UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALEX FERNANDES MENDES

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Campina Grande, PB
Dezembro de 2015

ALEX FERNANDES MENDES

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós - Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. LUCIANA ROZE DE FREITAS

Campina Grande, PB

Dezembro de 2015

M538p Mendes, Alex Fernandes.

Problemas de otimização [manuscrito] : uma proposta para o Ensino Médio / Alex Fernandes Mendes. - 2015.

70 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Taxa de variação. 2. Extremos relativos. 3. Problemas de otimização. 4. Funções polinomiais. I. Título.

21. ed. CDD 515.55

ALEX FERNANDES MENDES

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós - Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Aprovado em: 14 / 12 / 2015.

BANCA EXAMINADORA:

Luciana R. Freitas

Prof^a. Dr^a. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Orientadora

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira
Departamento de Matemática - CCT/UEPB
Examinador

Juliana Aragão de Araújo

Prof^a. Dr^a. Juliana Aragão de Araújo
Departamento de Ciências Exatas - CCAE/UFPB
Examinadora

Campina Grande, Dezembro de 2015

Dedico este trabalho a minha esposa Edlange e a minha filha Laura.

Agradecimentos

À Deus por mais uma vitória na minha vida, estando sempre presente em todas as minhas conquistas, mesmo que eu temesse algo, ele nunca deixou que eu desistisse dos meus objetivos;

À minha família que me encorajou a seguir em frente, me apoiando com palavras de entusiamo, fortalecendo ainda mais o laço familiar e consequentemente refletindo de forma significativa para a conclusão do meu trabalho;

Aos meus professores por compartilhar seus conhecimentos, sendo muito influentes na minha formação, mostrando dedicação e apoio, sempre com palavras de motivação e otimismo;

À professora Luciana Roze de Freitas por mais uma vez fazer parte da minha formação, mostrando sempre clareza em seus ensinamentos e como orientadora, ser uma pessoa exemplar, profissional, carismática, dedicada e sempre com a boa vontade de ajudar;

Aos meus amigos e colegas pelo companheirismo e o compartilhar dos conhecimentos;

À todos de forma geral que contribuiram relevantemente para o término do meu mestrado.

"Paciência vale mais que valentia, e dominar a si mesmo vale mais que conquistar uma cidade."

(Provérbios, 16, 32)

Resumo

No presente trabalho abordaremos problemas de otimização envolvendo funções polinomiais de grau maior ou igual a 2, onde utilizamos a taxa de variação na obtenção de extremos, que podem ser máximos ou mínimos relativos. A proposta é inserir no ensino médio a derivada como taxa de variação e a partir daí resolver problemas de otimização, sem definir a derivada de maneira formal. Os problemas propostos neste trabalho atende à dinâmica de sala de aula, sendo problemas concretos, com certa ocorrência no nosso cotidiano, podendo ainda abranger as áreas de economia, engenharia e física.

Palavras Chave: Taxa de Variação; Extremos Relativos; Problemas de Otimização.

Abstract

In this work discuss optimization problems involving polynomial functions of degree greater than or equal to 2, where use the rate of variation to obtain the extremes, that can be maximum or minimum. The proposal is to insert in high school the derived as rate of variation and from there to solve optimization problems, without defining the derivative formally. The problems proposed in this work meets the dynamic in the classroom, concrete problems, with some occurrence in our daily lives, may also include the areas of economics, engineering and physics.

Key words: Rate of change; Extreme Relatives; Optimization Problems.

Sumário

Introdução

Na década de 60 a derivada era vista na 3ª série do antigo curso científico, bem como os problemas de máximo e mínimo relacionados. Para Ávila, (ver [2]), a ideia da derivada poderia ser inserida no 1º ano do ensino médio com um breve conceito de função, definindo a inclinação da reta tangente associada com o conteúdo de Física, a respeito da velocidade de um móvel. Ávila ainda menciona que o conceito de funções, a derivada e a geometria analítica deveriam ser integrados em uma única série e não serem conteúdos separados como ocorre nos livros.

Atualmente, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), não é abordado no ensino médio o conteúdo relacionado a derivada como taxa de variação instantânea. Porém, está previsto uma nova proposta nos PCN's de inserção desse assunto nas escolas, buscando promover aos alunos os conhecimentos necessários antes de ingressarem em uma faculdade. Além disso, alguns livros já mencionam esses assuntos (ver [8]), mas ainda não é posto em prática pelos professores. Segundo os PCN's de matemática para o ensino médio:

> *"Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação".*

A proposta do trabalho é introduzir no Ensino Médio a derivada através da Taxa de Variação Instântanea e aplicar aos problemas de otimização, sendo possível fazer um estudo a respeito dos pontos de máximos ou mínimos de uma função polinomial de grau maior ou igual a 2. No decorrer do trabalho, sugerimos apenas problemas que envolvem funções polinomiais cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais. Ressaltemos que a proposta aqui mencionada sugere facilitar o ensino e a aprendizagem para alunos que tenham um conhecimento razoável de matemática, ajudando-o no desenvolvimento das habilidades destacadas nesse trabalho, possibilitando maior compreensão quando ingressarem em um curso universitário.

Antes de inserir os conceitos básicos de cálculo no Ensino Médio, o professor deve agir como mentor, orientando os alunos, induzindo-os a uma intuição e lógica matemática, reforçando os conteúdos de funções, gráficos de funções polinomiais, o estudo da geometria e ainda, trabalhar a modelagem matemática e associar o uso de novas tecnologias. Deve-se compreender que o estudo de funções apenas tem ocorrido quando associado ao estudo da derivada e que a taxa de variação instantânea é algo muito presente no ensino de matemática. Claro que não é preciso mencionar aquela definição rebuscada da derivada mas levar ao conhecimento do aluno as ideias intuitivas.

Infelizemente há um agravo quanto à formação dos professores nas universidades e segundo Druck (ver [5]),

> *"Além da pobreza de informação matemática, detecta-se na formação dos professores uma supervalorização de métodos pedagógicos em detrimento de conteúdo matemático. Uma boa formação pedagógica é fundamental mas torna-se de pouca valia quando desacompanhada de bom conhecimento do conteúdo específico"*.

Nesse sentido, as perspectivas para um ensino adequado da matemática nas escolas se tornam pressionadas por um sistema defasado de ensino. É relevante mencionar que além dos professores dizerem que o conteúdo da derivada é difícil para os alunos compreenderem, os livros do 3º ano do ensino médio abordam o assunto no final, impossibilitando os professores de ministrarem o conteúdo no ano letivo. É um grande desafio introduzir a derivada e os problemas de otimização no ensino médio. O sistema de ensino nas escolas públicas não ajudam a remeter aos alunos essa lógica da junção dos conhecimentos estudados em Física e associá-los a conteúdos matemáticos. Está na hora dessa interdisciplinariedade ocorrer, pois é uma coligação, onde um depende do outro e com isso os conceitos, assim mencionados, se tornam importantes na formação do aluno, que poderá aplicá-los em diversas situações. É através do conceito de taxa de variação que o aluno entenderá o conceito de derivada, e com o apoio e os avanços tecnológicos, nos deparamos com vários softwares que ajudarão os professores em suas aulas.

A modelagem matemática deve ser um recurso utilizado no processo de ensino e aprendizagem para a exposição do problemas de otimização. Nesse contexto, no entender de Biembengut, (ver [3]):

> *"⋯ para se elaborar um modelo, além do conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discenir que o conteúdo matemático melhor se adapta e também ter um senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas".*

O uso do GeoGebra nos conteúdos de álgebra e geometria representa a nova proposta no ensino da inserção da tecnologia nas aulas de matemática e favorece a compreensão do aluno, sendo importante na elaboração de uma aula dinâmica. O GeoGebra abrange conteúdos do cálculo diferencial, sendo útil na derivada de funções, retas tangentes a curvas, fatoração de polinômios, determinação de extremos, entre outros recursos.

Assim, o trabalho é composto por cinco capítulos onde há, no final dos capitulos 1, 2, 3 e 5, um breve histórico relacionado a cada tema.

No capítulo 1, abordaremos os resultados preliminares conduzindo o leitor a compreender o tema proposto.

No capítulo 2 discutiremos a noção intuitiva da taxa de variação média e instantânea a partir da velocidade média dos corpos vista pelos alunos no 1º ano do ensino médio. Aqui são apresentadas as definições de taxa de variação, inclinação da reta tangente e a velocidade instantânea, e que representam na verdade uma única definição, a derivada.

No capítulo 3, definiremos os extremos de uma função polinomial podendo ser pontos de máximo ou mínimo, denominados os pontos de otimização, além de ampliar os conhecimentos, falando a respeito dos critérios de derivação para a obtenção de extremos: os testes da derivada 1ª e 2ª.

É exposto no capítulo 4 um tutorial feito do software GeoGebra, que ensina os passos de como construir, derivar e determinar os extremos de uma função.

No capítulo 5, abordaremos alguns problemas envolvendo funções polinomiais de grau maior ou igual a 2 que possivelmente poderiam ser trabalhados em sala de aula no ensino médio, utilizando os conhecimentos vistos nos capítulos anteriores. A proposta dos problemas são evidenciados nesse capítulo com intuito introduzir nas aulas de matemática o conteúdo de cálculo visto apenas no ensino superior.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições com o intuito de levá-los a compreensão dos problemas relacionados aos pontos de máximo e de mínimo. Abordaremos o conceito de função de uma variável real, citando seus principais elementos que serão necessários para se ter melhor entendimento na resolução dos problemas de otimização. As definições e resultados apresentados podem ser encontrados nas referências [8], [9], [11], [12] e [14].

1.1 Funções

Definição 1.1. Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \to Y$ é uma aplicação (ou regra) que diz como associar a cada elemento de $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$.

Observação 1.1. Neste trabalho, iremos considerar funções reais de uma variável real, isto é, quando $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo 1.1. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma função denominada função afim. Se $a = 0$ ou $b = 0$ teremos casos particulares dessa função denominadas, respectivamente, função constante e função linear.

Definição 1.2. Dizemos que o domínio da função $f : X \to Y$ é o conjunto X e o contradomínio é o conjunto Y. Um elemento $y \in Y$ ao qual o elemento $x \in X$ está associado, isto é, $y = f(x)$, é denominada imagem de x pela função f.

Definição 1.3. O conjunto imagem são todos os elementos em Y relacionados a algum elemento do conjunto X. Em simbolos, dizemos que $D(f)$ é o domínio, $CD(f)$ é o contradomínio e $Im(f)$ é a imagem da função. Neste caso,

$$Im(f) = \{y \in Y; y = f(x), \text{ para algum } x \in X\}.$$

Definição 1.4. O gráfico de uma função $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no plano cartesiano é o conjunto de pontos (x, y) que satisfaz a condição $y = f(x)$, isto é:

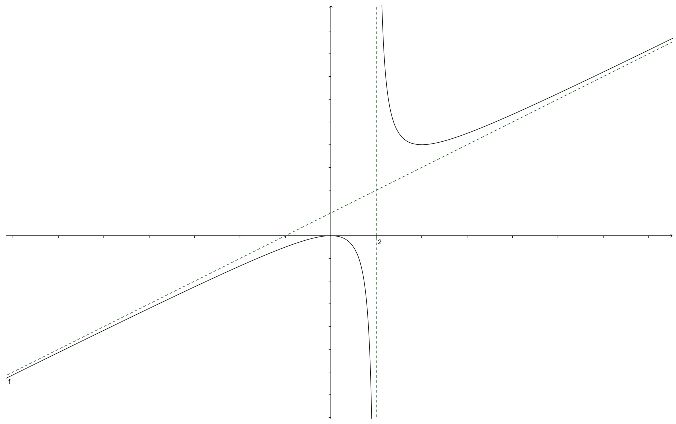
$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x) \text{ com } x \in D(f)\right\}.$$

Exemplo 1.2. Considere uma função definida por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ com elementos reais. Determinemos seu domínio e o conjunto imagem. Para que a função esteja definida, isto é, que os valores de x do domínio tenha sempre um elemento no contradomínio que seja imagem, é preciso que o domínio seja $\mathbb{R} - \{2\}$ pois se $x = 2$, segue que o quociente não existe nesse ponto. Logo $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$. Agora, o conjunto imagem da função é o conjunto $\mathbb{R}$ pois, se dado $y \in \mathbb{R}$ e sendo $y = \dfrac{x^2}{x-2}$, então:

$$\begin{aligned}
x^2 - xy + 2y = 0 \quad &\Rightarrow \\
x^2 - \frac{2}{2}xy + 2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + 2y - \frac{y^2}{4} = 0 \quad &\Rightarrow \\
\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{4} - 2y \quad &\Rightarrow \\
x - \frac{y}{2} = \pm\sqrt{\frac{y^2}{4} - 2y} \quad &\Rightarrow \\
x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{4} - 2y} + \frac{y}{2} \quad &\Rightarrow
\end{aligned}$$

Assim, dado $x = \pm\sqrt{\dfrac{y^2}{4} - 2y} + \dfrac{y}{2}$, existe sempre um $y \in \mathbb{R}$, e com isso,

$$CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}.$$



Definição 1.5. Uma função $f : X \to Y$ é dita injetiva quando tomados elementos distintos de X e transfomados pela lei de associação de f encontram-se elementos distintos em Y. Isto é,

$$x_1, x_2 \in X, \text{com } \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

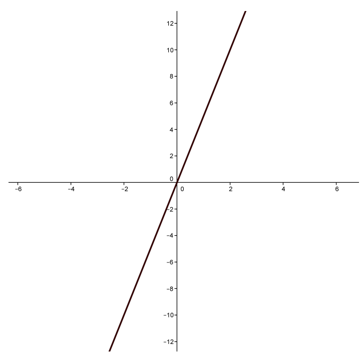
A sua forma contrapositiva que também é válida pode ser escrita na forma:

$$x_1, x_2 \in X, \text{ com } \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

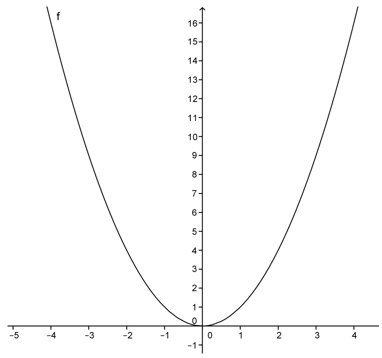
Uma função $f : X \to Y$ é dita sobrejetiva quando para cada elemento $y \in Y$, existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, $CD(f) = Im(f)$.

Uma função $f : X \to Y$ é dita bijetiva ou uma correspondência biúnivoca entre X e Y quando é, ao mesmo tempo, injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 1.3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5x$. A função é injetiva, pois para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{com } \ x_1 \neq x_2$ então $5x_1 \neq 5x_2$, logo $f(x_1) \neq f(x_2)$. A função também é sobrejetiva, pois para cada elemento $y \in \mathbb{R}$ tem-se que para $x = \frac{y}{5}$, $f(x) = y$. Ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}$. E portanto, a função é bijetiva.



Exemplo 1.4. Existem funções que não são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas. É o caso da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. De fato, não é injetiva pois se dados $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$ tem-se que $2^2 = (-2)^2$, ou seja, $x_1{}^2 = x_2{}^2$. Não é sobrejetiva, pois $Im(f) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R}$.



Definição 1.6. A função $I : X \to X$ definida por $I(x) = x$ é denominada função identidade e podemos denotá-la por I_X.

Definição 1.7. Sejam $f : X \to Y$ e $g : U \to V$ duas funções com $Y \subset U$. A função composta de g com f é a função denotada por $g \circ f$, com domínio em X e contradomínio em V , que a cada elemento $x \in X$ faz corresponder o elemento $y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in V$. Isto é:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f : X \to & Y \subset U & \to V \\ x \mapsto & f(x) & \mapsto g(f(x)). \end{array}$$

Definição 1.8. Uma função $f : X \to Y$ é invertível se existe uma função $g : Y \to X$ tal que

i) $f \circ g = I_Y$;

ii) $g \circ f = I_X$.

Neste caso, a função g é dita *função inversa* de f e é denotada por $g = f^{-1}$. Uma função tem inversa se, e somente se, é bijetiva.

Definição 1.9. Uma função $f : I \subset \mathbb{R}$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é dita:

a) Crescente se,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1), \forall x_1, x_2 \in I.$$

b) Estritamente crescente se,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1), \forall x_1, x_2 \in I.$$

c) Decrescente se,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1), \forall x_1, x_2 \in I.$$

d) Estritamente decrescente se,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1), \forall x_1, x_2 \in I.$$

Exemplo 1.5. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ é estritamente crescente pois, se $x < y$ então:

$$f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Mas

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + \frac{2xy}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0.$$

Como $x - y < 0$, segue que

$$f(x) - f(y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2) < 0.$$

E portanto, $f(x) < f(y)$.

Proposição 1.1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente se $a > 0$ e estritamente decrescente se $a < 0$.

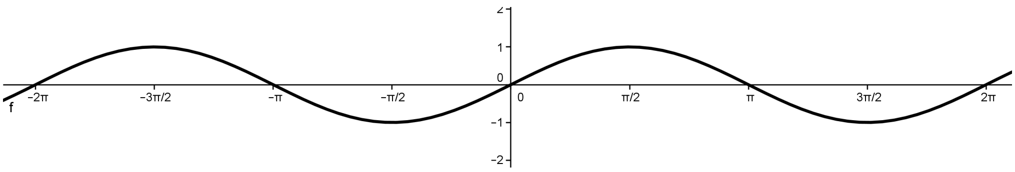
Demonstração. Suponhamos $a > 0$. Se dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 > x_2$, então

$$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 + b - ax_2 - b = a(x_1 - x_2)$$

Como $x_1 - x_2 > 0$ e por suposição $a > 0$, segue que $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Portanto, $f(x_1) > f(x_2)$. Analogamente para $a < 0$. □

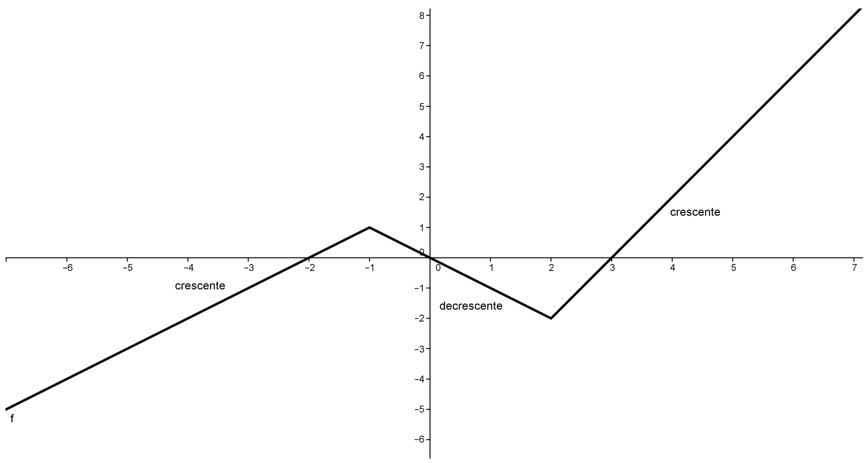
Definição 1.10. Seja $f : D(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é limitada superiormente se existe um $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$, para todo $x \in D(f)$. Dizemos que f é limitada inferiormente se existe um $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq M$, para todo $x \in D(f)$. Dizemos que a função f é limitada, se é limitada superiormente e inferiormente.

Exemplo 1.6. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen\ x$, com o conjunto imagem $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leq y \leq 1\}$, é limitada.



Exemplo 1.7. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \leq -1 \\ -x, & \text{se } -1 < x < 2 \\ 2x-6, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



No exemplo acima, observemos que a função é estritamente crescente nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[2, \infty)$, e estritamente decrescente no intervalo $(-1, 2)$.

1.2 Função Quadrática

Neste seção, construiremos o gráfico da função quadrática fazendo o estudo dos extremos, ponto de máximo ou mínimo, que neste caso é o vértice da parábola.

Definição 1.11. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.8. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$ é quadrática onde $a = 1$, $b = -5$ e $c = 4$.

Definição 1.12. Denomina-se raízes ou zeros da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Seja $ax^2 + bx + c$ o trinômio do segundo grau. Podemos determinar sua forma canônica fazendo

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Completando o quadrado dentro dos colchetes teremos

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Para determinar os zeros da função quadrática façamos $f(x) = 0$. Assim,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0.$$

Como $a \neq 0$, devemos ter

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \Leftrightarrow \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Logo, temos a expressão

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{1.1}$$

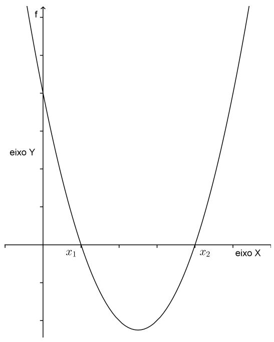
onde $\Delta = b^2 - 4ac$, que é conhecida como *Fórmula de Bháskara*. Analisando o discriminante Δ, temos três casos a considerar com relação as raízes da função:

i) Se $\Delta > 0$ a função terá duas raízes reais distintas;

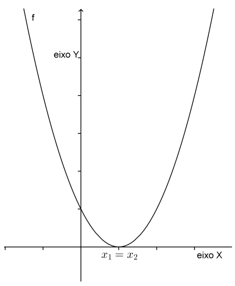
ii) Se $\Delta = 0$ a função terá apenas uma raiz real;

iii) Se $\Delta < 0$ a função não terá raiz real.

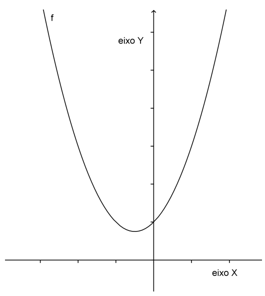
O gráfico da função quadrática, pelo item i), cortará o eixo dos x em dois pontos distintos.



Pelo item ii), atingirá apenas um ponto no eixo x



E, pelo item iii), não tocará o eixo x.



Sejam x_1 e x_2 raízes reais de uma função quadrática. Pelo que já vimos, podemos ter

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Calculemos a soma e o produto dessas raízes. Assim,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

e

$$x_1.x_2 = \frac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}.\frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Logo, a soma e o produto de raízes são dados por $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$, respectivamente.

A equação $ax^2+bx+c=0$ de raízes x_1 e x_2 pode ser escrita da forma:

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

De fato, como

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2-Sx+P\right) = 0,$$

então $a=0$ ou $x^2-Sx+P=0$. Mas, por definição, $a\neq 0$. Logo $x^2-Sx+P=0$.

Agora, mostremos que a função quadrática $y = ax^2+bx+c$, com raízes reais x_1 e x_2, pode ser escrita na forma fatorada $y = a(x-x_1).(x-x_2)$. De fato,

$$\begin{aligned} y = ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2] \\ &= a[x^2-x_1.x-x_2.x+x_1.x_2] \\ &= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)] \\ &= a(x-x_1).(x-x_2). \end{aligned}$$

Sabemos que a forma canônica do trinômio do segundo grau é dado por

$$y = ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Seja $\Delta = b^2-4ac$ e suponha $a>0$. Então, valor mínimo de y deve ocorrer quando se tem o valor mínimo para a expressão

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Sendo $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ sempre maior do que ou igual a zero, segue que seu valor mínimo deve ocorrer quando

$$x+\frac{b}{2a} = 0$$

e daí,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Logo, o valor mínimo de y é dado por

$$y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Dessa forma, quando $a > 0$, a função quadrática é limitada inferiormente.

Por outro lado, supondo $a < 0$, tem-se que o valor máximo de y se dá quando ocorrer o valor mínimo para

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Isso ocorre quando

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

e, portanto,

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Logo, o valor máximo que y assume é

$$y = a\left(0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Nesse caso, com $a < 0$, a função é limitada superiormente. Nos dois casos que acabamos de ver, o ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

representa as coordenadas do vértice da parábola. Ou seja,

$$x_V = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a},$$

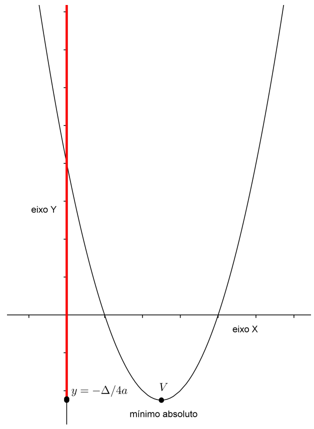
e dependendo da concavidade da parábola, são denominados pontos de máximo ou de mínimo, extremos do gráfico da função quadrática.

Discutiremos agora o gráfico de uma função quadrática, o qual é uma parábola, e seus principais elementos.

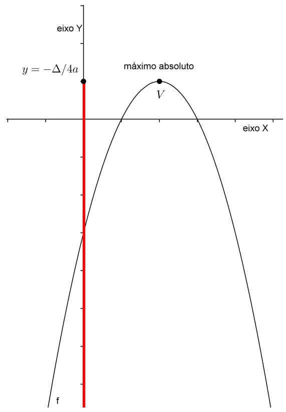
Seja f uma função quadrática. O seu gráfico é uma curva denominada parábola. Com respeito ao valor da constante a temos dois casos a considerar:

1) Se $a > 0$ então a parábola é concava para cima e nesse caso o gráfico terá um ponto de mínimo absoluto, sendo limitada inferiormente. O conjunto imagem é

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}|\ y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}.$$



2) Se $a < 0$ então a parábola é concava para baixo e nesse caso o gráfico terá um ponto de máximo absoluto, sendo limitada superiormente. O conjunto imagem é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | \ y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$.



Exemplo 1.9. Dada a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$, façamos a construção do gráfico de f.

Temos $a = 2$, $b = -5$ e $c = -3$. Como $a = 2 > 0$ segue que o gráfico da parábola é concava para cima e consequentemente terá um valor de mínimo. Adotando alguns valores do domínio acharemos as imagens respectivas e assim, poderemos construir o gráfico. Mas, determinando os principais pontos pertencentes a parábola contruiremos o gráfico de forma simples e objetiva. Os pontos a serem determinados:

i) as raízes da função f, ou seja:

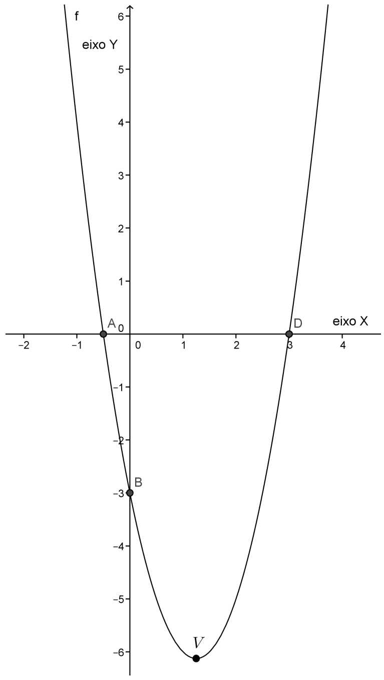
$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Daí, usando (1.1), os pontos encontrados são $(3, 0)$ e $(-1/2, 0)$;

ii) fazendo $x = 0$, temos $y = -3$ (intercepta o eixo y);

iii) o vértice da parábola $x = -\frac{b}{2a}$ e $y = -\frac{\Delta}{4a}$, ou seja, $x = \frac{5}{4}$ e $y = -\frac{49}{8}$.

Logos os principais pontos são: $(3, 0)$, $(-1/2, 0)$, $(0, -3)$ e $(5/4, -49/8)$.



1.3 Polinômios

Abordaremos brevemente algumas definições relacionadas a polinômios e ainda mencionaremos o teorema binomial, que será utilizado no próximo capítulo.

Definição 1.13. Dizemos que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números reais $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

O grau do polinômio p é o maior expoente de x que tem coeficiente não nulo. Neste caso, se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Definição 1.14. Um polinômio é um expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é uma lista ordenada de números reais e X é um símbolo (chamado uma indeterminada), sendo X^i uma abreviatura para $X.X.\cdots X$ (i fatores).

A cada polinômio

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

faz-se correponder a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\overline{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ \text{ para todo } \ x \in \mathbb{R}.$$

A correspondência (polinômio) $\mapsto$ (função polinomial) é sobrejetiva pela definição dessas funções, e é injetiva, pois polinômios distintos correspondem funções polinomiais distintas. Logo a correspondência é bijetiva e, desse modo, biúnivoca.

Definição 1.15. Sejam α um número real e p uma função polinomial. Então denomina-se $p(\alpha)$ o valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$. Isto é,

$$p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1\alpha + a_0.$$

Exemplo 1.10. Dado um polinômio $p(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, determine $p(1)$. Substituindo $x = 1$, temos:

$$p(1) = 2.1^3 + 2.1^2 - 3.1 - 1 = 0.$$

Definição 1.16. Dizemos que um número real a é a raiz do polinômio p quando $p(a) = 0$.

Exemplo 1.11. Dado o polinômio $p(x) = x^2 - 3x + 2$. Então as raízes do polinômio são os números 1 e 2, pois:

$$p(1) = 1^2 - 3.1 + 2 = 0$$

e

$$p(2) = 2^2 - 3.2 + 2 = 0.$$

Considere duas funções polinômiais: p sendo o dividendo e g o divisor, com $g \neq 0$. Dividindo p por g podemos determinar outros dois polinômios: o polinômio q denominado quociente e o polinômio r chamado resto, tais que:

i) $p(x) = g(x)q(x) + r(x)$

ii) grau de r é menor do que o grau de g ou grau de r é igual é zero.

Teorema 1.1. (Teorema do Resto) O resto da divisão de um polinômio p por $x - a$ é igual ao valor numérico de p em a.

Demonstração. Realizando a divisão do polinômio p por $x-a$, temos:

$$p(x) = q(x).(x-a) + r(x) \tag{1.2}$$

onde, q é o quociente e r é o resto. Como $x-a$ é um polinômio de grau 1, segue que q é um polinômio de grau $n-1$ e que o resto r é zero, caso a divisão seja exata, ou possui grau 0. Em ambos os casos podemos concluir que r é uma constante. Por outro lado substituindo o valor a na expressão (1.2), tem-se:

$$p(a) = q(a)(a-a) + r = r,$$

encontrando um valor numérico r. Logo, $r = p(a)$ □

Teorema 1.2. Um polinômio p é divisível por $x-a$ quando a é raiz de p.

Demonstração. Se o polinômio p é divisível por $x-a$ então o resto $r=0$. Pelo teorema do resto, $p(a) = r$. Sendo $r = 0$ temos que $p(a) = 0$, mostrando que a é raiz do polinômio p. □

Observação 1.2. Pela Definição 1.13, os polinômios discutidos aqui estão definidos no conjunto dos números reais, e por isso, iremos considerar apenas as raízes reais dos polinômios.

Teorema 1.3. Todo polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a \neq 0$ pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau. Ou seja,

$$p(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots(x-r_n)$$

onde r_1,r_2, r_3, $\cdots$, r_n são as raízes de p. A menos da ordem dos fatores a decomposição é única.

Demonstração. Ver ([9]), pág. 90-F. □

Exemplo 1.12. Fatore o polinômio $p(x) = 2x^3 - 8x^2 - 2x + 8$ e determine suas raízes. A princípio, determinemos uma raiz do polinômio por meio de tentativa. Veja que $x_1 = 1$ é uma raiz pois:

$$p(1) = 2 - 8 - 2 + 8 = 0$$

Pelo Teorema 1.2, $p(x)$ é divisível por $x-1$. Aplicando a divisão de polinômios, temos:

$$p(x) = (2x^2 - 6x - 8)(x-1).$$

Determinando as raízes do polinômio quociente, segue que as raízes de $p(x)$ são:

$$x_1 = 1, \ \ x_2 = -1 \ \text{ e } \ x_3 = 4.$$

Ainda, pelo Teorema 1.3, a forma fatorada de p é:

$$p(x) = 2(x-1)(x+1)(x-4)$$

Definição 1.17. Dados dois números naturais m e n, com $m \geq n$, define-se o coeficiente binomial m sobre n, e indicamos por $\binom{m}{n}$, como $\binom{m}{n} = \dfrac{m!}{n!(m-n)!} = C_{m,n}$.

Os produtos notáveis são casos particulares do desenvolvimento de $(a+b)^n$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Vejamos:

$n = 0 \Rightarrow (a+b)^0 = 1.$

$n = 1 \Rightarrow (a+b)^1 = a + b.$

$n = 2 \Rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$n = 3 \Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

Se continuarmos, chegaremos a um resultado geral, que será enunciado no teorema a seguir, permitindo encontrar de maneira eficaz o desenvolvimento para qualquer n natural.

Teorema 1.4. (Teorema Binomial) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n,$$

ou ainda,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Demonstração. Ver [14] pág. 111. □

1.4 Fatos Históricos

No livro de Boyer (ver [4]) diz que na antiguidade, época em que os babilônios tinham excelentes habilidades em escrever tábuas com problemas matemáticos, a ideia relatada de função veio em uma dessas tábuas, de maneira implícita. Haviam relações entre números dando a entender que existia uma correspondência através de uma formulação matemática. Por exemplo, uma das tábuas apresentava os valores de $n^3 + n^2$, com $n \in \{1, 2, \cdots, 50\}$, que evidentemente aparece a ideia de função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, \cdots, 50\}$ e definida por

$$f(n) = n^3 + n^2.$$

Na Grécia, no início do século II, surge um matemático que introduz através de suas equações indeterminadas uma algebra simbólica e é considerado por muitos como o pai da álgebra, Diofanto de Alexandria, (nascido entre 201 - 204 e sua morte entre 284 - 298).

No período medieval, entre os séculos V e XV, não consta relatos de avanços quanto a definição de função, apesar de haver uma ideia parecida, mas não o conceito ainda formado. Nessa mesma época, discussões de muitos matemáticos a respeito da álgebra literal eram frequentes e cuja criação era recente e de muito pouca aceitação por parte dos estudiosos.

A introdução do termo função propriamente dita foi dado pelo matemático alemão G. W. Leibniz (1646 - 1716) para indicar quantidades relacionadas através de uma variável associadas a uma curva, significando assim uma correspondência entre as variáveis dependentes, e ainda, ampliando sua definição a outros conhecimentos, entre eles, ao cálculo diferencial. Mas a notação de função $f(x)$ reserva-se ao matemático suiço L. Euler (1707 - 1783) que foi introduzida no ano de 1734.

Capítulo 2

Taxas de Variação

Abordaremos conceitos mais avançados, pretendendo focar nossos estudos no Ensino Médio de forma que possa contribuir para a melhor formação do aluno. Portanto, introduziremos, através da definição de taxa de variação, a definição de derivada. As definições e resultados apresentados podem ser encontrados nas referências [7], [8], [10] e [15].

2.1 Taxa de Variação Média

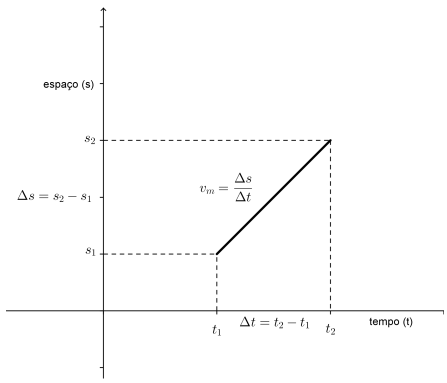
No Ensino Médio, os alunos aprendem a calcular a velocidade média de um móvel no ensino de Física, que é definido do seguinte modo: Num movimento retílineo uniforme, considere que um certo móvel se desloca da posição s_1, no instante t_1, para a posição s_2, no instante t_2. Denotemos a variação do espaço por Δs e a variação do instante por Δt. A velocidade escalar média v_m é a relação:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

No 7º ano do ensino fundamental, é ministrado pelo professor, pelo menos é o que se espera, a proporcionalidade. Consideremos um exemplo:

Exemplo 2.1. Considere a proporção $\frac{y}{x} = 2$. Atribuímos diferentes valores para x determinando os valores de y.

x	1	2	3	-1	$\sqrt{3}$
y	2	4	6	-2	$2\sqrt{3}$



Observe que, quando variamos os valores de x, os valores de y também variam. Se ainda o professor instigar o aluno fazendo $y = 2x$ e escolhendo aleatoriamente dois valores para x, digamos x_1 e x_2 podemos inserir a ideia de taxa de variação.

$$T = \frac{2x_2 - 2x_1}{x_2 - x_1} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 2.$$

Ainda no 1º ano do Ensino Médio, podemos citar o exemplo envolvendo função afim e discutir a ideia de taxa de variação:

Exemplo 2.2. Um motorista cobra 10 reais por uma corrida mais um adicional de 0,50 centavos por quilometro rodado. Verifica-se que a relação é dada por:

$$y = 10 + 0,5x,$$

onde y é o preço pago e x os quilômetros rodados. Escolhendo x_1 e x_2 aleatoriamente, a taxa de variação é dada por:

$$T = \frac{10 + 0,5x_2 - (10 + 0,5x_1)}{x_2 - x_1} = 0,5.$$

No entanto, quando se deparam com esses tipos de questões, os alunos não sabem que se trata de uma taxa de variação média visto no ensino de Matemática que definiremos a seguir:

Definição 2.1. A Taxa de Variação Média (T_m) da função f no intervalo $[x_1, x_2]$ é o quociente

$$T_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Exemplo 2.3. Seja $s(t) = 2t^2 + 5t - 3$ a função deslocamento, em metros, de um móvel no intervalo de tempo $2 \leq t \leq 5$, dado em segundos. Determine a velocidade média nesse intervalo de tempo. Considerando o intervalo de tempo citado temos que

$$s(2) = 2.(2)^2 + 5.2 - 3 = 15 \text{ metros} \quad \text{e} \quad s(5) = 2.(5)^2 + 5.5 - 3 = 72 \text{ metros}.$$

Assim, $\Delta s = 72 - 15 = 57m$ e $\Delta t = 5 - 2 = 3s$. Logo,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{57}{3} = 19m/s.$$

2.2 Taxa de Variação Instantânea

Considere que um certo móvel se movimenta em linha reta a partir do ponto de repouso, digamos ponto A (repouso), para o ponto B, de modo que em t segundos ele percorre $f(t) = t^2$ metros. Determine a velocidade do móvel após 3 segundos.

Faremos uma tabela com valores próximos e menores ao instante dado para obter intuitivamente a velocidade do móvel.

$t_1(s)$	$v_m = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$
2	$v_m = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{9-4}{1} = 5m/s$
2,5	$v_m = \frac{f(3)-f(2,5}{3-2,5)} = \frac{9-6,25}{0,5} = 5,5m/s$
2,8	$v_m = \frac{f(3)-f(2,8)}{3-2,8} = \frac{9-7,84}{0,2} = 5,8m/s$
2,9	$v_m = \frac{f(3)-f(2,9)}{3-2,9} = \frac{9-8,41}{0,1} = 5,9m/s$
2,99	$v_m = \frac{f(3)-f(2,99)}{3-2,99} = \frac{9-8,9401}{0,01} = 5,99m/s$
2,999	$v_m = \frac{f(3)-f(2,999)}{3-2,999} = \frac{9-8,994001}{0,001} = 5,999m/s$

Construindo uma tabela para valores próximos e maiores que 3 s, temos:

$t_2(s)$	$v_m = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$
4	$v_m = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{16-9}{1} = 7m/s$
3,5	$v_m = \frac{f(3,5)-f(3)}{3,5-3} = \frac{12,25-9}{0,5} = 6,5m/s$
3,2	$v_m = \frac{f(3,2)-f(3)}{3,2-3} = \frac{10,24-9}{0,2} = 6,2m/s$
3,1	$v_m = \frac{f(3,1)-f(3)}{3,1-3} = \frac{9,61-9}{0,1} = 6,1m/s$
3,01	$v_m = \frac{f(3,01)-f(3)}{3,01-3} = \frac{9,0601-9}{0,01} = 6,01m/s$
3,001	$v_m = \frac{f(3,001)-f(3)}{3,001-3} = \frac{9,006001-9}{0,001} = 6,001m/s$

Abordando esse exemplo em sala de aula, o professor deve instigar o aluno a calcular a velocidade média do móvel variando em um intervalo muito pequeno do espaço percorrido ou naquele instante mencionado, reforçando a ideia de "tender "ao instante desejado. Logo, intuitivamente, o aluno verá que a velocidade do móvel no instante $3s$

é $6m/s$. Ou seja, dizer que $v = 6m/s$ quando t tende para 3. Em símbolo, $v = 6m/s$, quando $t \to 3$.

O exemplo visto acima trata-se da velocidade escalar instantânea de um movel, definida a seguir:

Definição 2.2. A velocidade escalar instantânea, denotada por v, num movimento retílineo uniforme no instante t_1 é dada pela expressão da velocidade média

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

quando t_2 tende a t_1, em símbolos, $t_2 \to t_1$, obtendo assim o intervalo de tempo Δt muito pequeno. Considerando $f(t_1) = s_1$ (no instante t_1 temos a distância s_1), $f(t_2) = s_2$ (no instante t_2 temos a distância s_2) e fazendo

$$t_2 = t_1 + \Delta t,$$

obtemos:

$$v = \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t},$$

quando $\Delta t \to 0$.

Definição 2.3. A Taxa de Variação Instântanea de uma função f no ponto x_1 é dado por

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ quando } x_2 \to x_1$$

ou, fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ temos

$$T = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x},$$

quando $\Delta x \to 0$.

Há inúmeras aplicações da taxa de variação inseridas em outras áreas do conhecimento, tais como, física, engenharia e contabilidade. Vejamos:

Exemplo 2.4. A receita de um certo produto é dado pela função $R(q) = q^2 + 500$, onde q a quantidade de unidades a ser comercializada. Encontre a taxa de variação da receita para $q = 50$.

Solução:

$$T = \frac{R(50 + \Delta q) - R(50)}{\Delta q}, \text{ quando } \Delta q \to 0.$$

Pela Definição 2.3, temos:

$$T = \frac{(50+\Delta q)^2 + 500 - (50^2+500)}{\Delta q} = 100 + \Delta q.$$

Quando $\Delta q \to 0$, segue que

$$T = 100 \text{ reais por unidade.}$$

Que na prática significa a taxa com que varia a receita quando a quantidade produzida for $q = 50$ unidades.

Definição 2.4. A derivada de uma função polinomial f, é uma função polinomial denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x, do domínio de f, seja dado por

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0.$$

Observe que a taxa de variação instantânea é a derivada da função no ponto dado. E a partir de agora, utilizaremos o termo derivada para solucionar os problemas propostos.

Exemplo 2.5. Encontre a derivada da função $f(x) = x^2 + 3x + 2$ e determine $f'(2)$.

Solução: Usando a Definição (2.4), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) + 2 - (x^2+3x+2)}{\Delta x} \\
&= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 2 - x^2 - 3x - 2}{\Delta x} \\
&= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} \\
&= \Delta x \left(\frac{2x + \Delta x + 3}{\Delta x} \right) \\
&= 2x + \Delta x + 3.
\end{aligned}$$

Quando $\Delta x \to 0$ segue que

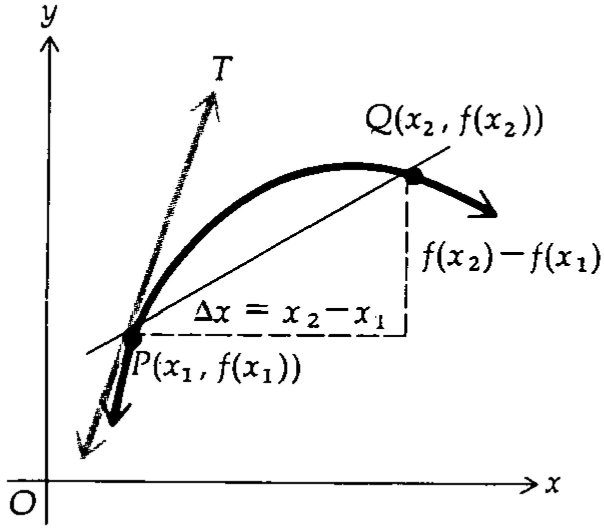
$$f'(x) = 2x + 3.$$

Substituindo $x = 2$ em $f'(x)$, temos:

$$f'(2) = 2.2 + 3 = 7.$$

2.3 Reta Tangente e a Derivada

Outro fator importante é analisar a definição da derivada usando o conceito da inclinação da reta tangente a uma curva. Neste caso, considere dois pontos $P(x_1, f(x_1))$ e $Q(x_2, f(x_2))$ pertencentes ao gráfico de uma função polinomial que representa uma curva. Observe a figura abaixo:



Uma reta que passa por dois pontos de uma determinada curva é denominada reta secante. Assim, a inclinação da reta secante que passa pelos pontos P e Q é dada por:

$$m(\overleftrightarrow{PQ}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$ segue que

$$m(\overleftrightarrow{PQ}) = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Sejam P um ponto fixo e Q um ponto móvel de modo que Q se aproxime cada vez mais de P, ou seja, o deslocamento de Q em direção a P é de tal forma que $\Delta x \to 0$. Desse modo, a inclinação da reta tangente a curva, em símbolos, é a relação:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

quando $\Delta x \to 0$.

Observe que a taxa de variação instantânea é igual a derivada de uma função no ponto, que por sua vez, é o mesmo que o coeficiente da reta tangente.

Além disso, dizemos que uma reta tangente a uma curva é horizontal ao eixo x, ou seja, paralela a esse eixo, quando a derivada da função no ponto x é igual a zero, isto é, $f'(x) = 0$.

Exemplo 2.6. Determine a reta tangente a curva $y = x^2 + 3x + 2$ no ponto $(1, 2)$.

Solução: Pelo exemplo 2.5, temos:

$$f'(x_1) = 2x_1 + 3.$$

E, substituindo $x_1 = 1$ em $f'(x_1)$, temos

$$f'(1) = 5.$$

Portanto, o coeficiente da reta tangente é igual a 5. Usando a equação da reta tangente, dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

em que m é o coefieciente angular da reta, temos:

$$y - 2 = 5(x - 1)$$

Ou seja,

$$y = 5x - 3$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2)$.

Antes de enunciarmos o próximo teorema, podemos ter uma ideia geral da derivada das funções afins e quadráticas.

Seja a função afim definida por $f(x) = ax+b$, em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{a(x+\Delta x) + b - (ax+b)}{\Delta x} \\ &= \frac{ax + a\Delta x + b - ax - b}{\Delta x} \\ &= \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a. \end{aligned}$$

Assim, quando $\Delta x \to 0$, tem-se:

$$f'(x) = a.$$

Considere a função quadrática definida por $f(x) = ax^2+bx+c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} &= \frac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)}{\Delta x} \\
&= \frac{ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x} \\
&= \frac{2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x}{\Delta x} \\
&= 2ax+a\Delta x+b.
\end{aligned}$$

Quando $\Delta x \to 0$ temos:

$$f'(x) = 2ax + b.$$

O teorema a seguir facilitará nossos cálculos na derivação de uma função polinomial de grau maior que 2 e, de forma prática, poderemos usá-lo nos problemas mais adiante.

Teorema 2.1. Se $f(x) = x^n$ é uma função polinomial de grau n, então $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Demonstração. Aplicando a Definição 2.4, temos:

$$f'(x) = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0.$$

Usando o teorema binomial, temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+nx(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n-x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+nx(\Delta x)^{n-1}+(\Delta x)^n}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+nx(\Delta x)^{n-2}+(\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x} \\
&= nx^{n-1}+\frac{n(n-2)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+nx(\Delta x)^{n-2}+(\Delta x)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Quando $\Delta x \to 0$ segue que:

$$f'(x) = n.x^{n-1}.$$

□

Teorema 2.2. Se $f(x) = x^n$ é uma função polinomial e c um número real, então $(cf(x))' = cf'(x)$.

Demonstração. Aplicando a Definição 2.4, temos:

$$\begin{aligned}(cf(x))' &= \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0\\ &= \frac{c\,[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0\\ &= cf'(x).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. (Regra da Soma) Sejam f e g funções polinomiais e $h(x) = f(x) + g(x)$ então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Demonstração. Pela Definição 2.4, temos:

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0\\ &= \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))]}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0\\ &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0\\ &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0\\ &= f'(x) + g'(x).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.4. Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ é uma função polinomial de grau n então

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

Demonstração. Usando a Definição 2.4, e os Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3 respectivamente, chegaremos ao resultado. □

Exemplo 2.7. Dada a função polinomial $f(x) = 5x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - 7$, determine a derivada de f.

Solução: Pelo Teorema 2.4, temos:

$$f'(x) = 5.6x^{6-1} - \frac{1}{5}.5x^{5-1} + \frac{2}{9}.3x^{3-1} - 7.0.$$

Ou seja,

$$f'(x) = 30x^5 - x^4 + \frac{2}{3}x^2.$$

Enunciaremos alguns teoremas referentes a derivada, que são conhecidos como regras de derivação, importantes para o desenvolvimento de certas questões.

Teorema 2.5. (Regra do Produto) Sejam f e g funções polinomiais e $h(x) = f(x).g(x)$. Então:

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Demonstração. Ver [10] pág. 159. □

Exemplo 2.8. Dada a função $f(x) = (2x-3)(5x^2+4x)$. Calcule f'.
Solução: Façamos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-3)^{'}(5x^2+4x) + (2x-3)(5x^2+4x)^{'} \\ &= 2(5x^2+4x) + (2x-3)(10x+4) \\ &= 20x^2 - 14x - 12 \end{aligned}$$

Teorema 2.6. (Regra do Quociente) Sejam f e g funções polinomiais e $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, com $f(x) \neq 0$. Então:

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Demonstração. Ver [10] pág. 160. □

Exemplo 2.9. Dada a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Determine f'.
Solução:

$$f'(x) = \frac{x^2.1^{'} - (x^2)^{'}.1}{[x^2]^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

Teorema 2.7. (Derivada da Função Composta) Sejam f e g funções polinomiais, f' e g' suas respectivas derivadas no ponto x. Então a derivada da função composta $f \circ g$ em x é definida por

$$(f \circ g)^{'}(x) = f^{'}(g(x)).g^{'}(x).$$

Demonstração. Ver [10] pág. 187. □

Exemplo 2.10. Considere as funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = 2x^2+5$. Determine $(f \circ g)^{'}$.
Solução:

$$(f \circ g)^{'}(x) = \left[(2x^2+5)^3\right]^{'} = 3(2x^2+5)^2.(4x) = 12x(2x^2+5)^2.$$

Definição 2.5. Um ponto x_0 no domínio de uma função polinomial f é chamado ponto crítico se $f'(x_0) = 0$.

Aplicando a definição de derivada analisemos o crescimento e decrescimento das funções. Vejamos:

Proposição 2.1. Seja f uma função polinomial definida no intervalo $[a, b]$. Então,

i) Se $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, tem-se que $f(x)$ é crescente no intervalo $[a, b]$.

ii) Se $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$, tem-se que $f(x)$ é decrescente no intervalo $[a, b]$.

Demonstração. Ver [7] pág. 267. □

Exemplo 2.11. Dada a função $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2$. Determinemos:

a) Os pontos em que a reta tangente ao gráfico de g é paralela ao eixo x;

b) o crescimento e decrescimento da função;

c) o esboço do gráfico de g.

Solução: a) Por definição, temos:

$$g'(x) = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = 0.$$

Assim,

$$x = 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Logo, os pontos em que a tangente é paralela ao eixo x são: $x_1 = 0, x_2 = -1$ e $x_3 = -2$. Substituindo cada valor de x na função g temos:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{4}.0^4 + 0^3 + 0^2 = 0 \quad ; \\ f(-1) &= \frac{1}{4}.(-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 = \frac{1}{4} \quad ; \\ f(-2) &= \frac{1}{4}.(-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^2 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Portanto, os pontos são: $(0, 0)$, $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$, $(-2, 0)$.
b) A função g é crescente se $g'(x) > 0$. Então:

$$g'(x) = x(x^2 + 3x + 2) > 0.$$

Logo, a função g é crescente para $x \in (-2, -1)$ ou $x \in (0, +\infty)$.

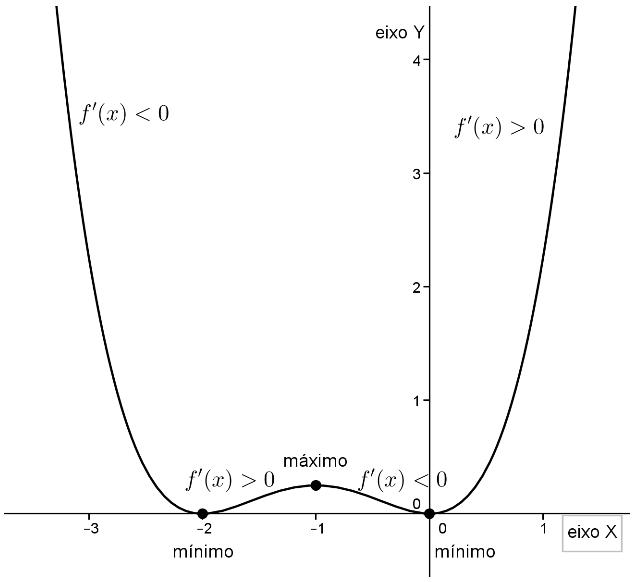
A função g é decrescente se $g'(x) < 0$. Então

$$g'(x) = x(x^2 + 3x + 2) < 0.$$

Portanto, a função g é decrescente para $x \in (-\infty, -2)$ ou $x \in (-1, 0)$.

c) Vejamos a representação dos sinais de $f'(x)$ através da tabela abaixo:

intervalo	sinal de f'	f
$x < -2$	$-$	decrescente
$-2 < x < -1$	$+$	crescente
$-1 < x < 0$	$-$	decrescente
$x > 0$	$+$	crescente



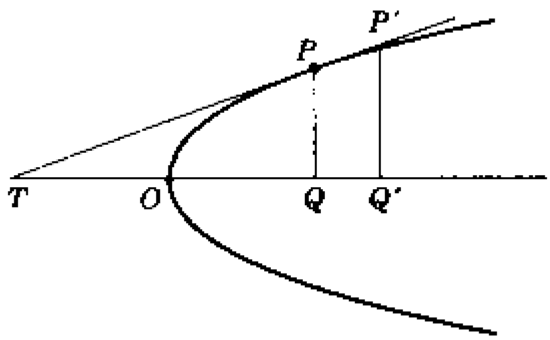
2.4 Fatos Históricos

De acordo com o livro de Boyer (Ver [4]), no início do século XVI que Galileu - Galilei (1564 - 1642) através de fórmulas matemáticas, descreveu as leis dos movimentos. Ele recorreu a linguagem das proporções para explicar suas teorias, considerando que um corpo para percorrer um certo espaço s deve ser gasto um certo tempo t, determinando assim uma relação do espaço dependente do tempo, e com isso, formaliza o teorema da velocidade média que é um exemplo de taxa de variação média.

Nesse mesmo século, Fermat(1601 - 1665) usou o método que consiste em comparar os valores de $f(x)$ e $f(x + E)$, onde E é um valor bem pequeno. Depois igualou dois valores, ou seja, $f(x) = f(x + E)$, pois apesar dos valores serem distintos, na oscilação da curva, a diferença entre os valores são imperceptíveis. Em seguida, dividiu a igualdade por E e fez $E \to 0$. Assim, determinava a taxa de variação instântanea e consequentemente a derivada. Isto é,

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E}.$$

Na época, Fermat não tinha definido o conceito de limite, mas utilizava meios adequados de representar a aproximação, e esse processo de mudança repentina de variável e valores próximos fez despontar a análise infinitesimal. Desenvolveu, na geometria analítica, técnicas de encontrar retas tangentes de expressões polinomiais do tipo $y = f(x)$. Fez o seguinte estudo: Dado um certo ponto $P(a, f(a))$ pertencente a curva podendo obter uma reta tangente a esse ponto considerando outro ponto $P'(a+E, f(a+E))$ pertecente a tangente. Sendo o ponto T a interseção da reta tangente com o eixo x, $\overline{TQ} = c$, $\overline{TQ'} = b$, $Q(a, 0)$ e $Q'(a+E, 0)$, tem-se que os triângulos TPQ e $TP'Q'$ são semelhantes



e daí,

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a+E)}{c+E}$$

Fazendo o produto dos meios pelos extremos e dividindo a igualdade por $c.E$ obtemos

$$\frac{f(a+E)-f(a)}{E} = \frac{f(a)}{c}$$

e fazendo $E \to 0$ obtemos a inclinação da reta tangente. Em outras palavras, calcula-se

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(a+E)-f(a)}{E}$$

Anos depois, o matemático Isaac Newton (1643 - 1727) chegou ao mesmo conceito de Fermat porém de maneira diferente, utilizando a definição de velocidade instantânea.

Capítulo 3

Extremos de uma Função Polinomial

No capítulo 1, vimos que os pontos de máximo ou de mínimo das funções quadráticas são os pontos do vértice, denominados extremos da função. De modo geral, os extremos de uma função polinomial são pontos que maximinizam ou minimizam a função, podendo ser máximos e mínimos absolutos ou relativos. As definições e resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados nas referências [1], [8], [7] e [10].

3.1 Extremos Relativos ou Absolutos

Dada uma função f, estamos interessados em encontrar os números x_0 em seu domínio onde a função atinge os valores $f(x_0)$ mínimos e máximos. Esses números x_0 são denominados pontos extremos de f, enquanto que os valores $f(x_0)$ são denominados valores extremos de f . Assim, quando $f(x_0)$ é valor mínimo, temos que x_0 é denominado ponto de mínimo. Do mesmo modo, quando $f(x_0)$ é valor máximo, temos que x_0 é denominado ponto de máximo. Apresentaremos a definição de extremos, e em seguida, relacionamos a derivada como o caminho para encontrar tais pontos.

Deixar claro para o leitor que:

i) x_0 é o ponto de máximo ou de mínimo da função.

ii) $f(x_0)$ é o valor máximo ou mínimo da função.

iii) o par $(x_0, f(x_0))$ pertencente ao gráfico será chamado ponto máximo ou mínimo da função.

Definição 3.1. Dado um número real x_0, chama-se vizinhança r de x_0 a todos os números x do intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$, em que r é um número real positivo.

Definição 3.2. Se existe uma vizinhança I de x_0 do domínio $D(f) \subset \mathbb{R}$, tal que, para todo $x \in I$, temos $f(x) \geq f(x_0)$, então x_0 é denominado ponto de mínimo relativo ou local de f em I, e $f(x_0)$ é um valor mínimo relativo ou local de f em I.

Seja I uma vizinhança de x_0 do domínio $D(f) \subset \mathbb{R}$. Se, para todo $x \in I$, temos $f(x) \leq f(x_0)$, então x_0 é um ponto de máximo relativo ou local de f em I, e $f(x_0)$ assume um valor máximo relativo ou local de f em I. Ainda, se

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in D(f), \;\; x_0 \text{ é o ponto de mínimo absoluto}$$

e se

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in D(f), \;\; x_0 \text{ é o ponto de máximo absoluto}$$

Os pontos de máximo ou mínimo são chamados de pontos extremos da função.

Definição 3.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Se x_0 for um número do domínio da função f e se $f'(x_0) = 0$, então x_0 será chamado de ponto crítico.

Proposição 3.1. Seja f uma função polinomial definida numa vizinhança de x_0. Se f tiver um ponto de máximo ou de mínimo relativos em x_0 então $f'(x_0) = 0$.

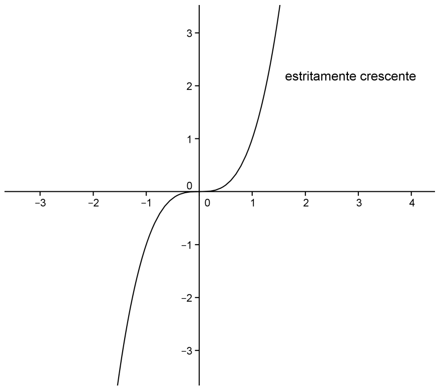
Demonstração. Ver [7] pág 260. □

O próximo exemplo mostra que sendo $f'(x_0) = 0$ não implica que x_0 é um extremo absoluto ou relativo, mostrando que a recíproca da Proposição 3.1 não é verdadeira.

Exemplo 3.1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é estritamente crescente e, desse modo, não possui pontos de máximo e de mínimo, pois se tomarmos um $c \in \mathbb{R}$ podemos sempre achar um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) \leq f(x_0)$. E ainda,

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

confirmando que a função mesmo tendo a derivada nula não possui extremos no ponto $x = 0$.

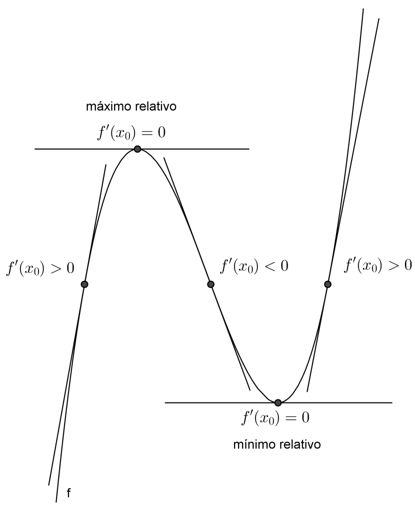


Proposição 3.2. (Critério da Derivada Primeira) Sejam f uma função polinomial definida num intervalo fechado $[a, b] \subset D$ e x_0 um ponto crítico de f.

i) Se f' passa de positiva para negativa em x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.

ii) Se f' passa de negativa para positiva em x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.

iii) Se f' não muda de sinal em x_0 então não tem máximo nem mínimo local em x_0.



Demonstração. Ver [7] pág. 270. □

Exemplo 3.2. Como já vimos, os pontos críticos da função $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2$ são:

$$x = 0 \ , \ x = -1 \ \text{e} \ x = -2$$

Usando a tabela do Exemplo 2.11

intervalo	sinal de f'	f
$x < -2$	$-$	decrescente
$-2 < x < -1$	$+$	crescente
$-1 < x < 0$	$-$	decrescente
$x > 0$	$+$	crescente

e aplicando o critério da derivada primeira, vamos ver que:

$$x = -2 \text{ e } x = 0$$

são pontos de mínimos relativos, pois f' passa de negativo para positivo em $x = -2$ e $x = 0$. Além disso,

$$x = -1$$

é ponto de máximo relativo, pois f' passa de positivo para negativo em $x = -1$.

Antes de enunciar a próxima proposição, devemos observar que se f é uma função polinomial então existe sua derivada denotada por f', denominada derivada primeira, que também é uma função polinomial. Assim, podemos determinar a derivada de f', denotada por f'', denominada derivada segunda.

Proposição 3.3. (Critério da Derivada Segunda) Seja f uma função polinomial definida no intervalo aberto (a, b) e seja $x_0 \in (a, b)$ de modo que $f'(x_0) = 0$. Então,

i) Se $f''(x_0) < 0$, f possui um máximo relativo em x_0;

ii) Se $f''(x_0) > 0$, f possui um mínimo relativo em x_0;

iii) O teste é inconclusivo no caso $f''(x_0) = 0$.

Demonstração. Ver [10] pág. 250. □

Exemplo 3.3. Determine, se existirem, os pontos de máximo e mínimos relativos da função $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 4x + 5$ e esboce o gráfico de f.

Solução: Aplicando o Teorema 2.4, temos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}.4x^3 + \frac{1}{3}3x^2 - 4.2x - 4 = 2x^3 + x^2 - 8x - 4.$$

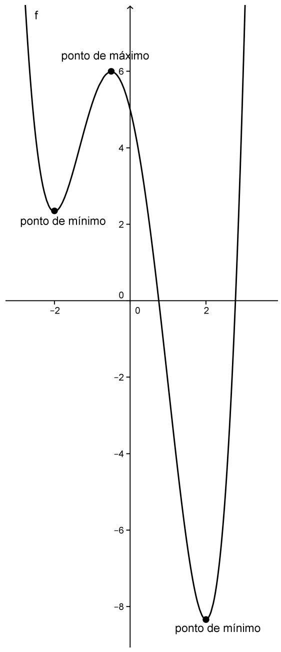
Determinemos os pontos críticos fazendo $f'(x) = 0$. Então:

$$f'(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4 = (x + 2)(2x^2 - 3x - 2) = 0.$$

Obtemos os seguintes pontos críticos: $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$. Encotrando a derivada segunda, temos:

$$f''(x) = 6x^2 + 2x - 8.$$

Aplicando a Proposição 3.3, obtemos:
$f''(-2) = 6.(-2)^2 + 2.(-2) - 8 = 24 - 12 = 12 > 0$. Logo, $x = -2$ é ponto de mínimo.
$f''(-\frac{1}{2}) = 6.(-\frac{1}{2})^2 + 2.(-\frac{1}{2}) - 8 = -\frac{15}{2} < 0$. Logo, $x = -\frac{1}{2}$ é ponto de máximo.
$f''(2) = 6.(2)^2 + 2.2 - 8 = 20 > 0$. Logo, $x = 2$ é ponto de mínimo.



3.2 Fatos Históricos

Sobre Euclides de Alexandria, não há relatos de sua vida nem tão pouco a cidade onde viveu. Segundo Santiago (ver [16]), aponta que nas obras de Euclides, os 13 livros que escreveu aos quais denominaram Os Elementos, aparecem discussões a cerca de problemas relacionados a máximos e mínimos mas, precisamente no livro III, encontramos algumas proposições referentes a círculos, exemplos de problemas de otimização, que naquela época esses termos nem existiam. Eram feitas as demonstrações sem a utilização dos conceitos modernos que hoje conhecemos sobre a derivada, mas usavam as construções geométricas e deduções por absurdo.

Boyer (ver [4]) descreve, entre muitos matemáticos, a importância dos assuntos abordados por Apolônio de Perga (262 - 190 a. C.), que discutiu a respeito de secções cônicas e sobre retas máximas e mínimas a essas curvas, que na verdade eram retas tangentes e normais.

Alguns problemas envolvendo área, volume e geometria plana constavam nos estudos de Claudio Ptolomeu (168 - 90 a. C.) que tinha relação com máximos e mínimos.

E ainda, aponta Boyer (ver [4]), que Fermat, em seus estudos, realizou descobertas importantes, escrevendo dois tratados, um dos quais é denominado Método para achar máximos e mínimos. Nesta obra, verificou que as equações do tipo

$$y = x^n, x \in \mathbb{Z}$$

e sendo n negativo e n positivo geravam curvas denominadas "parábola" e "hipérboles" de Fermat, respectivamente. E, avançando ainda mais, para curvas polinomiais do tipo

$$y = f(x)$$

ele criou um método para determinar os possíveis pontos de máximo e mínimo das funções.

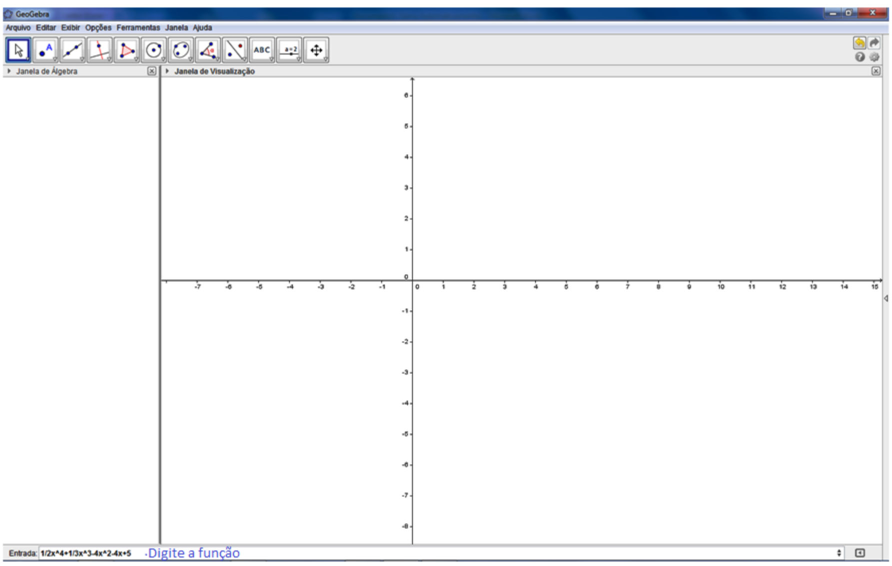
Capítulo 4

Uso do Geogebra

A dinâmica da utilização tecnológica nas aulas de matemática tem facilitado o aprendizado do aluno de maneira siginificativa. O Geogebra é um software que associa o cálculo, a álgebra, a geometria, a construção de gráficos e tabelas, em um só programa. Nesse capítulo, faremos resumidamente um tutorial utilizando o geogeobra para a determinação de extremos de uma função polinomial.

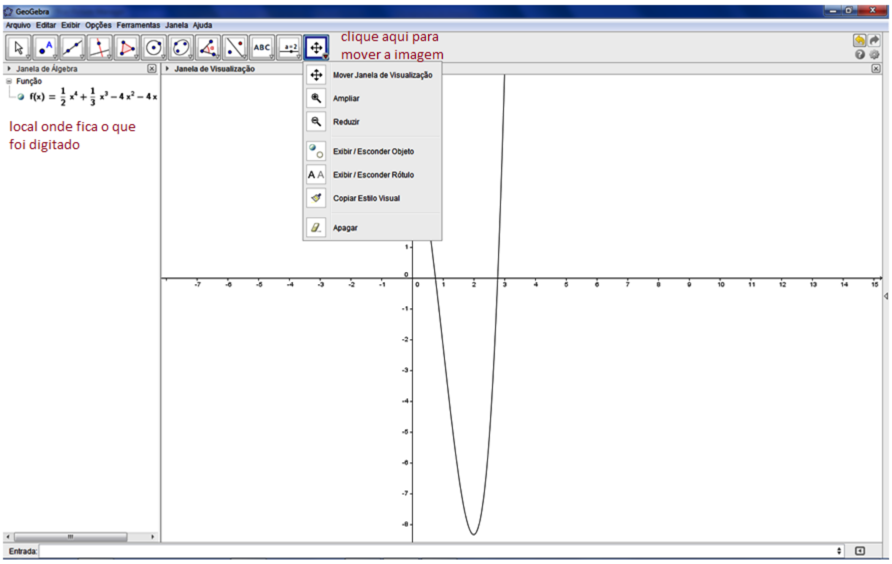
4.1 Construção de Gráficos e Determinação de Extremos

Ao abrir o programa, tem-se um campo de *Entrada*. Nesse local, digita-se a função desejada.

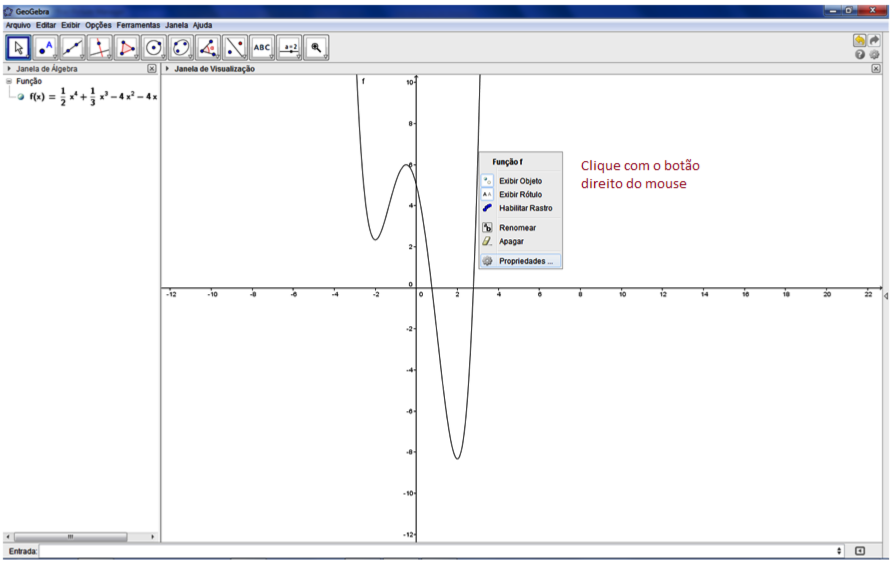


Ao clicar *enter*, o gráfico aparecerá na *Janela de Visualização*. A função que foi digitada ficará na *Janela de Álgebra*. Em seguida, pode-se mover o gráfico, clicando em *Mover*

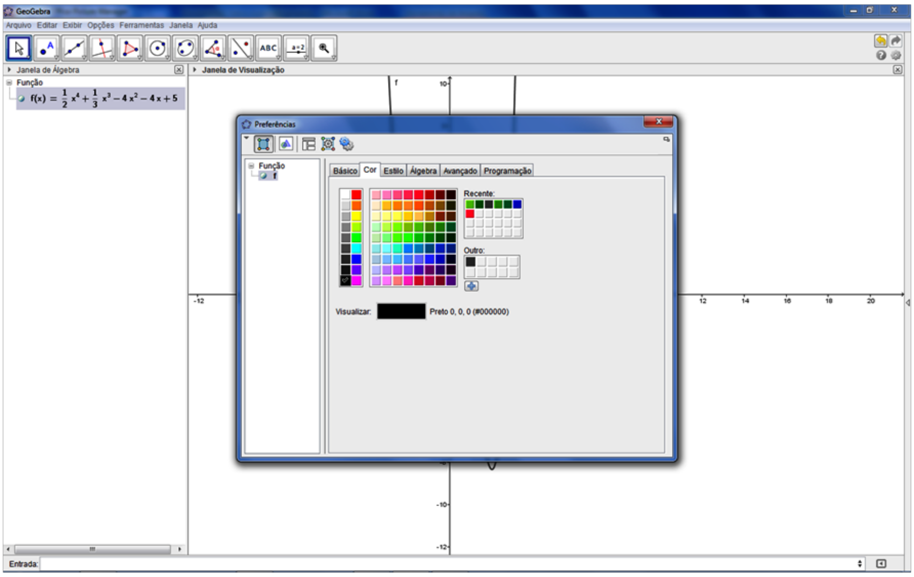
Janela de Visualização.



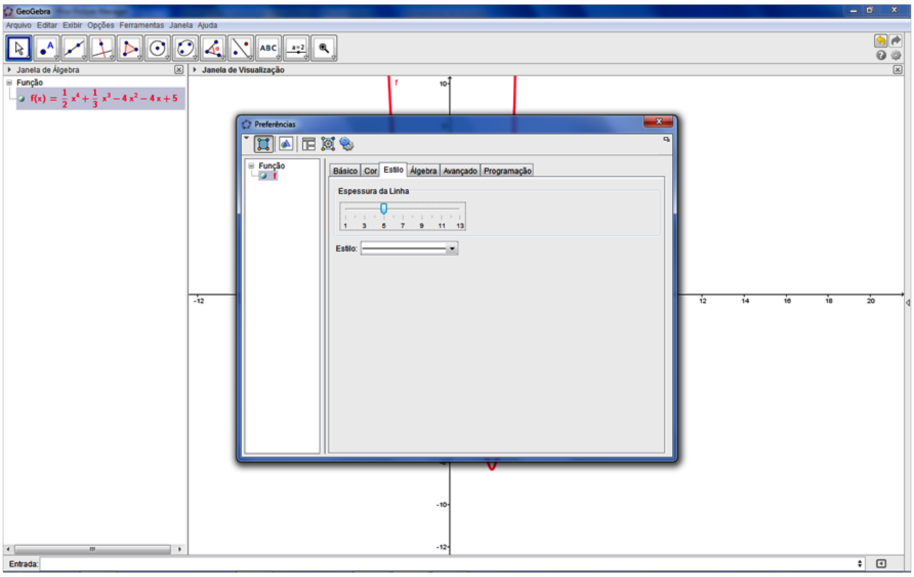
Agora, pode-se alterar as características do grafico quanto a cor, a espessura da linha, entre outros. Com o botão direito do mouse clique na *Janela de Visualização* e clique em *Propriedades*.



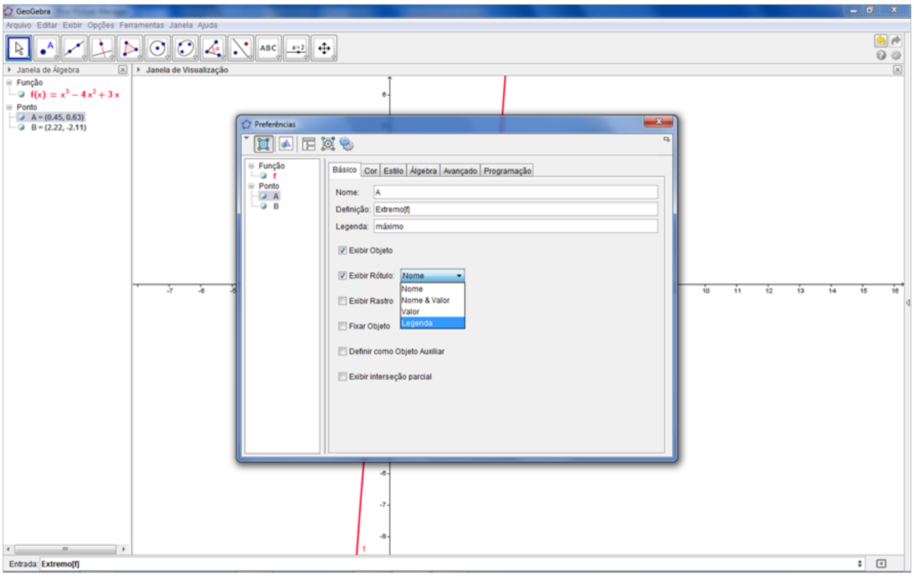
Escolha a cor que desejar para o gráfico.



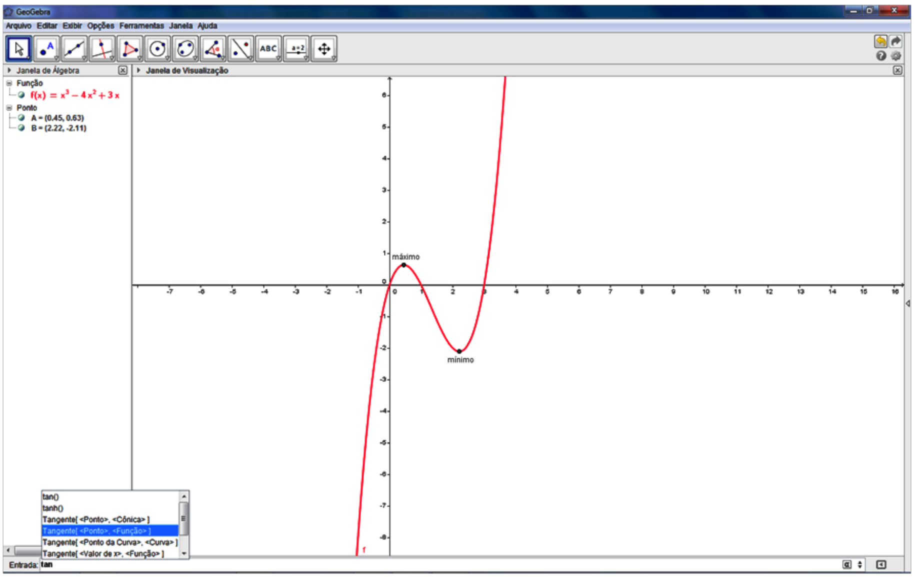
Clicando em *Estilo*, pode-se modificar a espessura da linha do gráfico e também o tipo de tracejado.



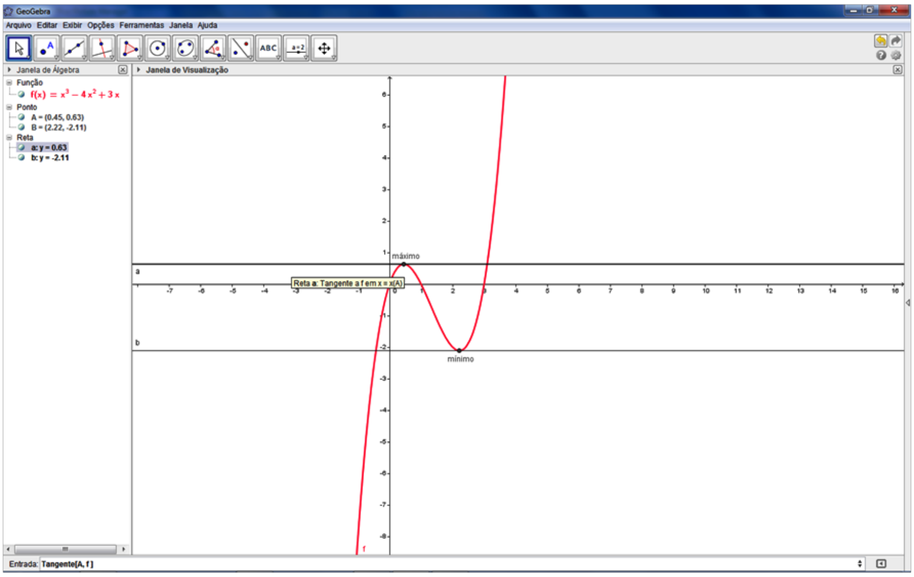
Na *Entrada*, digite *Extremos[f]*. Clique em *Básico*, para dar o nome aos pontos extremos digitando no espaço destinado a *legenda* e depois clicando em *exibir rótulo: legenda*.



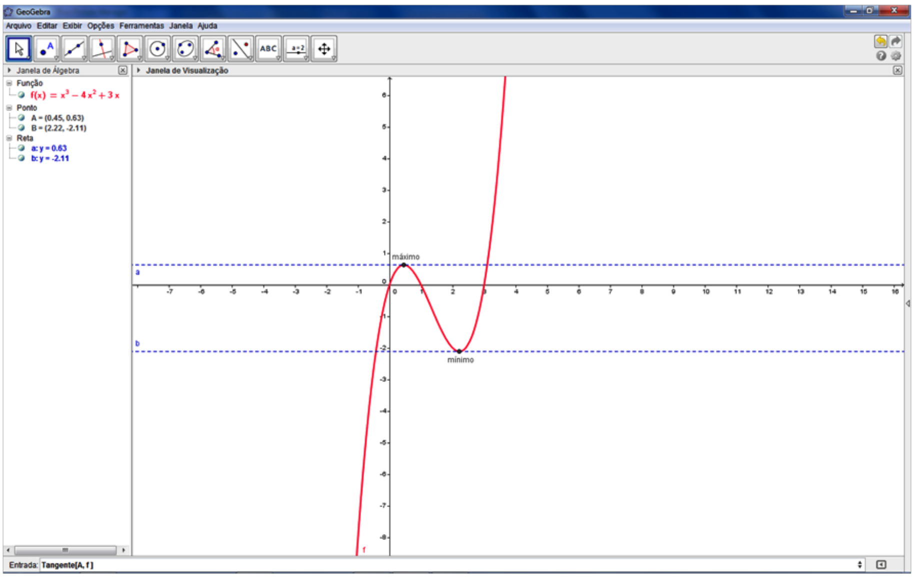
Depois de obter os extremos, máximo e mínimo da função, pode-se construir as retas tangentes a esses extremos. Na *Entrada*, digite *Tangente[<ponto>, <Função>]*, ou seja, *Tangente[A, f]*.



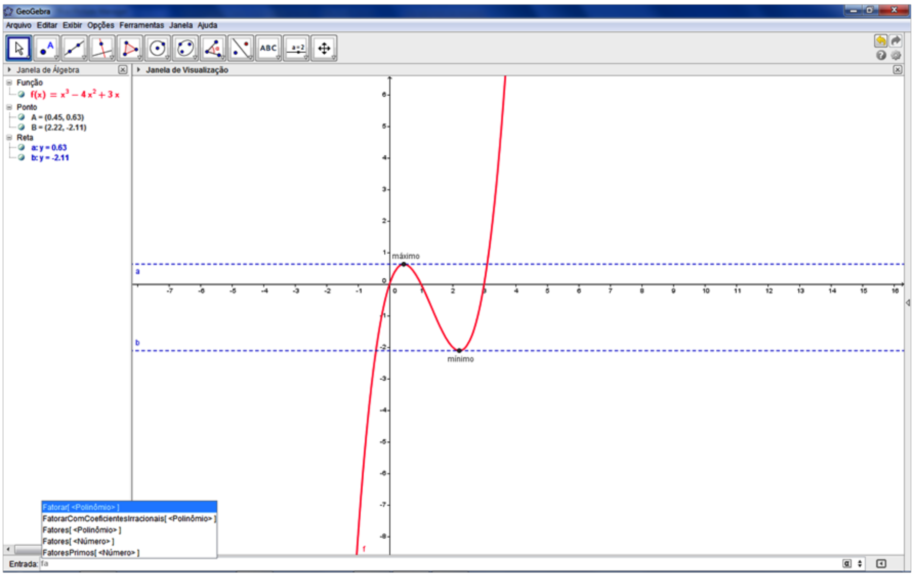
Do mesmo modo, constrói-se a reta tangente ao ponto B.



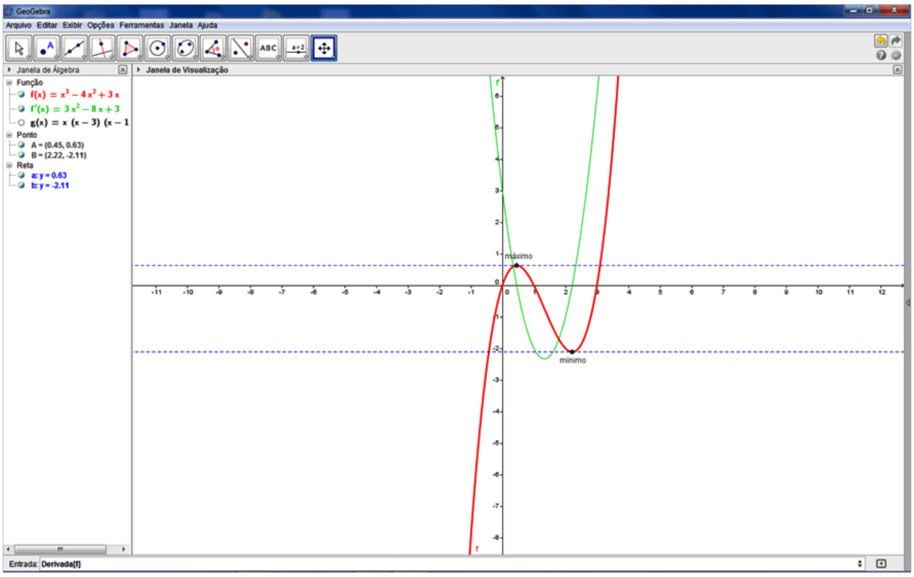
Pode-se alterar a cor e o tracejado das retas tangentes, pelo mesmo processo visto anteriormente. Observe que as equações das retas tangente se encontram na *Janela de Álgebra*.



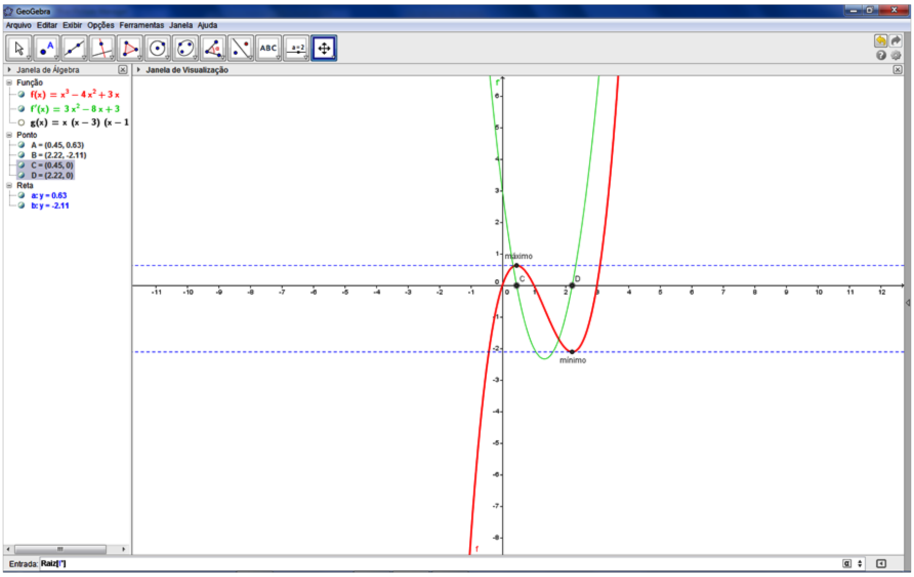
Na *Entrada*, digite *Fatorar[<polinomios>]*. Na janela de álgebra, pode-se ver a forma fatorada do polinômio.



Desejando derivar a função, digite na *Entrada Derivada[f]*.



Encontrando a função f' que representa a derivada da função f, digita-se na *Entrada* $raiz[f']$. E dessa forma, acha-se os pontos extremos da função que são as raízes de f'.


GeoGebra
Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Janela Ajuda
Janela de Álgebra
Janela de Visualização
Função
f(x) = x³ − 4x² + 3x
f'(x) = 3x² − 8x + 3
g(x) = x (x − 3) (x − 1
Ponto
A = (0.45, 0.63)
B = (2.22, -2.11)
C = (0.45, 0)
D = (2.22, 0)
Reta
a: y = 0.63
b: y = -2.11
máximo
mínimo
C
D
f
Entrada: Raiz[f']

Capítulo 5

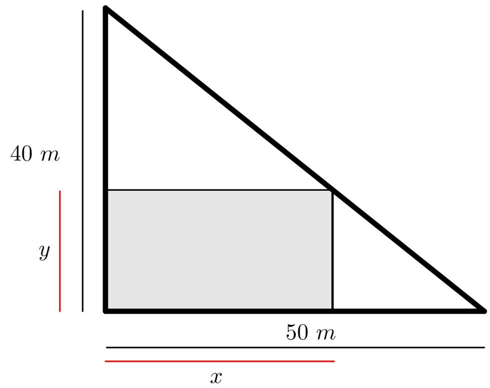
Problemas de Otimização

Os problemas aqui apresentados são relacionados a máximos e mínimos de uma função, com a proposta de resolvê-los usando como suporte de aprendizagem, a modelagem matemática. Analisemos alguns problemas procurando solucioná-los da melhor forma possível, identificando as grandezas relacionadas e os possíveis intervalos para que o problema tenha significado. Dessa forma, as derivadas primeira e segunda da função permitirão encontrar os pontos críticos e ainda obter aqueles que possivelmente são pontos de máximo ou mínimo.

5.1 Problemas Envolvendo Função Quadrática

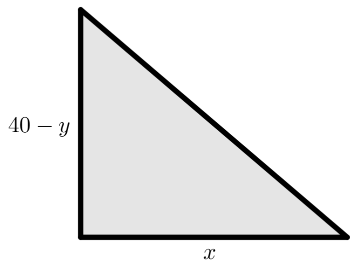
Nessa seção resolveremos alguns problemas envolvendo funções quadráticas usando a modelagem matemática como recurso facilitador, analisando os pontos de máximo e de mínimo os quais estão relacionados ao vértice do gráfico da função quadrática. Tais problemas são mencionados visando adequá-los ao ensino de matemática nas escolas.

Exemplo 5.1. Um certo proprietário de um terreno na forma de um triângulo retângulo, cuja medição dos catetos são $40m$ e $50m$, deseja construir um galpão de forma retangular. Determine as dimensões do galpão cuja a área seja máxima.
Solução: Primeiramente façamos o esboço do desenho indicando cada dimensão do problema proposto.



Sejam x e y as dimensões do galpão a ser construído. Observe que o terreno triangular podemos dividi-lo em três partes:

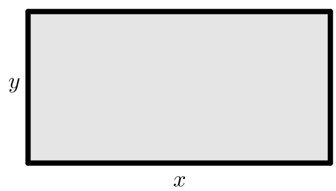
i) O triângulo



cuja área é:

$$A_I = \frac{x.(40-y)}{2} = \frac{40x - xy}{2}.$$

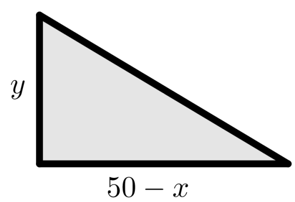
ii) O retângulo



Com área

$$A_{II} = xy.$$

iii) O triâgulo



$$A_{III} = \frac{(50-x).y}{2} = \frac{50y - xy}{2}.$$

Temos que a área total do terreno é

$$A = \frac{50.40}{2} = 1000,$$

então

$$A = A_1 + A_{II} + A_{III}.$$

Ou seja,

$$\frac{40x - xy}{2} + xy + \frac{50y - xy}{2} = 1000,$$

se, e somente se,

$$40x - xy + 2xy + 50y - xy = 2000.$$

Ou seja,

$$40x + 50y = 2000.$$

Simplificando,

$$4x + 5y = 200.$$

Assim,

$$\begin{cases} 4x + 5y = 200 \\ xy = A_{xy} \end{cases}$$

Isolando a variável y, temos

$$y = \frac{200 - 4x}{5}.$$

Substituindo na outra equação teremos algo em função de x:

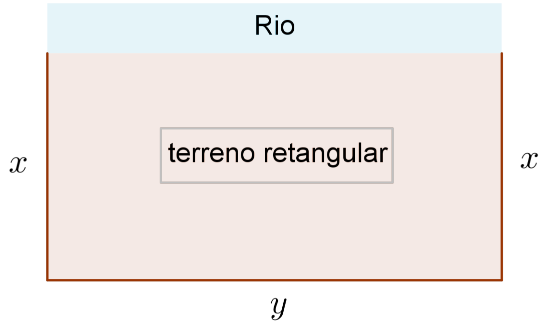
$$x.\left(\frac{200-4x}{5}\right) = \frac{200x - 4x^2}{5} = -\frac{4x^2}{5} + 40x$$

Logo, devemos encontrar o ponto máximo da função $f : 0,50 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{4x^2}{5} + 40x$. Sendo $a = -\frac{4}{5}$, $b = 40$ e $\Delta = 40^2 = 1600$, então:

$$x_V = -\frac{40}{2.\left(-\frac{4}{5}\right)} = 25 \text{ e } y_V = \frac{200 - 4.25}{5} = 20.$$

Portanto, as dimensões são $x = 25m$ e $y = 20m$.

Exemplo 5.2. Deseja-se cercar uma área retangular que está a margem do rio utilizando-se 60 metros de arame com o objetivo de aprisionar alguns animais. Quais são as medidas do retângulo de forma que a área cercada seja a maior possível?



Solução: Sejam x e y as medidas do retângulo. Então:

$$\begin{cases} 2x + y = 60 \\ x.y = A_{xy} \end{cases}$$

Com relação a primeira equação temos $y = -2x + 60$. Substituindo na outra equação segue

$$x.(-2x + 60) = -2x^2 + 60x.$$

Assim, devemos maximizar a função $f : (0, 15) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^2 + 60x$. Usando a fórmula para encontrar o vértice do gráfico da função quadrática, segue que as medidas do retângulo são

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2.(-2)} = 15m \text{ e } y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{3600}{4.(-2)} = 450m.$$

O próximo exemplo consiste em um problema que envolve receita, custo e lucro máximo e que é importante relatar ao aluno o que representam. A receita (R) corresponde ao valor de venda de um determinado produto com o intuito de obter lucro, o custo (C) significa o valor pago pelo produto antes de ser comercializado e o lucro (L) sobre um produto que representa a obtenção de vantagem financeira após a venda do produto com relação ao preço de custo. Ou seja, o lucro é dado por

$$L = R - C.$$

Exemplo 5.3. Um grupo de estudantes alugou um ônibus de 50 lugares para uma viagem turística. A empresa exigiu de cada passageiro 96,00 reais mais 8,00 reais por cada lugar não ocupado. Sabendo que a empresa teve um custo de 200 reais, qual será o número de passageiros e o valor pago por eles para que a empresa tenha lucro máximo?
Solução: Nesse exemplo, sejam x a quantidade de estudantes que ocupará os lugares

no ônibus e y o valor pago por eles. Assim, temos

$$96.x \to \text{o valor pago pelos lugares ocupados}$$

e

$$8.x(50 - x) \to \text{o valor pago pelos lugares vazios.}$$

Assim, o total da receita da empresa é:

$$R(x) = 96x + 8x(50 - x) = 96x + 400x - 8x^2 = -8x^2 + 496x.$$

Então, deve-se maximizar a função quadrática $L : (0, 50] \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(x) = -8x^2 + 496x - 200$$

Logo, calculando o vértice, obtemos

$$x = -\frac{496}{2.(-8)} = 31$$

e

$$y = 7488.$$

Portanto, são 31 estudantes para a empresa ter rentabilidade máxima que é de 7.488 reais.

Para o próximo exemplo, vamos definir o custo médio de uma produção simbolizado por $C_m(x)$ o valor de produção de uma peça de um lote x de peças. Sendo assim, o custo médio de produção é o quociente entre o custo total e o número de unidades produzidas, ou seja,

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Exemplo 5.4. Numa certa empresa, o custo médio da produção de um produto é dado por $C_m(x) = -2x+6+\dfrac{5}{x}$ e a função receita total é dada por $R(x) = -5x^2+30x$ (considere x sendo dado em milhares). Determine o número de produtos a serem produzidos para que se tenha um lucro máximo.

Solução: Nessas condições devemos determinar, a princípio, o custo total da produção. Ou seja,

$$C(x) = x.C_m(x) = x.\left(-2x + 6 + \frac{5}{x}\right) = -2x^2 + 6x + 5.$$

Então

$$L(x) = R(x) - C(x) = (-5x^2 + 30x) - (-2x^2 + 6x + 5) = -3x^2 + 24x - 5,$$

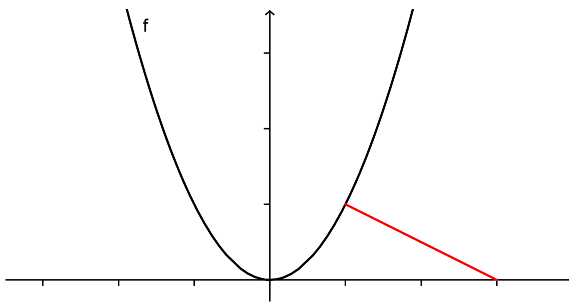
com x no intervalo $[0, \mathbb{R}]$. Logo, calculando x_V do vértice da função L, o número de produtos para a obtenção de lucro máximo na empresa é

$$x = -\frac{24}{2.(-3)} = 4 \text{ milhões.}$$

5.2 Problemas Envolvendo Função Polinomial de Grau Maior que 2

Nesta seção mencionaremos alguns problemas relacionados a funções polinomiais de grau maior ou igual que 2, usando alguns resultados vistos nos capítulos anteriores, como o critério da derivada segunda.

Exemplo 5.5. Encontre a menor distância do ponto (x, y) pentencente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ ao ponto $(3, 0)$.
Solução: Analisemos a figura abaixo:



Sabendo que a distância entre dois pontos (x, y) e (x_0, y_0) é dada por

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

temos:

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}.$$

Como queremos encontrar um valor de x que minimiza a função d façamos a substituição $y = x^2$. Dessa forma, obtemos uma função $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x) = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}.$$

Derivando $d(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$, temos:

$$d'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = 0.$$

Determinado o ponto crítico $x \in \mathbb{R}$, temos

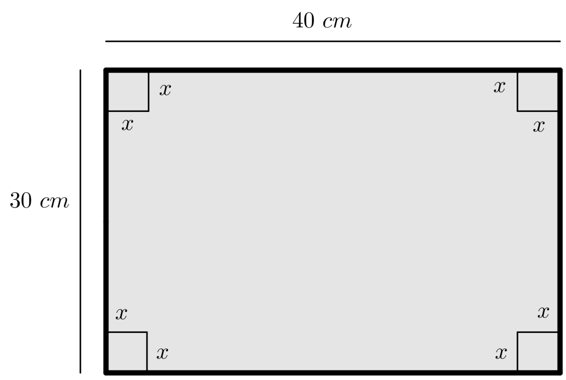
$$x = 1.$$

verificando se o ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo apliquemos o critério da derivada segunda. Assim,

$$d''(x) = 12x^2 + 2 \Rightarrow d''(1) = 14 > 0.$$

Assim, o valor de x que minimiza a função d é $x = 1$ que é o ponto de mínimo.

Exemplo 5.6. Deseja-se construir uma caixa usando uma folha de papelão de $40cm$ por $30cm$ de comprimento. Para isso, retira-se os quadrados referentes a cada canto da folha e dobra-se os lados adequadamente obtendo a caixa. Sem levar em consideração a espessura da folha, determine a dimensão do quadrado para que se tenha uma caixa de volume máximo.
Solução: Façamos o esboço da figura para melhor compreender a questão.



Seja x o lado desse quadrado recortado. A base da caixa é um retângulo cujos lados são $40 - 2x$ e $30 - 2x$ e a altura x. Queremos encontrar x para que o volume V da caixa seja maximizado. Observando as dimensoes da caixa em função da variável x, temos:

$$V(x) = x.(40 - 2x).(30 - 2x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$$

Observe que $0 < 2x < 30$, ou seja, $0 < x < 15$. Para determinar os pontos críticos deteminemos valores de x para $V'(x) = 0$. Assim,

$$V'(x) = 12x^2 - 280x + 1200 = 0$$

Obtemos,

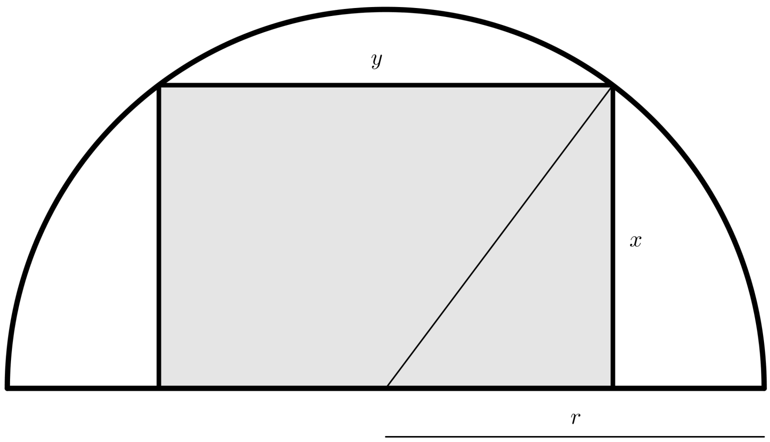
$$x_1 \approx 47,72 \text{ e } x_2 \approx 5,66$$

O valor x_1 não faz parte do intervalo $0 < x < 15$, e assim não pode ser a dimensão da caixa. Usando o teste da derivada segunda, tem-se:

$$V''(x) = 24x_2 - 280 \approx -144,16 < 0 \tag{5.1}$$

E, pela Proposição 3.3, substituindo o ponto x_2 na Equação 5.1, conclui-se que x_2 é o ponto de maximização, e o volume máximo da caixa é de $V \approx 3.032,30cm^3$.

Exemplo 5.7. Determine as dimensões de um retângulo de maior área possível que possa ser inscrito num semicirculo de raio r, considerando que dois de seus vértices estão sobre o seu diâmetro.
Solução:



Sejam as dimensões do retângulo x e y. Considere o triângulo retângulo da figura cuja dimensões são r, x e $\frac{y}{2}$. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2.$$

Assim,

$$y = \sqrt{4(r^2 - x^2)}.$$

A área do retâgulo em função de x é dada por:

$$A(x) = x.\left[\sqrt{4(r^2 - x^2)}\right] = \sqrt{4x^2(r^2 - x^2)}.$$

Assim, obtemos uma função $A : (0, r) \to \mathbb{R}$ definida por $A(x) = 4x^2(r^2 - x^2)$. Determinemos os pontos críticos. Façamos:

$$A'(x) = 8xr^2 - 16x^3 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Como $x = -\frac{r\sqrt{2}}{2}$ não faz parte do domínio, analisemos o valor $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Usando o teste da derivada segunda, obtemos:

$$A''(x) = 8r^2 - 48x^2 \Rightarrow A''\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right) = -16r^2$$

Como $r > 0$, segue que $-16r^2 < 0$. Logo, podemos concluir que $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ é o ponto de máximo e o valor de y será:

$$y = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r\sqrt{2}.$$

Exemplo 5.8. Uma fábrica de bolsas vende mochilas escolares por 50 reais a unidade. Se forem produzidas x mil unidades de mochilas por mês para serem vendidas e é sabido que o custo total da produção mensal é dado por

$$C(x) = \frac{4}{3}x^3 - 30x^2 - 350x - 100$$

então, qual é a quantidade de mochilas produzidas por mês para que a fábrica tenha um lucro máximo?

Solução: Sabemos que

$$L = R - C.$$

Assim,

$$L(x) = 50x - \left(\frac{4}{3}x^3 - 30x^2 - 350x - 100\right) = -\frac{4}{3}x^3 + 30x^2 + 400x + 100.$$

Utilizando o teste da derivada primeira temos:

$$L'(x) = -4x^2 + 60x + 400 = 0.$$

Os pontos críticos encontrados são:

$$x_1 = -5 \text{ e } x_2 = 20.$$

Analisando a tabela abaixo, temos:

intervalo	sinal de f'	f
$x < -5$	$-$	descrescente
$-5 < x < 20$	$+$	crescente
$x > 20$	$-$	decrescente

Usando o critério da derivada primeira, temos que $x_2 = 20$ é o ponto que maximiza a função L. Por outro lado, podemos encontrar a mesma resposta usando o teste da derivada segunda. Assim,

$$L''(x) = -8x + 60.$$

Como $L''(20) < 0$ segue que o ponto crítico $x_2 = 20$ maximiniza a função. Portanto, devem ser produzidas 20 mil mochilas por mês para obter o lucro máximo.

5.3 Fatos Históricos

O relato que temos sobre o primeiro problema de otimização consta no épico poema Eneida escrito por entre os anos 29 - 19 a. C. por Publio Virginio Maronis (70 a. C. - 19 a.C.) e traduzido por Manoel Odorico Mendes (1799 - 1864). Em um trecho (ver [13] a partir da página 28 verso 385), a obra narra a história de Dido, uma mulher favorecida por um rei africano que lhe entregou uma tira de couro de boi para circundar a maior área possível de terras que pudesse e tudo seria seu. Com efeito, Dido pegou sua faca de cabo de ouro e cortou o couro em tiras bem finas e as amarrou e depois circundou a maior área que pode, as margens do oceano, em forma de um semicírculo, construindo nessas terras a cidade de Cartago. Apesar dessa obra ser um poema e narrar a história do herói Virgilio de Eneida, vemos a idéia de um problema matemático caracterizado por relacionar área.

Iezzi (ver [9]) menciona que o matemático Apolonio de Perga (262 - 194 a. C.), conforme o avanço da modernização, utilizou os estudos sobre a parábola feito pelo matemático Menaecumus (por volta de 350 a. C.), discípulo de Platão, como meio de resolução de certos problemas, como , por exemplo, a investigação na trajetória da bala de um canhão, amplamente difundida na obra do matemático italiano Nicollo Tartaglia (1499 - 1557) denominada “Nova Ciência´´, publicada em 1537. Essa obra menciona como conseguir um alcance máximo de uma bala com tiro do canhão.

Considerações Finais

O presente trabalho traz, no fim de alguns capítulos, um breve histórico referente ao tema da dissertação com o intuito de levar o leitor a refletir o assunto, observando que não é algo tão recente, e que desde o século XVII tem sido estudado e analisado por diversos matemáticos, e no Brasil foi colocado como conteúdo do antigo 2º grau ginasial, entre as décadas de 50 e 60, e que atualmente não são citados no ensino médio. O trabalho consiste em uma proposta para o Ensino Médio de resolver problemas de otimização de funções polinomiais de grau maior ou igual a 2 visando reforçar e preparar o aluno para o Ensino Superior, diminuindo as suas dificuldade antes de adentrarem a universidade. Percebe-se a importância da junção da Física com a Matemática para a implantação da derivada e que não é um "bicho de sete cabeças´´ como muitos pensam, e se for exposto de forma coerente e interdisciplinar, os alunos podem acompanhar o raciocínio tendo um aprendizado consistente. Ainda é mencionado algumas definições preliminares que devem ser vistas pelos alunos para que acompanhe no processo de ensino - aprendizagem. Analisando os problemas envolvendo funções quadráticas, quando construir o gráfico, verifica-se que o vértice da parabóla pode ser denominado pelo professor como ponto de otimização, sendo ponto de máximo ou mínimo global e já introduzir os conceitos de tais pontos, mencionando o que seriam máximos e mínimos relativos, através dos conceitos de funções crescentes ou decrescentes. Ainda é posto no trabalho um artifício de ensino, usando a tecnologia como recurso. O Geogebra é um programa que auxilia no desenvolvimento do aluno e na aplicação dos conteúdos ministrado pelo professor, sendo muito útil nas aulas de matemática. E finalizamos o trabalho quando analisamos diversos problemas de otimização sendo viável inserí-los em sala de sala no ensino médio. Corriqueiramente, é no ensino médio que os alunos aprendem o conceito e os diversos tipos de funções, e esses estudos só fazem sentido quando entenderem a definição de função e correlacionarem ao estudo da derivada, associando esses conceitos aos problemas propostos de otimização.

Enfim, ainda não consta nos PCN's essa proposta de inserir no ensino médio a derivada como taxa de variação e os problemas de otimização, mas esperamos que sejam revistos e analisados esses conteúdos matemáticos com a finalidade de reuní-los adequadamente a partir do 1º ano do ensino médio.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Análise Matemática para Licenciatura**. 1ª edição. São Paulo: Edgard Blücher LTDA.

[2] ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. O Ensino de Cálculo no 2º grau. **Revista do Professor de Matemática**,nº 18, SBM, pág. 1-9, 1991.

[3] BIEMBENGUT, Maria Sallet. HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5ª edição. São Paulo: Contexto, 2011.

[4] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. Edgard Blucher, Ed. Universidade de São Paulo,São Paulo, 1974.

[5] DRUCK, Suely. A crise no Ensino de Matemática no Brasil. **Revista do Professor de Matemática**,nº 53, SBM, pág. 3, 2004.

[6] DUCLOS, Robert Costallat. Cálculo no 2º Grau. **Revista do Professor de Matemática**, nº 20, SBM, pág. 26-30, 1991.

[7] FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A**. 6ª edição. São Paulo: PEARSON, 2006.

[8] GIOVANNI, José Ruy/BONJORNO, José Roberto. **Matemática Completa**. Volume 3. 2ª edição. São Paulo: FTD,2005.

[9] IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PÉRIGO, Roberto.ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: Ciências e Aplicações**. Volume 1. São Paulo: Ed. Atual, 2006.

[10] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1. 3ª edição. São Paulo: Harbra, 1994.

[11] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[12] LIMA, E. L. et al - **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 1. Coleção do Professor de Matemática, SBM. 9ª ed. Rio de Janeiro, 2006.

[13] MARONIS, Publio Vigilio. **Eneida**. Tradução: Manoel Odorico Mendes. Versão digital. Projeto Odorico Mendes, Unicamp, 2005.

[14] MORGADO, Augusto César.**Análise Combinatória e Probabilidade** / Augusto César Morgado, João Bosco Pitombeira de Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Pedro Fernandez. 9ª Ed. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

[15] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de Cálculo**. Volume 1. SBM. Rio de Janeiro, 2014.

[16] SANTIAGO. Ana Elisa Esteves. Tese de doutorado: **Evolução Histórica sobre os Problemas de Otimização e o seu Tratamento no Ensino Secundário Português nos Séculos XX e XXI**. Universidade de Salamanca, Salamanca, 2008.