Uma contribuição para o ensino de cálculo no ensino médio, utilizando a classe das cônicas

William Febronio de Mattos

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:______________________

William Febronio de Mattos

Uma contribuição para o ensino de cálculo no ensino médio, utilizando a classe das cônicas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antônio Calixto Souza Filho

USP – São Carlos
Janeiro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Febronio de Mattos, William
F435c Uma contribuição para o ensino de cálculo no ensino médio, utilizando a classe das cônicas / William Febronio de Mattos; orientador Antônio Calixto Souza Filho. -- São Carlos, 2016.
108 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. cálculo. 2. derivadas. 3. cônicas. 4. ensino médio. I. Calixto Souza Filho, Antônio , orient. II. Título.

William Febronio de Mattos

A contribution to calculus teaching at high school, using the conic order

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Antônio Calixto Souza Filho

USP – São Carlos
January 2016

Dedico,

A Deus, fonte inesgotável da Suprema Sabedoria, que em tudo se faz presente.

À minha linda esposa Claudia e aos meus abençoados filhos Vitoria e Felipe, presentes dados por Deus, os quais me servem de fundamental apoio e grande motivação. Com muito amor, admiração e gratidão por vossa compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período de elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao todo Poderoso Deus, criador dos céus, da terra e de tudo que há neles.

À minha amada esposa Claudia, pelo apoio e imenso amor.

Aos meus maravilhosos filhos, pelo apoio e compreensão.

À minha dedicada irmã Aline Febronio de Mattos, pelas revisões, sugestões e grande apoio.

Aos meus pais, sogra, cunhada e sobrinha que sempre oram por mim.

Ao Prof. Dr. Antônio Calixto Souza Filho, pela excelente orientação e diversas sugestões que muito enriqueceram esse trabalho.

À professora Regiane Aparecida Seco dos Santos, pelas revisões e sugestões.

Ao Colégio Agostiniano Mendel, nas pessoas dos Professores Luiz Felipe Fuke e Vagner da Silva, pelo apoio e disponibilização dos alunos e local para aplicação deste trabalho.

Aos meus queridos alunos das 3ª^as^ séries de 2015 do Colégio Agostiniano Mendel, pela participação na aplicação do trabalho e pelo grande apoio.

Ao meu querido aluno Arthur Clemente Giannotta, pelas discussões e contribuições.

Aos professores e companheiros do Colégio Agostiniano Mendel pelas discussões que muito me inspiraram.

À Escola de Artes, Ciência e Humanidades das USP, pelas aulas e excelentes professores disponibilizados.

Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura. (Hermann Hankel)

RESUMO

MATTOS. W. F. de. **Uma contribuição para o ensino de cálculo no ensino médio, utilizando a classe das *cônicas*.** 2016. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP**, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.**

O Cálculo Diferencial e Integral é o ramo da matemática no qual um dos objetivos é o estudo do movimento e da variação. Desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, esse ramo dedica-se ao estudo de taxas de variação de grandezas, como a inclinação de uma reta tangente a uma curva em um dos seus pontos, e a acumulação de quantidades, como a área sob uma curva e o volume de um sólido. Por ser utilizado como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências pura e aplicada e, dada a sua aplicabilidade nas mais diversas áreas do conhecimento, é considerado um dos conteúdos mais importantes trabalhado nos cursos superiores. Todavia, no Ensino médio, quando aparece nos livros didáticos, vem embasado no ensino clássico de limites das funções. No presente trabalho, foi apresentada uma proposta que não utilizará o conceito de limite, mas outros conceitos que figuram, mais frequentemente no Ensino Médio, para se discutir uma possível abordagem do ensino de derivadas, aplicado às cônicas.

Palavras-chave: Cálculo no Ensino Médio. Derivadas. Cônicas.

ABSTRACT

MATTOS. W. F. de. **A contribution to calculus teaching at high school, using the conic order.** 2016 Dissertation (Master) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, **São Paulo University, São Carlos, 2016**.

The differential and integral calculus is a Mathematical field which aims the study of movement and variation. Developed from Algebra and geometry, this field is applied to the study of magnitude variation taxes, like the inclination of a tangent line to a curve in one of its points, and the accumulation of quantities, like the area underneath a curve and the volume of a solid. Because it's used as an aid tool in several fields of pure and applied sciences and, due to its applicability in many varied areas of knowledge, it's considered one of the most important worked contents in higher education. However, in High School, when it comes in didactic material, it's grounded in the classic limit of functions. In this present work, it was presented a proposal which will not use the concept of limit, but others concepts that appear, more often in High School, to discuss a possible approach of derivatives teaching, applied to conics.

Key-words: Calculus in High school. Derivatives. Conics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

“Em nossa sociedade, o conhecimento matemático é necessário em uma grande diversidade de situações, como apoio a outras áreas do conhecimento, como instrumento para lidar com situações da vida cotidiana ou, ainda, como forma de desenvolver habilidades de pensamento”, (BRASIL, PCN+, p.111-2002).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, (BRASIL, PCN, 1997, p.15), a constatação da importância da Matemática apoia-se no fato desta desempenhar um papel decisivo na formação dos discentes, pois lhes permite resolver problemas da vida cotidiana. Além disso, têm-se muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Outrossim, ela interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

Ainda, conforme é previsto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, PCN, 2000), o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural, na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando à preparação do aluno para o trabalho, bem como a continuidade dos seus estudos em níveis superiores e o pleno exercício da cidadania.

Nesse contexto, o ensino de cálculo diferencial e integral no Ensino Médio, adequa-se como instrumento indispensável para a formação básica, uma vez que em quase todos os cursos superiores, com alguma grade de Matemática, esse assunto figura na maior parte das vezes. E, mesmo no ensino técnico e tecnológico a compreensão do cálculo torna-se indispensável. Além disso, diversas pesquisas mostram que o índice de reprovação em Cálculo I, nos cursos superiores é muito alto e, uma primeira abordagem desse assunto ainda no Ensino Médio pode contribuir para uma melhora nos índices de aprovação.

Valendo-se de várias pesquisas e artigos, (IGLIORI, 2009, p. 13) salienta que

> [...] no que tange às especificidades das áreas da Matemática, pode-se constatar que, no Brasil e no exterior, o Cálculo Diferencial e Integral tem ocupado parte significativa das pesquisas. Isso se justifica tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática.

Baseando-se em estudos e observações, (MELLO, 2001, p. 1), relata que

> [...] a alta reprovação em Cálculo I, que se agravou a partir do final da década de 1970, constitui um dos maiores problemas dos cursos de Engenharia. Apesar de muitos professores atribuírem o problema à falta de preparo dos alunos, isso não impede de as várias mudanças curriculares proporem alterações para “melhorar” o Cálculo I. Por outro lado, alguns professores tentam adequar a sua forma de ensinar essa disciplina, levando em conta a realidade dos alunos que ingressam hoje em dia nas Escolas de Engenharia.

De acordo com a pesquisa realizada por (BARUFFI, 1999, p.177), no ano de 1995, no Instituto de Matemática e Estatística da USP, a taxa de reprovação por nota, falta ou desistência, na disciplina MAT 135 – (Cálculo para funções de uma variável real) foi de 66,9%. Já na disciplina MAT 131 - Cálculo Diferencial e Integral foi de 43,8%. No Instituto de Geociências da USP onde, segundo (BARUFFI, 1999, p.174), o curso de Cálculo é mais adaptado à realidade local, a taxa de reprovação foi de apenas 35%.

Para (PIAGET 1984, p. 14), mesmo no campo da Matemática, muitos fracassos escolares se devem àquela passagem muito rápida do qualitativo (lógico) para o quantitativo (numérico).

Referindo-se ao ensino da “Matemática Moderna” este renomado epistemólogo advertia

> [...] desde a década de 50, que essa experiência poderia ser prejudicada pelo fato de que: embora seja ‘moderno’ o conteúdo ensinado, a maneira de o apresentar permanece às vezes arcaica do ponto de vista psicológico, enquanto fundamentada na simples transmissão de conhecimentos, mesmo que se tente adotar (e bastante precocemente, do ponto de vista da maneira de raciocinar dos alunos) uma forma axiomática (...) Uma coisa porém é inventar na ação e assim aplicar praticamente certas operações; outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e sobretudo teórico, de tal forma que nem os alunos nem os professores cheguem a suspeitar de que o conteúdo do ensino ministrado se pudesse apoiar em qualquer tipo de estruturas naturais.

O aprendizado da Matemática está diretamente ligado à compreensão, isto é, à apreensão do significado. Mas, apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Dessa forma, faz-se necessário que o tratamento dos conteúdos numa rígida sucessão linear dê lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. “Tornando o significado da Matemática para o aluno como o resultado das conexões que ele estabelece entre essa e as demais disciplinas, suas aplicações no cotidiano e das conexões que esse discente estabelece entre os diferentes temas matemáticos”, (BRASIL, PCN 1997, p.19).

Visando tal compreensão, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, de acordo com (BRASIL, 2008, p. 69), encomiam que os alunos concluintes do Ensino Médio saibam usar Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano e modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento. Compreendam a Matemática como uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas, corolários e demonstrações; percebam essa disciplina como um conhecimento social e historicamente construído e saibam apreciar a sua importância no desenvolvimento cientifico e tecnológico.

No Brasil, Segundo (LIMA, 1969. p.363) depois da proclamação da República no ano de 1889, o sistema educacional optou pelo modelo político dos Estados Unidos. Sendo que na organização escolar tinha-se nitidez na influência filosófica do positivismo, tanto que na reforma de Benjamim Constant, a liberdade, a laicidade do ensino e a gratuidade da escola primária se destacaram, com a orientação estipulada na Constituição Brasileira. Com essa reforma, o ensino básico brasileiro, que até então era preparador, deveria se tornar formador. Tendo em vista ainda que a predominância literária também deveria ser substituída pela científica. Entretanto, o que de fato ocorreu foi apenas o acréscimo de matérias científicas às tradicionais, tornando o ensino enciclopédico.

Uma introdução ao Cálculo Diferencial e Integral, todavia, já fez parte do currículo das escolas secundárias por duas vezes, segundo (CARVALHO, 1996, p.68) a primeira vez foi em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961.

De acordo com (PRATTA, 1998, p.140), entretanto, o aluno era teoricamente educado para ser um cidadão, supostamente direcionado pelo conhecimento das ciências, ao mesmo tempo em que o acesso a esse conhecimento era restrito apenas à memorização do maior número possível de informações. Portanto, a nascente República, com suas intenções de progresso, também fracassou na tentativa de romper com a tradição humanista, herança de muitos anos de educação clerical.

Em seu trabalho, (PEREIRA, 2009. p.46) afirma que após a Reforma Francisco Campos, em 1931, na qual ocorreu a primeira tentativa de se estruturar todo o curso secundário nacional, e de se introduzir os princípios modernizadores da educação, ficaram estabelecidos definitivamente o currículo seriado, a frequência obrigatória de dois ciclos, um fundamental e outro complementar. As disciplinas de Aritmética, Geometria e Álgebra agora estavam unificadas sob o título de Matemática.

Em um dos relatos de (PEREIRA, 2009. p.46), afirma-se que

> [...] no programa de Matemática, foi proposta a fragmentação das várias áreas da Matemática, tendo sido enfatizadas a importância de suas aplicações, a introdução do conceito de função e noções do Cálculo Infinitesimal. Mas, a resistência dos professores e as Leis de Diretrizes Básicas de 1961, acabaram por findar o ensino de cálculo no ensino médio, o qual perdurou apenas em algumas escolas, [...]

É nesse contexto que o presente trabalho atuará, trazendo uma contribuição para o ensino de Cálculo no Ensino Médio, utilizando a classe das cônicas.

Vale ressaltar que o professor Geraldo Ávila, em um artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, nº 8 de 1991, questionou a inclusão de tópicos do Cálculo no Ensino Médio: “Por que não ensinamos Cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o Cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o Cálculo no ensino? Por quê? Como fazer isso?" (ÁVILA, 1991, p.1).

Nessa publicação, (ÁVILA, 1991, p.4), afirma

> É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldade no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, [...] .

"Uma vez aprendido que derivada é o declive da reta tangente, o aluno entenderá facilmente, com apelo à intuição geométrica, que uma função é constante se sua derivada é zero", (ÁVILA, 1991, p.4).

O intuito aqui é atender o que lembra (PIAGET, 1984, p. 17), o princípio fundamental dos métodos ativos deve ser buscado na história das ciências. Assim, "compreender é inventar, ou reconstruir através da reinvenção". Falando a respeito de um ensino moderno e não tradicional da Matemática, o autor sugere aos professores: falar à criança na sua linguagem, antes de lhe impor uma outra já pronta e por demais abstrata, e sobretudo levar a criança a reinventar aquilo que é capaz, ao invés de se limitar a ouvir e repetir.

Com base nisso, será apresentada uma sequência didática com a proposta de uma exploração do Cálculo do Ensino Médio, mostrando-se que se pode ensinar essa importante ferramenta Matemática sem o rigor imposto pela definição de Limite, mas sim com a própria linguagem que já figura nesse ciclo escolar. Calculando-se a derivada de todas as cônicas, utilizando-se de funções implícitas e explícitas e Geometria Analítica em uma abordagem nos moldes atuais do Ensino Médio.

OBJETIVOS

Através de uma abordagem que não se utiliza do conceito de limite, pretende-se apresentar o Cálculo, usando a classe das cônicas, para os discentes do Ensino Médio com parte do conhecimento desse ciclo. Aplicando-se a estratégia de se definir reta tangente para o caso das cônicas, discutindo-se o comportamento geométrico dessa reta em relação a tais curvas, sendo que estas, em alguns casos, serão parcialmente estudadas por meio de funções implícitas e explícitas. Almeja-se elucidar o conceito de derivada com um menor grau de abstração do que quando se emprega a definição de limite, além de se aprimorar o conceito de função.

A partir disso, objetiva-se aprimorar o entendimento dos alunos desse ciclo escolar, mostrando-lhes que através da interpretação geométrica de derivada, como a inclinação da reta tangente a um ponto da curva, pode-se derivar toda a classe das cônicas.

Há interesse também, em se aplicar esse conhecimento na resolução de problemas envolvendo máximos e mínimos, crescimento e decrescimento de funções, aproximações de raízes quadradas, dentre outros que já figuram no Ensino Médio, a fim de atingir áreas mais amplas das disciplinas desenvolvidas neste ciclo escolar. Promovendo-se assim, uma maior interdisciplinaridade, que é um dos atributos necessários para se motivar os discentes.

No mais, intenta-se aferir, a partir de uma aplicação empírica em sala de aula, o quanto esse conhecimento pode contribuir com a aprendizagem e compreensão dos alunos em formação.

CAPÍTULO I: Preliminares

I.1 Produto Cartesiano entre A e B

Dados dois conjuntos A e B não vazios, chama-se produto cartesiano entre A e B o conjunto denotado A x B, cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y), tais que $x \in A$ e $y \in B$.

$$\mathbf{A \times B} = \{\mathbf{(x, y)} \mid \mathbf{x} \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{B}\}$$

Se um dos dois conjuntos for vazio o produto cartesiano será vazio e, esse caso não será relevante e não comprometerá o nosso estudo. Assim sendo, iremos desprezar tal caso.

Além disso, o interesse aqui é trabalhar com pares ordenados que possam ser representados no plano de coordenadas ortogonais (Plano Cartesiano) e, por isso, salvo por menção explicita do contrário, os produtos cartesianos serão sempre entre dois conjuntos exclusivamente numéricos e reais.

I.1.2 Propriedades do Produto Cartesiano

I) A x B ≠ B x A, ou seja, o produto cartesiano não possui a propriedade comutativa;

II) Se n(A) = a e n(B) = b, então n (A x B) = ab, em que n(A), n(B) e n (A x B) representa a cardinalidade de cada um desses conjuntos.

III) Caso A ou B seja um conjunto infinito, então A x B será um conjunto infinito.

I.1.3 Plano Cartesiano

Considere dois eixos perpendiculares Ox e Oy, os quais determinam um único plano π. E, nesse plano π, considere um ponto P, cujos pés das perpendiculares aos eixos Ox e Oy são, respectivamente P_x e P_y (Figura 1).

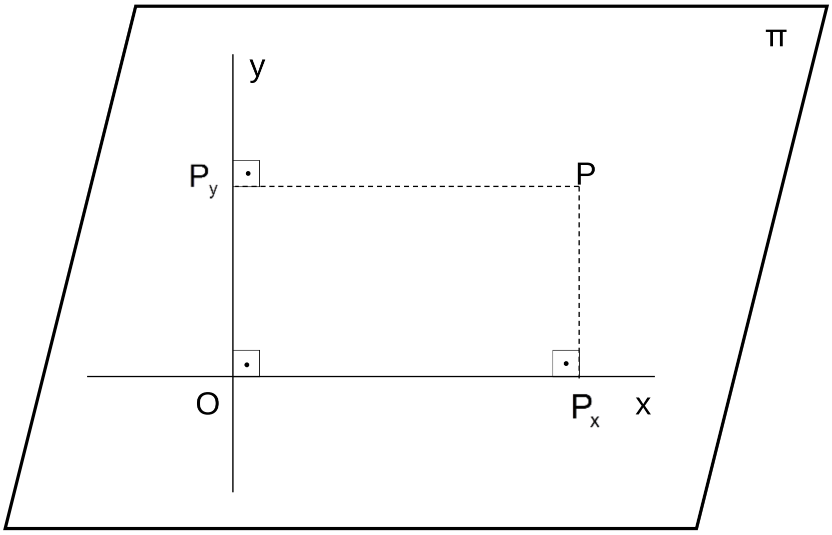


Figura 1:Plano π com as coordenadas de P

Dessa forma, denomina-se abscissa do ponto P à medida do segmento $\overline{OP_x}$ (x_P)e, ordenada do ponto P à medida do segmento $\overline{OP_y}$ (y_P).

O plano π assim formado é o Plano Cartesiano, cujas coordenadas de P podem ser representadas pelo para ordenado $(x_P\ ,\ y_P)$.

I.2 Relação de A em B

Dados dois conjuntos não vazios A e B, a qualquer subconjunto R de A x B dá-se o nome de relação de A em B.

R é uma relação de A em B $\Leftrightarrow \mathbf{R} \subset (\mathbf{A \times B})$

em que A é o **domínio (Dom(R))**, B é o **contradomínio (CD(R))** e o subconjunto dos elementos y do contradomínio tal que o par ordenado (x, y) seja elemento da relação é a **imagem (Im(R))** dessa relação.

Exemplo I.2.1: Represente por meio de um diagrama de flechas a relação

$S = \left\{ (x, y) \in A \times B \,\middle|\, y^2 = x \right\}$, para A = {0, 1, 4} e B = {– 2, – 1, 0, 1, 2}.

De acordo com a regra estabelecida, temos S = {(0, 0), (1, – 1), (1, 1), (4, – 2), (4, 2)}.

O diagrama de flecha pode ser representado por

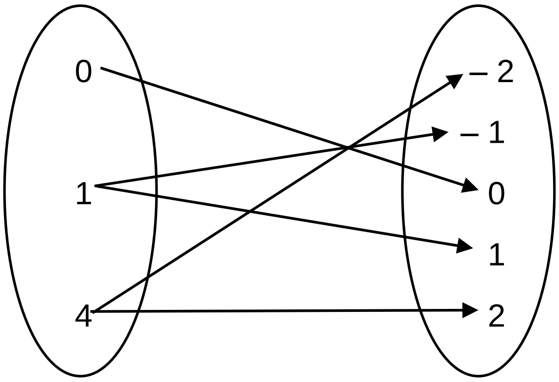


Figura 2: Diagrama de flechas representando a relação S.

Exemplo I.2.2: Apresente a relação $F = \left\{ (x, y) \in A \times B \,\middle|\, y = x^2 - 1 \right\}$, na qual

A = {– 2, – 1, 0, 1, 2} e B = {– 1, 0, 1, 2, 3}.

F = {(– 2, 3), (– 1, 0), (0, – 1), (1, 0) (2, 3)}.

Observe que a relação F possui uma regra interessante: *A cada elemento do conjunto domínio A associa-se um único elemento do contradomínio B*. E, às relações cuja regra anteposta for válida, daremos o nome de **Função de A em B**.

I.3 Funções

Definição: Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função $f : A \rightarrow B$ é uma regra, ou conjunto de instruções, que estabelece como se associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$, sendo $y = f(x)$ a imagem do elemento x.

Vale ressaltar que a função se chama f e não f(x), pois como dito anteriormente, f(x) é a imagem do elemento x.

I.4 Intervalos Reais

Durante o desenvolvimento desse trabalho utilizar-se-á as seguintes notações para intervalos reais:

$[a,b] = \{x \in IR | a \leq x \leq b\}$;

$]-\infty,b] = \{x \in IR | x \leq b\}$;

$]a,b[= \{x \in IR | a < x < b\}$;

$]a,+\infty[= \{x \in IR | x > a\}$;

$IR^{+} = \{x \in IR | x > 0\}$ e $IR^{*} = \{x \in IR | x \neq 0\}$.

Exemplo I.4.1: Considere a função $f : Dom(f) \subset IR \rightarrow IR : y = f(x) = \frac{1}{x}$, e determine o seu domínio.

Resolução

Observe que a imagem da função é dada por $y = \frac{1}{x}$ e, como se trata de uma função cujo denominador é variável, deve-se lembrar que o mesmo não poderá assumir o valor zero. Assim, x ≠ 0 é a condição para que tal imagem exista. Portanto, o Dom(f) = IR*.

Nesse exemplo, é importante entender que o nome da função é f, e não f(x). Além disso, que o seu domínio é formado pelos valores que a variável x pode assumir.

Exemplo I.4.2: Determine os conjuntos A e B para que a terna $(A,\ B,\ x \mapsto y)$ seja função, sendo a regra $x \mapsto y$ dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{1 - x^2}$$

Para se ter uma função, é preciso que a regra $x \mapsto y$ associe a cada x ϵ A um único y ϵ B.

Para tal, basta tomar, por exemplo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\},\ B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\} \text{ e } y = \sqrt{1 - x^2}.$$

Tem-se, assim a função $f: A \to B;\ f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Mas, também é possível tomar

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\},\ B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\} \text{ e } y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Obtendo-se a função $f: A \to B;\ f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Posteriormente, será necessário associar às curvas, definidas por equação, uma ou mais funções, e o procedimento utilizado será o mesmo desse exemplo.

Outros conceitos que serão importantes são: a injetividade; sobrejetividade e bijetividade, além do crescimento e decrescimento das funções. Assim, seguem algumas definições, baseadas em diversos livros já estudados pelo autor e, das próprias definições, do mesmo.

I.5 Função Sobrejetora

Uma função f: A $\to$ B é dita *Sobrejetora* se, e somente se, para todo elemento y de B, existe pelo menos um elemento x de A tal que y = f(x), ou seja, se, e somente se, Im(f) = B.

I.5.1 Função Injetora

Uma função f: A $\rightarrow$ B é dita *Injetora* se, e somente se, elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes, ou seja, se, e somente se, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ou o equivalente $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in A$.

I.5.2 Função Bijetora

Uma função f: A $\rightarrow$ B é dita *Bijetora* se, e somente se, esta for Injetora e Sobrejetora, simultaneamente.

I.5.3 Função Crescente e Decrescente

Uma função f é dita crescente se esta conservar a desigualdade, ou seja, quaisquer que sejam x_1 e x_2 no seu domínio, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ou, o equivalente, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Uma função f é dita decrescente se esta não conservar a desigualdade, ou seja, quaisquer que sejam x_1 e x_2 no seu domínio, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, ou equivalente, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Observação

É importante enfatizar que toda função crescente ou decrescente em todo o seu domínio é injetora, mas nem toda função injetora é crescente ou decrescente em todo o seu domínio.

Exemplo I.5.5: Verifique que a função $f: A \rightarrow B;\ f(x) = x^2 + 2$, em que A = {– 1, 0, 2} e B = {2, 3, 5, 6, 7} é injetora, mas não é crescente nem decrescente.

Resolução

De fato, pois f = {(– 1, 3), (0, 2), (2, 6)}, ou seja, x = – 1 é menor do que x = 0, mas f(– 1) = 3 que é maior do que f(0) = 2 e, x = – 1 é menor do que x = 2, com f(– 1) = 3 sendo menor do que f(2) = 6, então f não é crescente, nem decrescente. Entretanto f(– 1) ≠ f(0) ≠ f(2), então f é injetora.

No capítulo 3, quando se apresentarão algumas aplicações dos conceitos desenvolvidos, o conceito de imagem inversa será interessante para se determinar o vértice da parábola. Assim sendo, definir-se-á tal conceito.

I.6 Imagem inversa de uma função

Seja f uma função e y ϵ Im(f), então , se y = f(x), x ϵ Dom(f) é a imagem inversa de y, em que Im(f) é imagem da função f e dom(f) é o seu domínio.

Pode-se denotar a imagem inversa de y por $f^{-1}(y)$. Além disso, S será o conjunto imagem inversa de y se, $S \subset Dom(f)$ e $\forall\ s \in S$, $f(s) = y$.

I.7 As cônicas

Com base no livro Introdução à História da Matemática (EVES, 2004 p. 198), Apolônio era um dos três gigantes da matemática do século III a.C. Embora ele fosse um notável astrônomo e tivesse escrito sobre diversos assuntos matemáticos, sua fama deve-se principalmente a *Secções Cônicas*, uma obra tal importante que lhe rendeu o codinome de “O Grande Geômetra”, dado por seus contemporâneos, os quais incluía-se Euclides[1] e Arquimedes[2]. Com cerca de 400 proposições em seus oito livros, *Secções Cônicas* é um estudo exaustivo

[1] Euclides foi um famoso matemático grego, pertencente à Escola Megárica, cuja terra natal e data de nascimento desconhecemos. Seu pensamento floresceu em Alexandria, por volta de 300 a.C. Sua obra principal chama-se "Elementos" (em grego, *Stoikheia*), e trata da geometria e da teoria dos números.

[2] Embora Arquimedes seja mais famoso pelo princípio da Hidrostática que traz seu nome, talvez sejam mais notáveis suas investigações sobre a quadratura do círculo, que vem a ser a descoberta da relação entre a circunferência e o seu diâmetro. Na Hidrostática, o "**Princípio de Arquimedes**" pode e deve ser considerado uma importante descoberta que determinou grande adiantamento no estudo das ciências físicas e produziu felizes resultados. Possui aplicações nas ciências naturais, na Farmácia e mesmo nas frequentes atividades do cotidiano

que supera os trabalhos anteriores de Manaecmo[3], Aristeu[4] e Euclides sobre esse assunto.

Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da secção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultavam, respectivamente, em uma elipse, uma parábola e uma hipérbole, considerando-se apenas um ramo da hipérbole (EVES, 2004 p. 199).

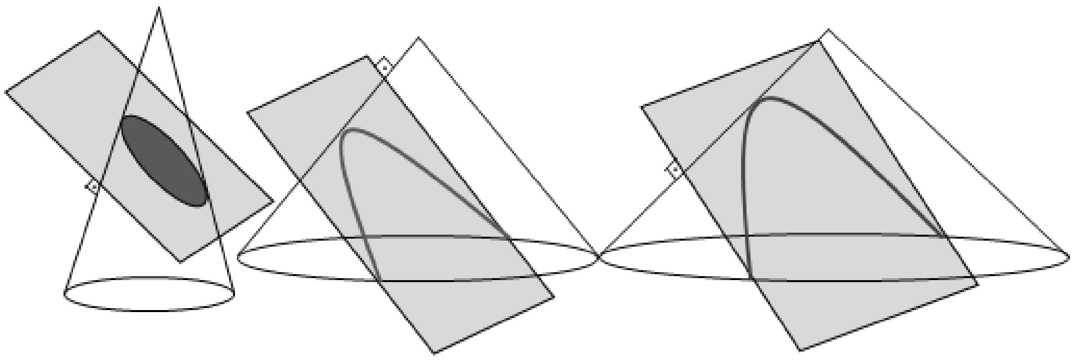


Figura 3: Elipse, Parábola e Hipérbole, respectivamente, antes de Apolônio.

Apolônio, porém, no livro I de seu tratado, obtinha todas as secções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo (EVES, 2004 p. 199).

Segundo (EVES, 1992, p. 60 e 61) os nomes *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, introduzidos por Apolônio, foram copiados da terminologia pitagórica antiga referente à aplicação de áreas.

“Quando os pitagóricos aplicavam um retângulo a um segmento de reta – isto é, colocavam a base do retângulo ao longo do segmento de reta, com um vértice do retângulo sobre uma extremidade do segmento – eles diziam que se tinha um caso de “ellipsis”, “parabole” ou hyperbole, conforme a base do

---

[3] Manaecmo (380 a.C. - 320 a.C.) foi o primeiro matemático a mencionar as cônicas na tentativa de solucionar o clássico problema da Duplicação do Cubo.

[4] Aristeu, o Velho (370 a.C.-300 a.C.) foi um matemático grego que trabalhou em secções cônicas. Foi um contemporâneo de Euclides, porém, provavelmente mais velho

retângulo ficava aquém do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia", (EVES, 2004 p. 199).

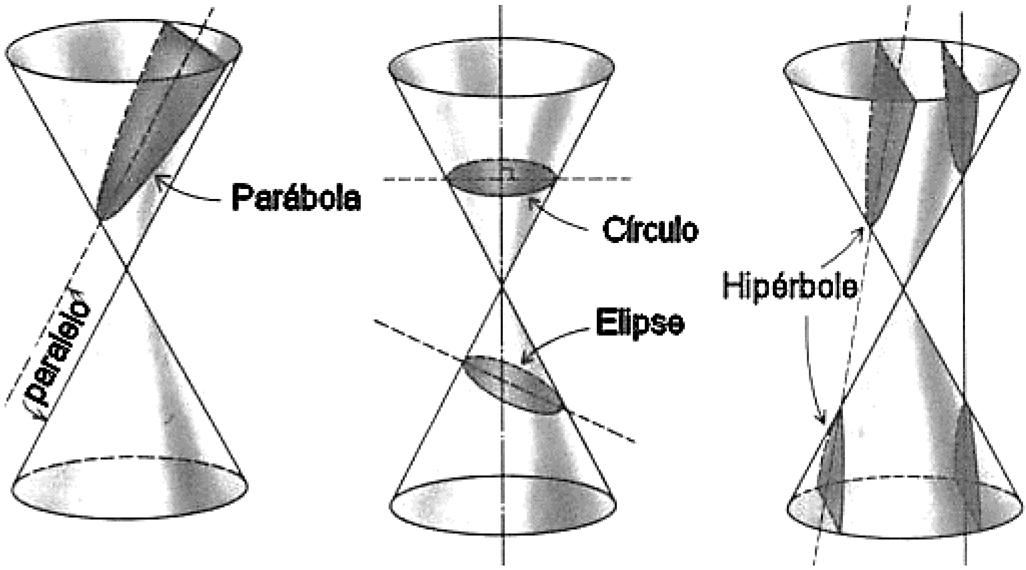


Figura 4: cônica, após Apolônio.

Alguns experimentos podem ser realizados para se obter o formato dessa cônicas. Um desse experimentos é ligar uma lanterna e direcioná-la para uma parede, o feixe de luz emitido desenhará nessa parede uma curva cônica. Este fato acontece porque o feixe de luz emitido pela lanterna forma um cone, e a parede funciona como um plano que corta o cone formado. Dependendo da inclinação da lanterna relativamente à parede, assim se obtém uma circunferência, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

"Todo o trabalho de Apolônio foi apresentado sob forma geométrica regular, sem a ajuda da notação algébrica da geometria analítica dos dias atuais" (EVES 2004, p. 198). Todavia, para o presente estudo, que necessitará de funções que possuem retas tangentes, utilizará a simbologia e terminologia analítica moderna para representar essas cônicas.

O interesse pelo estudo das cônicas remonta a épocas muito recuadas, como dito anteriormente. De fato, estas curvas desempenham um papel importante em vários domínios da física, incluindo a astronomia, a economia, a engenharia e em dentre outras, pelo que não é de se estranhar que o interesse pelo seu estudo seja tão antigo (EVES, 2004 p. 198).

A função quadrática aparece muito cedo no ensino básico, já no 9º ano do Ensino Fundamental II, ela aparece em Matemática, na maior parte dos livros didáticos e também nos sistemas apostilados de ensino. Mas nesse ciclo (Ensino Fundamental), não seria conveniente utilizar o conceito de inclinação da reta tangente, uma vez que os alunos ainda não estão familiarizados com os conceitos de geometria analítica.

Já no ensino médio, quando se aprofunda o ensino de funções, os alunos estudam a função polinomial do 1º grau e aprende que essa função descreve uma única reta y = **a**x + **b**, na qual **a** é chamado de coeficiente angular da reta, que aqui será chamado de inclinação da reta, e **b** é chamado de coeficiente linear. Além disso, nessa série, também se estuda a função polinomial do 2º grau, que será chamada de função quadrática.

I.8. Definições para as cônicas

I.8.1 Parábola

À curva aberta obtida por meio de um corte não paralelo à base de um cone circular reto, dá-se o nome de elipse.

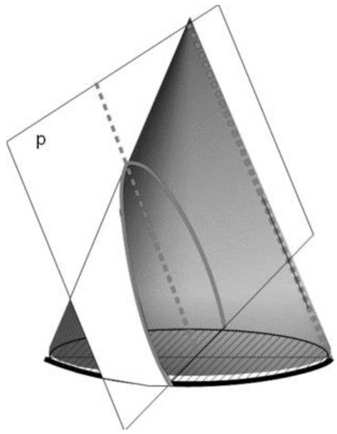


Figura 5:Parábola

Pode-se afirmar que, a parábola é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta d (diretriz) e um ponto F (foco) $\notin$ d .

Com isso, torna-se possível equacionar a parábola com coordenadas cartesianas.

I.8.1.1 Equação da Parábola

Sejam **2f** a distância entre a reta diretriz d e o foco F da parábola cujo vértice é a origem do plano cartesiano V = (0, 0), então a sua equação pode ser dada por:

I. $x^2 = 4fy$ (com eixo de simetria vertical e concavidade voltada para cima);

II. $x^2 = -4fy$ (com eixo de simetria vertical e concavidade voltada para baixo);

III. $y^2 = 4fx$ (com eixo de simetria horizontal e concavidade voltada para a direita);

IV. $y^2 = -4fx$ (com eixo de simetria horizontal e concavidade voltada para a esquerda).

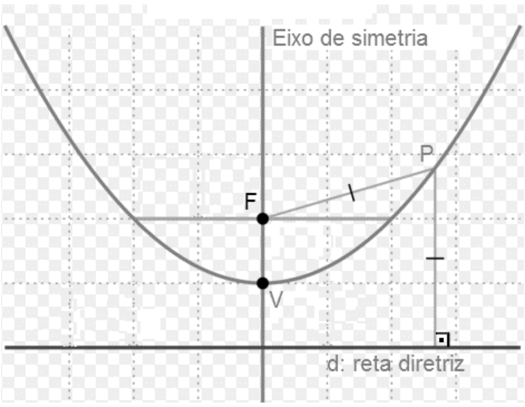


Figura 6:Componentes da Parábola

I.8.2 Elipse

À curva fechada obtida por meio de um corte paralelo à geratriz de um cone circular reto, dá-se o nome de parábola.

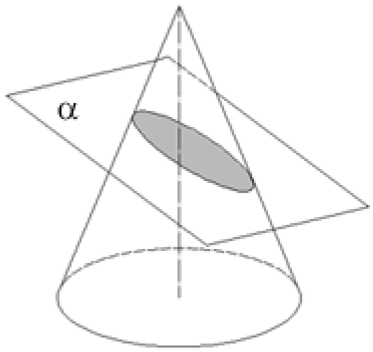


Figura 7:Parábola

Pode-se afirmar que, a elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distância até dois pontos distintos F_1 e F_2 (focos) seja constante.

Com isso, torna-se possível equacionar a elipse com coordenadas cartesianas.

I.8.2.1 Equação da elipse

Sejam **2a** a soma das distância de um ponto da elipse até dois pontos distintos F_1 e F_2, e seja **2b** a distância entre os dois polos mais achatados dessa curva, cujo centro é a origem do plano cartesiano C = (0, 0), então a sua equação pode ser dada por:

I. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(com eixo maior horizontal);

II. $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ (com eixo maior vertical).

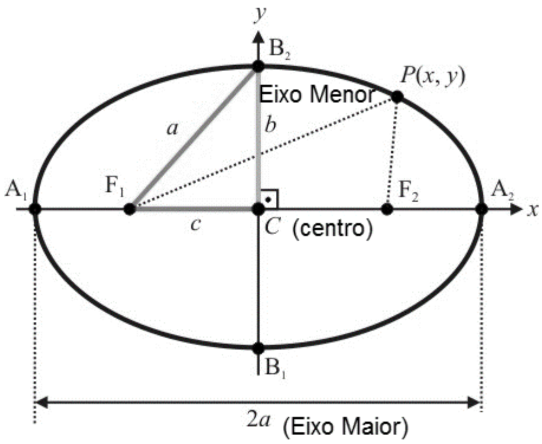


Figura 8:Componentes da Elipse

I.8.3 Hipérbole

À curva aberta obtida por meio de um corte não paralelo à geratriz de um cone circular reto, dá-se o nome de hipérbole.

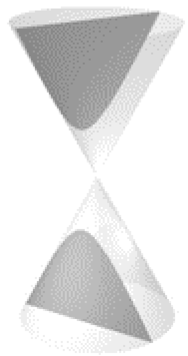


Figura 9: Hipérbole

Pode-se afirmar que, a hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cujo módulo da diferença das distâncias até dois pontos distintos F_1 e F_2 (focos) seja constante.

Com isso, torna-se possível equacionar a hipérbole com coordenadas cartesianas.

I.8.3.1 Equação da hipérbole

Sejam **2a** o módulo da diferença das distâncias de um ponto da hipérbole até dois pontos distintos F_1 e F_2, e seja **2b** a medida do eixo, cujo centro é a origem do plano cartesiano C = (0, 0), então a sua equação pode ser dada por:

I. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (com eixo Real ou Transverso na horizontal);

II. $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ (com eixo Real ou Transverso na vertical).

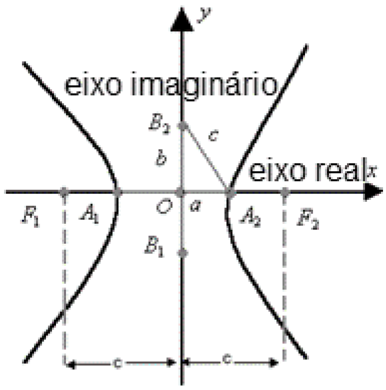


Figura 10: Componentes da Hipérbole

I.8.4 Circunferência

À curva fechada obtida por meio de um corte paralelo à base de um cone circular reto, dá-se o nome de circunferência.

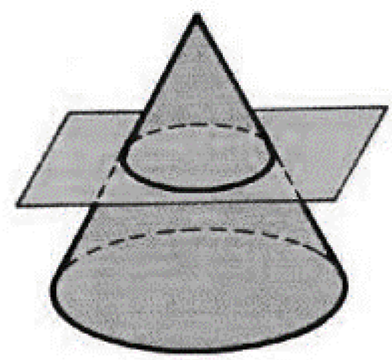


Figura 11: Circunferência

Pode-se afirmar que, a circunferência é o lugar geométrico dos pontos cujo distância até um ponto fixo O (centro) seja constante r.

Com isso, torna-se possível equacionar a circunferência com coordenadas cartesianas.

I.8.4.1 Equação da circunferência

Sejam **r** a distância de um ponto da circunferência até o centro O = (0, 0), então sua equação será:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

I.9 Definições e Propriedades de algumas funções

I.9.1 Função Afim

A relação $y = mx + n,\ m \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}$, que faz corresponder a todo número real x um único número real y, tal que $y = mx + n$, define a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = mx + n$, que descreve, no Plano Cartesiano, uma reta de inclinação **m** e coeficiente linear **n**, conforme gráficos a seguir, sendo a inclinação dada pela razão entre a variação das ordenadas de dois pontos P e Q da reta, e as suas respectivas abscissas.

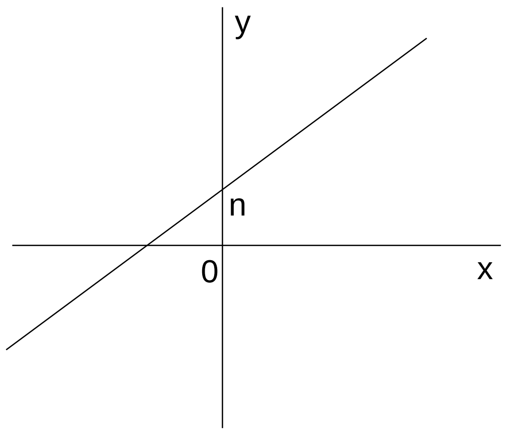


Gráfico 1: reta com inclinação m > 0 e coeficiente linear n.

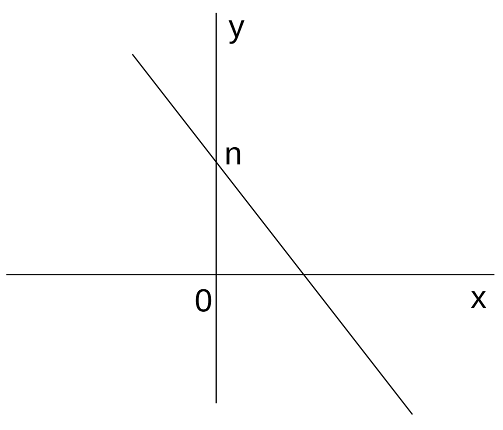


Gráfico 2: reta com inclinação m < 0 e coeficiente linear n.

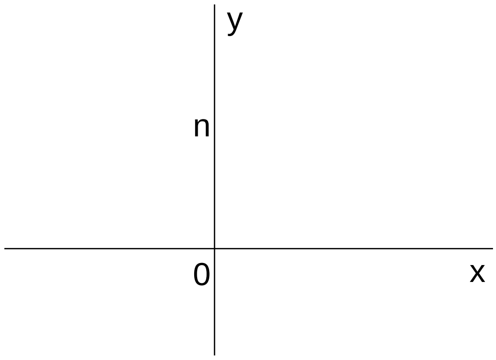


Gráfico 3: reta com inclinação m = 0 e coeficiente linear n.

Observação

De acordo com (LIMA, CARVALHO, WAGNER E MORGADO, 2012, p. 106) “Se a função afim f é dada por f(x) = ax + b, não é adequado chamar o número *a* de coeficiente angular da função f.”

Isso porque, em parte dos casos que se estuda não há ângulo algum em questão, mas como neste trabalho, irá se estudar a reta que esta função determina, então fica correto se dizer que o número *a* é o coeficiente angular ou a inclinação da reta. Para o caso das funções, o correto, segundo (LIMA, CARVALHO, WAGNER E MORGADO, 2012, p. 107) é chamar o número *a* de taxa de variação da função.

I.9.2 Função Quadrática

A relação $y = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, que faz corresponder a todo número real x um único número real y, tal que $y = ax^2 + bx + c$, define a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$, que descreve, no Plano Cartesiano, uma parábola. Conforme gráficos a seguir.

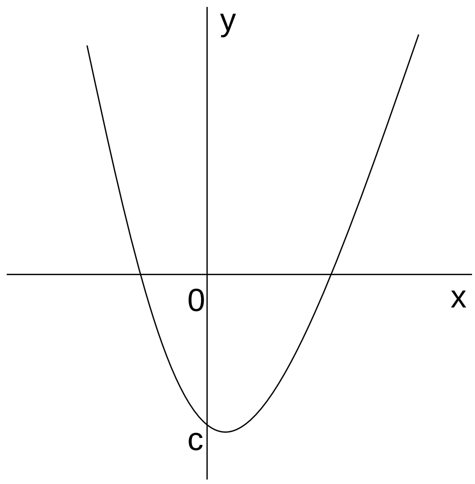


Gráfico 4: parábola com concavidade voltada para cima a > 0.

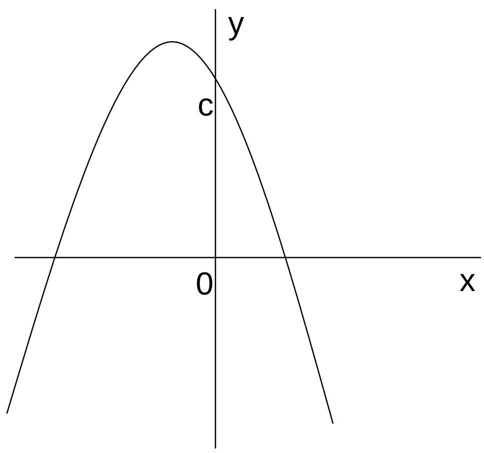


Gráfico 5: parábola com concavidade voltada para baixo a < 0.

I.9.3 Função implícita da semicircunferência centrada na origem

A relação $y^2 = r^2 - x^2$, com $x \in IR \mid -r \leq x \leq r$ e $r > 0$, que faz corresponder a todo número x um único número real positivo y, tal que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, define a função $f : A \to IR$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, sendo $A = \{x \in IR \mid -r \leq x \leq r\}$ o seu domínio e $B = \{y \in IR \mid 0 \leq y \leq r\}$ a sua imagem.

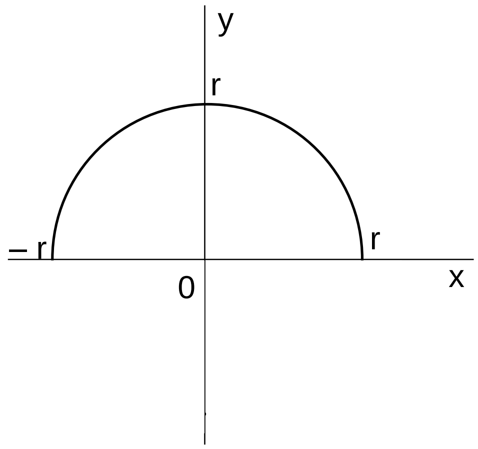


Gráfico 6: semicircunferência centrada na origem e raio r, cuja imagem é y $\geq$ 0.

Observação:

Também se pode considerar a função $f : A \to IR$; $f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, sendo $A = \{x \in IR \mid -r \leq x \leq r\}$ e sua imagem é $B = \{y \in IR \mid y \leq 0\}$. Mas irá se considerar apena o caso anterior.

Caso o centro da circunferência não seja o ponto (0, 0), basta se fazer uma mudança de eixos coordenados, conforme será explicado no exemplo I.7.3.1, a seguir.

Exemplo I.9.3.1

Escreva, uma forma explícita, para a imagem da relação $f : [-r, r] \to [0, r]$, com r > 0 que represente a função da semicircunferência centrada em (x_C, y_C).

Resolução

Como já foi dito, basta fazer uma mudança de eixos coordenados e utilizar a função apresentada anteriormente.

Considere uma novo sistema de coordenadas cartesianas, $x'O'y'$. Conforme gráfico a seguir.

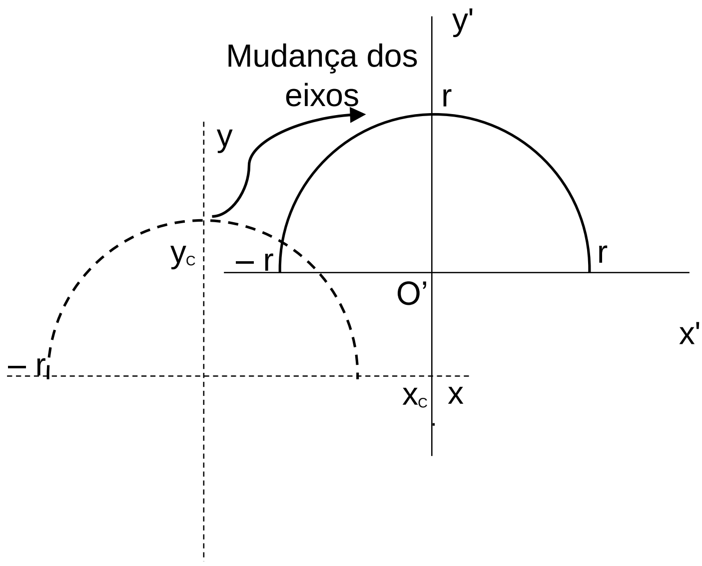


Figura 12: Mudando os eixos coordenados de xOy para x'Oy'

Esse procedimento consiste em adotar o centro (x_C, y_C) como origem do novo eixo de coordenadas, ou seja, adotar que $x' = x - x_C$ e $y' = y - y_C$. Com isso, obtém-se que $f : [r, r] \to [0, r]$ terá imagem $y' = \sqrt{r^2 - (x')^2} \Rightarrow y - y_C =$ $= \sqrt{r^2 - (x - x_C)^2} \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - (x - x_C)^2} + y_C$.

Observação:

Não serão considerados os movimentos de rotações dos eixos coordenados.

I.9.4 Função implícita da semielipse com os focos no eixo das abscissas

A relação $y^2 = b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2$, com $x \in \mathbb{R} \mid -a \le x \le a$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+$, que faz corresponder a todo número x um único número real positivo y, tal que $y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, define a função $f : A \to \mathbb{R}$; $f(x) = y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, (função da semielipse com os focos no eixo das abscissas) com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \le x \le a\}$ e sua imagem é $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le b\}$.

Para se obter a elipse com ponto médio dos focos fora da origem, mas em (x_C, y_C), basta repetir o procedimento de translação dos eixos (não se considerando as rotações), utilizado no caso da semicircunferência, que irá se obter

$$f : A \to \mathbb{R} \; ; \; f(x) = y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 (x - x_C)^2} + y_C .$$

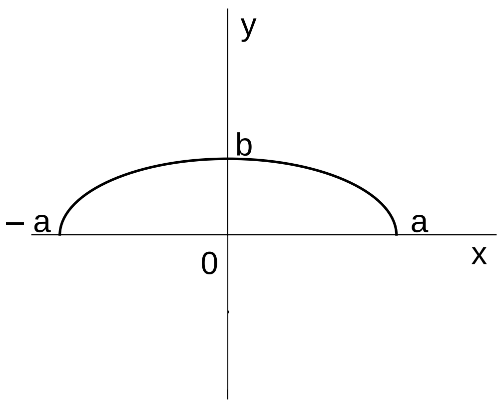


Gráfico 7: semielipse com coordenadas dos focos no eixo das abscissas.

Observação:

Nesse caso, também se pode considerar a função $f : A \to \mathbb{R}$; $f(x) = = y = -\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \le x \le a\}$ e sua imagem é $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -b \le y \le 0\}$.

I.9.5 Função da hipérbole equilátera

A relação $y = \frac{c}{x}, c \in IR^*$, em que x é uma variável pertencente a $\mathbb{R}^*$, que faz corresponder a todo número real não nulo x um único número real não nulo y, tal que $y = \frac{c}{x}$, define a função $h: IR^* \to IR$; $h(x) = \frac{c}{x}$, cuja imagem é $\mathbb{R}^*$.

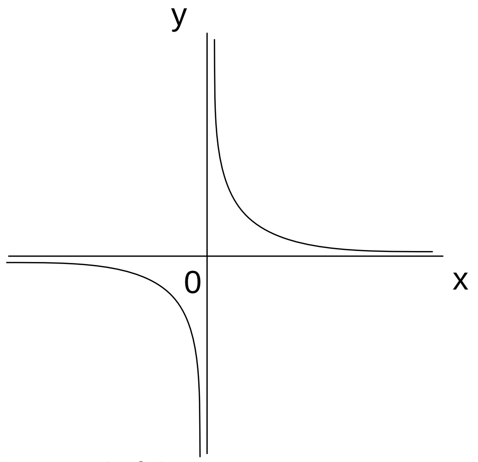


Gráfico 8: Hipérbole $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{1}{x}$.

Em cada um destes casos, as expressões apresentadas *não são as funções*, mas apenas meios de definir, maneiras técnicas de estabelecer a correspondência $x \mapsto y$.

Observação

Para que uma expressão possa ser utilizada para definir uma função, ela deve satisfazer às duas seguintes condições:

- A expressão deve determinar efetivamente, para cada valor da variável independente, o valor correspondente da função;

- A expressão deve ser tal que a cada valor de x faça corresponder um único valor de y.

Satisfazendo, com isso, as condições necessárias para que uma relação seja uma função.

I.10 Reta tangente

A palavra tangente é originária da palavra latina “*tangens*” e significa “tocando” ou intersectando. Então, uma reta tangente a uma curva é uma reta que intersecta essa curva em um determinado ponto.

Na maior parte dos livros de matemática do ensino médio, o conceito de reta tangente a uma curva é dado exclusivamente por *reta que intercepta essa curva em um único ponto*. Mas essa definição é imprecisa e incompleta.

Segundo (BIZELLI), “[...] quando Isaac Newton (1642-1727) trabalhava com “o problema da reta tangente”, percebeu como era complicado definir com exatidão o significado de uma reta tangente a uma curva qualquer”.

Entretanto, para as cônicas, objeto de estudo desse trabalho, fica correto dizer, de acordo com a geometria, que a reta tangente é a única reta que intercepta a curva em um único ponto e seus pontos nas proximidades dos pontos de tangência são suficientemente próximos dos pontos da curva, ou seja, os valores da reta tangente nas proximidades do ponto de tangência são suficientemente próximos dos valores da curva em questão, conforme ilustra as figuras a seguir.

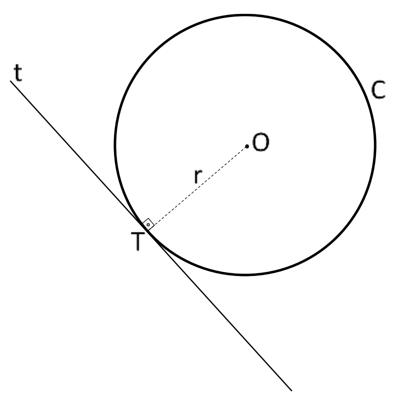


Figura 13: reta t tangente à circunferência C no ponto T

Como a reta t é tangente à circunferência C, de centro O e raio medindo r, em um único ponto T e, da geometria plana segue que o raio $\overline{OT}$ é perpendicular à reta t.

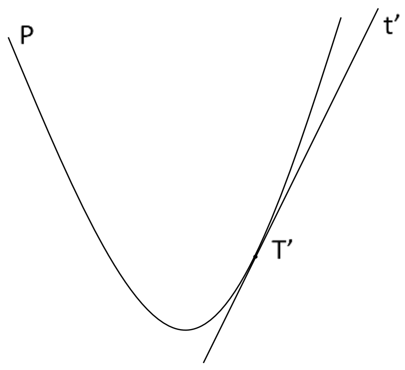


Figura 14: reta t' tangente à parábola P no ponto T'

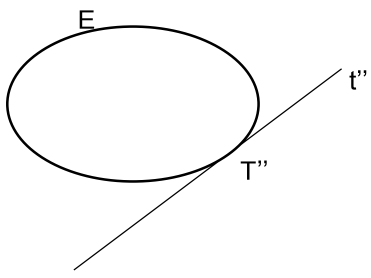


Figura 15: reta t'' tangente à elipse E no ponto T''

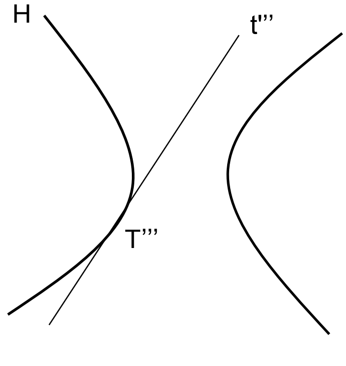


Figura 16: reta t''' tangente à hipérbole H no ponto T'''

I.10.1 Reta tangente a uma cônica

Uma reta r é tangente a uma cônica γ se, e somente se, têm um único ponto comum.[5]

É com essa definição que se construirá e demonstrará os Teoremas e Corolário que seguirão.

I.10.2 Reta tangente e Derivada

A derivada de uma função f em um dos seus pontos $P=(x_0, y_0)$ é igual à tangente trigonométrica do ângulo α formado pela Reta Tangente ao gráfico de f no ponto $P=(x_0, y_0)$ e o eixo das abscissas, no sentido anti-horário. Em outras palavras, a derivada, é a inclinação m da Reta Tangente pelo ponto $P=(x_0, y_0)$. Denotamos $m=f'(x_0)$.

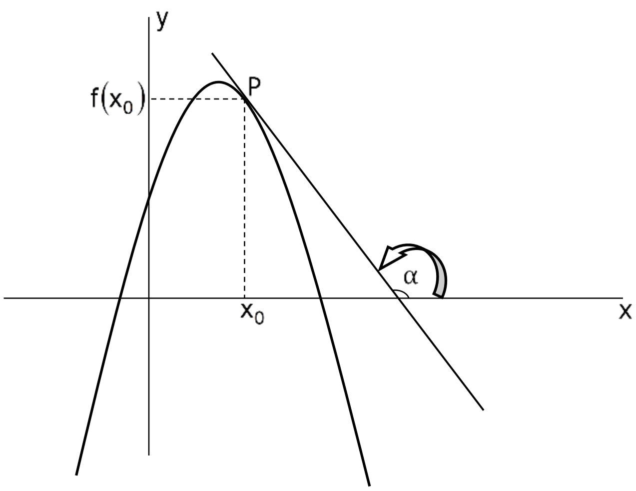


Figura 17: ângulo α formado entre a reta tangente e o eixo x, no sentido anti-horário.

[5] No caso da função quadrática (Parábola), faz-se necessário que a reta r não seja paralela ao eixo de simetria dessa cônica.

E da geometria analítica, tem-se que a inclinação da reta é $m = \operatorname{tg} \alpha$.

Outra forma de se determinar a inclinação de uma reta não vertical, é calculando-se $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, em que (x_1, y_1)e (x_2, y_2) são dois dos pontos dessa reta. A ideia desse cálculo gera um modelo de equação de reta que será bastante útil.

$$m = \frac{x - x_0}{y - y_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0),$$

sendo (x_0, y_0) um ponto conhecido e (x, y)um ponto genérico da reta em estudo.

CAPÍTULO II: Derivada das cônicas

I.2 Derivada da Reta

Com o intuito exclusivo de se utilizar funções, não se fará menção à reta vertical.

Teorema 1

A derivada de uma função a fim $r: IR \to IR\ ;\ r(x) = ax + b,$ com $a \in IR$ e $b \in IR$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é denotada por $r'(x_0) = a.$

Demonstração

Considere que a reta definida pela função $t: IR \to IR\ ;\ t(x) = mx + n$ é a reta tangente à função $r: IR \to IR\ ;\ r(x) = ax + b,$ com $a \in IR$ e $b \in IR$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Assim, por um lado $t(x_0) = r(x_0) \Rightarrow mx_0 + n = ax_0 + b \Leftrightarrow n = ax_0 + b - mx_0$, que representa o coeficiente linear de todas as retas que intersectam r no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Por outro lado, a intersecção entre r e t se dá quando $r(x) = t(x) \Rightarrow ax + b = mx + n$, e substituindo-se o n encontrado anteriormente, segue que $ax + b = mx + ax_0 + b - mx_0 \Leftrightarrow m(x - x_0) = a(x - x_0) \Rightarrow m = a \text{ ou } x = x_0$ mas, pela definição de reta tangente a uma reta, a intersecção entre estas deve possuir infinitos pontos, então m = a.

Portanto, a inclinação m da reta tangente à função no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é a derivada de f nesse ponto, é $m = r'(x_0) = a$, conforme proposto.

Corolário 1

A equação da reta tangente à função $r: IR \to IR$; $r(x) = ax + b$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é a própria equação da reta r.

Demonstração

Do teorema 1 tem-se que a inclinação da reta tangente à função $r: IR \to IR$; $r(x) = ax + b$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $m = a$ e, o coeficiente linear é $n = ax_0 + b - mx_0$.

Substituindo-se o valor de m em n, segue que $n = ax_0 + b - ax_0 \Rightarrow n = b$.

Portanto, a forma reduzida da equação da reta tangente à função $r: IR \to IR$; $r(x) = ax + b$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é a própria equação da reta r, conforme proposto.

Outrossim, é que a própria definição de reta tangente a uma reta já prevê esse fato.

Exemplo II.2.1: Derive, sem utilizar o resultado do Teorema e do corolário do Teorema 1, a função que possui reta tangente $f: IR \to IR$; $f(x) = 2x + 5$, e determine a equação da reta tangente ao gráfico da f no ponto (1, 2).

Resolução

Procede-se como na demonstração do Teorema 1.

Considere que a reta definida pela função $t: IR \to IR$; $t(x) = mx + n$ é a reta tangente à função $r: IR \to IR$; $R(x) = 2x + 5$, no ponto $T = (1,\ 2)$.

Assim, por um lado $t(1) = r(1) \Rightarrow m + n = 2 + 5 \Leftrightarrow n = 7 - m$.

Por outro lado, a intersecção entre r e t se dá quando $r(x) = t(x) \Rightarrow 2x + 5 = mx + n$, e substituindo-se o n encontrado anteriormente, segue que $2x + 5 = mx + 2 + 5 - mx \Leftrightarrow m(x-1) = 2(x-1) \Rightarrow m = 2 \ \text{ ou } \ x = 1$, mas x é variável em r e em t, então m = a.

Substituindo-se em n o valor de m encontrado, segue que n = 7 – 2 = 5.

Portanto derivada da função f no ponto $T = (1,\ 2)$ é $m = f'(1) = 2$, e a reta tangente ao gráfico da f é representada pela própria função $f: IR \to IR\ ;\ f(x) = 2x + 5$.

Exemplo II.2.2: Derive, a função $f: IR \to IR\ ;\ f(x) = -\frac{2}{3}x + 7,$ e determine a equação da reta tangente ao gráfico da f no ponto (0, 8).

Resolução

De acordo com o Teorema 1, $f'(x_0) = -\frac{2}{3}$. E, pelo Corolário do Teorema 1, a equação da reta tangente ao gráfico de f é $y = -\frac{2}{3}x + 7$.

II.3 Derivada da Função Quadrática

Teorema 2

A derivada da função $f: IR \to IR\ ;\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Demonstração

Considere que a reta definida pela função $t: IR \to IR\ ;\ t(x) = mx + n$ é a reta tangente à parábola $f: IR \to IR\ ;\ f(x) = ax^2 + bx + c,$ no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Assim, por um lado $t(x_0) = f(x_0) \Rightarrow mx_0 + n = ax_0{}^2 + bx_0 + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = ax_0{}^2 + (b - m)x_0 + c,$ o qual é o coeficiente linear de todas as retas que intersectam o gráfico de f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Por outro lado, a intersecção entre f e t se dá quando $f(x) = t(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow ax^2 + bx + c = mx + n$ e, substituindo-se o n encontrado anteriormente e $y_0 = ax_0^{\ 2} + bx_0 + c$, segue que $ax^2 + bx + c = mx + ax_0^{\ 2} + (b - m)x_0 + c$ $\Leftrightarrow ax^2 + (b - m)x - ax_0^{\ 2} + (m - b)x_0 = 0$ (I) . E, como no caso das cônicas, esse ponto de intersecção é único, o discriminante dessa equação quadrática, em x, deve ser zero.

O que resulta em

(I) $\Delta = (b - m)^2 - 4a(-ax_0^{\ 2} + mx_0 - bx_0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2mb + b^2 + 4a^2x_0^{\ 2} + 4abx_0 +$
$-4amx_0 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m(b + 2ax_0) + (b + 2ax_0)^2 = 0 \Leftrightarrow (m - (b + 2ax_0))^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 2ax_0 + b$.

Portanto a derivada, que é a inclinação m da reta tangente à parábola no ponto $T = (x_0,\ y_0)$, é $f'(x_0) = 2ax_0 + b$, conforme proposto.

Corolário do Teorema 2

A equação da reta tangente à parábola $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por $y = (2ax_0 + b)x - ax_0^{\ 2} + c$.

Demonstração

Do Teorema 2 tem-se que a inclinação da reta tangente à parábola $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c,$ no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $m = 2ax_0 + b$, e o coeficiente linear é $n = ax_0^{\ 2} + (b - m)x_0 + c$.

Substituindo-se o valor de m em n, segue que $n = ax_0^{\ 2} + bx_0 - (2ax_0 + b)x_0 + c = ax_0^{\ 2} + bx_0 - 2ax_0^{\ 2} - bx_0 + c \Rightarrow n = -ax_0^{\ 2} + c$.

Portanto, a forma reduzida da equação da reta tangente à parábola dada, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $y = (2ax_0 + b)x - ax_0^{\ 2} + c$, conforme proposto.

Observação

Para se demonstrar o corolário 2, também se pode utilizar a equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, na qual m é a inclinação reta e, escrever a equação da reta tangente como $y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$.

Exemplo II.3.1: a) Determine as coordenadas do vértice da parábola definida pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ em função dos coeficientes de f. Utilize $\Delta = b^2 - 4ac$.

b) Determine a equação da reta tangente a curva f no ponto $(x_0 ,\ y_0)$.

Resolução

a) Considerando-se que esse vértice é o ponto $V = (x_V,\ y_V)$ no qual a reta tangente intercepta essa parábola, teremos que o coeficiente angular dessa reta será, conforme o Teorema 2, $m = 2ax_V + b$, mas a reta tangente à parábola pelo seu vértice é uma reta horizontal (função constante), uma vez que o vértice da parábola sempre é seu ponto de máximo o mínimo, conforme será abordado no capítulo 3, ou seja, sua inclinação é zero. Logo, $m = 2ax_V + b = 0 \Rightarrow x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

Agora que já se tem x_V, basta calcular a ordenada correspondente para se obter o y_V. Então

$$y_V = f(x_V) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} =$$
$$= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Portanto, $V = \left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a} \right)$.

b) Do corolário 1, segue que a equação da reta tangente à parábola $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por $y = (2ax_0 + b)x - ax_0{}^2 + c$.

Exemplo II.3.2: Um corpo desloca-se segundo a equação horária descrita pela curva $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 4t$, em que f(t) é a sua posição no instante t. No instante $t = 2$ esse corpo fica livre da ação de forças.

a) Determine a equação que descreve a sua trajetória t $\geq$ 2.

b) Qual será a posição desse corpo no instante t = 4?

c) Se esse corpo permanecesse na sua trajetória original, qual seria a distância, em t = 4, entre sua posição atual e a sua posição na curva original?

Resolução

a) Como no instante t = 2 o corpo fica livre de forças, sua trajetória passará a ser a reta tangente à curva que este descrevia. Assim sendo, basta determinar a equação da reta tangente ao gráfico no ponto $T = (2\,, f(2)) = (2\,, 6)$.

Pelo Corolário do Teorema 2, tem-se que a reta tangente pode ser descrita por

$$y - 6 = \left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 2 + 4 \right)(x - 2) \Rightarrow y = 2x + 2.$$

O movimento ocorre de acordo com o gráfico a seguir.

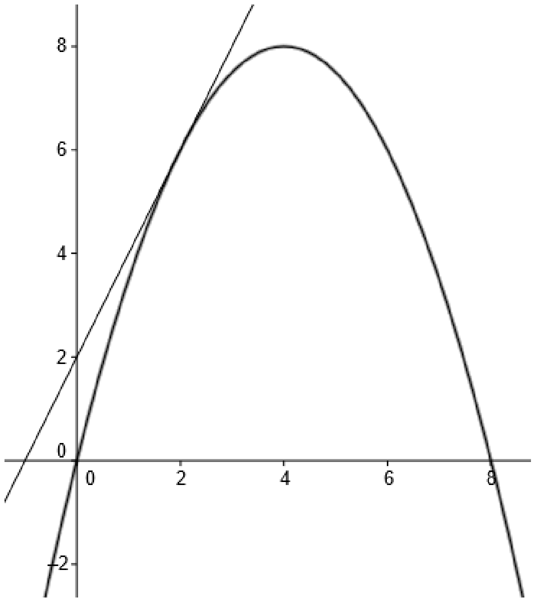


Gráfico 9: função $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 4t$ e sua reta tangente num dado ponto.

b) Como se tem, o item a, a equação horária do espaço para t $\geq$ 2, então a posição em t = 4 será $y = 2 \cdot 4 + 2 \Rightarrow y = 10$.

c) Do item b, tem-se que o corpo no instante t = 4 se encontrará na posição 10 e, caso tivesse seguido a trajetória original, ele estaria na posição $f(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 8$.

Por tanto o corpo estaria a uma distância 2 da sua posição na trajetória atual.

II.3.3 Uma curiosa aplicação da propriedade da parábola

Fazendo uso da propriedade refletora da parábola, conta a história que Arquimedes construiu espelhos parabólicos, os quais por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos quando das invasões de Siracusa. Lembre-se que a concentração de energia gera calor.

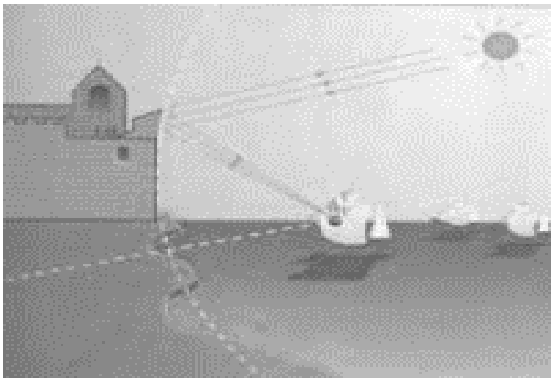


Figura 18: Espelho parabólico utilizado para incendiar barcos

II.4 Derivada da Semicircunferência

Embora a circunferência não possa ser representada por uma função, utilizando-se a função mencionada no capítulo 1, $f: A \to IR$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, sendo $A = \{x \in IR \mid -r \le x \le r\}$ e sua imagem $B = \{y \in IR \mid 0 \le y \le r\}$, com $r \in IR^+$, que determina uma semicircunferência, centrada na origem do sistema de coordenadas cartesianas, pode-se calcular a derivada dessa cônica.

Teorema 3

A derivada da função $f:]-r, r[\to IR$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, com $r \in IR^+$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0) = -\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0{}^2}}$, $x_0 \neq -r$ e $x_0 \neq r$, sendo $IR^+ \cup \{0\}$ o seu conjunto imagem.

Demonstração

Considere a função afim $t: IR \to IR$; $t(x) = mx + n$ sendo a reta tangente à função $f: [-r, r] \to IR$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x_0 \neq -r$ e $x_0 \neq r$, e $r \in IR^+$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Dessa forma, por um lado,

$t(x_0) = f(x_0) \Rightarrow mx_0 + n = \sqrt{r^2 - x_0{}^2} \Leftrightarrow n = \sqrt{r^2 - x_0{}^2} - mx_0$, que é o coeficiente linear de todas as retas que intersectam f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Por outro lado, a intersecção entre f e t se dá quando $f(x) = t(x) \Rightarrow \sqrt{r^2 - x^2} = mx + n$ e, substituindo-se o valor de n encontrado anteriormente, segue que $\sqrt{r^2 - x^2} = mx + \sqrt{r^2 - x_0{}^2} - mx_0 \Rightarrow r^2 - x^2 =$

$$= m^2x^2 + r^2 - x_0{}^2 + m^2x_0{}^2 + 2m\sqrt{r^2 - x_0{}^2} \cdot x - 2m^2x_0x - 2mx_0\sqrt{r^2 - x_0{}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2 + 1) \cdot x^2 + \left(2m\sqrt{r^2 - x_0{}^2} - 2m^2x_0\right) \cdot x - x_0{}^2 + m^2x_0{}^2 - 2mx_0\sqrt{r^2 - x_0{}^2} = 0.$$

Assim, como esse ponto de intersecção, no caso das cônicas, precisa ser único, o discriminante dessa equação quadrática, em x, deve ser zero.

Dessa forma,

$$4m^2r^2 - 4m^2x_0{}^2 - 8m^3x_0\sqrt{r^2 - x_0{}^2} + 4m^4x_0{}^2 + 4m^2x_0{}^2 - 4m^4x_0{}^2 +$$

$$+ 8m^3x_0\sqrt{r^2 - x_0{}^2} + 4x_0{}^2 - 4m^2x_0{}^2 + 8mx_0\sqrt{r^2 - x_0{}^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2x_0 + 2m\sqrt{r^2 - x_0{}^2}\right)^2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0{}^2}}.$$

Portanto a derivada da função f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0) = -\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0{}^2}}$, conforme proposto.

Observação

Nota-se que $f'(x_0) = -\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0{}^2}} = -\dfrac{x_0}{y_0},\ \ y_0 \neq 0$.

Corolário do Teorema 3

A equação da reta t tangente à função $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, com

$r \in IR^+$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por $y = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} \right) x + \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}}$,

$x_0 \neq -r$ e $x_0 \neq r$.

Demonstração

Segue do Teorema 3 que a derivada da função $f :]-r\,,r[\to IR$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, com $r \in IR^+$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $m = f'(x_0) = -\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}}$ e, a equação da reta t pode ser representada por $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} \right) x + \frac{x_0^{\ 2}}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} + y_0$.

Mas, como $T = (x_0\ , y_0)$ é o ponto comum entre t e f, então $y_0 = \sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}$.

Assim, $y = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} \right) \cdot x + \frac{x_0^{\ 2}}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} + \sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}} \Rightarrow y = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} \right) \cdot x +$

$+ \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}}$.

Portanto, a forma reduzida da equação da reta tangente à função f, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $y = \left(-\frac{x_0}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}} \right) \cdot x + \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x_0^{\ 2}}}$, conforme proposto.

Observação

Nota-se que a equação dessa reta pode ser expressa por $y = -\frac{x_0}{y_0} \cdot x + \frac{r^2}{y_0}$.

Nota-se também que se a semicircunferência for centrada no ponto $O=(x_O,\ y_O)$, pode-se proceder como no exemplo 1.6 e realizar uma translação dos eixo coordenados. Obtendo-se assim que a derivada da função $f:[-r\,,r]\rightarrow IR^{+}\cup\{0\}$; $f(x)=\sqrt{r^2-(x-x_O)^2}+y_O$, com $r\in IR^{+}$ no ponto $T=(x_0,\ y_0)$ é $f\,'(x_0)=-\dfrac{x_0}{\sqrt{r^2-(x_0-x_O)^2}}$, $x_0-x_O\neq -r$ e $x_0-x_O\neq r$.

Assim, a equação da reta tangente será

$$y=\left(-\frac{x_0}{\sqrt{r^2-(x_0-x_O)^2}}\right)\cdot x+\frac{r^2}{\sqrt{r^2-x_0{}^2}}+y_O\,.$$

Outra observação importante é o fato das retas verticais dadas por x = – r e x = r que, não representam funções e por isso não foram inclusas no Teorema 3, mas são duas retas tangentes ao gráfico da semicircunferência.

Exemplo II.4.1 – Dada a circunferência definida pela equação $(x-1)^2+(y+2)^2=4$, determine a equação da reta que a tangencia no ponto $(1,-4)$.

Resolução

Primeiramente deve-se estabelecer a função implícita que define a semicircunferência de interesse, ou seja, que contém o ponto $(1,-4)$.

Para tal, basta isolar o y em $(x-1)^2+(y+2)^2=4\Rightarrow(y+2)^2=4-(x-1)^2\Rightarrow$ $\Rightarrow|y|=\sqrt{4-(x-1)^2}-2\overset{y=f(x)}{\Rightarrow}f(x)=\pm\sqrt{4-(x-1)^2}-2$. E, como o ponto $(1,-4)\in$ $f(x)=-\sqrt{4-(x-1)^2}-2$, essa será a função utilizada.

Observe que decidir qual das duas funções será utilizada, é essencial para se saber qual o sinal da derivada.

Agora, utilizando-se o Corolário 3 e a translação dos eixos coordenados, tem-se que $y+4=\left(\frac{x_0-1}{\sqrt{r^2-(x_0-1)^2}}\right)(x-x_0)\overset{(1,-4)}{\Rightarrow} y=-4.$

II.5 Elipse e Hipérbole

O estudo analítico da elipse e da hipérbole ocorre, na maior parte das escolas, na 3ª série do ensino médio. Infelizmente, em muitas escolas não se chega sequer a estudar geometria analítica e, em outras o estudo é encerrado nas circunferências. Contudo, faremos o estudo dessas cônicas, visando uma abordagem mais completa.

Além disso, as cônicas são muito utilizadas pela ciência. Na astronomia, por exemplo, Johannes Kepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, tendo o sol em um dos focos. Além disso, há cometas que percorrem trajetórias hiperbólicas, os quais ao passarem perto de algum planeta com grande densidade, alteram a sua trajetória para outra hipérbole com um foco situado nesse planeta. Como a parábola é um caso de equilíbrio entre a elipse e a hipérbole (lembrando-se que a excentricidade da parábola é igual a um), a probabilidade de existir algum satélite com órbita parabólica é quase nula. Mas isso não impede a existência de satélites com esta trajetória.

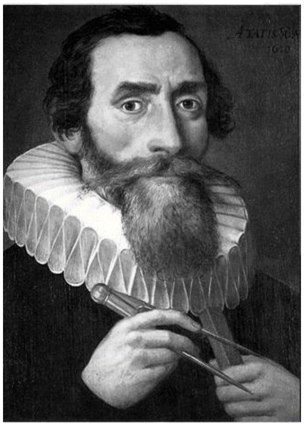


Figura 19: Johannes Kepler (1571 – 1630)

Uma outra aplicação da hipérbole se dá com o sistema de localização de barcos denominado por LORAN (LOng RAnge Navigation), que faz uso das hipérboles confocais, onde os radares estão nos focos. A ideia é baseada na diferença de tempo de recepção dos sinais emitidos simultaneamente pelos dois pares de radares, sendo um dos radares comum aos dois pares. O mapa assim construído apresenta curvas hiperbólicas. Esta técnica foi usada na II grande Guerra, para detectar barcos japoneses.

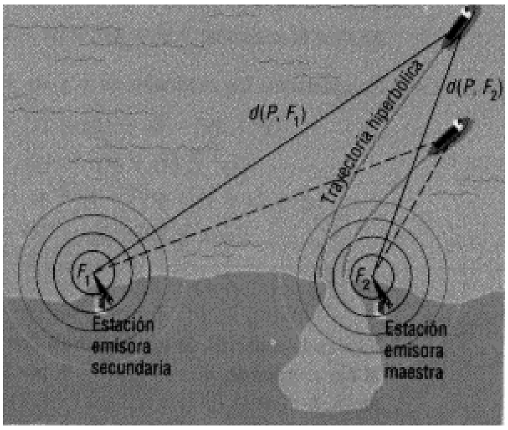


Figura 20: Utilização do Sistema LORAN - d(P, F1) – d(P, F2) = constante

II.5.1 Derivada da semielipse

Embora a elipse não possa ser representada por uma função, utilizar-se-á a função mencionada no capítulo 1, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$ e o seu conjunto imagem é $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq b\}$, com a e b reais positivos, que determina uma semielipse, cujo ponto médio dos focos é a origem do sistema de coordenadas cartesianas para que se possa, calcular a derivada dessa cônica.

Teorema 4

A derivada da função $f:]-a, a[\rightarrow IR\ ;\ f(x) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, com a e b reais positivos, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0) = -\dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2}}$, $x_0 \neq -a$ e $x_0 \neq a$.

Demonstração

Considere a função afim $t: IR \rightarrow IR\ ;\ t(x) = mx + n$ sendo a reta tangente à função $f:]-a, a[\rightarrow IR_+\ ;\ f(x) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, com a e b reais positivos, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$, $x_0 \neq -a$ e $x_0 \neq a$.

Dessa forma, por um lado, $t(x_0) = f(x_0) \Rightarrow mx_0 + n = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow n = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2} - mx_0$, que é o coeficiente linear de todas as retas que intersectam a curva f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Por outro lado, a intersecção entre f e t se dá quando $f(x) = t(x) \Rightarrow \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2} = mx + n$, e substituindo-se o valor de n encontrado anteriormente, segue que

$$\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2} = mx + \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2} - mx_0 \Rightarrow b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 = m^2x^2 +$$

$$+ b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2 + m^2{x_0}^2 + 2m\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2} \cdot x - 2m^2x_0x - 2mx_0\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(m^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \cdot x^2 + \left(2m\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2} - 2m^2x_0\right) \cdot x - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2 +$$

$$+ m^2{x_0}^2 - 2mx_0\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2} = 0.$$

E, como esse ponto de intersecção, no caso das cônicas, precisa ser único, o discriminante dessa equação quadrática, em x, deve ser zero.

Assim sendo, $\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2}$

$$4m^2b^2-4m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2-8m^3x_0\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}+4m^4{x_0}^2+4m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2-4m^4{x_0}^2+$$

$$+8m^3x_0\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}-4\left(\frac{b}{a}\right)^2m^2{x_0}^2+8\left(\frac{b}{a}\right)^2mx_0\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}+4\frac{b^4}{a^4}{x_0}^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\frac{b^4}{a^4}{x_0}^2+8\left(\frac{b}{a}\right)^2mx_0\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}+4m^2b^2-4\left(\frac{b}{a}\right)^2m^2{x_0}^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(2\left(\frac{b}{a}\right)^2x_0+2m\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}\right)^2=0\Rightarrow m=-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2x_0}{\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}}.$$

Portanto a derivada da função f no ponto $T=(x_0,\ y_0)$ é

$$f'(x_0)=-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2x_0}{\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}}$$, conforme proposto.

Observação

Nota-se que $f'(x_0)=-\dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^2x_0}{\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2{x_0}^2}}=-\dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^2x_0}{y_0}$, $y_0\neq 0$.

Corolário do Teorema 4

A equação da reta t tangente à função $f:]-a, a[\to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;

$f(x) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, com a e b reais positivos, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por

$$y = \left(-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{y_0} \right) x + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0{}^2 + y_0{}^2}{y_0}, \text{ com } y_0 = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0{}^2},\ x_0 \neq -a \text{ e } x_0 \neq a.$$

Demonstração

Segue, do Teorema 4, que a inclinação da reta tangente (derivada) da função $f:]-a, a[\to \mathbb{R}$; $f(x) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, com a e b reais positivos, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0) = -\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0{}^2}} = -\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{y_0}$ e, a equação da reta t pode ser representada por $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \left(-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{y_0} \right) x + \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{y_0} \right) x_0 + y_0 \Rightarrow y = \left(-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{y_0} \right) x + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0{}^2 + y_0{}^2}{y_0},$$

conforme proposto.

Exemplo II.5.1.1 – Dada a elipse definida pela equação $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, determine a equação da reta que a tangencia no ponto $(0, 1)$.

Resolução

A função implícita que define a semielipse que contém o ponto $(0,1)$ é dada por $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \underset{y=f(x)}{\overset{a=2 \text{ e } b=3}{\Longrightarrow}} f(x)=1+\frac{3}{2}\sqrt{4-(x+2)^2}$.

Efetuada a translação dos eixos coordenados, do Teorema 4, segue que

$$f'(0)=-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2(0+2)}{\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2(0+2)^2}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}.$$

Assim, a equação da reta tangente à elipse dada, no ponto $(0,1)$, será $y=\frac{3\sqrt{6}}{4}x+1$.

II.5.2 Derivada da hipérbole

Para derivar a hipérbole, vamos começar com um caso da hipérbole equilátera, a qual possui a medida do eixo real ou transverso, igual a medida do eixo imaginário ou conjugado.

Teorema 5

A derivada da função $f: IR^* \to IR$; $f(x)=\frac{c}{x}$, $c \in IR^*$, no ponto $T=(x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0)=-cx_0^{-2}$.

Demonstração

Considere a função $t: IR \to IR$; $t(x)=mx+n$ sendo a reta tangente à função $f: IR^* \to IR$; $f(x)=\frac{c}{x}$ no ponto $T=(x_0,\ y_0)$.

Assim, por um lado, $t(x_0) = f(x_0) \Rightarrow mx_0 + n = \dfrac{c}{x_0} \Leftrightarrow n = \dfrac{c}{x_0} - mx_0$, que é o coeficiente linear de todas as retas que intersectam o gráfico de f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Por outro lado, a intersecção entre f e r se dá quando $f(x) = t(x) \Rightarrow \dfrac{c}{x} = mx + n$ e, substituindo-se o valor de n encontrado anteriormente, segue que $\dfrac{c}{x} = mx + \dfrac{c}{x_0} - mx_0 \Rightarrow mx^2 + \dfrac{c}{x_0}x - mx_0x - c = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow mx^2 + \left(\dfrac{c}{x_0} - cmx_0\right)x - c = 0$. E, como esse ponto de intersecção, no caso das cônicas, precisa ser único, o discriminante dessa equação quadrática, em x, deve ser zero.

Assim sendo,

$$\frac{c^2}{{x_0}^2} - 2c\frac{1}{x_0}mx_0 + m^2{x_0}^2 + 4cm = 0 \Rightarrow \left(mcx_0 + \frac{c}{x_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{c}{{x_0}^2} \Rightarrow m = -c{x_0}^{-2}.$$

Portanto a derivada da função f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0) = -c{x_0}^{-2}$, conforme proposto.

Corolário do Teorema 5

A equação da reta tangente à função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}^*$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por $y = \left(-c{x_0}^{-2}\right)x + 2c{x_0}^{-1}$.

Demonstração

Segue do Teorema 5 que a inclinação da reta tangente (derivada) à função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}^*$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $m = -cx_0^{-2}$ e o coeficiente linear da reta por esse ponto é $n = \dfrac{c}{x_0} - mx_0$.

Assim, substituindo-se o valor de m em n tem-se que $n = \dfrac{c}{x_0} + cx_0^{-2}x_0 \Rightarrow$

$n = cx_0^{-1} + cx_0^{-1} \Rightarrow n = 2cx_0^{-1}$.

Portanto, a equação da reta tangente à, função h, na forma reduzida, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $y = \left(-cx_0^{-2}\right)x + 2cx_0^{-1}$, conforme proposto.

Observação

Nota-se que a equação dessa reta tangente pode ser representada por $y = \left(-cy_0^{\ 2}\right)x + 2cy_0$.

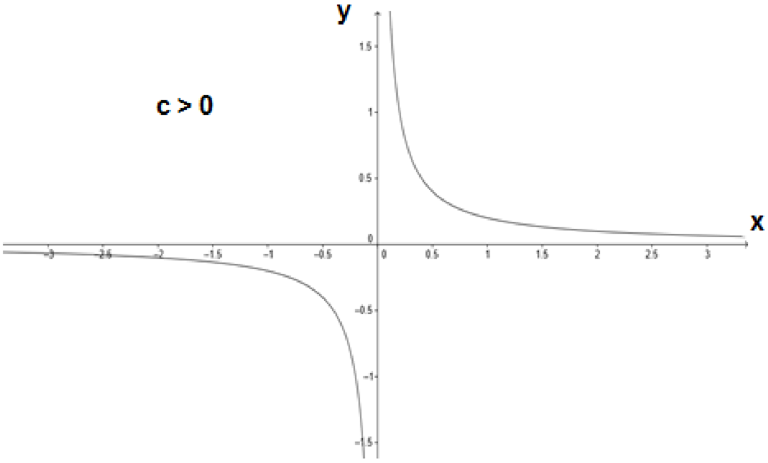


Gráfico 10: hipérbole Equilátera com c > 0

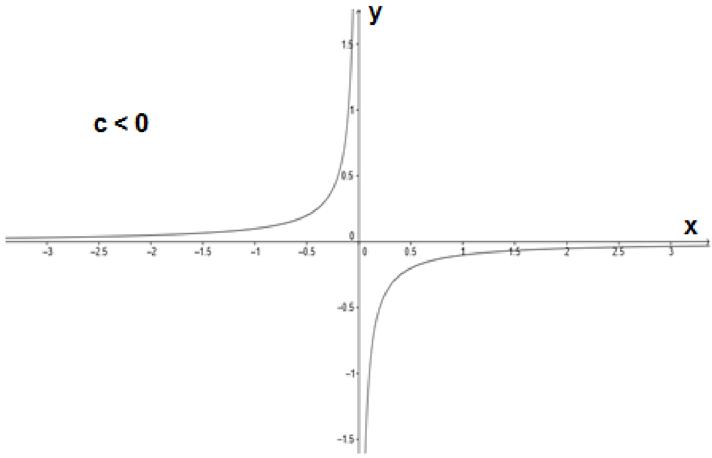


Gráfico 11: hipérbole Equilátera com c < 0

Teorema 6 – Derivada de uma função mais geral que representa uma hipérbole

A derivada da função $h: IR \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to IR$; $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com a, b, c e d reais, tais que $ad \neq bc$ e $a \cdot c \neq 0$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $h'(x_0) = \frac{ad - cb}{(cx_0 + d)^2}$.

Demonstração

Considere que a função $t: IR \to IR$; $t(x) = mx + n$ descreve a reta tangente à função $h: IR \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to IR$; $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com a, b, c e d reais, tais que $a \cdot c \neq 0$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Assim, por um lado, $t(x_0) = h(x_0) = y_0 \Rightarrow mx_0 + n = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d} \Rightarrow$

$\Rightarrow n = y_0 - mx_0$.

Por outro lado, $h(x)=t(x)\Rightarrow \dfrac{ax+b}{cx+d}=mx+n\Rightarrow mcx^2+(nc+md-a)x+$ $+nd-b=0$. E, como esta intersecção no caso das cônicas é única, então $\Delta=0\Rightarrow (nc+md-a)^2-4mc(nd-b)=0\Rightarrow (md)^2+(nc)^2+a^2+2cdmn-2acn+$ $-2adm-4cdmn+4bcm=0$.

Substituindo-se $n=y_0-mx_0$, tem-se que

$$d^2m^2+[(y_0-mx_0)c]^2+a^2-2mdc(y_0-mx_0)-2ac(y_0-mx_0)-2adm+4bcm=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(d^2+2cdx_0+x_0{}^2c^2\right)m^2+\left(-2c^2x_0y_0-2dcy_0-2ad+2acx_0+4bc\right)m+(cy_0)^2+$$
$$-2acy_0+a^2=0\Rightarrow (cx_0+d)^2m^2+\left(-2cy_0(cx_0+d)-2a(d-cx_0)+4bc\right)m+$$
$$+(cy_0-a)^2=0.$$

Como a reta tangente é única em cada ponto, essa equação quadrática, na variável m, terá solução única, então $\Delta=0$, mas isso será provado mais adiante.

$$\Delta=0\Rightarrow m=\frac{2cy_0(cx_0+d)+2a(d-cx_0)-4bc}{2(cx_0+d)^2}.$$

Substituindo-se

$$y_0=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}\Rightarrow m=\frac{c\cdot\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}(cx_0+d)+a(d-cx_0)-2bc}{(cx_0+d)^2}=$$

Portanto, a derivada função $h:\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\to\mathbb{R}$; $h(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, com a, b, c e d reais, tais que $a\cdot c\neq 0$, no ponto $T=(x_0,\ y_0)$ é $h'(x_0)=\dfrac{ad-cb}{(cx_0+d)^2}$, conforme proposto.

Observação

Pode-se verificar que $\Delta=0$, pois na equação

$$(cx_0+d)^2 m^2 + (-2cy_0(cx_0+d) - 2a(d-cx_0) + 4bc)m + (cy_0-a)^2 = 0 \Rightarrow \Delta =$$
$$= (-2cy_0(cx_0+d) - 2a(d-cx_0) + 4bc)^2 - 4(cx_0+d)^2(cy_0-a)^2.$$

Para facilitar a visualização, pode-se separar os termos em

$$\text{I. } (-2cy_0(cx_0+d) - 2a(d-cx_0) + 4bc)^2 = [2(-cy_0(cx_0+d) - a(d-cx_0) + 2bc)]^2 =$$
$$\overset{y_0=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}}{=} 4\left[-c\left(\frac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)(cx_0+d) - a(d-cx_0) + 2bc\right]^2 = 4[-acx_0 - bc - ad + acx_0 +$$
$$+ 2bc]^2 = 4(bc-ad)^2.$$

$$\text{II. } -4(cx_0+d)^2(cy_0-a)^2 = -4[(cx_0+d)(cy_0-a)]^2 \overset{y_0=\frac{ax_0+b}{cx_0+d}}{=}$$
$$= -4\left[(cx_0+d)\left(c\cdot\frac{ax_0+b}{cx_0+d} - \frac{a(cx_0+d)}{cx_0+d}\right)\right]^2 = -4(acx_0 + bc - acx_0 - ad)^2 = -4(bc-ad)^2.$$

Como $\Delta = 4(bc-ad)^2 - 4(bc-ad)^2$, então $\Delta = 0$, conforme proposto.

Corolário do Teorema 6

A equação da reta tangente à $h: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com a, b, c e d reais, tais que $a \cdot c \neq 0$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é

$$y - y_0 = \left[\frac{ad-bc}{(cx_0+d)^2}\right](x - x_0).$$

Demonstração

Do Teorema 6 e utilizando-se a equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, segue diretamente que a equação da reta tangente à h pode ser expressa por $y - y_0 = \left[\dfrac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2}\right](x - x_0)$, conforme proposto.

Observação

Pode-se escrever a equação reduzida da reta tangente à função $h : IR \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to IR$; $h(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, com a, b, c e d reais, tais que $a \cdot c \neq 0$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ por $y = \dfrac{ad - bc}{{y_0}^2} x + \dfrac{a c {x_0}^2 + 2bcx_0 + bd}{{y_0}^2}$.

Demonstração

De fato, $n = \dfrac{ax_0 + b}{cx_0 + d} - mx_0 \Rightarrow n = \dfrac{ax_0 + b}{cx_0 + d} - \left(\dfrac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2}\right)x_0 =$

$$= \frac{(ax_0 + b)(cx_0 + d) - (ad - bc)x_0}{(cx_0 + d)^2} = \frac{ac{x_0}^2 + adx_0 + bcx_0 + bd - adx_0 + bcx_0}{(cx_0 + d)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{ac{x_0}^2 + 2bcx_0 + bd}{(cx_0 + d)^2}.$$

Portanto, a equação da reta tangente à h, na forma reduzida, é dada por

$$y = \left[\frac{ad - bc}{(cx_0 + d)^2}\right]x + \frac{ac{x_0}^2 + 2bcx_0 + bd}{(cx_0 + d)^2} \Rightarrow y = \frac{ad - bc}{{y_0}^2}x + \frac{ac{x_0}^2 + 2bcx_0 + bd}{{y_0}^2}.$$

CAPÍTULO III: Aplicações

No capítulo anterior, definiu-se derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto $T=(x_0,\ y_0)$, ou seja, a derivada representa um número real.

Entretanto, para cada ponto do gráfico de uma função que representa uma cônica, ou parte de uma, existe uma única inclinação para a reta tangente naquele ponto. Portanto, pode-se definir a função derivada.

III.1 Função Derivada

Considere a função f e $D \subset IR$ o conjunto dos elementos x para os quais $f'(x)$ existe. A função $f': D \to IR\ ;\ x \mapsto f'(x)$, ou seja, que associa a cada $x \in D$ a derivada de f, é a função derivada de f.

Exemplo III.1.1- Apresente a função derivada da função $f: IR \to IR\ ; f(x) = x^2$.

Resolução

Segue do Teorema 2, que para cada ponto $x_0 \in Dom(f)$, no qual a derivada existe, $f'(x_0) = 2x_0$. Assim, a função derivada de f será $f': D \to IR\ ; f'(x) = 2x$, sendo D o conjunto dos elementos x para os quais $f'(x)$ existe.

A partir dessa definição pode-se utilizar a derivada para determinar os máximos, mínimos, intervalos de crescimento e decrescimento de uma função.

Definição: uma função é crescente nos intervalos, do seu domínio, tais que $f'(x) > 0$ e é decrescente nos intervalos, do seu domínio, tais que $f'(x) < 0$.

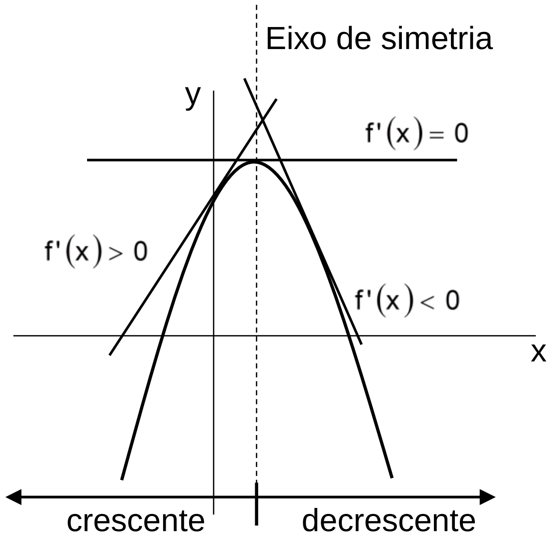


Figura 21: Reta tangente na parte crescente, na parte decrescente e no vértice do gráfico.

Observe que no caso da função quadrática (figura 16), $f'(x)=0$ no vértice da parábola, que pode indicar um ponto de máximo ou de mínimo, conforme o crescimento ou decrescimento à direita ou à esquerda da abscissa desse vértice. No caso ilustrado anteriormente, o vértice é um ponto de máximo, pois à direita de sua abscissa a função é crescente e, à direita de sua abscissa a função é decrescente.

III.2- Teorema da concavidade da parábola

Com isso, pode-se explicar o porquê da **"regra"**: *o gráfico de uma função* $f: IR \to IR$; $f(x)=ax^2+bx+c, a \in IR^*$, $b \in IR$ e $c \in IR$, *será côncavo para cima se a > 0 e, côncavo para baixo se a < 0.*

Demonstração

De fato, pois a derivada dessa função f, de acordo com o teorema 2, é $f'(x_0)=2ax_0+b$ e, como a derivada pode ser entendida como uma função, tem-se $f'(x)=2ax+b$, $\forall\ x \in Dom(f)$. Assim, a função f' é uma função afim com inclinação 2a. Logo, a reta descrita por f' será crescente se a > 0 e decrescente se a < 0. Mas, a função derivada é a inclinação da reta tangente, que por sua vez é a reta que assume valores próximos da função nas proximidades do ponto de tangência.

Portanto, a concavidade da parábola será voltada para cima quando a > 0 e para baixo quando a < 0, conforme propõe o Teorema.

Observe que $f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$ (conhecido no ensino médio como x do vértice), que será um ponto de máximo quando a parábola for côncava para baixo, a < 0, e ponto de mínimo quando a parábola for côncava para cima, a > 0.

Outro resultado interessante é a ordenada do vértice que pode facilmente ser obtida substituindo-se o x do vértice na função, como feito no exemplo 2.3.

Pode-se, também, explorar o conceito de Imagem Inversa da Função. Como o vértice é o único ponto da parábola cuja imagem inversa é única, pode-se calculá-lo da seguinte forma.

$$ax^2 + bx + c = v \Rightarrow ax^2 + bx + c - v = 0 \overset{\Delta=0}{\Rightarrow} b^2 - 4ac + 4av = 0 \Rightarrow v = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Assim, fica provado que as coordenadas do vértice V da parábola definida pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c, a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, é

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \ -\frac{\Delta}{4a} \right).$$

III.3- Máximos e Mínimos de uma função

Definições:

III.3.1 Ponto Crítico: diz-se que um ponto x_0 é um ponto crítico para uma função f, quando f é definida em x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Neste trabalho o estudo se concentra nas cônicas, assim, pode-se observar que as funções que foram apresentadas nos capítulos anteriores, quando possuem ponto crítico $\left(x_C, y_C\right)$, ele é único. Além disso, vale a seguinte propriedade.

III.3.1.2 Propriedade

Para todo elemento x do $\mathrm{Dom}(f) \setminus \left\{x_C\right\}$, ou ocorre que $f(x) > f\left(x_0\right)$ e o ponto $\left(x_C, y_C\right)$ é denominado ponto de **mínimo global**, ou $f(x) < f\left(x_0\right)$ e este ponto é denominado ponto de **máximo global**.

A determinação de máximos e mínimos, a análise de intervalos de crescimentos e decrescimentos bem como o próprio esboço do gráfico são ferramentas importantes que o Cálculo pode disponibilizar para os estudos em Física, Economia, Biologia, Psicologia e, nos próprios modelos de Matemática. Nesse contexto, quando a função em questão é a quadrática, o vértice da parábola é muito requisitado como importante resultado para o estudo, como nos exemplos a seguir.

III.3.2 Na Aritmética

Exemplo III.3.2.1 - Determine dois números reais positivos cuja soma é 10 e, cujo produto é o máximo possível.

Resolução

Considere que tais números sejam x e y. Assim, tem-se que

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x\cdot y \text{ é máx.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=10-x \\ x(10-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=10-x \\ -x^2+10x \end{cases}.$$

Observe que $-x^2+10x$ é a imagem de uma função quadrática côncava para baixo, ou seja, possui um ponto de máximo. E, como já visto, esse ponto ocorre quando a reta tangente for horizontal. Logo, vamos considerar $f(x)=-x^2+10x$ e determinar a função derivada f', de acordo com o Teorema 2.

$f'(x)=-2x+10$. Para que essa função represente a inclinação da reta tangente horizontal, deve ter $f'(x)=0 \overset{\text{Teorema 2}}{\Rightarrow} -2x+10=0 \Rightarrow x=5$. Substituindo em $y=10-x$, Obtém-se $y=5$.

Portanto os dois números solicitados são 5 e 5.

Outra solução

Uma outra ideia é determinar qual é esse produto máximo, ou seja, o valor máximo da função $f(x)=-x^2+10x$.

Utilizando a imagem inversa da função tem-se

$-x^2+10x=m \Rightarrow -x^2+10x-m=0 \Rightarrow \Delta=100-4m$, mas por se tratar do vértice da parábola, esse valor é único, então $\Delta=0 \Rightarrow 100-4m=0 \Rightarrow m=25$.

O trabalho agora é determinar dois números que somados resultem 10 e multiplicados resultem 25. O que é bastante familiar aos discentes que estudam equações do 2º grau e aprendem as Relações de Girard (Soma e Produto) e, fica imediato que esses números são 5 e 5.

III.3.3 Na Economia e na Administração

Segundo (MARQUES, 2006) problemas de administração e economia, na maioria das vezes envolvem maximização de lucros e receita, e minimização de gastos. Podendo-se então, com o auxílio da derivada, calcular-se o máximo lucro que uma indústria pode obter.

Exemplo III.3.3.1 - Cobrando R$ 1,50, por cada chocolate, um comerciante consegue vender 500 unidades. Para cada um Centavo que esse comerciante diminui no preço de venda o número de chocolates vendido aumenta em 25 unidades. Se o preço de custo de cada chocolate é R$ 0,70, qual deve ser o preço de venda para maximizar o lucro obtido?

Resolução

Considere que o vendedor diminua x Centavos no preço de venda de cada chocolate, então o seu lucro por unidade vendida será (150 – 70 – x) = (80 – x) centavos. E, a quantidade de chocolates vendida com esse desconto será (500 + 25x) unidades.

Assim, o lucro total será L(x) = (80 – x) (500 + 25x).

Observe que L é uma função quadrática cujo coeficiente dominante é negativo, ou seja, descreve uma parábola côncava para baixo. Logo, o seu valor máximo ocorre no vértice.

Derivando-se a função L, tem-se, do Teorema 2, L'(x) = – 50x + 1500. E, já se sabe que a reta tangente tem inclinação zero quando tangencia o vértice, então $L'(x) = 0 \Rightarrow$

$-50x + 1500 = 0 \Rightarrow x = 30$ Centavos.

Portanto, o preço que maximiza o lucro é 1,50 – 0,30 = 1,20 centavos =

= R$ 1, 20.

III.3.4 Na Física

Exemplo III.3.4.1 - Uma bola de tênis é lançada verticalmente para cima, e tem posições s no decorrer do tempo t dadas pela função horária $s(t) = 48t - 4t^2$, em que $s(t)$ representa a posição da bola, em relação ao solo, em metros e t o tempo em segundos.

a) Calcule o tempo gasto por essa bola para atingir a altura máxima.

b) Determine a altura máxima, em relação ao solo que a bola atinge.

Resolução

a) Pode-se observar que a função horária da bola é uma função quadrática cujo coeficiente dominante é negativo (a < 0), então essa função descreve uma parábola côncava para baixo. Assim sendo, o seu máximo irá ocorrer no vértice da parábola, ponto no qual a inclinação da reta tangente é zero.

Logo, utilizando-se o Teorema 2, tem-se $s'(t) = 48 - 8t$ e, como deseja-se determinar o tempo gasto para se atingir esse ponto de máximo, basta igualar essa função derivada a zero, como se segue

$s'(t) = 48 - 8t = 0 \Rightarrow t = 6$.

Portanto, a bola gastará 6 segundos para atingir a altura máxima.

b) Para se determinar essa altura máxima, basta substituir o tempo encontrado na função horária fornecida, ou seja, $s(6) = 48 \cdot 6 - 4 \cdot 6^2 \Rightarrow s(6) = 144$.

Portanto a altura máxima atingida pela bola é 144 m.

III.3.5 Na Biologia

Exemplo III.5.1 - Sabe-se que certo lago tem capacidade máxima para 20 000 peixes. E que atualmente, esse lago possui poucos peixes, sendo que a taxa de crescimento dessa população é proporcional ao produto da população existente pela diferença da mesma a partir de 20 000. Para que população inicial essa taxa de crescimento será máxima?

Resolução

Considere que a taxa de crescimento para um população inicial com x peixes é f(x), então $f(x) = kx\,(20\,000 - x) = 20\,000kx - kx^2$, em que k é a constante de proporcionalidade.

Como f(x) é a imagem de uma função quadrática côncava para baixo, o seu máximo ocorrerá no vértice. Assim, basta calcular o zero da função derivada de f que, pelo Teorema 2, dá-se por $f'(x) = 20\,000k - 2kx = 0 \Rightarrow x = 10\,000$.

Portanto, a taxa de crescimento será máxima para uma população inicial de 10 000 peixes.

III.4- Crescimento e Decrescimento das Funções que representam cônicas

Como anteposto, pode-se definir que uma função é crescente nos intervalos, do seu domínio, tais que $f'(x) > 0$ e é decrescente nos intervalos, do seu domínio, tais que $f'(x) < 0$.

III.4.1 O caso da Reta

Do Teorema 1, segue que a derivada de uma reta é a própria inclinação da reta e, já se sabe da Geometria Analítica que uma reta é crescente se, e somente se, a sua inclinação é maior do que zero e, decrescente se, e somente se, a sua inclinação for decrescente.

Portanto, pode-se afirmar que uma reta r é crescente se $r'(x) > 0$ e decrescente se $r'(x) < 0$.

III.4.2 O caso da Parábola

Sabe-se que uma função quadrática do tipo $f: IR \to IR; f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b e c coeficientes reais com a não nulo, não é crescente nem decrescente, mas pode-se definir um intervalo de crescimento e um intervalo de decrescimento para tal.

Sabe-se também que o vértice, ponto no qual a derivada dessa função é zero é um ponto de máximo quando o coeficiente dominante (a) é negativo e ponto de mínimo quando (a) é positivo. Resta mostrar como que a função quadrática se comporta antes e depois do vértice $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Para isso, tem-se do Teorema 2, que a função derivada de f é dado por $f': A \to IR\ ; f'(x) = 2ax + b, A \subset Dom(f)$, que é uma função afim cuja inclinação é 2a, isto é, se 2a > 0, f' é crescente, ou seja, f'(x) < 0 para $x < -\frac{b}{2a}$ e f'(x) > 0 para $x > -\frac{b}{2a}$.

2a > 0 ⇒ a > 0

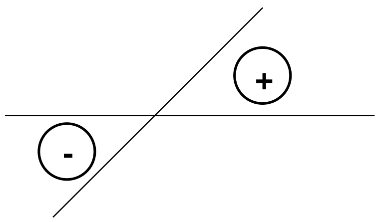


Figura 22: Estudo do sinal de f' para a > 0

E, se 2a < 0, f'(x) é decrescente ou seja, f'(x) < 0 para $x > -\frac{b}{2a}$ e f'(x) > 0 para $x < -\frac{b}{2a}$.

$2a > 0 \Rightarrow a > 0$

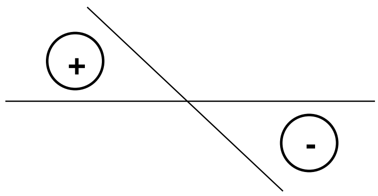


Figura 23: Estudo do sinal de f’ para a < 0

Assim, pode-se afirmar que uma função quadrática f é crescente no intervalo que f’(x) > 0, a saber $\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ se a > 0 e $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ se a < 0 e decrescente intervalo que f’(x) < 0, a saber $\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$ se a < 0 e $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ se a > 0.

III.4.3 O caso da Semicircunferência

Como no caso da circunferência faz-se necessário utilizar funções implícitas das duas semicircunferências, pode-se fazer o estudo da função $f:[-r,r]\to \mathbb{R}$; $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, com, $r\in \mathbb{R}^+$, e o caso da função $f:[-r,r]\to \mathbb{R}$; $f(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$ com, $r\in \mathbb{R}^+$, será análogo.

Do Teorema 3, segue que a função derivada de f é dada por $f':A\to \mathbb{R}$; $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, $A\subset Dom(f)$, e $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}=0\Rightarrow x=0$.

Assim, a derivada de f será zero no ponto $(0,\ f(0))=(0,\ r)$, sendo este um ponto crítico.

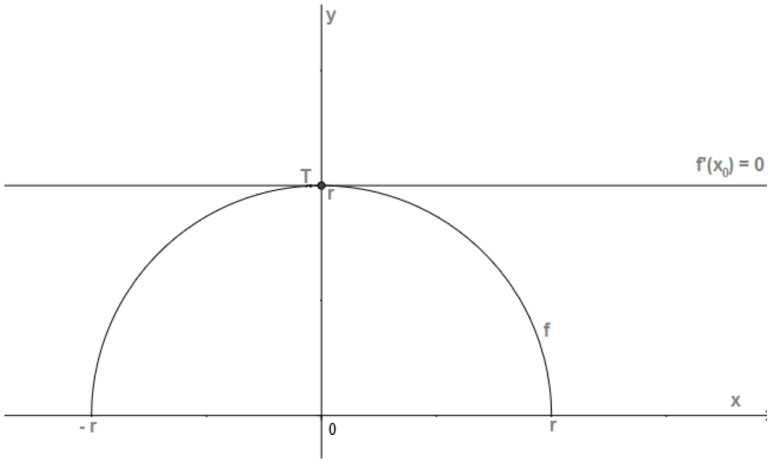


Figura 24: Semicircunferência cuja imagem é e a reta tangente no seu ponto de máximo

Observa-se que $\forall\ x \in \mathrm{dom}(f)$, $f(0) > f(x)$, logo o ponto $(0\ ,\ r)$ é um ponto de máximo.

Observa-se também que $f'(x) > 0$ para x < 0, então f é crescente no intervalo $-r < x < 0$ e $f'(x) < 0$ no intervalo $x > 0$, então f é decrescente para $0 < x < r$.

III.4.4 O caso da Semielipse

Assim como no caso da circunferência, no caso da elipse também se faz necessário o uso das funções implícitas das duas semielipse, mas também se pode estudar apenas uma delas, pois o outro caso será análogo.

Dessa forma, dada a função $f : [-a, a] \to \mathrm{IR}\ ;\ f\,(x) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, com a e b reais positivos, que representa uma semielipse, do teorema 4, obtém-se que sua função derivada é dada $f' : A \to \mathrm{IR}\ ;\ f'(x) = -\dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}}$, $A \subset \mathrm{Dom}(f)$, e

$f'(x) = -\dfrac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 x}{\sqrt{b^2 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0.$ Logo, a derivada de f será nula no ponto, $(0\,,\ f(0)) = (0\,,\ b)$, sendo este um ponto crítico e $\forall\, x \in dom(f)\,,\ f(0) > f(x)$, logo o ponto $(0\,,\ b)$ é um ponto de máximo.

Tem-se ainda que $f'(x) > 0$ para x < 0, então f é crescente no intervalo – b < x < 0 e $f'(x) < 0$ para x > 0, então f é decrescente no intervalo 0 < x < b.

III.4.5 O caso da Hipérbole

Do teorema 6, tem-se que a função derivada de $h: \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$; $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, com a, b, c e d reais, tais que $ad \neq bc$ e $a \cdot c \neq 0$, é dada por $h': A \to \mathbb{R}$; $h'(x) = \dfrac{ad - cb}{(cx+d)^2}$, $A \subset \mathbb{R}$.

Analisando o gráfico da função h pode-se perceber que esta não admite pontos de máximo e nem de mínimo.

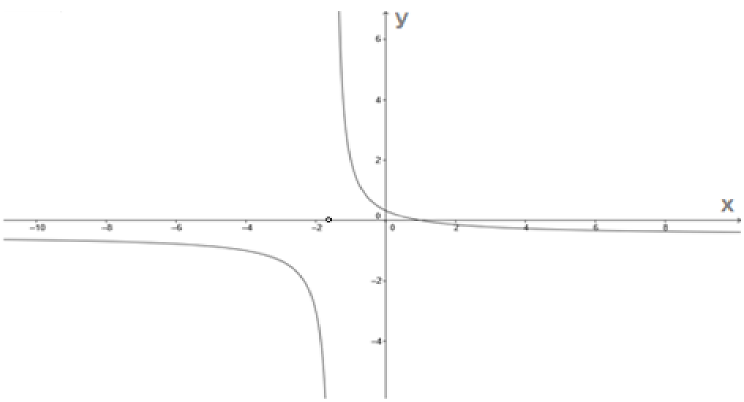


Gráfico 12: função $h: \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$; $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, com a, b, c e d reais, tais que $ad \neq bc$ e $a \cdot c \neq 0$

De fato, pois $h'(x)=\frac{ad-cb}{(cx+d)^2}=0 \Rightarrow ad=cb$, o que contraria as condições para que h descreva uma hipérbole. Observe que nesse caso, h descreveria uma reta paralela ao eixo das abscissas, com $x \neq -\frac{d}{c}$.

Assim sendo, resta verificar se $h'(x)$ é maior ou menor do que zero. E, verifica-se que para ad > cb, $h'(x_0)>0$, então h é crescente próximo de x_0 e para ad < cb $h'(x_0)<0$, então h é decrescente próximo de x_0. Portanto, no caso de $h(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$, h é crescente, nos intervalos $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[$ e $\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ se ad > cb e, decrescente nesses intervalos caso contrário.

Observe que essa função não é crescente, nem decrescente na união desses intervalos, ou seja, ela não é crescente e não é decrescente em seu domínio.

Exemplo III.4.5.1 - Analise os intervalos de crescimento ou decrescimento da função da hipérbole dada por $f(x)=\frac{1}{x}, x \neq 0$.

Resolução

Tem-se que ad = 0 < cb = 1, logo, h é decrescente nos intervalos $]-\infty;0[$ e $]0;+\infty[$, porém não é decrescente, pois – 1 < 2 e $f(-1)=-1<f(2)=\frac{1}{2}$.

Exemplo III.4.5.2 - Apresente os intervalos de crescimento ou decrescimento da função da hipérbole dada pela função $f: A \to IR; f(x)=\frac{2x-1}{-3x+4}, x \neq \frac{4}{3}$.

Resolução

Nesse caso, ad = 8 > cb = 3, logo, f é crescente nos intervalos $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right[$ e $\left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$, porém não é crescente, pois 3 > 0 e $f(3) = -1 < f(0) = -\frac{1}{4}$.

III.4.5.2 Retas assíntotas

Definição

Pode-se definir retas assíntotas a uma curva, por aquelas que se aproximam dessa curva conforme se afasta da origem pela direita ou pela esquerda.

Vale ressaltar, ainda, a existência de duas retas assíntotas da hipérbole, sendo uma vertical dada por $x = -\frac{d}{c}$, que pode facilmente ser obtida observando-se a restrição do domínio da função, e uma horizontal dada por $y = \frac{a}{c}$, que pode ser obtida a partir da função inversa de $h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, dada por $h^{-1}(x) = \frac{dx-b}{cx-a}$, ou melhor, pela restrição do domínio desta função.

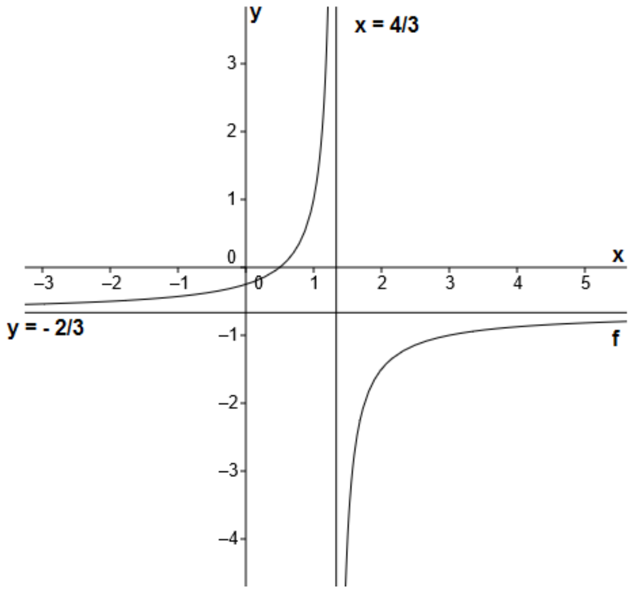


Gráfico 13: Função $f : A \to IR; f(x) = \dfrac{2x-1}{-3x+4}, x \neq \dfrac{4}{3}$ e suas duas assíntotas

III.5- Reta Normal a uma Curva

Um conceito geométrico bastante útil é o da reta normal a uma curva, o qual se definirá a seguir.

Definição

A reta normal a uma curva y = f(x) em um ponto $T = (x_0 , y_0)$, é a reta perpendicular à reta tangente a essa curva nesse ponto.

Como já se estudou a equação da reta tangente às cônicas, pode-se determinar a equação da reta normal a cada uma delas.

Exemplo III.5.1 - Determine a equação da reta normal, pelo ponto $T = (x_0 , y_0)$, a todas as cônicas do capítulo 2.

Seguindo-se a mesma sequência do capítulo 2, tem-se:

III.5.2 Reta Normal à Reta

Do Teorema 1, segue que a inclinação da reta tangente à reta dada pela equação reduzida $y = ax + b$, $a \neq 0$ é $m = a$ e, do Corolário 1, tem-se que a reta tangente à reta $y = ax + b$ é a própria reta dada.

De acordo com a definição de reta tangente e, utilizando o resultado de Geometria Analítica que prova a perpendicularidade entre duas retas t e s não verticais e horizontais, por $m_t \cdot m_s = -1$, em que m_k é a inclinação da reta k .

Dessa forma, para se determinar a reta normal a essa reta por um ponto $T = (x_0 , y_0)$, que não precisa ser um ponto dessa reta, dá-se por $y - y_0 = -\frac{1}{a}(x - x_0)$

III.5.3 Reta Normal à Parábola

Do teorema 2, segue que a inclinação (derivada) da reta tangente à função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, no ponto $T = (x_0 , y_0)$ é $m = f'(x_0) = 2ax_0 + b$, então a inclinação da reta normal s a essa parábola por $T = (x_0 , y_0)$ será $m_s = -\frac{1}{2ax_0 + b}$, com $x_0 \neq -\frac{b}{2a}$.

Portanto, a equação dessa reta normal será

$$y - y_0 = \left(-\frac{1}{2ax_0 + b}\right)(x - x_0).$$

Observação

Embora a reta $x_0 = -\frac{b}{2a}$ não possa ser representada por uma função, ela também é uma reta normal à parábola.

III.5.4 Reta Normal à semicircunferência

Esse resultado já foi obtido no exemplo 3.5, então a reta s normal à semicircunferência por um dos seus pontos $T = (x_0\ , y_0)$, dada pela função $f : A \to IR$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, sendo $A = \{x \in IR \mid -r \le x \le r\}$ e

$Im(f) = B = \{y \in IR \mid 0 \le y \ge r\}$, com $r \in IR^+$ é $s : y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) \Rightarrow s : y = \frac{y_0}{x_0}x$.

Exemplo III.5.4.1 - Prove que a reta normal à circunferência γ, representada pela equação $x^2 + y^2 = r^2$, pelo ponto $T = (x_0\ , y_0)$ ϵ γ, passa pelo seu centro.

Resolução

Para tal, vamos utilizar a mesma função do Teorema 3, $f : A \to B$; $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, sendo $A = \{x \in IR \mid -r \le x \le r\}$ e $B = \{y \in IR \mid y \ge 0\}$, com $r \in IR^+$, e considerar que o ponto $T = (x_0\ , y_0)$ pertence a essa semicircunferência, pois caso o ponto pertença a semicircunferência cuja imagem é $f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, o raciocínio seria análogo.

Considerando-se que a reta t é a reta tangente a curva no ponto $T = (x_0\ , y_0)$ e, do Teorema 3, tem-se que $m_t = -\frac{x_0}{y_0}$. Se, s é a reta normal solicitada, então $m_s = \frac{y_0}{x_0}$. Logo, a equação da reta s será $y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$. Por fim, basta substituir o centro (0, 0) da circunferência na equação de s e aferir se a igualdade é válida.

De fato, $0 - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(0 - x_0) \Rightarrow y_0 = y_0$.

Portanto, a reta normal à circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, pelo ponto $T = (x_0\ , y_0)$, passa pelo seu centro, conforme proposto.

Observação

O fato mostrado no exemplo anterior é exatamente como se determina a reta tangente à circunferência em Geometria Analítica, Geometria Plana ou Desenho Geométrico, ou seja, a reta tangente a uma circunferência é a reta que passa pelo ponto de tangência e é perpendicular à reta que passa pelo centro dessa circunferência (reta normal).

III.5.5 Reta Normal à semielipse

Do Teorema 4, segue que a inclinação (derivada) da reta tangente a semielipse dada pela função $f : [-a, a] \to IR_+$; $f(x) = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2}$, com a e b reais positivos, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $m = f'(x_0) = -\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2}}$.

Com isso, a inclinação da reta s, normal a semielipse será $m_s = \dfrac{\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0}$.

Portanto, a equação da reta normal à semielipse dada será $s: y - y_0 = \left(\dfrac{\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 {x_0}^2}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0} \right)(x - x_0) \Rightarrow s: y = \left(\dfrac{y_0}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_0} \right) x + \dfrac{y_0}{\left(\frac{b}{a}\right)^2} + y_0$.

III.5.6 Reta Normal à hipérbole

Do teorema 6, que é mais geral, tem-se que a inclinação da reta tangente à hipérbole defina pela função $h: \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \to \mathbb{R}$; $h(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, com a, b, c e d reais, tais que $a \cdot c \neq 0$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $m = h'(x_0) = \dfrac{ad - cb}{(cx_0 + d)^2}$. Com isso, a inclinação da reta s normal a essa hipérbole em $T = (x_0,\ y_0)$ será $m_s = \dfrac{(cx_0 + d)^2}{cb - ad}$.

Portanto, a equação dessa reta é $s: y - y_0 = \left[\dfrac{(cx_0 + d)^2}{cb - ad} \right](x - x_0)$.

III.6. Função Irracional

Outra possível aplicação dos resultados obtidos no capítulo 2 se dá no cálculo aproximado de raízes quadradas. Segue a definição de função irracional pois, da mesma forma que se derivou as cônicas, pode-se derivar esse tipo de função.

Definição

A parte da parábola dada pela relação $y^2 = x$, na qual x e y são variáveis em IR^+, que faz corresponder a todo número real positivo x um único número real positivo y, tal que $y = \sqrt{x}$, define a função

$f: IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}$; $f(x) = \sqrt{x}$, cujo gráfico está a seguir.

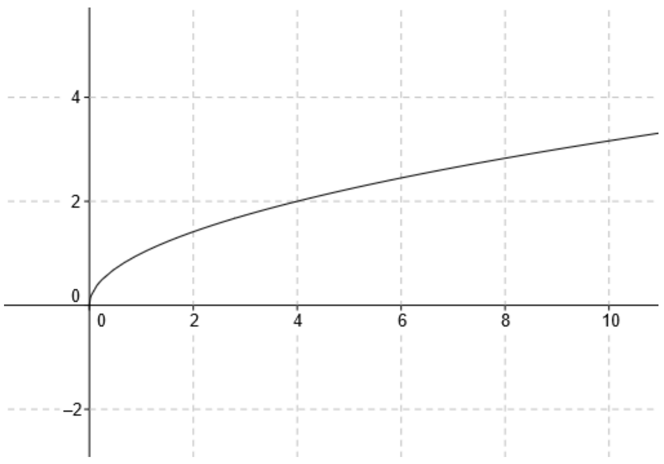


Gráfico 14: Gráfico da função $f: IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}$; $f(x) = \sqrt{x}$.

III.6.1 Derivada da função irracional

Teorema 8

A derivada da função $f: IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}$; $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é derivada $f'(x_0) = \frac{1}{2} x_0^{-1/2}$.

Demonstração

Seja a reta definida pela função afim $t: IR \to IR$; $r(x) = mx + n$ a reta tangente à função $f : IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}$; $f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Assim, por um lado, $t(x_0) = f(x_0) \Rightarrow mx_0 + n = \sqrt{x_0} \Leftrightarrow n = \sqrt{x_0} - mx_0$, que é o coeficiente linear de todas as retas que intersectam f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$.

Por outro lado, a intersecção entre f e t se dá quando $f(x) = t(x) \Rightarrow \sqrt{x} = mx + n$ e, substituindo-se o n encontrado anteriormente, segue que $\sqrt{x} = mx + \sqrt{x_0} - mx_0$. Sendo $IR^+ \cup \{0\}$ o domínio da função f, elevando-se os dois membros ao quadrado, tem-se

$$x = m^2x^2 + x_0 + mx_0^{\ 2} + 2mx\sqrt{x_0} - 2m^2xx_0 - 2mx_0\sqrt{x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2x^2 + \left(2m\sqrt{x_0} - 2mx_0 - 1\right)x + m^2x_0^{\ 2} + x_0 - 2mx_0\sqrt{x_0} = 0 .$$

E, como esse ponto de intersecção tem que ser único, como na sua função inversa, o discriminante dessa equação quadrática, em x, deve ser zero.

Assim sendo,

$$4m^2x_0 + 4m^4x_0^{\ 2} + 1 - 8m^3x_0\sqrt{x_0} - 4m\sqrt{x_0} - 4m\sqrt{x_0} + 4m^2x_0 +$$
$$- 4m^2\left(m^2x_0^{\ 2} + x_0 - 2mx_0\sqrt{x_0}\right) = 0 \Rightarrow 4m^2x_0 + 4m^4x_0^{\ 2} + 1 - 8m^3x_0\sqrt{x_0} +$$
$$- 4m\sqrt{x_0} - 4m\sqrt{x_0} + 4m^2x_0 - 4m^4x_0^{\ 2} - 4m^2x_0 + 8m^3x_0\sqrt{x_0} = 0 \Rightarrow 4m^2x_0 +$$
$$- 4m\sqrt{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2m\sqrt{x_0} - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow 2m\sqrt{x_0} = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \Rightarrow m = \frac{1}{2}x_0^{\ -1/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0^{\ -1/2} .$$

Portanto a derivada da função f no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0^{\ -1/2}$, conforme proposto.

Corolário do Teorema 8

A equação da reta tangente à função $f: IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}\,;\ f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por $y = \left(\frac{1}{2}x_0^{-1/2}\right)x + \frac{1}{2}x_0^{1/2}$.

Demonstração

Segue do Teorema 8 que a derivada da função $f: IR^+ \cup \{0\} \to IR^+ \cup \{0\}\,;\ f(x) = \sqrt{x}$, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $m = \frac{1}{2}x_0^{-1/2}$ e o coeficiente linear por esse ponto é $n = \sqrt{x_0} - mx_0$.

Assim, substituindo-se o valor de m em n tem-se que $n = \sqrt{x_0} - \frac{1}{2}x_0^{-1/2}x_0 \Rightarrow n = x_0^{1/2} - \frac{1}{2}x_0^{1/2} \Rightarrow n = \frac{1}{2}x_0^{1/2}$.

Portanto, a equação da reta tangente à função dada, no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é $y = \left(\frac{1}{2}x_0^{-1/2}\right)x + \frac{1}{2}x_0^{1/2}$, conforme proposto.

Exemplo III.6.1.1 – Calcule o valor aproximado da raiz quadrada de 150.

Resolução

Para se calcular valores aproximados de raízes quadrada, pode-se utilizar a característica da reta tangente ao gráfico, que garante a sua aproximação com as imagens do gráfico nas proximidades do ponto de tangência.

Tem-se que 144 < 150 < 169, estando mais próximo de 144. Assim, deve-se utilizar a reta tangente à função $f : IR^{+} \cup \{0\} \to IR^{+} \cup \{0\}\,;\ f(x) = \sqrt{x},$ no ponto $T = (144,\ 12)$.

Do Corolário do Teorema 8, tem-se que a equação da reta tangente à função $f : IR^{+} \cup \{0\} \to IR^{+} \cup \{0\}\,;\ f(x) = \sqrt{x},$ no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por $y = \left(\frac{1}{2}x_0^{-1/2}\right)x + \frac{1}{2}x_0^{1/2} \overset{(144\,,\ 12)}{\Rightarrow} y = \frac{1}{24}x + 6$. Assim, pode-se aproximar $\sqrt{150} \approx \frac{1}{24}\cdot 150 + 6 = 12{,}25$.

Observe que $(12{,}25)^2 = 150{,}0625$ e, $(12{,}24)^2 = 149{,}8176$, o que mostra que a aproximação dada é razoável. Outrossim, a aproximação com essa técnica fica melhor para valores maiores.

Exemplo III.6.1.2 – Calcule o valor aproximado da raiz aritmética de 7 852.

Resolução

Tem-se que 7 744 < 7 852 < 7 921, a saber $88^2 < \sqrt{7852} < 89^2$, estando mais próximo de 7 744. Assim, deve-se utilizar a reta tangente à função $f : IR^{+} \cup \{0\} \to IR^{+} \cup \{0\}\,;\ f(x) = \sqrt{x},$ no ponto $T = (7\,744\,,\ 88)$.

Do Corolário do Teorema 8, tem-se que a equação da reta tangente à função $f : IR^{+} \cup \{0\} \to IR^{+} \cup \{0\}\,;\ f(x) = \sqrt{x},$ no ponto $T = (x_0,\ y_0)$ é dada por $y = \left(\frac{1}{2}x_0^{-1/2}\right)x + \frac{1}{2}x_0^{1/2} \overset{(7\,744\,,\ 88)}{\Rightarrow} y = \frac{1}{176}x + 44$. Assim, pode-se aproximar $\sqrt{7\,852} \approx \frac{1}{176}\cdot 7\,852 + 44 \approx 88{,}613$, e $\sqrt{7852} \approx 88{,}61151$. Logo, a aproximação é bastante apropriada.

Para estimar o erro cometido nessa aproximação, pode-se refazer os cálculos, mas considerando um nova aproximação com $x_0 = \left(\frac{7852}{176} + 44\right)^2$, ou seja, agora se tem um quadrado mais próximo de $\sqrt{7852}$.

Refazendo os cálculos, tem-se $r(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, que é uma das formas da equação da reta tangente r. Ao considerar-se a aproximação $r(x) \approx f(x)$, tem-se $f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$. Mas, $f(x) - f(x_0)$ é o erro cometido, que será considerado $\varepsilon = f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)$.

Assim, para x = 7852 e $x_0 = \left(\frac{7852}{176} + 44\right)^2$, a expressão $\varepsilon = f(x) - f(x_0) \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{7852} - \left(\frac{7852}{176} + 44\right)$ será uma estimativa do erro cometido no cálculo da raiz sugerida.

Logo, o erro será $\varepsilon \approx f'(x_0)(7852 - x_0)$, substituindo-se $x_0 = \frac{7852}{176} + 44 = 88 + \frac{27}{44}$, tem-se

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2 \cdot \left(88 + \frac{27}{44}\right)} \cdot \left(7852 - \left(88 + \frac{27}{44}\right)^2\right) = -0,0021.$$

Com esse erro, tem-se que o resultado obtido no cálculo da raiz $\sqrt{7\,852} \approx \frac{1}{176} \cdot 7\,852 + 44 \approx 88,613$ permite uma boa aproximação até a segunda casa decimal. E, isso garante que o resultado obtido é de fato bastante relevante.

Observe que é possível continuar esses cálculos adotando-se um X_0 cada vez mais próximo do número $\sqrt{7852}$, e isso é ilimitado, ou seja, pode-se aproximar essa resposta com tantas casas decimais quanto se queira. Sendo que no *limite* dessas aproximações chega-se à precisão.

CAPÍTULO IV: Aplicação empírica em sala de aula

Com intuito de aferir a aceitação dos discentes e verificar a influência do conteúdo desenvolvido neste trabalho, no desempenho dos mesmos, fez-se um sorteio de 31 alunos dos 270 da 3ª série do Ensino Médio (2015) do Colégio Agostiniano Mendel, no qual o autor ministra aulas para as 3ªs séries do Ensino Médio.

Trata-se de um colégio privado situado na região do Tatuapé, com aproximadamente 270 alunos matriculados nas 3ªs séries do Ensino Médio. Série na qual, ministra-se aulas de Geometria Analítica Plana – dos pontos às cônicas - Polinômios e Equações Polinomiais, Números Complexos e Revisão dos conteúdos do Ensino Médio de acordo com o PCN.

Na época das aulas relativas a parte do conteúdo deste trabalho, os alunos possuíam os pré-requisitos: Introdução à Teoria dos Conjuntos, Relações, Funções, Estudo analítico do ponto e da reta, Polinômios e Equações Polinomiais, dentre outros que compões os pré-requisitos para o bom entendimento da parte que se ministrou.

Por se tratar de um colégio privado, cujos focos incluem o vestibular, não se podia utilizar muito tempo para a aplicação do trabalho, sendo disponibilizadas quatro aulas de 45 minutos cada, divididas em dois dias.

Assim sendo, foi necessário escolher o que seria possível trabalhar com os 31 discentes participantes nesse curto tempo. Adotando-se por estratégia a aplicação de uma avaliação diagnóstica composta por cinco questões com duração de 30 minutos, seguida por uma hora de aula expositiva com o seguinte conteúdo: Definição da reta tangente a uma reta e às cônicas com foco na parábola; Definição de derivada; A derivada da função afim e a derivada da função quadrática.

As questões que figuraram na avaliação diagnóstica, estão a seguir.

IV.1 Avaliação Diagnóstica

1. Lembrando-se que uma função f é crescente se $x_1 > x_2$ implica em $f(x_1) > f(x_2)$, assinale as funções que podem ser classificadas como crescentes.

a) ( ) $c : IR \to IR;\ c(x) = -2$.

b) ( ) $r : IR \to IR;\ r(x) = 2x - 10$.

c) ( ) $p : IR \to IR;\ p(x) = x^2$.

d) ( ) $h : IR^* \to IR;\ h(x) = \frac{2}{x}$

e) ( ) $e : IR \to IR;\ e(x) = 2^x$.

2. Verifique que a função $f : IR \to IR;\ f(x) = 2x^2 + x + 3$ não é crescente, nem decrescente. Em seguida, determine o menor ou maior valor ***v*** para o qual à sua direita, a função seja decrescente e, indique qual das duas condições que ocorre para tal valor de ***v***.

3. Seja a função $f : IR \to IR;\ f(x) = x^2$,

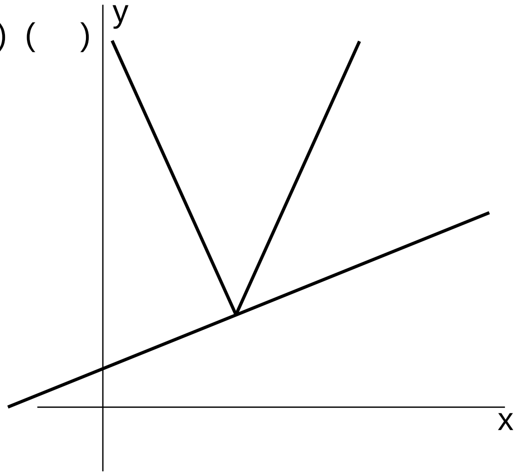
a) determine a equação da reta r que passa pelo ponto (2, 4) e cuja inclinação são 4.

b) calcule a intersecção entre a reta r e a função f.

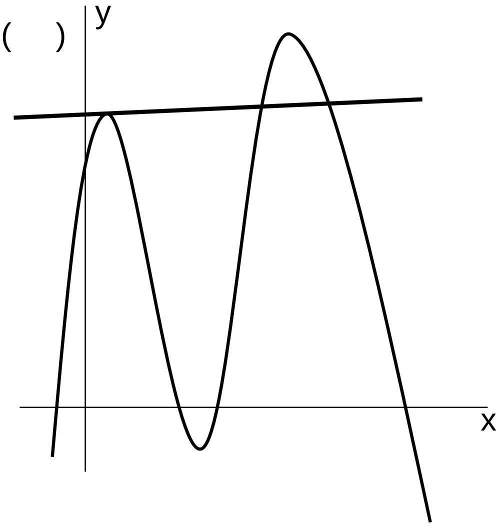
c) Lembrando que a reta tangente a uma parábola, é uma reta que intersecta o gráfico dessa parábola em um ÚNICO ponto, explique porque é possível afirmar que r é uma reta tangente ao gráfico de f.

4. Assinale as alternativas que apresentam uma reta tangente ao gráfico.

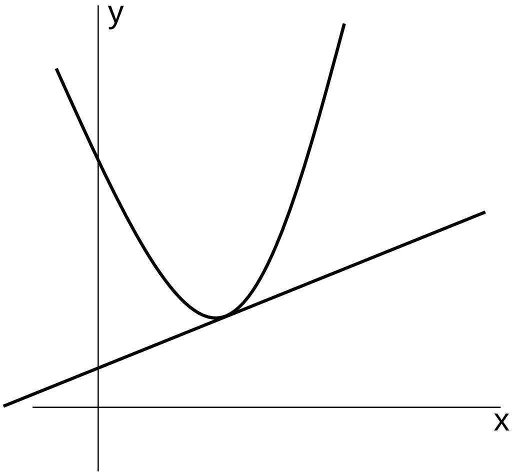
a) ( )



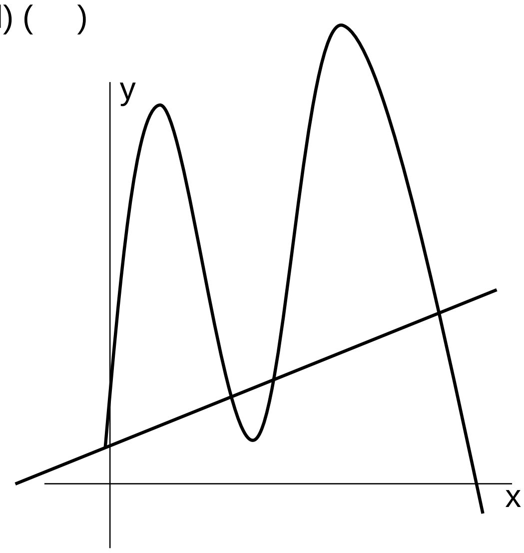
b) ( )



c) ( )



d) ( )



5. Considere a função quadrática $f: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$; $f(x) = ax^2 + bx + c$, com coeficientes reais e $a \neq 0$.

a) Mostre que a coordenadas do Vértice da parábola descrita por essa função é $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

b) Se o coeficiente dominante $a > 0$, a parábola descrita é côncava para cima e, se $a < 0$, a parábola é côncava para baixo. Explique algebricamente.

Na segunda aula a estratégia foi ministrar-se uma hora de aula com os seguintes conteúdos: Exercícios envolvendo a derivada das duas funções ministradas na aula anterior; Definição e exercícios envolvendo imagem inversa de uma função e discussões de aplicações das derivadas ensinadas. Em seguida aplicou-se uma nova avaliação com cinco questões e duração de 30 minutos.

Vale salientar, que a participação e entusiasmo dos alunos nessa segunda aula foram bastante satisfatórios. O entendimento geométrico do que é a derivada de uma função quadrática em um dos seus pontos, as possibilidades de aplicação e a discussão do fato da derivada ser uma função, foram capazes de motivar até alguns dos alunos que pretendem carreiras das ciências humanas na Universidade.

As questões que figuraram a segunda avaliação, estão a seguir.

IV.2 Avaliação Final

1. Apresente os intervalos reais, nos quais a função $f: IR \to IR;\ f(x) = -3x^2 + x - 4$ é

a) crescente

b) Decrescente

2. Calcule a derivada das funções a seguir.

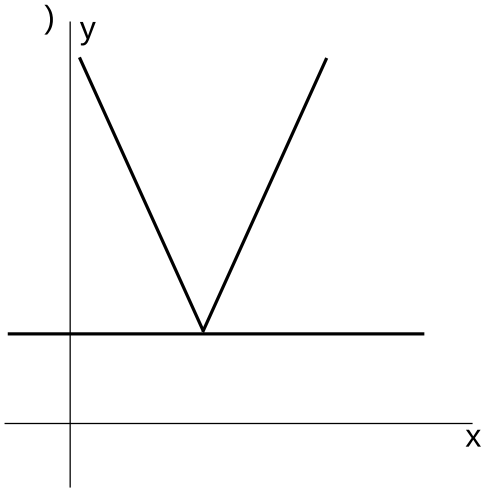
a) $f: IR \to IR;\ f(x) = 3x - 2$

b) $g: IR \to IR;\ f(x) = -5x^2 + 10$

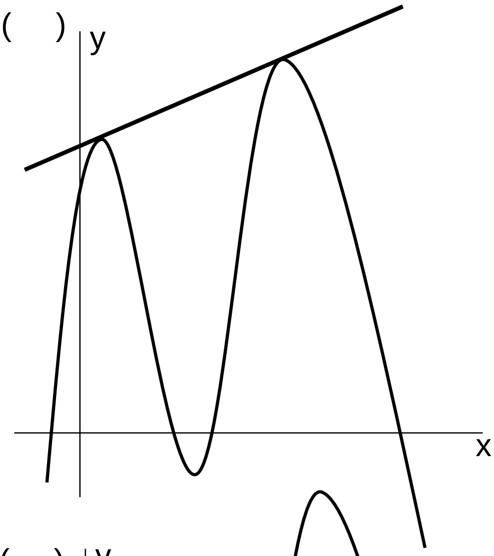
3. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f: IR \to IR;\ f(x) = 3x^2 - 2$, no ponto $P = (1,\ 1)$.

4. Assinale as alternativas que apresentam uma reta tangente ao gráfico.

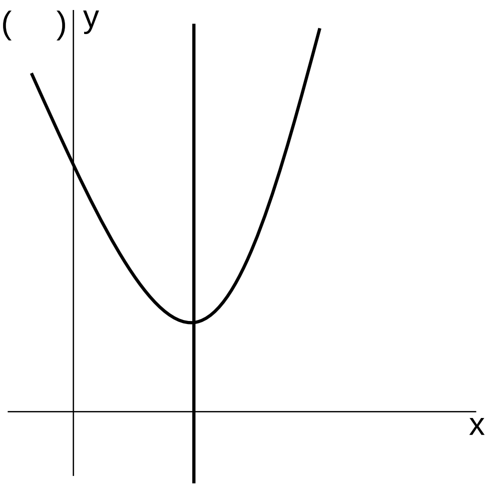
a) ( )



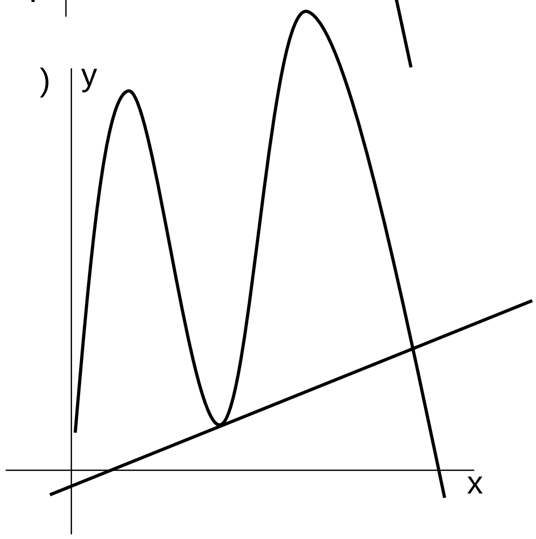
b) ( )



c) ( )



d) ( )



5. Considere a função quadrática $f : IR \to IR$; $f(x) = ax^2 + bx + c$, com coeficientes reais e $a \neq 0$.

Se o coeficiente dominante $a > 0$, a parábola descrita é côncava para cima e, se $a < 0$, a parábola é côncava para baixo. Explique algebricamente.

IV.3 Um breve tratamento Estatístico

Como o intuito era aferir a compreensão e o desempenho dos discentes em relação ao conteúdo ministrado, foi atribuída uma nota de 0,0 a 10,0 a cada uma das provas e os resultados, antes e depois das aulas, bem como a diferença dessas notas estão na tabela que se segue.

Tabela 1: Notas obtidas pelos 31 discentes que participaram da aplicação.

Aluno/nota	**Antes (X)**	**Depois (Y)**	**D = Y - X**
1	3,75	10,00	6,25
2	2,75	3,75	1,00
3	2,00	3,75	1,75
4	5,75	6,75	1,00
5	3,50	5,00	1,50
6	6,75	10,00	3,25
7	6,75	6,00	-0,75
8	5,00	9,00	4,00
9	4,50	10,00	5,50
10	7,25	10,00	2,75
11	2,25	7,75	5,50
12	5,50	9,00	3,50
13	4,25	8,50	4,25
14	5,75	8,75	3,00
15	8,00	10,00	2,00
16	1,25	5,00	3,75
17	5,25	5,75	0,50
18	5,50	8,00	2,50
19	5,75	9,00	3,25
20	6,75	10,00	3,25
21	5,25	10,00	4,75
22	4,75	10,00	5,25
23	7,00	7,00	0,00
24	6,75	10,00	3,25
25	4,50	9,50	5,00
26	5,25	7,75	2,50
27	3,25	10,00	6,75
28	5,25	6,75	1,50
29	6,75	9,00	2,25
30	7,00	9,00	2,00
31	5,00	6,00	1,00

Observando-se a coluna de diferenças entre Depois e Antes, já se pode perceber uma sensível melhora no desempenho dos participantes. E, é evidente que o grande número de notas 10,0 irá interferir bastante nos resultados a seguir, entretanto o intuito aqui não é comprovar uma eficiência definitiva, mas apenas aferir o comportamento do grupo em questão mediante o conhecimento adquirido. Assim sendo, o número de notas 10,0 pode ser interpretado como uma tendência de melhora e não como uma máxima aprendizagem.

O que pode ser reforçado pela estatística descritiva como se segue.

Tabela 2: Estatística descritiva das notas antes.

Notas Antes							
N	**Média**	**DesvPad**	**Mínimo**	**Q1**	**Mediana**	**Q3**	**Máximo**
31	5,129	1,663	1,25	4,25	5,25	6,75	8,00

Por se tratar de um Colégio no qual os alunos têm um direcionamento bastante claro quanto à necessidade de se estudar com seriedade e compromisso, mesmo antes das aulas já se percebe um bom rendimento dos mesmos, que fizeram a avaliação diagnóstica com muito empenho e dedicação.

Tabela 3: Estatística descritiva das notas depois.

Variável Depois							
N	**Média**	**DesvPad**	**Mínimo**	**Q1**	**Mediana**	**Q3**	**Máximo**
31	8,097	1,993	3,75	6,75	9,00	10,00	10,00

Os dados de desempenho, antes e depois das aulas, podem ser representados através de gráficos *box-plot*, apresentados a seguir, dos quais se pode notar indicações de que o rendimento dos discentes é, claramente, maior após o novo conhecimento adquirido.

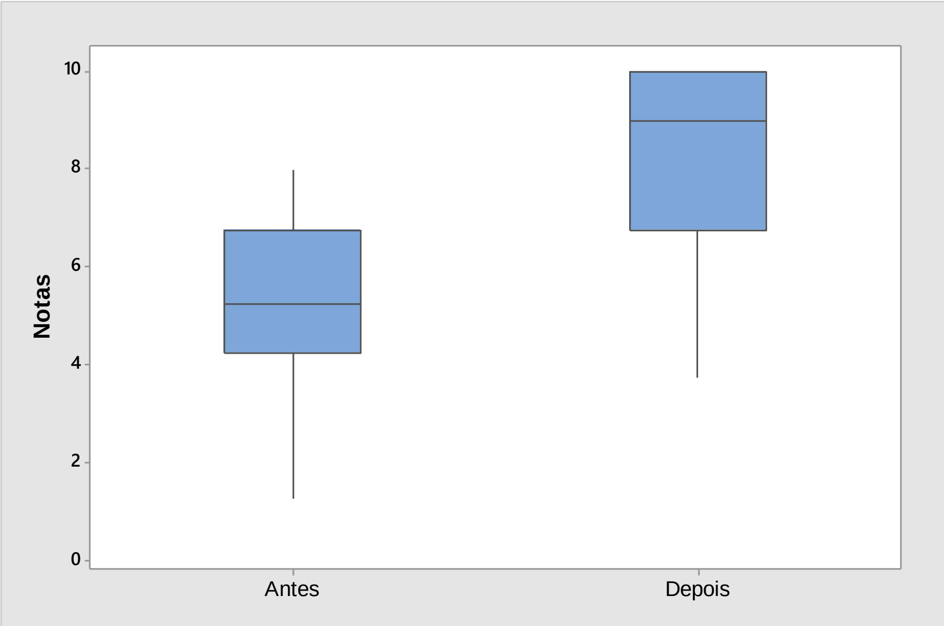


Gráfico 15: Box-plot comparativo das notas antes e depois das aulas.

Observando-se os gráficos de barras das notas de cada aluno antes e depois das aulas, enfatiza-se a melhora obtida no desempenho desses 31 participantes.

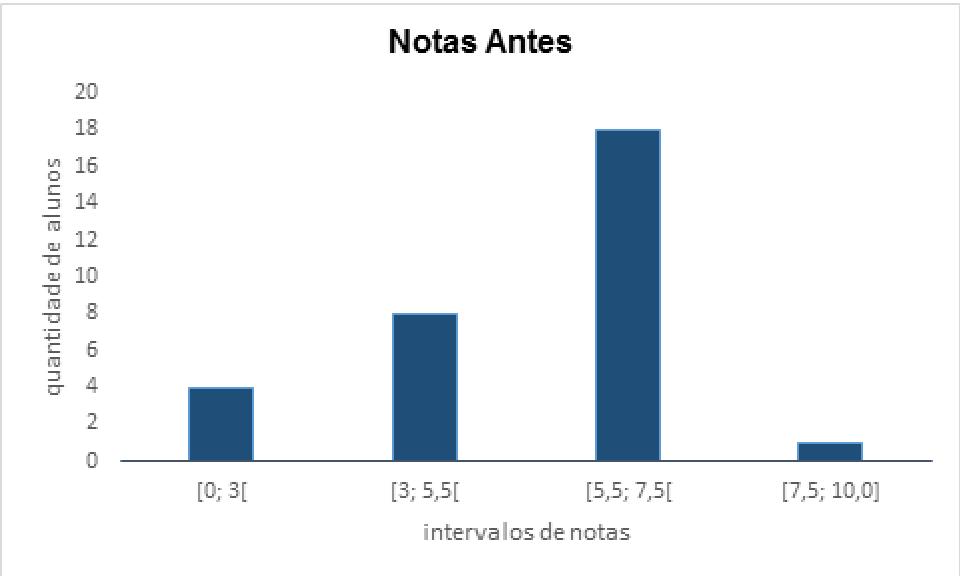


Gráfico 16: Frequência das notas antes.

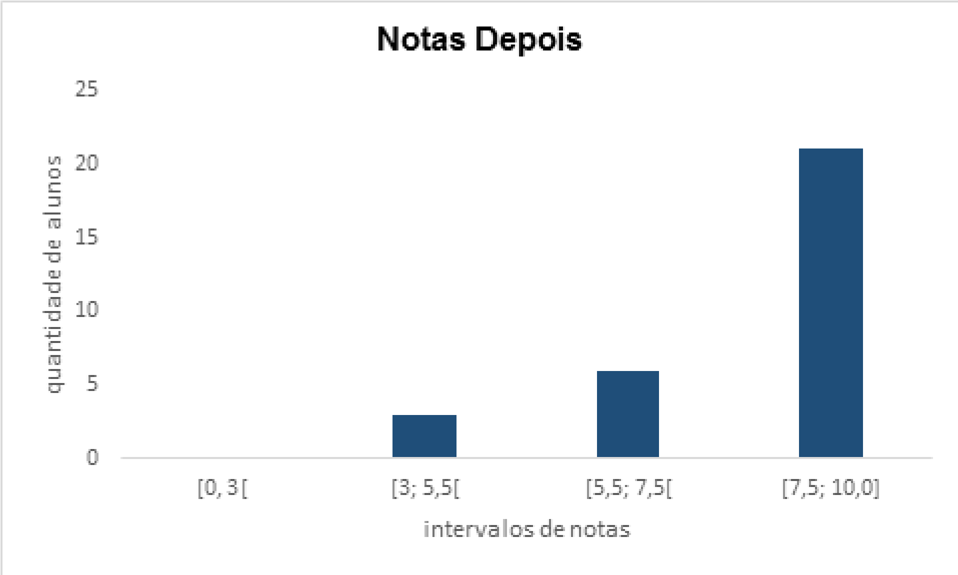


Gráfico 17: Frequência das notas depois.

E, findando-se a parte de análise gráfica dos resultados obtidos, pode-se visualizar o aumento no rendimento desses discentes através da estatística descritiva e do gráfico de barras das diferenças entre Depois e antes.

Tabela 4: Estatística descritiva das diferenças das notas (depois – antes).

Variável Diferença (depois – antes)							
N	**Média**	**DesvPad**	**Mínimo**	**Moda**	**Mediana**	**DesvMédio**	**Máximo**
31	2,96774	1,82583	– 0,75	3, 25	3,00	3,00	6,75

Vale ressaltar que apenas um aluno apresentou baixa no rendimento depois das aulas e, também apenas um aluno não apresentou alteração no rendimento. Os demais (29 alunos) apresentaram alta no seu rendimento (Vide tabela 1).

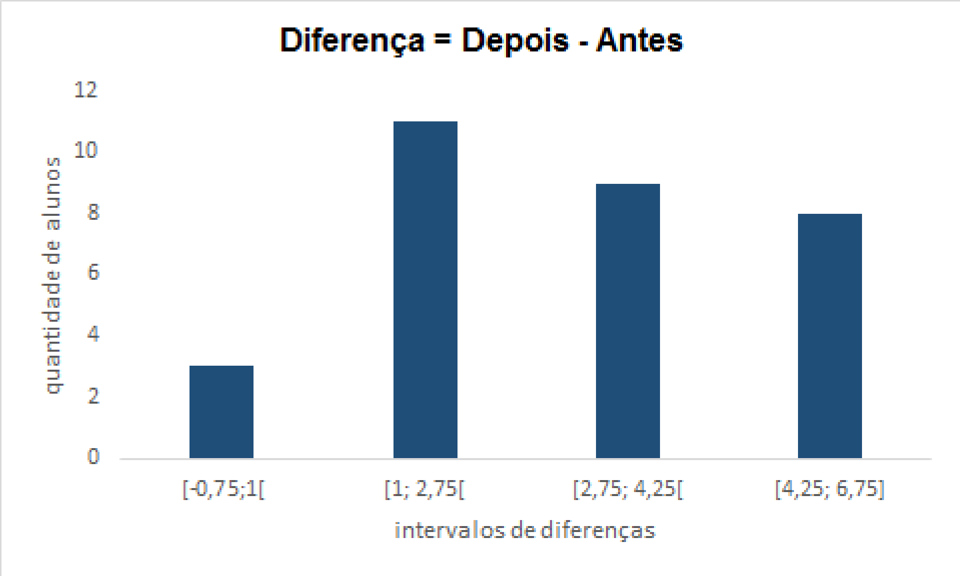


Gráfico 18: Frequência das diferenças das notas (depois – antes).

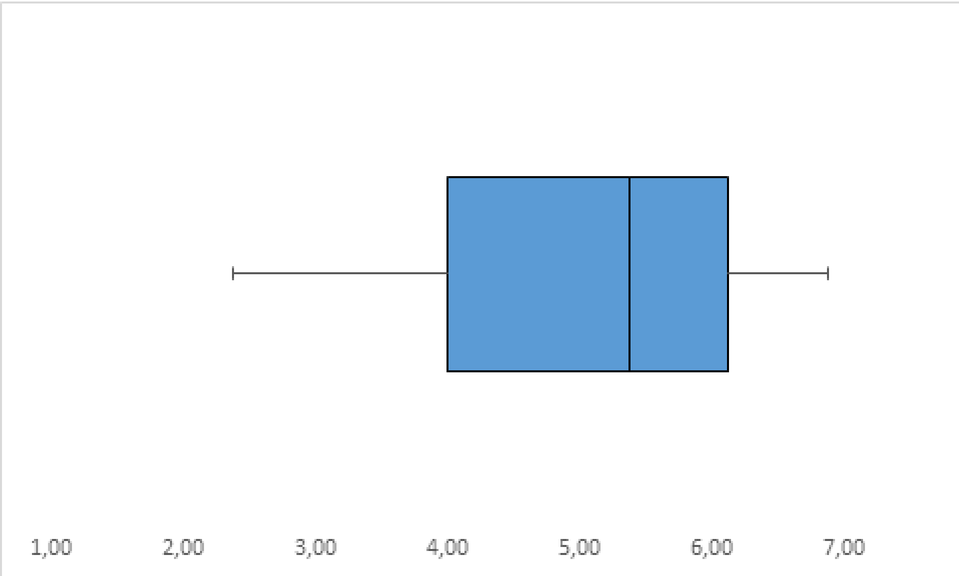


Gráfico 19: Box-plot da Diferença (Depois – Antes).

Contudo, para se verificar se o rendimento é de fato superior depois das aulas ministradas, deve-se executar um teste estatístico, sendo o mais adequando para esse tipo de caso, segundo (MAGALHAES & LIMA, 2005, p. 295) o teste T Pareado:

IV.4 Teste T Pareado e IC: Depois; Antes

Tabela 5: Resumo da estatística descritiva.

	N	Média	DesvPad	Var
Depois	31	8,097	1,987	3,974
Antes	31	5,129	1,383	2,766
Diferença	31	2,968	1,856	3,447

Com limite inferior de 0,95, α = 0, 05, para a diferença da média, e utilizando a tabela da distribuição t-Students (MAGALHAES & LIMA, 2005, p. 356) com 30 graus de liberdade, obtém-se t = 3, 646.

Assim, aplicando-se o Teste T de diferença de média = 0 (a aplicação não melhora o rendimento) versos média > 0, (a aplicação melhora o rendimento), tem-se $t_{obs} = 8{,}903$. Dessa forma, $t_{obs} > t$, de forma tal que se pode concluir que o rendimento dos alunos melhora após o novo conhecimento adquirido.

IV.5 Registro das aulas

Com a autorização do Coordenador do Ensino Médio, Prof. Luiz Felipe Fuke e do Orientador das 3as séries do Colégio Agostiniano, Prof. Vagner da Silva, pôde-se registrar alguns momentos das aulas ministradas nas dependências do Colégio, nos dias 19 de maio e 01 de junho de 2015.

Figura 25: Alunos realizando a Avaliação Diagnóstica

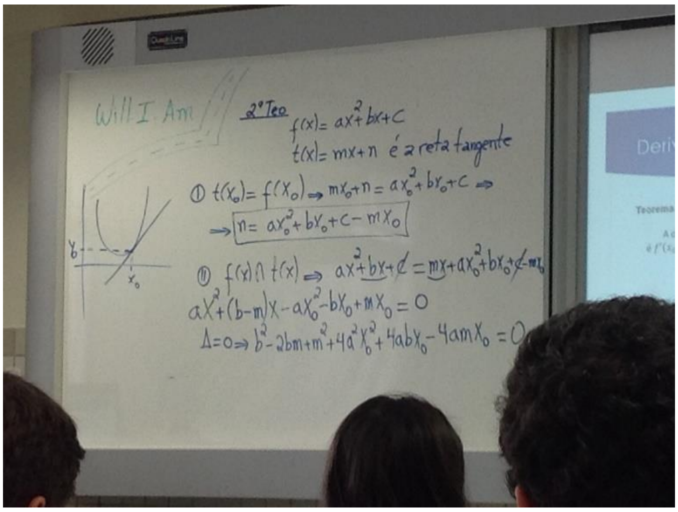


Figura 26: Lousa com parte da demonstração do Teorema 2

Como o tempo disponível para as aulas não era muito grande, foi preciso escolher os resultados que seriam apresentados nas aulas. O Teorema 2, Derivada da Função quadrática, foi um desses resultados, devido a familiaridade que os alunos possuem com a parábola desde a 1ª série do Ensino Médio.

Figura 27: Aluno realizando Avaliação

CONCLUSÃO

No decorrer dessa dissertação foi evidenciada a importância do Cálculo Diferencial e Integral como uma excelente ferramenta matemática, que auxilia no entendimento, desenvolvimento e solução de problemas nas diversas áreas do conhecimento. Entretanto salientou-se, a dificuldade que os discentes enfrentam nessa disciplina na graduação, atribuindo-se parte dessa dificuldade a primeira abordagem, quando feita no Ensino Médio, exclusivamente embasada no importante, porém abstrato, conceito de limite. Assim, fez-se a proposta de se introduzir Cálculo para o Ensino Médio, inicialmente, sem tal conceito.

É fato, apresentado no capítulo 2, que se pode derivar toda a classe das cônicas utilizando-se da geometria analítica, da interpretação geométrica de reta tangente e definindo-se derivada como inclinação da reta tangente à curva, não sendo necessário então, o rigor imposto pela definição de limite. Além disso, tem-se, através da abordagem sugerida, um relevante esclarecimento do que é a derivada de uma função em um ponto e da derivada como uma função.

Os resultados obtidos da sua aplicação, vão ao encontro de uma sensível melhora no desempenho dos alunos. Contribuindo substancialmente, com o entendimento e visualização da derivada. Além disso, mostrou-se que o conceito de derivada é bastante aplicado nas disciplinas e nos problemas que já figuram no ciclo escolar em questão, e pode desempenhar o papel de elo para a interdisciplinaridade, tão necessária.

Percebe-se que o exposto pode contribuir para uma transição mais amena entre os conceitos do Ensino Médio e o Cálculo do Ensino Superior, podendo até mesmo diminuir o índice de reprovação nesta disciplina. E, a partir dessa primeira abordagem, pode-se estimular a ideia intuitiva do conceito de limite, e outrora realizar-se um aprofundamento no conhecimento adquirido começando um estudo mais detalhado de limites, que se faz necessário, conforme pretende-se resolver problemas mais complexos.

Por fim, fez-se notório que o interesse e a compreensão dos alunos que participaram da aplicação deste trabalho, por certo são fatores que sinalizam a possibilidade de mais abordagens de Cálculo no Ensino Médio, uma vez que tais conceitos, com uma abordagem menos abstrata são estimuladores e decodificadores de teoremas que figuram nesse ciclo escolar como algo axiomático. E, isso muitas vezes provoca o desinteresse dos discentes, sendo assim, necessário ampliar o repertório de conceitos que eles possuem, e demonstrar que os teoremas possuem uma lógica argumentativa convincente e alcançável.

Fonte das figuras

As figuras que não forem citadas são do próprio autor.

Figura 5

http://www.k12math.com/math-concepts/algebra/conics/parabola-inter-with-cone.png

Figura 8

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7f/Conicas3.PNG/200px-Conicas3.PNG

Figura 10

http://astro.if.ufrgs.br/conica.jpg

Figura 11

http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/conicas/imagenes/loran.gif

Figura 12

https://farm6.staticflickr.com/5250/5207523966_4f492ec941_o.jpg

Figura 13

http://images.slideplayer.com.br/1/50281/slides/slide_4.jpg

Figura 14

http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/conicas/imagenes/loran.gif

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ÁVILA, G. O Ensino de Cálculo no 2º grau. Revista do Professor de Matemática, nº 18. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991. p.1 e 4.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, 2002. p. 111.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs. Brasília, 1997. p.19.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCNs. Brasília, 2000. p.9 e 10.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisa e Debates. Recife: SBEM, 2009. p.13.

PRATTA, Marco Antônio. Mestres Santos e Pecadores. Educação Religião e ideologia na construção de um projeto nacional durante a Primeira República brasileira (1889-1930). São Carlos: UFSCar, 1998. p.140.

BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999. p.174 e 177.

CARVALHO, J. B. P. de. O cálculo na escola secundária – algumas considerações históricas. 1996. p.68.

PIAGET, J. Para onde vai a educação? 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: José Olympio, 1984. p.14 e 17.

BIZELLI, M. H. S. S., disponível em

http://calculo.iq.unesp.br/Calculo1/DerivadaeaRetaTangente.htm, acessado em 21/07/2015.

EVES, H. Introdução à história da matemática; tradução: Hygino H Domingues. Ed. Unicamp – 2004. p. 99, 198 e 199.

EVES, H. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula – Geometria; tradução: Hygino H Domingues. Ed. Atual – 1992. p. 60 e 61.

LIMA, Lauro de Oliveira. Estórias da educação no Brasil: de Pombal a Passarinho. 3. ed. Rio de Janeiro: Brasília, 1969. p.363.

LIMA, Elon Lages - CARVALHO, Paulo Cezar Pinto - WAGNER, Eduardo – MORGADO, Augusto César – A Matemática do Ensino Médio, Vol.1 – 10ª edição 2012 – Coleção do Professor de Matemática – SBM.

MARQUES, Jair Mendes. Matemática Aplicada. Curitiba: Juruá, 2006.

MAGALHÃES, M. N. & LIMA, A. C. P. de. Noções de Probabilidade e Estatística – 2005 – 6ª ed. ver. – São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo. p.295 e p.356.