compra. Os juros são de 4% a m. Determine o valor das prestações.*

Como vimos, ao calcular a fórmula para séries uniformes, a data que devemos eleger como data focal é o primeiro período antes do primeiro pagamento. O algoritmo que representa esse problema é

Figura 38 – Algoritmo das setas para resolução do Exemplo 6



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O esquema nos mostra que primeiramente, devemos transportar R\$900,00 da data 0 para a data 1. Para isto, basta multiplicar R\$900,00 por 1,04.

$$900,00 \cdot 1,04 = 936,00$$

Agora sim, calcula-se P aplicando-se a fórmula das séries uniformes.

$$A = 936,00 = P \cdot \frac{1-(1,04)^{-6}}{0,04}$$
$$P = 936 \cdot \frac{0,04}{1-(1,04)^{-6}}$$
$$P = 178,55$$

O valor de cada prestação será de R\$178,55.

Esse é outro momento oportuno para o uso da calculadora científica. Conforme já sugerimos anteriormente, caso o aluno ainda não saiba, entendemos que deve ser ensinado a ele como usar esse instrumento para resolução dessa expressão numérica de uma só vez.

Ensiná-lo a dar os comandos certos para que consiga o resultado, sem ter que ir resolvendo a expressão aos “pedaços”. Nossa intenção é ter mais um artifício motivador.

Nesse instante, solicitamos aos alunos que pegassem novamente a revista de anúncios que havíamos entregue na primeira aula e propusemos outro problema que é tema da nossa dissertação e, também, consta na apostila.

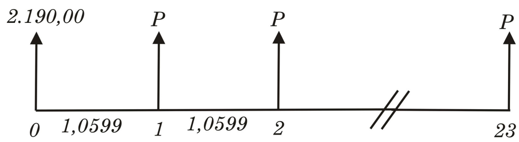
Problema 7. *Procure na revista o produto TV Smart 3D LED 42” LG, Conversor digital integrado. Verifique se o valor das prestações está correto, observando o anúncio (taxa de juros, quantidade de parcelas).*

Figura 39 – Anúncio da Smart TV da revista promocional

Fonte: magazineluiza

A resolução desse problema apresenta o seguinte algoritmo

Figura 40 – Algoritmo das setas para resolução do Problema 7



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os cálculos são apresentados em seguida. Lembramos a quem queira usar nosso trabalho, que o aluno é orientado a fazer esses cálculos na calculadora científica, no momento que o P está isolado, de uma só vez.

$$A = 2.190,00 = P \cdot \frac{1-(1,0599)^{-23}}{0,0599}$$

$$P = 2.190 \cdot \frac{0,0599}{1-(1,0599)^{-23}}$$

$$P = 177,84$$

Esse valor verifica o valor apresentado pela loja na revista, com uma diferença de 6 centavos, que pode ser em razão de arredondamento adotado pela loja.

Apresentamos a resolução de três Alunos para esse Problema.

Figura 41 – Resolução do Problema 7 feita pelo Aluno G

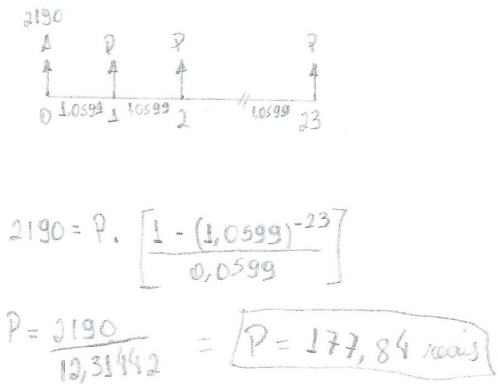


Figura 42 – Resolução do Problema 7 feita pelo Aluno B

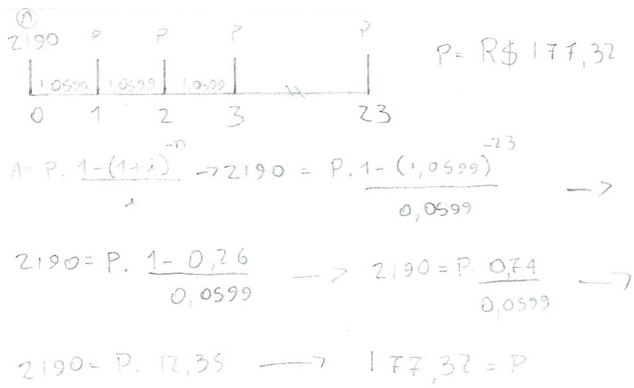
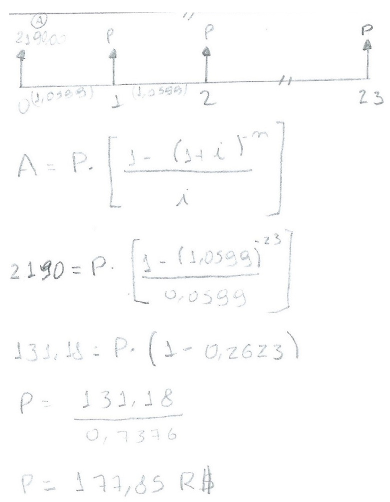


Figura 43 – Resolução do Problema 7 feita pelo Aluno F



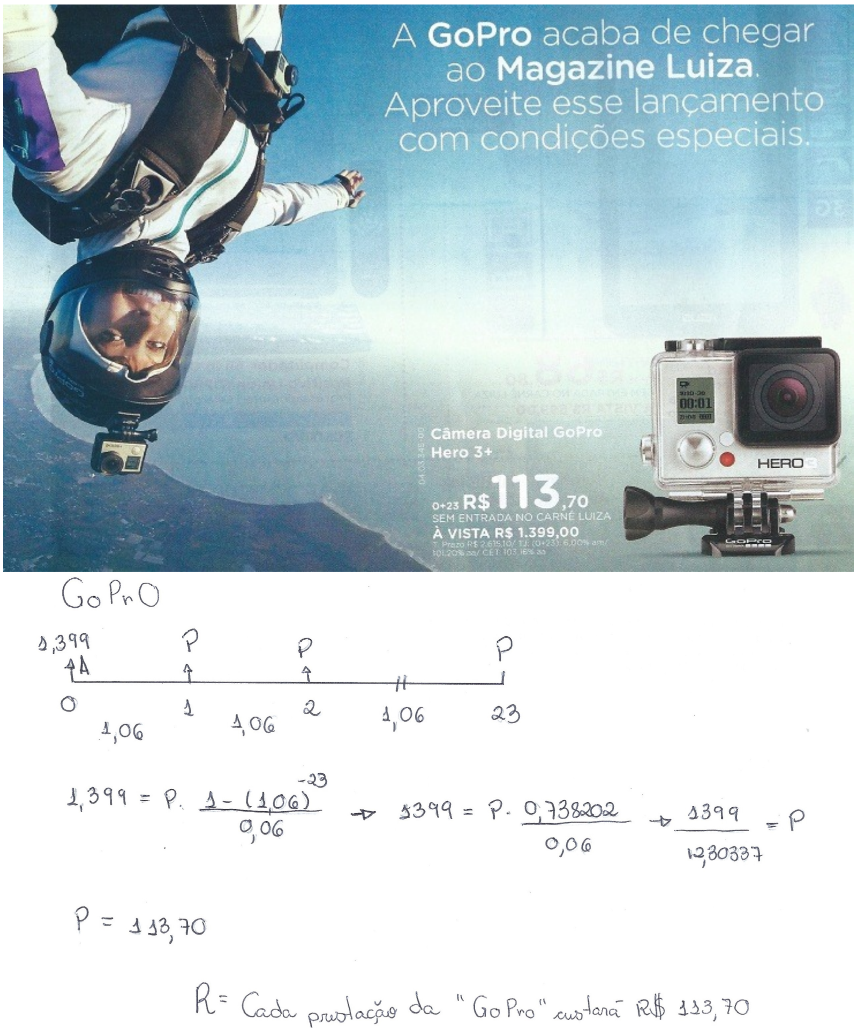
Em seguida, fizemos a proposta de outro produto a escolha individual para que exercitassem a fórmula de Séries Uniformes. Caso tivessem tempo, que fizessem com mais de um produto.

Problema 8. *Procure na revista outro produto e verifique se o valor das prestações está correto, observando o anúncio (taxa de juros, quantidade de parcelas).*

Escolhemos três resoluções dos alunos para compor nossa dissertação.

O Aluno A escolheu "GoPro" e apresentou sua resolução.

Figura 44 – Resolução do Problema 8 feita pelo Aluno A

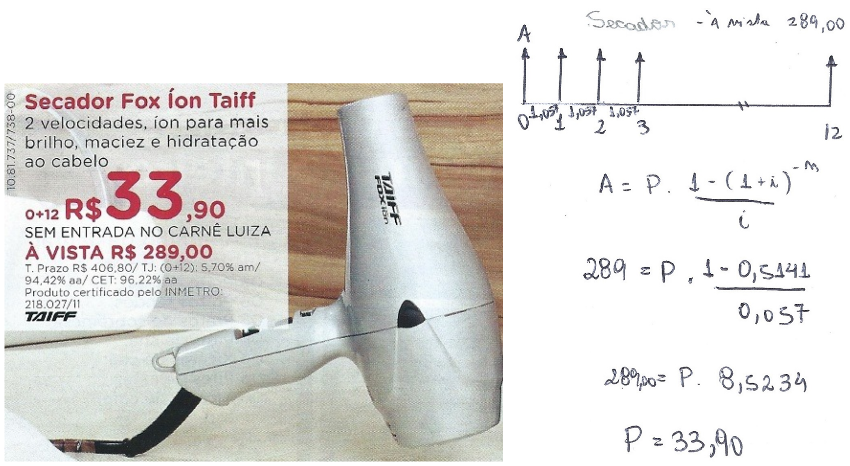


O Aluno J escolheu "DVD Player" e apresentou sua resolução.

Figura 45 – Resolução do Problema 8 feita pelo Aluno J

O Aluno I escolheu “Secador de Cabelo” e apresentou sua resolução.

Figura 46 – Resolução do problema 8 feita pelo Aluno I



4.4.6 Sexta Aula

Essa aula tem o objetivo de trabalhar outros problemas com a intenção de que o aluno assimile melhor a fórmula das séries uniformes.

O primeiro problema que propusemos para esta aula é semelhante ao problema 3 da terceira aula, que trata de uma aplicação com intenção de comprar algo com o dinheiro.

Conforme dissemos anteriormente, o aluno de nossa Escola, após finalizar o Ensino Médio e cumprir todos os requisitos necessários, ingressa na Academia da Força Aérea, para receber a formação de piloto. Sabemos que uma vontade que a maioria deles possui é a de comprar seu primeiro automóvel. Por isso, a ideia do próximo problema está relacionada a esse desejo.

Insistimos que o professor deve estar atento às expectativas dos seus alunos. Aquele que desejar usar nossa ideia tem que ter consciência dessa autonomia. Pensamos que não faz sentido oferecer um problema desse para alunos com pouca perspectiva financeira.

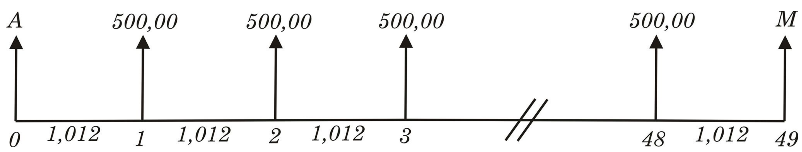
Problema 9. *Supondo que você consiga guardar R$500,00 todo mês enquanto estiver estudando na Academia, ou seja, durante 48 meses. Qual o montante vai ter um mês após o último depósito, considerando uma taxa 1,2% a.m.?*

Diferentemente do que os alunos fizeram no Problema 3, aqui a resolução deve ser feita usando a fórmula de Séries Uniformes.

A solução do problema é, após encontrar A, valor do primeiro período anterior ao primeiro depósito, transportá-lo para o tempo 49, que corresponde ao primeiro mês após o último depósito. Lembramos que a calculadora científica é de muito valor na resolução das contas.

O algoritmo que representa esta situação é:

Figura 47 – Algoritmo das setas para resolução do Problema 9



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O valor de A é encontrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A &= 500,00 \cdot \frac{1-(1,012)^{-48}}{0,012} = \\ &= 18.163,62 \end{aligned}$$

Resta agora transportá-lo para a data 49, ou seja,

$$\begin{aligned} M &= 18.163,62 \cdot 1,012^{49} = \\ &= 32.587,24 \end{aligned}$$

Logo, vai ter um montante de R$32.587,24.

As Figuras 48 e 49 mostram a resolução de dois alunos. Observa-se que há um erro na escolha do tempo do aluno J. Esse tipo de erro deve servir para bem definir qual o cálculo que se deseja fazer.

Figura 48 – Resolução do Problema 9 feita pelo Aluno J

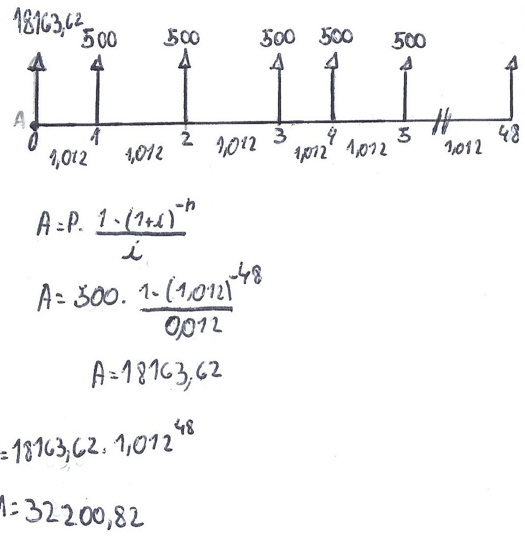
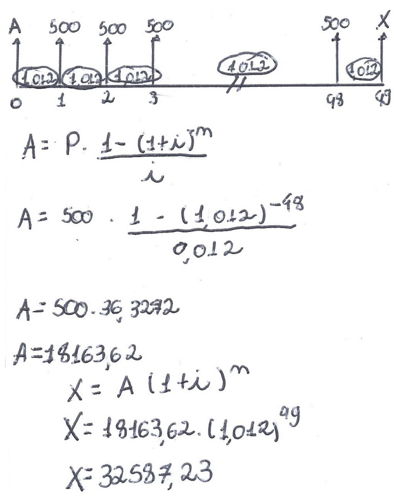


Figura 49 – Resolução do Problema 9 feita pelo Aluno C



Em seguida, propusemos dois exercícios para que os alunos fizessem com nossa orientação, sendo um de financiamento e outro de empréstimo, duas operações financeiras comuns no cotidiano das pessoas. Esses exercícios fazem parte dos propostos na apostila.

Exercício 7. *Um empréstimo de R\$20.000,00 deve ser pago em 12 prestações mensais iguais. Determinar o valor das prestações se a taxa de juros cobrada é 1% a m, e a 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos.*

Figura 50 – Resolução do Exercício 7 feita pelo Aluno D

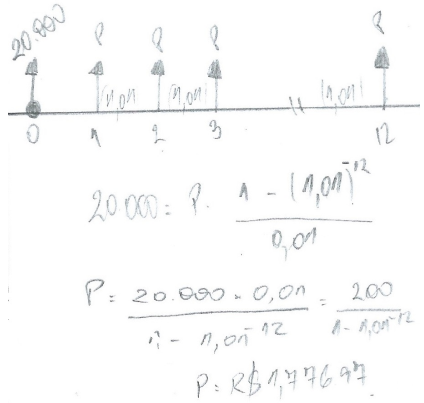
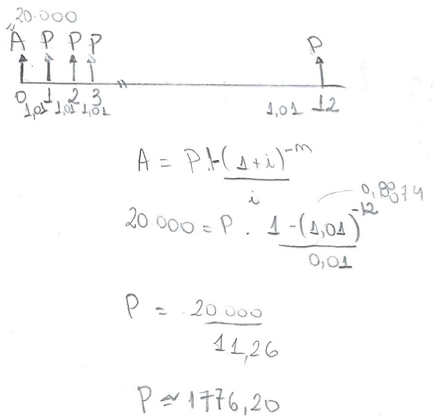


Figura 51 – Resolução do Exercício 7 feita pelo Aluno I



Exercício 8. *Um automóvel de R$25.000,00 será financiado em 12 prestações mensais iguais com taxa de juros de 1% a m. Determine o valor que deve ser dado de entrada para que as prestações fiquem limitadas a R$1.700,00 supondo que a 1ª ocorra 30 dias após a liberação dos recursos.*

Figura 52 – Resolução do Exercício 8 feita pelo Aluno G

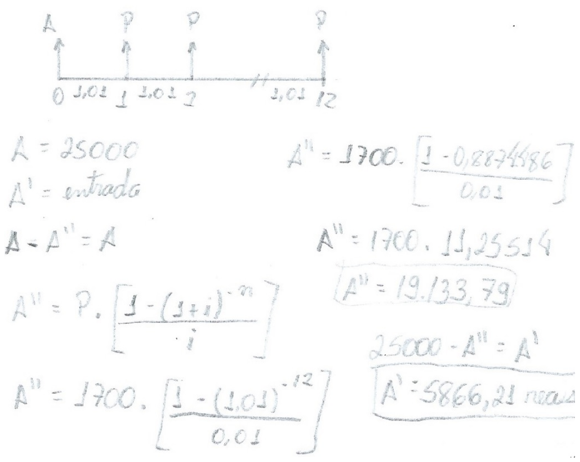
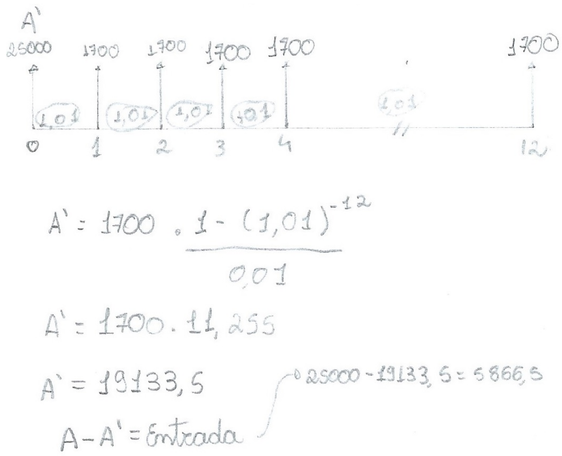


Figura 53 – Resolução do Exercício 8 feita pelo Aluno C



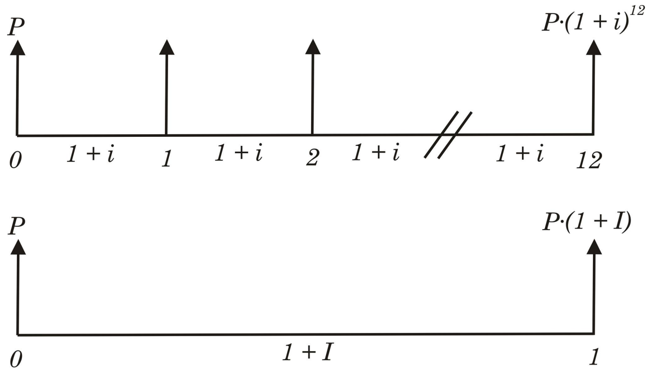
4.4.7 **Sétima Aula**

Ao final dessa aula, o aluno deve saber o que são taxas equivalentes e fazer a relação entre elas, além de conhecer também os dois sistemas mais comuns de financiamento, assim como, saber operar com cada um deles.

Começamos definindo taxas equivalentes: são taxas de juros com unidades de tempo diferentes que, aplicadas ao mesmo principal durante o mesmo prazo, produzem o mesmo montante, no regime de juros compostos.

Sendo assim, vamos deduzir, por exemplo, a relação entre as taxas equivalentes mensal e anual: suponhamos um principal P aplicado por 1 ano à taxa I e por 12 meses à taxa i. Observe os algoritmos de cada um deles:

Figura 54 – Algoritmo das setas usado para relação entre taxas equivalentes



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Da definição de taxas equivalentes temos

$$P \cdot (1+i)^{12} = P \cdot (1+I)$$

$$(1+i)^{12} = (1+I)$$

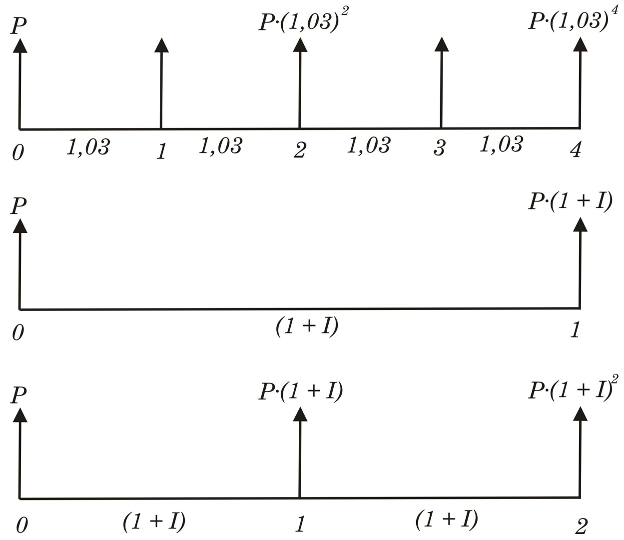
Procedemos de modo análogo para outras relações. Esse desenvolvimento, como em muitos outros, foi feito no quadro com auxílio de recurso multimídia, *data show*, e o acompanhamento dos alunos. Na apostila, há espaço para que eles fizessem este esquema.

Logo após, partimos para um exemplo com a intenção de consolidar a relação encontrada.

Exemplo 9. *Determinar as taxas semestral e anual equivalentes a 3% a.t.*

Fica fácil enxergar as relações no algoritmo das setas. Veja:

Figura 55 – Algoritmo das setas usado para solução do Exemplo 7



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

cálculo da taxa anual:

$$(1,03)^4 = (1 + I)$$

$$1,1255 = 1 + I$$

$$I = 0,1255 = 12,55\% a.a.$$

cálculo da taxa semestral:

$$(1,03)^2 = (1 + I)$$

$$1,0609 = 1 + I$$

$$I = 0,0609 = 6,09\% a.s.$$

Dessa maneira, explicamos, finalmente, o último conteúdo: Planos Equivalentes de Financiamento tratando dos dois mais presentes no mercado atualmente, que são as Tabelas PRICE, em homenagem a seu idealizador, Richard Price, e SAC, Sistema de Amortização Constante.

Dizemos que dois fluxos de caixa são equivalentes a uma determinada taxa de juros se seus valores presentes (calculados com essa mesma taxa) forem iguais.

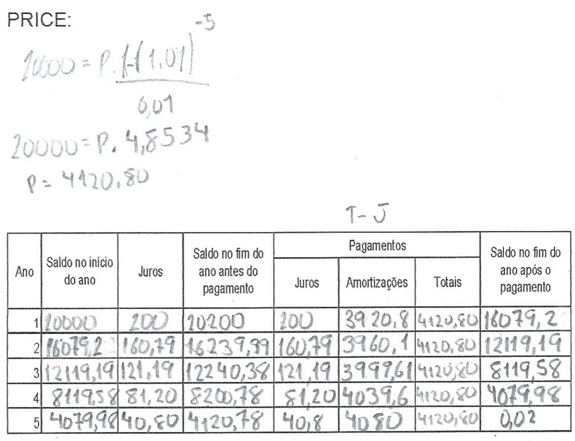
Da mesma forma, dois planos de financiamento são equivalentes quando seus fluxos de caixa forem equivalentes.

Para um melhor entendimento de cada um dos planos, resolvemos o Exemplo 6, apresentado no Capítulo 3.

E para exercitar como fazer as tabelas, apresentamos um problema como exercício. É importantíssimo a atenção e orientação do professor nessa atividade. Não deixamos que nenhum aluno ficasse atrasado. Eles deviam fazer os cálculos um a um, linha a linha. Por isso, uma tabela pequena. Ao exercitar esse procedimento, o aluno assimila o cálculo que deve ser feito em cada célula. E isso é o que será preciso para a oitava aula, na qual faremos o uso de uma planilha eletrônica.

Exercício 9. *Calcule o valor das prestações de um financiamento de R$20.000,00 com taxas de 1% a.m. que deve ser pago em 5 meses, pelo método PRICE e SAC.*

Figura 56 – Resolução do Exercício 9 feita pelo Aluno H


PRICE:

$$10000 = P \cdot \frac{1-(1,01)^{-5}}{0,01}$$

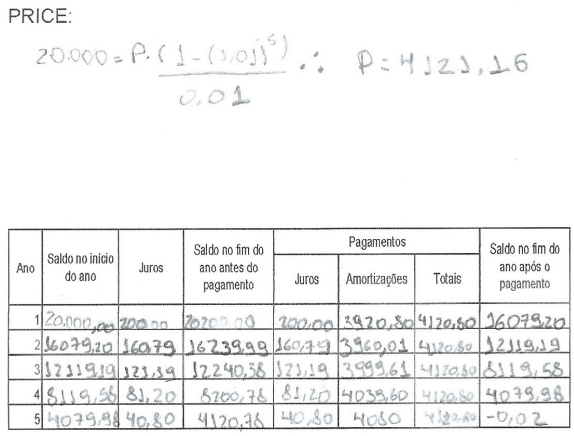
$$20000 = P \cdot 4,8534$$

$$P = 4120,80$$

T - J

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1	10000	200	10200	200	3920,8	4120,80	16079,2
2	16079,2	160,79	16239,99	160,79	3960,1	4120,80	12119,19
3	12119,19	121,19	12240,38	121,19	3999,61	4120,80	8119,58
4	8119,58	81,20	8200,78	81,20	4039,6	4120,80	4079,98
5	4079,98	40,80	4120,78	40,8	4080	4120,80	0,02

Figura 57 – Resolução do Exercício 9 feita pelo Aluno F


PRICE:

$$20.000 = P \cdot \frac{(1-(1,01)^{-5})}{0.01} \therefore P = 4121,16$$

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1	20.000,00	200,00	20200,00	200,00	3920,80	4120,80	16079,20
2	16079,20	160,79	16239,99	160,79	3960,01	4120,80	12119,19
3	12119,19	121,19	12240,38	121,19	3999,61	4120,80	8119,58
4	8119,58	81,20	8200,78	81,20	4039,60	4120,80	4079,98
5	4079,98	40,80	4120,78	40,80	4080	4120,80	-0,02

Ao final, solicitamos aos alunos que trouxessem um notebook para a próxima aula, caso pudessem.

4.4.8 Oitava Aula

Nessa aula, voltamos à razão da nossa dissertação e apresentamos dois problemas para serem resolvidos pelos alunos. Mas, diferente da aula anterior, onde o aluno aprendeu o processo que estabelece o cálculo passo a passo de cada uma das tabelas PRICE e SAC manualmente, dessa vez vamos fazer uso de uma planilha eletrônica. A que escolhemos foi a Excel.

Evidentemente, o ideal é que todos os alunos tenham um computador ou notebook para poder trabalhar, por isso, uma sugestão que deixamos para o professor que for usar nossa ideia é que, caso os alunos não tenham um notebook próprio, que sejam levados para a sala de informática da escola.

Portanto, para encerrar nosso estudo de Matemática Financeira, no final dessa aula, nosso aluno deverá saber fazer uso de uma ferramenta de enorme valor para fazer cálculos de financiamentos, que é a planilha excel, dentro dos sistemas PRICE e SAC, os dois mais comuns no sistema financeiro.

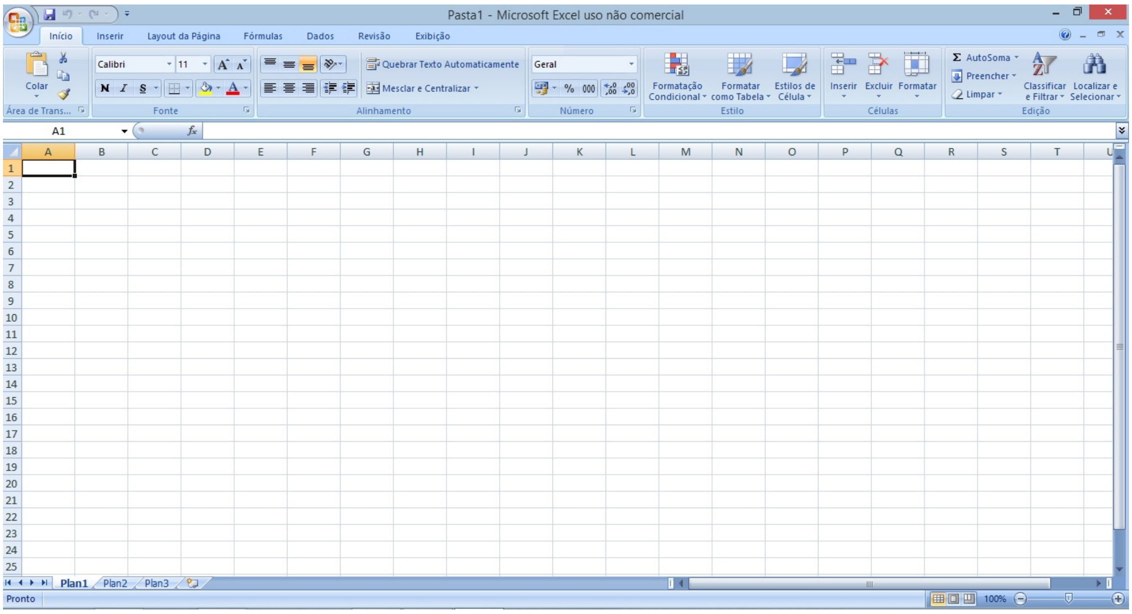
Tivemos o cuidado de conduzir essa aula passo a passo, da mesma forma que a anterior, mostrando como escrever o valor em cada célula da planilha, ensinando os comandos para se colocar fórmulas, e como espalhar repetições por todas as linhas da tabela. Esse cuidado deve ser tomado para que desperte e motive a atenção dos alunos. Além disso, o professor deve tomar o devido cuidado com os comandos necessários e a simbologia própria da planilha, que seguem uma lógica própria.

Eis o primeiro problema:

Problema 10. *Para comprar um carro, vou dar uma entrada e fazer um financiamento do restante. Vou financiar o valor de R$30.000,00. Os juros são de 1,2% a.m. e o prazo é de 36 meses. Calcule o valor das parcelas nos dois sistemas que aprendemos: PRICE e SAC.*

Vamos considerar como ponto de partida para resolver esse problema, a tabela excel aberta.

Figura 58 – Planilha Excel no estado inicial, após a abertura

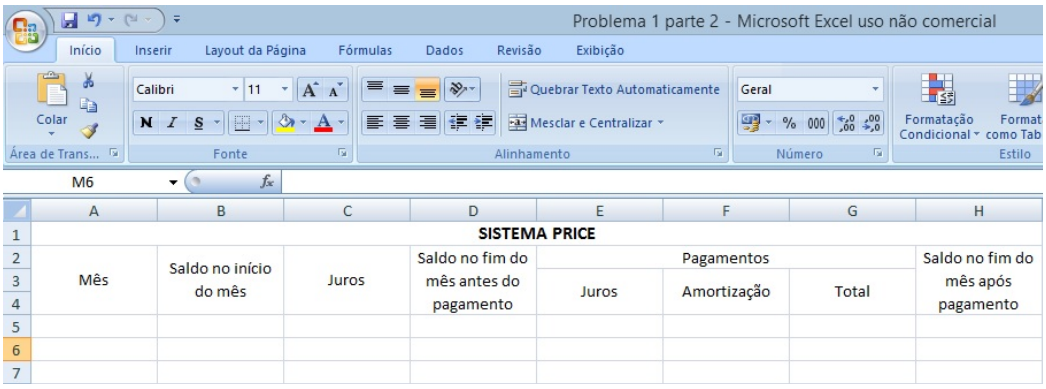


Fonte: PRODUZIDO PELO PRÓPRIO AUTOR

Com o uso do data show, projetamos essa planilha, colocamos um aluno para dar os comandos e os demais alunos seguiam passo a passo. Nossas orientações tiveram a seguinte ordem:

- Preenchemos o cabeçalho de cada coluna da tabela, fazendo os ajustes do tipo, negrito, largura da coluna, mesclar e centralizar, quebra automática, e outros que julgar necessário, conforme a Figura 59 (usamos 15 na largura da coluna). Esteticamente o professor deve escolher o que lhe for melhor. O importante é manter as colunas com as informações que propomos. Acreditamos que da forma que está, oferece um bom entendimento de todo sistema.

Figura 59 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Cabeçalho



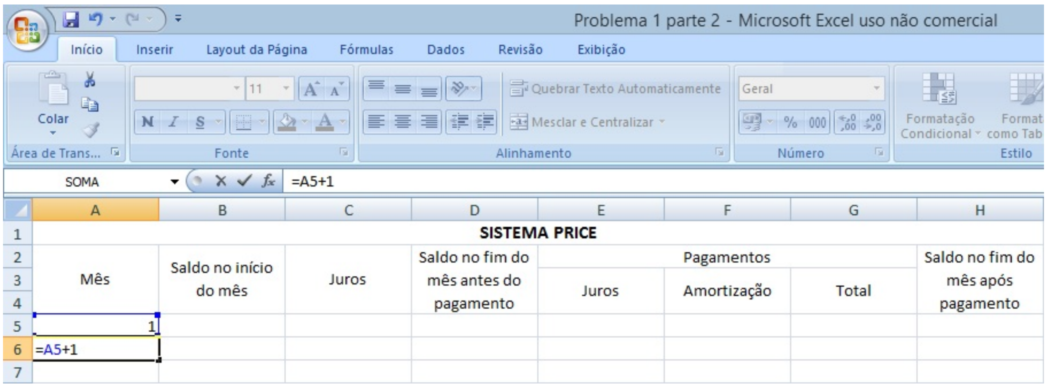
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- Selecionamos da coluna A até a H, copiamos e colamos na planilha 2 (plan 2, no canto inferior esquerdo da tela). Nela, depois de colar, trocamos o nome PRICE por

SAC. Vamos fazer a tabela do financiamento nos dois sistemas.

- Com o cursor na célula A5 escrevemos "1" e clicamos *enter* e, na célula A6, escrevemos a primeira fórmula da tabela. Ensinamos aos alunos que começamos uma fórmula sempre com o sinal de $=$ e, com o cursor nessa célula escrevemos $= A5+1$, finalizando com *enter*, sempre. Todos entenderam que queríamos numerar os meses, sem maiores problemas.

Figura 60 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Formatação da células

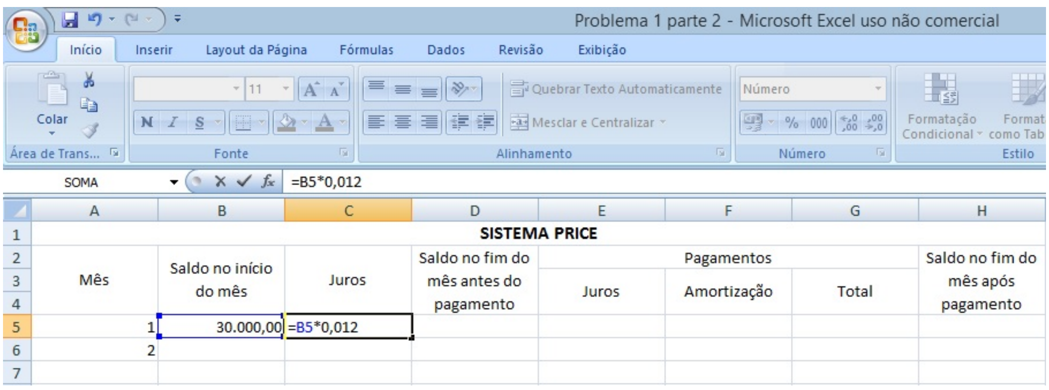


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- Selecionamos de B5 a H5 e formatamos as células no modo Moeda - sem símbolo, e preenchemos B5 com o valor 30000.

- A segunda fórmula da tabela deve ser colocada em C5. No entanto, achamos de muita importância que o aluno responda qual é essa fórmula. Ele deve observar que está na coluna "Juro" e se lembrar como é feito o cálculo. Sendo assim, também sem muita dificuldades, os alunos, responderam o que, na célula, deveria ser escrito da forma: $= B5 * 0,012$, como mostra a Figura 61.

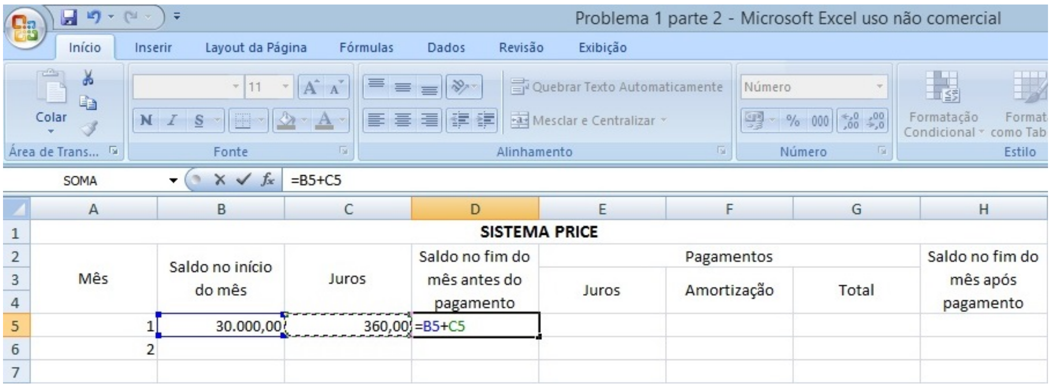
Figura 61 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Inserção de dados



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- Continuando, com o cursor na célula D5, também facilmente percebido pelos alunos, escreve-se $B5 + C5$, que equivale ao saldo no fim do mês antes do pagamento, ou seja, o valor da dívida mais o juro.

Figura 62 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Saldo inicial, juro e saldo no 1º pagamento

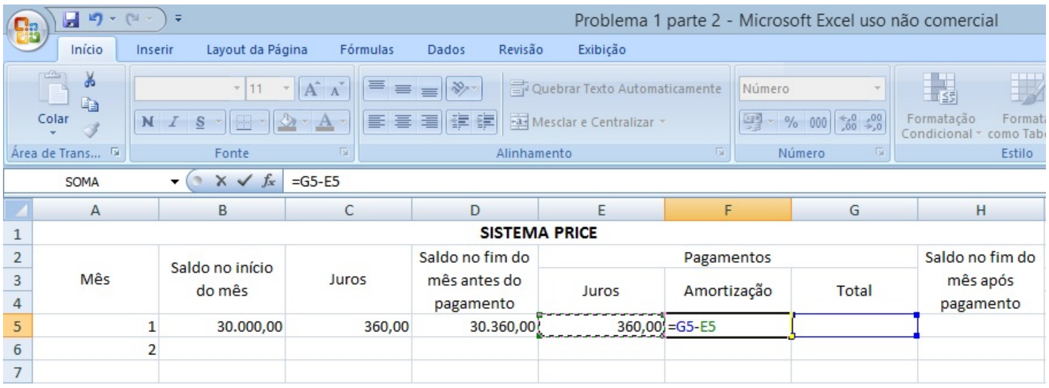


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- Na próxima célula, a E5, apenas transportamos o valor de C5. Com o cursor em E5, o comando é $= C5$ e *enter*, sempre.

- Para preencher a próxima célula, devemos lembrar que, no sistema PRICE, a amortização é dada pela diferença entre o valor da prestação e os juros. Assim, com o cursor na F5, escreve-se $= G5 - E5$.

Figura 63 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Amortização no 1º pagamento



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- Aprendemos que, no sistema PRICE, o valor dos pagamentos são constantes. Devemos, então, calcular esse valor conforme aprendemos nas séries uniformes. Tem-se

$$A = P \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$30000 = P \cdot \frac{1 - 1,012^{-36}}{0,012}$$

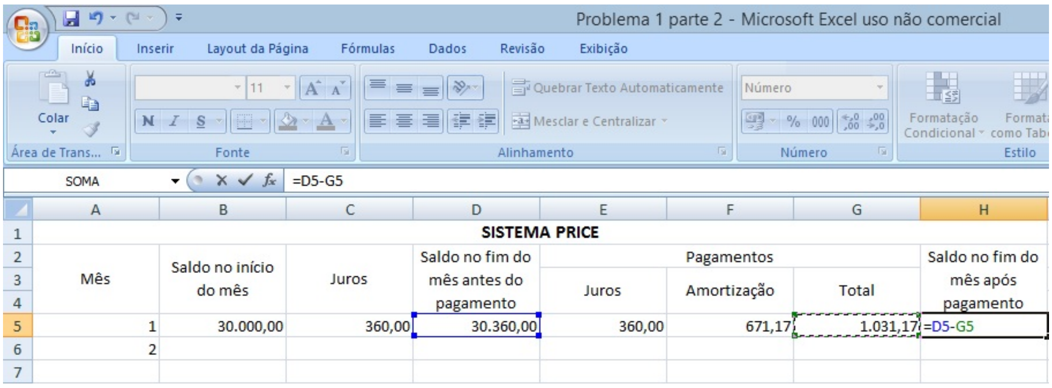
$$P = \frac{30000 \cdot 0,012}{1 - 1,012^{-36}}$$

$$P = 1031,17$$

Preenchemos a célula G5 com $= 1031,17$. Como uma fórmula, não esqueça de escrever o símbolo de igualdade $(=)$.

- Na célula H5, basta preencher com $D5 - G5$. Esse preenchimento foi feito, também, sem a necessidade de muitas explicações. Veja a figura:

Figura 64 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Valor a ser pago no 1º mês



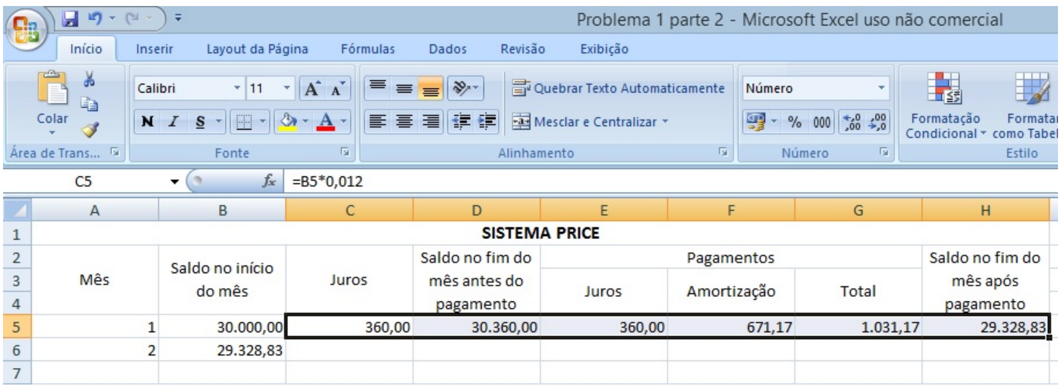
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- Passamos para a linha 6, começando com B6. É bom lembrar que A6 foi preenchido logo no início. O resultado de B6 é o transporte da dívida do fim do período anterior. Esse valor está em H5. Assim, em B6, vamos escrever $= H5$.

- A partir desse momento, os comando que queremos são os mesmos que estão nas células acima. Por isso, para que não façamos tudo novamente, basta selecionar as células acima, da A5 até a H5 e, com a mouse no canto inferior direito da seleção feita, no momento que ele mudar de forma, clicar e arrastar para a próxima linha.

  Ficará assim:

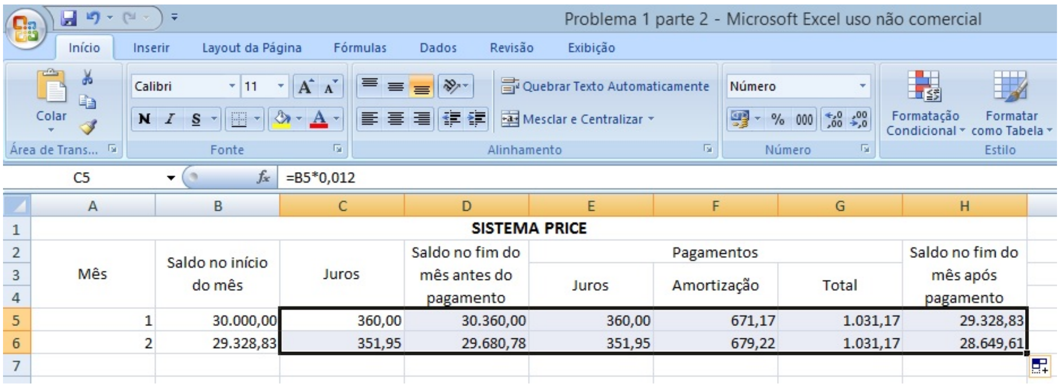
Figura 65 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Saldo no final do 1º mês



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

e, em seguida, assim:

Figura 66 – Tabela PRICE elaborada em Planilha Excel - Cálculo para os meses subsequentes



Mês	Saldo no início do mês	Juros	Saldo no fim do mês antes do pagamento	Pagamentos Juros	Amortização	Total	Saldo no fim do mês após pagamento
1	30.000,00	360,00	30.360,00	360,00	671,17	1.031,17	29.328,83
2	29.328,83	351,95	29.680,78	351,95	679,22	1.031,17	28.649,61

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Finalmente, como o que queremos é até o mês 36, repetimos o procedimento anterior, selecionando a linha toda e arrastando até a linha 40. E pronto.

Nesse momento, observamos uma reação de surpresa e satisfação no rosto do aluno que muito nos agradou.

O toque estético como grades, cor de letra e outros detalhes ficam a critério de cada um.

Resta, agora, fazer o cálculo do financiamento na tabela SAC. Temos o cabeçalho colado na pasta 2. Iniciamos a partir desse ponto.

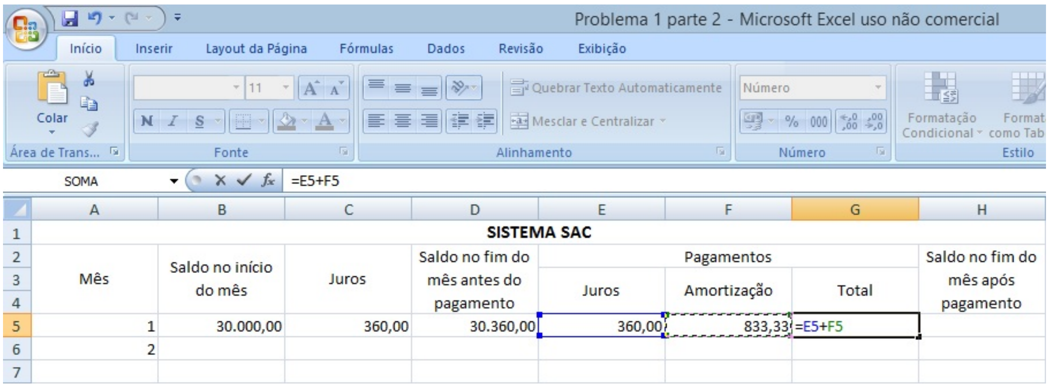
- O procedimento é o mesmo até a célula E5, basta seguir os mesmos passos da tabela PRICE. Para fazer a F5, lembramos aos alunos que a amortização no sistema SAC é calculada pela razão entre o principal e o prazo da operação. Como o prazo da nossa operação é de 36 meses, então, a amortização será de

$$\frac{30000}{36} = 833,33$$

Preenchemos F5 com $= 833,33$. Basicamente, esta é a única diferença de procedimento entre as tabelas PRICE e SAC, para o cálculo do financiamento.

- Em seguida, na célula G5 escrevemos $= E5 + F5$, como mostra a figura:

Figura 67 – Tabela SAC elaborada em Planilha Excel



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

- As células H5 e B6 são obtidas da mesma forma que no sistema PRICE.
- As células C6 até H6, também são obtidas como no sistema PRICE, selecionando da C5 a H5 e arrastando para a linha 6.
- Finalmente, assim como na tabela PRICE, selecionamos a linha 6 e arrastamos até a linha 40.

As atividades a partir daí ficaram sem controle quanto a valores de financiamentos a serem feitos. Cada aluno tinha seu próprio interesse, entre eles, casa e carro, e as atividades passaram a ocorrer de acordo com as escolhas de cada aluno. Nossa postura foi de tirar dúvidas e orientar os alunos.

4.5 APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO PARA OS ALUNOS

Todo o nosso percurso de pesquisa foi gravado em áudio e vídeo, com a devida autorização dos alunos como consta no Apêndice A. A intenção dessas gravações estava em compor uma memória de recorrência que nos auxiliasse em nossas anotações em diário de campo para futuro relato da pesquisa.

Assim sendo, ao revisarmos as aulas, percebemos que poderíamos enriquecer o trabalho com mais dados. Na ocasião, pensamos num questionário que abordasse o processo de aprendizagem da Matemática Financeira em acordo com o que planejamos para as aulas. O objetivo fim desse questionário era verificar a motivação dos alunos para o aprendizado desse conteúdo. Entretanto, o fio condutor da construção desse instrumento estava pautado na possibilidade de orientação daquele que, futuramente, desejar utilizar nossa ideia para planejar aulas desse assunto.

Com isso, o questionário que aplicamos é composto de dez questões que priorizaram a opinião individual de cada um dos alunos voluntários. Esse instrumento está em sua íntegra no Apêndice C.

De forma geral, gostaríamos de perceber o que os alunos compreenderam do algoritmo das setas, do uso da planilha, da calculadora científica e da movimentação do dinheiro no tempo, mas, acima de tudo, reconhecer como os alunos se sentiram motivados a compreender o conteúdo de Matemática Financeira a partir de nossa proposta de abordagem de problemas tirados do dia a dia como a análise de folhetos de lojas. Também preocupamo-nos com os anseios dos próprios alunos em financiamentos de curto e longo prazo.

Na seção seguinte, passamos a uma análise mais detalhada das respostas dos alunos às questões do questionário. Reservamos um dia específico para o seu preenchimento, que ocorreu depois das aulas. No dia marcado, dos dez alunos participantes, três não compareceram. Posteriormente, tentamos que esses três alunos respondessem, mas, devido aos compromissos individuais, apenas um deles pôde preencher o questionário. Com isso, nosso universo de respostas ao questionário é de oito participantes.

Para respeitarmos o que foi previamente acordado com os alunos no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) que consta do Apêndice A, vamos identificar os alunos por A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Assim, também, os depoimentos dos alunos foram transcritos tal qual eles escreveram, sem nossa interferência.

4.6 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Optamos por uma representação gráfica para apresentação das respostas a algumas questões, ainda que nosso universo não seja representativo. No nosso entendimento, tal formatação pode dar uma leitura rápida do que colhemos nas respostas.

O intuito primeiro de nossa análise nesse questionário é contribuir com aqueles que desejam tomar caminho semelhante ao nosso em suas aulas de Matemática Financeira e tomarem problemas da realidade do aluno como motivadores para a aprendizagem de tal assunto.

Para análise, faremos um apanhado das respostas que os alunos apresentaram para cada uma das questões, não perdendo o foco em nosso objetivo de pesquisa. Também não faremos a análise das respostas obedecendo a ordem dada no instrumento de coleta. Tomaremos primeiramente algumas questões que nos permitam apresentação gráfica das respostas.

Para uma disposição didática, numeramos de I a IX nossa análise, agrupando perguntas e respostas de forma a compor uma análise pormenorizada do instrumento aplicado.

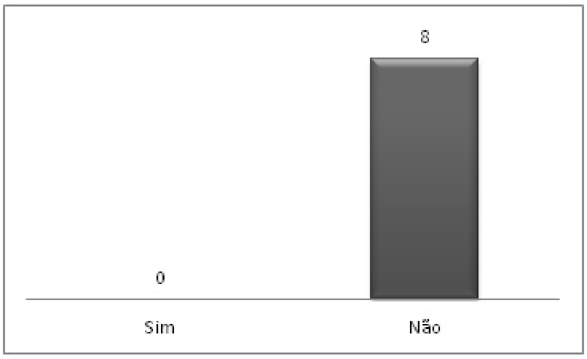
Assim sendo, obtivemos os seguintes dados:

(I) Sobre a questão número 5 do questionário, que estava dividida em oito partes, como segue a análise:

QUESTÃO 5: Responda as perguntas abaixo tomando como referência os problemas que resolveu durante nossos encontros onde abordamos o estudo da Matemática Financeira:

a) Você sabia calcular o valor das prestações anunciadas no folheto de uma grande loja, quando estas apresentavam juros?

Figura 68 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-a



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Nenhum dos oito alunos afirmou que saberia calcular as prestações de um folheto. Nós transcrevemos a resposta do Aluno F, do Aluno G e do Aluno I que reforçam o desconhecimento do processo:

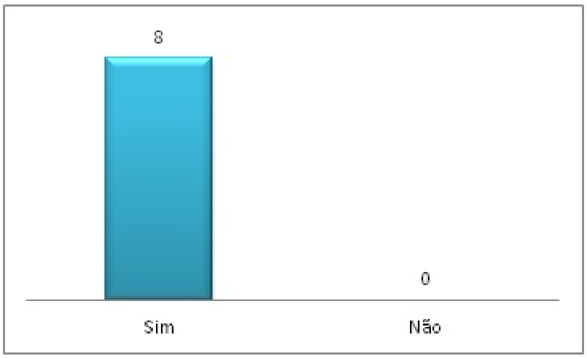
> "Eu achava que sabia, mas eu não me daria conta que não podemos trabalhar valores em épocas distintas que é o principal foco da Matemática Financeira." (Aluno F)

> "Entendi que independente da forma de pagamento: com ou sem juros, parcelado ou à vista, a empresa nunca deixará de ganhar sua parte por completo." (Aluno G)

> "Aparentemente, os folhetos mostravam produtos em que comprá-los à vista ou à prazo seria indiferente. Porém, quando se calcula os juros de certos produtos é notório que à vista pode ser mais vantajoso. Se o vendedor oferecer um desconto, devido aos juros que iriam ser pagos na venda à prazo." (Aluno I)

b) Em alguns momentos de nossos encontros, comentamos sobre somar as parcelas para encontrarmos o valor da dívida. Você compreendeu o que falamos a esse respeito?

Figura 69 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-b



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Todos os oito alunos afirmaram ter compreendido o processo para encontrar o valor de uma dívida, não somando as parcelas, mas os depoimentos dos alunos A, B, C, F, G e J são significativos e mostram a riqueza do processo que percorremos, trazendo a cada um:

> "Esse conhecimento é indispensável quando se pensa em situacionalidade e tomada de decisão, pois te dá uma visão sobre quanto o dinheiro valia, valerá ou está valendo." (Aluno A)

> "Eu entendi que é possível descobrir qual seria a melhor forma para pagar uma dívida, seja a vista ou a prazo." (Aluno B)

> "Que deve ser levado em conta a movimentação do dinheiro no tempo, pois isso pode alterar muito seu valor final." (Aluno C)

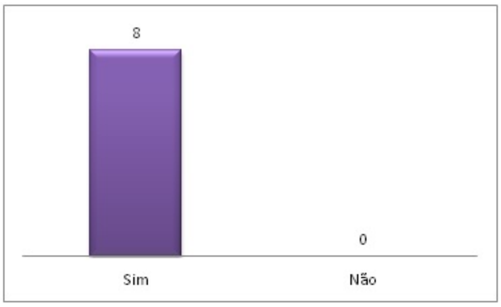
> "Eu compreendi que o dinheiro que eu possuo hoje não tem o mesmo valor amanhã, pois a tendência é sua desvalorização ao longo do tempo." (Aluno F)

> "Aprendi que não basta apenas somar as parcelas, temos que transferi-las todas para um mesmo momento no tempo, para aí sim fazer a soma." (Aluno G)

> "O dinheiro tem um valor específico em cada tempo, por isso não se pode trabalhar com dois valores em épocas diferentes." (Aluno J)

c) Você aprendeu como se faz isso?

Figura 70 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-c



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Os depoimentos dos alunos indicam o valor que deve ser dado ao algoritmo das setas e à movimentação do dinheiro no tempo, tal como fizemos e propusemos em nosso trabalho, inspirados pela aula do Prof. Morgado [6] e pela dissertação de Rosa Novellino [10].

> "O uso de técnicas como jogar o dinheiro para frente ou para trás é a melhor forma e o recurso que nós sabemos, o algoritmo, em muito ajuda." (Aluno A)

> "Só é necessário "trazer" o valor a ser pago no futuro para o dia de hoje e comparar qual sairia mais em conta." (Aluno B)

> "Deve-se levar em conta o valor, que o dinheiro toma em suas respectivas épocas e transformá-lo em uma forma equivalente para todas as épocas e somá-lo." (Aluno C)

> "Eu devo passar todos os valores que eu estou trabalhando para uma mesma época, só então eu posso somá-los para saber o valor do produto na época." (Aluno F)

> "Com os diversos exercícios passados foi possível com que adquiríssemos melhor o jeito para fazer as transformações necessárias." (Aluno G)

> "Como não se pode somar quantias de tempos diferentes, deve-se primeiro transferir todas as parcelas para um determinado tempo, feito isso pode-se somá-las." (Aluno H)

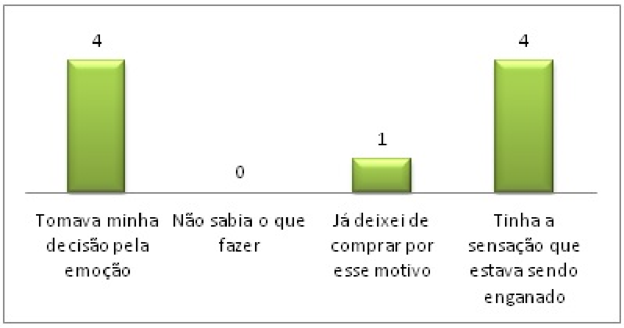
> "Como foi dito, é necessário pegar o tempo de cada parcela, pois o tempo influencia no valor final da dívida. É necessário pegar cada parcela e jogá-la no tempo atual, por exemplo, e somá-las." (Aluno I)

> "Precisamos sempre transformar os valores para uma mesma época não se pode trabalhar questões assim em tempos diferentes." (Aluno J)

Em contrapartida, as respostas dos alunos aos itens (d) e (e), a nosso ver, dão maior respaldo ao que pensamos ser a preconcepção daqueles que desconhecem aquilo que se estuda em Matemática Financeira. Assim:

d) Quanto a decisão sobre uma compra à vista ou a prazo de um produto que te interessa, como era feita?

Figura 71 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-d



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Demos destaque às seguintes afirmações:

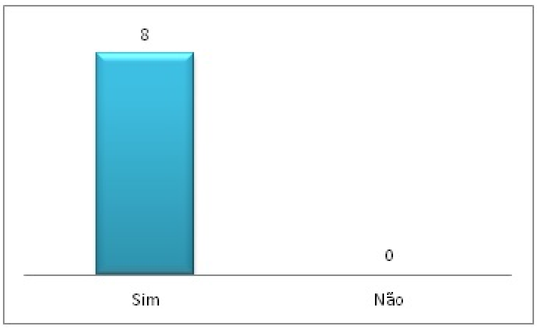
> "Não fazia os cálculos necessários, analisava de maneira superficial e "a olho nu" tomava a decisão por emoção, o que me aparentava ser melhor." (Aluno A)

> "Antes eu me guiava pela intuição, ou seja, a que parecia melhor, mais em conta, eu adorava como forma de pagamento. Porém, agora já tenho noção do cálculo que deve ser feito." (Aluno H)

> "Atualmente tenho a certeza de que o valor à vista sempre será mais barato, sendo a melhor forma de se comprar o produto." (Aluno J)

e) Alguma vez somou as parcelas anunciadas a prazo para comparar com o preço do mesmo produto à vista, no modelo de juro composto?

Figura 72 – Tabulação das respostas dos alunos no item 5-e



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Sendo que todos afirmaram ter somado parcelas em compras a prazo, destacamos as explicações dos seguintes alunos:

> "Sim, aliás o fazia sempre e me sentia indignado. Talvez minha indignação estivesse certa, porém em valores reais e argumentos inválidos." (Aluno A)

> "Agora eu sei que não devemos comprar apenas por parecer ser a melhor oferta, temos realmente provar que é melhor." (Aluno G)

> "Percebi que não é apenas multiplicar as parcelas pelo número de prestações, pois o dinheiro tem seu valor dependendo do tempo em que ele é analisado." (Aluno I)

> "Isso é o que engana os consumidores, pois a soma à prazo dará igual ao preço à vista, porém nestes casos os juros já está embutido no valor. Por isso, comprando-se à vista acaba ganhando-se desconto." (Aluno J)

Ao questionarmos cada aluno se ele *(f) Sabe responder agora, se este procedimento é ou não correto?* ou *(g) Sobre investimentos, saberia calcular o valor de um investimento que pretende fazer, com depósitos mensais fixos durante um período de tempo?* ou ao retomarmos o que *(h) Falamos sobre as tabelas mais usadas para financiamento no momento em nosso país: a Tabela PRICE e a Tabela SAC. Você saberia fazer a simulação de um financiamento de seu interesse usando essas tabelas?*, enfatizamos o final do processo, como já motivados pelo aprendizado. Interessava-nos compreender se os alunos assimilaram o que trabalhamos sobre Matemática Financeira e os procedimentos utilizados.

Sobretudo, desejávamos ter respostas sólidas às possibilidades de trabalho com financiamento e tabelas de financiamento que indiquem aos que desejam enveredar por situações semelhantes às nossas em suas salas de aula aquilo que nossos alunos perceberam.

A Tabela 6 a seguir, apresenta todas as respostas dos alunos aos itens *f, g* e *h* da questão 5 do questionário.

Tabela 6 – Respostas dos alunos aos itens *f, g* e *h*, da questão 5 do questionário

	f) Sabe responder agora, se este procedimento é ou não correto?	g) Sobre investimentos, saberia calcular o valor de um investimento que pretende fazer, com depósitos mensais fixos durante um período de tempo?	h) Falamos sobre as tabelas mais usadas para financiamento no momento em nosso país: a Tabela PRICE e a Tabela SAC. Você saberia fazer a simulação de um financiamento de seu interesse usando essas tabelas?
Aluno A	Agora, sei responder e relacionar as transformações que o dinheiro sofre no decorrer do tempo. O "x" de hoje, a uma taxa "i", após "t" meses não valerá mais "x".	Esse cálculo poderia ser feito de maneira manual, ainda que se empregasse muito tempo, porém como uma ferramenta para os estudos, reforçando a eficácia no ensino, desenvolveu-se uma fórmula.	Com a ajuda de recursos eletrônicos, como a planilha Excel, simularia um modelo que, inclusive, pegaria fatos gerais.
Aluno B	Eu consegui entender que ao saber a forma como os cálculos são feitos, eu sou capaz de descobrir se eu estou ou não sendo enganado.	Uma vez sabendo calcular o investimento a ser feito, se é capaz de conseguir controlar melhor o dinheiro, possibilitando no futuro a compra de um bem material mais caro.	A utilização de uma dessas tabelas garante um maior controle sobre os gastos do indivíduo.
Aluno C	É correto, pois ele explica o fato de respeita o valor que o capital assumirá.	Esse é o fato que provoca grande curiosidade neste assunto, com determinadas parcelas e taxas eu posso me programar para uma quantia futura.	Elas demonstram detalhadamente como os valores de um financiamento são achados.
Aluno D	Valores de épocas diferentes nunca devem ser somados afim de achar o preço total a ser pago por um produto.	Baseado nos cálculos de juros compostos devemos passar os valores de cada mês para uma mesma época.	A tabela Price basicamente é caracterizada pelo pagamento de uma parcela imutável e a tabela SAC mantém a amortização constante.
Aluno E	O procedimento é correto, pois testamos fazer utilizando-se encartes de lojas e a maioria dos resultados deu igual ao que este propunha.	Saberia por causa das aulas e da maneira como nos foi ensinado.	Essa matéria nos foi ensinada em sala e por isso eu teria uma certa tranquilidade ao fazer essas tabelas.
Aluno F	Pois está somando valores de épocas diferentes.	Utilizando a fórmula que foi. Ministrada em aula, pode-se descobrir facilmente o valor do investimento.	Através da planilha do Excel, montando as fórmulas e fazendo-as se aplicarem em todas as lacunas.
Aluno G	Basicamente, entendi que é algo simples, porém não é tão trivial como eu pensava. O dinheiro não tem o mesmo valor em época diferentes, acho que isso é a base da matemática financeira.	O investimento se dá através das taxas de juros que são aplicadas, normalmente, todo mês, fazendo render um dinheiro inicialmente investido, por exemplo, em uma poupança.	Ficou um pouco confuso a diferença entre a tabela PRICE e a SAC, pois foi abordado em apenas um encontro. Não é que não tenha entendido, mas não ficou fixo em minha mente.
Aluno H	Este processo não é correto, pois, como já dito anteriormente, cada valor é diferente de acordo com sua época.	Esta foi a operação que mais gostei, aprendi a calcular quanto juntar por mês durante um determinado tempo para obter ao final uma quantia desejada.	Operações muito grandes, com longos meses, por exemplo, podem ser resolvidas de maneira simples ao se jogar a fórmula na tabela.

Passando à parte que questionamos dos alunos quanto ao seu interesse pelo assunto, especificamente se ficaram motivados a aprender mais sobre Matemática Financeira, a primeira questão do questionário tomava uma prévia da experiência dos alunos com relação a esse assunto:

(II) *QUESTÃO 01: O que você entendia como Matemática Financeira antes de trabalharmos os conteúdos propostos?*

Ressaltamos as argumentações dos Alunos H, G e J:

> “Eu acreditava que Matemática Financeira era apenas os juros simples ou compostos que se aplicavam sobre um valor, com o único objetivo de achar o montante ou resolver alguns problemas isolados, sem muita ligação com situações ou dia-a-dia.” (Aluno H)

> “Para mim matemática financeira era mais ligada à questões sobre bolsa de valores.” (Aluno G)

> “Eu achava que tinha uma noção devido a questões de juros compostos que já havia feito, porém não sabia muito sobre sua aplicabilidade no dia a dia.” (Aluno J)

As opiniões dos alunos estão num senso comum daquelas que temos presenciado ao longo de nossa experiência docente. Na maioria das vezes, tanto o que é dito sobre Matemática Financeira quanto a prática escolar desse assunto se resumem a estudos de juro simples e composto e regras de três, sem conexão com a realidade do assunto.

A questão número 2 pedia aos alunos que nos indicasse sua expectativa com o tema que propusemos. Queríamos ter a noção da percepção deles do que estuda a Matemática Financeira antes de apresentarmos formalmente nossa proposta.

(III) *QUESTÃO 02: Qual era a sua expectativa com o tema proposto para Matemática Financeira? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.*

> “Minha expectativa era poder tirar do fictício, nos livros, e trazer à tona coisas práticas da minha vida, do meu cotidiano e, caso explorado ou lesado, ter argumentos para poder questionar.” (Aluno A)

> “A expectativa que eu tinha é que eu ia aprender aquilo que eu já sabia de uma forma mais aprofundada. Entretanto, após começar as aulas, vi que o que seria ensinado era algo que eu poderia trazer para minha vida e que me possibilitaria entender muitas coisas a respeito do mercado.” (Aluno B)

> “Acreditava que iria aprender a como investir da melhor forma o meu dinheiro, não somente na bolsa de valores mas também em investimentos bancários, como a poupança e outros.” (Aluno G)

Como contraponto à questão anterior, propusemos na questão de número 3 do questionário uma análise do que tinha sido para eles o nosso estudo da Matemática Financeira. Notamos uma predominância de valorização do tema e do método que utilizamos.

(IV) *QUESTÃO 03: Tendo como referência os diversos conteúdos trabalhados em Matemática no Ensino Médio, faça um pequeno comentário especificamente sobre a Matemática Financeira que trabalhamos em sala. (Tome como referência o interesse desse assunto comparado com os outros)*

> “A Matemática Financeira trabalhada em sala é algo diferente do que é ensinada no E. M., pois ela é realmente algo que existe e eu posso usar na minha própria vida.” (Aluno B)

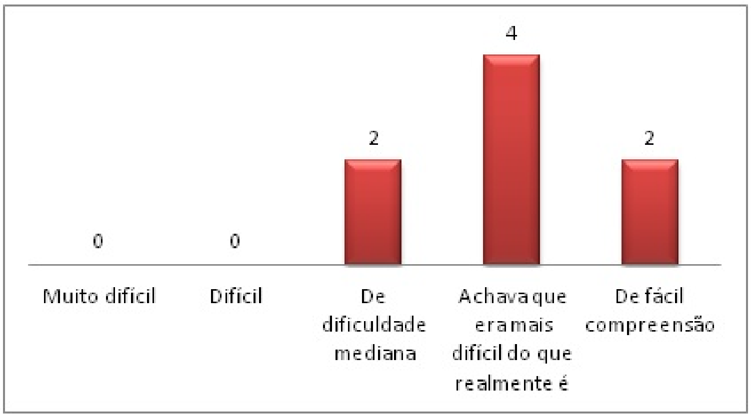
> “Durante as aulas sobre a matemática financeira, eu pude ampliar alguns conceitos que eu tinha sobre juros, dinheiro e investimentos. Além de descobrir como usar essa matemática financeira no dia-a-dia.” (Aluno H)

> “Aqui na EPCAR, em específico, a matemática financeira não é muito abordada na disciplina de matemática, pelo menos até o segundo ano. O assunto é visto, na minha opinião, de forma superficial nas escolas e mais é visto esse tema no ensino fundamental.” (Aluno I)

> “Este assunto é de altíssimo interesse por todos e durante as aulas que tivemos conseguimos aprender ao máximo, entendendo assim como funciona o juros no mercado, o quanto investir para se obter tal quantia, etc.” (Aluno J)

(V) Na questão 4, questionamos os alunos qual o grau de dificuldade que eles atribuíam ao conteúdo de matemática financeira. Demos as opções: *“muito difícil”, “difícil”, “de dificuldade mediana”, “achava que era mais difícil do que realmente é”* e *“de fácil compreensão”*. Logo após, pedimos que fizessem um pequeno comentário que pudesse justificar sua escolha. Dos oito alunos que responderam ao questionário, quatro indicaram *“achava que era mais difícil do que realmente é”*, dois sinalizaram ser *“de dificuldade mediana”* e dois marcaram que é “de fácil compreensão”.

Figura 73 – Tabulação das respostas dos alunos no item 4



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Entendemos que tais indicações feitas pelos alunos não nos permite inferir nada sobre suas percepções quanto a dificuldade ou não com o assunto de Matemática Financeira, entretanto, os alunos apontam que o método utilizado foi de grande valor como podemos ver nos relatos dos Alunos H, I, C e J.

> "O método de resolução das questões, facilitou muito na resolução. Com isso, todas as questões, por mais complexas que fossem, se tornavam mais fáceis." (Aluno H)

> "A Matemática Financeira não é difícil, pelo contrário, ela é um assunto que pode ter suas questões solucionadas de maneira metódica, facilitando, na maioria das vezes, a resolução." (Aluno I)

> "Quando acompanha o valor cronologicamente na ordem se torna simples, ainda mais com as fórmulas como mecanismos que facilitam e simplificam as contas." (Aluno C)

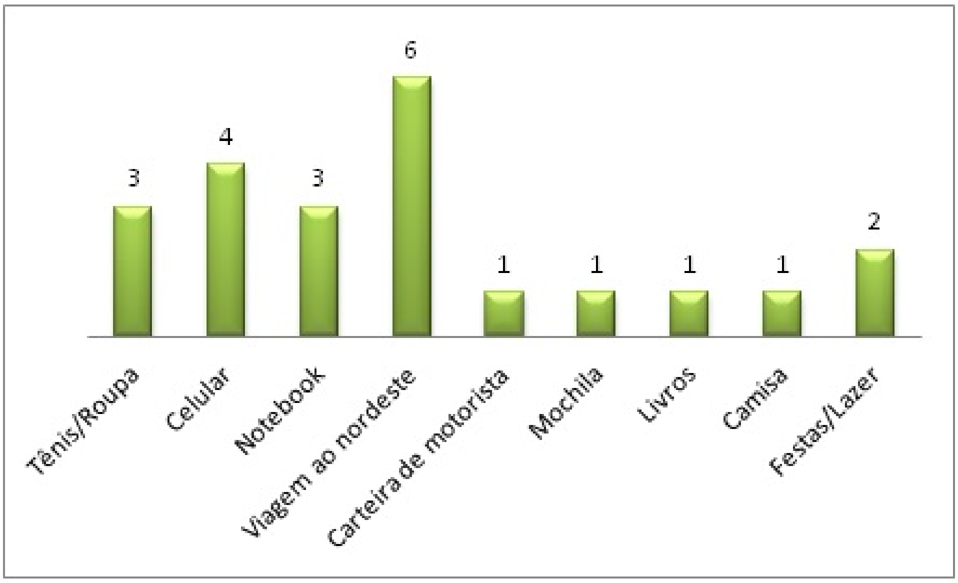
> "A princípio entender as variações que ocorriam eram difíceis, porém depois de se entender o método para se resolver as questões fica de fácil compreensão, resolvendo questões aparentemente grandes de maneira rápida." (Aluno J)

A segunda metade do questionário estava voltada à individualidade dos alunos em saber sobre seus anseios por futuros financiamentos, a longo e a curto prazo, sobre a contribuição que a resolução dos problemas resolvidos em sala e, por fim, sobre o uso da calculadora científica e sobre as tabelas PRICE e SAC juntamente com a planilha eletrônica.

(VI) Pedimos aos alunos, na questão 6, que listassem seus desejos atuais e nos próximos oito anos. Na questão seguinte, perguntamos, a respeito desses mesmos itens, se haveria a possibilidade de financiamento. A esse respeito, gostaríamos de perceber se eles fariam financiamentos e como nossas aulas contribuíram para isso.

O Gráfico 74 apresenta os itens listados por todos os oito alunos na questão 6, com suas respectivas quantidades, no período de até um ano:

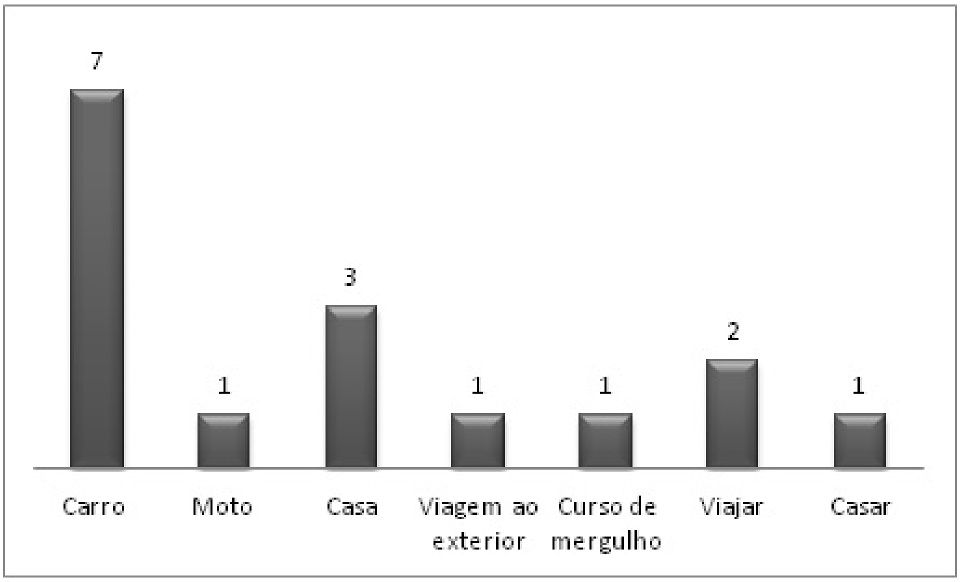
Figura 74 – Tabulação dos desejos dos alunos no período de até um ano



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O Gráfico 75 apresenta os itens listados por todos os oito alunos na questão 7, com suas respectivas quantidades, que apontam necessidade de financiamento para os próximos oito anos.

Figura 75 – Tabulação dos desejos dos alunos que indicam itens que necessitam de financiamento



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Sobre a possibilidade de financiamento de algum dos itens e a contribuição das aulas para entendimento desse financiamento, apresentamos as respostas dos alunos.

> "Sim. Acredito ser válido usar as relações e mentalidade "dinheiro X tempo" para que as previsões se encaixem e nada seja imprevisto no final do financiamento, principalmente porque alguns envolvem bastante dinheiro." (Aluno A)
>
> "Sim, o carro. Eu pretendo fazer o financiamento e para poder facilitar meu controle a respeito dos gastos, e assim poder usar o dinheiro de uma forma melhor, me possibilitando adquirir outros bens." (Aluno B)
>
> "A casa e o carro por apresentarem preços elevados, necessitariam de um financiamento. Eu pretendo fazer um financiamento da casa através da tabela SAC para manter a amortização constante." (Aluno F)
>
> "O carro e a viagem necessitam de um financiamento por serem muito caros, porém pretendo juntar e investir meu dinheiro para poder pagar essas despesas." (Aluno H)
>
> "O carro necessitaria de um financiamento e eu somente o faria depois de utilizar meus conhecimentos adquiridos nessas aulas para poder qual o melhor modo de financiamento e a melhor empresa para fazer o mesmo." (Aluno G)
>
> "Nos encontros foram abordados temas do cotidiano, como compra de objetos do dia-a-dia, até a residências de altos valores. Apesar de saber que é mais vantajoso comprar à vista, eu financio até objetos com valores menores, pois nunca estou com dinheiro em mãos e aparentemente sempre é mais fácil parcelar." (Aluno I)
>
> "Os de mais longo prazo necessitam financiamento, pretendo fazê-los de maneira que levem o menor tempo possível sem parcelas de grandes valores ou desvantajosas, assunto tratado nas aulas de maneira destacada, pois como leva tempo é preciso saber como o dinheiro poderá alterar-se." (Aluno C)
>
> "Sim. Sabendo disso, faço o cálculo do quanto preciso juntar hoje, para que daqui a 8 anos consigo comprá-los à vista, economizando dinheiro sobre o juros." (Aluno J)

(VII) Na questão 8, sugerimos uma revisão dos tipos de problemas que nos envolvemos em sala de aula. *Nos nossos encontros foram apresentados problemas que são pouco comuns em muitos livros didáticos. Foram levados para a sala problemas que estão presentes no dia a dia de vocês: o folheto do Magazine Luiza no qual trabalhamos "o problema do Iphone" fazendo uma crítica à prática apresentada, o cálculo das* *prestações de produtos anunciados com juros, o cálculo do investimento na poupança e problemas de financiamento, foram alguns exemplos. Faça um comentário sobre a contribuição que este tipo de problema trouxe para o seu aprendizado da Matemática Financeira. Ressalte se é ou não indiferente aprender este assunto trabalhando com modelos do tipo citado ou com modelos que abordam situações que estão fora da realidade de vocês.*

As respostas dos alunos a essa questão são fatores motivadores para nós mesmos na continuidade com a repercussão dessa pesquisa, mas entendemos que podem ser para aqueles que se interessarem por nossa pesquisa e sua aplicação em sala. Selecionamos as respostas dos alunos A, B e H para respaldar nossa observação.

> "Usar fatos de nosso cotidiano não são só para iniciar quanto para concluir é uma boa maneira de se aplicar a didática. Se, num primeiro momento, desperta-se o interesse do aluno, num segundo confirma-se que aquilo é prático, é real para vida dele. É claro que, para massificar, nem sempre teremos recursos do cotidiano, aí sim vale-se a pena." (Aluno A)

> "Este tipo de problema é fundamental para quem quer realmente aprender Matemática Financeira, pois é dessa forma que muitos problemas na vida real surgem. Assim, abordar um problema desse na sala de aula garante uma maior visão de como os financiamentos, as prestações e os cálculos funcionam, possibilitando uma maior compreensão e uma maior esclarecimento desse assunto." (Aluno B)

> "Durante as aulas sobre a matemática financeira, eu pude ampliar alguns conceitos que eu tinha sobre juros, dinheiro e investimentos. Além de descobrir como usar essa matemática financeira no dia-a-dia." (Aluno H)

(VIII) A questão de número 9 referia-se à calculadora científica como ferramenta e seu uso para resolver alguns problemas. Inicialmente solicitamos que eles nos indicassem se já sabiam usar, se aprenderam a usar durante as aulas de Matemática Financeira, se achavam que é necessária para trabalhar o conteúdo ou se achavam desnecessário seu uso. Para nós, a primeira resposta a essa questão foi surpreendente. Dos oito alunos, sete afirmaram ter aprendido a usar a calculadora científica durante as aulas de Matemática Financeira. Sinceramente, não esperávamos isso, tendo em vista que, pela inserção dos jovens num mundo permeado pelas tecnologias digitais, acreditávamos que isso se desse de maneira contrária. Unanimemente, todos foram favoráveis à necessidade do uso da calculadora científica para trabalhar o conteúdo de Matemática Financeira.

Figura 76 – Tabulação das respostas dos alunos quanto ao uso e necessidade da calculadora científica para problemas de Matemática Financeira

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Observamos mais atentamente os relatos dos alunos A, F, G e J.

> "De nada adianta muita prática e pouca exatidão e rapidez para se fazer as contas, afinal são situações do cotidiano. Minha crítica ao ensino comum se dá por não desenvolver o hábito de usarmos ela, e ao ensino proposto aqui, meus elogios e agradecimento em mais esse aspecto." (Aluno A)

> "Eu aprendi a usar, principalmente a tecla para o cálculo de potências e suas peculiaridades (uso do parênteses, sinal negativo, etc)" (Aluno F)

> "Aprendi a utilizar a calculadora científica nas aulas justamente por sua necessidade. Se não fosse assim teríamos que fazer contas super demoradas, perdendo assim a essência da Matemática financeira e retornando para a matemática convencional." (Aluno G)

> "Nunca tinha precisado usar a calculadora científica, por isso não sabia usá-lo, porém aprendi durante as aulas e sem dúvida o seu uso foi de extrema importância durante as resoluções." (Aluno J)

(IX) A última questão do questionário referia-se aos últimos recursos utilizados em nossas aulas: planilha eletrônica e tabelas PRICE e SAC. Primeiramente, questionamos se conheciam, se sabiam ou não usar e a necessidade da planilha para a Matemática Financeira.

Sobre o conhecimento e uso, seis dos oito alunos afirmaram conhecer, mas não saber usar. Apenas um indicou conhecer e saber usar, o que de certa forma também é surpreendente tal como o uso da calculadora científica. Em relação ao uso da planilha, todos indicaram sua necessidade.

Os depoimentos dos alunos a respeito do uso da planilha são muito valiosos para a réplica desse tipo de aula e uso em sala.

> “Da mesma maneira que a calculadora, a planilha é indispensável e ESSENCIAL para cálculos desse tipo, uma vez que são, em sua maioria, longos e complexos. Aprendi a usar com maior destreza aqui, nas aulas, pois possuía apenas o básico de noção.” (Aluno A)

> “A planilha Excel garante a possibilidade de uma melhor organização dos problemas e dos gastos, garantindo assim um controle maior e mais efetivo sobre a situação financeira em que a pessoa se encontra.” (Aluno B)

> “Eu já tinha um conhecimento sobre as operações na planilha Excel, por isso, tive uma certa facilidade na execução deles.” (Aluno F)

> “Sem a planilha Excel, o cálculo de um financiamento de 40 anos demoraria horas para ser calculado.” (Aluno H)

> “Acho que a planilha é extremamente necessário, pois facilita grandemente as nossas contas, ainda mais quando é utilizado um tempo de grande extensão.” (Aluno G)

> “Além de organizar a dívida, por exemplo, ela facilita cálculos que se fossem resolvidos através de uma calculadora científica daria um certo trabalho.” (Aluno I)

> “Já havia visto antes, mas sem interesse de aprender por parecer de difícil compreensão, mas com essa matéria mostrou-se necessária e de entendimento tranquilo, agilizando processos e organizando-os.” (Aluno C)

> “Questões de conteúdos muito grandes (muitos parcelas) podem ser resolvidas à partir da criação de uma fórmula no Excel, assim seriam resolvidas de uma maneira rápido e eficiente.” (Aluno J)

Para nós, depois de um momento rico que tivemos ao lecionar Matemática Financeira, ler as respostas dos alunos ao questionário, foi um momento inédito durante nossa experiência docente, pois nunca tínhamos conduzido uma sequência de aulas usando os recursos que empregamos e a contrapartida dos alunos. Formalmente, nunca tivemos esse retorno dos alunos, em particular, nos 23 anos de docência desse pesquisador. Sempre ouvimos comentários informais. As impressões dos alunos acerca dos momentos que tivemos foram devidamente registradas nessa seção e serão, ainda, posteriormente comentadas no próximo Capítulo desta dissertação.

5 CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao final desta jornada, nesta seção, dedicamo-nos a tecer alguns comentários sobre o que mais nos chamou a atenção durante nossa pesquisa. São reflexões pessoais embasadas tanto na leitura dos trabalhos que tivemos acesso e que foram norteadores do que propusemos quanto em nossa experiência de sala de aula, ministrando matemática para classes da educação básica. Tomamos pontos que possam apresentar alguma limitação e as devidas recomendações que entendemos poder melhorar o que fizemos neste trabalho. Tais recomendações poderão auxiliar trabalhos futuros que se baseiem nesta pesquisa.

Porém, antes de tecermos estes comentários, deixarei de lado o professor pesquisador que hoje sou para fazer um pequeno relato de minha caminhada como professor, do tempo anterior à minha entrada no Profmat. Vou me posicionar diante de minhas angústias, acertos e desacertos, para tentarmos dimensionar a grandeza do resultado que alcançamos em nossa pesquisa.

Sou licenciado em Matemática há vinte e seis anos e na minha formação acadêmica nenhuma disciplina tratou de Matemática Financeira. Trabalho como professor há vinte e quatro anos e, ao longo de todo esse tempo, ministrei aulas predominantemente para alunos de Ensino Médio, e também para alunos do 6º ao 9º anos, em menor frequência. Por mais constrangedor que pareça, confesso que nunca ensinei Matemática Financeira para meus alunos do modo que apresentei nesta dissertação. Quando trabalhava com alunos do 7º ano (6ª série), ensinava juros simples e juros compostos. E apenas isto! Não cheguei a resolver problemas de Matemática Financeira, que envolvessem tomada de decisão, com meus alunos nas ocasiões em que esse conteúdo fazia parte do currículo. E no Ensino Médio, não há uma uniformidade na apresentação deste conteúdo entre os livros didáticos. Há inclusive divergência sobre a série em que deve ocorrer. A sensação que ficava quando abordava a Matemática Financeira era de algo incompleto, com pouco propósito, não sabia de fato do que se tratava.

Quando entrei no Profmat, na turma de 2013, logo no primeiro módulo, tive a oportunidade de estudar a Matemática Financeira do modo que ela realmente é, assistindo a um vídeo de uma aula ministrada pelo Prof. Morgado. Senti-me provocado a aprender aquele método que mostrava tamanha simplicidade assim como tamanha eficiência. Naquele momento, surgiu uma vontade de aprofundar sobre o assunto e a possibilidade de ter encontrado o objeto de minha pesquisa para o meu trabalho de conclusão do curso. E assim aconteceu. Aos poucos, encontrei uma forma de contribuir com professores que, assim como eu, podem ter passado ou podem estar passando pelas mesmas angústias.

É a partir deste ponto que entendo ter surgido em mim o professor pesquisador que propõe este trabalho. Com a intenção de sugerir mudanças/reflexões aos processos de ensino e de aprendizagem de matemática, mas que também se insere neste contexto como aquele que está em sala de aula no dia a dia.

Sendo assim, esta pesquisa teve como objetivo reconhecer se o uso de problemas específicos que abordam a verificação de valores apresentados em folhetos de lojas e problemas sugeridos pelos próprios alunos a partir dos anseios deles de investimentos e financiamentos eram um fator que poderia facilitar e motivar a compreensão do conteúdo de Matemática Financeira.

Acreditávamos que, ao tratar de situações bem próximas da realidade do aluno, a compreensão dos conceitos e fórmulas que fazem parte desta matéria faria mais sentido no contexto de sala de aula. Críamos também que, ao planejar o estudo da Matemática Financeira dessa forma, estaríamos proporcionando situações semelhantes às que vão aparecer ao longo da vida dos alunos.

A ideia que tivemos para alcançar nosso objetivo foi adotar um material de apoio, que chamamos de apostila, de modo que pudéssemos escolher o que entendíamos ser importante para a abordagem da Matemática Financeira nesse nível de estudo, assim como escolher também os problemas a serem colocados para as devidas aplicações dessa teoria sugerida. Esses problemas foram a razão desta dissertação. Pretendíamos usá-los como fator motivador para o aprendizado da Matemática Financeira. Consideramos que foi uma boa escolha, embora sempre possa haver ajustes. Nunca somos os mesmos com o passar do tempo. Assim, se fôssemos aplicar novamente esse material, faríamos inserções pontuais com a intenção de aprimorá-lo.

A escolha do conteúdo baseou-se exatamente na aula do Prof. Morgado [6]. Julgamos importante que o aluno saiba o que era juros simples, sem nos aprofundarmos uma vez que o juro praticado no mercado é o composto. Além dos juros compostos, enfatizamos taxas efetivas e taxas nominais, séries uniformes, taxas equivalentes e planos equivalentes de financiamento. Quanto à escolha, mudaríamos a ideia de não aprofundar a abordagem de juro simples, levando para sala problemas de juros de mora, em que se pratica essa modalidade de juros. Notamos uma lacuna nesse ponto. Apontamos esta sugestão para aqueles que pretenderem usar nossa pesquisa como instrumento.

Tudo isso ocorreu, adotando o método do algoritmo das setas, apresentado pelo Prof. Morgado e tema da dissertação de Novaes [10]. Pudemos comprovar sua eficiência ao observar a evolução dos alunos.

Quanto às aulas, uma observação importante é que trabalhamos com um grupo pequeno de alunos. A condução ocorreu de modo satisfatório. Não sabemos como pode ser o resultado numa turma com muitos alunos, como, geralmente, é a rotina de todo professor. Essa é uma consideração relevante na hora de planejar um trabalho similar. Entendemos que isso pode ser um obstáculo para o professor, mas concitamos os que se interessarem pela proposta a não desanimar por esse motivo. Afinal de contas nossos alunos merecem que sejamos honestos com eles e que trabalhemos com seriedade no nosso planejamento.

Observando, então, o tema da nossa dissertação, pudemos notar logo nos primeiros problemas que haveria razão para levarmos adiante. Vimos que a reação causada foi motivadora e isso confirmou nossas expectativas. Não mudaríamos nada nessa escolha. Do início ao fim do conteúdo, em todos os momentos que tratamos de problemas que faziam parte dos anseios dos alunos, de suas curiosidades, a sensação que tivemos foi de euforia que nos motivava também na condução das aulas. Em alguns momentos, conforme descrevemos, o problema era criado pelo próprio aluno.

Por isso, é de fundamental importância o entendimento, por aquele que anseia usar nossa ideia, que este conteúdo permite grande autonomia na escolha dos problemas, e que o professor deve conhecer bem seu aluno para fazer essa escolha. Caso isso não seja entendido, haverá uma simples repetição de problemas hipotéticos que podem levar o aluno a resolver algo por repetição sem perceber nenhuma utilidade para a vida dele.

Durante as aulas, pedimos que fizessem uso da calculadora científica. Embora esse tenha sido um item que usamos para estimular o aprendizado da matéria de modo secundário, reconhecemos que foi de bom aproveitamento, haja vista os comentários feitos pelos alunos nas respostas ao questionário.

Orientamos o uso da calculadora de modo a resolver as contas de uma vez só, ao invés de ir fazendo por partes. Notamos que, dessa forma, a memorização das fórmulas que apresentamos ficava mais fácil, era conseguida sem que os alunos percebessem. Por isso, sugerimos que esse instrumento seja usado como artifício motivador. Nas nossas aulas, alguns alunos não fizeram uso da calculadora científica, pelos mais variados motivos. Diferentemente do que fizemos, que foi deixar como estava, sugerimos que seja observado o uso por todos os alunos da classe. A razão para tal é a reação de descoberta que vimos estampada no rosto dos alunos que usaram esse instrumento, da forma que conduzimos. Vale a pena o esforço de ter todos os alunos acompanhando com a calculadora. Entendemos, porém, que essa realidade deve ser adequada a cada situação e que não pode ser, desestímulo para uma proposta semelhante a essa em outras salas de aula, outrossim, deve ser ainda mais fator motivador para nós docentes.

Da mesma forma, o uso do computador, que evidentemente está condicionado às condições de cada escola, de cada aluno, teve papel fundamental para finalizarmos o conteúdo de Matemática Financeira. Essas condições devem ser avaliadas. No nosso caso, houve uma aula em que dois alunos dividiram um computador, esses procedimento não foi ideal. Para que haja efeito, cada um tem que estar com uma máquina. Uma sugestão é trabalhar com a turma no laboratório de informática, caso exista na escola.

Após a devida explicação dos sistemas de financiamento mais comuns no mercado, a apresentação da planilha eletrônica e a condução passo a passo facilitou profundamente o entendimento de cada um desses sistemas. E mais ainda, mostrou aos alunos quão útil e facilitador é uma planilha eletrônica. Essa foi a aula que mais nos alegrou quanto à reação dos alunos. Depois que eles aprenderam a trabalhar com a máquina, perdemos o controle das mais variadas formas que quiseram fazer seus planos. Gostamos disso e sentimos que funcionou muito bem. Consideramos como ápice de nossas aulas e que mais gerou comentários após o tempo regulamentar da aula. Depois disso, ficamos ainda um tempo conversando informalmente e pudemos apurar dos alunos a satisfação com o que trabalhamos. É claro, que de nossa parte esse sentimento também foi recíproco.

Finalmente, pretendíamos responder a duas questões em nossa dissertação:

- o uso de problemas específicos que abordam a verificação de valores apresentados em folhetos de lojas e problemas apresentados pelos próprios alunos a partir de seus anseios de investimentos e financiamentos é um fator que facilita e motiva a compreensão do conteúdo de Matemática Financeira?
- e, qual o conhecimento dos alunos sobre ferramentas eletrônicas, especificamente, calculadora científica e planilhas eletrônicas, anterior às aulas? E posteriormente? E fazer o uso destes instrumentos ajuda a compreender o conteúdo de Matemática Financeira?

Diante de tudo que tentamos relatar a respeito do andamento das aulas, a resposta para a primeira pergunta é absolutamente positiva e observamos que o uso desta sugestão pode fazer diferença tanto para o aluno que, aprendendo esse conteúdo, vai usá-lo para o exercício de sua cidadania, quanto para o professor, que se sentirá estimulado a ensinar não só o conteúdo de Matemática Financeira como pode também motivá-lo a propor novas formas para os demais conteúdos da matemática.

E quanto a segunda pergunta, também concluímos que o uso destes instrumentos é de grande ajuda na compreensão da Matemática Financeira.

Cada uma destas respostas tem embasamento não só nos resultados que obtivemos, mas também nas respostas do questionário preenchido pelos alunos. Ao lermos cada um desses questionários, tivemos a sensação de dever cumprido. Julgamos que o potencial das respostas que ali estavam deixam nossas impressões mais contundentes.

Entretanto, como já observado anteriormente na introdução desta dissertação, não é nossa pretensão esgotar esse tema em nosso trabalho. Sempre haverá ideias complementares, no entanto, umas não excluem as outras. Nossa proposta é mais uma contribuição para esse campo temático, com a intenção de enriquecer as técnicas de sala de aula no ensino de Matemática Financeira para alunos do Ensino Médio.

A validade e a validação de nossa pesquisa estão em poder ser replicada em outras salas de aula com as adaptações que se fizerem necessárias.

Para nós, entretanto, ainda restam indagações que são propostas para trabalhos futuros. Nossa proposta abarcou alunos que estão no Ensino Médio, que possuem conhecimento de progressões, mas sabemos que o conteúdo de Matemática Financeira também é proposto para séries do Ensino Fundamental. Assim, como seria uma proposta, uma intervenção, desse conteúdo para essas séries? É possível?

Essas são questões que se apresentam neste momento, na realidade em que vivemos em sala de aula e fortemente pelo que trabalhamos ao longo desses últimos dois anos nesta investigação. Outras questões surgirão e novos trabalhos serão frutos deste nosso estudo sobre o uso de problemas do cotidiano como fator motivador para o ensino da Matemática Financeira.

REFERÊNCIAS

[1] AMORIM, Cristiano Marcell Isquierdo de. **Matemática financeira: abordagem voltada para a cidadania**. Rio de Janeiro, 2014.

[2] BRASIL/MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[3] BRASIL/MEC. Orientações Curriculares para o Ensino Médio, volume 2, 2008.

[4] CANTARUTI, Andréa Cristina Rocha. **Um Estudo sobre a Influência de Emoções e Sentimentos no Processo Avaliativo de Matemática: uma perspectiva de pedagogos, psicólogos, alunos e professores do Ensino Médio da Escola Preparatória De Cadetes do Ar**. Barbacena/NG, 2012.

[5] GALLAS, Rafael Guilherme. **A importância da matemática financeira no ensino médio e sua contribuição para a construção da educação financeira no cidadão**. Ponta Grossa, 2013.

[6] IMPA. Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro, sd. Disponível em: «https://www.youtube.com/watch?v=0xUvXRdmRJ4» Acesso em 10 de outubro de 2015.

[7] JÚNIOR, Altamiro Batista da Rocha. **Abordagens cronológicas no ensino de matemática financeira**. Juiz de Fora/MG, 2013.

[8] LUCHESI, André Luiz Barros. BrOffice.org CALC. UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, 2010. Disponível em: «http://www.inf.unioeste.br/guardamirim/apostilas/calc.pdf» Acesso em 20 de dezembro de 2015.

[9] MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: Gráfica Wagner Ltda, 1993.

[10] NOVAES, Rosa Cordelia Novellino de. **Uma abordagem visual para o ensino de matemática financeira no ensino médio**. Rio de Janeiro, 2009.

[11] OLIVEIRA, Fabiano Macêdo de. **Uma abordagem da matemática financeira no ensino médio**. Teresina, 2013.

[12] PONTE, Leônidas Carneiro da. **Juros: Uma análise de livros didáticos e uma proposta de sequência de aulas com base na teoria antropológica do didático**. Santarém/PA, 2013.

[13] REIS, Simone Regina dos. **Matemática financeira na perspectiva da educação matemática crítica**. Santa Maria/RS, 2013.

[14] REZENDE, Renato Afonso. **Ensino da matemática financeira na educação básica**. Juiz de Fora/MG, 2014.

[15] RODRIGUES, Alexandre José. **Um estudo das identidades matemáticas de alunos do ensino médio da escola preparatória de cadetes do ar**. Belo Horizonte/MG, 2010.

[16] SAADI, Alessandro da Silva. **Situações-problema no ensino da matemática financeira**. Rio Grande do Sul, 2013.

[17] SBM. Regimento do Profmat. Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: «http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/regimento» Acesso em 11 de novembro de 2015.

[18] SIMÃO, Marisa Rezende. **Números Complexos: Um estudo acerca dos conhecimentos prévios e das noções de aplicabilidade na perspectiva dos alunos do 3o ano do Ensino Médio**. Juiz de Fora/MG, 2014.

[19] SOUSA, José Mateus Queiroz. **Matemática financeira: uma nova proposta para o ensino médio**. Recife, 2013.

[20] SOUZA, Herbert José Cavalcanti de. **Matemática financeira: uma aplicação direta no cotidiano**. Paraíba, 2013.

[21] TORAETE, Henrique Matsumoto. **Matemática financeira: um conhecimento importante para os estuantes e seu futuro**. Londrina, 2013.

[22] UFJF. Matemática Financeira: notas de aulas. Juiz de Fora, 2009. Disponível em: «http://www.ufjf.br/andre_hallack/files//2009/08/matfin-091.pdf» Acesso em 11 de novembro de 2015.

[23] UFJF. Tutorial microsoft Excel. Juiz de Fora, 2011. Disponível em: «http://www.ufjf.br/get_engcomp/files/2012/04/Tutorial-Excel-Parte1.pdf» Acesso em 20 de dezembro de 2015.

APÊNDICE A – Termo de Consentimento

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO PARA OS ALUNOS DA ESCOLA PREPARATÓRIA DE CADETES DO AR-EPCAR

Caros alunos do 2º esquadrão da EPCAR,

Estamos encaminhando este documento para seu consentimento da realização de uma pesquisa com você e outros alunos de seu Esquadrão, cuja finalidade será abordar a Matemática Financeira oferecendo proposições e resoluções de problemas específicos associados ao dia a dia das pessoas, em especial, do interesse de sua faixa etária.

A pesquisa será realizada por mim, Carlos Henrique da Silva Cavaca, professor de Matemática da EPCAR há 17 anos, com acompanhamento de meu orientador do Curso de Mestrado, Professor Doutor Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos, da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Esta pesquisa será realizada para construir minha dissertação do Curso Pós-graduação stricto sensu, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, que estou cursando junto à Universidade Federal de Juiz de Fora. É uma atividade obrigatória para obtenção do título de Mestre e tem como objetivo principal o aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica.

Caso você concorde, realizaremos oito encontros com dez alunos, todos do 2o esquadrão, nos quais aprenderemos a analisar e resolver problemas de natureza dita anteriormente. Será necessário fazer gravação de áudio/vídeo dessas aulas, preenchimento de questionários e anotações durante todos os encontros. Informamos que a pesquisa não modificará ou prejudicará a rotina das aulas de matemática. Os dados coletados nos questionários, nas entrevistas e nas aulas serão de uso exclusivo da pesquisa e não serão divulgados ou usados para avaliação do comportamento ou atitude de vocês. Também garantimos que nenhum de vocês será penalizado ou prejudicado se discordar em participar da pesquisa, ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa. Os resultados da pesquisa serão comunicados através de nomes fictícios para que as identidades de vocês sejam preservadas.

Agradecemos desde já sua colaboração.

Atenciosamente,

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
(Sergio.guilherme@ufjf.edu.br)

Mestrando: Prof. Carlos Henrique da Silva Cavaca (chscavaca@yahoo.com.br)

Telefone de contato: (32)3339-XXXX

AUTORIZAÇÃO DOS ALUNOS

Eu, ______________________________________ (nome completo do aluno), concordo em participar da pesquisa acima citada nos termos propostos deste documento, permitindo gravação de áudio/vídeo dos encontros, preenchimento de questionários e participação em entrevista com gravação em áudio/vídeo.

__________________, _____ de ___________de ______

____
(Assinatura do aluno)

APÊNDICE B – Apostila de Matemática Financeira

MATEMÁTICA FINANCEIRA: UMA ABORDAGEM COM PROBLEMAS DO DIA A DIA

1 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Para alcançarmos um bom rendimento no estudo da matemática financeira, temos como pré-requisito as Progressões Geométricas. Assim vamos relembrar as fórmulas do termo geral e da soma do n primeiros termos de uma PG.

Termo geral:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Soma dos n primeiros termos de uma PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^{n-1} - 1)}{q - 1}$$

2 MATEMÁTICA FINANCEIRA

2.1 Conceitos Básicos e Simbologia

A Matemática Financeira é o **ramo da Matemática que estuda o comportamento do dinheiro no tempo**.

Basicamente a Matemática Financeira tem como operação a operação de empréstimo.

Principal noção da matemática financeira:

O VALOR DE UMA QUANTIA DEPENDE DA ÉPOCA À QUAL ELA SE REFERE.

São erros comuns em raciocínios financeiros:

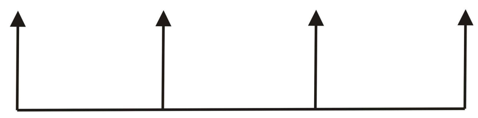
- Achar que, por exemplo, R$130,00 valem sempre mais que R$100,00;
- Achar que R$100,00, por exemplo, têm sempre o mesmo valor;
- Somar quantias referidas a épocas diferentes.
- Achar que, por exemplo, 1% ao mês produzem sempre 12% ao ano.

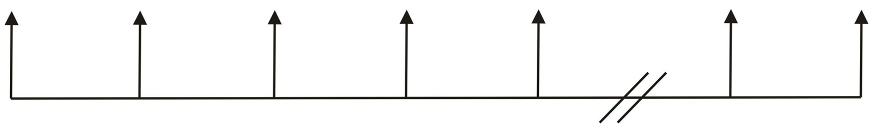
Capitalização: é o processo que calcula o valor futuro a partir do valor presente adicionando-se a este os juros.

2.2 Tipos de Juros

Os juros podem ser simples ou compostos porém este texto tratará apenas de problemas envolvendo juros compostos.

Exemplo 1. *Qual a evolução de R$100,00 a juros compostos de 10% ao ano, durante 3 anos?*





$$M = C \cdot (1+i)^n$$

onde,

$$M = \text{Montante}$$
$$C = \text{Capital inicial ou Principal}$$
$$i = \text{juro}$$
$$n = \text{tempo}$$

Atenção! O uso do desenho é extremamente útil para ajudar na numeração do tempo.

Problemas

1. Considere um principal de R$2.000,00, uma taxa de juros de 5% a m. Qual o montante após 5 meses?

2. R$250,00 valem quanto daqui a 4 meses com taxa de juro de 2% a m?

3. R$360,00 valiam quanto a 3 meses atrás? E a 9? (com o dinheiro custando 2% a m)

   É claro que matemática financeira não serve apenas para se fazer estes cálculos. Um dos principais motivos para seu estudo é para tomada de decisão.

4. Quero comprar um carro novo e recebo as seguintes ofertas:

   a) Uma entrada de R$21.000,00 e mais duas parcelas anuais de R$21.000,00 cada uma.

b) Duas parcelas anuais de R$32.000,00, a primeira delas daqui a um ano (sem entrada)

Qual a melhor opção se você consegue 15% ao ano em aplicações financeiras?

Quanto dinheiro preciso ter hoje para cumprir com a melhor opção?

5. Suponha o dinheiro valendo 5% a m. Qual a melhor opção para comprar algo que custa R$1.200,00:

   a) à vista, com 10% de desconto?

   b) pagamento 1 mês após a compra, com 6% de desconto?

   c) ou pagamento de 3 vezes, sem juro (0, 30, 60)?

6. Preciso de R$4.000,00 para viajar para a Eslováquia daqui a dois anos. Se uma determinada aplicação remunera 5% a s (juros compostos), qual a quantia mínima que devo aplicar hoje para que possa resgatar os R$4.000,00 daqui a 2 anos?

R.: R$3.290,81

7. Apliquei uma quantia a 4% a m. Após 5 meses, a taxa foi elevada para 12% e meu capital ficou aplicado por mais 3 meses, quando, então, retirei o montante de R$170.930,97. Determine:

   a) O valor do capital inicial.

   R.: R$100.000,00

   b) A taxa média que esse capital ficou aplicado.

   R.: 6,9307%

8. Uma pessoa tomou emprestados R$10.000,00 obrigando-se a pagá-los em 3 parcelas mensais iguais, com juros de 5% a m. Qual o valor das parcelas se a 1ª vencer a 90 dias do empréstimo?

R.: R$4.048,48 cada parcela

9. Faltando 3 pagamentos mensais de R$50.400,00 para o término de um contrato, o devedor deseja liquidá-lo na data em que deveria efetuar o 1º desses pagamentos. Quanto deverá pagar se a taxa é de 3% a m?

R.: R$146.838,87

10. Uma loja está anunciando uma geladeira por R$480,00 à vista ou em 3 pagamentos mensais e iguais a R$160,00, sendo o 1º no ato da compra. Considerando uma taxa de 6% a m, qual o desconto que essa loja poderia dar para o pagamento à vista?

R.: $\frac{26{,}66}{480} = 5,5542\%$

11. (Folheto do Magazine Luiza) Resolva o mesmo problema anterior considerando o anúncio do folheto para o iPhone 6.

    a) Considere a taxa de 6% praticada pela loja, conforme a maioria dos produtos indica.

    b) Considere a taxa de 0,5%, que é a média que a poupança tem indicado. (observe que você terá a soma de uma PG)

12. Um banco empresta dinheiro a 3% a m. No ato do empréstimo ficam retidos 5% a título de seguro. Uma pessoa quer pegar um empréstimo porque descobriu uma aplicação que paga 4,5% a m e vai aplicar o dinheiro.

    a) Se o empréstimo for por 60 dias será bom negócio?

    R.: não é vantajoso

    b) E por 120 dias?

    R.: é vantajoso

13. Uma empresa deseja pagar uma nota promissória de R$10.000,00 vencida há 3 meses e antecipar o pagamento de outra de R$50.000,00 a vencer daqui a 5 meses. Determinar o valor do pagamento a ser feito de imediato pela empresa para liquidar essas notas promissórias considerando a taxa de 1,2% a m.

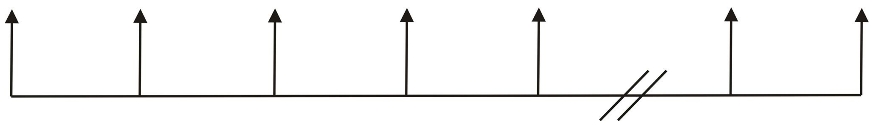
R.: R$57.469,39

2.3 Taxas de Juros

Taxas **efetivas** e taxas **nominais**. As taxas efetivas coincidem com a unidade de tempo dos períodos de capitalização; já as taxas nominais não coincidem com as unidades de tempo dos períodos de capitalização.

2.4 Séries Uniformes

Uma série uniforme é um conjunto de capitais de mesmo valor (pagamentos) que ocorrem em intervalos de tempo iguais.



N = número de pagamentos

P = valor do pagamento

A = valor da série na data indicada na figura

$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$
$$A = P \cdot [\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}]$$

$A = P\cdot$ (soma de uma PG de razão $\frac{1}{(1+i)}$).

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemplo 2. *Uma geladeira custa, à vista, R\$900,00 e pode ser paga em 6 prestações mensais iguais, vencendo a primeira dois meses após a compra. Os juros são de 4% a m. Determine o valor das prestações.*

Problemas

1. Escolha do folheto do Magazine Luiza. (sugestões variadas) e verifique o valor das prestações de 3 produtos.

2. Um empréstimo de R\$20.000,00 deve ser pago em 12 prestações mensais iguais. Determinar o valor das prestações se a taxa de juros cobrada é 1% a m, e a 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos.

   R.: R\$1.776,98

3. Um automóvel de R\$25.000,00 será financiado em 12 prestações mensais iguais com taxa de juros de 1% a m. Determine o valor que deve ser dado de entrada para que as prestações fiquem limitadas a R\$1.700,00 supondo que a 1ª ocorra 30 dias após a liberação dos recursos.

   R.:R\$5.866,50

4. Um financiamento de R\$10.000,00 será pago em 10 prestações iguais com taxa de 1,2% a m. Determine o valor das prestações nas seguintes hipóteses:

a) Pagamento da 1ª prestação 30 dias após a liberação dos recursos.

R.: P=R$1.106,06

b) Pagamento da 1ª prestação no ato da liberação dos recursos.

R.: P=R$1.054,53

c) Pagamento da 1ª 90 dias após a liberação dos recursos.

5. Um cliente de uma agência de automóvel comprou um veículo financiado em 24 prestações de R$1.500,00 com taxa de 1% a m. No final de 1 ano esse cliente procurou a agência para vender o veículo, e a agência ofereceu R$30.000,00 para pagamento à vista. Calcule quanto deve ser pago ao cliente para que a agência readquira esse veículo assumindo o restante do financiamento com a mesma taxa de 1% a m.

R.: Deve ser pago R$13.117,38

6. Um aplicador efetuou 6 depósitos trimestrais de R$5.000,00 em uma caderneta de poupança que oferece uma taxa de 12% a a capitalizados trimestralmente (que significa 3% a t). O 1º depósito é feito no ato da decisão do aplicador e os outros 5 no final de cada um dos próximos trimestres. Determine o saldo acumulado, nas seguintes ocasiões:

a) Imediatamente após o último depósito.

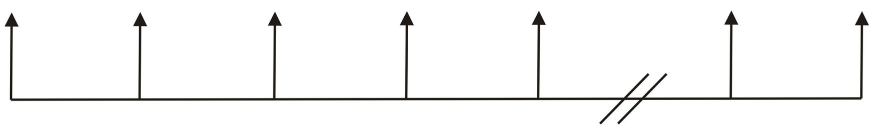
R.: R$32.342,05

b) No final do 2º trimestre após o último depósito.

R.: R$34.311,68

7. "Elaborar um problema de investimento para a turma." (sugerir pensar em alguma coisa do tipo: quanto consegue separar do que recebe, planos ou metas já traçados...) Depositando R$500,00 por mês numa aplicação que paga 1,2% ao mês, durante 48 meses, tempo que vai passar na Academia, quanto será resgatado um mês após o último depósito?

2.5 Relação Entre Taxas Equivalentes



De modo geral:

$$1 + I = (1 + i)^n$$

2.6 Planos Equivalentes de Financiamento

Dois ou mais planos de financiamento são equivalentes quando seus fluxos de caixa forem equivalentes.

Os dois planos com essas características mais presentes no cotidiano das pessoas são: A Tabela PRICE (homenagem a seu descobridor Richard Price) e a Tabela SAC (Sistema de Amortização Constante)

Plano PRICE – Prestações iguais

- O financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações anuais calculadas da maneira que vimos nas séries uniformes.
- As prestações de cada ano são subdivididas em duas parcelas: juros do ano + amortização do principal, esta dada pela diferença entre o valor da prestação e os juros.

Exemplo 3. *Dados* $P = 1000,00$*,* $i = 8\%aa$ *e* $n = 4$ *anos, vamos costruir a tabela de amortização pelo sistema PRICE.*

Ano	**Saldo no início do ano**	**Juros**	**Saldo no fim do ano antes do pagamento**	**Pagamentos**			**Saldo no fim do ano após o pagamento**
				Juros	**Amortizações**	**Totais**	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	221,92	301,92	778,08
2	778,08	62,25	840,33	62,25	239,67	301,92	538,40
3	538,40	43,07	581,48	43,07	258,85	301,92	279,56
4	279,56	22,36	301,92	22,36	279,56	301,92	0,00

É usada no financiamento imobiliário e de crédito direto ao consumidor.

Plano SAC - Amortização constante

- O financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações subdivididas em 2 parcelas: amortização do principal calculada pela razão entre o principal e o prazo da operação + juros do ano.

Usando o mesmo exemplo do modelo anterior, tem-se

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	250,00	330,00	750,00
2	750,00	60,00	810,00	60,00	250,00	310,00	500,00
3	500,00	40,00	540,00	40,00	250,00	290,00	250,00
4	250,00	20,00	270,00	20,00	250,00	270,00	0,00

É usada no financiamento imobiliário e financiamento de longo prazo.

Problemas

1. Calcule o valor das prestações de um financiamento de R$20.000,00 com taxas de 1% a m que deve ser pago no prazo de 5 meses, pelo modelo PRICE e pelo SAC.

   PRICE

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1							
2							
3							
4							
5							

   SAC

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1							
2							
3							
4							
5							

OBS.: Este é um momento muito oportuno para se usar a planilha Excel.

2. (Folheto do Magazine Luiza) Resolva o mesmo problema anterior considerando o anúncio do folheto para o i-Phone 6. O problema pede para calcular o desconto que a loja poderia dar para o pagamento à vista. Considere a taxa de

   a) 6% praticada pela loja, conforme a maioria dos produtos indica.

   b) 0,5%, que é a média que a poupança tem indicado.
   (observe que você terá a soma de uma PG)

3. Um problema sobre investimento: Considere que você vá separar todo mês R$200,00 do seu pagamento para investir na poupança. Considere também o período de 30 meses fazendo isto, e a taxa de 0,5% ao mês.

   a) Quanto você terá um mês após o último depósito.

   b) Quanto terá se fizer dois depósitos intermediários com 10 e 22 meses cada um, de mais R$200,00?

APÊNDICE C – Questionário

ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA USANDO PROBLEMAS DO DIA A DIA E REALIDADE DO ALUNO

QUESTIONÁRIO PARA PESQUISA DO MESTRADO PROFMAT

Professor: CARLOS HENRIQUE DA SILVA CAVACA

Aluno: ________________________________ **Data:** __________

Caro aluno,

O trabalho realizado com você durante os oito encontros teve como objetivo abordar o tema Matemática Financeira trabalhando problemas da sua realidade e também problemas tirados do dia a dia, da realidade das pessoas.

Tivemos o cuidado de abordar três modelos de problemas: investimentos, pagamentos de dívidas e financiamentos.

Para finalizar nossos contatos e como forma de eu ter mais subsídios para a escrita de meu trabalho final, peço que você responda às seguintes perguntas retomando de sua memória aquilo que foi trabalhado nos nossos encontros especialmente sobre o tema e a forma como foi trabalhado.

Antecipadamente, agradeço sua participação. Tenha a certeza de que sua participação foi extremamente valiosa e que contribuiu sobremaneira com meu entendimento acerca da Matemática Financeira.

1. O que você entendia como Matemática Financeira antes de trabalharmos os conteúdos propostos?

   ____

   ____

   ____

   ____

2. Qual era a sua expectativa com o tema proposto para Matemática Financeira? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Tendo como referência os diversos conteúdos trabalhados em Matemática no Ensino Médio, faça um pequeno comentário especificamente sobre a Matemática Financeira que trabalhamos em sala. (Tome como referência o interesse desse assunto comparado com os outros)

   ___

   ___

   ___

4. Quanto ao grau de dificuldade, em sua opinião, o conteúdo de Matemática Financeira é

   (   ) muito difícil.
   (   ) difícil.
   (   ) de dificuldade mediana.
   (   ) achava que era mais difícil do que realmente é.
   (   ) de fácil compreensão.

   Por favor, faça um pequeno comentário justificando sua escolha.

   ___

   ___

   ___

5. Responda as perguntas abaixo tomando como referência os problemas que resolveu durante nossos encontros onde abordamos o estudo da Matemática Financeira:

   a) Você sabia calcular o valor das prestações anunciadas no folheto de uma grande loja, quando estas apresentavam juros?

      (   ) sim
      (   ) não

      O que você entendeu a respeito disso? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

      ___

      ___

      ___

   b) Em alguns momentos de nossos encontros, comentamos sobre somar as parcelas para encontrarmos o valor da dívida. Você compreendeu o que falamos a esse

      (   ) sim
      (   ) não

      O que você entendeu a respeito disso? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

c) Você aprendeu como se faz isso?

( ) sim

( ) não

Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

d) Quanto a decisão sobre uma compra à vista ou à prazo de um produto que te interessa, como era feita?

( ) tomava minha decisão pela emoção.

( ) não sabia o que fazer.

( ) já deixei de comprar por esse motivo.

( ) tinha a sensação que estava sendo enganado.

O que você entendeu a respeito disso? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

e) Alguma vez somou as parcelas anunciadas a prazo para comparar com o preço do mesmo produto à vista, no modelo de juro composto?

( ) sim

( ) não

O que você entendeu a respeito disso? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

f) Sabe responder agora, se este procedimento é ou não correto?

( ) sim

( ) não

O que você entendeu a respeito disso? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

g) Sobre investimentos, saberia calcular o valor de um investimento que pretende fazer, com depósitos mensais fixos durante um período de tempo?

( ) sim

( ) não

O que você entendeu a respeito disso? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

h) Falamos sobre as tabelas mais usadas para financiamento no momento em nosso país: a Tabela PRICE e a Tabela SAC. Você saberia fazer a simulação de um financiamento de seu interesse usando essas tabelas?

( ) sim

( ) não

O que você entendeu a respeito disso? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

6. Crie uma lista com seus desejos que lhe ocorrem no atual momento de sua vida e nos próximos 8 anos para comprar. Separe-os na tabela abaixo. Se necessário, utilize o verso.

No tempo de até um ano	No tempo de até oito anos

7. Algum ou alguns desses necessita de um financiamento? Como você pretende fazer isso? Você vê uma relação direta com o que desenvolvemos nesses oito encontros? Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa. Se necessário, utilize o verso.

8. Nos nossos encontros foram apresentados problemas que são pouco comuns em muitos livros didáticos. Foram levados para a sala problemas que estão presentes no dia a dia de vocês: o folheto do Magazine Luiza no qual trabalhamos "o problema do Iphone" fazendo uma crítica à prática apresentada, o cálculo das prestações de produtos anunciados com juros, o cálculo do investimento na poupança e problemas de financiamento, foram alguns exemplos.

   Faça um comentário sobre a contribuição que este tipo de problema trouxe para o seu aprendizado da Matemática Financeira. Ressalte se é ou não indiferente aprender este assunto trabalhando com modelos do tipo citado ou com modelos que abordam situações que estão fora da realidade de vocês. Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

9. Sobre alguns recursos da calculadora científica que precisamos para resolver os problemas, você

   ( ) já sabia usar.
   ( ) aprendeu a usar durante as aulas de matemática financeira.
   ( ) acha que é necessária para trabalhar o conteúdo.
   ( ) acha desnecessário seu uso.

   Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

10. Usamos também computador e a planilha Excel para trabalharmos com as tabelas PRICE e SAC. Quanto ao recurso da planilha Excel, como recurso tecnológico, você

    (   ) já conhecia, mas não sabia usar.
    (   ) não conhecia, mas aprendi a usar.
    (   ) já conhecia e sabia usar.
    (   ) acha que é necessária para trabalhar o conteúdo.
    (   ) acha desnecessário seu uso.

    Quanto mais riqueza de detalhes você usar, mais eu terei recursos para meu relato de pesquisa.

ANEXO A – Primeiro Anexo

MATEMÁTICA FINANCEIRA – UMA ABORDAGEM COM PROBLEMAS DO DIA A DIA

- Pré-requisito: Progressões Geométricas:

  Termo geral: $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

  Soma dos n termos de uma PG finita: $\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}}$

- Matemática Financeira

  - Conceitos básicos e simbologia

  A Matemática Financeira é o **ramo da Matemática que estuda o comportamento do dinheiro no tempo.**

  Basicamente a Matemática Financeira tem como operação a operação de empréstimo.

JUR(J) = M-P

$\frac{J}{P} = i$ (TAXA)

Principal noção da matemática financeira:

O VALOR DE UMA QUANTIA DEPENDE DA ÉPOCA À QUAL ELA SE REFERE.

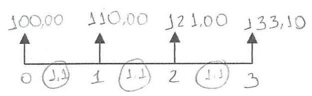
São erros comuns em raciocínios financeiros:
- Achar que, por exemplo, R$130,00 valem sempre mais que R$100,00;
- Achar que R$100,00, por exemplo, têm sempre o mesmo valor;
- Somar quantias referidas a épocas diferentes.
- Achar que, por exemplo, 1% ao mês produzem sempre 12% ao ano.

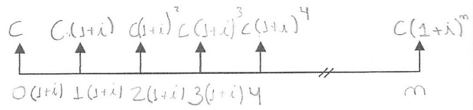
Capitalização: é o processo que calcula o valor futuro a partir do valor presente adicionando-se a este os juros.

- Tipos de juros: simples e composto
  (este texto tratará apenas de problemas envolvendo juros compostos)

- Juros compostos

Exemplo 1: Qual a evolução de R$100,00 a juros compostos de 10% ao ano, durante 3 anos?





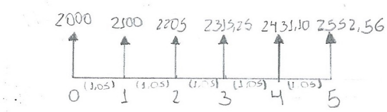
$\boxed{M = C \cdot (1+i)^n}$, onde:

M = Montante
C = Capital inicial ou Principal
i = juro
n = tempo

Atenção! O uso do desenho é extremamente útil para ajudar na numeração do tempo.

Problemas

1) Considere um principal de R$2.000,00, uma taxa de juros de 5% a m. Qual o montante após 5 meses?



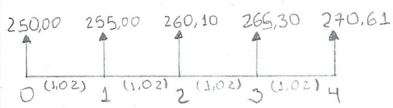
$M = C\,(1+i)^n$

$M = 2000\,(1+0{,}05)^5$

$M = 2000 \cdot (1{,}05)^5$

$M = 2552{,}56$ R$

2) R$250,00 valem quanto daqui a 4 meses com taxa de juro de 2% a m?



$M = C\,(1+i)^n$

$M = 250 \cdot (1+0{,}02)^4$

$M = 250 \cdot (1{,}02)^4$

$M = 270{,}61$ R$

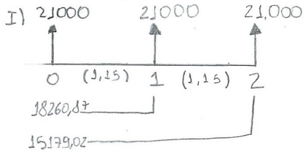
3) R$360,00 valiam quanto a 3 meses atrás? E a 9? (COM O DINHEIRO CUSTANDO 2% a.m.)

É claro que matemática financeira não serve apenas para se fazer estes cálculos. Um dos principais motivos para seu estudo é para tomada de decisão.

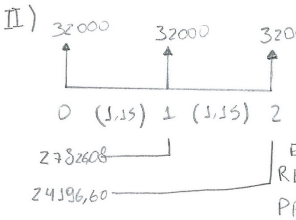
Problema de matemática financeira:

4) Quero comprar um carro novo e recebo as seguintes ofertas:
   I) Uma entrada de R$21.000,00 e mais duas parcelas anuais de R$21.000,00 cada uma.
   II) Duas parcelas anuais de R$32.000,00, a primeira delas daqui a um ano (sem entrada)

   Qual a melhor opção se você consegue 15% ao ano em aplicações financeiras?
   Quanto dinheiro preciso ter hoje para cumprir com a melhor opção?



$SOMA_1 = 54.43989$



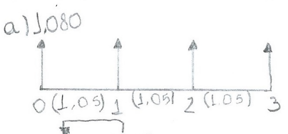
$\boxed{SOMA_2 = 52022,68}$

É PRECISO 52022,68 REAIS PARA CUMPRIR COM A MELHOR OPÇÃO.

O CASO MAIS FAVORÁVEL SERIA O DA 2ª OPÇÃO.

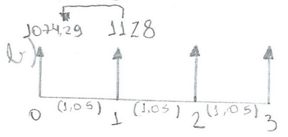
5) Suponha o dinheiro valendo 5% a m. Qual a melhor opção para comprar algo que custa R$1.200,00:

a) à vista, com 10% de desconto?
b) pagamento 1 mês após a compra, com 6% de desconto?
c) ou pagamento de 3 vezes, sem juro (0, 30, 60)?

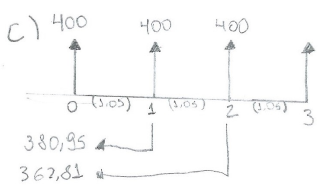


= 1080

MELHOR OPÇÃO

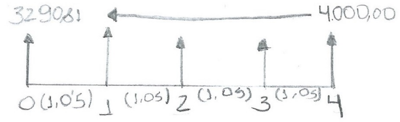


= 1074,29



= 1142,81

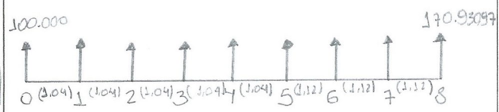
6) Preciso de ~~R$5.000,00~~ R$4.000,00 para viajar para a Eslováquia daqui a dois anos. Se uma determinada aplicação remunera 5% a s (juros compostos), qual a quantia mínima que devo aplicar hoje para que possa resgatar os R$4.000,00 daqui a 2 anos?



R.: R$3.290,81

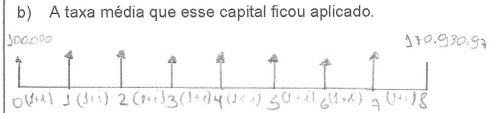
7) Apliquei uma quantia a 4% a m. Após 5 meses, a taxa foi elevada para 12% e meu capital ficou aplicado por mais 3 meses, quando, então, retirei o montante de R$170.930,97. Determine.

a) O valor do capital inicial.



R.: R$100.000,00

b) A taxa média que esse capital ficou aplicado.



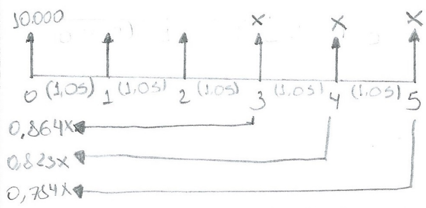
$M = C(1+i)^n$ $x^8 = 1,7093097$

$170930,97 = 100.000 \cdot x^8$ $x = 1,069307$

$i = 6,93\%$

R.: 6,9307%

8) Uma pessoa tomou emprestados R$10.000,00 obrigando-se a pagá-los em 3 parcelas mensais iguais, com juros de 5% a m. Qual o valor das parcelas se a 1ª vencer a 90 dias do empréstimo?

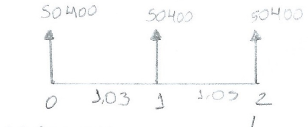


$2,471X = 10.000$

R.: R$4.048,48 cada parcela

$X = 4.0469,45$ R$

9) Faltando 3 pagamentos mensais de R$50.400,00 para o término de um contrato, o devedor deseja liquidá-lo na data em que deveria efetuar o 1º desses pagamentos. Quanto deverá pagar se a taxa é de 3% a m?



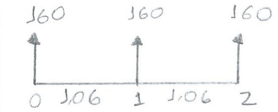
48932,04

47506,83

146.838,87 R$

R.: R$146.838,87

10) Uma loja está anunciando uma geladeira por R$480,00 à vista ou em 3 pagamentos mensais e iguais a R$160,00, sendo o 1º no ato da compra. Considerando uma taxa de 6% a m, qual o desconto que essa loja poderia dar para o pagamento à vista?



150,94

142,40

453,34

desconto = 26,66 R$

$\frac{26,66}{480} = 5,5542\%$

R.: $\frac{26,66}{480} = 5,5542\%$

11) (Folheto do Magazine Luiza) Resolva o mesmo problema anterior considerando o anúncio do folheto para o iPhone 6.
(observe que você terá a soma de uma PG)

12) Um banco empresta dinheiro a 3% a m. No ato do empréstimo ficam retidos 5% a título de seguro. Uma pessoa quer pegar um empréstimo porque descobriu uma aplicação que paga 4,5% a m e vai aplicar o dinheiro.

a) Se o empréstimo for por 60 dias será bom negócio?

R.: não é vantajoso

b) E por 120 dias?

R.: é vantajoso

13) Uma empresa deseja pagar uma nota promissória de R$10.000,00 vencida há 3 meses e antecipar o pagamento de outra de R$50.000,00 a vencer daqui a 5 meses. Determinar o valor do pagamento a ser feito de imediato pela empresa para liquidar essas notas promissórias considerando a taxa de 1,2% a m.

R.: R$57.469,39

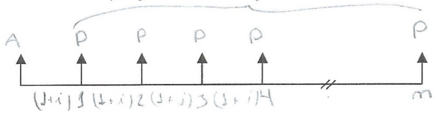
VÊM ACOMPANHADAS DO TERMO: "CAPITALIZADO".

- Taxas de juros

Taxas **efetivas** e taxas **nominais**. As taxas efetivas coincidem com a unidade de tempo dos períodos de capitalização; já as taxas nominais não coincidem com as unidades de tempo dos períodos de capitalização.

- Séries uniformes

Uma série uniforme é um conjunto de capitais de mesmo valor (pagamentos) que ocorrem em intervalos de tempo iguais.



N = números de pagamentos
P = valor do pagamento
A = valor da série na data indicada na figura

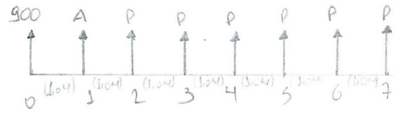
$$A = \frac{P}{(1+i)} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$

$$A = P \cdot \left[\frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + ... + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

$A = P \cdot$ (soma de uma PG de razão $\frac{1}{(1+i)}$)

$$\boxed{A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Exemplo 2: Uma geladeira custa, à vista, R$900,00 e pode ser paga em 6 prestações mensais iguais, vencendo a primeira dois meses após a compra. Os juros são de 4% a m. Determine o valor das prestações.



↳ 936

$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

$936 = P \cdot \frac{1-(1,04)^{-6}}{0.04}$

$37,44 = P \cdot (1 - 0,79)$

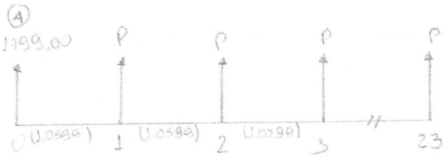
$0,21P = 37,44$

$P = 176,29$ R$

R.: CADA PRESTAÇÃO É DE R$178,54

Problemas:

1) Escolha do folheto do Magazine Luiza. (sugestões variadas) e verifique o valor das prestações de 3 produtos.



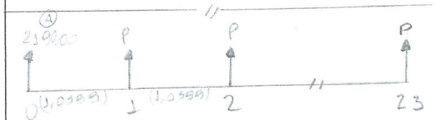
$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$

$1799 = P \cdot \left[\frac{1-(1,0599)^{-23}}{0,0599} \right]$

$1799 = P \cdot \left(\frac{1 - 0,2623}{0,0599} \right)$

$P \cdot 0,7377 = 107,7601$

$P = 146,08$ R$



$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$

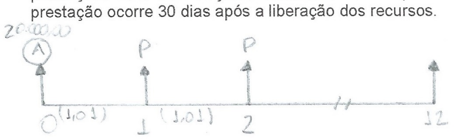
$2190 = P \cdot \left[\frac{1-(1,0599)^{-23}}{0,0599} \right]$

$131,18 = P \cdot (1 - 0,2623)$

$P = \frac{131,18}{0,7376}$

$P = 177,85$ R$

2) Um empréstimo de R$20.000,00 deve ser pago em 12 prestações mensais iguais. Determinar o valor das prestações se a taxa de juros cobrada é 1% a m, e a 1ª prestação ocorre 30 dias após a liberação dos recursos.



$$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

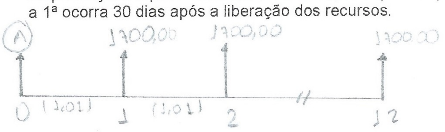
$$20000 = P \cdot \left[\frac{1-(1,01)^{-12}}{0,01}\right]$$

$$20000 = P \cdot 11,25507$$

$$P = 1776,98 \text{ R\$}$$

R.: R$1.776,98

3) Um automóvel de R$25.000,00 será financiado em 12 prestações mensais iguais com taxa de juros de 1% a m. Determine o valor que deve ser dado de entrada para que as prestações fiquem limitadas a R$1.700,00 supondo que a 1ª ocorra 30 dias após a liberação dos recursos.



$$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$A = 1700 \cdot \left[\frac{1-(1,01)^{-12}}{0,01}\right]$$

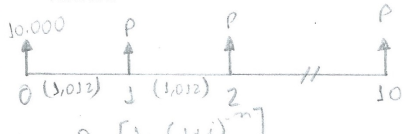
$$A = 19.133,63 \text{ R\$}$$

$25.000 - 19.133,63 = 5866,37$ R.:R$5.866,50

4) Um financiamento de R$10.000,00 será pago em 10 prestações iguais com taxa de 1,2% a m. Determine o valor das prestações nas seguintes hipóteses:

9.330,48

a) Pagamento da 1ª prestação 30 dias após a liberação dos recursos.



$$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

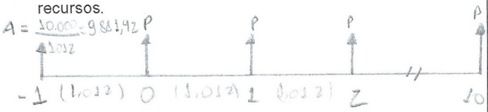
$$10.000 = P \cdot \left[\frac{1-(1,012)^{-10}}{0,012}\right]$$

$$P = 1.067,18 \text{ R\$}$$

R.: P=R$1.106,06

b) Pagamento da 1ª prestação no ato da liberação dos recursos.

$A = \frac{10.000}{1,012} = 9881,42$



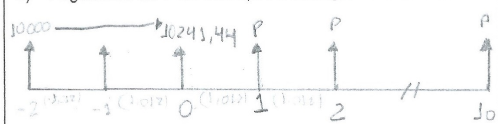
$$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$9881,42 = P \cdot \left[\frac{1-(1,012)^{-10}}{0,012}\right]$$

$$P = 1.054,53 \text{ R\$}$$

R.: P=R$1.054,53

c) Pagamento da 1ª 90 dias após a liberação dos recursos.



$$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

$$10241,44 = P \cdot \left[\frac{1-(1,012)^{-10}}{0,012}\right]$$

$$P = 1.092,94 \text{ R\$}$$

5) Um cliente de uma agência de automóvel comprou um veículo financiado em 24 prestações de R$1.500,00 com taxa de 1% a m. No final de 1 ano esse cliente procurou a agência para vender o veículo, e a agência ofereceu R$30.000,00 para pagamento à vista. Calcule quanto deve ser pago ao cliente para que a agência readquira esse veículo assumindo o restante do financiamento com a mesma taxa de 1% a m.

R.: Deve ser pago R$13.117,38

6) Um aplicador efetuou 6 depósitos trimestrais de R$5.000,00 em uma caderneta de poupança que oferece uma taxa de 12% a a capitalizados trimestralmente (que significa 3% a t). O 1º depósito é feito no ato da decisão do aplicador e os outros 5 no final de cada um dos próximos trimestres. Determine o saldo acumulado, nas seguintes ocasiões:

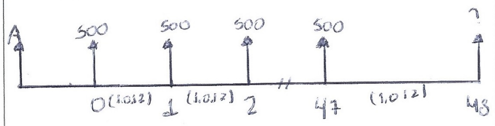
a) Imediatamente após o último depósito.

R.: R$32.342,05

b) No final do 2º trimestre após o último depósito.

R.: R$34.311,68

7) "Elaborar um problema de investimento para a turma." (sugerir pensar em alguma coisa do tipo: quanto consegue separar do que recebe, planos ou metas já traçados...)



$$A = 500 \cdot \left(\frac{1-(1{,}012)^{48}}{0{,}012} \right)$$

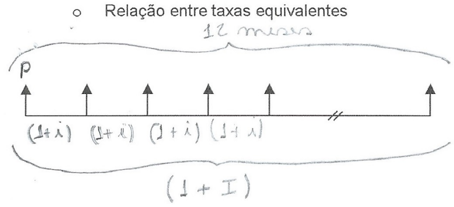
$$A = 500 \cdot 36{,}3272$$

$$A = 18\,163{,}6$$

$$A \cdot (1{.}012)^{49}$$

$$18\,163{,}6 \cdot (1{,}012)^{49} = 32.587{,}20$$

o Relação entre taxas equivalentes



De modo geral:

$$\boxed{1+I=(1+i)^n}$$

o Planos equivalentes de financiamento

Dois ou mais planos de financiamento são equivalentes quando seus fluxos de caixa forem equivalentes.
Os dois planos com essas características mais presentes no cotidiano das pessoas são: A Tabela PRICE (homenagem a seu descobridor Richard Price) e a Tabela SAC (Sistema de Amortização Constante)

Plano PRICE – prestações iguais

- O financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações anuais calculadas da maneira que vimos nas séries uniformes.
- As prestações de cada ano são subdivididas em duas parcelas: juros do ano + amortização do principal, esta dada pela diferença entre o valor da prestação e os juros.

Ex.: $\cancel{P}$ = 1.000,00 i = 8% a a n = 4 anos

$1000 = A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P \cdot \frac{(1-(1{,}08)^{-4})}{0{,}08} \therefore P = 301{,}92$

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	221,92	301,92	778,08
2	778,08	62,25	840,33	62,25	239,67	301,92	538,40
3	538,40	43,07	581,48	43,07	258,85	301,92	279,56
4	279,56	22,36	301,92	22,36	279,56	301,92	0,00

É usada no financiamento imobiliário e de crédito direto ao consumidor.

Plano SAC

- O financiamento é liquidado pelo pagamento de 4 prestações subdivididas em 2 parcelas: amortização do principal calculada pela razão entre o principal e o prazo da operação + juros do ano.

Usando o mesmo exemplo do modelo anterior, tem-se

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1	1.000,00	80,00	1.080,00	80,00	250,00	330,00	750,00
2	750,00	60,00	810,00	60,00	250,00	310,00	500,00
3	500,00	40,00	540,00	40,00	250,00	290,00	250,00
4	250,00	20,00	270,00	20,00	250,00	270,00	0,00

É usada no financiamento imobiliário e financiamento de longo prazo

Problemas:

1) Calcule o valor das prestações de um financiamento de R$20.000,00 com taxas de 1% a m que deve ser pago no prazo de 5 meses, pelo modelo PRICE e pelo SAC..

PRICE:

$20.000 = P \cdot \frac{(1-(1{,}01)^{-5})}{0{,}01} \therefore P = 4121{,}16$

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1	20.000,00	200,00	20200,00	200,00	3920,80	4120,80	16079,20
2	16079,20	160,79	16239,99	160,79	3960,01	4120,80	12119,19
3	12119,19	121,19	12240,38	121,19	3999,61	4120,80	8119,58
4	8119,58	81,20	8200,78	81,20	4039,60	4120,80	4079,98
5	4079,98	40,80	4120,78	40,80	4080	4120,80	-0,02

SAC

Ano	Saldo no início do ano	Juros	Saldo no fim do ano antes do pagamento	Pagamentos			Saldo no fim do ano após o pagamento
				Juros	Amortizações	Totais	
1							
2							
3							
4							
5							

OBS.: Cabe neste momento a apresentação da planilha Excel

Prof. Carlos Henrique da Silva CAVACA