

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA**

**UMA INVESTIGAÇÃO AOS ZEROS DE UM
POLINÔMIO ATRAVÉS DA ÁLGEBRA**

MARCOS MOUTINHO SILVA

**CRUZ DAS ALMAS
2015**

UMA INVESTIGAÇÃO AOS ZEROS DE UM POLINÔMIO ATRAVÉS DA ÁLGEBRA

MARCOS MOUTINHO SILVA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof^o Dr. Juarez dos Santos Azevedo

CRUZ DAS ALMAS

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

S586i

Silva, Marcos Moutinho.

Uma investigação aos zeros de um polinômio através da álgebra / Marcos Moutinho Silva. – Cruz das Almas, BA, 2015.
62f.; il.

Orientador: Juarez dos Santos Azevedo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Agrárias, Ambientais e Biológicas.

1. Álgebra – Matemática. 2. Álgebra – Análise.
I. Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II. Título.

CDD: 512

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

UMA INVESTIGAÇÃO AOS ZEROS DE UM POLINÔMIO ATRAVÉS DA ÁLGEBRA

MARCOS MOUTINHO SILVA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Banca Examinadora:

Orientador:

Juarez dos Santos Azevedo

Prof^o Dr. Juarez dos Santos Azevedo - UFRB

Membro:

Vânia Gonçalves de Brito dos Santos

Prof^a Dr. Vânia Gonçalves de Brito dos Santos - UNEB/UCSAL

Membro:

Adson Mota Rocha

Prof^o Me. Adson Mota Rocha - UFRB

Cruz das Almas, 19 de Novembro de 2015.

*à minha MãE (in memorian)
com muito amor.*

*"Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção."*

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, à minha MÃE (*in memorian*), Cândida e aos meus amigos. Agradeço por poder contar sempre com todos.

A Instituição e a todos que a compõem.

Ao professor e orientador Prof^o Dr. Juarez dos Santos Azevedo, pelas contribuições, pela orientação, que me levaram a execução e conclusão deste trabalho.

A todos os colegas do mestrado, que contribuíram diretamente nesta etapa de novos conhecimentos. Por terem sido companheiros em todos os momentos.

Aos gestores Adson, Adriana e Elma assim como os colegas do Colégio Estadual Governador Roberto Santos, que Apoiaram e contribuirão neste processo de novos conhecimentos.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho de alguma forma, a todos que passaram pela minha vida e colaboraram para a construção de quem sou hoje. Os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço aos meus amigos particulares e especialmente à Márcio, Carlos Eduardo, Patricia e Tânia além de companheiros de estrada, tornaram-se grandes amigos, pela atenção, companhia, conselhos, por todos os risos, por me suportarem nos momentos de intenso cansaço e estresse.

Agradeço ao professor Eleazar Madriz, que sempre me deu apoio.

Enfim, a todos os que, de alguma maneira, contribuíram para a conclusão de mais esta fase da minha vida, os meus sinceros agradecimentos.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o cálculo de raízes a partir de espaços compostos por pontos isolados considerando ferramentas do campo de álgebra moderna. A construção se deu a partir de pré-requisitos básicos envolvendo conceitos de álgebra vetorial e anéis de polinômios a fim de discorrer sobre o espaço polinomial zero-dimensional. Propriedades foram apresentadas para caracterização deste espaço.

Palavras-chave: Anéis Quocientes de polinômios; Espaço Dual; Espaço Vetorial.

ABSTRACT

In this text we study the calculation of roots from spaces composed of isolated points considering tools of modern algebra field. The construction took from basic prerequisites involving concepts of vector algebra, and polynomial rings in order to discuss about polynomial zero-dimensional space. Properties were presented to characterize this space.

Keywords: Quotient rings; Dual space; Vector space.

1	Preliminares	13
1.1	Polinômios	13
1.1.1	Espaço Linear Polinomial	13
1.2	Anéis Polinomiais	20
2	Ideal 0-dimensional	24
2.1	Ideal 0-Dimensional	24
2.2	Bases de ideal polinomial	27
2.3	Anéis quocientes e ideais polinomiais	31
3	O Teorema Central da Solução de um Sistema Polinomial	43
3.1	Transformação de base no \mathcal{R} e \mathcal{D}	43
3.2	Aplicação quando todas as raízes são distintas	46
3.3	Polinômio com raízes de multiplicidade maior que 1	48
4	Aplicações	50
	Referências Bibliográficas	60

LISTA DE FIGURAS

2.1	Retas que representam $p_1 = p_2 = 0$.	26
2.2	Elementos de \mathcal{I} .	26
2.3	Quadrado definido pela interseção dos elementos \mathcal{I} .	28
2.4	Quadrado definido pela interseção dos elementos \mathcal{I} deslocado em 1.	29
2.5	Ideal $\mathcal{I}=[g_1, g_2]$.	33
4.1	A solução aplicada no MAPLE 18	51
4.2	Ilustração de todos os pacotes.	52
4.3	Troca de ";" por ":".	52
4.4	Processo de criação do ideal \mathcal{I} .	53
4.5	Base de Lagrange \mathbf{b}_0	53
4.6	Matrizes M_x e M_y	54
4.7	Autovalores e autovetores	54
4.8	Matrizes na forma canônica de Jordan	55
4.9	A base de Lagrange.	56
4.10	As matrizes de multiplicidade.	57
4.11	As diagonais formam blocos.	58
4.12	Solução do sistema, com três raízes reais.	58

Este trabalho tem como objetivo investigar alguns procedimentos analíticos para determinar o conjunto dos zeros de um polinômio. Esta investigação se dará sobre tudo do ponto de vista da abordagem da álgebra abstrata. Pretendemos desta forma, realizar um estudo introdutório do método de Habicht [12]. Tal estudo consiste em definir um operador linear a partir do produto entre dois polinômios. Iremos também usar o fato do produto entre dois polinômios se tratar de um operador linear [3] e conseqüentemente introduzir o conceito de espaço vetorial de dimensão zero. Neste sentido, dado um espaço vetorial definido por pontos isolados, cada elemento deste espaço tende a um ponto isolado. Além disso, dentro deste espaço vetorial, poderemos formar subgrupos que devem funcionar como anel polinomial e em seguida gerar um ideal.

Com isto, pretendemos dar início a um abordagem de espaço vetorial com dimensão zero ou 0-dimensional. Outros autores se motivaram por este trabalho, como Buchberger [11] que apresentou em 1965 um estudo que determina como se encontra classes residuais de um anel polinomial. Porém, diante das dificuldades de operar com polinômios, seu trabalho foi pouco utilizado nos posteriores 35 anos. Em 1991, com a otimização dos recursos computacionais, e os diversos softwares apoiando a efetivação de cálculos, muitos autores como M. Kreuzer, L. Robbiano, V. Weispfenning, L. Gonzales-Vega entre outros conseguiram elaborar algoritmos associados a linguagem de programação para determinar as raízes de um polinômio apoiados nos trabalhos de Habicht e Buchberger.

Convém observar que apesar de não existir uma equação que possibilite calcular os zeros de polinômios, os polinômios são ferramentas fundamentais nos dias atuais. Exemplos estão

nas áreas de modelagem computacional, sistemas mecânicos, processamento de sinal e projetos de filtro, engenharia civil e de produção. Seu estudo também é importante em áreas da matemática aplicada como álgebra linear e análise numérica.

Inspirado nos exemplos citados, além de compreender sua importância na matemática atual, pretendemos construir todo o processo para determinação de uma base que possibilita determinar o conjunto dos zeros de qualquer polinômio. Durante este processo, nortearemos nosso caminho seguindo as ideias de Stetter [3] a fim de compreender a identificação do conjunto dos polinômios em um anel quociente até o processo de mudança de base, apoiando-se fortemente, na utilização de um espaço 0-dimensional.

O trabalho está dividido em três etapas:

- **Capítulo 1** iremos apresentar conceitos iniciais da álgebra linear e da álgebra moderna. Esta abordagem visa familiarizar o leitor com conceitos fundamentais para compreensão deste texto.
- **Capítulo 2**, nos dedicaremos ao estudo do espaço 0-dimensional. Posto isso, veremos ideais, anéis quociente e espaço dual com dimensão 0. Estes conteúdos visam apresentar as ferramentas fundamentais para consequentemente chegarmos ao **Teorema Central** da solução de um sistema de polinômios, resultado principal deste trabalho. Iremos também abordar conceitos de base minimal e interpolação de Lagrange usadas na caracterização das bases de um espaço 0-dimensional. Finalizaremos este capítulo, considerando conceitos de espaço dual direcionando os resultados para o **Teorema Central**.
- **Capítulo 3** demonstraremos importantes resultados que irão culminar no **Teorema Central**.
- **Capítulo 4** apresentaremos alguns exemplos considerando o software MAPLE 18.
- **Considerações finais** resumimos os pontos positivos do texto e perspectivas de trabalho futuro.

Neste capítulo procuramos apresentar alguns conteúdos indispensáveis a fim de auxiliar nos resultados referentes a determinação de zeros de um polinômios. Deste modo, decidimos dividir este estudo em três partes: Na Seção 1.1 iremos definir o espaço dos monômios e o espaço dos polinômios. Na Seção 1.2 iremos abordar os conceitos de ideal e anéis quocientes de polinômios.

1.1 Polinômios

Nesta seção iremos abordar os conteúdos preliminares seguindo Stetter [3], Hefez[5], Boldrini [1], Cohen [4] e Sampaio [2]. Os conceitos a serem apresentados, são fundamentais para construção de um algoritmo que permite gerar uma base de um determinado espaço vetorial, que veremos se tratar de um anel algébrico e nos possibilitará calcular raízes de qualquer polinômio de uma ou várias variáveis.

1.1.1 Espaço Linear Polinomial

Em nossos estudos classificaremos os polinômios como parte integrante de um espaço vetorial polinomial. Isto possibilita-nos a determinar a existência de um operador que desloque qualquer polinômio de um espaço para outro. De fato, já aprendemos da álgebra linear que todo espaço vetorial possui base e dimensão. Em geral, esta dimensão está diretamente ligada ao número de elementos da base. Devido a isto, precisamos identificar os elementos da base deste

espaço, estudando suas propriedades: associativa, elemento neutro e comutativa, as quais, posteriormente iremos aplicar em polinômios. Iniciaremos nosso estudo definindo o conceito de monômio:

Definição 1 Definimos como monômio o produto de s variáveis dado por:

$$x^j := x_1^{j_1} \dots x_s^{j_s} \quad \text{com } j = (j_1, \dots, j_s) \text{ tal que } J = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq s\}. \quad (1.1)$$

introduzida sobre o conjunto de todos os monômios com o número de variáveis iguais ou menores que s que iremos denotar por Γ^s .

Além disso, diremos que o monômio tem grau d quando a soma dos expoentes das variáveis for igual a d , neste caso, x^j pertence a Γ_d^s . Naturalmente podemos concluir que $\Gamma_d^s \subset \Gamma^s$. Por exemplo, o monômio $x^j = x^3yz \in \Gamma_5^3$ possui 3 variáveis e grau 5. Note que a definição acima não limita $s = 3$ e $d = 5$, mas $x^3yz \in \Gamma_d^s$ sempre que $s \geq 3$ e $d \geq 5$. Outra observação é que $1 \in \Gamma_d^s$, de fato, podemos representar $1 = x_1^0 \dots x_s^0$ para qualquer que seja s e d .

Exemplo 1 Determine o número de monômios que pertence a Γ_2^3 .

Observe que neste caso devemos contar quantos monômios de três variáveis e grau dois existem. Sem perda de generalidade chamaremos $x^j = x_1^{j_1} x_2^{j_2} x_3^{j_3}$ com $j \in J = \{j \in \mathbb{N} \mid j \leq 2\}$. Como $d = 2$ sabemos que $j_1 + j_2 + j_3 \leq 2$. Sendo assim iremos contar por casos:

Caso 1: Para $d = 0$ temos $j_1 + j_2 + j_3 = 0$. Com isto, a única possibilidade é que $j_1 = j_2 = j_3 = 0$, e como já vimos acima, $x^j = 1$ existe para apenas um monômio de grau 0.

Caso 2: Para $d = 1$ temos $j_1 + j_2 + j_3 = 1$. Obrigatoriamente um dos termos é igual a 1 e os outros dois termos são iguais a 0. Com isto, temos uma combinação de 3, 1 à 1. Logo, temos 3 polinômios.

Caso 3: Para $d = 2$ temos $j_1 + j_2 + j_3 = 2$. Assim, um dos termos é igual a 2 e os outros são iguais a zero. Neste caso o resultado é o mesmo para dimensão $d = 1$, ou dois termos são iguais a 1, e um único termo é igual a zero. O que mais uma vez resulta no caso $d = 1$. Logo, temos 6 monômios.

Deste modo, somando todos os casos temos 10 monômios em Γ_2^3 . Note que nem sempre será tão simples efetuar esta contagem. Para vencer este tipo de problema quando s ou d forem muito grandes, usaremos a seguinte proposição:

Proposição 1 Dado Γ_d^s temos que o número de monômios existente com grau igual ou menor que d é dado pelo número binomial $\binom{d+s}{d}$.

Prova: Seja o conjunto Γ_d^s iremos determinar o número de monômios com s variáveis com grau menor ou igual a d . Sem perda de generalidade sabemos que se um monômio pertence a Γ_d^s então ele é do tipo $x_1^{j_1} \dots x_s^{j_s}$ tal que $j \in J = \{j \in \mathbb{N}, j \leq s\}$. Observe que $\sum_{i=1}^s j_i \leq d$ pois o valor máximo para o grau de um monômio em Γ_d^s é d . Deste modo, iremos distribuir todos os expoentes entre as s variáveis, obtendo um monômio qualquer $x^j = x_1^{j_1} \dots x_s^{j_s}$. Veja que o expoente x_1 tem valor j_1 , além deste expoente poder variar entre 0 e j_1 . Logo temos $j_1 + 1$ possibilidades e a mesma ideia será usada para j_2 até chegarmos a j_s . Observe que estamos realizando um único evento, dividindo em s casos. Logo, o número de possibilidades será dado por $j_1 + 1 + \dots + j_s + 1 = (j_1 + \dots + j_s) + (1 + \dots + 1)$. Como o valor máximo do grau é d , sabemos que $(j_1 + \dots + j_s) = d$ de modo que $(1 + \dots + 1) = s$, assim o número de possibilidades será $d + s$. Observe que estas possibilidades devem ser formadas em grupos de até d elementos. Com isto, o número de monômios será dado pela combinação

$$\binom{d+s}{d}. \quad (1.2)$$

□

Uma importante observação vem do fato de que a eq. (1.2) é a quantidade de monômios com grau igual ou menor que d e que substituindo d por $d - 1$ em (1.2), podemos determinar a quantidade de monômios com grau igual ou menor que $d - 1$. Se desejarmos determinar o número de monômios com grau igual a d , basta resolver:

$$\binom{d+s}{d} - \binom{(d-1)+s}{d-1}.$$

De fato, aplicando a relação de Stifel, temos que:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k},$$

\implies

$$\binom{(d-1)+s}{d-1} + \binom{d+s-1}{d} = \binom{d+s}{d}.$$

Sendo assim, o número de monômios com grau exatamente igual a d será:

$$\binom{d+s-1}{d}. \quad (1.3)$$

Em todo caso, antes de abordarmos o espaço polinomial, verificaremos que dois monômios αx^j e βx^j , com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ são fechados para operações de soma e produto. Note que: $\alpha x^j + \beta x^j \mapsto (\alpha + \beta)x^j$ e $\beta \cdot \alpha x^j \mapsto \beta \alpha x^j$. Observe que neste caso, Γ^s é um espaço vetorial visto que a soma e o produto de um escalar por um monômio está bem definidos e satisfazem os axiomas de espaço vetorial (ver em Hefez [5]). Além disso, temos que quando está soma é determinada por monômios distintos teremos uma combinação linear. Esta combinação linear gera um novo espaço vetorial, e os monômios somados serão chamados de geradores. Boldrini [1] afirma que a combinação linear destes monômios determina um subespaço vetorial. Além disso, temos que Γ^s representa os infinitos espaços vetoriais unidimensionais o que nos leva a concluir que um polinômio dado é um subespaço gerado da soma direta de espaços, e conseqüentemente cada um dos espaços Γ^s possuem uma única dimensão.

Uma vez definidos os elementos da base, já podemos dizer que todo polinômio é a combinação linear de monômios. De fato, esta consideração é imediata, já que os monômios serão os elementos da base de um espaço vetorial compostos por polinômios. Além disso, temos que os coeficientes são escalares arbitrários, isto é, coordenadas dos vetores do espaço \mathbb{C} (\mathbb{R}), o qual é um corpo. Deste modo, são consideradas válidas as propriedades: associativa e a distributiva para polinômios.

Como monômios e polinômios são estruturas algébricas distintas e precisamos definir de modo particular cada uma delas, isto nos motiva a apresentar a seguinte definição:

Definição 2 *Um polinômio complexo (ou real) com s variáveis é uma combinação linear finita de monômios de Γ^s com coeficientes $\alpha \in \mathbb{C}$ (ou \mathbb{R}) se:*

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, \dots, x_s) = \sum_{(j_1, \dots, j_s) \in J} \alpha_{j_1 \dots j_s} x_1^{j_1} \dots x_s^{j_s} = \sum_{j \in J} \alpha_j x^j. \quad (1.4)$$

Chamaremos de suporte de $p(\mathbf{x})$ o conjunto $J \in \mathbb{N}$ tal que J contenha todos os expoentes dos monômios que compõem um dado polinômio $p(\mathbf{x})$. Os monômios serão chamados de termos. Ainda temos que o grau de $p(\mathbf{x})$ coincidirá com o grau de seu maior termo.

Agora iremos apresentar um exemplo a fim explorar as definições de grau de um polinômio. Considere

$$p(x, y, z) = x^3 y^2 z + 3x^2 z^3 - 3xyz - 10. \quad (1.5)$$

Note que $p(x)$ possui 4 termos, sendo que o independente possui grau zero. De fato, $10x^0y^0z^0 = 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10$. Agora vamos verificar o grau de cada um dos termos:

$$\begin{aligned}x^3y^2z^1 &\implies 3 + 2 + 1 = 6, \\3x^2y^0z^3 &\implies 2 + 0 + 3 = 5, \\-3x^1y^1z^1 &\implies 1 + 1 + 1 = 3.\end{aligned}$$

Deste modo, o grau de $p(x)$ será 6, pois este é o grau do maior termo.

Definição 3 Quando dois ou mais termos de um polinômio, tiverem grau igual ao do polinômio que compõem diremos que são termos homogêneos.

Por exemplo, se acrescentarmos os termos $2x^3y^3$ e x^3y^2 a eq. (1.5) teríamos dois termos de grau 6 e 5. No entanto, apenas os termos x^3y^2z e $2x^3y^3$ seriam chamados de homogêneos, pois, apenas estes termos possuem mesmo grau que $p(x)$.

Definição 4 Chamaremos de polinômio mônico a todo polinômio cujos coeficientes forem todos iguais a 1 e com uma única variável (univariável).

Para ilustrar a Definição 4 a representação de um polinômio mônico será do tipo:

$$p(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1. \quad (1.6)$$

Quando estudamos os monômios, vimos que nem sempre a soma de dois monômios gera outro monômio. Naturalmente podem surgir dúvidas do tipo: Sempre que somamos dois polinômios o resultado continua sendo um polinômio? O que ocorre se multiplicarmos por um escalar? Estas são dúvidas naturais e para serem respondidas precisamos analisar os polinômios como sendo parte de um conjunto. Deste modo, se existir um conjunto P que contém todos os polinômios e supomos $p(x), q(x) \in P$, então P também possuiria $p(x) + q(x)$, pois já consideramos o fato de que P possui todos os polinômios [7].

Contudo, devemos salientar que neste momento estamos apenas levando em conta, a suposição da existência deste conjunto P . Sendo assim, precisamos verificar esta possibilidade de modo mais formal. Aliás, esta definição fundamenta P como um grupo. Realmente chamamos de grupo a todo conjunto não vazio com uma operação bem definida. Em particular, nosso conjunto contém polinômios, de modo que é diferente de vazio e a adição é fechada em P .

No decorrer deste Capítulo iremos mostrar que existe um conjunto que representa um espaço vetorial polinomial.

Definição 5 O conjunto de todos os polinômios complexos (ou reais) com s variáveis será denotado por $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^s$ (ou $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^s$), independente da notação usada para as variáveis. Ainda, poderemos utilizar a seguinte representação \mathcal{P}^s , tal que, não existe uma discriminação quanto aos coeficientes serem reais ou complexos. Além disso, o conjunto dos polinômios com grau menor ou igual a d é definido por \mathcal{P}_d^s .

Já sabemos dos conteúdos de álgebra linear que \mathcal{P}_d^s é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} (ou \mathbb{R}). Afinal, dados dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ ambos pertencendo a \mathcal{P}_d^s a soma $p(x) + q(x) \in \mathcal{P}_d^s$, e dado um escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ (ou \mathbb{R}), o produto de $\alpha p(x) \in \mathcal{P}_d^s$. Sendo assim, a soma e produto por um escalar são bem definidos, além disso, a soma entre monômios satisfazem as propriedades de associatividade, comutatividade, elemento neutro, elemento oposto, todas em relação a soma, e comutatividade, associatividade, distributividade em relação a soma e elemento inverso, todas em relação a multiplicação.

Sabemos ainda que uma base genérica de um espaço vetorial, será representada por monômios proveniente de Γ_d^s . Como resultado da Proposição 1 temos que o número de monômios com grau menor que d e com s variáveis cresce rapidamente, com a variação de s . Por exemplo, aplicando a Proposição 1, encontramos que a dimensão de \mathcal{P}_2^4 é um espaço vetorial com 4 variáveis e grau menor ou igual a 2, e pode possuir no máximo dimensão igual a 15.

Na mesma perspectiva tome o polinômio $p(x, y) = 3x^2 + 2xy - 4$. Inicialmente podemos ver que este polinômio tem grau 2. Sendo assim, diremos que ele pertence a \mathcal{P}_2^2 cuja dimensão é dada por:

$$\binom{d+s}{d} = \binom{2+2}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

De fato, $p(x, y)$ pode ser escrito como $p(x, y) = 3x^2 + 0y^2 + 2xy + 0x + 0y - 4$ e podemos representar os coeficientes de $p(x, y)$ por um vetor linha na forma $a^T = (3, 0, 2, 0, 0, -4)$. Observe ainda, que se escrevermos um vetor $q(x, y)$ a partir dos seus coeficientes, entenderemos que a base deve ter a mesma ordem. Assim se existe um $a'^T = (0, -2, 1, 3, 0, 0)$ associado a $q(x, y)$, então este polinômio irá representar $q(x, y) = -2y^2 + xy + 3x$.

Neste caso, o conjunto gerador do espaço vetorial será $\mathcal{P}_2^2 = [x^2, y^2, xy, x, y, 1]$. Por outro lado, estamos usando apenas um exemplo de base para determinar um subespaço vetorial dos polinômios. Entretanto, seguindo esta perspectiva podemos determinar a soma de $p(x, y) + q(x, y)$ por $a^T + a'^T$, isto é:

$$p(x, y) + q(x, y) = a^T + a'^T = (3, 0, 2, 0, 0, -4) + (0, -2, 1, 3, 0, 0) = (3, -2, 3, 3, 0, -4).$$

No exemplo acima teríamos a representação de $p(x, y) + q(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 3xy + 3x - 4$. Assim suas coordenadas dentro desta dimensão serão coeficientes agrupados convenientemente para que possamos associar cada coeficiente ao seu termo. Desta forma, iremos denotar os coeficientes por um vetor linha $\mathbf{a}^T = (\dots, \alpha_j, \dots)$ e os monômios por um vetor coluna $\mathbf{x} = (\dots, x^j, \dots)^T$. Com isto, podemos determinar um $p(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}_T^s$:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I} \alpha_j x^j = (\dots, \alpha_j, \dots) \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ x^j \\ \vdots \end{pmatrix} =: \mathbf{a}^T \mathbf{x}. \quad (1.7)$$

A eq. (1.7) significa que os coeficientes representarão os elementos do espaço vetorial através de um vetor linha enquanto o vetor coluna será representado pelas variáveis independentes. Para encerramos a caracterização do espaço vetorial polinomial, temos que a operação entre dois polinômios pertencentes a \mathcal{P}_d^s será restrita a operação entre os coeficientes destes polinômios, isto é:

$$\mathbf{a}^T + \mathbf{b}^T = (a_1, \dots, a_s) + (b_1, \dots, b_s) = (a_1 + b_1, \dots, a_s + b_s). \quad (1.8)$$

e

$$\alpha \mathbf{a}^T = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_s). \quad (1.9)$$

Exemplo 2 A dimensão de \mathcal{P}_n^1 sempre será $n + 1$.

De fato, sem perda de generalidade, podemos considerar t como sendo a variável e $\mathcal{P}_n^1 = [1, t, t^2, \dots, t^n]$. Como temos $n + 1$ elementos no gerador, a dimensão será $n + 1$.

Exemplo 3 Dado o conjunto de geradores $\mathcal{E} = [x^3, xy, y^3]$, prove que \mathcal{E} gera um espaço vetorial de dimensão igual a 3.

Como temos três monômios no conjunto gerador basta provar que as operações das eqs. (1.8) e (1.9) são bem definidas em \mathcal{E} . Deste modo, temos que qualquer polinômio do espaço \mathcal{E} será representado por um vetor linha $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, a_3)$ e $p(x, y)$ será definido pela eq. (1.7). De fato:

$$p(x, y) = (a_1, a_2, a_3) \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ xy \\ y^3 \end{pmatrix} = a_1 x^3 + a_2 xy + a_3 y^3.$$

Podemos também supor um outro polinômio $q(x, y) \in \mathcal{E}$ tal que, seus coeficientes são determinados por $\mathbf{b}^T = (b_1, b_2, b_3)$. Logo $q(x, y) = b_1 x^3 + b_2 xy + b_3 y^3$. Aplicando a eq. (1.8) temos

que $a^T + b^T = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ e aplicando a eq. (1.7) obtemos

$$p(x, y) + q(x, y) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ xy \\ y^3 \end{pmatrix} = (a_1 + b_1)x^3 + (a_2 + b_2)xy + (a_3 + b_3)y^3.$$

Como $a_i, b_i \in \mathbb{C}$. Podemos aplicar todas as propriedades associadas a este corpo, em particular, usaremos a distributividade e a associatividade. Sendo assim:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)x^3 + (a_2 + b_2)xy + (a_3 + b_3)y^3 &= a_1x^3 + b_1x^3 + a_2xy + b_2xy + a_3y^3 + b_3y^3 = \\ &= a_1x^3 + a_2xy + a_3y^3 + b_1x^3 + b_2xy + b_3y^3 = p(x, y) + q(x, y). \end{aligned}$$

Logo a eq. (1.8) é válida para \mathcal{E} .

Agora considere $\alpha \in \mathbb{C}$ e sem perda de generalidade suponha que $\alpha \cdot a^T = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$. Novamente, aplicando a eq. (1.7) temos:

$$(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ xy \\ y^3 \end{pmatrix} = \alpha a_1 x^3 + \alpha a_2 xy + \alpha a_3 y^3.$$

Análogo à demonstração de eq. (1.8) aplicamos a distributiva $\alpha a_1 x^3 + \alpha a_2 xy + \alpha a_3 y^3 = \alpha(a_1 x^3 + a_2 xy + a_3 y^3) = \alpha \cdot p(x, y)$. Com isto, temos que eq. (1.9) também é bem-definida para \mathcal{E} e assim \mathcal{E} representa um espaço vetorial.

1.2 Anéis Polinomiais

Nesta seção iremos mostrar que um espaço vetorial dos polinômios também caracteriza um anel polinomial. Inicialmente, se \mathcal{A} é um conjunto com duas operações definidas, adição (+) e multiplicação (\cdot), então diremos que $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ será um anel se dados três elementos $a, b, c \in \mathcal{A}$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ vale as seguintes propriedades(ver em [6]):

1. (+) Associativa, elemento neutro e elemento oposto;
2. (\cdot) Associativa e distributiva da multiplicação em relação a soma.

Em particular, quando nos referimos a anéis polinomiais, os mesmos apresentam a comutatividade e elemento neutro da multiplicação, sendo um anel comutativo com unidade[10][12].

Todas as propriedades dos anéis polinomiais podem ser facilmente verificadas a partir da adição e produto entre monômios[9].

Desta forma, dados $p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$, $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_s)$ com respectivos coeficientes $\mathbf{a}^T = (a_1, \dots, a_s)$, $\mathbf{b}^T = (b_1, \dots, b_s)$ e $\mathbf{c}^T = (c_1, \dots, c_s)$ e considerando um escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ (ou \mathbb{R}), as seguintes propriedades são válidas para \mathcal{P}^s :

1. (+) Associativa: $\forall p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$ temos $p(\mathbf{x}) + (q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})) = (p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})) + r(\mathbf{x})$;
2. (+) Elemento neutro: $\exists o(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$ tal que $p(\mathbf{x}) + o(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ para $\forall p(\mathbf{x})$, $o(\mathbf{x})$ é o polinômio nulo;
3. (+) Comutativa: $\forall p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$ temos que $p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})$;
4. (+) Elemento oposto: $\forall p(\mathbf{x}), \exists -p(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$ tal que $p(\mathbf{x}) + (-p(\mathbf{x})) = o(\mathbf{x})$ onde $o(\mathbf{x})$ é o elemento neutro de \mathcal{P}^s ;
5. (\cdot) Comutativa: $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{x}) \quad \forall p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$;
6. (\cdot) Associativa: $\forall p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$ temos que $p(\mathbf{x}) \cdot (q(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x})) = (p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x})) \cdot r(\mathbf{x})$;
7. (\cdot) Elemento Neutro: $\exists I(\mathbf{x})$ tal que, $p(\mathbf{x}) \cdot I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$;
8. (\cdot) Distributiva em relação a soma: $\forall p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), r(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^s$ temos que $p(\mathbf{x}) \cdot (q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) \cdot r(\mathbf{x})$.

Obviamente, segue-se que \mathbf{a}^T , \mathbf{b}^T e \mathbf{c}^T são vetores pertencentes a \mathcal{P}^s e as propriedades 1 à 4 já são consideradas válidas por estarem relacionadas a um espaço vetorial dos polinômios. Contudo, precisamos definir o produto entre dois polinômios, para assim provarmos que de fato \mathcal{P}^s é um anel polinomial. Observe inicialmente que o produto entre dois monômios sobre Γ^s será definido por:

$$\alpha_1 \mathbf{x}^{j_1} \cdot \alpha_2 \mathbf{x}^{j_2} = \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{x}^{j_1 + j_2}. \quad (1.10)$$

Como já definimos que j_1 e j_2 pertencem a \mathbb{N} temos Γ^s representa um anel. Ainda, deste fato podemos usar a propriedade 8 para determinarmos que \mathcal{P}^s é um anel polinomial. Deste modo, iremos denotar os anéis polinomiais com s variáveis sobre \mathbb{C} (ou \mathbb{R}) por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_s]$ (ou $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_s]$). Por exemplo, um anel com 3 variáveis poderá ser representado por $\mathbb{C}[x, y, z]$. Isto indica que as variáveis serão representadas por x , y e z , cujos coeficientes pertencem a \mathbb{C} .

Com isto, o anel possui todos os polinômios do espaço polinomial \mathcal{P}^3 o qual possui todos os polinômios do anel $\mathbb{C}[x, y, z]$.

Logo, podemos representar um espaço polinomial por \mathcal{P}_d^s cujos polinômios possuem s variáveis de grau igual ou menor que d , e como descrito pela eq. (1.10), o produto de dois monômios de grau j_1 e j_2 , será de grau $j_1 + j_2$.

Retomando o produto de polinômios, da Definição 2 determinamos que um polinômio é uma combinação linear finita de monômios. A partir disto, podemos utilizar a propriedade 8 para determinarmos o produto entre dois polinômios como sendo:

$$p_1(\mathbf{x}) \cdot q_2(\mathbf{x}) = \sum_{j_1 \in J} \sum_{j_2 \in J} \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{x}^{j_1 + j_2}. \quad (1.11)$$

O produto, a comutatividade e a associatividade na multiplicação são análogas no caso dos polinômios. Temos também que o elemento neutro será representado por $p(\mathbf{x}) = 1$ e o elemento oposto por $-1 \cdot p(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})$.

Proposição 2 *Dados dois polinômios $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$ ambos pertencendo \mathcal{P}^s temos que $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x}) = 0$ se e somente se $p(\mathbf{x}) = 0$ ou $q(\mathbf{x}) = 0$.*

Prova: \Rightarrow Dizemos que um polinômio é igual a zero se todos os seus coeficientes forem iguais a zero. Digamos que exista dois polinômios $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$ diferentes de zero, tal que $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x}) = 0$. Pela propriedade 8, temos que os coeficientes de $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x})$ serão determinados por uma combinação dois a dois pertencentes aos complexos (ou reais). Com isto, em algum momento teremos a combinação do maior termo de $p(\mathbf{x})$ com o maior termo de $q(\mathbf{x})$ tornando este termo único. Além disso, sabemos que dados dois números complexos (ou reais) o produto entre eles só será igual a zero se um deles for igual a zero. Observe que inicialmente supomos $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$ diferentes de zero, isto é, em cada um deles pelo menos um dos coeficientes é diferente de zero. Assim, pelo menos um termo da combinação dois a dois do produto $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x})$ é diferente de zero tanto que $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x}) = 0 \implies p(\mathbf{x}) = 0$ ou $q(\mathbf{x}) = 0$.

\Leftarrow Seja $p(\mathbf{x}) = 0$ então $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x}) = 0$. Se $p(\mathbf{x}) = 0$ então $p(\mathbf{x})$ é o vetor linha da forma $a^T = (0, 0, \dots, 0)$ e o produto de dois polinômios será a combinação dois a dois dos seus coeficientes. Deste modo, todos os resultados serão iguais a zero e $p(\mathbf{x}) \cdot q(\mathbf{x}) = 0$. Considerando $q(\mathbf{x}) = 0$ a demonstração é análoga. \square

Da Proposição 2 podemos concluir que \mathcal{P}^s é um anel com domínio de integridade.

De modo geral, qualquer polinômio $q(x) \in \mathcal{P}^s$ pode ser escrito como combinação linear de outros dois $q_1(x)$ e $q_2(x)$. Com isto, temos que $q(x) = q_1(x) + q_2(x)$. Veja que anteriormente já definimos que o produto entre dois polinômios é possível e seu resultado ainda está contido em \mathcal{P}^s . Sendo assim, $p(x) + q(x) \in \mathcal{P}^s$. Além disso, todas as propriedades aplicadas a Γ^s também se aplicam a \mathcal{P}^s . Em particular, a propriedade 8 também se aplica. Logo, $p(x) \cdot q(x) = p(x)[q_1(x) + q_2(x)] = p(x) \cdot q_1(x) + p(x) \cdot q_2(x)$. Deste fato, temos que o produto entre polinômios é uma operação linear, o que nos permite definir um operador linear. Logo os resultados se coincidem.

Seguindo [1, 3] iremos neste capítulo, abordar o processo para determinação dos zeros de um polinômio com s variáveis a partir da álgebra linear.

2.1 Ideal 0-Dimensional

A ideia de dimensão zero é bem simples, de modo que, já sabemos da geometria euclidiana que uma reta é unidimensional, enquanto que o plano é bidimensional e finalmente o espaço é tridimensional. Deste modo, definimos um espaço como sendo zero dimensional (ou 0-dimensional) quando cada um de seus elementos caracterizarem um ponto isolado. Todo espaço definido por um ponto ou uma localização composto por pontos isolados é denominado de espaço 0-dimensional [8]. A fim de associar este espaço com o espaço de polinômios iremos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3 *O subconjunto formado por elementos na forma $\sum_{v=1}^n c_v p_v(\mathbf{x}) = 0$ formam um ideal de \mathcal{P}^s e iremos denotá-lo por \mathcal{I}_z .*

Prova: Inicialmente vamos verificar que \mathcal{I}_z é um subanel. Sejam $p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}_z$ então:

- $p_1(\mathbf{x}) - p_2(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}_z$,
- $p_1(\mathbf{x}) \cdot p_2(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}_z$;

Observe que se $p_2(x) \in \mathcal{I}_z$ então $p_2(x) = 0$. Conseqüentemente $p_2 = -p_2 = 0$. Logo, é imediato que $p_1(x) + p_2(x) = p_1(x) - p_2(x) = p_1(x) \in \mathcal{I}_z$. Pelo fato de que $p_2 = 0$, temos: $p_1(x) \cdot p_2(x) = p_1(x) \cdot 0 = 0 \in \mathcal{I}_z$. Com isto, \mathcal{I}_z é um subanel de \mathcal{P}^s e como todos os elementos de \mathcal{I}_z são iguais a zero, ao multiplicar algum $p(x) \in \mathcal{P}^s$ por um $p_n(x) \in \mathcal{I}_z$ o resultado será sempre igual a zero. \square

Em geral, diremos que um dado polinômio pertence a \mathcal{I}_z , se $\forall z_i \in \mathbb{C} (\mathbb{R})$, com $z_i \in Z = \{p(z_i) = 0 | z_i \in \mathbb{C}^s\}$ e $i \in \mathbb{N}$ então $p_2(z_i) = 0$. Veja ainda, que podemos com qualquer dois polinômios $p_1(x), p_2(x) \in \mathcal{P}^s$, expandir o conjunto Z para o conjunto \mathbb{C} bastando para isto fazer uma combinação polinomial pertencer a \mathcal{I}_z . Por exemplo: $p_1(x) \cdot p_2(x) - p_2(x) \cdot p_1(x) = 0, \forall x$, o que satisfaz a Proposição 3. Com isto, a multiplicação de um polinômio de \mathcal{P}^s por ele determina sempre polinômios cujo x será uma raiz do mesmo. Agora veremos a definição de combinação polinomial:

Definição 6 Definimos como sendo combinação linear de polinômios o somatório dado por:

$$p(x) = \sum_{v=1}^n c_v(x) p_v(x) \quad (2.1)$$

onde $p_v(x), c_v(x) \in \mathcal{P}^s$.

Observe que neste caso para $v < 4 \in \mathbb{N}$ temos que:

$$p(x) = c_1(x) p_1(x) + c_2(x) p_2(x) + c_3(x) p_3(x).$$

Exemplo 4 Considere o ideal $\mathcal{I} = [p_1(x, y), p_2(x, y)]$. Tal que,

$$p_1(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2 - 4 \quad p_2(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 4$$

Determine os elementos do \mathcal{I} sabendo que ele possui dimensão 0:

Solução: Para \mathcal{I} ter dimensão 0, precisamos que $c_1 p_1(x, y) + c_2 p_2(x, y) = 0$. Pela Proposição 9, isto apenas ocorrerá se $p_1(x, y) = p_2(x, y) = 0$. De fato, devemos lembrar da Definição 6 que $c_1, c_2 \in \mathcal{P}^s$. Efetuando os cálculos

$$\begin{aligned} p_1(x, y) = 0 &\implies x + 2y = \pm 2, \\ p_2(x, y) = 0 &\implies 2x - y = \pm 2. \end{aligned}$$

Sendo assim, temos que ambos são duas retas paralelas e sua interseção são os elementos do ideal \mathcal{I} . Deste modo, ao igualar as bases temos:

$$(1.2, 0.4), (-0.4, 1.2), (-1.2, -0.4), (0.4, -1.2)$$

Como estamos trabalhando no \mathbb{R}^2 , podemos fazer a representação geométrica de acordo com as Figuras 2.1-2.2.

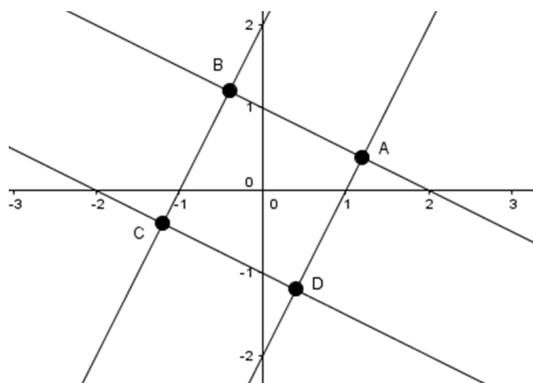


Figura 2.1: Retas que representam $p_1 = p_2 = 0$.

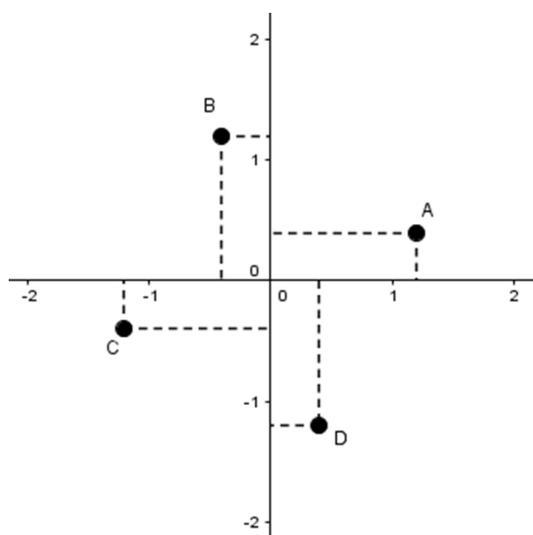


Figura 2.2: Elementos de \mathcal{I} .

A Figura 2.2 nos diz que o ideal \mathcal{I} é de fato determinado por pontos isolados. Vimos assim, a caracterização do ideal 0-dimensional. Na próxima seção iremos definir os geradores deste

espaço, na perspectiva de entendermos como funciona um ideal e as limitações para estas bases serem minimal.

2.2 Bases de ideal polinomial

O estudo de ideais polinomiais está intimamente ligado ao estudo de sua base. De fato, ideais polinomiais são instrumentos básicos da álgebra polinomial numérica. Além do que, seus geradores interferem diretamente nos valores dos zeros. Sendo assim, de acordo com a base que geramos, podemos determinar o conjunto dos zeros de um polinômio de forma prática e imediata.

Deste modo, como os ideais de nosso interesse são os chamados ideais polinomiais de dimensão zero, investigaremos a base do ideal 0-dimensional. Todavia, devemos ressaltar, que um mesmo ideal pode ter diversos geradores. Com isto, nossa abordagem visa analisar as relações entre geradores e o conjunto dos zeros, definidos por $z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$ onde $z \in \mathbb{C}^s$. Isto é, zeros localizados em uma dimensão s .

Definição 7 Dada uma combinação polinomial, tal que $c_1(x) \cdot g_1(x) + \dots + c_k(x) \cdot g_k(x) = 0$ é uma vetor do ideal zero dimensional $\mathcal{I} \in \mathcal{P}^s$, com o conjunto de polinômio $G = \{g_k \in \mathcal{P}^s\}$ sendo seu gerador:

$$[g_1, \dots, g_s] = \mathcal{I}, \quad (2.2)$$

logo, g_1, \dots, g_s formam uma base de \mathcal{I} .

Desta forma, dado um polinômio na forma $p(x) = \sum_{v=0}^T a_v^T x^{j_v} \in \mathcal{P}^s$ de modo que $v \in \mathbb{N}$, e $x^{j_v} \in \Gamma^s$ representa uma base de \mathcal{P}^s , existe um conjunto $Z = \{z_i \in \mathbb{C}^s \text{ tal que, } p(z_i) = 0\}$, onde Z é o conjunto dos zeros do $p(x)$. No entanto, podemos efetuar um deslocamento de $p(x)$ em ξ , criando uma nova base definida por $\mathcal{I}_\Xi = \langle p(x_v + \xi_v) \rangle$. Deste modo, o conjunto zeros de \mathcal{I} será deslocado para coordenada $z_v + \xi_v$, onde ξ é o deslocamento de \mathcal{I} e $z_v \in \mathbb{C}$.

Exemplo 5 Rescreva os polinômios definidos no Exemplo 4, efetuando uma translação de uma unidade de comprimento, criando assim um operador linear $\mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{I}_1$, tal que: $p(x, y) \mapsto p(x + 1, y + 1)$. Depois, verifique que ocorre uma translação do zero.

Solução: Análogo ao Exemplo 4, $p_1(x + 1) = p_2(x + 1) = 0$:

$$\begin{aligned} p_1(x + 1) = 0 &\implies x + 1 + 2(y + 1) = \pm 2, \\ p_2(x + 1) = 0 &\implies 2(x + 1) - (y + 1) = \pm 2; \end{aligned}$$

Efetuada os cálculos, temos que \mathcal{I}_1 possuirá os seguintes elementos

$$(-1.4, 0.2), (-2.2, -1.4), (0.2, -0.6), (-0.6, 2.2). \quad (2.3)$$

Observe que o ideal deslocado apresentou valores distintos do Exemplo 4. Todavia, é possível visualizar na Fig. 2.3 e Fig. 2.4, que ambos geram um quadrado cujo comprimento dos lados é igual à 1.79. De acordo com [8] os pontos no plano representam o mesmo ideal em bases diferentes. Além disso, o exemplo nos mostra que os valores dos zeros se alteram com a mudança de base.

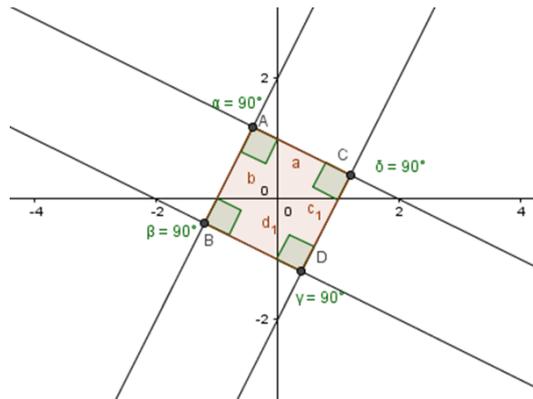


Figura 2.3: Quadrado definido pela interseção dos elementos \mathcal{I} .

Por outro lado, precisamos definir critérios para determinar os elementos da base de um ideal polinomial. Estas bases serão chamadas de minimais, e possibilita, assim como, em outros corpos algébricos, reduzir a quantidade de cálculos efetuados:

Definição 8 Uma base $G = \{g_k; k \in \mathbb{N}\}$ de um ideal polinomial $\mathcal{I} = \langle G \rangle$, é chamada de base minimal se todos os ideais $\mathcal{I}_l = \langle G_l; l < k \in \mathbb{N} \rangle$, forem um subconjunto de \mathcal{I} (vide [3]).

Um exemplo de base minimal encontra-se no Exemplo 4. De fato, observe que tanto $p_1(x, y)$ e $p_2(x, y)$ não serão escritos como produto entre dois polinômios. Todavia, ao multiplicarmos $p_1(x, y)$ por $x^2 - 4$ geramos um outro ideal 0-dimensional com $p(z) = z^2 - 4$, com $z \in Z$, tal que

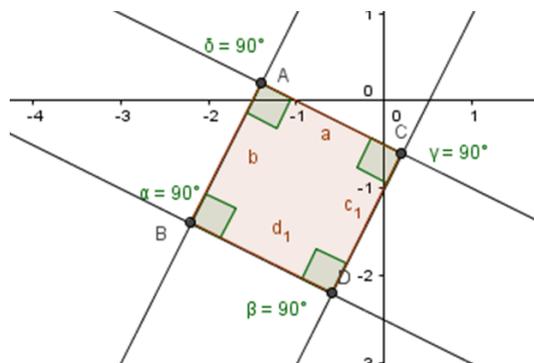


Figura 2.4: Quadrado definido pela interseção dos elementos \mathcal{I} deslocado em 1.

$Z = \{p(z) = 0 | z \in \mathbb{C}\}$. Neste caso, também serão zeros do ideal $\{(-2, 0), (2, 0)\}$. Deste modo, a ideia de minimal esta associada à multiplicidade, o que é muito diferente do que ocorre nos ideais de um inteiro, aos quais chamamos de ideais primos (ver em [4]). Contudo, podemos determinar uma base que determina o mesmo ideal, e que também são bases minimais, como vimos no exemplo acima. Por exemplo $G_y = \{20xy - 15x^2 + 12, 125x^3 - 164x - 48y\} = \langle g_1, g_2 \rangle$. Desta forma o ideal 0-dimensional não apresenta sua dimensão associada ao número de elementos. Aliás, se está relação fosse aplicada, a dimensão deste ideal seria 2. Ainda, da definição de conjunto vazio temos que pelo menos o elemento vazio $\{\emptyset\}$ é base deste mesmo ideal $\mathcal{I} = \langle p_1, p_2, g_1 \rangle$ representada pelos mesmos termos e mesmo zeros.

Nesta perspectiva, as bases minimais de ideais na álgebra polinomial numérica, não se apresentam da mesma forma que na álgebra linear. Isto decorre, porque o conceito fundamental da independência linear não generaliza para combinação polinomial.

Proposição 4 Considere uma base $G = \{g_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ de um ideal $\mathcal{I} \in \mathcal{P}^s$ e $s > 1$. Então,

$$c_1g_1(x) + c_2g_2(x) + \dots + c_kg_k(x) = 0 \quad (\text{o zero - polinomial}) \quad (2.4)$$

não implica em $c_k(x) = 0$ exceto quando $k = 1$

Prova: Basta encontrar um contra-exemplo. Sendo assim, vamos escolher uma base qualquer $g_1 = x^2$ e $g_2 = yx$ e fazendo $c_1 = 1$ e $c_2 = -\frac{x}{y}$, neste caso:

$$c_1g_1 + c_2g_2 = 0$$

no entanto, $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$. \square

A proposição acima representa uma das grandes dificuldades da álgebra polinomial na determinação de um espaço 0-dimensional. Observe que, se definirmos $p_1(x, y)$ e $p_2(x, y)$ do Exemplo 4, como sendo $c_1 = p_2(x, y)$ e $c_2 = p_1(x, y)$, então se anulariam para qualquer valor pertencente a (x, y) . Neste caso, o ideal não seria 0-dimensional. No entanto, podemos fazer uma restrição para os valores de c_n , onde $n < m$ para $m \in \mathbb{N}$. Desta maneira, qualquer combinação polinomial possuirá, ao menos, a forma trivial dada por $g_1g_2 - g_2g_1 = 0$. Quando uma combinação for igual a zero apenas no caso trivial, será denotada por *syzygies* enquanto no caso não trivial por *syzygy*.

Percebemos também, que o mesmo ideal gerado por $\langle p_1(x), p_2(x) \rangle$, será gerado também por

$$\langle p_1(x), p_2(x), g_1(x) \rangle. \quad (2.5)$$

Portanto, ambos os conjuntos são geradores do ideal \mathcal{I} 0-dimensional. Contudo, isto não significa que eq. (2.5) representa uma base de \mathcal{I} . De fato, esta conclusão é imediata sendo que dado um conjunto de $n + 1$ vetores em um espaço de dimensão n , os mesmos são sempre linearmente dependentes [1]. No entanto, como no Exemplo 4 teríamos no máximo a geração de plano, pois, tanto $p_1(x)$ e $p_2(x)$ assim como $g_1(x)$ possuem apenas duas variáveis. À vista disto, para evitar risco de confusão por parte do leitor tanto $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $g_1(x)$ sempre serão geradores de um plano, pois, a coordenada de z não existe ou é igual a zero. De fato, se fossemos considerar estes vetores contidos em um espaço tridimensional cairíamos no risco de desconsiderar outras $n - 3$ variáveis proveniente de um espaço \mathcal{P}^n . Apesar disso, são bases do mesmo ideal $\langle p_1(x), p_2(x) \rangle$, $\langle p_1(x), g_1(x) \rangle$, $\langle p_2(x), g_1(x) \rangle$.

Dessarte, entendemos que uma combinação polinomial *syzygies* equivale a uma combinação linearmente independente. Enquanto que, uma combinação polinomial *syzygy* como sendo uma combinação linearmente dependente.

Definição 9 Dado um conjunto $G_{\mathcal{I}} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, G será base de um ideal 0-dimensional \mathcal{I} se satisfazer as seguintes condições: $G_{\mathcal{I}}$ for uma gerador minimal de \mathcal{I} e uma combinação polinomial *syzygies*.

Agora que já definimos os geradores de um ideal, podemos definir que qualquer polinômio $p(x) \in \mathcal{P}^s$ pode ser escrito como sendo $p(x) = r(x) + q(x).g(x)$. Onde $r(x)$ possui grau menor que $q(x)$ e $q(x) \cdot g(x)$ satisfaz a Proposição 4. Sem perda de generalidade, se $\mathcal{I} = \langle g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x) \rangle$ então podemos escrever:

$$p(x) = r(x) + \sum_n q_n(x)g_n(x), \quad , r, q_n \in \mathcal{P}^s \quad (2.6)$$

Nesta perspectiva, percebemos que podemos inserir livremente termos na base minimal, de modo que, a decomposição pode variar. Por outro lado, pela Definição ?? temos que $p(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}$ e pela Proposição 3 se $r(\mathbf{x}) = 0$ então $p(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}$. Independente das modificações das bases do ideal, teremos um resíduo pertencente a classe do ideal, tal que $r(\mathbf{x}) \equiv p(\mathbf{x}) \pmod{\mathcal{I}}$. Desta forma, posteriormente vamos verificar que os zeros de $r(\mathbf{x})$ devem ser os mesmos zeros de $p(\mathbf{x})$ sempre que associado ao ideal 0-dimensional.

Exemplo 6 Considere o ideal de todos os polinômios em \mathcal{P}^s tal que sua representação seja o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}^s$ com base minimal $G = \{x_\sigma - z_\sigma\}$ para $\sigma \in \mathbb{N}$ mostre que cada polinômio \mathcal{P}^s possui uma representação:

$$p(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}) + \sum_s q_s(\mathbf{x})g_s(\mathbf{x}), \quad \text{com } r, q_s \in \mathcal{P}^s$$

Prova:

Suponha que dois polinômios $p(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})$ são congruente modulo $g(\mathbf{x})$, então:

$$p(\mathbf{x}) \equiv s(\mathbf{x}) \pmod{g(\mathbf{x})}.$$

Conseqüentemente podemos escrever $p(\mathbf{x})$ como sendo:

$$p(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) + k(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}).$$

onde $k(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ pertence ao ideal \mathcal{I} , de fato, isto é verdade pois $p(\mathbf{x})$ e $s(\mathbf{x})$ são congruentes, mas não necessariamente iguais. Em vista disto, qualquer polinômio que pertence ao ideal \mathcal{I} já está representado no caso acima. Por outro lado, sabemos que $p(\mathbf{x}) \in \mathcal{I}$. Caso contrário, poderíamos supor a existência de $r(\mathbf{x}) \notin \mathcal{I}$, e pela Proposição 3 então $p(\mathbf{x}) - r(\mathbf{x}) \notin \mathcal{I} \implies q(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x}) \notin \mathcal{I}$. Logo, podemos afirmar que a equação:

$$p(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}),$$

representa todos os polinômios \mathcal{P}^s .

2.3 Anéis quocientes e ideais polinomiais

Nesta seção abordaremos os anéis quocientes de um ideal polinomial 0-dimensional. Note que podemos trabalhar com os restos da divisão de um termo de modo análogo ao próprio termo. Sem dúvidas, a possibilidade de trabalhar com polinômios de grau menor facilita muito o

cálculo dos zeros, uma vez que, chegamos a conclusão de que $r(x) \equiv p(x) \pmod{\mathcal{I}}$ onde, $p(x)$ é um polinômio de \mathcal{P}^s e $r(x)$ é obtido da decomposição de $p(x) = r(x) + q(x) \cdot g(x)$.

Sejam $q(x) \in \mathcal{P}^s$ e $g(x)$ um elemento do conjunto gerador de um ideal. Temos que, $q(x) \cdot g(x) \in \mathcal{I}$, pela Proposição 3. Sendo assim, $p(x) = r(x) + \mathcal{I}$. Por outro lado, se $r(x) = 0$ então $p(x) \in \mathcal{I}$. Agora formalizaremos a definição deste elemento $r(x)$ da seguinte forma:

Definição 10 Diremos que $[p]_{\mathcal{I}}$ é o resíduo de classe p módulo \mathcal{I} . Posto isto, $[p]_{\mathcal{I}} \in \mathcal{R}[\mathcal{I}]$ se:

$$[p]_{\mathcal{I}} = \{r \in \mathcal{P}^s \mid p - r \in \mathcal{I}\} = [r]_{\mathcal{I}} + \mathcal{I} = [p]_{\mathcal{I}} + \mathcal{I}. \quad (2.7)$$

O conjunto formado por todos os resíduos de classe será representado por $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$. Uma vez que $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ representa um anel quociente consideraremos válidas todas as operações de soma e produto de escalar com o vetor relacionados ao ideal. Neste caso, temos a soma de vetores definido na eq. (1.8) e o produto por escalar definido na eq. (1.9).

Por consequência, temos que $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ poderá representar um espaço vetorial, uma vez que todos os axiomas serão válidos neste espaço. Como resultado, existe um operador de mudança de base que "desloca" o espaço das classes residuais para sua origem. Assim, podemos supor que existe uma base $\{[b_1], [b_2] \dots\} \in \Gamma^s$, com escalares γ_μ , de modo que para qualquer $\gamma_\mu = 0$, este espaço converge para origem.

Na mesma perspectiva apontada acima, temos que o ideal 0-dimensional \mathcal{I} está associado intimamente com conjunto dos zeros tanto que o polinômio $r(x)$ necessariamente deve apenas conter o conjuntos dos zeros de $p(x)$. Consequentemente, qualquer método de interpolação polinomial com o conjunto das raízes de $p(x)$, pode determinar um polinômio dentro de $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$.

Nesta sentido, iremos adotar a base Lagrange, e denotaremos seu uso por $[b_\mu]$, onde $\mu \in \mathbb{N}$ representa a posição da raiz no processo de interpolação. Portanto, dado um conjunto $Z = \{z_1, \dots, z_m\} \subset \mathbb{C}^s$, onde z_μ satisfaz $p(z_\mu) = 0$, podemos concluir que os valores de $r(z_\mu)$ são imediatamente os elementos de $[r]_{\mathcal{I}}$ e terá sua representação dada por:

$$[r]_{\mathcal{I}} = \sum_{\mu=1}^m r(z_\mu) [b_\mu]. \quad (2.8)$$

No entanto, devemos ressaltar, que neste primeiro momento, não estamos considerando casos onde um polinômio possui mais que um zero na mesma coordenada. Realmente, perceba que se temos n zeros em um determinado ponto, tal que $m > n \in \mathbb{N}$, deixaríamos $n - 1$ pontos de fora da interpolação. Isto decorre do fato de que o ideal 0-dimensional está associado localização das coordenadas.

Exemplo 7 Dado o ideal 0-dimensional $\mathcal{I} = [g_1, g_2]$, com $g_1 = x^2 + 6xy + 3y^2 - 9$ e $g_2 = 2x^2 - 3xy + y - 3$. Aplique a interpolação de Lagrange para encontrar as bases de $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$.

Solução:

Efetando todos os cálculos análogos ao Exemplo 4 temos que \mathcal{I} será definido pelos elementos:

$$(-1.5, 1.5), (-1.09, -0.64), (0.92, -1.31), (1.33, 0.56).$$

Abaixo podemos ver os momentos em que g_1 e g_2 se anulam. Assim como o ponto em que ambos se anulam simultaneamente, gerando o ideal 0-dimensional \mathcal{I} .

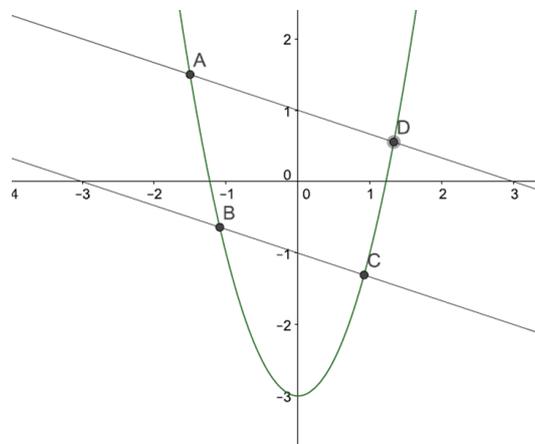


Figura 2.5: Ideal $\mathcal{I}=[g_1, g_2]$

De acordo com o que expressamos acima podemos, aplicar a interpolação de Lagrange

$$b_\lambda(x) = \frac{\prod_{\mu \neq \lambda} (x_1 - (z_\mu)_1)}{\prod_{\mu \neq \lambda} (z_1 - (z_\mu)_1)},$$

para determinar um conjunto gerador. Segue abaixo a interpolação de Lagrange para os pontos acima:

$$[g_1] = \left[\frac{(x + 1.09)(x - 0.92)(x - 1.33)}{(-1.5 + 1.09)(-1.5 - 0.92)(-1.5 - 1.33)} \right] \quad (2.9)$$

$$[g_2] = \left[\frac{(x + 1.5)(x - 0.92)(x - 1.33)}{(-1.09 + 1.5)(-1.09 - 0.92)(-1.09 - 1.33)} \right] \quad (2.10)$$

$$[g_3] = \left[\frac{(x + 1.5)(x + 1.09)(x - 1.33)}{(0.92 + 1.5)(0.92 + 1.09)(0.92 - 1.33)} \right] \quad (2.11)$$

$$[g_4] = \left[\frac{(x + 1.5)(x + 1.09)(x - 0.92)}{(1.33 + 1.5)(1.33 + 1.09)(1.33 - 0.92)} \right]. \quad (2.12)$$

Efetando todos os cálculos, temos:

$$\begin{aligned} [g_1] &= -\frac{100x^3}{283} + \frac{1313x^2}{2830} - \frac{12289x}{28300} - \frac{1333724}{2830000} \\ [g_2] &= -\frac{100x^3}{283} + \frac{75x^2}{283} + \frac{2154x}{28300} - \frac{18354}{28300} \\ [g_3] &= -\frac{100x^3}{41} - \frac{126x^2}{41} + \frac{18097x}{4100} + \frac{217453}{41000} \\ [g_4] &= \frac{100x^3}{41} - \frac{167x^2}{41} - \frac{7478x}{4100} - \frac{15042}{41000} \end{aligned}$$

Desta forma, qualquer elemento em $\mathcal{I} = [g_1, g_2, g_3, g_4]$ pode ser escrito como combinação linear de g_1, g_2, g_3, g_4 e assim b_μ é um elemento da base de \mathcal{I} . Além disso, podemos verificar que cada elemento desta base não se anula em um único ponto do ideal. Desta maneira, este será uma das raízes do polinômio caracterizada no \mathbb{C}^m por:

$$g_\mu(x_\mu) = (0, \dots, z_\mu, \dots, 0). \quad (2.13)$$

Convêm observar que podemos aplicar a formula no ideal \mathcal{I} acima, a fim de encontrarmos uma a base válida para o ideal. No entanto, perceba que embora tenhamos apenas uma variável, será preciso determinar quatro polinômios para definir os geradores de \mathcal{I} . Isto sobrevém, porque mudamos apenas a base, ou seja, a relação entre duas bases de um mesmo ideal deve gerar dois ideais isomorfos. Em vista disto, a dimensão do ideal deve ser preservada e pela Proposição 1, a $\dim \mathcal{P}_3^2 = \dim \mathcal{P}_4^1$.

Como já afirmado acima, as bases de Lagrange formam uma uma base de \mathcal{R} e de acordo com a eq. (2.13) temos que cada g_μ forma uma coluna de \mathcal{R} . Definindo uma matriz de ordem $m \times m$, como encontramos abaixo:

$$b_\mu(z_\mu) = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_m \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

A definição dada acima, caracteriza a matriz de mudança de base.

Além disso, sabemos que o polinômio característico determina os zeros do zero dimensional, o qual é definido por $A_{x_\mu} - I \cdot x_\mu = 0$, onde neste caso a matriz A_x será a matriz de

multiplicação por x . Naturalmente, se A_x é uma matriz diagonal, onde a diagonal representa os zeros do espaço vetorial polinomial, temos que:

$$b_\mu(z_\mu) = \prod_{\mu=1}^m (x_\mu - z_\mu) = 0. \quad (2.15)$$

Temos também que a eq. (2.15) está bem definida dentro de $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$, de modo que o produto entre duas classes residuais é bem definido. Então,

$$[p]_{\mathcal{I}} \cdot [q]_{\mathcal{I}} = [p \cdot q]_{\mathcal{I}}. \quad (2.16)$$

No entanto, estamos definindo classes residuais univáriaveis. Isto é, a base de Lagrange citada acima, definiu bases pertencentes a \mathcal{P}^1 , tanto que torna-se necessário uma nova matriz de transformação do tipo $\mathcal{P}^1 \rightarrow \mathcal{P}^s$.

Visto isto, podemos a partir das eqs. (2.14) e (2.15) definir uma base B determinada por classes residuais dada por $B = \{[1], [x], [y], [xy]\}$, sendo B uma específica base de Lagrange ortogonal, a qual possibilita um sistema linear do tipo $\sum_{\mu} \alpha_{\mu} b_{\mu} = w_{\mu}$. Desta forma, a matriz associada a base B definida pelo exemplo 4 será:

$$(b_m u(z_\mu)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.2 & -0.4 & -1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 & -0.4 & -1.2 \\ 0.48 & -0.48 & 0.48 & -0.48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [x] \\ [y] \\ [xy] \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

A eq. (2.15) classifica $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ não somente como um espaço vetorial, mais também como um anel quociente de classe residuais o que motiva a definição a seguir:

Definição 11 Dado um ideal polinomial $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^s$, o anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ definido pela operações (1.8), (1.9) e (2.16), é chamado de anel polinomial quociente de classe residual modulo \mathcal{I} , sendo denotado por $\mathcal{P}^s / \mathcal{I}$.

A definição acima garante, que podemos escrever um polinômio qualquer de acordo com a eq. (2.6), quando temos pelo menos uma base de \mathcal{I} . Precisamos agora verificar como podemos determinar um operador que permita que está matriz seja justamente uma matriz diagonal. Sendo assim, iremos abaixo verificar a existência de uma matriz que possa substituir uma variável x_i .

Desta forma, $A_{[b_\mu]}$ irá denotar a matriz de mudança de base, representada por:

$$[b_\mu]_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{I}} \\ \vdots \\ [b_m]_{\mathcal{I}} \end{pmatrix} = (A_{[b_\mu]}) \cdot \begin{pmatrix} [b_1]_{\mathcal{I}} \\ \vdots \\ [b_m]_{\mathcal{I}} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Exemplo 8 Dada uma base $B_{\mathcal{I}} = \{[1], [x], [y], [xy]\}$ encontre $A_{[x]}$. Dado \mathcal{I} definido por $I = [15x^2 - 20xy - 12, 15y^2 + 20xy - 12]$.

Solução:

Temos que $g_1 = 15x^2 - 20xy - 12$ e $g_2 = 15y^2 + 20xy - 12$ de modo que precisamos igualar todas as coordenadas a zero. Portanto $15x^2 - 20xy - 12 = 15y^2 + 20xy - 12 = 0$. No entanto, $[b_\mu]_{\mathcal{I}}$ será o termo $[x]$, e a partir da eq. (2.18) temos que:

$$[x] \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [x] \\ [y] \\ [xy] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x] \\ [x^2] \\ [xy] \\ [x^2y] \end{pmatrix}$$

Observe que alguns termos do produto $b_{[x]} \cdot B$ não aparecem na base. É importante entendermos, que o fato de um dado termo não aparecer em $B_{\mathcal{I}}$ significa que este termo se encontra fora do subespaço. Tal condição, não nos permite trabalhar com ele, todavia, a eq. (2.15) garante que este termo pertence ao anel quociente. Com isto, podemos escrever $[g_1, g_2]$ para se adequar ao anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$. Assim:

$$x^2 = \frac{4xy}{3} + \frac{4}{5}, \quad xy = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{5}, \quad y^2 = -\frac{4xy}{3} + \frac{4}{5}$$

Além disso, precisamos encontrar x^2y em função de $B_{\mathcal{I}}$. Sendo assim:

$$x^2y = \frac{48x}{125} + \frac{36y}{125}.$$

Fazendo as devidas substituições temos:

$$[x] \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [x] \\ [y] \\ [xy] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x] \\ [x^2] \\ [xy] \\ [x^2y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot [x] \\ \frac{4}{3} [xy] + \frac{4}{5} [1] \\ 1 \cdot [xy] \\ \frac{48}{125} [x] + \frac{36}{125} [y] \end{pmatrix} \cdot [x].$$

Aplicando (2.18) e colocando a base em evidencia temos que:

$$[x] \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [x] \\ [y] \\ [xy] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [x] \\ [x^2] \\ [xy] \\ [x^2y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot [x] \\ \frac{4}{3} [xy] + \frac{4}{5} [1] \\ 1 \cdot [xy] \\ \frac{48}{125} [x] + \frac{36}{125} [y] \end{pmatrix} \cdot [x] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{48}{125} & \frac{36}{125} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [1] \\ [x] \\ [y] \\ [xy] \end{pmatrix},$$

caracterizando a matriz $A_{[x]}$ por:

$$A_{[x]} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{48}{125} & \frac{36}{125} & 0 \end{pmatrix}.$$

De modo análogo, podemos construir as matrizes $A_{[y]}$, $A_{[xy]}$ e $A_{[1]}$ da seguinte forma:

$$A_{[1]} = I, \quad A_{[y]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{36}{125} & -\frac{48}{125} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{[xy]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{48}{125} & \frac{36}{125} & 0 \\ 0 & -\frac{36}{125} & \frac{48}{125} & 0 \\ \frac{144}{625} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz definida acima representa um operador linear em relação a variável, de modo que teoricamente podemos determinar o conjunto dos zeros a partir das mesmas. Mais adiante veremos que $p(A) = 0$, o que garante o conjunto dos zeros. Naturalmente as matrizes não são independentes, o que é positivo, afinal se precisarmos determinar uma base de variável do (x, x^2, \dots, x^m) , basta calcular a matriz de multiplicação de x depois elevarmos a potência necessária. Por exemplo, se queremos encontrar $A_{[x^2]}$, basta calcular $A_{[x]} \cdot A_{[x]}$. Além disso, também será válido:

$$A_{[x]} \cdot A_{[y]} = A_{[xy]}.$$

Como cada uma das matrizes representam a multiplicação por uma variável da base de Lagrange, temos que cada coluna é única e invariável. Adiante veremos que isto ocorre pois, os autovetores associados aos autovalores são únicos.

Para introduzir um polinômio, cujo número de variáveis é inferior ao do anel quociente, usaremos a seguinte expressão:

$$\mathbf{x}_\sigma \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = A_\sigma \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \sigma \in \mathbb{N} \quad (2.19)$$

A expressão acima gera uma família de matrizes associadas a \mathcal{R}/\mathcal{I} . Além disso, o produto entre as matrizes da base $b_{[b_\mu]}$ assim como ocorre entre monômios, irá gerar um espaço vetorial $\Gamma^s \subset \mathcal{R}/\mathcal{I}$. Desta forma, temos a definição abaixo:

Definição 12 Definimos a classe residual dos monômios como sendo:

$$A^J = A_1^{j_1} A_2^{j_2} \dots A_s^{j_s}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Observe que a definição acima equivale a Definição 1.1. Assim, da eq. (2.19) e da Definição 12 podemos substituir todas as variáveis por classes residuais de monômios de acordo com a seguinte proposição:

Proposição 5 *Para um ideal polinomial $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^s$, considere o anel quociente $\mathcal{R}/[\mathcal{I}]$, com base b e matriz de transformação A_σ . Então, para qualquer $p \in \mathcal{P}^s$,*

$$p(x) \in \mathcal{I} \quad \text{desde que} \quad p(A) = 0. \quad (2.21)$$

Prova: $p(x) \in \mathcal{I}$ implica que $p(x)b_\mu \in \mathcal{I} \forall \mu$. Portanto, pela eq. (2.14), se um polinômio $p(x) \in \mathcal{I}$, então ele pode ser escrito na base de Lagrange de acordo com a eq. (2.8). De modo que, $p(A) = \prod_{\mu=1}^m (A - z_\mu) \implies p(A) = 0$. \square

Nesta perspectiva, temos que qualquer que seja o ideal polinomial \mathcal{I} , existe um anel quociente \mathcal{R}/\mathcal{I} associado a uma base. No intuito de aplicação da álgebra computacional, podemos encontrar um ideal polinomial tal que $p(x) \in \mathcal{I}$ e $p(A) = 0$, então seus zeros são os autovalores $A_{[b_\mu]}$.

Obviamente, existe um conjunto \bar{A} tal que, $\bar{A} = \{p(A), p \in \mathcal{R}[\mathcal{I}]\}$. De fato, isto ocorre pois existe um conjunto de elementos \bar{P} , tal que, $\bar{p} \equiv p \pmod{I}$, sendo \bar{p} um representante da classe residual de $p(x)$. Desta forma, temos que $\bar{p}(A) = p(A)$. Além disso, como $\mathcal{R}[\mathcal{I}] = \text{span} \{b_{[\mu]}\}$, temos $\bar{A} = \{A_{b_\mu}, \mu \in \mathbb{N}\}$. Abaixo definiremos formalmente o conjunto das matrizes comutativas.

Definição 13 *Uma família de matrizes comutativas $m \times m$ é definida como sendo o conjunto das matrizes de multiplicação de $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$.*

De modo geral, podemos definir que a existência da matriz de transformação ortogonal, depende diretamente da quantidade de pontos do zero dimensional. Aliás, isto é imediato, devido a $A_{[b_\mu]}$ está associado a $[b_\mu]_{\mathcal{I}}$ pela eq. (2.18). Em todo caso, podemos definir os elementos $\bar{B}_{b_\mu} = \{B_0, B_1, \dots\}$.

Para uma matriz de multiplicação B_0 e uma base b_0 , podemos afirmar que B_{b_0} gera um ideal 0-dimensional. Em particular, B_0 possuirá um conjunto de autovetores associado um conjunto de autovalores de maneira única. Desta ocorrência diremos que B_0 tem multiplicidade 1, isto é, o conjunto de autovetores terão no máximo uma variável livre. Neste sentido, a matriz M_0

cujas colunas são representadas pelos autovetores associados a matriz B_0 é denotada por:

$$M_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_m & \\ & & & \end{array} \right). \quad (2.22)$$

Seja J_0 uma matriz da forma

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_{01} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{02} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{0m} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Pela definição de ideal \mathcal{I} como um operador definido através da multiplicação de $p_v(x)$ por uma variável da base de Lagrange, podemos determinar seus zeros aplicando:

$$B_0 M_0 = M_0 J_0. \quad (2.24)$$

Assim, precisamos apenas encontrar uma matriz J_0 que satisfaça a eq. (2.24), ou melhor, desejamos escrever a matriz B_0 como:

$$B_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_m & \\ & & & \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{01} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{02} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{0m} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_m & \\ & & & \end{array} \right)^{-1}.$$

Desta forma, como J_0 é uma matriz triangular superior, podemos afirmar que para determinar os zeros de um polinômio basta definirmos uma matriz B_0 e M_0 que satisfaça $B_0 = M_0 \cdot J_0 \cdot M_0^{-1}$. Afinal, quando um espaço vetorial tem o mesmo número de dimensão que o número de autovalores, diremos que este espaço vetorial tem multiplicidade 1, isto é, para cada variável teremos apenas uma relação. Quando isto ocorre, diremos que a matriz de multiplicação é uma matriz não degenerada. Deste modo, diremos que o conjunto dos autovetores é invariável e cada M_0 é único.

Nos caso de $p(x)$ possuir zeros com multiplicidade maior que um, teremos n raízes distintas. Quando isto ocorrer cada um dos zeros determinará um bloco de Jordan. Com isto o número de raízes será dado por $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ e a matriz J é definida por:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_n \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Em fim, de acordo com o que foi visto até agora nesta seção, encerramos com duas proposições fundamentais para o Teorema Central da solução de um sistema de polinômios. Sendo que a primeira define construir um operador, enquanto que o segunda garante a unicidade deste operador.

Proposição 6 *Considere $B_0 \in \overline{B}$ e um autovalor λ_0 de B_0 com multiplicidade geométrica 1. Logo existe apenas um autovetor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ associado a λ_0 . Neste caso, \mathbf{x} é o conjunto de todos os autovetores de $B \in \overline{B}$, associados ao autovalor $\lambda_0(B)$. Além disso, B_0 tem um subespaço invariante $X = \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m_0} \rangle$, $m_0 > 1$, associado com o autovalor $\lambda_0(B)$.*

Prova:

Suponhamos que a forma normal de Jordan de B_0 contenha apenas um bloco de Jordan,

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_0 \times m_0},$$

Pela eq. (2.24), temos:

$$B_0 X = X J_0, \text{ com } X = M_0 = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \dots & \mathbf{x}_m \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Claramente, \mathbf{x}_1 é um autovetor de B_0 apenas para o autovalor λ_0 . Para uma matriz arbitraria $B \in \overline{B}$, temos que $B_0(BX) = BB_0X = (BX)J_0$ ou

$$B_0 Y = Y J_0 \quad \text{Para } Y = BX = (\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_{m_0})$$

Para $B_0 \mathbf{y}_1 = \lambda_0 \mathbf{y}_1$, deduzimos que \mathbf{y}_1 deve ser um múltiplo de $\lambda \mathbf{x}_1$ de um único autovetor \mathbf{x}_1 ; assim $B \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 = \lambda \mathbf{x}_1$ o que prova nossa suposição. Além disso, a equação $(B_0 - \lambda_0 I) \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 = \lambda \mathbf{x}_1$ comparando com a segunda coluna implica $\mathbf{y}_2 \in \text{span}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, o que não é verdade pois $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ teria que ser o núcleo de $B_0 - \lambda_0 I$, o qual consiste apenas de múltiplos de \mathbf{x}_1 . Assim o argumento pode ser continuado para todos os \mathbf{y}_μ e provamos a segunda parte.

$$BX = XT, \tag{2.26}$$

com T uma matriz triângular superior com diagonal λ .

Proposição 7 Dada as matrizes comutativa de multiplicidade geométrica 1, cada conjunto de autovetor $\mathbf{x}_{\mu 1}$ é associado a um único conjunto de subespaço invariável gerado por $X = \langle \mathbf{x}_{\mu 1}, \mathbf{x}_{\mu 2}, \dots, \mathbf{x}_{\mu m_{\mu}} \rangle$, com $m \in \mathbb{N}$, tal que para cada $B \in \bar{B}$ com $B\mathbf{x}_{\mu 1} = \lambda_{\mu}(B)\mathbf{x}_{\mu 1}$. De acordo com a eq. (2.26) temos que $X = (\mathbf{x}_{\mu 1}, \mathbf{x}_{\mu 2}, \dots, \mathbf{x}_{\mu m_{\mu}})$ e $\lambda = \lambda_{\mu}(B)$.

Prova:

Sem perda de generalidade, considere B_0 pertencente a \bar{B} com um autovalor λ_0 de multiplicidade geométrica 2 e com multiplicidade algébrica maior que 2. Neste caso teremos dois blocos de Jordan, J_1 e J_2 de dimensão $m_1, m_2 \geq 1$, associados ao mesmo autovalor λ_0 , e neste caso:

$$B_0 X_1 = X_1 J_1, \quad B_0 X_2 = X_2 J_2,$$

Com um autovetor \mathbf{x}_1 em X_1 e outro autovetor \mathbf{x}_2 em X_2 . Assim podemos assumir que existe uma matriz $B_1 \in \bar{B}$ tal que, $B_1 \mathbf{x}_1 = \lambda_0(B_1) \mathbf{x}_1$, no entanto, $B_1 \mathbf{x}_2 \neq \lambda_0(B_1) \mathbf{x}_2$. Com isto temos duas possibilidades:

1. \mathbf{x}_2 é um conjunto de autovetores de \bar{B} , no entanto, o autovalor associado a \mathbf{x}_2 é diferente do de \mathbf{x}_1 para quase todos os $B \in \bar{B}$. Então os subespaços invariantes gerados por X_1 e X_2 pertencem a diferentes blocos de Jordan e assim teremos diferentes conjuntos de autovetores para todo $B \in \bar{B}$.
2. \mathbf{x}_2 não é autovetor de B_1 . neste caso, nós combinamos as colunas de X_1 e X_2 construindo uma matriz X , tal que \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 apareçam na primeira e segunda colunas. Então o argumento da prova da Proposição 6, com obvias variações, estabelecemos a validade da eq. (2.26), e os geradores de X é um subespaço invariante associado somente ao conjunto de autovetores \mathbf{x}_1 nos geradores de X . \square

Exemplo 9 Considere que a matriz de multiplicação de um anel \mathcal{R} definida por:

$$A_x = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplique a eq.(2.24) em A_x .

Solução:

Pela eq. (2.24) temos que

$$A_x \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Desta forma, os zeros na variável x deste anel serão $Z = \{1, 2, 4\}$ com autovetores $(-1, 1, 0, 0)^T$, $(1, -1, 0, 1)^T$, $(1, 0, -1, 1)^T$. Estes vetores são invariáveis mesmo que alteremos a matriz A_x .

Exemplo 10 Considere o anel polinomial \mathcal{R} com base de Lagrange $b = (1, x, y, x^2)$ e matrizes de multiplicação,

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & -12 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad e \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando a eq. (2.24) estabelecemos que:

$$A_x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovalores associados serão 2 e 1 e os autovetores $(1, 2, 1, 4)$ e $(1, 1, 2, 1)$ que apresentam multiplicidade geométrica 1, obtendo apenas um conjunto de autovetores

$$\{(1, 2, 1, 4), (0, 1, 0, 4), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Analogamente aos cálculos efetuados em A_y temos:

$$A_y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Concluimos esta seção confirmando que todo anel \mathcal{R} pode ser representado por um conjunto de m matrizes de multiplicação, desde que estas matrizes sejam diagonalizáveis e de multiplicidade geométrica 1.

CAPÍTULO 3

O TEOREMA CENTRAL DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA POLINOMIAL

Dedicamos o capítulo anterior ao estudo das bases de um anel polinomial \mathcal{R} e espaço dual \mathcal{D} . Deste modo, podemos perceber a importante relação que um espaço vetorial tem com suas bases e consequentemente com seus geradores.

Neste capítulo nos dedicaremos a apresentação do teorema central da solução de um sistema polinomial. Este teorema tem contribuído na análise numérica, onde muitas vezes precisamos da solução aproximada de uma raiz visto que, em alguns casos, não é possível obter uma solução analítica [3].

3.1 Transformação de base no \mathcal{R} e \mathcal{D}

Nesta seção iremos abordar a transformação de uma base \mathcal{R} para \mathcal{D} , lembrando que $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ é um anel de equivalência módulo I , tal que $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^s$. Logo, \mathcal{D} também será um anel de equivalência.

Seja $\dim \mathcal{R}[\mathcal{I}] = m$ com $\mathcal{R}[\mathcal{I}] \subset \mathcal{P}^s$. Sabemos que a interpolação de Lagrange fornece infinitas bases para o anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$. Neste caso, iremos considerar as bases \mathbf{b}_0 e \mathbf{b}_1 definidas por

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} b_{01} \\ \vdots \\ b_{0m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

como bases deste anel e suas respectivas bases conjugadas sobre o espaço $\mathcal{D}[\mathcal{I}] \subset (\mathcal{P}^s)^*$, dadas

por:

$$\mathbf{c}_0^T = (c_{01}, \dots, c_{0m}) \quad \mathbf{c}^T = (c_0, \dots, c_m).$$

Mesmo sendo duas bases distintas podemos representar um polinômio qualquer $p(x)$ por:

$$p(x) = \mathbf{c}_0^T(p(x)) \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{c}^T(p(x)) \cdot \mathbf{b}. \quad (3.1)$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\mathbf{b} = M_0 \mathbf{b}_0. \quad (3.2)$$

Neste caso, observe que existe um operador linear que permite uma mudança de base de \mathbf{b}_0 para \mathbf{b} . Denotaremos por $M_0 \in \mathbb{C}^m$, a matriz de mudança de base de dimensão m , definida por $\mathbf{c}_0^T(\mathbf{b})$, a qual satisfaz a equação abaixo:

$$\mathbf{c}_0^T = \mathbf{c}^T M_0. \quad (3.3)$$

No mesmo sentido, podemos admitir a existência de um operador linear $\mathcal{A} : \mathcal{R}[\mathcal{I}] \rightarrow \mathcal{R}[\mathcal{I}]$ de bases \mathbf{b}_0 e \mathbf{b} :

$$\mathbf{b}_0 \xrightarrow{\mathcal{A}} A^{(0)} \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{b} \xrightarrow{\mathcal{A}} A \mathbf{b}.$$

Naturalmente, podemos considerar a aplicação da transformação \mathcal{A} , de modo que, $p \rightarrow q$, $q = \mathcal{A}p$, com q em uma base \mathbf{b} de Lagrange ou $q_0 = \mathcal{A}^{(0)}p$. Como $p(x)$ satisfaz as eqs. (3.1) e (3.3) então:

$$q = \begin{cases} \mathbf{c}_0^T(p(x)) A^{(0)} \mathbf{b}_0 = \mathbf{c}^T(p(x)) M_0 A^{(0)} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{c}^T(p(x)) A \mathbf{b} = \mathbf{c}^T(p(x)) A M_0 \mathbf{b}_0 \end{cases}$$

Da equação acima obtemos:

$$A M_0 = M_0 A^{(0)}. \quad (3.4)$$

Exemplo 11 Considere mais uma vez o anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ do Exemplo 10, com uma base $\mathbf{b} = (1, x, y, x^2)^T$ e uma base \mathbf{b}_0 dada por:

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} -7 + 12x - 6x^2 + x^3 \\ 6 - 11x + 6x^2 - x^3 \\ -4 + 8x - 5x^2 + x^3 \\ 8 - 12x + 6x^2 - x^3 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

a qual representa o conjunto de geradores do anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$.

Do próprio Exemplo 10 sabemos que $x^3 \equiv 9 - 12x - y + 6x^2 \pmod{\mathcal{I}}$, bastando compararmos com a ultima linha de A_x . Desta forma, substituindo esta relação de congruência na eq. (3.5) obtemos:

$$\begin{aligned} -7 + 12x - 6x^2 + (9 - 12x - y + 6x^2) &= 2 + 0x - y + 0x^2, \\ 6 - 11x + 6x^2 - (9 - 12x - y + 6x^2) &= -3 + x + y + 0x^2, \\ -4 + 8x - 5x^2 + (9 - 12x - y + 6x^2) &= 5 - 4x - y + x^2, \\ 8 - 12x + 6x^2 - (9 - 12x - y + 6x^2) &= -1 + 0x + y + 0x^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Com a representação eq. (3.6), \mathbf{b}_0 é dado por:

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Pela eq. (3.2) sabemos que:

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim com posse de M_0^{-1} , podemos encontrar M_0 e por fim achar a forma de Jordan:

$$A_x^{(0)} = M_0^{-1} \cdot A_x \cdot M_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, $A_x^{(0)}$ representa uma matriz do tipo bloco de Jordan, cuja diagonal representa o valor das raízes, da variavel x , dos polinômios contidos em $\mathcal{R}[\mathcal{I}] \subset \mathcal{P}^s$. Além disso, podemos concluir que \mathbf{b}_0 é uma base de Lagrange aplicada a variavel x .

Se um ideal \mathcal{P}^s tiver todos os zeros distintos. Criamos uma associação direta entre a base \mathbf{b}_0 e as matrizes de transformação. Desta forma, para um arbitrário polinômio $p \in \mathcal{P}^s$ temos:

$$\mathbf{c}_0^T(p) = (p(z_1), \dots, p(z_m)) = p(\mathbf{z}).$$

Desta forma, pela eq.(3.3):

$$M_0 = \mathbf{c}_0^T(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{b}(z_1) & \dots & \mathbf{b}(z_m) \\ | & & | \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

onde cada coluna da matriz M_0 representa os autovetores associados aos autovalores do anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}] \subset \mathcal{P}^s$.

Visto a importância do estudo da base de um subespaço, esta seção visa analisarmos a possibilidade que temos de transformar as bases possibilitando, procurarmos a que melhor se aplica em cada caso. De modo geral, encerramos esta seção com uma relação muito conhecida na álgebra linear:

$$\mathbf{b}_0 = M_0^{-1}\mathbf{b} = (c_0^T(\mathbf{b}))^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.8)$$

3.2 Aplicação quando todas as raízes são distintas

Nesta seção iremos abordar uma versão preliminar do Teorema Central da solução de um sistema de equações, admitindo que a multiplicidade da raiz do polinômio será sempre igual a um.

Teorema 1 (Teorema Preliminar) *Seja $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^s$ um ideal 0-dimensional, com m zeros distintos e com multiplicidade um. Considere uma família de matrizes comutativas $\bar{A} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$ definidas sobre uma base ortogonal de Lagrange fixa b de um anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$. Então, o conjunto dos autovetores de $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ são as m colunas $\mathbf{b}(z_m)$ de uma matriz M_0 definida pela eq. (3.7).*

Prova:

Seja $q \in \mathcal{P}^s$ tal que $q(z_m) \in \mathbb{C}$. Ainda, seja \mathbf{b}_0 uma base de Lagrange para o anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$, a qual satisfaz:

$$\mathbf{b}_{0m}(z_m) = \begin{cases} 0 & i \neq m \\ 1 & i = m \end{cases}.$$

Portanto, na base b_0 , a multiplicação por um polinômio deve ser representada por uma matriz diagonal:

$$A_q^{(0)} = \begin{pmatrix} q(z_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q(z_m) \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a matriz A_q é uma matriz de multiplicidade que satisfaz eq. (3.1), (3.4) e (3.7). Nesta perspectiva, existe uma matriz de multiplicação M_0 , cujas colunas são autovetores associados a origem do 0-dimensional. Assim, podemos afirmar que existe, ao menos, uma base \mathbf{b}_0 que coincide com a origem. Neste caso, ocorre algo similar ao que ocorre quando determinamos um vetor qualquer no hiperespaço, isto é, os valores dos monômios são como coordenadas do vetor determinando exatamente os zeros do polinômio $p(x)$.

O teorema preliminar, no entanto, não cobre todos os casos, visto que ele precisa dos autovetores. E como vimos anteriormente, em uma matriz com multiplicidade geométrica 1, temos exatamente o número de autovetores associados ao número distinto de raízes. Contudo, a aplicação do teorema preliminar, tem duas possibilidades.

- Caso 1:

Assumimos que o polinômio $q(x)$ é gerado pela base b de $\mathcal{R}[\mathcal{I}] \subset \mathcal{P}^s$. Neste caso, precisamos apenas encontrar uma base que satisfaça a eq. (3.1). Teremos assim, autovetores A_q que serão as colunas, e a partir do bloco de Jordan, determinamos os autovalores, reduzindo a tarefa apenas a determinar a base e sua mudança de base.

- Caso 2:

Podemos assumir, no entanto, que o polinômio $q(x)$ não é gerado pela base b . Desta forma, existem monômios em $q(x)$ que não fazem parte do anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$. Com isto, podemos supor a existência de uma matriz $A_{\sigma'}$. Tal que, $A_{\sigma'}b(z_m) = \lambda_{\sigma'}b(z_m)$. De fato, esta é a definição de autovalor e autovetor, os quais neste casos estamos determinando. Contudo, a matriz $A_{\sigma'}$ é uma nova matriz de multiplicação, definida a partir da relação abaixo. Além disso, a matriz $A_{\sigma'}$ possui multiplicidade geométrica 1, pois, os subespaços de \mathcal{P}^s apresentam um único conjunto de autovetores e a relação abaixo também é única:

$$x_{\sigma}\mathbf{b}(x) = A_{\sigma}\mathbf{b}(x) + \mathbf{p}(x) \quad \text{com} \quad \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(p_m(x)), p_m(x) \in \mathcal{I}. \quad (3.9)$$

Logo, $A_{\sigma}\mathbf{b}(x) \in \mathcal{I}$, afinal se trata de uma transformação para base de Lagrange e $\mathbf{p}(x) \in \mathcal{I}$, visto que é gerado por uma combinação linear contida no ideal \mathcal{I} . Concluimos com isto que a tarefa de calcular os zeros se resume, mais uma vez, em determinar uma base apropriada.

Exemplo 12 *Vamos trabalhar mais uma vez com o anel $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ do Exemplo 7. Temos que as matrizes de multiplicidade por x e y para uma base de Lagrange definida por $\mathbf{b}^T = (1, x, y, xy)$ são:*

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{48}{125} & \frac{36}{125} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{36}{125} & -\frac{48}{125} & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule os zeros de $p(x, y) = xy$ e $p(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução:

Neste caso, basta substituir $p(x, y) = p(A)$, então teremos $p(A) = A_x \cdot A_y$ efetuando os cálculos dos autovalores, determinamos que $p(A) = \pm 0.48$. Logo temos dois zeros de multiplicidade 2. Para o segundo polinômio iremos usar a mesma idéia. Sendo assim, ficamos com $p(A) = A_x^2 + A_y^2$. Calculando os autovalores temos que $p(A) = 1.6$ e assim obtemos quatro zeros todos em 1.6.

Este exemplo no diz de acordo com o Teorema 1 que o ideal \mathcal{I} precisa ter todos os polinômios com raízes distintas. Porém surge um problema que ao determinar os zeros de um polinômio, esta multiplicidade pode variar. Os resultados descritos na próxima seção visam contornar este problema.

3.3 Polinômio com raízes de multiplicidade maior que 1

Nesta seção iremos analisar o caso onde a combinação polinomial que gera um ideal \mathcal{I} possui raízes com multiplicidade maior que 1. Esta análise irá determinar o caso geral, o qual possibilita a determinação da raiz de qualquer polinômio a partir da comutação das bases. Como a quantidade de autovalores é a mesma que o numero de raízes. Ocorre que o número de autovetores é inferior a dimensão de \mathcal{P}^s não gerando uma base no espaço zero dimensional. Desta forma, não podemos determinar a matriz de multiplicação A_q associada a uma base $b_\mu \in \mathcal{R}[\mathcal{I}]$.

Proposição 8 *Para um ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^s$, 0-dimensional, considere uma família de matrizes de multiplicação \bar{A} , tal que $A_q = q(A) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ definida sobre uma base $b_\mu \in \mathcal{R}[\mathcal{I}]$. Cada conjunto de autovetores x_μ de \bar{A} tem a forma $\mathbf{b}(z_\mu)$ para algum $z_\mu \in \mathcal{Z}[\mathcal{I}]$.*

Prova: vide [3] pg. 51.

De acordo com o teorema acima, temos que o conjunto formado pelas matrizes de multiplicação tem multiplicidade geométrica 1, isto é as matrizes \bar{A} apresentam apenas uma variável livre. Com isto temos que para cada ideal 0-dimensional \mathcal{I} , associado a uma base qualquer b_μ , existe uma única matriz $A_q = q(A)$. De fato, como $\lambda_\mu(q) = c_{01}(q) = q(z_\mu)$ e pela Proposição 8, não teremos dois conjuntos de autovetores pertencentes a \bar{A} e associados ao mesmo autovalor λ_μ .

Usando os resultados seção, a Proposição 8 e a eq. (2.26) obtemos o Teorema Central da solução de um sistema polinomial.

Teorema 2 (Teorema Central) *Seja $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}^s$, um ideal 0-dimensional, n zeros z_μ distintos, tal que μ varia entre 1 e n , $n < m$. Considere uma família de matrizes multiplicativas $\bar{A} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$ de $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$*

com um base de Lagrange b_μ . Então o conjunto dos autovetores de \bar{A} , com propriedade normalizadora, é idêntico ao conjunto dos vetores $b(z_\mu)$, com μ variando entre 1 e n . Além disso, para cada $z_\mu \in \mathcal{Z}[\mathcal{I}]$, existe um subespaço invariante associado gerado por X_μ de \bar{A} cuja dimensão $m_\mu \geq 1$, $\sum_\mu m_\mu = m$, tal que, para cada $A_q \in \bar{A}$,

$$A_q(X_1|X_2|\dots|X_n) = (X_1|X_2|\dots|X_n) \begin{pmatrix} T_{q1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & T_{qn} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

em que $T_{q\mu}$ de ordem $m_\mu \times m_\mu$ são matrizes triangulares superior cujos os elementos da diagonal são formados por $q(z_\mu)$.

Note que, as matriz $T_{q\mu}$ embora seja parecida com a forma canônica de Jordan, se trata de uma matriz triangular superior, o que nos diz, que os elementos acima da diagonal não precisam ser necessariamente iguais a 1. Além disso, usamos uma barra para separarmos os X_μ para evitar confusão com a notação de vetores.

Aplicação do Teorema Central [3] se dá por duas etapas: A primeira é encontrar bases de Lagrange pertencente a $\mathcal{R}[\mathcal{I}]$ que contenha pelo menos um elemento 1 e contenha todos x_σ de \mathcal{I} . A segunda etapa é calcular o conjunto de autovetores de A_q e extrair seus zeros, neste caso os autovalores.

Visto isto, ainda podemos efetuar uma comparação entre as eqs. (3.4) e (3.10) para determinar funcionais de $\mathcal{D}[\mathcal{I}]$, os quais não aparecem no Teorema Central, isto é,

$$c_0^T(b) = (X_1|X_2|\dots|X_n) \quad \text{e} \quad A_q^{(0)} = T_q.$$

Da eq. (2.19) temos $q = x_\sigma$, $x_\sigma b_0 = T_{x_\sigma} b_0$, para σ variando entre 1 e s , onde s representa o número de variáveis de $q(x)$, e:

$$c_0^T(x_\sigma b_0) = A_{x_\sigma}^{(0)} c_0^T(b_0) = T_{x_\sigma}. \quad (3.11)$$

Encerramos o último capítulo apresentando alguns exemplos envolvendo o cálculo do 0-dimensional e o Teorema Central da solução de um sistema polinomial. Os exemplos neste capítulo foram resolvidos através do software MAPLE 18.

Aplicação 1 *Encontre as raízes do sistema:*

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 4 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 = 4 \end{cases} .$$

Solução:

Inicialmente precisamos introduzir os polinômios no sistema. Para isto, usaremos o comando ":= " dado para nomear uma equação, em seguida a equação, no momento em que as equações são introduzidas usaremos "*" para separar as variáveis entre si e dos coeficientes, pois, o software entende que "x", "y" e "xy" são variáveis distintas e independente. Sendo assim, a partir da entrada de comando "[>" introduziremos as duas equações, ficando assim:

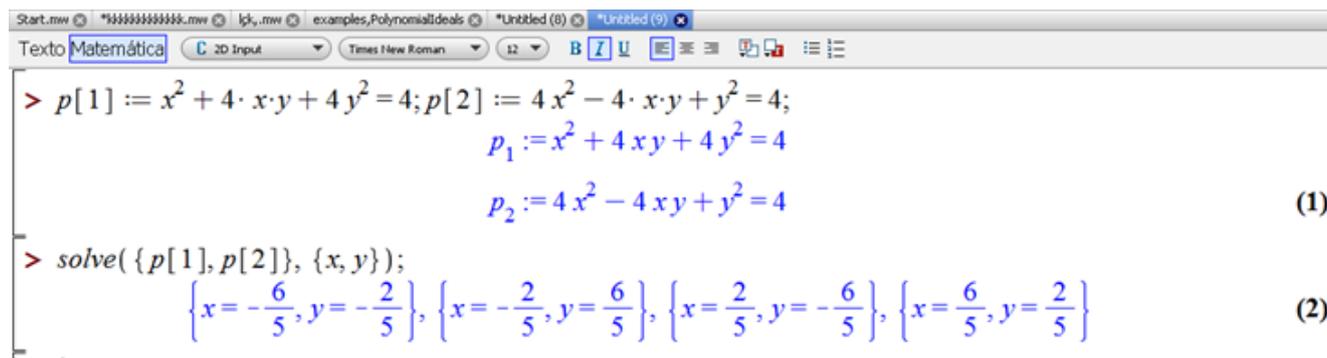
$$[> p[1] := x^2 + 4 \cdot x \cdot y + 4 \cdot y^2 = 4; p[2] := 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2 = 4;$$

conforme podemos ver na fig. 4.1. Em seguida usaremos o comando referente a resolução de sistema polinomial, o qual é utilizado basicamente para resolver qualquer tipo de equação *solve*. No caso de um sistema, faremos *solve*({*eq*₁, *eq*₂, ..., *eq*_n}), {*variavel* 1, ..., *variavel* s}, onde

n e s representam o número de equações e variáveis, respectivamente. No nosso exemplo, teremos:

$$[> \text{solve}(\{p[1], p[2]\}, \{x, y\});$$

como podemos ver na Fig. 4.1.



```

Start.mw *#####.mw lpl.mw examples,PolynomialIdeals *Untitled (8) *Untitled (9)
Texto Matemática C 2D Input Times New Roman 12 B I U
> p[1] := x^2 + 4·x·y + 4y^2 = 4; p[2] := 4x^2 - 4·x·y + y^2 = 4;
      p1 := x^2 + 4xy + 4y^2 = 4
      p2 := 4x^2 - 4xy + y^2 = 4 (1)
> solve({p[1], p[2]}, {x, y});
      {x = -6/5, y = -2/5}, {x = -2/5, y = 6/5}, {x = 2/5, y = -6/5}, {x = 6/5, y = 2/5} (2)

```

Figura 4.1: A solução aplicada no MAPLE 18

O exemplo 1 nos apresenta uma ferramenta eficiente e capaz de resolver um sistema não linear, desde que aplicado através de polinômios. Agora vamos determinar todos os elementos de um zero dimensional no exemplo a seguir usando o MAPLE.

Aplicação 2 Encontre as matrizes de multiplicação de x e y , a base de Lagrange, os autovalores e autovetores M_0 e a matriz de Jordan do ideal:

$$\mathcal{I} = [x^2 + 4xy + 4y^2 = 4, 4x^2 - 4xy + y^2 = 4].$$

Solução:

Neste exemplo precisaremos liberar a livreria do MAPLE, os quais, são pacotes específicos de comando. Para aplicar estes pacotes usaremos o comando:

$$[> \text{with}(\text{linalg}); \text{with}(\text{Groebner});$$

Desta forma, todos os pacotes associados aparecerão abaixo da entrada como podemos ver na Fig. 4.2, para ocultar os pacotes usaremos o comando ":" ao invés de ";" onde podemos ver na Fig. 4.3. Onde além de ocultarmos os pacotes já inserimos ambos os polinômios p_1, p_2 :

Agora identificaremos p_1, p_2 como sendo uma base, para isto, primeiro usamos o comando.

$$[> B := [p[1], p[2]];$$

```

> with(linalg); with(Groebner);
[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment,
backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat,
cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors,
eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord,
geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse,
ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol,
mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row,
rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, subbasis, swapcol,
swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]
[Basis, FGLM, HilbertDimension, HilbertPolynomial, HilbertSeries, Homogenize, InitialForm, InterReduce, IsBasis, IsProper,
IsZeroDimensional, LeadingCoefficient, LeadingMonomial, LeadingTerm, MatrixOrder, MaximalIndependentSet,
MonomialOrder, MultiplicationMatrix, MultivariateCyclicVector, NormalForm, NormalSet,
RationalUnivariateRepresentation, Reduce, RememberBasis, SPolynomial, Solve, SuggestVariableOrder, Support, TestOrder,
ToricIdealBasis, TrailingTerm, UnivariatePolynomial, Walk, WeightedDegree]

```

Figura 4.2: Ilustração de todos os pacotes.

```

> with(linalg) : with(Groebner) :
> p[1] := x^2 + 4·x·y + 4y^2 - 4; p[2] := 4x^2 - 4·x·y + y^2 - 4;
      p1 := x2 + 4xy + 4y2 - 4
      p2 := 4x2 - 4xy + y2 - 4

```

Figura 4.3: Troca de ";" por ":".

Em seguida definimos as variáveis associadas a base B , a qual acabamos de criar. A fim de discriminar as variáveis, usamos o comando $tdeg(variavel\ 1, \dots, variavel\ s)$, onde s representa o número de variáveis, de modo que:

$$[> G := Basis(B, tdeg(x, y)).$$

Como podemos ver na fig. 4.4. Após definir as bases confirmamos que o sistema acima se trata de um 0-dimensional, para isto, usamos o comando $IsZeroDimensional(Base)$, em particular, escolhendo G como base, temos:

$$[> IsZeroDimensional(G);$$

Caso seja, aparecerá true, isto é, verdade, caso não seja aparecerá, false, isto é falso. como podemos ver na Fig. 4.4:

```

[> B := [p[1], p[2]];
      B := [x^2 + 4xy + 4y^2 - 4, 4x^2 - 4xy + y^2 - 4] (2)
[> G := Basis(B, tdeg(x, y))
      G := [20xy + 15y^2 - 12, 5x^2 + 5y^2 - 8, 125y^3 + 48x - 164y] (3)
[> IsZeroDimensional(G)
      true (4)

```

Figura 4.4: Processo de criação do ideal \mathcal{I} .

Visto que $[p_1, p_2]$ formam im ideal de dimensão zero, iremos agora determina a base b_0 de Lagrange associada a este ideal, desta forma, usaremos o comando $NormalSet(Base, tdeg(Variavel 1, \dots, Variavel s))$, onde s é o número de variáveis, e nomearemos por bn, vi , pois, o que estamos procurando na verdade é em inglês *normal basis*, *reverse vector*, desta forma muitas apostilas do MAPLE nomeará de nb, rv , no entanto, usaremos nossa *base normal*, *vetor inverso*. A execução de tal comando se dará por:

```
[> nb, rv := NormalSet(G, tdeg(x, y))
```

Observe na fig. 4.5 que a base $b_0 = [[1], [x], [y], [y^2]]$ é distinta das que apareceram no exemplo 8, no entanto, isto é normal, desde que se preserve a dimensão de \mathcal{I} .

```

[> bn, bi := NormalSet(G, tdeg(x, y));
      bn, bi := [1, y, x, y^2], table([1 = 1, y^2 = 4, y = 2, x = 3]) (5)

```

Figura 4.5: Base de Lagrange b_0

Agora podemos determinar a matriz de multiplicação em x e em y . Para determinar a matriz de multiplicação em x usaremos o comando $MultiplicationMatrix(Variavel \mu, Base de Lagrange, Base Dual, Base, tdeg(Variavel 1, \dots, Variavel s))$, onde s é o número de variáveis, e $\mu \leq s$. No nosso caso:

```
[> MultiplicationMatrix(x, bn, bi, G, tdeg(x, y));
```

```
[> MultiplicationMatrix(y, bn, bi, G, tdeg(x, y));
```

Na Fig. 4.6 podemos ver, tanto a matriz de multiplicação, tanto de x quanto de y .

Com posse das matrizes de multiplicação podemos encontrar o conjunto de autovalores e as matrizes M_0 associada a variável μ . Para isto, usaremos o comando $LinearAlgebra[Eigenvectors]$

$$\begin{aligned}
&> M[x] := \text{MultiplicationMatrix}(x, bn, bi, G, tdeg(x, y)); \\
&M_x := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ \frac{8}{5} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{48}{125} & \frac{36}{125} & 0 \end{bmatrix} \tag{6} \\
&> M[y] := \text{MultiplicationMatrix}(y, bn, bi, G, tdeg(x, y)); \\
&M_y := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{164}{125} & -\frac{48}{125} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}
\end{aligned}$$

Figura 4.6: Matrizes M_x e M_y

(Matriz de multiplicação de μ);, no caso em particular:

[> $\text{LinearAlgebra}[\text{Eigenvectors}](M[x]);$

[> $\text{LinearAlgebra}[\text{Eigenvectors}](M[y]);$

The screenshot shows the Maple interface with the following results:

$$\begin{aligned}
&> \text{LinearAlgebra}[\text{Eigenvectors}](M[x]); \\
&\begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{25}{36} & \frac{25}{4} & \frac{25}{36} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{15}{2} & -\frac{5}{18} & \frac{15}{2} & \frac{5}{18} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{13} \\
&> \text{LinearAlgebra}[\text{Eigenvectors}](M[y]); \\
&\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{25}{36} & \frac{25}{36} & \frac{25}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \\ \frac{15}{2} & -\frac{5}{18} & \frac{5}{18} & -\frac{15}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}
\end{aligned}$$

Figura 4.7: Autovalores e autovetores

A ilustração encontra-se na Fig.4.7. Veja que os autovalores de x são $(-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, \frac{2}{5})$ e cada uma das colunas da matriz da Fig.4.7 é um autovetor, de acordo com a Proposição 7. Ainda, podemos visualizar os autovalores associados a y , os são, $(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{2}{5})$. Podemos visualizar no exemplo 1 que o MAPLE pode combinar os resultados encontrados a partir das matrizes de

multiplicação, para determinar o conjunto dos zeros de um sistema polinomial.

Para concluir este exemplo, podemos encontrar a forma canônica de Jordan para cada uma das variáveis. Para isto, usaremos o comando $LinearAlgebra[JordanForm](Matriz\ de\ multiplicidade\ \mu)$. Em nosso caso particular:

[> $LinearAlgebra[JordanForm](M[x])$

[> $LinearAlgebra[JordanForm](M[y])$

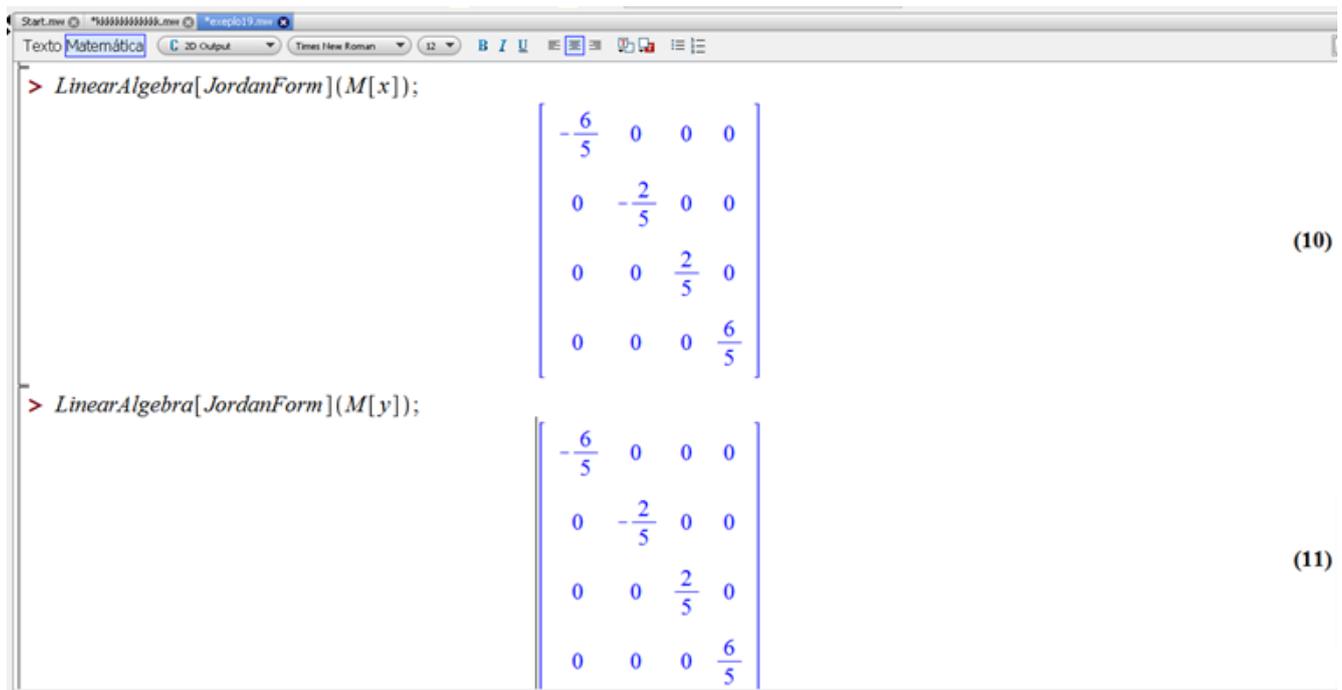


Figura 4.8: Matrizes na forma canônica de Jordan

Aplicação 3 Considere o ideal 0-dimensional $\mathcal{I} = [p_v(\mathbf{x})]$, definido pelo sistema polinomial $p_v(\mathbf{x}) = 0$, dado por:

$$p_v(\mathbf{x}) = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \\ \frac{1}{5}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2} = 0 \\ x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} .$$

Reproduza os mesmos passos do exemplo 2

Solução:

Na Fig. 4.9, desde da introdução dos polinômios à base de Lagrange.

```

> with(linalg) : with(Groebner) :
> P[1] := x[1] + x[2] + x[3] - 1; P[2] :=  $\frac{x[1]^3}{5} + \frac{x[2]^2}{2} - x[3] + \frac{x[3]^2}{2} + \frac{1}{2}$ ; P[3] := x[1] + x[2] +  $\frac{x[3]^2}{2} - \frac{1}{2}$ ;
      
$$P_1 := x_1 + x_2 + x_3 - 1$$

      
$$P_2 := \frac{1}{5}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}$$

      
$$P_3 := x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2} \tag{1}$$

> B := [P[1], P[2], P[3]];
      
$$B := \left[ x_1 + x_2 + x_3 - 1, \frac{1}{5}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 + \frac{1}{2}, x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2} \right] \tag{2}$$

> G := Basis(B, tdeg(x[1], x[2], x[3]));
      
$$G := \left[ x_1 + x_2 + x_3 - 1, x_3^2 - 2x_3 + 1, 2x_2^2 + 6x_2^2x_3 - 11x_2^2 \right] \tag{3}$$

> IsZeroDimensional(G);
      true \tag{4}
> bn, vi := NormalSet(G, tdeg(x[1], x[2], x[3]));
      
$$bn, vi := \left[ 1, x_3, x_2, x_2x_3, x_2^2, x_2^2x_3 \right], \text{table} \left( \left[ 1 = 1, x_3 = 2, x_2^2x_3 = 6, x_2^2 = 5, x_2x_3 = 4, x_2 = 3 \right] \right) \tag{5}$$


```

Figura 4.9: A base de Lagrange.

Na Fig. 4.10, já vemos as matrizes de multiplicidade, Observe que o número de linhas e colunas está associado a base de Lagrange, implicando na multiplicidade de uma ou mais raízes maior que 1. De modo que aparecerá blocos de Jordan.

Optamos por pular uma parte da aplicação 2, por ser semelhante à aplicação 1, de modo que pretendemos analisar as formas normais de Jordan desta aplicação. Na Fig. 4.11, observe a repetição dos autovalores nas diagonais. Esta repetição representa os blocos de Jordan. Além disso, o aparecimento de alguns número 1 acima da diagonal indica, que algumas das raízes são complexas.

Utilizando o MAPLE 18, chegamos a conclusão de que no exemplo 2, todas as raízes são distintas, em quanto que no Exemplo 3 nem todas as raízes são distintas. Todavia, poderia chegar a solução do exemplo 3 utilizando o comando de solução do sistema definido no Exemplo 1 como podemos ver na Fig. 4.12. Fazendo do MAPLE uma ferramenta fundamental para o estudo de polinômio.

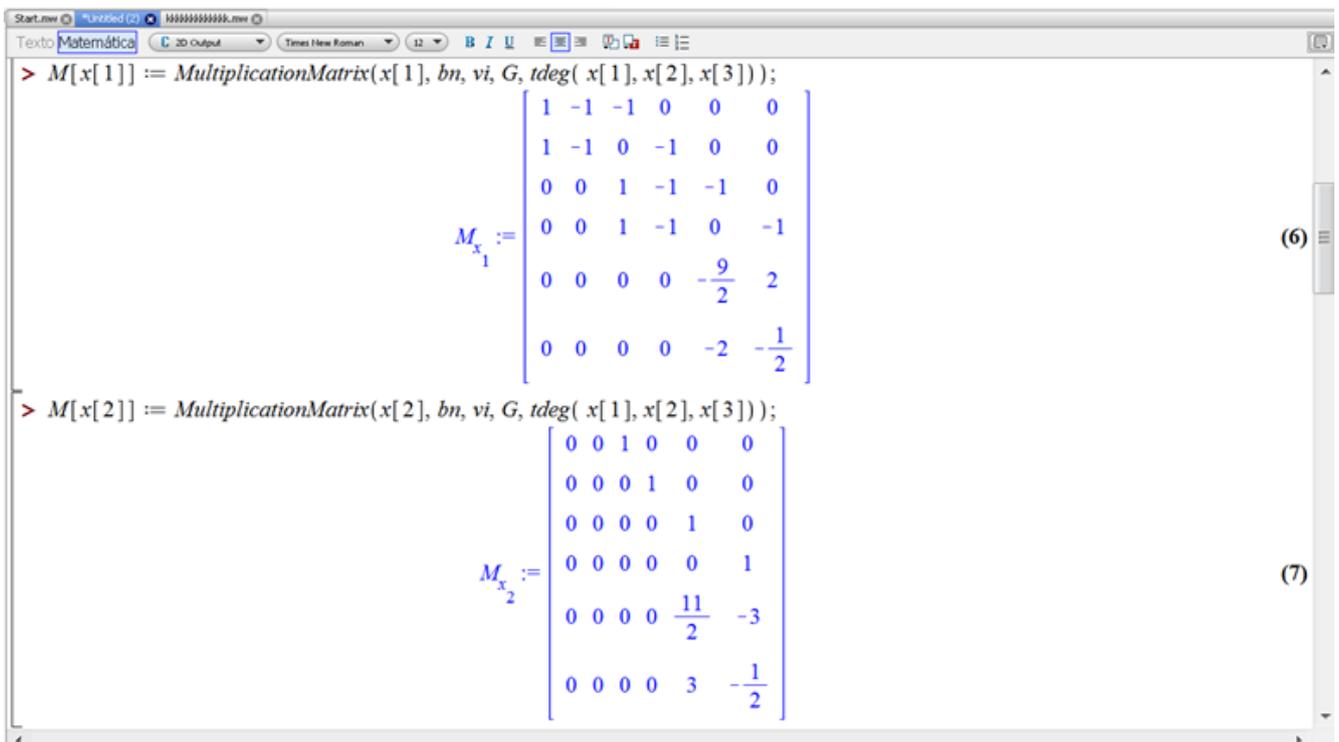


Figura 4.10: As matrizes de multiplicidade.

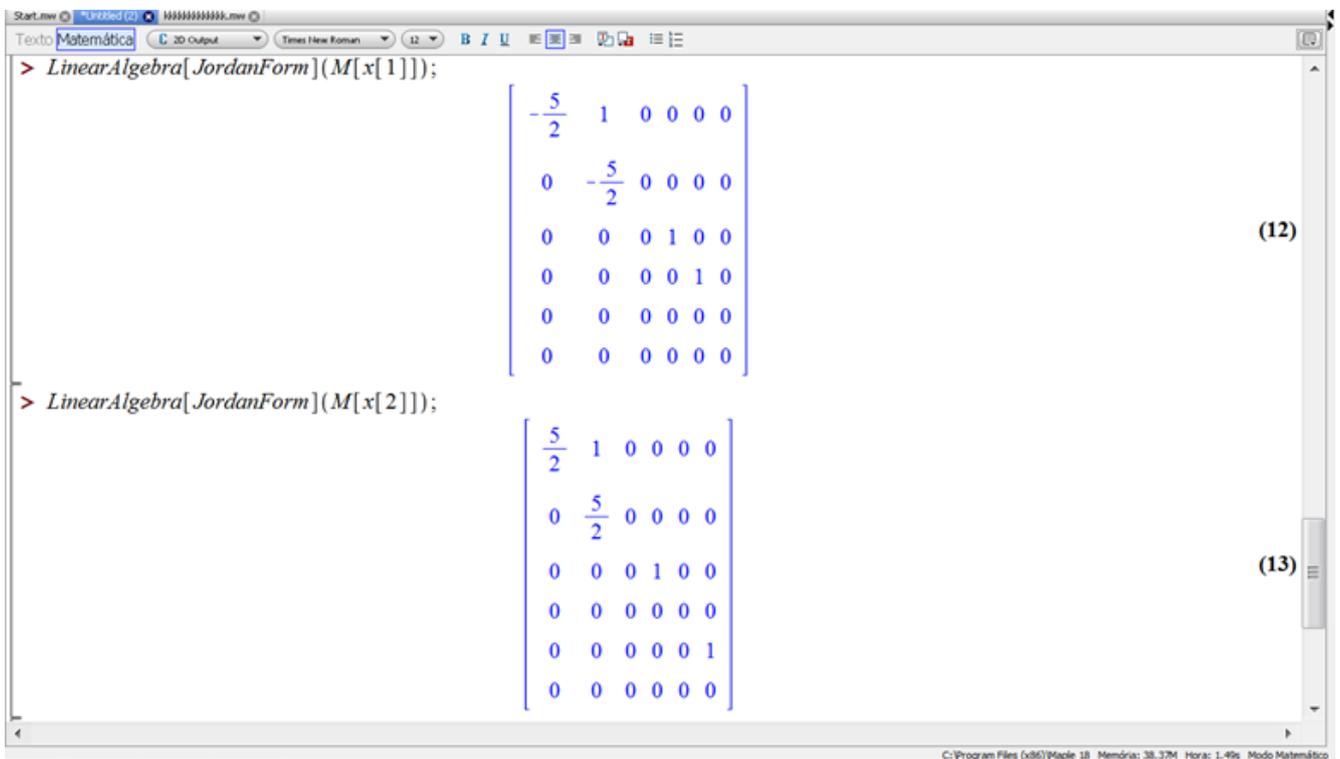


Figura 4.11: As diagonais formam blocos.

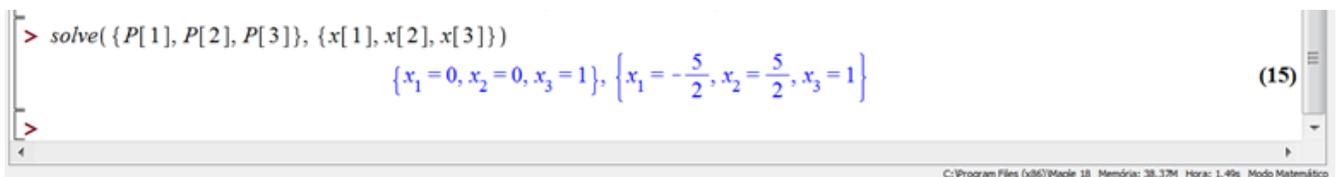


Figura 4.12: Solução do sistema, com três raízes reais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho trata do estudo de espaços 0-dimensional e do Teorema Central da solução de um sistema de polinômios. Primeiro verificamos que o conjunto dos polinômios \mathcal{P}^s formam um espaço vetorial e analisamos a base deste espaço vetorial, cujos elementos é o conjunto Γ^s tal que s determina sua dimensão. Em seguida, verificamos que \mathcal{P}^s forma um anel e consequentemente um ideal e finalmente concluímos \mathcal{P}^s pode ser representado por um anel quociente $\mathcal{R}/[\mathcal{I}]$. Identificar que \mathcal{P}^s pode ser reescrito como um anel quociente nos permitiu definir a existência de um conjunto \mathcal{I} cuja principal característica é de que qualquer elemento neste espaço se reduza zeros caracterizando um espaço de pontos isolados. Naturalmente, notamos que m pontos isolados poderiam ser interpolados por m polinômios os quais definem uma base \mathbf{b}_μ . Em seguida verificamos que a matriz \mathbf{b}_μ pode ser reescrita como matriz de transformação. Esta matriz desempenha um papel fundamental, pois, podemos fazer uma decomposição em termos de uma matriz de autovalores e autovetores e em seguida calcular os zeros associados ao seu polinômio.

No entanto, percebemos que a decomposição da matriz do sistema é dada através de matrizes quadradas, e neste caso nem sempre é possível obter uma decomposição desta forma. Para contornar este problema, usamos o espaço dual para gerar um novo espaço vetorial, a fim de obter um novo polinômio, porém com as mesmas raízes. Concluímos o trabalho aplicando o Teorema Central da solução de um sistema de polinômio.

Este trabalho é apenas uma introdução ao estudo de espaços 0-dimensional à luz da álgebra moderna e álgebra polinomial numérica. Esperamos contribuir com os que pretendem iniciar seus estudos nesta área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Boldrine, J. L.; Costa, S. I. R.; Figueiredo, V.L.; Wetzler, H.G. **ÁLGEBRA LINEAR 3° ed.** São Paulo: Nacional, 1980.
- [2] Sampaio, J.C.V.; **ESTRUTURAS ALGÉBRICAS 2:** <http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/algebra.html>. Pesquisado em 19 de agosto de 2015.
- [3] Stetter, H.J.; **NUMERICAL POLYNOMIAL ALGEBRA:** Viena, 2004.
- [4] Cohen, J.; **A COURSE IN COMPUTATIONAL ALGEBRAIC NUMBER THEORY:** Nova York, 1996.
- [5] Hefez, A.; Fernandes, C.S.; **INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR:** SBM, São Paulo, 2010.
- [6] Marques, C.M.; **INTRODUÇÃO A TEORIA DE ANÉIS:** Departamento de Matemática-UFMG. Belo Horizonte: , 2005.
- [7] Gallian, J.; **ABSTRACT ALGEBRA, 3° EDITION.** Heath, 1994.
- [8] Poland, W.; **TWO EXAMPLES OF ZERO-DIMENSIONAL SETS IN PRODUCT SPACES:** Department of Mathematics, Palac Kultury i Nauki IX p, O0 901, 1987.
- [9] Castro Junior, A. A.; **APLICAÇÕES DE ANÁLISE A ÁLGEBRA LINEAR,** Minicurso apresentado no *III^o* Colóquio de Matemática da Região Sul, realizado na Universidade Federal de Santa Catarina, em maio de 2014, Florianópolis, 2014.
- [10] Massago, S. **NOTA DA ÁLGEBRA LINEAR 2,** 2009.

- [11] Buchberger, B.; **AN ALGORITHM FOR FINDING A BASIS FOR THE RESIDUE CLASS RING OF A ZERO-DIMENSIONAL POLYNOMIAL IDEAL**, P.h.D. Thesis, Univ. Innsbruck,1965.
- [12] González-Vega, L.; **DETERMINATAL FORMULAE FOR THE SOLUTION SET OF ZERO-DIMENSIONAL IDEALS**:Departamento de Matematicas. Estadistica y Computacion. Faculd de Ciencias, Universidad de Catanbria, Santander. 1990 (Revisado 25 de janeiro 1991).
- [13] Verschelde, J.; **ANALYTIC SYMBOLIC COMPUTATION** UIC, Dept of Math, Stat & CS, Spring, 2009.
- [14] Heck, Á. **Introduction to Maple**. New York, Springer-Verlag, 1993.
- [15] <http://www.maplesoft.com/> pesquisado em 10 de outubro de 2015.