
Geometria euclidiana plana e suas aplicações no
ensino básico

André Luiz Brazão

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

André Luiz Brazão

Geometria euclidiana plana e suas aplicações no ensino básico

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita

USP – São Carlos
Dezembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B634g Brazão, André Luiz
 Geometria euclidiana plana e suas aplicações
 no ensino básico / André Luiz Brazão; orientadora
 Jaqueline Godoy Mesquita. - São Carlos - SP, 2015.
 151 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação
 em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
 Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
 Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

 1. Geometria Plana Euclidiana. 2. Áreas de figuras
 planas. 3. Geogebra. 4. Dobraduras. 5. Geoplano. I.
 Mesquita, Jaqueline Godoy, orient. II. Título.

André Luiz Brazão

Euclidean plane geometry and its applications to basic
education

Master dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
in partial fulfillment of the requirements for the degree
of the Master – Program in Mathematics Professional
Master. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita

USP – São Carlos
December 2015

*Este trabalho é dedicado àqueles que concentraram parte de sua vida a pesquisa,
e de alguma forma contribuíram para a melhoria da existência em nosso planeta.
Em especial, aos que transmitem o conhecimento através dos tempos, o **Professor**.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter guiado meus passos e ter concedido a oportunidade de alcançar grandes objetivos.

Aos meus familiares, que compreenderam as dificuldades enfrentadas durante a vida acadêmica e sempre deram apoio. Em especial, aos meus irmãos Anderson Fernando Brazão e Aline Regina Brazão, aos meus pais Luiz Henrique Brazão e Maria de Fátima Simões Brazão pela estrutura sólida e, principalmente, por mostrar, mesmo sem muito estudo, a importância de estudar desde cedo. À minha noiva Michele Barbin Bodelon, que muito contribuiu para a conclusão deste trabalho e por quem também sou grato pela paciência e apoio.

À minha orientadora Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita, pela sua competência e dedicação e por não ter medido esforços em sua missão.

Aos colegas da turma PROFMAT de Ribeirão Preto que ingressaram em 2013, pelas contribuições e pelo companheirismo de cada um.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação. Em especial, aos professores que ministraram a disciplina de Geometria Plana durante o curso PROFMAT.

À Helena Braga Lopes Ebert, pelo suporte com o latex.

Aos meus alunos da Escola Estadual Professora Dolores Martins de Castro, pela colaboração.

Aos Professores Milton Donizete Dalben e Fernanda Batista, pela colaboração e pela amizade.

Aos membros da banca, Jair Silvério dos Santos, Patricia Hilário Tacuri e Nivaldo Junior pelas colaborações.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro recebido para o desenvolvimento deste trabalho.

*“As invenções são, sobretudo,
o resultado de um trabalho de teimoso.”
(Santos Dumont)*

RESUMO

BRAZÃO, A. L.. **Geometria euclidiana plana e suas aplicações no ensino básico**. 2015. 151 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Este trabalho apresenta os principais conceitos e resultados de Geometria Euclidiana Plana, apresentando as definições básicas, os axiomas, bem como os principais resultados desta teoria. Neste trabalho, apresentamos também diferentes formas de abordar estes conceitos no ensino básico, usando ferramentas tecnológicas (como o geogebra), bem como ferramentas lúdicas (tais como dobraduras e geoplano).

Esta dissertação está dividida em dez capítulos. Os capítulos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 têm como principal finalidade apresentar os principais conceitos e resultados desta teoria. No capítulo 9, apresentamos atividades, utilizando a ferramenta tecnológica geogebra envolvendo os principais conceitos e resultados em geometria plana. As atividades descritas foram realizadas com os alunos da escola Profa. Dolores Martins de Castro, no Departamento de Computação e Matemática da Universidade de São Paulo, campus Ribeirão Preto. No capítulo 10, apresentamos diversas propostas de atividades envolvendo ferramentas lúdicas. As ferramentas utilizadas foram dobraduras e geoplano. Também, estas atividades foram realizadas com os alunos da escola Profa. Dolores Martins de Castro na própria escola.

Este trabalho se apresenta como um roteiro e um material complementar, que poderá ser seguido pelo professor ao longo do ensino básico com propostas pedagógicas para serem aplicadas em sala de aula. Nosso objetivo é oferecer ao leitor um trabalho contextualizado, apresentado de maneira detalhada com diversas ilustrações que pode facilmente ser seguido.

Palavras-chave: Geometria Plana Euclidiana, Áreas de figuras planas, Geogebra, Dobraduras, Geoplano.

ABSTRACT

BRAZÃO, A. L.. **Geometria euclidiana plana e suas aplicações no ensino básico**. 2015. 151 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In this work, we present the main concepts and results of the Euclidean Plane Geometry, presenting the basic definitions, axioms, as well the main results of this theory. Also, we bring some ways to present these concepts in the elementary education, using technological tools (as geogebra) as well ludic tools (such as folding and geoplane).

This dissertation is divided into ten chapters . Chapters 2, 3 , 4, 5 , 6, 7 and 8 are devoted to present the basic concepts and the main results of this theory. In Chapter 9, we present proposals of activities using the technological tool called geogebra which treats about the main concepts and results in Euclidean Plane Geometry. The described activities were made with the students of the school Profa. Dolores Martins de Castro at the Department of Computation and Mathematics of the University of São Paulo, campus Ribeirão Preto. In Chapter 10, we present several proposals for activities using ludic tools. The used tools were folding and Geoplane.

This work is presented as a script, which can be followed by the professor throughout elementary education and presents several pedagogical proposals to be applied in classrooms. Our goal is to offer to the reader a contextualized and didactical approach of the contents, which can be easily followed.

Key-words: Euclidean Plane Geometry, Areas of plane figures, Geogebra, Folding, Geoplane.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Pontos e retas no plano	27
Figura 2 – Posições relativas de ponto e reta no plano	28
Figura 3 – Reta determinada por dois pontos	28
Figura 4 – Semirretas de origem B	29
Figura 5 – Segmento AB	29
Figura 6 – Círculo de centro A e raio r	30
Figura 7 – Regiões do círculo	31
Figura 8 – Cordas(esquerda) e arco formado por corda(direita)	31
Figura 9 – Região não convexa(esquerda) e convexa(direita)	32
Figura 10 – Semiplanos definidos pela reta s	33
Figura 11 – Região angular	33
Figura 12 – Unidade de medida de ângulo: grau	34
Figura 13 – Medida do ângulo \widehat{AOB}	35
Figura 14 – Ângulos complementares	36
Figura 15 – Ângulos suplementares	36
Figura 16 – Ângulos opostos pelo vértice	37
Figura 17 – Retas concorrentes	38
Figura 18 – Retas paralelas	38
Figura 19 – Retas perpendiculares	38
Figura 20 – Retas reversas	39
Figura 21 – Unicidade da reta perpendicular	40
Figura 22 – Tipos de triângulos em relação ao comprimento dos seus lados.	43
Figura 23 – Ângulos internos e externos em um triângulo	43
Figura 24 – Triângulo acutângulo	43
Figura 25 – Triângulo obtusângulo	44
Figura 26 – Triângulo retângulo	44
Figura 27 – Congruência de triângulos	45
Figura 28 – Congruência de triângulos (caso LAL, lado-ângulo-lado)	46
Figura 29 – Congruência de triângulos, caso ALA (ângulo-lado-ângulo)	47
Figura 30 – Demonstração (ALA ângulo-lado-ângulo)	47
Figura 31 – Mediana, bissetriz e altura, respectivamente	49
Figura 32 – Triângulo isósceles e sua mediana relativa a base	49
Figura 33 – Congruência de triângulos, caso LLL (lado-lado-lado)	50

Figura 34 – Ângulo externo em um triângulo	51
Figura 35 – Ângulo externo em um triângulo	52
Figura 36 – Soma dos ângulos internos e o ângulo externo	53
Figura 37 – Reta passando por A e perpendicular a m	54
Figura 38 – P é a intersecção da reta perpendicular a reta m baixada do ponto A	54
Figura 39 – Ângulo oposto ao lado	55
Figura 40 – Ângulo oposto ao lado e suas respectivas medidas	56
Figura 41 – Desigualdade triangular	57
Figura 42 – Se $\hat{1} = \hat{2}$, então m e n são paralelas	59
Figura 43 – As retas m e n ou são paralelas ou coincidentes	59
Figura 44 – As correspondências entre os ângulos de duas paralelas intersectada por uma transversal	60
Figura 45 – Correspondência entre os ângulos correspondentes de duas paralelas intersectada por uma transversal	61
Figura 46 – A soma dos ângulos internos de um triângulo	62
Figura 47 – Ângulo externo de um triângulo e a relação com os ângulos internos	63
Figura 48 – A soma dos ângulos externos de um triângulo	63
Figura 49 – Congruência em triângulo retângulo	65
Figura 50 – Distância entre pontos pertencentes a retas paralelas distintas	66
Figura 51 – As retas m e n ou são paralelas ou coincidentes	67
Figura 52 – Paralelogramo ABC	69
Figura 53 – Paralelogramo e os ângulos opostos	70
Figura 54 – Paralelogramo, lados opostos iguais	71
Figura 55 – Paralelogramo, ponto médio	72
Figura 56 – Paralelogramo	73
Figura 57 – Base média de triângulo	73
Figura 58 – Retas paralelas cortadas por duas transversais	74
Figura 59 – Reta paralela a um dos lados de um triângulo	75
Figura 60 – Retângulo e suas diagonais	78
Figura 61 – Retângulo e suas diagonais	79
Figura 62 – Triângulos Semelhantes	82
Figura 63 – Triângulos Semelhantes: Caso 1	82
Figura 64 – Triângulos Semelhantes: Caso 2	83
Figura 65 – Triângulos Semelhantes: Caso 3	84
Figura 66 – Teorema de Pitágoras	86
Figura 67 – Relação entre raio e corda	87
Figura 68 – Ponto de tangência	88
Figura 69 – Ângulo central	89
Figura 70 – Ângulo inscrito	90

Figura 71 – Ângulo inscrito	91
Figura 72 – Ângulo inscrito	92
Figura 73 – Intersecção de cordas	92
Figura 74 – Tangência	93
Figura 75 – Triângulo inscrito	94
Figura 76 – Circuncentro	95
Figura 77 – Quadrilátero inscrito	95
Figura 78 – Círculo inscrito em um triângulo	97
Figura 79 – Polígono regular inscrito em um círculo	98
Figura 80 – Ortocentro interno	99
Figura 81 – Ortocentro externo	100
Figura 82 – Ortocentro coincidente com o vértice	100
Figura 83 – Encontro das medianas: baricentro	100
Figura 84 – Calculando o comprimento do círculo	102
Figura 85 – Região triangular	105
Figura 86 – Região poligonal	106
Figura 87 – Área do paralelogramo	107
Figura 88 – Área do triângulo	108
Figura 89 – Área de um triângulo equilátero	109
Figura 90 – Teorema de Pitágoras: Demonstração de Euclides	110
Figura 91 – Malha quadriculada	112
Figura 92 – Malha quadriculada para o cálculo da área do círculo	113
Figura 93 – Malha quadriculada pintada	113
Figura 94 – Retas concorrentes	118
Figura 95 – Reta paralela a reta s	118
Figura 96 – Reta perpendicular a reta t	119
Figura 97 – Retas concorrentes	119
Figura 98 – Ângulos opostos pelo vértice (OPV)	120
Figura 99 – Ângulos suplementares e ângulo raso	120
Figura 100 – Ângulo complementar	121
Figura 101 – Triângulo qualquer	121
Figura 102 – Triângulo equilátero	122
Figura 103 – Construção do incentro: Passo 1	123
Figura 104 – Construção do incentro: Passo 2	123
Figura 105 – Construção do incentro: Passo 3	124
Figura 106 – Construção do incentro: Passo 4	124
Figura 107 – Construção do incentro: Passo 5	124
Figura 108 – Construção do incentro: Passo 6	125
Figura 109 – Construção do circuncentro: Passo 1	125

Figura 110–Construção do circuncentro: Passo 2	126
Figura 111–Construção do circuncentro: Passo 3	126
Figura 112–Construção do circuncentro: Passo 4	127
Figura 113–Construção do circuncentro: Passo 5	127
Figura 114–Construção do baricentro: Passo 1	128
Figura 115–Construção do baricentro: Passo 2	128
Figura 116–construção do baricentro: Passo 3	129
Figura 117–Construção do baricentro: Passo 4	129
Figura 118–Construção do baricentro: Passo 5	130
Figura 119–Construção do baricentro: Passo 6	130
Figura 120–Construção do baricentro: Passo 7	131
Figura 121–Construção do baricentro: Passo 8	131
Figura 122–Construção do baricentro: Passo 9	132
Figura 123–Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 1	132
Figura 124–Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 2	133
Figura 125–Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 3	133
Figura 126–Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 4	134
Figura 127–Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 5	134
Figura 128–Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 6	135
Figura 129–O número π : Passo 1	135
Figura 130–O número π : Passo 2	136
Figura 131–O número π : Passo 3	136
Figura 132–O número π : Passo 4	137
Figura 133–O número π : Passo 5	137
Figura 134–Atividade com os alunos	138
Figura 135–Atividade com o geogebra feita com os alunos	138
Figura 136–Construção da perpendicular usando dobraduras: Passo 1	140
Figura 137–Construção da perpendicular usando dobraduras: Passo 2	140
Figura 138–Construção da perpendicular usando dobraduras: Passo 3	140
Figura 139–Construção da mediatriz usando dobraduras: Passo 1	141
Figura 140–Construção da mediatriz usando dobraduras: Passo 2	141
Figura 141–Construção da mediatriz usando dobraduras: Passo 3	141
Figura 142–Construção da bissetriz usando dobraduras: Passo 1	142
Figura 143–Construção da bissetriz usando dobraduras: Passo 2	142
Figura 144–Construção da bissetriz usando dobraduras: Passo 3	143
Figura 145–Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 1	143
Figura 146–Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 2	144
Figura 147–Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 3	144
Figura 148–Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 4	144

Figura 149–Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 5	144
Figura 150–Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 6	145
Figura 151–Atividade envolvendo dobraduras em sala de aula	146
Figura 152–Atividade com dobraduras em sala de aula	146
Figura 153–Atividade com o geoplano em sala de aula	149
Figura 154–Atividade com o geoplano em sala de aula	149

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	RETAS, CÍRCULOS E ÂNGULOS	27
2.1	Círculo	29
2.2	Ângulos	32
2.2.1	<i>Tipos de Ângulos</i>	35
2.3	Retas	37
3	TRIÂNGULOS	41
3.1	Congruência	44
4	PARALELISMO	51
5	QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS	69
5.1	Paralelogramo	69
5.2	Retângulo	77
5.2.1	<i>Losango</i>	77
5.2.2	<i>Quadrado</i>	79
6	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS	81
7	CÍRCULO	87
8	ÁREAS	105
9	O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA	115
9.1	Atividade Pedagógica	116
9.1.1	<i>Atividade 1: Construção do Triângulo, Incentro e inscrição da circunferência</i>	122
9.1.2	<i>Atividade 2: Triângulo, Circuncentro e Circunscrição da circunferência</i>	125
9.1.3	<i>Atividade 3: Triângulo, Medianas e Baricentro</i>	127
9.1.4	<i>Atividade 4: Demonstração do Teorema de Pitágoras</i>	130
9.1.5	<i>Atividade 6: O Número π</i>	131
9.2	Considerações e análise do uso desta ferramenta	133
10	O LÚDICO NO ENSINO DA GEOMETRIA	139

10.1	Geometria e dobraduras	139
10.2	Geometria e geoplano	146
	REFERÊNCIAS	151

INTRODUÇÃO

A palavra Geometria vem do grego *geometrein* que significa *medição de terra*. Acredita-se que a motivação para o início do estudo da geometria surgiu da necessidade de refazer a demarcação dos campos, perdida durante as enchentes anuais do rio Nilo, e também, para a cobrança de impostos de acordo com o tamanho das terras, evidenciando que o estudo da geometria pode ter começado com os antigos egípcios. Entretanto, apesar destes indícios, não se tem certeza de quando exatamente a geometria começou a ser explorada e estudada pelas civilizações antigas. A única certeza que se tem é que a humanidade sempre esteve em contato com as mais variadas formas geométricas, desde as mais remotas pinturas nas cavernas que exibiam os mais diferentes formatos geométricos até as construções sofisticadas feitas pelas civilizações antigas.

A geometria também sempre esteve presente na natureza, preenchendo as mais diversas paisagens do globo terrestre com diferentes formatos geométricos. O espaço também sempre exibiu as mais variadas formas geométricas, inspirando artistas e poetas em todas as eras.

Devido a isso, este ramo da matemática exerceu forte influência nas civilizações em todos os períodos e foi crucial para o desenvolvimento tecnológico que estamos inseridos. Entretanto, apesar de toda sua importância na história da humanidade e nos dias atuais, este tópico não tem despertado a atenção dos alunos em sala de aula e nem tem sido abordado de maneira eficaz na maior parte das escolas. Isto acontece, pois a geometria é um tópico que exige bastante abstração e percepção geométrica para uma boa compreensão dos conceitos e das propriedades e, portanto, o seu ensino não pode estar limitado apenas ao quadro negro e giz, como acontece atualmente. O professor tem que aliar a estes materiais recursos lúdicos e computacionais para garantir um melhor aprendizado e formação de seus alunos.

Portanto, é de suma importância procurar ferramentas adicionais que possam auxiliar na abordagem do conteúdo, na consolidação dos conceitos e resultados estudados em sala de aula. Além disso, é necessário que o professor consiga trazer o conteúdo ensinado para a

realidade do aluno, conseguindo motivá-lo sobre os tópicos estudados e fazendo ele compreender a importância destes. Dentro desta perspectiva e considerando a era tecnológica que estamos inseridos, o uso de ferramentas tecnológicas para abordar os conteúdos em sala de aula tem se mostrado bastante eficaz nesta tarefa, conseguindo atrair a atenção dos alunos e suprir grande parte das deficiências encontradas em sala de aula.

Com este intuito, propomos neste trabalho diversas atividades para serem realizadas com os alunos utilizando o software *geogebra*. Todas as atividades propostas aqui foram realizadas com os alunos da escola estadual Profa. Dolores Martins de Castro no Departamento de Computação e Matemática da Universidade de São Paulo, campus Ribeirão Preto no dia 04 de Novembro de 2014. No total, foram realizadas cinco atividades distintas, que aconteceram no mesmo dia. A primeira delas foi sobre a construção do triângulo, do incentro e a inscrição da circunferência, a segunda atividade foi sobre a construção do circuncentro e a circunscrição da circunferência, a terceira atividade, por sua vez, apresentou a construção do baricentro e da mediana, enquanto que a atividade 4 propôs uma demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando *geogebra*. Por fim, nossa última atividade apresentou uma proposta para a construção do número π . No capítulo 9, descrevemos detalhadamente cada uma das atividades propostas aos alunos, ensinando passo-a-passo a construção realizada em cada atividade. Também, ao final, fizemos uma breve análise da atividade realizada, mostrando os benefícios obtidos com a atividade e também, como esta atividade impactou no aprendizado dos tópicos estudados pelos alunos.

Além disso, apresentamos também propostas de atividades utilizando ferramentas lúdicas tais como dobraduras e geoplano para o ensino da Geometria Euclidiana Plana. Estas atividades foram realizadas com os alunos da 1ª série do ensino médio da escola estadual Profa. Dolores Martins de Castro, na própria escola. Estas atividades foram realizadas com o objetivo de motivar os alunos com relação aos tópicos estudados e também, potencializar o aprendizado dos conteúdos abordados, permitindo uma maior interação entre os alunos, de modo que a possibilitar uma troca de experiência e conhecimento entre eles.

Inicialmente, propomos quatro atividades envolvendo dobraduras. A primeira delas foi a construção de uma reta perpendicular que passa por um ponto fora da reta, enquanto que na segunda, propomos a construção da mediatriz de um segmento de reta qualquer. Na atividade 3, por sua vez, apresentamos a construção da bissetriz de um ângulo e, por fim, a última atividade propôs a construção de um triângulo equilátero. Todas as construções foram feitas usando dobraduras e foram retiradas da referência (CARNEIRO; SPIRA, 2014). Após cada atividade, o professor explicou a dobradura realizada e os conceitos geométricos que estavam por trás das construções feitas. No capítulo 10, apresentamos cada atividade proposta passo-a-passo, bem como fazemos uma análise desta atividade realizada em sala de aula e sobre seus benefícios no aprendizado dos alunos.

Também, realizamos atividades envolvendo uma ferramenta lúdica conhecida como

geoplano. Esta ferramenta é muito poderosa para ser utilizada em sala de aula, pois ela permite que os alunos visualizem as construções geométricas que estão sendo realizadas, bem como possibilita a construção das mais variadas figuras geométricas. Além disso, é uma ferramenta lúdica que não possui um custo elevado, sendo portanto acessível para ser utilizada em sala de aula. No capítulo 10, apresentamos dez propostas de exercícios para serem realizados em sala de aula com o uso do geoplano, para estudar perímetro de figuras planas, convexidade e não convexidade de figuras, áreas das figuras, diagonais, dentre outros. A atividade proposta foi realizada com os alunos da 1ª série do ensino médio da escola estadual Profa. Dolores Martins de Castro, na própria escola. No capítulo 10, apresentamos também uma análise sobre os benefícios da atividade no aprendizado dos alunos.

Além das diversas propostas de atividades que citamos acima, a dissertação também apresenta uma fundamentação teórica bastante rica e aprofundada sobre vários tópicos importantes da Geometria Euclidiana Plana. Os capítulos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 são dedicados a apresentarem os principais conceitos e resultados desta teoria. As principais referências utilizadas nesta tarefa foram (BARBOSA, 2012; DOLCE; POMPEO, 1997; NETO, 2010). O capítulo 2 é dedicado ao estudo de retas, círculos e ângulos. O capítulo 3 apresenta diversas propriedades sobre os triângulos e trata sobre os diferentes casos de congruência, o capítulo 4 apresenta uma abordagem sobre paralelismo. Neste capítulo, foram demonstrados vários resultados importantes tais como Teorema do Ângulo Externo, Desigualdade Triangular, dentre outros. O capítulo 5 trata sobre os quadriláteros notáveis. Nele, apresentamos a definição do paralelogramo, bem como suas principais propriedades e, além disso, apresentamos também os casos particulares de paralelogramos mais conhecidos, como é o caso do retângulo, losango e quadrado. O capítulo 6, por sua vez, é dedicado ao estudo de semelhança de triângulos e traz também a demonstração do Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos. No capítulo 7, o principal objetivo é o estudo do círculo e suas principais propriedades. Também, neste capítulo, estudamos figuras inscritas e circunscritas. Por fim, o capítulo 8 é dedicado ao estudo de áreas de figuras planas. Neste capítulo, também apresenta-se uma demonstração do Teorema de Pitágoras, usando áreas de figuras planas. Esta demonstração é a mesma encontrada no livro “Os elementos” de Euclides.

Todas as figuras apresentadas na dissertação foram inspiradas nas figuras das referências (BARBOSA, 2012; DOLCE; POMPEO, 1997; GASPAR, 2006; NETO, 2010; CARNEIRO; SPIRA, 2014), bem como a maioria das demonstrações dos resultados apresentados aqui foram retiradas das referências (BARBOSA, 2012; DOLCE; POMPEO, 1997; NETO, 2010). Entretanto, nesta dissertação, procuramos justificar mais detalhadamente as demonstrações encontradas, bem como algumas delas foram feitas usando argumentos diferentes. Além disso, alguns resultados que não foram provados nas referências acima, tiveram suas demonstrações apresentadas aqui.

Este trabalho se apresenta como um roteiro e um material complementar, que poderá ser seguido pelo educador ao longo do ensino básico com propostas pedagógicas para serem aplicadas em sala de aula. Nosso objetivo é oferecer ao leitor um trabalho contextualizado,

apresentado de maneira detalhada com diversas ilustrações que pode facilmente ser seguido.

RETAS, CÍRCULOS E ÂNGULOS

Neste capítulo, vamos apresentar os conceitos básicos de Geometria Euclidiana Plana. Nossas principais referências foram os livros (BARBOSA, 2012; DOLCE; POMPEO, 1997; NETO, 2010).

Partiremos do pressuposto que as notações de ponto, reta e plano são conhecidas como na referência (NETO, 2010). A notação que adotaremos aqui será a seguinte: letra maiúscula do nosso alfabeto para denotar os pontos, letra minúscula do nosso alfabeto para denotar as retas, letra minúscula do alfabeto grego para denotar os planos.

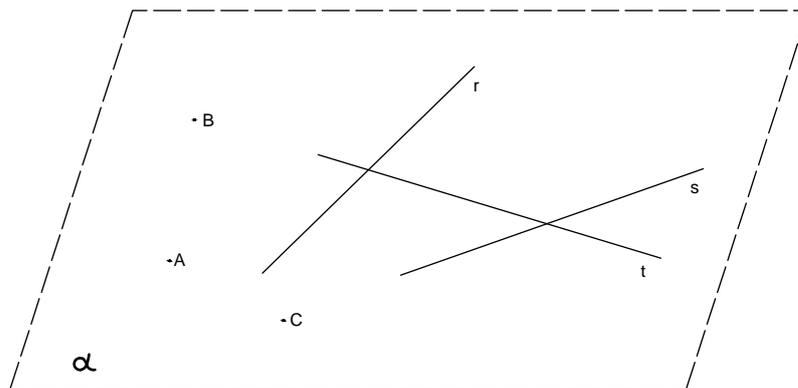


Figura 1 – Pontos e retas no plano

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 1, representamos os pontos C , B e A e as retas t , r e s no plano α . Um plano é constituído por infinitas retas e as retas, por sua vez, são constituídas por infinitos pontos. Dados no plano, um ponto A e uma reta r , só existem duas possibilidades: ou o ponto A pertence à reta r ou não. A figura 2 ilustra essa situação. Veja, por exemplo, que $A \in r$ (lê-se A pertence a r) e $B \notin r$ (lê-se B não pertence a r) na figura 2.

Além disso, iremos admitir que por dois pontos distintos, podemos traçar uma única reta,

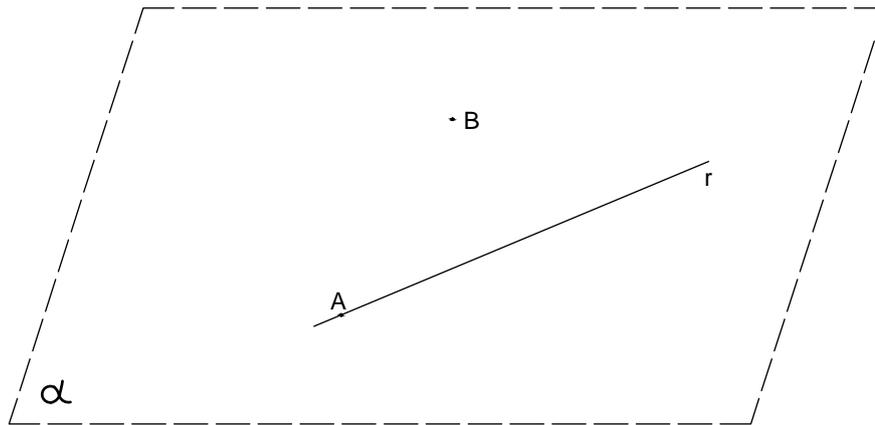


Figura 2 – Posições relativas de ponto e reta no plano

Fonte: Elaborada pelo autor.

ou seja, dados dois pontos distintos A e B , a reta determinada por estes dois pontos é única e denotaremos esta reta por $r = \overleftrightarrow{AB}$, conforme ilustrado na figura 3.

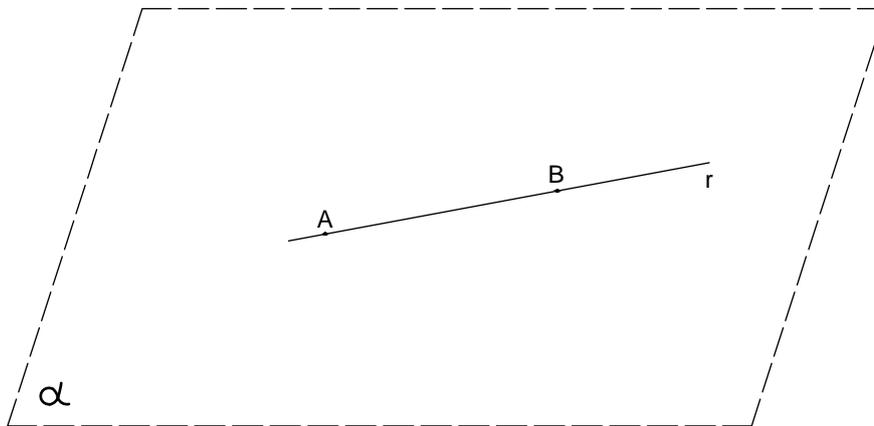


Figura 3 – Reta determinada por dois pontos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 1. Um ponto sobre uma reta a divide em duas partes e cada parte será chamada de **semirreta**.

Portanto, pela definição acima, dados três pontos distintos A , B e C em uma reta qualquer e supondo que B é um ponto que esteja entre os pontos A e C , podemos construir duas semirretas ambas com origem no ponto B . Denotaremos estas semirretas por \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} . A figura 4 descreve as semirretas \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .

Sejam A e B dois pontos distintos pertencentes a reta r , definiremos o **segmento** AB como sendo o conjunto de todos os pontos de A até B pertencentes a reta r , sendo A e B as

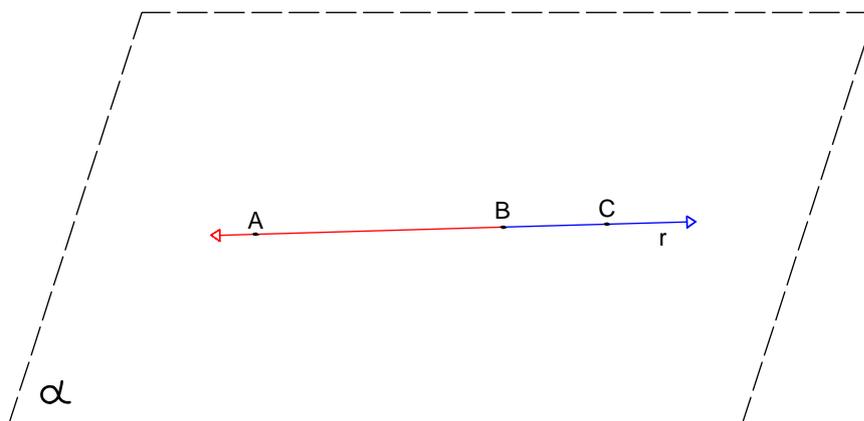


Figura 4 – Semirretas de origem B

Fonte: Elaborada pelo autor.

extremidades do segmento, como mostra a figura 5 abaixo. A notação que usaremos para denotar um segmento será AB . Por outro lado, usaremos \overline{AB} para denotar o comprimento do segmento AB .

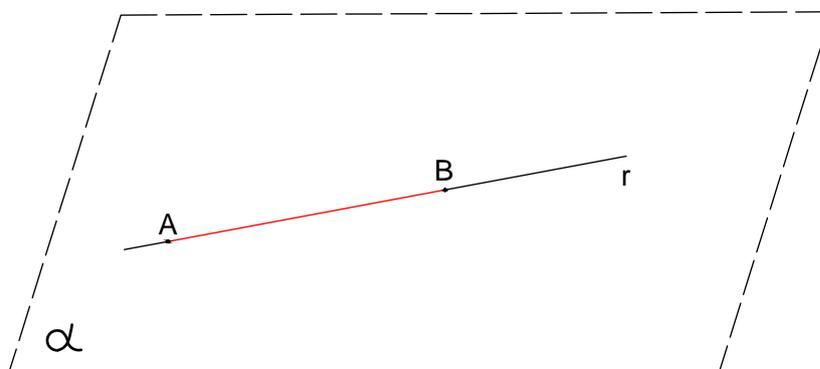


Figura 5 – Segmento AB

Fonte: Elaborada pelo autor.

A **distância** entre dois pontos A e B no plano é igual ao comprimento do segmento AB , ou seja, $d(A, B) = \overline{AB}$. Portanto, pela definição de distância entre dois pontos A e B , vemos que se eles não forem coincidentes, então $d(A, B) > 0$.

2.1 Círculo

Nesta seção, vamos apresentar a definição do círculo e algumas de suas principais propriedades. Todas as propriedades e definições apresentadas a seguir podem ser encontradas

em (BARBOSA, 2012).

Definição 2. Dados um ponto A no plano e um comprimento $r > 0$, definiremos o **círculo** de centro em A e raio r como o conjunto constituído por todos os pontos C do plano tais que $\overline{AC} = r$.

A notação que usaremos para denotar o círculo será letra maiúscula do alfabeto grego. Por exemplo, $\Pi(A, r)$, indicará o círculo de centro A e raio r . Veja a figura 6 para uma representação do círculo.

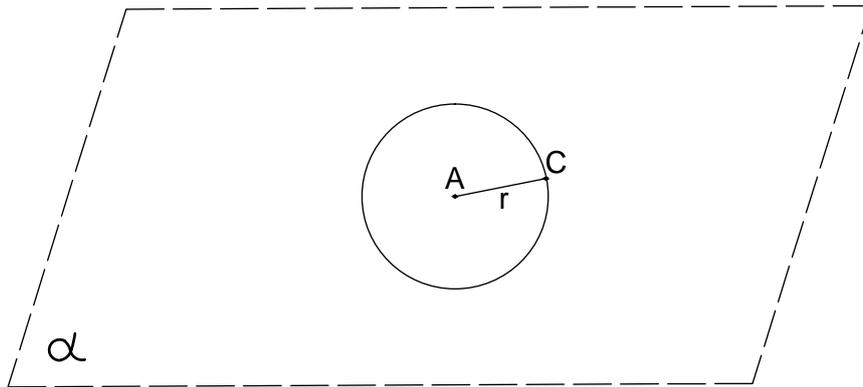


Figura 6 – Círculo de centro A e raio r

Fonte: Elaborada pelo autor.

O círculo divide o plano em duas regiões, uma limitada (interior do círculo) e outra ilimitada (exterior do círculo). Para analisarmos se um dado ponto B é interno ou externo a um círculo conhecido, basta verificarmos se a distância deste ponto B até o centro é maior ou menor ao raio r . Se a distância do centro até B for menor que o comprimento do raio, então concluímos que B é um ponto interno ao círculo. Caso contrário, B é dito um ponto externo ao círculo. Por outro lado, se a distância deste ponto B até o centro for igual ao raio r , então diremos que B pertence ao círculo. Na figura 7, note que B é interno ao círculo e B' é externo ao círculo, enquanto C é um ponto pertencente ao círculo.

A seguir, apresentaremos a definição de um elemento muito importante do círculo, a corda.

Definição 3. Dado um círculo Π de centro C e raio r , todo segmento que une dois pontos distintos de Π será chamado de **corda**. A corda de um círculo quando passa pelo centro recebe o nome de **diâmetro**.

Note que o diâmetro de um círculo possui o dobro do comprimento do raio deste círculo e que toda corda divide o círculo em dois arcos. Se a corda não coincidir com o diâmetro, então ela divide o círculo em um arco menor e um arco maior. Caso contrário, os arcos possuem o mesmo comprimento.

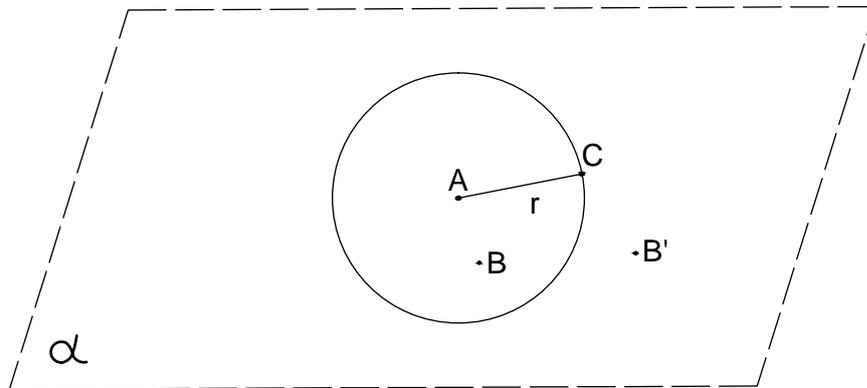


Figura 7 – Regiões do círculo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 8 abaixo, temos três cordas representadas na figura da esquerda, denotadas por AB , DE e EE' .

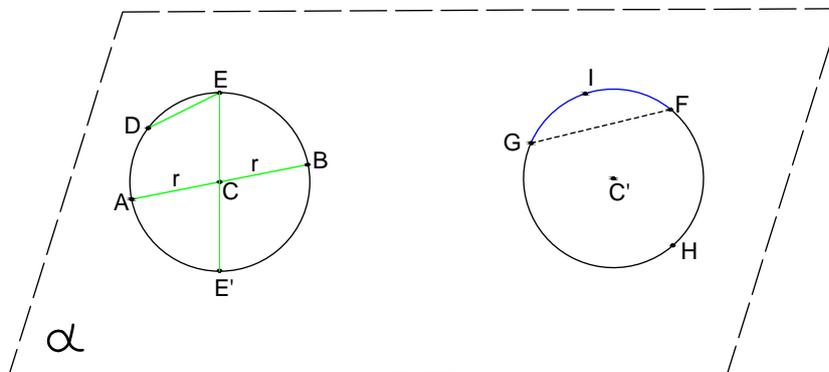


Figura 8 – Cordas(esquerda) e arco formado por corda(direita)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que AB e EE' também são diâmetros do círculo da esquerda, pois as cordas AB e EE' passam pelo centro C . Desta forma, notamos que o círculo pode ter vários diâmetros distintos, ou seja, várias cordas distintas passando pelo centro C . Ainda com relação a figura 8 (figura da direita), temos o arco menor \widehat{GF} que passa pelo ponto I e que pode ser denotado por \widehat{GIF} e o arco maior \widehat{GF} que passa por H e que pode ser denotado por \widehat{GHF} .

2.2 Ângulos

Nesta seção, apresentaremos a definição de ângulo e suas principais propriedades. Todas as definições e propriedades apresentadas aqui podem ser encontradas em (BARBOSA, 2012). Para isso, iniciaremos apresentando a definição de região convexa e não convexa.

Definição 4. Diremos que uma região δ do plano é **convexa** quando para todos os pontos $A, B \in \delta$, tivermos $AB \in \delta$. Caso contrário, diremos que δ é uma região **não convexa**.

A figura 9 traz a representação de uma região convexa e outra não convexa. Uma região δ é, portanto, dita **não convexa** quando podemos escolher dois pontos $A, B \in \delta$ tal que exista pelo menos um ponto pertencente a AB que não pertença a região δ .

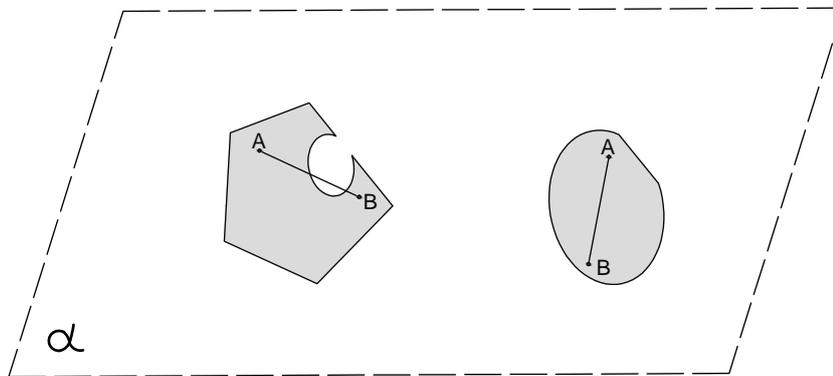


Figura 9 – Região não convexa(esquerda) e convexa(direita)

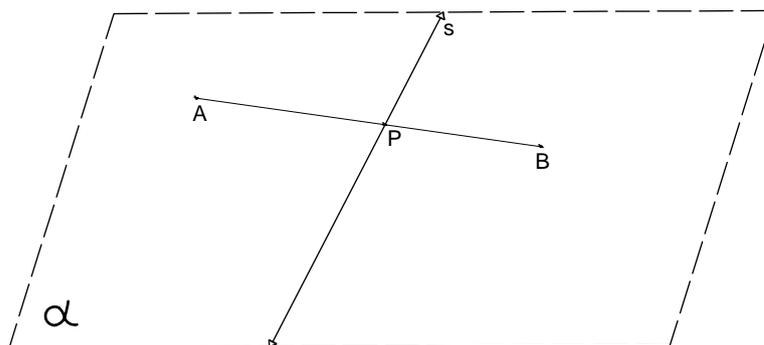
Fonte: Elaborada pelo autor.

Se existe uma reta s pertencendo a um plano α , então essa reta divide o plano em duas regiões convexas, e cada região recebe o nome de **semiplano** e são delimitados pela reta s . Sejam α um plano, s uma reta dividindo o plano em dois semiplanos e dois pontos A e B , cada ponto pertencente a um semiplano, então $AB \cap s \neq \emptyset$. A figura 10 ilustra dois semiplanos delimitados pela reta s e mostra que a intersecção do segmento AB , conforme descrito acima, com a reta s é um ponto P .

Com isto, estamos preparados para apresentar a definição de ângulo, que como veremos, representa um elemento muito importante em nosso estudo.

Definição 5. **Ângulo** ou **região angular** é uma das partes do plano delimitada por duas semirretas de mesma origem.

Veja a figura 11 onde duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} de mesma origem (neste caso, com a origem em O) e pertencentes ao mesmo plano α , determinam dois ângulos. Nesta figura, temos um ângulo convexo e outro não convexo. Note que sempre que o ângulo for formado por duas

Figura 10 – Semiplanos definidos pela reta s

Fonte: Elaborada pelo autor.

semirretas que não pertencem a uma mesma reta, teremos um ângulo convexo e outro não convexo.

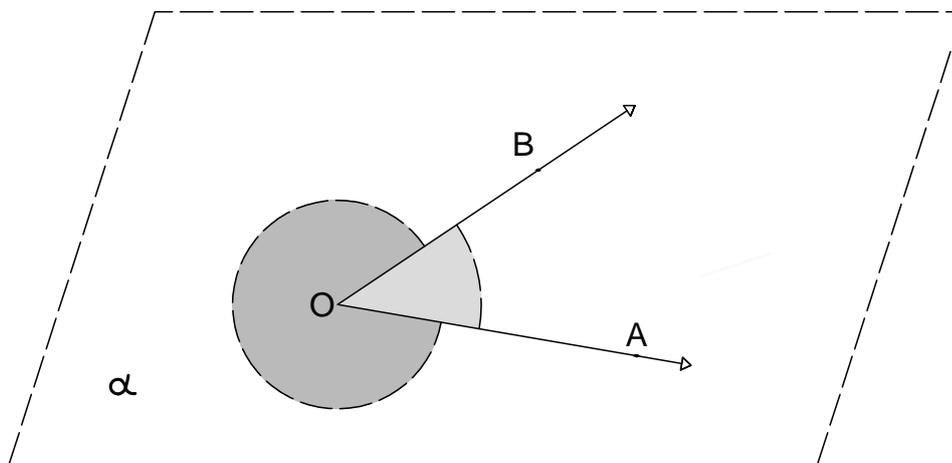


Figura 11 – Região angular

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para trabalharmos com ângulos, precisamos adotar um padrão de medida que possibilite identificar a região que ele ocupa. Para isso, usaremos o **grau** ou um **submúltiplo do grau**.

É importante destacar que poderíamos utilizar outra medida como padrão, como por exemplo, radianos. Mas, devido à herança matemática dos babilônios e sua forte influência em diversos aspectos matemáticos, iremos utilizar o grau. Veja (BARBOSA, 2012) para maiores detalhes.

Para obtermos a medida do grau, iremos construir um círculo de centro O e dividi-lo em

360 arcos iguais, onde A e B representam os extremos de um destes arcos. Diremos, neste caso, que a medida do ângulo \widehat{AOB} é de 1° . Representamos na figura 12 a medida de um ângulo de 1° baseado na construção a seguir. Veja (BARBOSA, 2012) para maiores detalhes.

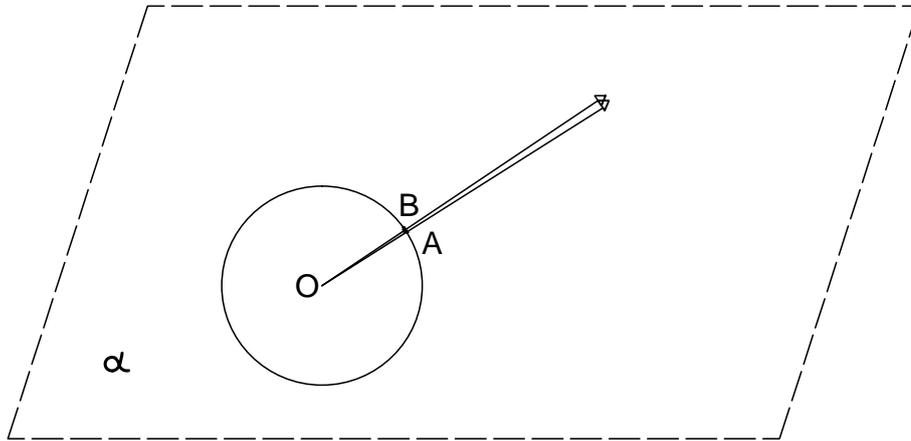


Figura 12 – Unidade de medida de ângulo: grau

Fonte: Elaborada pelo autor.

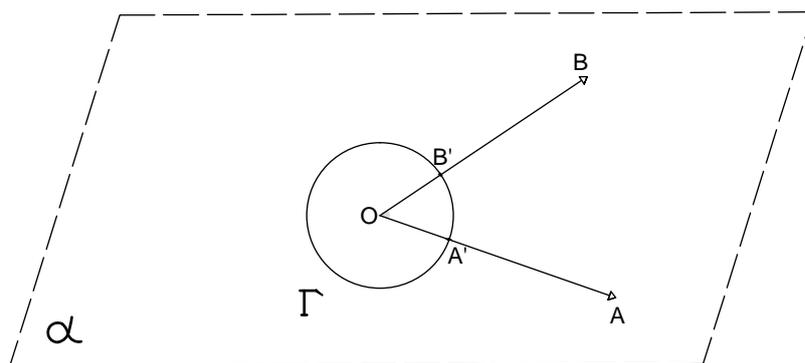
Pela definição de grau, vemos que um círculo completo corresponde a 360° . Por outro lado, para medirmos um ângulo \widehat{AOB} qualquer, fazemos a seguinte construção: traçamos um círculo qualquer Γ de centro O e marcamos os pontos A' e B' nos pontos de intersecção de Γ com as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} de \widehat{AOB} (veja figura 13 para ilustração). Em seguida, vemos a fração do comprimento que o arco $\widehat{A'B'}$ representa no círculo Γ . Note que a medida do ângulo \widehat{AOB} será essa fração de 360° . Por exemplo, se o comprimento do arco $\widehat{A'B'}$ for $\frac{5}{36}$ do comprimento total de Γ , então a medida de \widehat{AOB} será

$$\widehat{AOB} = \frac{5}{36} \cdot 360^\circ = 50^\circ.$$

Para estudarmos a medição de ângulos, iremos precisar de alguns axiomas que nos darão a base para provarmos os nossos principais resultados. Estes resultados podem ser encontrados em (BARBOSA, 2012).

Axioma 1. Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo será igual a zero se, e somente se, ele for constituído por duas semirretas coincidentes.

Axioma 2. É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180° e as semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que a diferença entre esses números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes.

Figura 13 – Medida do ângulo \widehat{AOB} .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Chamaremos o número que corresponde a uma dada semirreta de **coordenada da semirreta**.

2.2.1 Tipos de Ângulos

Nesta subseção, estudaremos os diferentes tipos de ângulos, assim como as suas principais propriedades. Começaremos com a definição de ângulo raso.

Para denotar ângulo, por conveniência, as vezes usaremos letra minúscula do alfabeto grego. Observe que esta notação é a mesma usada para denotar plano, porém esta situação não irá caracterizar nenhuma confusão, pois o enunciado irá deixar claro se a notação é de ângulo ou plano.

Definição 6. Se um ângulo \widehat{AOB} for tal que \vec{OA} e \vec{OB} sejam semirretas opostas, então $\widehat{AOB} = 180^\circ$ e neste caso, diremos que \widehat{AOB} é **raso**.

A seguir, seguem as definições de ângulos complementares e suplementares. Esta notação será muito importante para mostrarmos os nossos resultados principais.

Definição 7. Sejam α e β dois ângulos tais que

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

então diremos que α e β são **ângulos complementares**. Veja a figura 14 para ilustrar a definição acima.

Definição 8. Sejam α e β dois ângulos tais que:

$$\alpha + \beta = 180^\circ,$$

então diremos que α e β são **ângulos suplementares**. A figura 15 ilustra a definição acima.

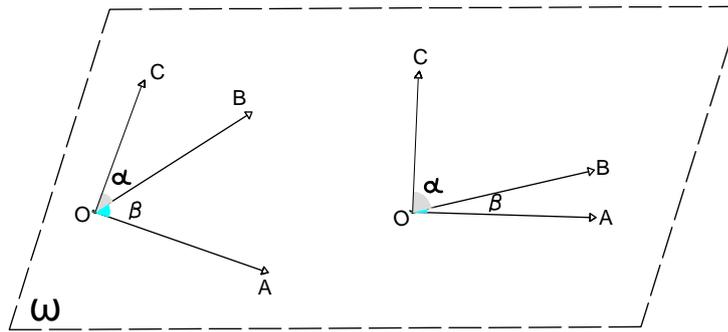


Figura 14 – Ângulos complementares

Fonte: Elaborada pelo autor.

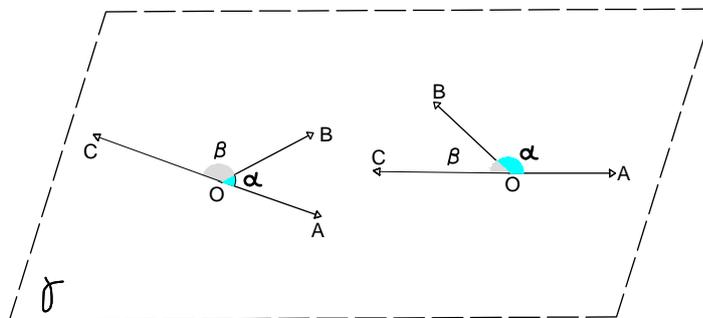


Figura 15 – Ângulos suplementares

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que $\alpha + \beta$ é um ângulo raso, quando eles forem suplementares. A seguir, apresentaremos a definição de dois ângulos opostos pelo vértice.

Definição 9. Dois ângulos \widehat{AOB} e \widehat{COD} (de mesmo vértice O) são ditos **opostos pelo vértice** (abreviamos OPV) se seus lados forem semirretas opostas.

Os ângulos \widehat{AOB} e \widehat{COD} da figura 16 são OPV, uma vez que as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OC} , bem como as semirretas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OD} são opostas.

A seguir, apresentaremos uma propriedade muito útil de ângulos opostos pelo vértice.

Proposição 1. Dois ângulos **opostos pelo vértice** possuem a mesma medida.

Demonstração. Para ilustrar, usaremos a figura 16 como suporte na demonstração. Considere os ângulos \widehat{AOB} e \widehat{COD} opostos pelo vértice. Pela definição, \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OD} são semirretas opostas, então segue que $\widehat{BOC} + \widehat{COD} = 180^\circ$. Analogamente, \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OC} são semirretas opostas e, por

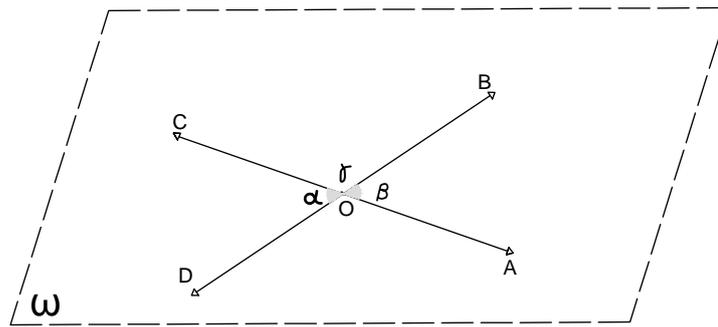


Figura 16 – Ângulos opostos pelo vértice

Fonte: Elaborada pelo autor.

isso, $\widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}C} = 180^\circ$. Portanto,

$$\begin{cases} \widehat{B\hat{O}C} + \widehat{C\hat{O}D} = 180^\circ \\ \widehat{A\hat{O}B} + \widehat{B\hat{O}C} = 180^\circ, \end{cases}$$

que implica em:

$$\widehat{A\hat{O}B} = 180^\circ - \widehat{B\hat{O}C} = 180^\circ - 180^\circ + \widehat{C\hat{O}D},$$

e, portanto,

$$\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{C\hat{O}D},$$

obtendo o resultado desejado. □

Os ângulos podem também ser definidos de acordo com sua medida. Mais precisamente, diremos que um ângulo α é **obtuso** quando ele mede mais de 90° . Por outro lado, ele será chamado de ângulo **agudo** se ele mede menos de 90° . Também, diremos que α é um ângulo **reto** se ele mede 90° .

Desta forma, vemos que se dois ângulos são complementares e ambos são diferentes de zero, então ambos são necessariamente ângulos agudos. Além disso, se dois ângulos são suplementares, então apenas um deles pode ser obtuso. Caso contrário, a soma excederia 180° .

2.3 Retas

Nesta seção, nosso objetivo é apresentar a definição de alguns tipos de retas, bem como suas principais propriedades.

Definição 10. Diremos que duas retas são **concorrentes** se elas possuem um ponto em comum. Veja figura 17.

Definição 11. Diremos que duas retas são **paralelas** se ambas estão contidas no mesmo plano e não possuem nenhum ponto em comum. Veja figura 18.

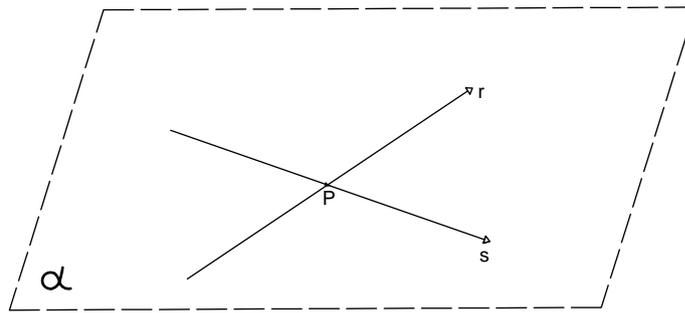


Figura 17 – Retas concorrentes

Fonte: Elaborada pelo autor.



Figura 18 – Retas paralelas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 12. Diremos que duas retas são **perpendiculares** se elas formam 90° entre si e pertencem ao mesmo plano. Veja a figura 19.

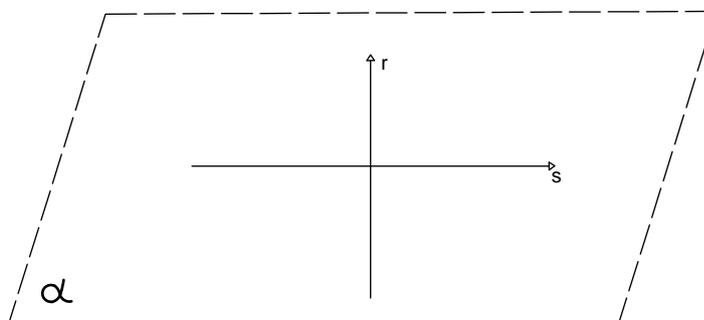


Figura 19 – Retas perpendiculares

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 13. Diremos que duas retas são **reversas** se elas não possuem nenhum ponto em comum e não são coplanares. Veja figura 20.

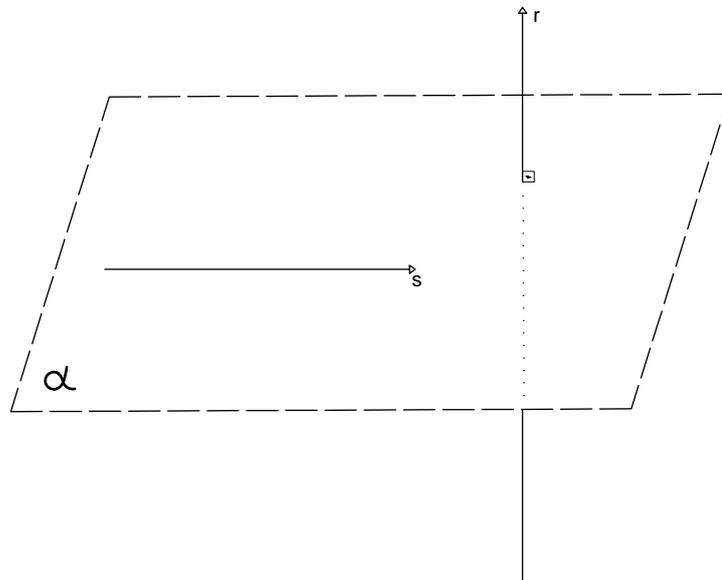


Figura 20 – Retas reversas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Diremos que duas retas são **ortogonais** se elas formam 90° entre si, entretanto elas podem estar contidas em planos distintos e não possuir nenhum ponto em comum. Entretanto, se elas forem concorrentes, então diremos que elas são perpendiculares. Veja figuras 19 e 20 para uma ilustração.

Finalizaremos este capítulo, apresentando uma propriedade muito importante das retas perpendiculares. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Teorema 3.7).

Teorema 1. Por qualquer ponto de uma reta, passa uma única perpendicular a esta reta.

Demonstração. Começaremos provando a existência. Dada uma reta m e um ponto A sobre ela, as duas semirretas determinadas por A formam um ângulo raso.

Considere um dos semiplanos determinados pela reta m . Pelo Axioma 2, existe uma semirreta com origem A que divide o semiplano fixado cuja coordenada seja o número 90. Esta semirreta forma, com as duas semirretas determinadas pelo ponto A sobre a reta m , ângulos de 90° . Portanto, ela é perpendicular a reta m .

Vamos provar a unicidade. Para isto, suponha que existam duas retas r e r' , passando pelo ponto A e perpendiculares a m . Fixe um dos semiplanos determinados por m . As intersecções das retas r e r' com este semiplano são semirretas que formam um ângulo α como representado

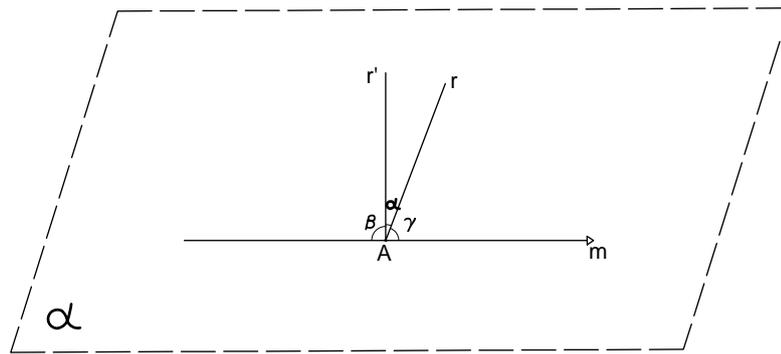


Figura 21 – Unicidade da reta perpendicular

Fonte: Elaborada pelo autor.

na figura 21 e formam outros dois ângulos β e γ com as semirretas determinadas pelo ponto A na reta m .

Como r e r' são perpendiculares a m , então $\beta = \gamma = 90^\circ$. Por outro lado, devemos ter

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Logo, $\alpha = 0^\circ$ e as retas r e r' são coincidentes, provando a unicidade. □

TRIÂNGULOS

Neste capítulo, estudaremos os triângulos e suas principais propriedades. Todas as definições e resultados deste capítulo podem ser encontrados em (BARBOSA, 2012; DOLCE; POMPEO, 1997).

Começaremos nosso estudo apresentando a definição de um polígono convexo.

Definição 14. Sejam $n \geq 3$ um natural e A_1, A_2, \dots, A_n pontos distintos do plano. Diremos que $A_1A_2\dots A_n$ é um **polígono (convexo)** se, para $1 \neq i \neq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui e no que segue, $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ e $A_{n+2} = A_2$).

Se na definição acima, tomarmos $n = 3$, então chamaremos o polígono $A_1A_2A_3$ formado de **triângulo**.

Sejam A, B e C três pontos no plano. Se C estiver sobre a reta \overleftrightarrow{AB} , diremos que A, B e C são pontos **colineares**. Caso contrário, diremos que A, B e C são pontos **não colineares**. Pelas definições acima, vemos que três pontos não colineares formam um triângulo e a região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois. Sendo A, B e C tais pontos, diremos que A, B e C são os **vértices** do triângulo ABC . Portanto, o triângulo ABC possui três lados denotados pelos segmentos de reta AB, AC e BC .

Conforme vimos anteriormente, podemos medir estes segmentos de reta e com isso, podemos obter diversas propriedades importantes do triângulo tais como o perímetro, semiperímetro, área, dentre outras.

Definição 15. Diremos que dois segmentos AB e CD são **congruentes** quando ambos possuem o mesmo comprimento. Em linguagem matemática, temos $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ (lê-se: segmento AB é congruente ao segmento CD).

A congruência de segmentos satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) **Reflexividade:** qualquer segmento é congruente a si mesmo, ou seja, $\overline{CD} \equiv \overline{DC}$.
- (b) **Simetria:** se $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.
- (c) **Transitividade:** se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

Estas propriedades asseguram que a congruência é uma relação de equivalência. Estes resultados podem ser encontrados em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Sejam $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ os comprimentos dos lados do triângulo. Definiremos como o **perímetro** do triângulo (**2p**) a soma dos comprimentos dos seus lados. Por outro lado, definiremos o **semiperímetro** (**p**) como sendo a metade do perímetro, ou seja,

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{2p}{2}.$$

A seguir, apresentaremos a classificação de um triângulo de acordo com as medidas de seus lados.

Definição 16. Classificação dos triângulos em relação aos comprimentos de seus lados.

- (a) **Equilátero**, se todos os seus lados forem congruentes.
- (b) **Isósceles**, se ao menos dois de seus lados forem congruentes.
- (c) **Escaleno**, se todos os seus lados tiverem medidas diferentes.

Observação 1. Todo triângulo equilátero é isósceles, mas a recíproca não é verdadeira. Quando ABC for um triângulo isósceles tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$, diremos que o lado BC é a base do triângulo.

Veja a figura 22 para ilustrar os diferentes tipos de triângulos. Note que o triângulo ABC é equilátero, EDF é isósceles e GHI é escaleno.

A seguir, apresentamos a definição de ângulos internos e externos de um triângulo.

Definição 17. Se ABC é um triângulo, os seus ângulos \widehat{ABC} , \widehat{BCA} e \widehat{CAB} são chamados de **ângulos internos**. Os suplementos destes ângulos são chamados de **ângulos externos** do triângulo. Veja figura 23.

Na figura 23, os ângulos \widehat{ACB} , \widehat{CBA} e \widehat{BAC} são internos, enquanto que os ângulos \widehat{DAB} , \widehat{ABE} e \widehat{BCF} são externos.

Veremos também que um triângulo pode ser classificado pela medida de seus ângulos.

Definição 18. Diremos que um triângulo é **acutângulo** se todos os seus ângulos internos são agudos. Veja a figura 24.

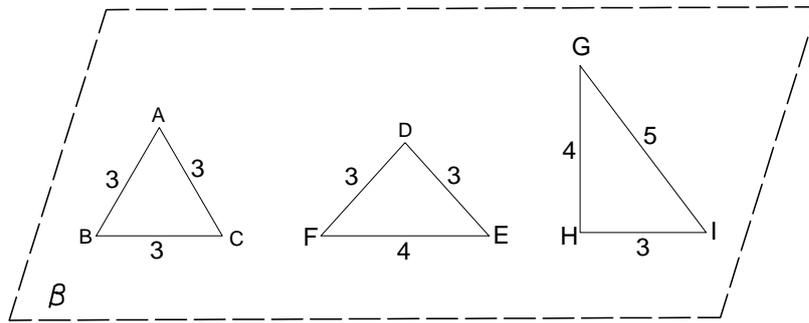


Figura 22 – Tipos de triângulos em relação ao comprimento dos seus lados.

Fonte: Elaborada pelo autor.

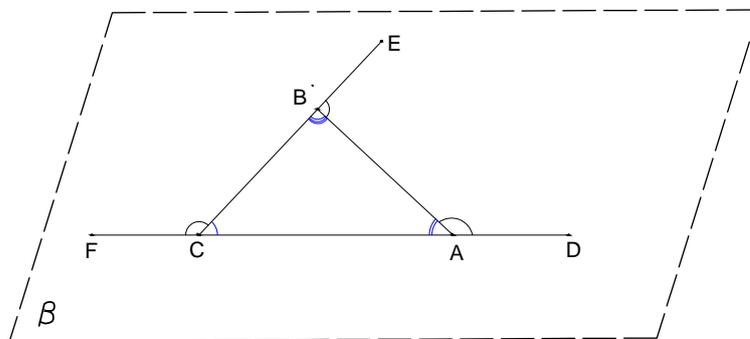


Figura 23 – Ângulos internos e externos em um triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

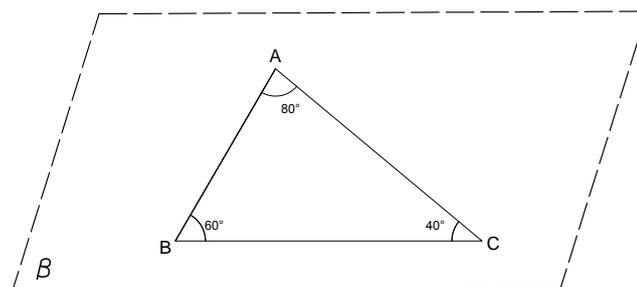


Figura 24 – Triângulo acutângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 19. Diremos que um triângulo é **obtusângulo** quando ele possui um ângulo interno obtuso. Veja figura 25.

Definição 20. Diremos que um triângulo é **retângulo** quando ele possui um ângulo de 90° (ângulo reto). Veja figura 26.

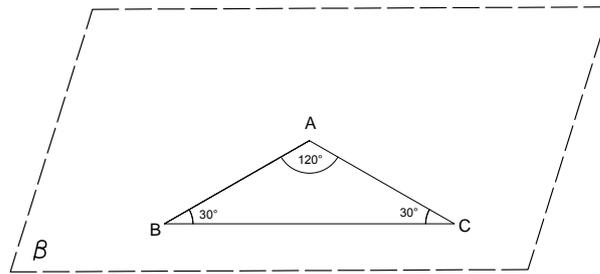


Figura 25 – Triângulo obtusângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

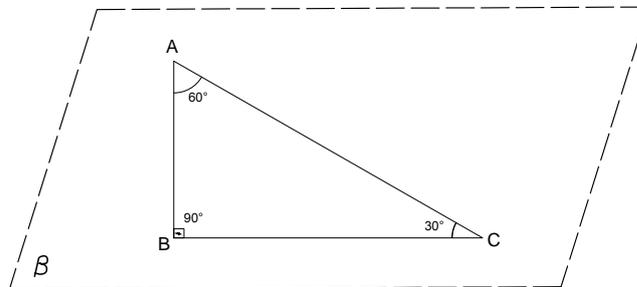


Figura 26 – Triângulo retângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.1 Congruência

Nesta seção, estudaremos a propriedade de congruência de segmentos, de ângulos de triângulos, bem como suas principais consequências tais como o quinto Axioma de Euclides (também conhecido como Axioma das Paralelas), a desigualdade triangular, dentre outras.

Apresentamos a seguir a definição de congruência entre ângulos.

Definição 21. Diremos que dois ângulos \hat{A} e \hat{B} são **congruentes** se eles têm a mesma medida.

Já vimos a congruência de segmentos no começo do capítulo, nos resta agora apresentar a congruência entre triângulos. Diremos que dois triângulos são congruentes se for possível mudar a posição de um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. Portanto, se dois triângulos ABC e $A'B'C'$ forem congruentes, então existirá uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam congruentes e os lados opostos a vértices correspondentes também o sejam. A figura 27 mostra dois triângulos congruentes ABC e $A'B'C'$ e a correspondência de seus respectivos vértices.

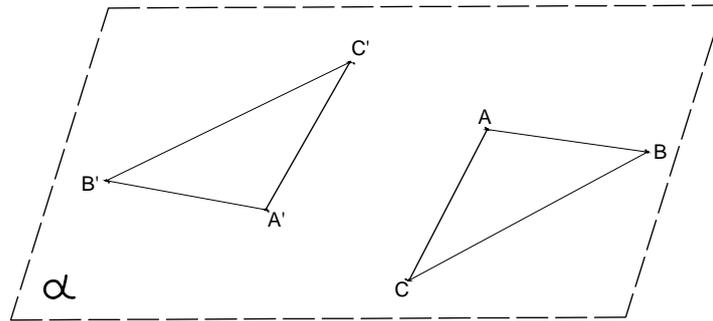


Figura 27 – Congruência de triângulos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que, na figura 27, temos a seguinte correspondência:

$$\begin{cases} A \leftrightarrow A' \\ B \leftrightarrow B' \\ C \leftrightarrow C'. \end{cases}$$

Temos, portanto, a seguinte correspondência entre os seus respectivos ângulos e os seus respectivos lados:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'}; \widehat{B} = \widehat{B'}; \widehat{C} = \widehat{C'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'}; \overline{AC} = \overline{A'C'}; \overline{BC} = \overline{B'C'}. \end{cases}$$

Note que a congruência de uma maneira geral é uma relação de equivalência, ou seja, tanto a congruência de ângulos, segmentos e triângulos possuem as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, descritas anteriormente.

Escreveremos $ABC \equiv A'B'C'$ para denotar que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e que a congruência leva A em A' , B em B' e C em C' .

A seguir, apresentaremos o primeiro resultado sobre congruência de triângulos, o caso de congruência conhecido como lado-ângulo-lado. Por simplicidade, diremos apenas caso de congruência LAL. Este caso de congruência pode ser considerado o mais importante, pois os outros casos podem ser demonstrados a partir deste. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Axioma 3. Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem congruentes, respectivamente, a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esse dois lados, então os dois triângulos são congruentes.

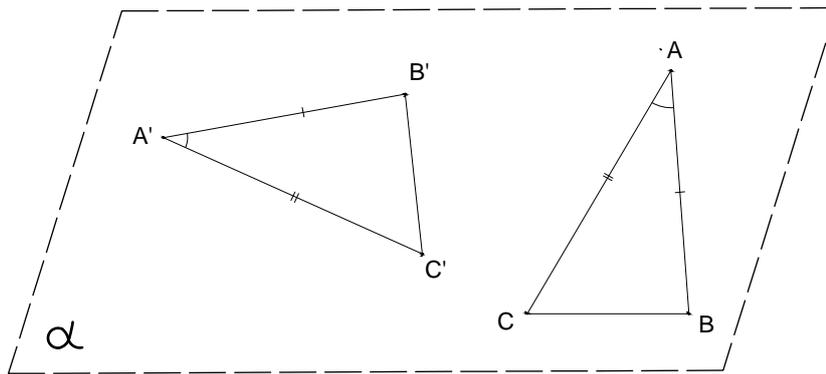


Figura 28 – Congruência de triângulos (caso LAL, lado-ângulo-lado)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo axioma acima, inferimos que dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, se

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A'}, \end{array} \right.$$

então $ABC \equiv A'B'C'$, considerando a seguinte correspondência entre os respectivos vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$. Como consequência do Axioma 3, segue que:

$$\widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'} \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

A seguir, apresentaremos outro caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo). Este caso é uma consequência do Axioma 3, conforme veremos a seguir. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Teorema 2 (Caso ALA). Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre dois ângulos forem, respectivamente, congruentes a dois ângulos de um outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ e $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Seja D um ponto da semirreta \overrightarrow{BA} tal que:

$$\overline{BD} = \overline{B'A'}.$$

Note que, comparando os triângulos BCD e $A'B'C'$, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BD} = \overline{B'A'} \text{ (por construção)} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ (por hipótese)} \\ \widehat{B} = \widehat{B'} \text{ (por hipótese).} \end{array} \right.$$

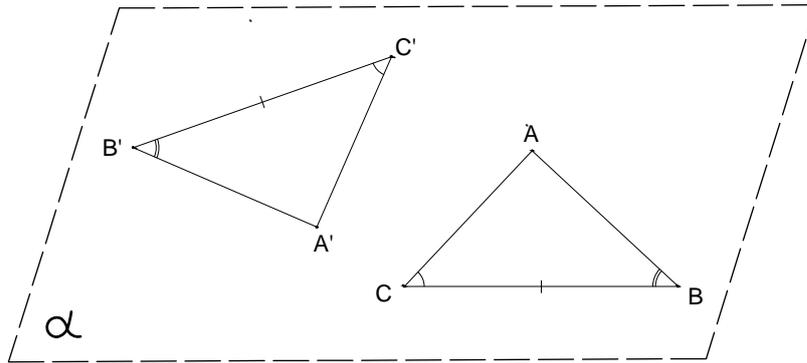


Figura 29 – Congruência de triângulos, caso ALA (ângulo-lado-ângulo)

Fonte: Elaborada pelo autor.

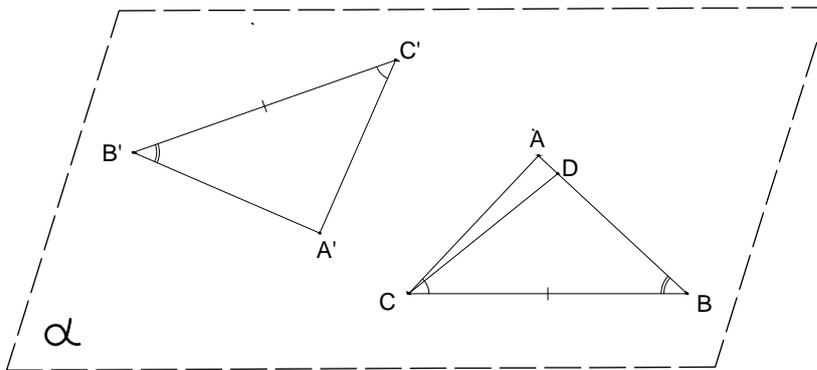


Figura 30 – Demonstração (ALA ângulo-lado-ângulo)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Então, pelo Axioma 3, os triângulos $A'B'C'$ e BCD são congruentes. Portanto,

$$\widehat{BCD} = \widehat{B'C'A'}.$$

Por outro lado, pela hipótese,

$$\widehat{B'C'A'} = \widehat{BCA}.$$

Logo, $\widehat{BCD} = \widehat{BCA}$ por transitividade. Isto implica que \overline{CD} e \overline{CA} coincidem e, portanto, os pontos A e D coincidem. Disto, concluímos que os triângulos BCD e BCA coincidem. Portanto, como provamos que $A'B'C'$ e BCD são congruentes, então segue que $A'B'C'$ e ABC são congruentes, obtendo o resultado desejado. \square

Como consequência deste resultado, obtemos que um triângulo é isósceles se, e somente se, dois de seus ângulos são congruentes. Este é o conteúdo do próximo resultado, que pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Teorema 3. Um triângulo é isósceles se, e somente se, ele possui dois ângulos congruentes.

Demonstração. Começaremos provando a primeira implicação. Suponha que ABC seja um triângulo isósceles, então sem perda de generalidade, assumamos que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Queremos mostrar que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Para isto, iremos comparar o triângulo ABC com ele mesmo, fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \leftrightarrow A \\ B \leftrightarrow C \\ C \leftrightarrow B. \end{array} \right.$$

Por hipótese, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AC} = \overline{AB}$ (pois o triângulo é isósceles). Como $\widehat{A} = \widehat{A}$, segue pelo Axioma 3, que esta correspondência define uma congruência. Como consequência, tem-se $\widehat{B} = \widehat{C}$, provando a primeira parte do teorema.

Reciprocamente, seja ABC um triângulo tal que $\widehat{B} = \widehat{C}$. Vamos mostrar que $\overline{AB} = \overline{AC}$ para concluirmos que ABC é um triângulo isósceles.

Novamente, vamos comparar o triângulo ABC com ele próprio, fazendo uma correspondência entre os seus vértices, ou seja, considere a seguinte correspondência:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \leftrightarrow A \\ B \leftrightarrow C \\ C \leftrightarrow B. \end{array} \right.$$

Como $\widehat{B} = \widehat{C}$ e $\widehat{C} = \widehat{B}$, por hipótese, e $\overline{BC} = \overline{CB}$, segue pelo Teorema 2 que esta correspondência define uma congruência. Como consequência, $\overline{AB} = \overline{AC}$, provando o resultado desejado. \square

Como uma consequência imediata deste resultado, temos o seguinte corolário.

Corolário 1. Os ângulos internos de um triângulo equilátero são todos congruentes.

A seguir, apresentaremos a definição de vários componentes importantes no estudo dos triângulos. Estas definições podem ser encontradas em (BARBOSA, 2012).

Definição 22. Seja ABC um triângulo e seja D um ponto da reta que contém BC . O segmento AD chama-se **mediana** do triângulo relativamente ao lado BC , se D for o ponto médio de BC .

Definição 23. O segmento AD chama-se **bissetriz** do ângulo \widehat{CAB} se a semirreta \overrightarrow{AD} divide o ângulo \widehat{CAB} em dois ângulos congruentes, isto é, se $\widehat{CAD} = \widehat{DAB}$.

Definição 24. O segmento AD chama-se **altura** do triângulo relativamente ao lado BC , se AD for perpendicular a reta que contém BC .

Usando as definições acima, podemos provar uma propriedade muito importante do triângulo isósceles. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

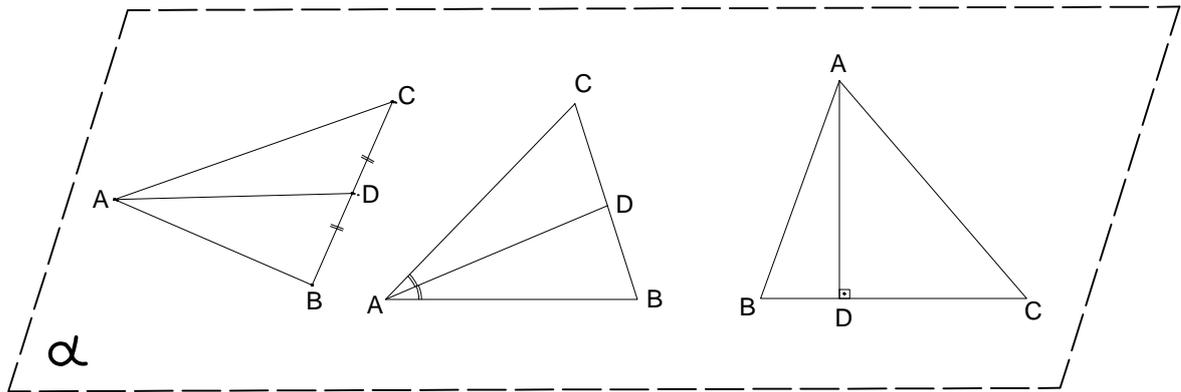


Figura 31 – Mediana, bissetriz e altura, respectivamente

Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 4. Em um triângulo isósceles, a mediana relativa a base é também bissetriz e altura.

Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles cuja base seja AB . Então pela definição, suponha que $\overline{AC} = \overline{BC}$. Se CD é a mediana relativa à base, então precisamos mostrar que $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ e que \widehat{ADC} é um ângulo reto para concluirmos, respectivamente, que CD é também bissetriz do ângulo \widehat{ACB} e altura com relação a base AB .

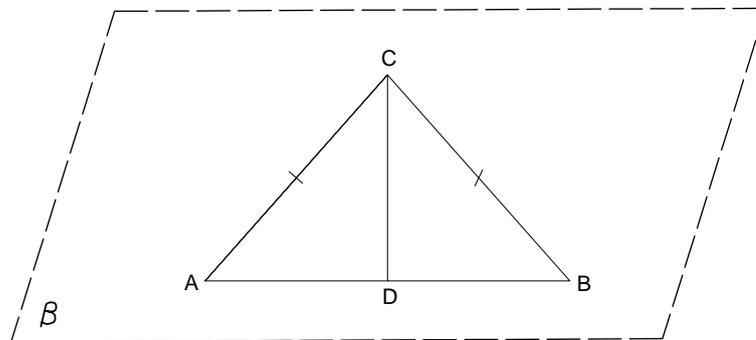


Figura 32 – Triângulo isósceles e sua mediana relativa a base

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para isto, consideraremos os triângulos ADC e BDC . Como $\overline{AD} = \overline{BD}$ (pois por hipótese, CD é mediana com relação a base AB), $\overline{AC} = \overline{BC}$ (pois o triângulo é isósceles) e $\widehat{A} = \widehat{B}$ (pelo Teorema 3), então pelo Axioma 3, o triângulo ADC é congruente ao triângulo BDC . Segue-se então que $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$ e $\widehat{CDA} = \widehat{CDB}$. Por $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$, concluímos que CD é bissetriz do ângulo \widehat{ACB} . Resta mostrar que CD é altura com relação a AB . Como \widehat{ADB} é um ângulo raso e $\widehat{CDA} + \widehat{CDB} = \widehat{ADB}$, então:

$$\widehat{CDA} + \widehat{CDB} = 180^\circ.$$

Por outro lado, vimos que $\widehat{CDA} = \widehat{BDC}$, o que implica em, $\widehat{CDA} = \widehat{BDC} = 90^\circ$. Portanto, CD é perpendicular a AB , provando o resultado desejado. \square

Finalmente, apresentaremos o último caso de congruência, que é o caso LLL (lado-lado-lado). Este caso pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Teorema 5 (caso LLL). Se dois triângulos têm três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes.

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{EF}$, $\overline{BC} = \overline{FG}$ e $\overline{AC} = \overline{EG}$. Vamos provar que os dois triângulos são congruentes. Veja a figura 33 para ilustração.

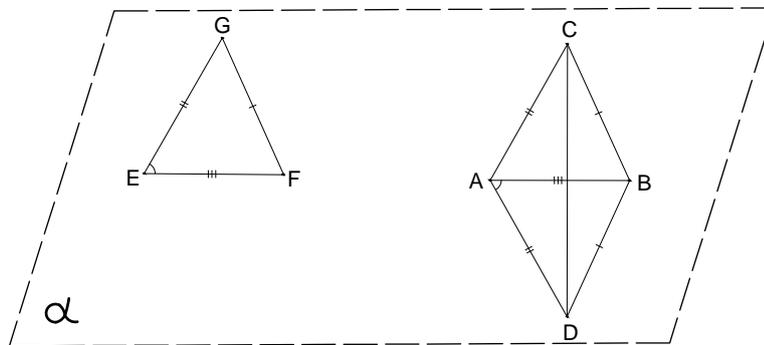


Figura 33 – Congruência de triângulos, caso LLL (lado-lado-lado)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Construa, a partir da semirreta \overrightarrow{AB} no semiplano oposto que contém o ponto C , um ângulo congruente ao ângulo \widehat{E} . No lado deste ângulo que não contém o ponto B , marque um ponto D , de modo que $\overline{AD} = \overline{EG}$ e $\widehat{BAD} = \widehat{FEG}$ e trace um segmento ligando D a B .

Por hipótese, $\overline{AB} = \overline{EF}$ e, por construção, $\overline{AD} = \overline{EG}$ e $\widehat{BAD} = \widehat{FEG}$, então por congruência de triângulos (caso LAL), concluímos que o triângulo ABD é congruente ao triângulo EFG . Resta mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes para completarmos a demonstração, pois por transitividade, seguirá que ABC é congruente a EFG .

Para isto, trace o segmento CD . Como $\overline{AD} = \overline{EG} = \overline{AC}$ e $\overline{DB} = \overline{FG} = \overline{BC}$ (por hipótese), então obtemos que os triângulos ADC e BDC são isósceles e, portanto, $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$ e $\widehat{CDB} = \widehat{DCB}$, o que implica que $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$, pois $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} + \widehat{CDB}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{ACD} + \widehat{DCB}$. Portanto, pelo caso de congruência LAL, concluímos que o triângulo ABD é congruente ao triângulo ABC . Logo, por transitividade, segue o resultado desejado. \square

PARALELISMO

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições, corolários e teoremas relacionados ao *paralelismo* que serão utilizados oportunamente no decorrer deste trabalho.

Começaremos apresentando um resultado conhecido como Teorema do Ângulo Externo, que pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Teorema 5.2).

Teorema 6 (Teorema do Ângulo Externo). Em todo triângulo, a medida de cada ângulo externo é maior que as medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

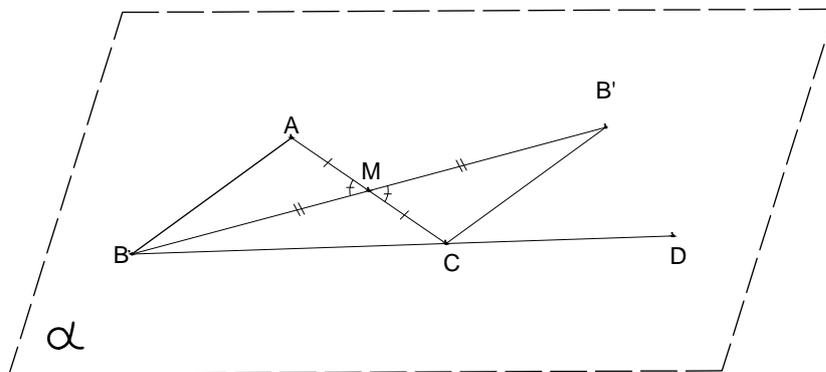


Figura 34 – Ângulo externo em um triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e M o ponto médio do lado AC . Usaremos a figura 34 para ilustrar a construção. Prolongue a semirreta \overrightarrow{BM} até o ponto B' , de modo que $\overline{BM} = \overline{MB'}$, e considere os triângulos ABM e $CB'M$. Temos $\overline{AM} = \overline{CM}$, pois M é ponto médio, $\overline{BM} = \overline{MB'}$, por construção, e $\widehat{AMB} = \widehat{CMB'}$ (pois eles são opostos pelo vértice). Logo, pelo caso de congruência LAL, segue que os triângulos AMB e CMB' são congruentes e, portanto, $B'\widehat{CM} = B\widehat{AM}$. Disto, segue:

$$D\widehat{CA} = B'\widehat{CA} + D\widehat{CB'} > B'\widehat{CA} = B'\widehat{CM} = B\widehat{AM} = B\widehat{AC}.$$

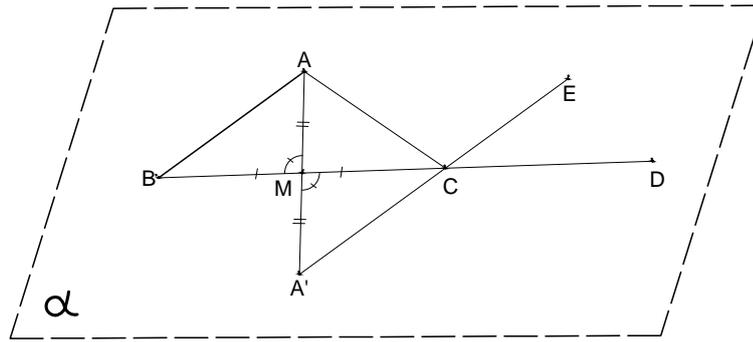


Figura 35 – Ângulo externo em um triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora vamos provar que $\widehat{ACD} > \widehat{ABC}$ (para isto, usaremos a figura 35 para ilustração). Seja M o ponto médio do lado BC , prolongue a semirreta \overrightarrow{AM} até A' de modo que $\overline{AM} = \overline{MA'}$. Considere os triângulos BAM e $CA'M$, note que $\overline{BM} = \overline{MC}$ (pois M é ponto médio de BC), $\overline{AM} = \overline{MA'}$ (por construção) e $\widehat{BMA} = \widehat{A'MC}$ (pois são opostos pelo vértice). Pelo caso de congruência LAL, temos que os triângulos BAM e $CA'M$ são congruentes e como consequência, $\widehat{MBA} = \widehat{MCA'}$. Prolongando $\overrightarrow{A'C}$ até um ponto E qualquer, podemos observar que:

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACE} + \widehat{ECD} > \widehat{ECD} = \widehat{MCA'} = \widehat{MBA} = \widehat{CBA} = \widehat{ABC},$$

obtendo o resultado desejado. □

Como uma consequência imediata do Teorema do Ângulo Externo, temos o seguinte resultado que pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Teorema 7. A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180° .

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Vamos mostrar que $\widehat{B} + \widehat{C} < 180^\circ$. Para ilustração, usaremos a figura 36. Seja γ o ângulo externo deste triângulo com vértice em C . Pelo Teorema do Ângulo Externo, temos que:

$$\gamma > \widehat{B}.$$

Como γ e \widehat{C} são ângulos suplementares, então $\gamma + \widehat{C} = 180^\circ$. Portanto,

$$\widehat{B} + \widehat{C} < \gamma + \widehat{C} = 180^\circ,$$

provando o resultado desejado. □

Outras duas consequências imediatas deste resultado seguem abaixo. Elas pode ser encontradas em (BARBOSA, 2012, Corolário 5.4 e 5.5).

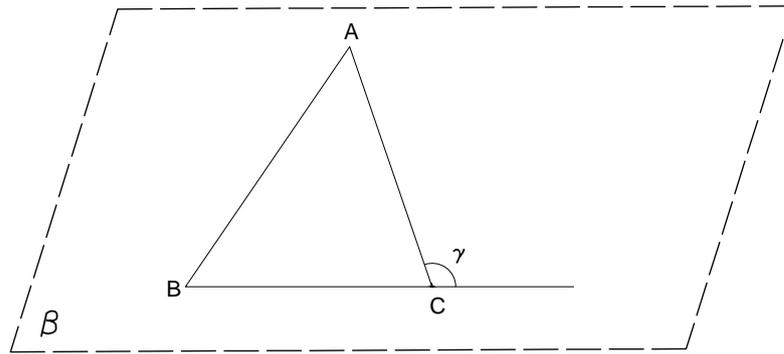


Figura 36 – Soma dos ângulos internos e o ângulo externo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Corolário 2. Todo triângulo possui, pelo menos, dois ângulos internos agudos.

Demonstração. Suponha, por contradição, que um triângulo possuísse dois ângulos internos não-agudos, então sua soma seria maior ou igual a 180° , contradizendo o Teorema 7. Logo, todo triângulo possui pelo menos dois ângulos internos agudos. \square

Corolário 3. Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira reta, então, m e n não se intersectam.

Demonstração. Suponha, por contradição, que m e n se intersectam em um ponto, então poderíamos formar um triângulo com dois ângulos retos, contradizendo o Corolário 2. \square

O próximo resultado traz uma propriedade muito útil. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 5.7).

Teorema 8. Por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta perpendicular a reta dada.

Demonstração. Vamos começar provando a existência. Seja m uma reta e A um ponto fora desta reta. Tome sobre m dois pontos B e C distintos e trace o segmento AB . Se AB já for perpendicular a reta m , então terminamos a construção. Caso contrário, considere no semiplano que não contém A uma semirreta com origem em B , formando com \overrightarrow{BC} um ângulo congruente a \widehat{ABC} . Nesta semirreta, tome um ponto A' tal que $\overline{BA'} = \overline{BA}$. Então, desta construção, segue que o segmento AA' é perpendicular a m . De fato, como $\overline{BA} = \overline{BA'}$, o triângulo ABA' é isósceles e como $\widehat{ABC} = \widehat{CBA'}$ (por construção), então BC é bissetriz do ângulo $\widehat{ABA'}$. Então pelo Teorema 4, segue que BC é também altura com relação a base AA' e portanto, BC é perpendicular a AA' . Veja figura 37 para ilustração.

Agora vamos provar a unicidade. Para isto, iremos supor que existem duas retas distintas passando pelo ponto A e sendo ambas perpendiculares a reta m , então teríamos um triângulo com

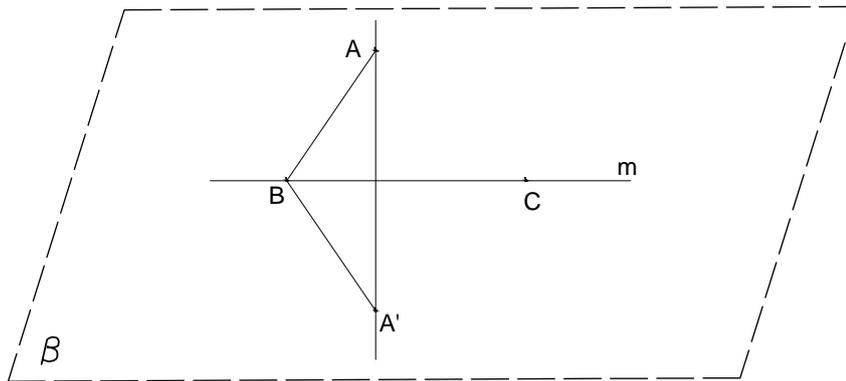


Figura 37 – Reta passando por A e perpendicular a m

Fonte: Elaborada pelo autor.

dois ângulos retos, o que é um absurdo, pelo Corolário 2. Logo, segue a unicidade e o teorema está provado. \square

A seguir, apresentaremos algumas definições para condensar nosso estudo em uma estrutura sólida sem lacunas para o estudo dos tópicos seguintes.

Definição 25. Dado um ponto A e uma reta m , a perpendicular à reta m que passa por A intersecta m em um ponto P , que chamaremos de **pé da perpendicular** baixada do ponto A à reta m . Veja a figura 38.

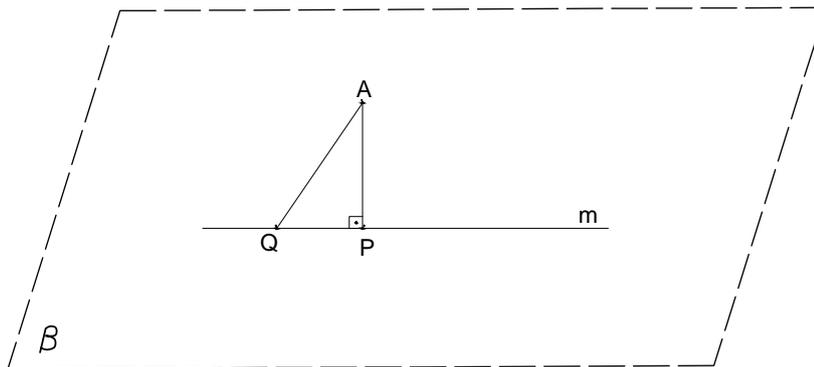


Figura 38 – P é a intersecção da reta perpendicular a reta m baixada do ponto A .

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se Q é um outro ponto qualquer de m , então o segmento AQ é dito **oblíquo** relativamente a m . Também, diremos que \overline{AP} é a **distância** do ponto A à reta m . Por outro lado, o segmento QP será dito **projecção do segmento** QA sobre a reta m .

Finalmente, apresentaremos a definição de um ângulo oposto a um lado de um triângulo.

Definição 26. Dado um triângulo ABC , diremos que o ângulo \hat{A} é **oposto ao lado BC** . Veja a figura 39 para uma ilustração da definição.

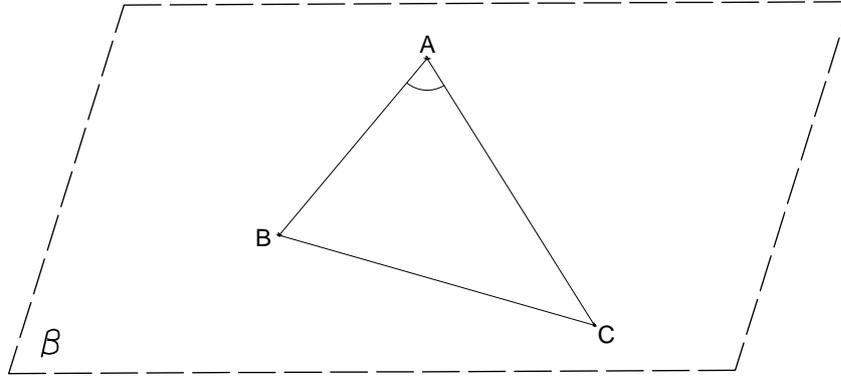


Figura 39 – Ângulo oposto ao lado

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apresentaremos a seguir uma propriedade muito útil de ângulos internos opostos aos lados de um triângulo. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 5.8).

Teorema 9. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Demonstração. Seja ABC um triângulo tal que dois de seus lados não são congruentes. Suponha que seus ângulos opostos sejam congruentes, então ABC possuirá dois ângulos congruentes, implicando que ABC é um triângulo isósceles pelo Teorema 3. Mas este fato implicaria que ABC possuiria pelo menos dois lados congruentes, contradizendo a hipótese. Portanto, seus ângulos opostos não são congruentes.

Resta agora provar que o ângulo maior é oposto ao lado maior e o ângulo menor é oposto ao menor lado. Para isto, considere, sem perda de generalidade, um triângulo ABC tal que $\overline{BC} < \overline{AC}$. Vamos mostrar que $\hat{CAB} < \hat{CBA}$. Veja a figura 40 para ilustrar.

Marquemos sobre a semirreta \overrightarrow{CA} um ponto D de modo que $\overline{CD} = \overline{BC}$. Como $\overline{BC} < \overline{AC}$, pela escolha do triângulo, então este ponto D pertence ao segmento AC , o que implica que a semirreta \overrightarrow{BD} divide o ângulo \hat{CBA} . Portanto,

$$\hat{CBA} > \hat{CBD}. \quad (4.1)$$

Por outro lado, note que:

$$\hat{CBD} = \hat{CDB},$$

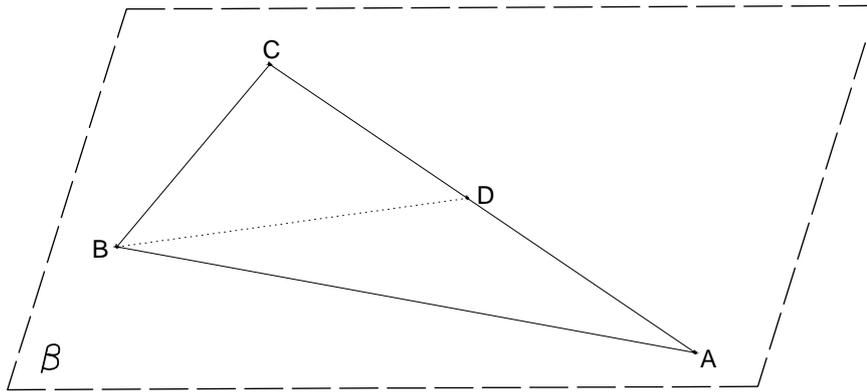


Figura 40 – Ângulo oposto ao lado e suas respectivas medidas

Fonte: Elaborada pelo autor.

pois o triângulo CBD é isósceles, já que $\overline{CD} = \overline{BC}$ e, portanto, $\widehat{CBD} = \widehat{CDB}$. Como \widehat{CDB} é um ângulo externo do triângulo BDA , então $\widehat{CDB} > \widehat{CAB}$. Portanto, usando (4.1), temos:

$$\widehat{CBA} > \widehat{CAB},$$

obtendo o resultado desejado. □

O próximo resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 5.9).

Teorema 10. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

Demonstração. Suponha, por contradição, que as medidas dos lados que se opõem a estes dois ângulos sejam iguais. Então, pela propriedade do triângulo isósceles (Teorema 3), este triângulo possuiria estes dois ângulos congruentes, contradizendo a hipótese. Portanto, a primeira parte do teorema está provada.

Para provar a segunda parte, considere, sem perda de generalidade, um triângulo ABC tal que $\widehat{CAB} < \widehat{CBA}$ e vamos mostrar que $\overline{BC} < \overline{AC}$. Note que dado dois segmentos, temos apenas três possibilidades: $\overline{BC} = \overline{AC}$, $\overline{BC} < \overline{AC}$ ou $\overline{BC} > \overline{AC}$.

Se $\overline{BC} > \overline{AC}$, então pelo Teorema anterior, deveríamos ter $\widehat{CAB} > \widehat{CBA}$, contradizendo nossa hipótese. Do mesmo modo, se $\overline{BC} = \overline{AC}$, o triângulo seria isósceles e $\widehat{CAB} = \widehat{CBA}$, o que também iria contradizer a nossa hipótese. Portanto, temos $\overline{BC} < \overline{AC}$, provando o resultado desejado. □

Como consequência deste teorema, temos os seguintes resultados. Eles podem ser encontrados em (BARBOSA, 2012).

Corolário 4. Se ABC é um triângulo tal que $\widehat{A} \geq 90^\circ$, então \overline{BC} é seu maior lado.

Demonstração. Se $\hat{A} \geq 90^\circ$, então \hat{A} é o maior ângulo de ABC , uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Então pelo Teorema 10, segue que \overline{BC} é o maior lado. \square

O resultado a seguir é conhecido como *Desigualdade Triangular* e será fundamental para nossos objetivos.

Teorema 11. Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Demonstração. Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Mostremos que $a < b + c$, sendo a prova das demais desigualdades análoga.

Primeiramente, marque o ponto D sobre a semirreta \overrightarrow{CA} tal que $A \in \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{AB}$. Veja a figura 41 para ilustrar.

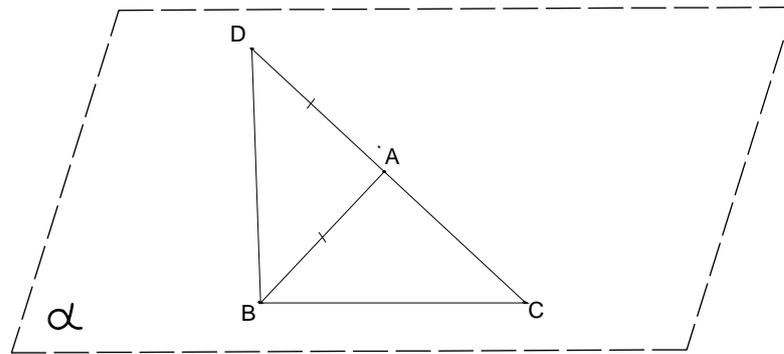


Figura 41 – Desigualdade triangular

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como

$$\overline{CD} = \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = b + c,$$

então pelo Teorema 9, precisamos apenas mostrarmos que $\hat{BDC} < \hat{DBC}$. Por outro lado, como $\hat{BDA} = \hat{DBA}$ (pois o triângulo ABD é isósceles), então:

$$\hat{BDC} = \hat{BDA} = \hat{DBA} < \hat{DBA} + \hat{ABC} = \hat{DBC}.$$

Sendo a , b e c os comprimentos dos lados de um triângulo, segue que:

$$a < b + c.$$

Analogamente, mostramos que

$$b < a + c, \quad c < a + b.$$

Reciprocamente, dados segmentos cujos comprimentos a , b e c satisfazem as desigualdades acima, não é difícil provar que é sempre possível construirmos um triângulo que possui os segmentos satisfazendo a desigualdade acima como lados. \square

Desta forma, vemos que a desigualdade triangular é a única restrição para a construção de um triângulo em que conhecemos os lados. Por exemplo, dados três segmentos de comprimentos iguais a 4, 3 e 8, não seria possível construir um triângulo, pois somando os segmentos de comprimento 4 e 3 resultaria em 7, sendo este menor que a medida do outro segmento que é 8. Portanto, tal triângulo não existe, pelo resultado anterior.

Apresentaremos a seguir um axioma sobre retas paralelas, que será a base para provarmos os outros resultados de retas paralelas neste capítulo. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Axioma 4. Por um ponto fora de uma reta m , pode-se traçar uma única reta paralela à reta m .

Como consequência deste axioma, temos o seguinte resultado que mostra que a propriedade de paralelismo de retas é transitiva. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Teorema 12. Se a reta m é paralela às retas n_1 e n_2 , então n_1 e n_2 são paralelas ou coincidentes.

Demonstração. Se n_1 e n_2 são retas coincidentes, então terminamos a demonstração. Suponha, portanto, que n_1 e n_2 não sejam retas coincidentes e ambas sejam paralelas a reta m . Assuma também que n_1 e n_2 não sejam paralelas entre si, então elas possuem um ponto de intersecção, digamos P . Logo, n_1 e n_2 seriam duas retas paralelas distintas à reta m passando pelo ponto P , contradizendo o Axioma 4. Logo, n_1 e n_2 são retas paralelas, provando o resultado. \square

Como consequência do resultado acima, temos o seguinte corolário que traz uma propriedade muito útil e intuitiva sobre as retas paralelas. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Corolário 5. Se uma reta corta uma de duas paralelas, então corta também a outra.

Demonstração. Suponha que n_1 e n_2 sejam retas paralelas. Seja m uma reta que corta a reta n_1 , mas não corta n_2 , então as retas m e n_2 seriam paralelas. Então, n_2 seria uma reta paralela a m e a n_1 , mas pelo Teorema 12, teríamos que as retas m e n_1 seriam paralelas ou coincidentes, o que contradiz a hipótese. Portanto, m corta também n_2 , provando o resultado. \square

O próximo resultado traz uma relação entre os ângulos formados por duas retas e sua transversal (cortando ambas) e o paralelismo. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Teorema 13. Sejam m , n duas retas e os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ como na figura 42 abaixo. Se $\hat{1} = \hat{2}$, então as retas m e n são paralelas.

Demonstração. Suponha, por contradição, que as retas m e n não sejam paralelas. Então, elas se intersectariam em algum ponto P , formando um triângulo ABP , conforme figura 43.

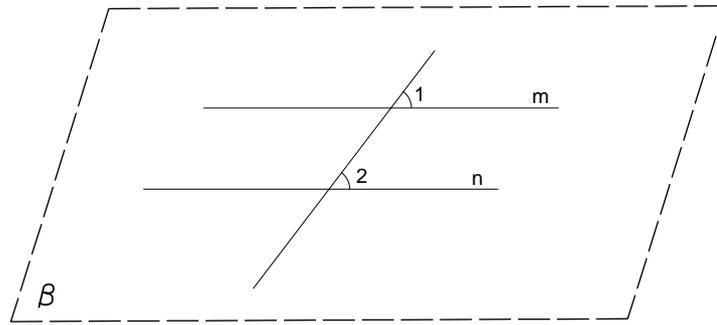


Figura 42 – Se $\hat{1} = \hat{2}$, então m e n são paralelas

Fonte: Elaborada pelo autor.

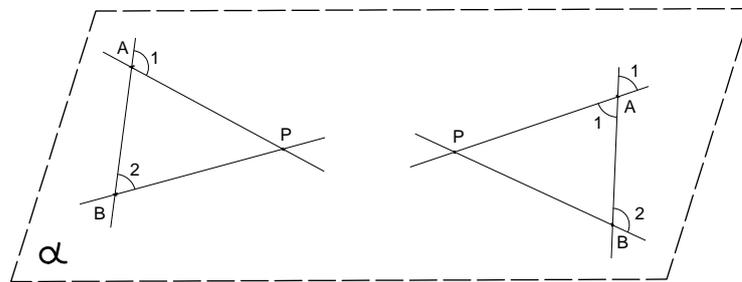


Figura 43 – As retas m e n ou são paralelas ou coincidentes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que temos duas opções para este triângulo ABP , ou $\hat{1}$ é ângulo externo e $\hat{2}$ é um ângulo interno não adjacente ao ângulo $\hat{1}$, ou vice versa. Portanto, o Teorema do Ângulo Externo implica que $\hat{1} \neq \hat{2}$, contradizendo nossa hipótese. Logo, m e n não se intersectam, provando o teorema. \square

Por esse resultado, temos imediatamente a seguinte consequência, que pode ser encontrada em (BARBOSA, 2012). Note que ele segue como a contrapositiva do Teorema 13.

Corolário 6. Sejam m e n duas retas e os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ como na figura 43. Se m e n não são paralelas, então $\hat{1} \neq \hat{2}$.

Considere a figura 44, onde duas retas paralelas são cortadas por uma transversal. Note que as intersecções formam oito ângulos, em que quatro destes ângulos são **correspondentes** aos outros quatro.

De fato, note que se $\hat{1} = \hat{2}$ e como $\hat{1}$ é um ângulo oposto pelo vértice ao ângulo $\hat{7}$, então $\hat{1} = \hat{7}$ e também, $\hat{2} = \hat{8}$ e, por transitividade, $\hat{7} = \hat{8}$.

Também, $\hat{5}$ e $\hat{3}$ são ângulos opostos pelo vértice e $\hat{5} + \hat{1}$ é um ângulo raso, bem como $\hat{3} + \hat{7}$ também o é. Então, temos que $\hat{5} = \hat{3}$ e também, $\hat{4} = \hat{6}$. Além disso, $\hat{3} = \hat{4}$ e $\hat{5} = \hat{6}$ (usando as

Demonstração. Suponha que m e m' sejam duas retas paralelas e seja n uma reta que corta m e m' nos pontos A e B , respectivamente. Considere uma reta m'' passando pelo ponto A e formando com a transversal quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados pela reta m' com a mesma transversal (ver figura 45 abaixo).

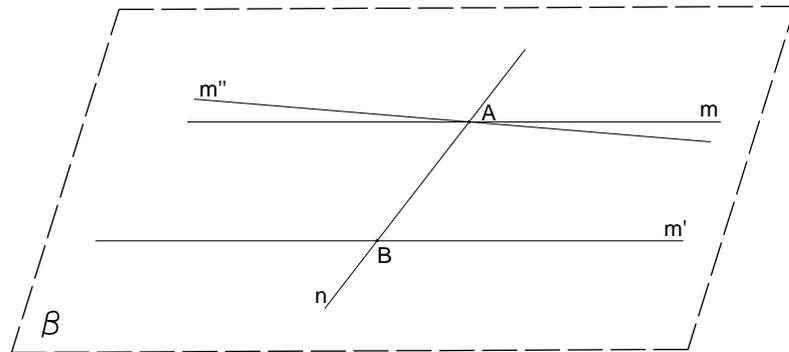


Figura 45 – Correspondência entre os ângulos correspondentes de duas paralelas intersectada por uma transversal

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo Teorema 15, m' e m'' são paralelas. Por outro lado, pelos Teorema 12 e Axioma 4, m e m'' são coincidentes. Portanto, m forma ângulos com a reta n que são congruentes aos ângulos correspondentes formados por m' com a reta n , provando o resultado. \square

Como consequência do teorema acima, temos os seguintes resultados. O primeiro deles traz uma propriedade muito importante sobre triângulos, que será fundamental para provarmos os resultados sobre semelhança de triângulos mais adiante, bem como outras propriedades importantes do triângulo. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Corolário 7. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Pelo vértice C , trace uma reta paralela ao lado AB e numere os ângulos formados com o vértice C , como indicado na figura 46.

Note que $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ é um ângulo raso e, portanto, $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$. Como AC é transversal às duas retas paralelas, então segue do Teorema 16 que $\hat{1} = \hat{A}$. Por outro lado, temos que BC é também transversal às duas retas paralelas e portanto, pelo Teorema 16, segue que $\hat{3} = \hat{B}$. Logo,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{ACB} = \hat{1} + \hat{3} + \hat{2} = 180^\circ,$$

obtendo o resultado desejado. \square

O próximo resultado traz diversas propriedades sobre os ângulos de um triângulo e sobre ângulos de um quadrilátero. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Corolário 8. (a) A soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é 90° .

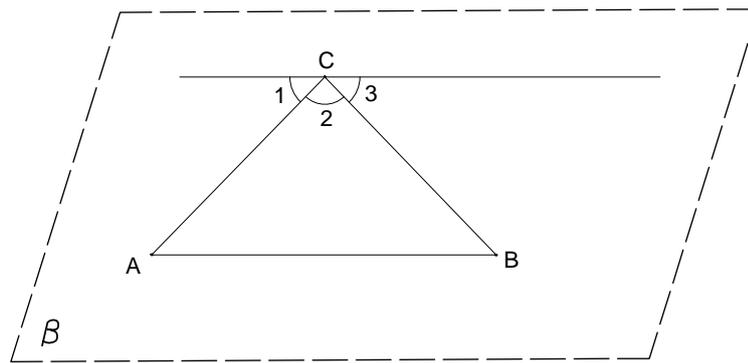


Figura 46 – A soma dos ângulos internos de um triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

- (b) Cada ângulo de um triângulo equilátero mede 60° .
- (c) A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos que não lhe são adjacentes.
- (d) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360° .

Demonstração. Iniciaremos provando o item (a). Sejam α , β e 90° os ângulos internos deste triângulo. Então, pelo Corolário 7, temos:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ,$$

o que implica que $\alpha + \beta = 90^\circ$, provando o resultado desejado.

Vamos provar agora o item (b). Seja ABC um triângulo equilátero, então sabemos que os três ângulos internos de ABC são congruentes. Logo, usando este fato e o Corolário 7, temos:

$$3 \cdot \alpha = 180^\circ,$$

o que implica $\alpha = 60^\circ$, ou seja, todos os ângulos internos de ABC são congruentes e igual a 60° .

Para o item (c), considere o triângulo ABC , figura 47.

Seja $\widehat{4}$ o ângulo externo ao triângulo ABC . Então, como $\widehat{3} + \widehat{4}$ é um ângulo raso, segue que:

$$\widehat{3} + \widehat{4} = 180^\circ. \quad (*)$$

Por outro lado, temos:

$$\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} = 180^\circ, \quad (**)$$

pelo Corolário 7. Por (*) e (**) temos:

$$\widehat{4} = \widehat{1} + \widehat{2},$$

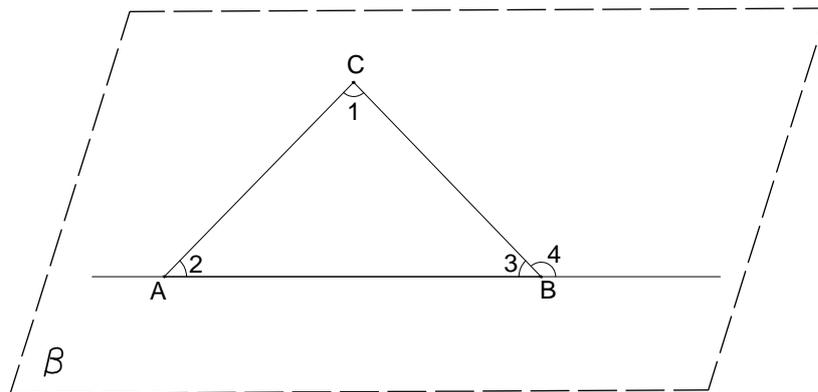


Figura 47 – Ângulo externo de um triângulo e a relação com os ângulos internos

Fonte: Elaborada pelo autor.

provando o resultado desejado. Para os outros ângulos externos do triângulo ABC , basta usar um raciocínio análogo.

Finalmente, mostraremos o item (d). Para este item, basta notar que todo quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos e portanto, a soma dos ângulos internos é igual a 360° . \square

A seguir, apresentaremos uma propriedade interessante sobre os ângulos externos de um triângulo.

Corolário 9. A soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360° .

Demonstração. Seja ABC um triângulo com ângulos internos $\widehat{1}$, $\widehat{2}$ e $\widehat{3}$ e ângulos externos $\widehat{4}$, $\widehat{5}$ e $\widehat{6}$, conforme a figura 48.

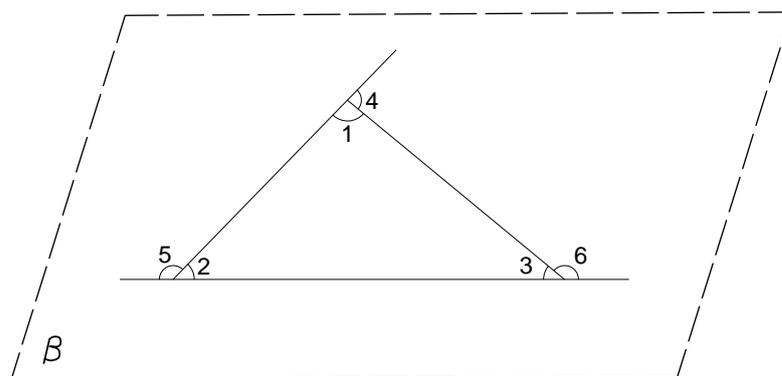


Figura 48 – A soma dos ângulos externos de um triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo Corolário 8, temos que:

$$\widehat{6} = \widehat{1} + \widehat{2}$$

$$\widehat{4} = \widehat{2} + \widehat{3}$$

$$\widehat{5} = \widehat{1} + \widehat{3}$$

Logo,

$$\widehat{6} + \widehat{4} + \widehat{5} = \widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} = 360^\circ,$$

usando o fato que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual 180° , obtendo assim o resultado desejado. \square

Em um triângulo retângulo, seus lados recebem um nome especial, conforme veremos a seguir.

Definição 27. Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado **hipotenusa**, enquanto os outros dois lados são denominados **catetos**.

Pelo Corolário 4, vemos que a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo. Entretanto, pela Desigualdade Triangular, vemos que a medida da hipotenusa é menor que a soma das medidas dos catetos do triângulo retângulo.

Finalmente, apresentaremos um caso de congruência particular para este triângulo. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Teorema 5.14).

Teorema 17 (Congruência de triângulos retângulos). Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos cujos ângulos retos são \widehat{C} e \widehat{C}' , respectivamente. Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:

1. $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\widehat{A} = \widehat{A}'$,
2. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$,
3. $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e $\widehat{A} = \widehat{A}'$.

Demonstração. Começaremos provando o caso 1. Nossas hipóteses são, neste caso, as seguintes:

$$\begin{cases} \widehat{C} = \widehat{C}' \text{ (reto)} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \widehat{A} = \widehat{A}'. \end{cases}$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e $\widehat{A} = \widehat{A}'$, $\widehat{C} = \widehat{C}'$, então segue que $\widehat{B} = \widehat{B}'$. Portanto, podemos aplicar o caso de congruência ALA para concluirmos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes neste caso.

Suponha agora o caso 3. Então, nossas hipóteses são:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}'. \end{cases}$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , segue que $\widehat{B} = \widehat{B}'$ e, portanto, pela congruência de triângulos ALA, obtemos o resultado desejado.

Finalmente, mostraremos o caso 2. Então, nossas hipóteses são:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \\ \widehat{C} = \widehat{C}'. \end{cases}$$

Começaremos sobrepondo os lados AB e $A'B'$ dos triângulos ABC e $A'B'C'$. Para isto, construiremos a figura 49 de modo que A coincida com A' e B coincida com B' . Isto é possível pois $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, por hipótese.

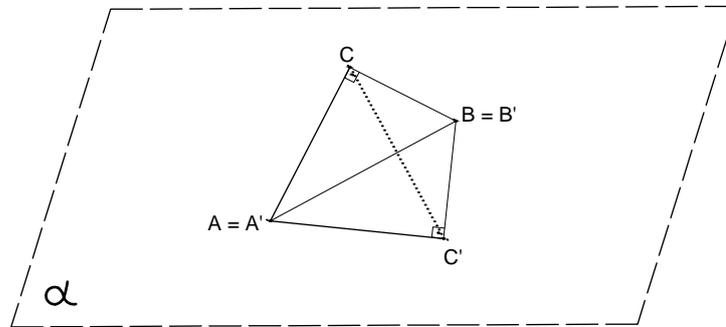


Figura 49 – Congruência em triângulo retângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que $\overline{B'C} = \overline{B'C'}$, então o triângulo $B'CC'$ é isósceles e, portanto, $B'\widehat{CC}' = B'\widehat{C}'C$. Como $B\widehat{CA} = B'\widehat{C}'A' = 90^\circ$, então $A'\widehat{CC}' = A'\widehat{C}'C$, pois

$$B\widehat{CA} = A'\widehat{CC}' + B'\widehat{CC}'$$

$$B'\widehat{C}'A' = A'\widehat{C}'C + B'\widehat{C}'C.$$

Deste fato, concluímos que o triângulo $CA'C'$ é isósceles. Logo, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$. Portanto, temos:

$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{A'C} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C} = \overline{B'C'} \\ \overline{AB} = \overline{A'B'}, \end{cases}$$

o que implica que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes pelo caso LLL, concluindo a demonstração. \square

Apresentaremos a seguir um teorema que traz uma propriedade muito útil e intuitiva sobre retas paralelas. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Teorema 18. Se m e n são retas paralelas, então todos os pontos de m estão a mesma distância da reta n .

Demonstração. Sejam m e n duas retas paralelas. Tome dois pontos A e A' na reta m e baixe deles retas perpendiculares à reta n .

Sejam B e B' , respectivamente, os pés destas perpendiculares conforme ilustrado na figura 50.

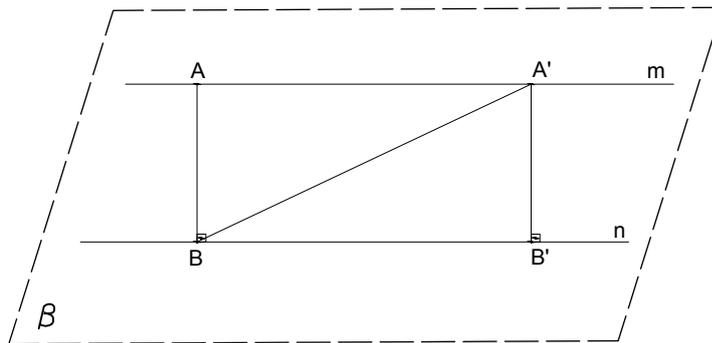


Figura 50 – Distância entre pontos pertencentes a retas paralelas distintas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Precisamos mostrar que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Observe que $\widehat{AA'B} = \widehat{A'BB'}$ e $\widehat{A'AB} = 90^\circ$. Isto segue do fato de m e n serem paralelas e pelo Teorema 16, ao considerar-se $\overleftrightarrow{A'B}$ e \overleftrightarrow{AB} como retas transversais.

Segue então que os triângulos $AA'B$ e $B'BA'$ são retângulos com um ângulo agudo e hipotenusa (comum) congruentes. Então, pelo caso de congruência em triângulo retângulo, vemos que os triângulos $AA'B$ e $B'BA'$ são congruentes. Note que esta congruência corresponde os seguintes respectivos vértices: A com B' , A' com B e B com A' . Logo, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, como queríamos mostrar. \square

A recíproca deste resultado também é verdadeira, conforme veremos no resultado a seguir.

Teorema 19. Se m e n são duas retas tais que todos os pontos de m estão à mesma distância da reta n , então m e n são paralelas.

Demonstração. Suponha, por contradição, que as retas m e n não sejam paralelas. Então, m e n se intersectam em um ponto P . Escolha dois pontos A e A' distintos em m . Como, por hipótese, todos os pontos da reta m são equidistantes da reta n , então podemos tomar, sem perda de generalidade, os pontos A e A' à direita de P .

Como A e A' são equidistantes da reta n , então existem B e B' em n tais que:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'},$$

de modo que AB e $A'B'$ sejam perpendiculares a reta n .

Podemos, portanto, formar dois triângulos PAB e $PA'B'$ conforme mostrado na figura 51.

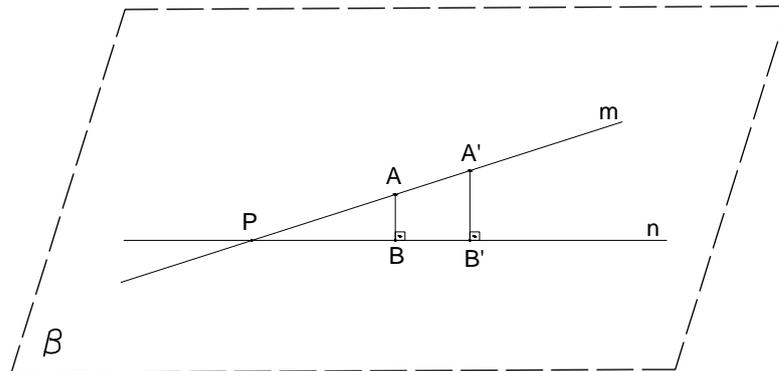


Figura 51 – As retas m e n ou são paralelas ou coincidentes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que $\widehat{APB} = \widehat{A'PB'}$ e também, $\widehat{PB'A'} = \widehat{PBA} = 90^\circ$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , segue que $\widehat{PAB} = \widehat{PA'B'}$. Por outro lado, como $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, então pelo caso de congruência ALA, temos que os triângulos PAB e $PA'B'$ são congruentes e portanto,

$$\overline{PA'} = \overline{PA} \quad \text{e} \quad \overline{PB} = \overline{PB'}.$$

Mas como A' e A estão à direita de P e B e B' estão à direita de P e A' , A e P são colineares, bem como P , B e B' são colineares, então $A' = A$ e $B = B'$, contradizendo o fato de A' e A serem pontos distintos. Logo, as retas m e n não se cruzam e, portanto, são paralelas, provando o resultado desejado. \square

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Neste capítulo, nosso objetivo é estudar os quadriláteros notáveis. Para isto, apresentaremos a definição de paralelogramo e algumas propriedades que o caracterizam, permitindo-nos identificar um paralelogramo utilizando apenas uma das suas propriedades ou mesmo a sua própria definição. Em seguida, vamos aprofundar nossos estudos, conhecendo alguns casos que merecem destaques como é o caso do retângulo, losango e quadrado. As principais referências para este capítulo são (BARBOSA, 2012; DOLCE; POMPEO, 1997).

5.1 Paralelogramo

Começaremos apresentando a definição de um paralelogramo.

Definição 28. Um quadrilátero convexo é dito um **paralelogramo** se, e somente se, todos os lados opostos são paralelos.

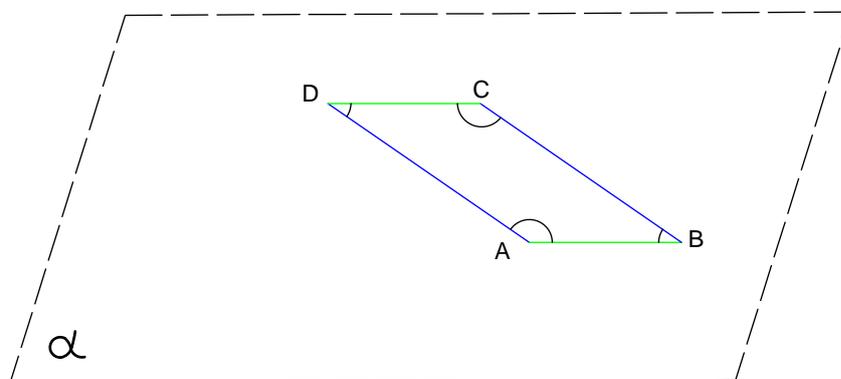


Figura 52 – Paralelogramo ABC

Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, apresentaremos a primeira caracterização do paralelogramo. Este resultado pode se encontrado em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Proposição 2. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos internos opostos são congruentes

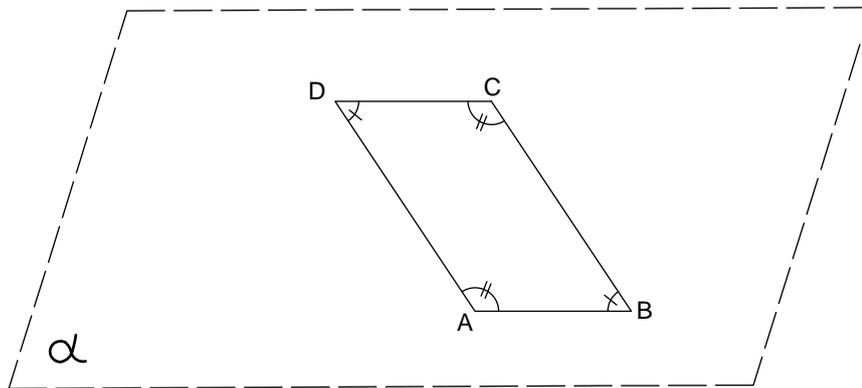


Figura 53 – Paralelogramo e os ângulos opostos

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Primeiro, vamos supor que o quadrilátero convexo $ABCD$ seja um paralelogramo. Então $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Por outro lado, observe que em relação a \overline{BC} há duas retas transversais \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} , que são paralelas. Portanto, pelo que vimos no capítulo anterior, $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. Analogamente, \overleftrightarrow{BC} e \overleftrightarrow{AD} são paralelas e intersectadas por \overleftrightarrow{CD} , logo $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$. Logo, temos:

$$\begin{cases} \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \\ \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ, \end{cases}$$

o que implica em $\widehat{B} = \widehat{D}$. Analogamente, podemos mostrar que $\widehat{A} = \widehat{C}$.

Reciprocamente, suponha que $ABCD$ é um quadrilátero convexo e seus ângulos internos opostos são iguais, ou seja, $\widehat{B} = \widehat{D}$ e $\widehat{A} = \widehat{C}$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a 360° pelo Corolário 8, então $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$. Substituindo \widehat{D} por \widehat{B} e \widehat{C} por \widehat{A} , obtemos:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{B} = 360^\circ$$

o que implica que $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$. Portanto, \overleftrightarrow{AD} é paralelo a \overleftrightarrow{BC} . Analogamente, se substituirmos \widehat{A} por \widehat{C} e \widehat{B} por \widehat{D} na expressão $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$, obtemos $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$ e daí, concluímos que \overleftrightarrow{AB} é paralela a \overleftrightarrow{DC} , o que implica que $ABCD$ é um paralelogramo. \square

O próximo resultado traz uma caracterização do paralelogramo de acordo com a medida dos seus lados. Este resultado pode ser encontrado em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Proposição 3. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, cada lado tiver comprimento congruente ao lado oposto.

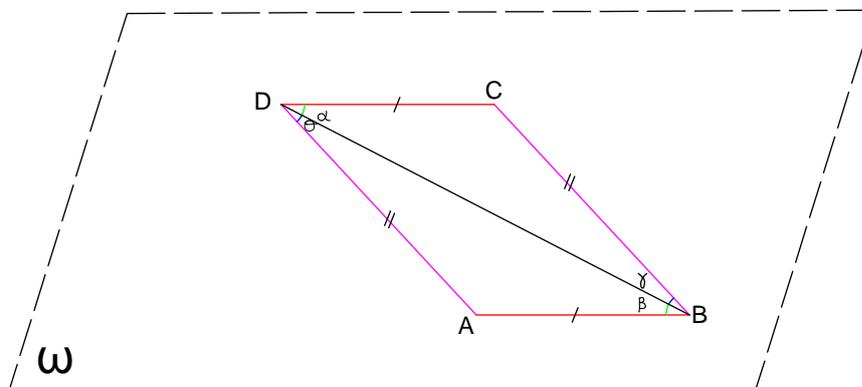


Figura 54 – Paralelogramo, lados opostos iguais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Suponha que um quadrilátero convexo $ABCD$ seja um paralelogramo (veja figura 54 para ilustração). Trace a diagonal \overline{BD} , então os ângulos α e β são formados pela diagonal com as retas paralelas \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{AB} e, portanto, $\alpha = \beta$. Note também que a diagonal \overline{BD} intersecta as retas paralelas \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{BC} formando, respectivamente, os ângulos θ e γ , que são congruentes. Por outro lado, note que a diagonal \overline{BD} é um lado comum dos triângulos ABD e CBD . Pelo caso ALA, usando a respectiva correspondência de vértices, temos que o triângulo BDA é congruente ao triângulo DBC e, sendo assim, $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Reciprocamente, se $ABCD$ é um quadrilátero convexo tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Trace a diagonal \overline{BD} , então pelo caso LLL, os triângulos BDA e DBA são congruentes. Daí, segue que $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$ e $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ o que implicam, respectivamente, que \overleftrightarrow{BC} é paralela a \overleftrightarrow{AD} e \overleftrightarrow{AB} é paralela a \overleftrightarrow{CD} . Como consequência, obtemos, pela definição, que $ABCD$ é um paralelogramo. \square

Apresentaremos a seguir uma caracterização do paralelogramo a partir de uma propriedade de suas diagonais. Este resultado pode ser encontrado em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Proposição 4. Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se, e somente se, o ponto médio de cada diagonal é também o ponto de intersecção de ambas as diagonais.

Demonstração. Supondo que $ABCD$ seja um paralelogramo e E seja o ponto de intersecção das suas diagonais (veja a figura 55 para ilustração). Então, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ pela Proposição 3 e pela definição de paralelogramo. Portanto, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$, o que implica que $\widehat{ABE} = \widehat{EDC}$.

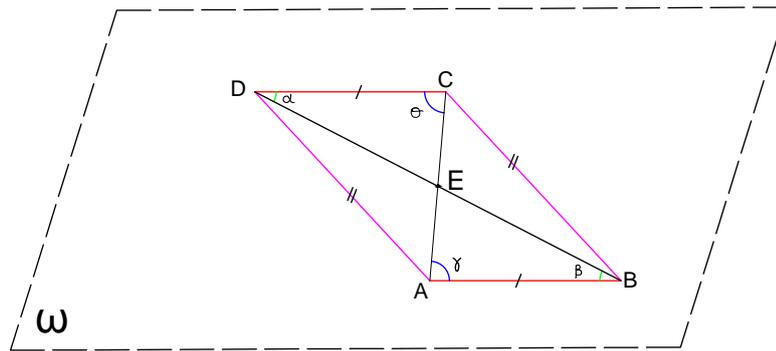


Figura 55 – Paralelogramo, ponto médio

Fonte: Elaborada pelo autor.

Analogamente, $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ e $\widehat{BAE} = \widehat{DCE}$. Portanto, pelo caso ALA, o triângulo BAE é congruente ao triângulo DCE e portanto $\overline{AE} = \overline{CE}$ e $\overline{EB} = \overline{ED}$, provando a primeira parte.

Reciprocamente, seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e seja E a intersecção das suas diagonais de tal modo que E seja o ponto médio de cada diagonal. Disto, temos que $\overline{DE} = \overline{EB}$ e $\overline{AE} = \overline{EC}$ e como \widehat{AEB} e \widehat{CED} são opostos pelo vértice, segue que $\widehat{AEB} = \widehat{CED}$. Pelo caso LAL, temos que o triângulo AEB é congruente ao triângulo CEB e portanto, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Analogamente, temos que $\overline{BC} = \overline{AD}$. Como os lados opostos do quadrilátero convexo são congruentes, então $ABCD$ é um paralelogramo, pela proposição 3, obtendo o resultado desejado. \square

O próximo resultado apresenta uma propriedade mais geral do que a apresentada na Proposição 3 e na definição, mostrando que se pelo menos dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então já podemos garantir que o quadrilátero é um paralelogramo. Esta propriedade é muito útil, pois nem sempre temos informações sobre os quatro lados do paralelogramo, mas apenas sobre os dois lados opostos. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 6.12).

Proposição 5. Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Demonstração. Considere o paralelogramo $ABCD$ de modo que \overline{AB} seja congruente a \overline{DC} e também, paralelo a este. Como AB e DC são paralelos, sabemos que todos os pontos de AB são equidistantes de CD (pelo Teorema 18, capítulo 4). Então, baixe uma perpendicular do ponto A até o segmento DC e denote por E o ponto de intersecção. Analogamente, baixe a perpendicular do ponto B sob a semirreta \overleftrightarrow{CD} . Prolongue o segmento CD de modo que F seja o ponto de intersecção da perpendicular baixada do ponto B e a semirreta \overleftrightarrow{CD} . Considere então os dois triângulos AED e BFC . Primeiramente, note que $\overline{BF} = \overline{AE}$ e $\widehat{AED} = \widehat{BFC} = 90^\circ$. Como, por hipótese, $\overline{AB} = \overline{DC}$ e por construção, $\overline{AB} = \overline{EF}$, então segue que $\overline{CF} = \overline{DE}$. Portanto, os triângulos AED e BFC são congruentes pela congruência de triângulo retângulo, o que implica

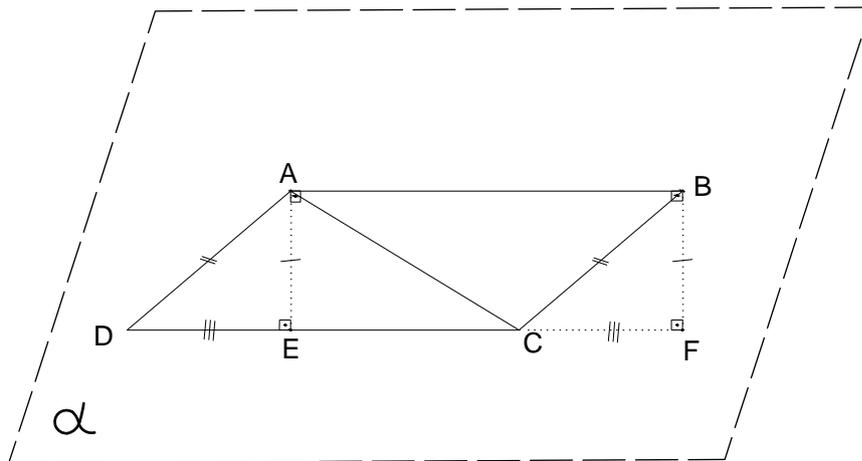


Figura 56 – Paralelogramo

Fonte: Elaborada pelo autor.

que $\overline{BC} = \overline{AD}$. Logo, a Proposição 3 implica que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo, obtendo o resultado desejado. \square

O teorema a seguir traz uma propriedade muito importante do triângulo conhecida como base média do triângulo e pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Teorema 6.13).

Teorema 20. O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

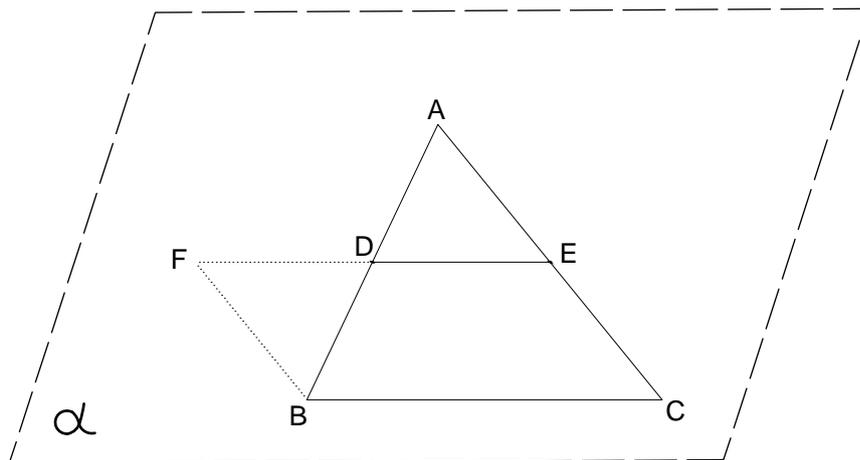


Figura 57 – Base média de triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Denotaremos por D o ponto médio do lado AB e por E o ponto médio do lado AC . Então, precisamos mostrar que DE é paralelo a BC e também, que $\overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$. Para isso, marquemos na semirreta \overleftrightarrow{ED} um ponto F tal que $\overline{FD} = \overline{DE}$. Como D

é ponto médio de AB , temos que $\overline{AD} = \overline{DB}$ e como os ângulos \widehat{ADE} e \widehat{FDB} são opostos pelo vértice, eles são congruentes. Então, pelo caso LAL, segue que os triângulos ADE e FDB são congruentes. Como consequência, temos que $\widehat{DFB} = \widehat{AED}$ e $\overline{FB} = \overline{AE} = \overline{EC}$. Logo, \overline{FB} e \overline{EC} são congruentes e paralelos. Portanto, a Proposição 5 implica que o quadrilátero $FBCE$ é um paralelogramo e, portanto, os segmentos \overline{FE} e \overline{BC} são paralelos e congruentes. Como D é ponto médio de \overline{FE} , então $\overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{FE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$, obtendo o resultado desejado. \square

O próximo resultado será muito importante no estudo de semelhança de triângulos.

Proposição 6. [(BARBOSA, 2012, Proposição 6.14)] Suponha que três retas paralelas a , b e c cortam as retas m e n nos pontos A , B e C e nos pontos A' , B' e C' , respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C , então o ponto B' também encontra-se entre A' e C' . E também se $\overline{AB} = \overline{BC}$, então $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$.

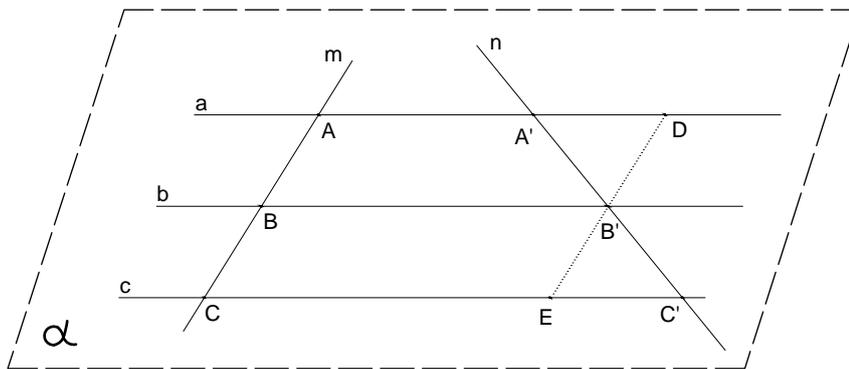


Figura 58 – Retas paralelas cortadas por duas transversais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Sejam a , b e c retas paralelas e m e n retas que intersectam estas paralelas, respectivamente, nos pontos A , B e C e A' , B' e C' , como mostra a figura 58. Se B está entre A e C , então A e C estão em semiplanos distintos relativamente à reta b . Observe que A e A' estão em um mesmo semiplano determinado por b , já que a e b são retas paralelas e A e A' pertencem à reta a . Do mesmo modo, C e C' estão em um mesmo semiplano determinado por b . Podemos, portanto, concluir que A' e C' estão em semiplanos distintos relativamente à reta b .

Logo, b intercepta o segmento $A'C'$ em um único ponto. Como B' é o ponto de intersecção da reta n com a reta b e A' e C' pertencem a n , concluímos que o ponto de intersecção de $A'C'$ com b é exatamente o ponto B' . Logo, B' pertence ao segmento $A'C'$, o que implica que B' está entre A' e C' . Isto prova a primeira parte da proposição.

Para demonstrar a segunda parte, trace pelo ponto B' uma reta paralela à reta m . Esta corta as retas a e c nos pontos D e E , respectivamente. Afirmamos que os triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ são congruentes. De fato, como $DB'BA$ e $B'ECB$ são paralelogramos, pois seus respectivos

lados opostos são paralelos. Então pela Proposição 3, $\overline{DB'} = \overline{AB}$ e $\overline{B'E} = \overline{BC}$. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$ por hipótese, concluímos que $\overline{DB'} = \overline{B'E}$. Observe que os ângulos $\widehat{DB'A'}$ e $\widehat{EB'C'}$ são congruentes por serem opostos pelo vértice e $\widehat{B'DA'}$ e $\widehat{B'EC'}$ são também congruentes por serem ângulos correspondentes determinados por uma transversal cortada pelas retas paralelas a e c . Logo, pelo caso ALA, temos a congruência dos triângulos $B'DA'$ e $B'EC'$ e esta, por sua vez, implica que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$, obtendo o resultado desejado. \square

Podemos estender esta proposição para o caso em que as duas transversais cortam mais de três retas paralelas. Omitiremos a demonstração, uma vez que ela segue analogamente a demonstração da Proposição 6.

Corolário 10. [(BARBOSA, 2012, Corolário 6.15)] Suponha que k retas paralelas a_1, a_2, \dots, a_k cortam duas retas m e n nos pontos A_1, A_2, \dots, A_k e nos pontos A'_1, A'_2, \dots, A'_k , respectivamente. Se $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_{k-1}A_k}$, então $\overline{A'_1A'_2} = \overline{A'_2A'_3} = \dots = \overline{A'_{k-1}A'_k}$.

O resultado que segue será crucial para provarmos nossos resultados sobre semelhanças de triângulos apresentados no próximo capítulo.

Teorema 21. [(BARBOSA, 2012, Teorema 6.16)] Se uma reta, paralela a um dos lados de um triângulo, corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

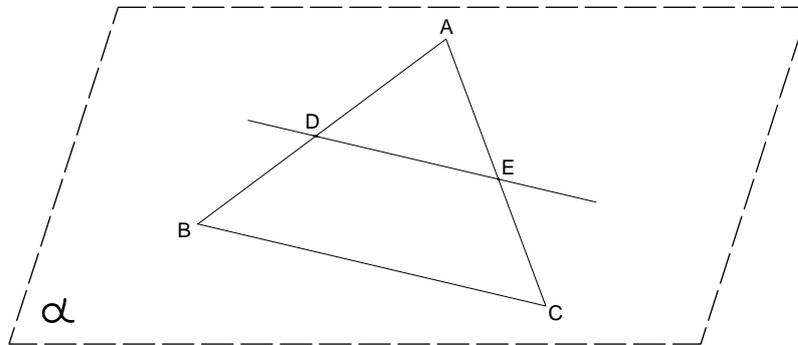


Figura 59 – Reta paralela a um dos lados de um triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Considere uma reta paralela ao lado BC que corta os lados AB e AC , respectivamente, nos pontos D e E , como representado na figura 59. Precisamos mostrar que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}.$$

Para isto, tome um pequeno segmento $\overline{AP_1}$ na semirreta \overrightarrow{AB} , de modo que as razões $\overline{AB}/\overline{AP_1}$ e $\overline{AD}/\overline{AP_1}$ não sejam números inteiros. Consideremos na semirreta \overrightarrow{AB} os pontos $P_2, P_3, \dots, P_k, \dots$, tais que:

$$k \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP_k},$$

para todo $k \geq 2$. Portanto, existem dois números inteiros m e n diferentes de zero tais que:

- D está entre P_m e P_{m+1}
- B está entre P_n e P_{n+1} .

Isto implica que:

$$\overline{AP_m} = m \cdot \overline{AP_1} < \overline{AD} < (m+1) \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP_{m+1}}$$

$$\overline{AP_n} = n \cdot \overline{AP_1} < \overline{AB} < (n+1) \cdot \overline{AP_1} = \overline{AP_{n+1}}.$$

Pelas desigualdades acima, temos:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} < \frac{m+1}{n}, \quad (5.1)$$

uma vez que $\overline{AP_1}$ é diferente de zero.

Tracemos pelos pontos P_1, P_2, \dots, P_{n+1} retas paralelas a BC . Pelo Corolário 10, estas retas cortam a semirreta \overrightarrow{AC} em pontos Q_1, Q_2, \dots, Q_{n+1} que também satisfazem a igualdade:

$$k \cdot \overline{AQ_1} = \overline{AQ_k},$$

para todo $k, 2 \leq k \leq n+1$. De modo análogo, vemos que o ponto E encontra-se entre Q_m e Q_{m+1} e o ponto C , entre os pontos Q_n e Q_{n+1} . Repetindo o mesmo raciocínio feito acima, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{m}{n+1} < \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} < \frac{m+1}{n}. \quad (5.2)$$

As desigualdades (5.1) e (5.2) implicam em:

$$\left| \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \right| < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1}. \quad (5.3)$$

Como $m \leq n$ (isto segue da maneira como tomamos m e n), então:

$$\frac{m+1}{n} - \frac{m}{n+1} = \frac{m+n+1}{n(n+1)} \leq \frac{2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n},$$

implicando que as razões $\overline{AD}/\overline{AB}$ e $\overline{AE}/\overline{AC}$ diferem por não mais do que $2/n$. Quanto menor for o segmento AP_1 , tanto maior será o número n e tanto menor será o quociente $2/n$. Como o lado esquerdo da desigualdade (5.3) não depende de n , concluímos que os quocientes $\overline{AD}/\overline{AB}$ e $\overline{AE}/\overline{AC}$ são iguais, obtendo o resultado desejado. \square

5.2 Retângulo

Nesta seção, estudaremos um caso particular de paralelogramo, que é muito importante conhecido como retângulo. Iniciaremos apresentando sua definição.

Definição 29. Todo quadrilátero convexo que possuir os quatro ângulos internos congruentes a 90° será denominado **retângulo**.

Como consequência imediata desta definição, vemos que os lados opostos de um retângulo são paralelos, implicando que todo retângulo é um paralelogramo. Entretanto, note que nem todo paralelogramo é um retângulo, pois existem paralelogramos que possuem ângulos internos diferentes de 90° .

A seguir, apresentamos uma condição necessária e suficiente para que um paralelogramo seja um retângulo. Este resultado pode ser encontrado em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Proposição 7. Um paralelogramo é um retângulo se, e somente se, as diagonais forem congruentes.

Demonstração. Seja $ABCD$ um retângulo, queremos provar inicialmente que $\overline{AC} = \overline{BD}$ (veja figura 60 a esquerda para ilustração). Faremos esta demonstração por congruência de triângulos. Para isto, considere os triângulos ADB e DAC , note que \overline{AD} é lado comum aos dois triângulos e o segmento \overline{AB} possui a mesma medida que \overline{DC} , pois $ABCD$ é um retângulo (e, em particular, é um paralelogramo). Também, como $ABCD$ é um retângulo, segue que os ângulos \widehat{DAB} e \widehat{ADC} são iguais a 90° . Portanto, pelo caso LAL, segue a congruência dos triângulos ADB e DAC , implicando na congruência das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} .

Reciprocamente, suponhamos que $ABCD$ seja um paralelogramo cuja as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} sejam congruentes (veja figura 60 a direita para ilustração). Novamente, observando os triângulos ADB e DAC , temos que AD é lado comum aos dois triângulos e $\overline{AB} = \overline{DC}$, pois $ABCD$ é um paralelogramo. Como as diagonais são congruentes, então pelo caso LLL, os triângulos ADB e DAC são congruentes, implicando na congruência dos ângulos \widehat{DAB} e \widehat{ADC} . Por outro lado, em um paralelogramo a soma dos ângulos consecutivos é igual a 180° , ou seja, $\widehat{DAB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Disto, temos $\widehat{DAB} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, obtendo o resultado desejado. \square

5.2.1 Losango

Nesta seção, estudaremos outro caso particular de paralelogramo chamado losango. Este caso particular é também muito importante, pois é uma figura geométrica que aparece bastante no nosso cotidiano. Começaremos apresentando a sua definição.

Definição 30. Todo quadrilátero convexo que possuir os quatro lados congruentes será denominado **losango**.

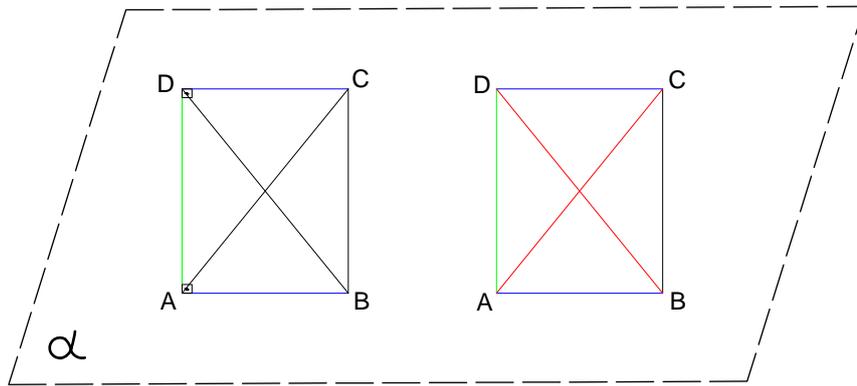


Figura 60 – Retângulo e suas diagonais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela Proposição 3, vemos que todo losango é um paralelogramo. Mas nem todo paralelogramo é um losango, afinal alguns paralelogramos possuem apenas pares de lados congruentes, mas não os quatro, como vimos na Proposição 5.

Os próximos resultados trazem propriedades sobre o losango. Eles podem ser encontrado em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Proposição 8. Todo losango tem diagonais perpendiculares.

Demonstração. Vamos supor inicialmente que $ABCD$ seja um losango. Queremos provar que suas diagonais são perpendiculares (veja figura 61 a esquerda para ilustração). O losango em questão tem os lados na cor azul para representar que são todos congruentes. Seja E o ponto de intersecção das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} , então como $ABCD$ é um losango (e, portanto, um paralelogramo), segue da Proposição 4 que este ponto E corresponde ao ponto médio de cada diagonal. Portanto, pelo caso LLL, os triângulos AEB e AED são congruentes, bem como os triângulos CEB e CED são congruentes.

Pela congruência, concluímos que os ângulos \widehat{AEB} e \widehat{AED} são congruentes, bem como os ângulos \widehat{CEB} e \widehat{CED} são congruentes. Como $\widehat{AEB} + \widehat{AED}$ é um ângulo raso e $\widehat{CEB} + \widehat{CED}$ também é um ângulo raso, concluímos que $\widehat{AEB} = 90^\circ = \widehat{AED}$ e $\widehat{CEB} = \widehat{CED} = 90^\circ$ e, portanto, as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} são perpendiculares, como queríamos mostrar. \square

Proposição 9. Todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Demonstração. Seja $ABCD$ um paralelogramo com as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} perpendiculares. Pela Proposição 4, o encontro das diagonais é o ponto médio de cada diagonal (veja figura 61 a direita para ilustrar). Segue que $\overline{AE} = \overline{EC}$ e $\overline{ED} = \overline{EB}$. Pela congruência do triângulo retângulo, segue que os triângulos AED , DEC , ABE e BEC são congruentes. Disto, segue que $\overline{BC} = \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$ e, portanto, concluímos que $ABCD$ é um losango. \square

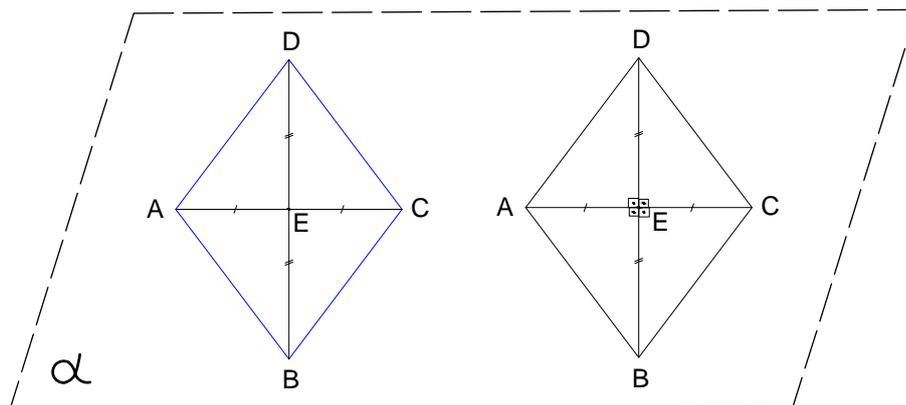


Figura 61 – Retângulo e suas diagonais

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.2 Quadrado

Finalmente, nesta seção, apresentaremos outro caso particular de um paralelogramo conhecido como quadrado. Esta figura geométrica também é muito importante e aparece frequentemente em nosso cotidiano.

Começaremos apresentando a definição desta figura.

Definição 31. Todo quadrilátero convexo que tiver os quatro lados congruentes, e ainda, possuir os quatro ângulos internos congruentes medindo 90° cada um, será denominado **quadrado**.

Como o quadrado possui os quatro lados congruentes e os quatro ângulos internos retos, podemos mostrar usando as mesmas ideias da seção anterior que o quadrado possui diagonais perpendiculares e diagonais congruentes se assemelhando ao losango e ao retângulo, respectivamente. Por este motivo, podemos dizer que todo quadrado é um retângulo **ou**¹ um losango. Entretanto, o losango nem sempre é um quadrado visto que seus ângulos internos podem ser diferentes de 90° e nem todo retângulo é um quadrado, uma vez que o retângulo pode ter lados com comprimentos distintos e por isso, pode não ser considerado um quadrado.

¹ A palavra **ou** tem sentido de união, pode ser uma das duas opções ou mesmo as duas juntas

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Neste capítulo, estudaremos a propriedade de semelhanças de triângulos. Esta propriedade será muito importante no estudo de diversas propriedades do triângulo. Nossa principal referência para este capítulo foi o livro (BARBOSA, 2012).

Começaremos apresentando a definição de triângulos semelhantes.

Definição 32. Diremos que dois triângulos são **semelhantes** se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e os lados correspondentes sejam proporcionais.

Mais precisamente, a definição acima nos diz que se dois triângulos ABC e EFG são semelhantes, então é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices. Se fizermos, por exemplo, a seguinte correspondência entre seus respectivos vértices:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow E \\ B \rightarrow F \\ C \rightarrow G, \end{array} \right.$$

então teremos as seguintes relações de proporcionalidade entre seus respectivos lados:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}}. \quad (6.1)$$

Além disso, podemos estabelecer as seguintes relações de congruência entre os seus respectivos ângulos:

$$\hat{A} = \hat{E}, \quad \hat{B} = \hat{F} \quad \text{e} \quad \hat{C} = \hat{G}.$$

Chamaremos o quociente comum na igualdade (6.1) de **razão de proporcionalidade** entre dois triângulos.

Observação 2. Note que dois triângulos são congruentes se, e somente se, eles são semelhantes com razão de proporcionalidade igual a 1. Por outro lado, se dois triângulos são semelhantes com razão de proporcionalidade **diferente de 1**, então eles não são congruentes. A figura a seguir ilustra dois triângulos que são semelhantes, mas não são congruentes.

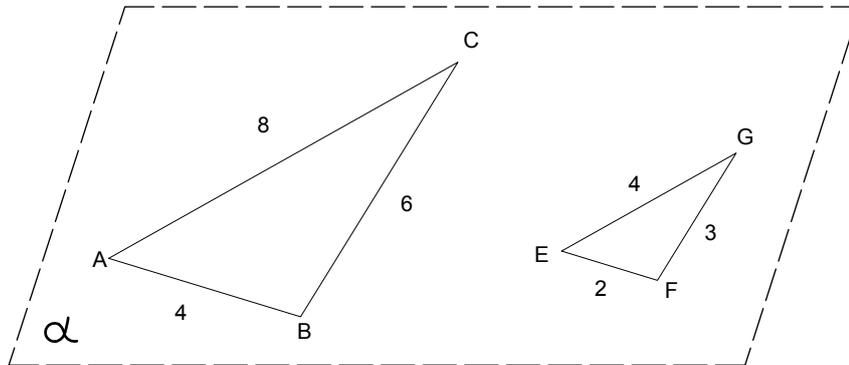


Figura 62 – Triângulos Semelhantes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que do mesmo modo que a congruência, a semelhança de triângulos também é uma relação de equivalência, pois satisfaz as três propriedades: reflexividade, simetria e transitividade.

Vejamos a seguir o primeiro resultado sobre semelhança de triângulos. Ele nos fornece condições que garantem a semelhança entre dois triângulos. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Teorema 7.1).

Teorema 22. Dados dois triângulos ABC e EFG , se $\hat{A} = \hat{E}$ e $\hat{B} = \hat{F}$, então os triângulos são semelhantes.

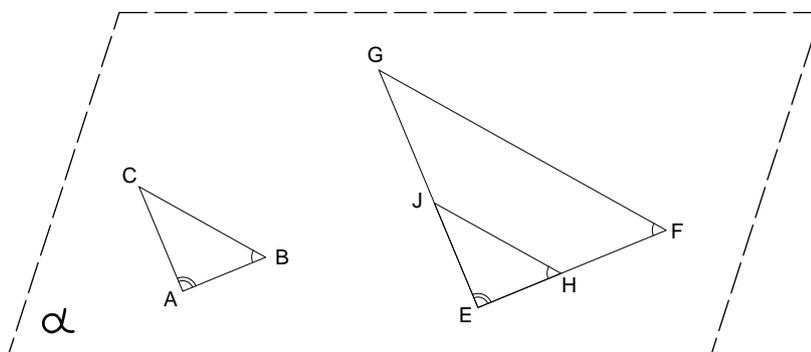


Figura 63 – Triângulos Semelhantes: Caso 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , então a congruência dos ângulos \hat{A} e \hat{E} e dos ângulos \hat{B} e \hat{F} implicam a congruência dos ângulos \hat{C} e

Por outro lado, como por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\widehat{H} = \widehat{A} = \widehat{E}$, então pelo caso LAL, concluímos que os triângulos EFG e HIJ são congruentes. Portanto, como os triângulos ABC e HIJ são semelhantes, então os triângulos ABC e EFG são semelhantes, obtendo o resultado desejado. \square

Finalmente, vamos apresentar o último caso de semelhança entre triângulos. Este caso baseia-se apenas na proporcionalidade entre os lados dos respectivos triângulos. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Teorema 7.3).

Teorema 24. Se, em dois triângulos ABC e EFG , tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{GE}},$$

então os dois triângulos são semelhantes.

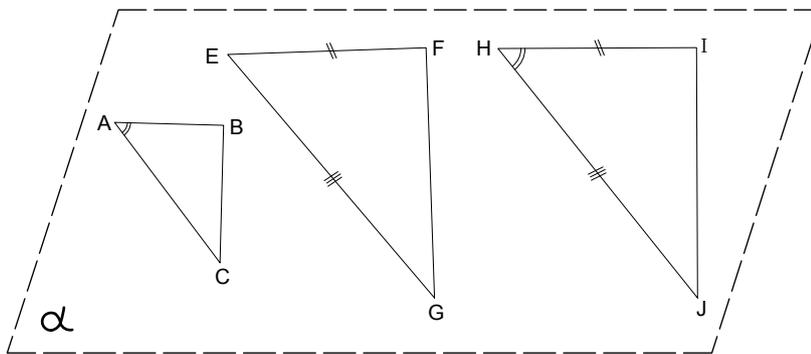


Figura 65 – Triângulos Semelhantes: Caso 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Construa um triângulo HIJ tal que $\widehat{H} = \widehat{A}$, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$. Portanto, pela hipótese, concluímos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Portanto, pelo Teorema 23, os triângulos ABC e HIJ são semelhantes. Deste fato, obtemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{IJ}}.$$

Logo, deste fato e da hipótese do Teorema, concluímos que $\overline{IJ} = \overline{FG}$. Como, por construção, $\overline{HI} = \overline{EF}$ e $\overline{HJ} = \overline{EG}$, segue que os triângulos HIJ e EFG são congruentes pelo caso LLL. Como HIJ e ABC são semelhantes, então por transitividade, segue que ABC e EFG são semelhantes também, concluindo a demonstração. \square

Para finalizar o capítulo, apresentaremos um resultado muito importante sobre os triângulos retângulos. Este teorema é conhecido como *Teorema de Pitágoras*, em homenagem ao grande

filósofo e geômetra da ilha grega de Samos. Apesar de receber seu nome, ainda existem dúvidas se Pitágoras foi, de fato, o primeiro a provar este resultado, pois existem evidências de que este resultado pode ter sido conhecido muito antes dele, conforme a referência (STEWART, 2013). Por exemplo, uma tabuleta de argila babilônica datada de cerca de mil anos antes de Pitágoras, que atualmente se encontra no British Museum, contém em escrita cuneiforme, um problema matemático e sua resposta conforme descrito abaixo:

4 é o comprimento e 5 a diagonal. Qual é a largura? 4 vezes 4 é 16. 5 vezes 5 é 25. Tire 16 de 25 para obter 9. Quanto vezes quanto preciso pegar para obter 9? 3 vezes 3 é 9. Portanto 3 é a largura. (STEWART, 2013)

Esta escrita na tabuleta nos leva a crer que os babilônicos já conheciam o triângulo de lados 3, 4 e 5 muito antes de Pitágoras. Além disso, existem outras tabuletas que também geram esta dúvida. Por exemplo, uma tabuleta datada de 7289 a.C., da coleção babilônica da Universidade de Yale contém o diagrama de um quadrado de lado 30, cuja diagonal é marcada com duas listas de números. A primeira lista continha os seguintes números 1, 24, 51 e 10, enquanto que a segunda trazia os seguintes números: 42, 25 e 35. Como os babilônios usavam a notação de base 60 para escrever os números, então a primeira lista se referia ao seguinte número $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$, que em decimais, é equivalente a 1,4142129, que nos dá aproximadamente o valor de $\sqrt{2}$. A segunda lista, por sua vez, é 30 vezes este valor (que seria a diagonal referente ao quadrado de lado 30). Portanto, esta tabuleta traz fortes indícios que os babilônios sabiam calcular a diagonal de um quadrado e mais, sabiam que a diagonal de um quadrado era o seu lado multiplicado por $\sqrt{2}$. Este também pode ser considerado um exemplo do Teorema de Pitágoras e traz evidências de que o Teorema de Pitágoras provavelmente já era conhecido antes mesmo de Pitágoras.

Além disso, existe também uma outra tabuleta que sugere que o Teorema de Pitágoras poderia ser conhecido antes de Pitágoras, é a chamada *tabuleta Plimpton 322* da coleção George Arthur Plimpton na Universidade Columbia, que traz uma tabela de números, com quatro colunas e quinze linhas e que parece registrar trincas pitagóricas. Entretanto, não se sabe ao certo se essa tabuleta possui realmente alguma relação com as triplas pitagóricas ou se não seria apenas uma lista de triângulos com áreas fáceis de calcular, por exemplo. Para maiores detalhes, consulte (STEWART, 2013).

Apesar destes fatos, este resultado é conhecido até os dias atuais como o Teorema de Pitágoras. Vejamos o que diz esse teorema tão famoso.

Teorema 25 (Teorema de Pitágoras). Em um triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Iremos demonstrar este teorema de duas maneiras distintas, uma usando semelhança de triângulos e a outra, utilizando áreas de figuras planas. Esta última é a mesma demonstração encontrada no livro “*Os elementos*” de Euclides. Como precisaremos de resultados de áreas de figuras planas para esta última demonstração, iremos apresentá-la no capítulo de áreas.

Finalizaremos este capítulo apresentando a prova do Teorema de Pitágoras usando semelhança de triângulos. Esta demonstração pode ser encontrada em (BARBOSA, 2012, Teorema 7.5).

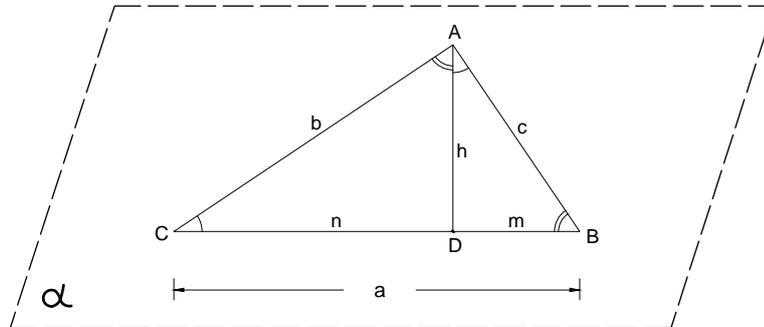


Figura 66 – Teorema de Pitágoras

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Seja ABC um triângulo retângulo qualquer. Então o Teorema de Pitágoras segue como uma consequência direta da semelhança dos triângulos ADB , CDA e ABC (veja figura 66 para ilustração), que segue facilmente pela relação entre os ângulos e usando o Teorema 22.

Da semelhança dos triângulos ADB e ABC ($A \rightarrow C$, $B \rightarrow B$ e $D \rightarrow A$), conclui-se que

$$\frac{m}{c} = \frac{c}{a}.$$

Da semelhança dos triângulos CDA e ABC , conclui-se que

$$\frac{n}{b} = \frac{b}{a}.$$

Logo, $am = c^2$ e $an = b^2$. Portanto, somando ambas, temos:

$$a(m+n) = c^2 + b^2.$$

Como $m+n = a$, então $a^2 = b^2 + c^2$, provando o resultado desejado. \square

CÍRCULO

Neste capítulo, iremos apresentar as principais propriedades do círculo. Já apresentamos alguns elementos do círculo no Capítulo 2, entretanto, neste capítulo, iremos aprofundar no estudo de seus elementos e nas suas principais características e propriedades.

Começaremos apresentando uma propriedade do raio do círculo. Esta propriedade pode ser encontrada em (BARBOSA, 2012).

Proposição 10. Um raio é perpendicular a uma corda (que não é um diâmetro) se, e somente se, a divide em dois segmentos congruentes.

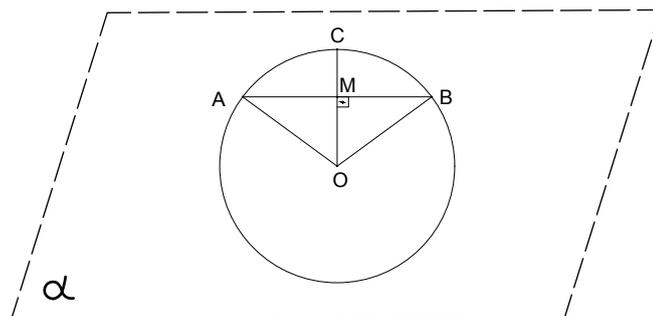


Figura 67 – Relação entre raio e corda

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Sejam O o centro do círculo e OC o raio. Suponha inicialmente que \overline{OC} é perpendicular a corda AB (veja figura 67 para ilustração). Seja M o ponto de intersecção da corda com o raio. Se a corda é perpendicular ao raio, então os ângulos \widehat{OMA} e \widehat{OMB} são retos e como $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios) e \overline{OM} é lado comum, segue que os triângulos AOM e BOM são congruentes. Como consequência, $\overline{AM} = \overline{MB}$, obtendo a primeira parte da proposição. Reciprocamente, se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então como $\overline{OB} = \overline{OA}$ e OM é lado comum, segue pelo caso de congruência LLL

que os triângulos AOM e BOM são congruentes. Como consequência, $\widehat{OMA} = \widehat{OMB}$. Como a soma destes dois ângulos é um ângulo raso, obtemos que cada um deles mede 90° . Portanto, a corda é perpendicular ao raio passando por M , terminando a demonstração. □

A seguir, apresentaremos uma propriedade muito importante do círculo. Ela será muito útil em nosso estudo.

Definição 33. Quando uma reta e um círculo têm apenas um ponto em comum, dizemos que a reta **tangencia** o círculo e chamamos esta reta de **reta tangente** ao círculo. O ponto comum entre uma reta tangente e um círculo é chamado **ponto de tangência** ou **ponto de contacto**.

No que segue, apresentaremos uma propriedade sobre retas tangentes. Este pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Proposição 11. Se uma reta é tangente a um círculo, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.

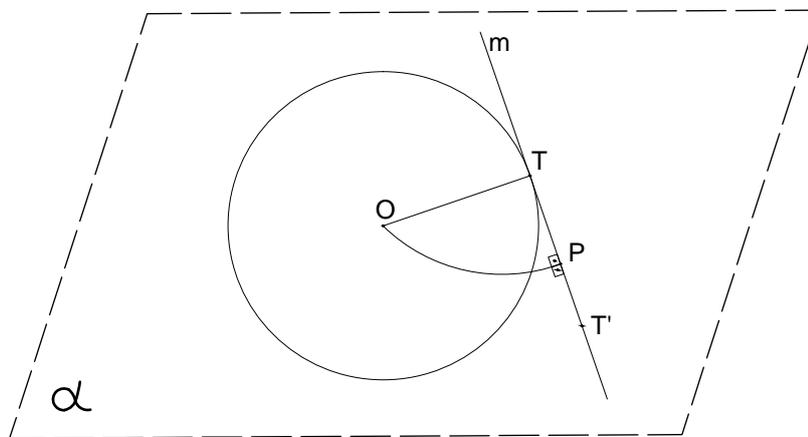


Figura 68 – Ponto de tangência

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Consideremos um círculo de centro O e uma reta m que lhe seja tangente (veja figura 68 para ilustração). Seja T o ponto de tangência. Denotaremos por P o pé da perpendicular baixada do ponto O à reta m . Vamos supor, por contradição, que P e T são pontos distintos. Então, OT é a hipotenusa do triângulo retângulo OPT . Portanto, $\overline{OP} < \overline{OT}$. Como \overline{OT} é o raio do círculo, então P é um ponto interior ao círculo. Tomemos então um ponto T' sobre a reta m , tal que $\overline{PT} = \overline{PT'}$ com $T' \neq T$. Então, pela congruência de triângulos retângulos, concluímos que os triângulos OPT e OPT' são congruentes, pois $\overline{PT} = \overline{PT'}$, \overline{OP} é lado comum e $\widehat{OPT} = \widehat{OPT'} = 90^\circ$, uma vez que $\widehat{OPT} + \widehat{OPT'}$ é um ângulo raso e $\widehat{OPT} = 90^\circ$. Portanto,

$\overline{OT} = \overline{OT'}$. Então T' é outro ponto da reta m que também pertence ao círculo. Logo, a reta m não é tangente, pois para ser tangente, deveria ter apenas um ponto de intersecção com o círculo. Mas isso contradiz a hipótese. Assim, P e T coincidem e, portanto, OT é perpendicular a m , pois $\overline{OT'}$ é igual ao raio, obtendo o resultado desejado. \square

A seguir, apresentaremos uma definição de um elemento importante do círculo.

Definição 34. A extremidade de um raio que não é o centro do círculo é chamada de **extremidade do raio**.

O próximo resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 8.3).

Proposição 12. Se uma reta é perpendicular a um raio em sua extremidade, então a reta é tangente ao círculo.

Demonstração. Consideremos um círculo de centro O e seja m uma reta perpendicular ao raio OT passando pelo ponto T . Devemos provar que m é tangente ao círculo, ou seja, que m não tem outro ponto de intersecção com o círculo. Seja P qualquer outro ponto de m , então o triângulo OTP é retângulo e, portanto, $\overline{OT}^2 + \overline{TP}^2 = \overline{OP}^2$. Segue-se que $\overline{OP} > \overline{OT}$ e, portanto, P está fora do círculo. Logo, como P foi um ponto qualquer, concluímos que T é o único ponto comum à reta e ao círculo. Isto conclui a demonstração. \square

O próximo resultado traz uma propriedade muito interessante sobre congruência das cordas em círculos. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 8.4).

Proposição 13. Em um mesmo círculo, ou em círculos de mesmo raio, cordas congruentes determinam ângulos centrais congruentes e vice-versa.

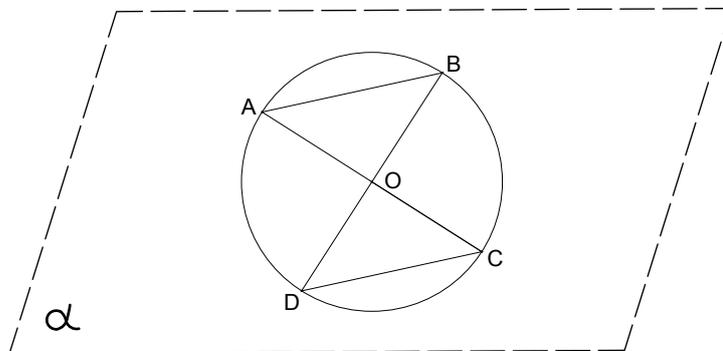


Figura 69 – Ângulo central

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Seja O o centro do círculo e considere as cordas AB e CD de modo que $\overline{AB} = \overline{CD}$. Temos assim dois triângulos OAB e OCD . Note que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$, onde r é o raio do círculo.

Deste modo, que pelo caso LLL, segue que os triângulos OAB e OCD são congruentes e portanto, os ângulos \widehat{AOB} e \widehat{COD} são congruentes, obtendo o resultado desejado.

Reciprocamente, suponha que O seja o centro do círculo e AB e CD sejam duas cordas quaisquer. Suponha também que os ângulos \widehat{AOB} e \widehat{COD} sejam congruentes. Como $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = r$, onde r é o raio do círculo, então pelo caso LAL, os triângulos OAB e OCD são congruentes e portanto, $\overline{AB} = \overline{CD}$, provando o resultado. \square

A seguir, apresentaremos uma definição que será muito importante para nossos objetivos.

Definição 35. Um ângulo se denomina **inscrito** em um círculo se seu vértice A é um ponto do círculo e seus lados cortam o círculo em pontos B e C distintos do ponto A . Os pontos B e C determinam dois arcos. O arco que não contiver o ponto A é chamado **arco correspondente** ao ângulo inscrito dado.

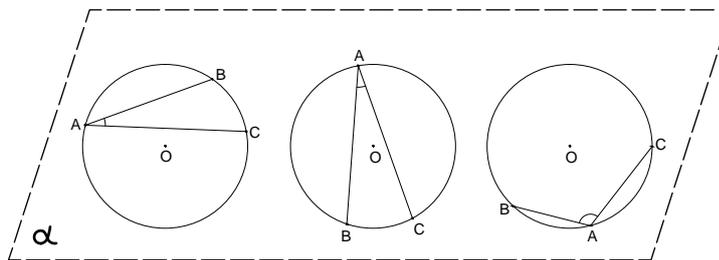


Figura 70 – Ângulo inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor.

O próximo resultado descreve uma propriedade sobre a relação entre a medida de ângulo inscrito e a medida do arco correspondente em um círculo. Ele pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 8.5).

Proposição 14. Todo ângulo inscrito em um círculo tem a metade da medida do arco correspondente.

Demonstração. Consideremos primeiro o caso em que um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Veja Figura 71 a esquerda. Seja A o vértice do ângulo inscrito e B e C os pontos em que seus lados cortam o círculo. Suponha que o centro O do círculo pertença ao lado AC . Como $\overline{BO} = \overline{AO}$, pois é a medida do raio, então o triângulo OAB é isósceles e portanto, os ângulos \widehat{OAB} e \widehat{OBA} são congruentes. Note que \widehat{BOC} é um ângulo externo ao triângulo, logo pela

propriedade de ângulo externo, segue que $\widehat{B\hat{O}C} = \widehat{O\hat{A}B} + \widehat{O\hat{B}A} = 2 \cdot \widehat{C\hat{A}B}$ (pois $\widehat{C\hat{A}B} = \widehat{O\hat{A}B}$). Portanto, provamos neste caso, que a proposição é válida.

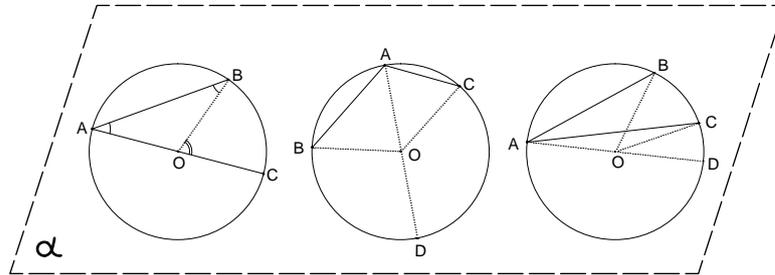


Figura 71 – Ângulo inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor.

Consideremos agora que nenhum dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro. Tracemos então o diâmetro que passa pelo vértice A do ângulo inscrito. Seja D a outra extremidade deste diâmetro. Pelo primeiro caso, concluímos que $\widehat{B\hat{O}D} = 2 \cdot \widehat{B\hat{A}D}$ e que $\widehat{D\hat{O}C} = 2 \cdot \widehat{D\hat{A}C}$. Consideremos dois casos, em que o diâmetro AD divide o ângulo $\widehat{B\hat{A}C}$ e o caso em que o diâmetro não divide o ângulo $\widehat{B\hat{A}C}$. No primeiro caso, note que $\widehat{B\hat{A}D} + \widehat{D\hat{A}C} = \widehat{B\hat{A}C}$. Logo, pela relação usada anteriormente, temos:

$$\widehat{B\hat{O}D} + \widehat{D\hat{O}C} = 2 \cdot (\widehat{B\hat{A}D} + \widehat{D\hat{A}C}) = 2 \cdot \widehat{B\hat{A}C}.$$

Por outro lado, note que a medida de $\widehat{B\hat{O}D} + \widehat{D\hat{O}C}$ é igual a medida do arco correspondente ao ângulo $\widehat{B\hat{A}C}$, completando a demonstração para este caso.

Consideremos agora o segundo caso. Note que este caso permite as seguintes possibilidades: a primeira seria o segmento AC dividir o ângulo $\widehat{B\hat{A}D}$ e a segunda seria o segmento AB dividir o ângulo $\widehat{C\hat{A}D}$. Provaremos considerando a primeira possibilidade, pois o outro caso segue analogamente. Então, temos $\widehat{B\hat{A}C} = \widehat{B\hat{A}D} - \widehat{C\hat{A}D}$. Portanto, pelas igualdades já demonstradas, temos:

$$\widehat{B\hat{O}D} - \widehat{C\hat{O}D} = \widehat{B\hat{O}C} = 2 \cdot (\widehat{B\hat{A}D} - \widehat{C\hat{A}D}) = 2 \cdot \widehat{B\hat{A}C}.$$

Note que a medida de $\widehat{B\hat{O}D} - \widehat{C\hat{O}D}$ é igual a medida do arco correspondente ao ângulo $\widehat{B\hat{A}C}$, obtendo o resultado desejado. \square

Como consequência imediata, temos os seguintes resultados abaixo. Eles podem ser encontrados em (BARBOSA, 2012).

Corolário 11. Todos os ângulos inscritos que possuem o mesmo arco correspondente têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos que possuem arco correspondente a um semicírculo são retos.

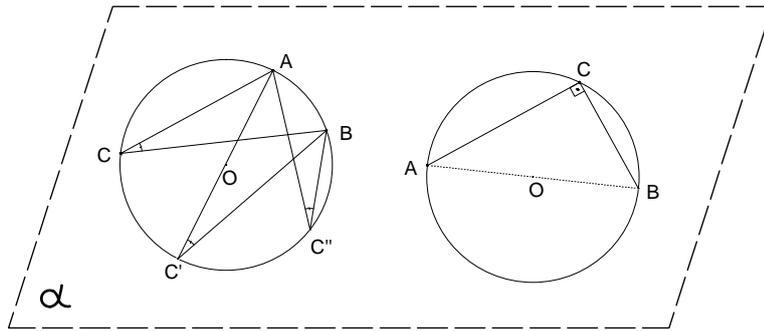


Figura 72 – Ângulo inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor.

Corolário 12. Sejam AB e CD cordas distintas de um mesmo círculo que se intersectam num ponto P . Então $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

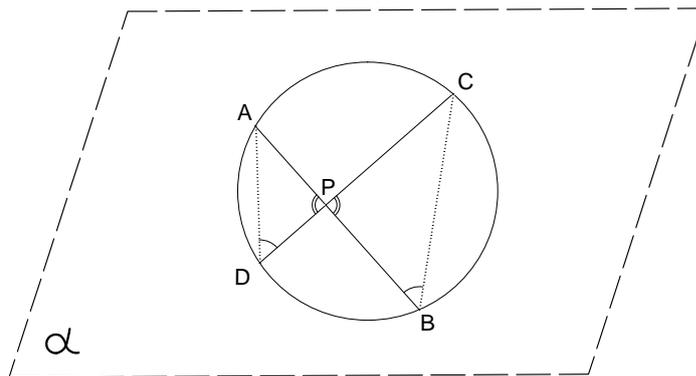


Figura 73 – Intersecção de cordas

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Note que nos triângulos CPB e DAP , temos a seguinte relação: $\widehat{CPB} = \widehat{APD}$ (pois são ângulos opostos pelo vértice) e $\widehat{CBP} = \widehat{ADP}$ (pois são ângulos inscritos que possuem o mesmo arco correspondente). Logo, $\widehat{PAD} = \widehat{PCB}$ pela soma dos ângulos internos de um triângulo, o que implica que os dois triângulos são semelhantes. Pela relação de semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}.$$

Disto, segue imediatamente que:

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD},$$

obtendo o resultado desejado. □

Proposição 15. Se os dois lados de um ângulo de vértice P são tangentes a um círculo nos pontos A e B , então:

- a) a medida do ângulo \widehat{P} é igual a 180° menos a medida do arco menor determinado por A e B .
- b) $\overline{PA} = \overline{PB}$.

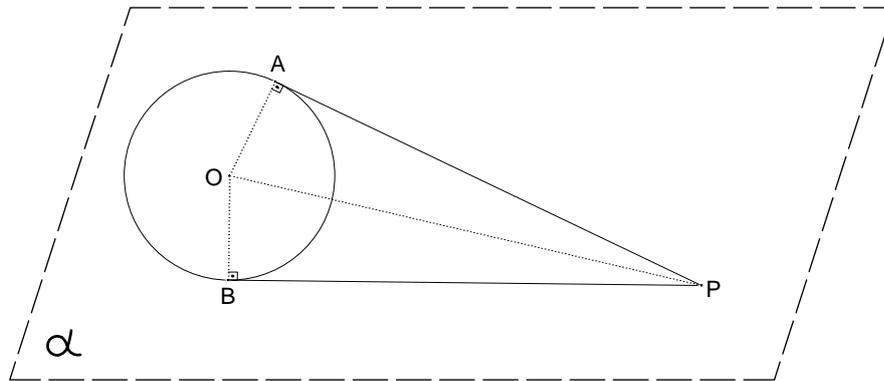


Figura 74 – Tangência

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Seja O o centro do círculo. No quadrilátero $OAPB$, temos que $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$, pela Proposição 11, já que PA e PB são tangentes ao círculo. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° , então $\widehat{P} + \widehat{O} = 180^\circ$. Como o ângulo \widehat{O} tem a medida do arco determinado por A e B , segue o item (a).

Provaremos agora o item (b). Para isso, trace o segmento PO e observe que os triângulos PAO e PBO são congruentes, pois $\overline{OA} = \overline{OB}$ (raios), o lado PO é comum aos dois triângulos e ambos são triângulos retângulos. Logo, pela congruência de triângulos retângulos, segue que $\overline{PA} = \overline{PB}$, e o resultado segue. \square

A seguir, apresentaremos uma definição que será muito importante, que é a de um polígono inscrito em um círculo. Veremos que esta propriedade será muito importante no estudo de áreas de figuras planas, especialmente no estudo da área do círculo.

Definição 36. Diremos que um polígono está **inscrito** num círculo se seus vértices pertencem ao círculo.

Uma propriedade muito interessante que segue da definição é que todo triângulo está inscrito em um círculo. Este é o conteúdo do nosso próximo resultado, que pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Proposição 16. Todo triângulo está inscrito em um círculo.

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Queremos mostrar que ele está inscrito em um círculo. Para isso, precisamos encontrar um ponto P que seja equidistante dos pontos A , B e C . Com isso,

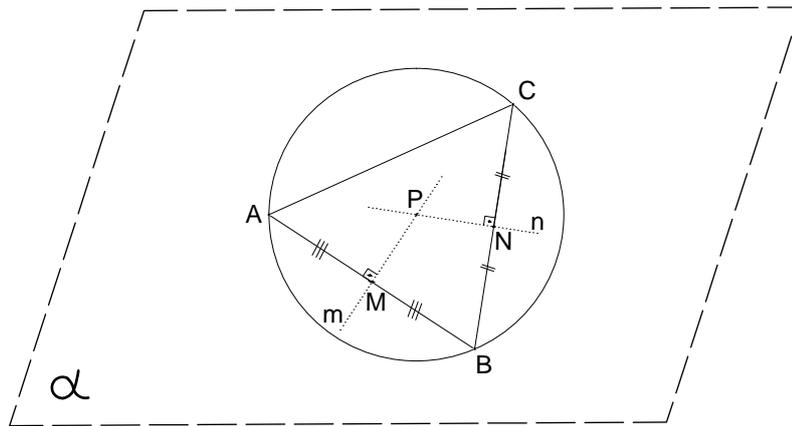


Figura 75 – Triângulo inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor.

teremos que este ponto P será o centro do círculo e A , B e C pertencerão ao círculo (uma vez que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ e esta será a medida do raio do círculo). Seja m uma reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio M e seja n a reta perpendicular a BC passando pelo seu ponto médio N . Denotemos por P o ponto de intersecção destas duas retas. Note que os triângulos PAM e PBM são congruentes, pois $\overline{AM} = \overline{MB}$, \overline{PM} é lado comum e $\widehat{PMA} = \widehat{PMB} = 90^\circ$, logo pela congruência de triângulos retângulos, segue a congruência dos triângulos PAM e PBM . Disto, segue que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Similarmente, mostramos que os triângulos PNB e PNC são congruentes e, portanto, $\overline{PB} = \overline{PC}$. Logo, P será equidistante dos pontos A , B e C , obtendo o resultado desejado. \square

Definição 37. A reta perpendicular a um dado segmento passando pelo seu ponto médio é dita **mediatriz** deste segmento.

Com esta definição e pela demonstração do resultado acima, temos imediatamente a seguinte propriedade que pode ser encontrada em (BARBOSA, 2012).

Corolário 13. As mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um mesmo ponto.

Este ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado de **circuncentro** e nos ajuda a construir o círculo para o qual o nosso triângulo está inscrito. Veja a figura 76 para uma visualização do circuncentro.

O próximo resultado nos mostra que ao contrário do que acontece com o triângulo, nem todo quadrilátero está inscrito em um círculo. Para garantir que tal propriedade esteja satisfeita, é necessário pedir certas condições sobre seus ângulos internos, como veremos a seguir. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Proposição 17. Um quadrilátero pode ser inscrito em um círculo se, e somente se, possuir um par de ângulos opostos suplementares.

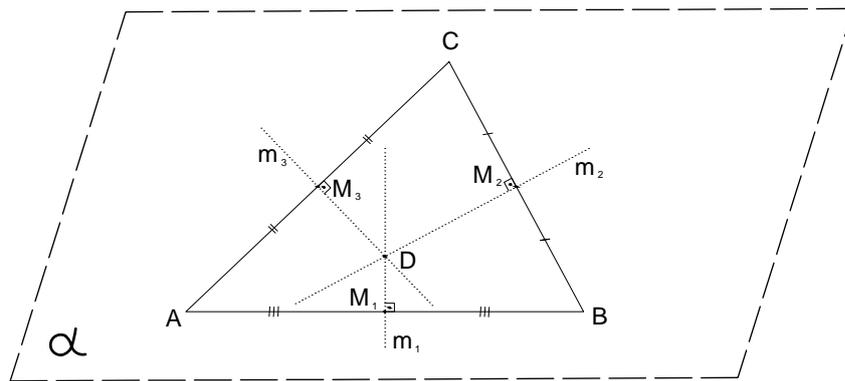


Figura 76 – Circuncentro

Fonte: Elaborada pelo autor.

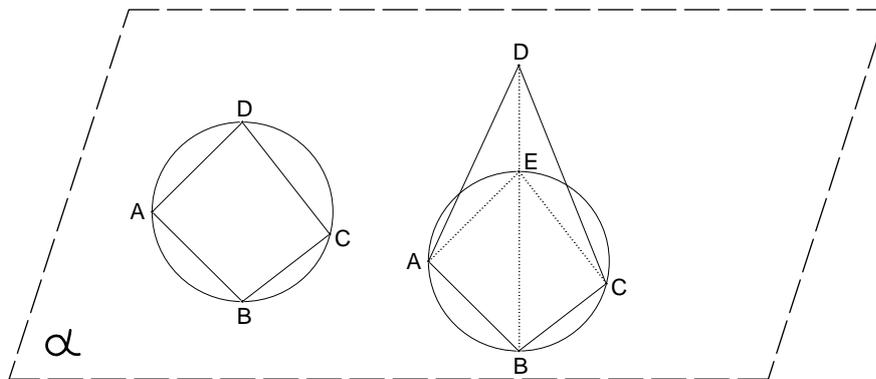


Figura 77 – Quadrilátero inscrito

Fonte: Elaborada pelo autor.

Demonstração. Suponha inicialmente que um quadrilátero possa ser inscrito em um círculo. Então cada um de seus ângulos é um ângulo inscrito no círculo. Seja $ABCD$ este quadrilátero. Considere os ângulos \widehat{A} e \widehat{C} , eles possuem o mesmo arco correspondente (determinados pelos pontos B e D). Como estes dois arcos somam 360° , então pela Proposição 14, a soma dos ângulos \widehat{A} e \widehat{C} é igual a 180° . Portanto, eles são suplementares.

Reciprocamente, suponha que um quadrilátero $ABCD$ possua um par de ângulos opostos suplementares. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° , então o outro par de ângulos opostos também é suplementar. Trace um círculo pelos pontos A , B e C (isto sempre pode ser feito, pela Proposição 16 da página 93, pois esta proposição implica que três pontos não colineares determinam um círculo). Só existem três possibilidades para a localização do ponto D :

- (i) D está sobre o círculo;
- (ii) D está dentro do círculo;

(iii) D está fora do círculo.

Vamos supor o item (iii) primeiramente. Neste caso, trace o segmento BD . Seja E o ponto onde este corta o círculo. O quadrilátero $ABCE$ é um quadrilátero inscrito no círculo e, portanto, pela primeira parte da proposição, seus ângulos opostos são suplementares. Em particular, temos:

$$\widehat{ABC} + \widehat{AEC} = 180^\circ.$$

Por outro lado, segue da hipótese que:

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Das duas igualdades, concluímos que $\widehat{ADC} = \widehat{AEC}$. Note também que pela propriedade de ângulos externos, temos $\widehat{AEB} > \widehat{ADB}$ e $\widehat{BEC} > \widehat{BDC}$. Portanto:

$$\widehat{AEC} = \widehat{AEB} + \widehat{BEC} > \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \widehat{ADC},$$

o que contradiz a igualdade acima e portanto, mostra que D não pode estar fora do círculo. Vamos supor agora que D está dentro do círculo. Trace a semirreta \overrightarrow{BD} que irá intersectar o círculo em um ponto F . O quadrilátero $ABCF$ está inscrito no círculo e, portanto, pela primeira parte da proposição, seus ângulos opostos são suplementares. Segue que:

$$\widehat{ABC} + \widehat{AFC} = 180^\circ.$$

Por outro lado, segue da hipótese que:

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ.$$

Destas duas igualdades, concluímos que $\widehat{AFC} = \widehat{ADC}$. Observe que pela propriedade de ângulos externos, temos $\widehat{AFB} < \widehat{ADB}$ e $\widehat{BFC} < \widehat{BDC}$. Portanto:

$$\widehat{AFC} = \widehat{AFB} + \widehat{BFC} < \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \widehat{ADC},$$

o que também é uma contradição. Vemos, portanto, que D também não pode estar dentro do círculo. Logo, a única possibilidade é D pertencer ao círculo, provando o resultado. \square

A seguir, veremos uma definição muito importante para o nosso estudo sobre o círculo.

Definição 38. Um círculo está **inscrito** em um polígono se todos os lados do polígono são tangentes ao círculo. Neste caso, dizemos também que o polígono **circunscreve** o círculo ou que o polígono está **circunscrito** no círculo.

Veremos a seguir que todo triângulo possui um círculo inscrito. Este resultado pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012, Proposição 8.13).

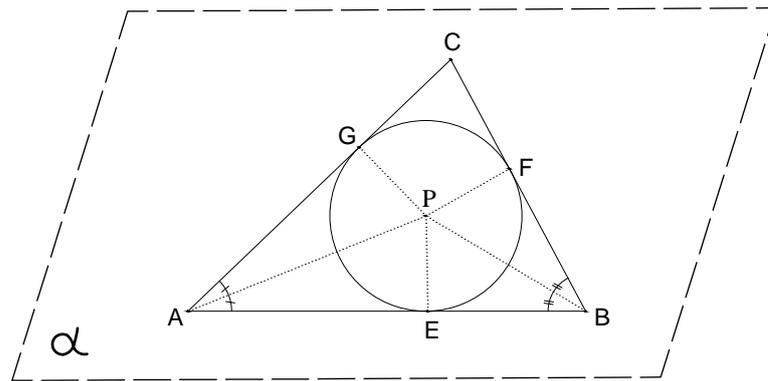


Figura 78 – Círculo inscrito em um triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Proposição 18. Todo triângulo possui um círculo inscrito.

Demonstração. Seja ABC um triângulo. Trace as bissetrizes dos ângulos \hat{A} e \hat{B} . Estas se encontram em um ponto P . Deste ponto, baixe perpendiculares aos lados do triângulo. Sejam E , F e G os pés destas perpendiculares nos lados AB , BC e CA , respectivamente. Para obter nosso resultado, precisamos mostrar que $\overline{PE} = \overline{PF} = \overline{PG}$ para então concluirmos que P é o centro de um círculo que passa pelos pontos E , F e G , bem como a medida \overline{PE} é o raio deste. Além disso, como os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} do triângulo ABC são perpendiculares aos raios \overline{PE} , \overline{PF} e \overline{PG} , respectivamente, e os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CA} intersectam o círculo apenas nos respectivos pontos E , F e G , concluímos que eles são tangentes ao círculo.

Resta então mostrar que $\overline{PE} = \overline{PF} = \overline{PG}$. Para isto, note que os triângulos PGA e PEA são retângulos e $\hat{PAG} = \hat{PAE}$ (\overline{PA} é bissetriz) e \overline{PA} é lado comum. Logo, os triângulos PGA e PEA são congruentes, o que implica que $\overline{PG} = \overline{PE}$. Por outro lado, note que os triângulos PEB e PFB também são retângulos e como \overline{PB} é a bissetriz, então $\hat{PBE} = \hat{PBF}$. Além disso, \overline{PB} é lado comum, logo os triângulos PEB e PFB são congruentes, o que implica que $\overline{PE} = \overline{PF}$, obtendo o resultado desejado. \square

Como consequência, temos o seguinte resultado que nos garante que o encontro das três bissetrizes internas de qualquer triângulo é um ponto. Este resultado pode ser encontrado em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Teorema 26. O encontro das três bissetrizes internas de um triângulo é um ponto e ele encontra-se a igual distância dos lados de um triângulo.

Demonstração. Seja ACD um triângulo e seja I o centro do círculo inscrito neste triângulo. Então, sabemos que I é equidistante dos lados AC , AD e CD . Sejam E , F e G os pés das perpendiculares baixadas do ponto I respectivamente aos lados AC , AD e CD . Logo, observe que os triângulos AIE e AIF são congruentes, pois $\hat{IFA} = \hat{IEA} = 90^\circ$, $\overline{IE} = \overline{IF}$ e \overline{AI} é lado comum.

Portanto, pela congruência, obtemos que $\widehat{FAI} = \widehat{IAE}$, o que implica que I pertence a reta bissetriz do ângulo \widehat{FAE} . Analogamente, podemos mostrar que I pertence às retas bissetrizes dos ângulos \widehat{DCA} e \widehat{CDA} . Logo, I pertence a intersecção das três retas bissetrizes internas do triângulo ACD . Claramente, I é o único ponto de intersecção, pois caso contrário, as retas bissetrizes coincidiriam, o que seria uma contradição. Portanto, segue o resultado desejado. \square

Definição 39. O encontro das bissetrizes internas de um triângulo é chamado **incentro**.

Note que este ponto sempre existe pelo Teorema 26. No que segue, apresentaremos a definição de um polígono regular.

Definição 40. Um **polígono regular** é um polígono que possui todos os seus lados e ângulos congruentes.

Usando a definição acima, apresentaremos uma propriedade destes polígonos regulares. Veja o resultado abaixo que pode ser encontrado em (BARBOSA, 2012).

Proposição 19. Todo polígono regular está inscrito em um círculo.

Demonstração. Sejam A_1, A_2, \dots, A_n os vértices de um polígono regular. Tracemos o círculo que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3 (sabemos que este círculo existe conforme visto anteriormente). Seja O o centro deste círculo, então $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$. Portanto, o triângulo OA_2A_3 é isósceles, o que implica que $\widehat{OA_2A_3} = \widehat{OA_3A_2}$. Como o polígono é regular, todos os seus ângulos internos têm a mesma medida. Portanto, $\widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_2A_3A_4}$.

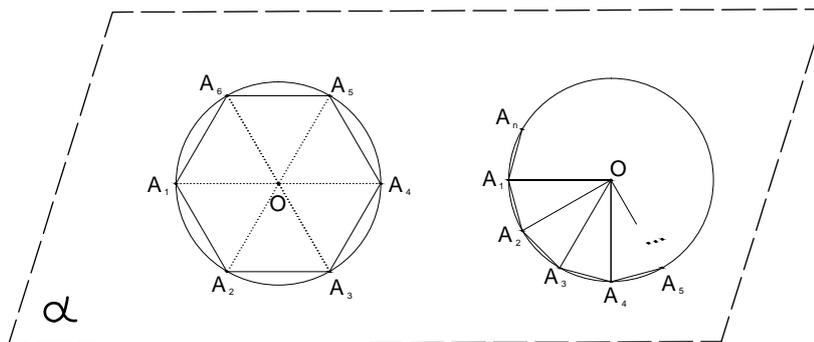


Figura 79 – Polígono regular inscrito em um círculo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, $\widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_1A_2O} + \widehat{OA_2A_3}$ e $\widehat{A_2A_3A_4} = \widehat{A_2A_3O} + \widehat{OA_3A_4}$, o que implica que $\widehat{OA_2A_1} = \widehat{OA_3A_4}$. Como $\overline{A_1A_2} = \overline{A_3A_4}$ (lados de um polígono regular são congruentes) e $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$, então os triângulos OA_1A_2 e OA_4A_3 são congruentes. Logo, obtemos que $\overline{OA_4} = \overline{OA_1}$. Portanto, A_4 também é um ponto do círculo. Usando um raciocínio análogo, provamos que A_5 também pertence ao círculo e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos que todos os pontos do polígono pertencem ao círculo e o resultado segue. \square

Como uma consequência deste fato, obtemos o seguinte resultado, que pode ser encontrado (BARBOSA, 2012, Corolário 8.16).

Corolário 14. Todo polígono regular possui um círculo inscrito.

Demonstração. Trace o círculo no qual o polígono regular $A_1A_2\dots A_n$ está inscrito. Seja O seu centro. Todos os triângulos isósceles $A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, \dots$ são congruentes. Como consequência, suas alturas relativamente às bases são também congruentes. O círculo de centro O e com raio igual ao comprimento destas alturas está inscrito no polígono. \square

Finalmente, definiremos mais um componente importante do triângulo.

Em um triângulo ABC qualquer, temos exatamente três alturas, uma com relação ao lado AB , outra relativa ao lado BC e, por fim, uma relativa ao lado AC . O encontro dessas três alturas do triângulo é conhecido como **ortocentro**. O ortocentro pode ser interno ou externo ao triângulo. Quando o ortocentro é interno ao triângulo ABC , significa que a construção de cada uma das alturas foi feita pelo vértice e pelo segmento de reta oposto a este vértice e, além disso, podemos inferir que todos os ângulos do triângulo são agudos. Veja figura 80.

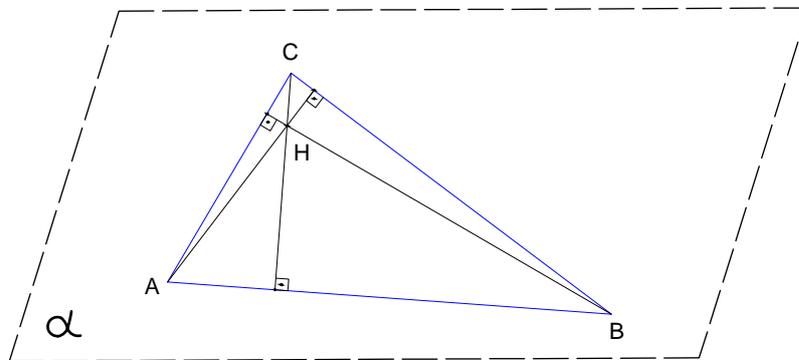


Figura 80 – Ortocentro interno

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, se existe um ângulo obtuso é necessário prolongar os lados que formam esse ângulo e o ortocentro é externo. Na figura 81, o triângulo ABC está representado na cor azul, os prolongamentos estão representados pelo pontilhado e as linhas contínuas em preto são as alturas.

Por fim, veremos o caso em que o ortocentro é coincidente com o vértice, isto ocorre quando o triângulo tem um ângulo interno igual a 90° e é justamente neste vértice que é o encontro das alturas. Veja figura 82 para ilustração.

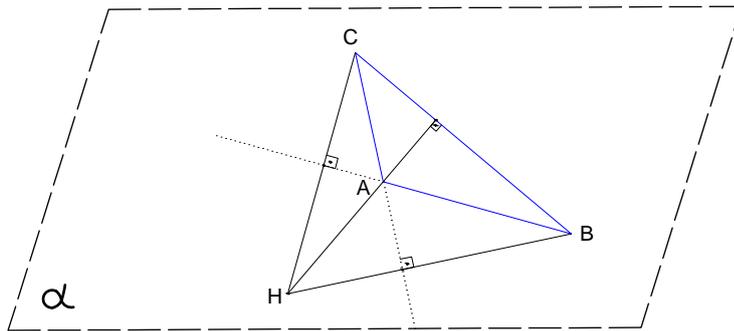


Figura 81 – Ortocentro externo

Fonte: Elaborada pelo autor.

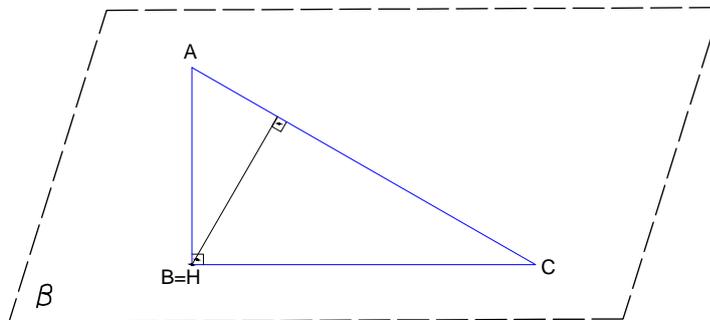


Figura 82 – Ortocentro coincidente com o vértice

Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, apresentamos o último componente muito importante do triângulo que é conhecido como **baricentro**. Este é o nome dado ao ponto de encontro das três medianas do triângulo. Veja a figura 83 para ilustração.

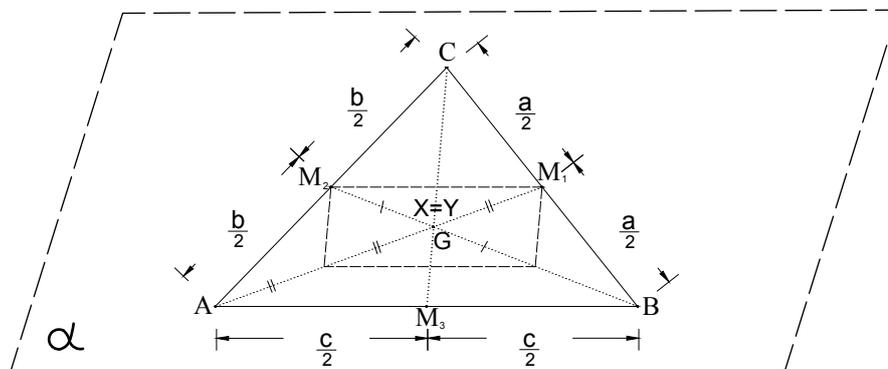


Figura 83 – Encontro das medianas: baricentro

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como acontece com as alturas, as bissetrizes e as mediatrizes, as medianas também se intersectam em um único ponto como veremos a seguir. Este resultado pode ser encontrado em (DOLCE; POMPEO, 1997).

Teorema 27. As três medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto G e este divide cada mediana da seguinte maneira: a distância do vértice até a intersecção das medianas G é igual ao dobro da outra parte.

Demonstração. Seja ABC um triângulo, AM_1 , BM_2 e CM_3 medianas partindo dos vértices A , B e C respectivamente como na figura 83.

Vamos chamar de X o ponto de intersecção entre as medianas AM_1 e BM_2 e considere os pontos médios D e E de \overline{AX} e \overline{BX} respectivamente, segue daí que no triângulo ABC o segmento BM_1 é congruente ao segmento CM_1 e o segmento AM_2 é congruente ao segmento CM_2 , ou seja, M_1M_2 é base média, isso garante que o segmento M_1M_2 é paralelo a AB e \overline{AB} é dobro de $\overline{M_1M_2}$. Da mesma forma no triângulo ABX , temos que, o segmento AD é congruente ao segmento DX , assim como, o segmento BE é congruente ao segmento EX , então DE é base média do triângulo ABX e, por isso, AB é paralelo ao segmento DE e \overline{AB} é o dobro de \overline{DE} .

Contudo é possível observar que o segmento AB é paralelo aos segmentos M_1M_2 que, por este motivo, são paralelos entre si. Além disso, $\overline{M_1M_2}$ tem o mesmo comprimento que \overline{DE} . Considerando tais informações, temos que DEM_1M_2 é um paralelogramo.

Note que, o segmento DX é congruente ao segmento XM_1 , isso implica que AX é o dobro do segmento XM_1 , do mesmo modo, o segmento EX é congruente ao segmento XM_2 e, por isso, \overline{BX} é o dobro do segmento XM_2 .

Agora vamos considerar as medianas BM_2 e CM_3 e vamos denotar por Y o ponto de intersecção entre elas. De modo análogo, encontramos que \overline{BY} é o dobro do segmento YM_2 , assim como, \overline{CY} é o dobro do segmento YM_3 . Portanto, o ponto X coincide com o ponto Y . Assim provamos que as três medianas se encontram em único ponto que denotaremos por G , além disso, $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_1}$, $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_2}$ e $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_3}$. \square

A seguir, vamos tentar encontrar uma aproximação para calcular o comprimento do círculo. Já vimos como calcular o perímetro de um triângulo, de um quadrilátero, que é a soma do comprimento de seus lados. Entretanto, calcular o seu comprimento é um desafio maior pois este não possui “lados”, a única informação que temos é a medida de seu raio.

Assim, para calcularmos o seu comprimento, faremos uma aproximação por meio de uma poligonal, do mesmo jeito como é feito em (BARBOSA, 2012). Para isto, consideremos um polígono regular inscrito no círculo com n lados, cada um deles com medida s_n . Observe que se n for suficientemente grande, o perímetro deste polígono, ou seja, $n \cdot s_n$ (pois o polígono é regular) será muito próximo do comprimento do círculo.

Considere, na figura abaixo, o círculo de centro O com raio R e a corda CE . Como visto anteriormente, a corda CE é perpendicular ao diâmetro AB . Seja D o ponto de intersecção entre CE e AB , então segue que o triângulo OCD é retângulo e além disso, CD é altura do triângulo ABC .

Por outro lado, note que pela Proposição 14 da página 90 o triângulo ABC é retângulo (pois AB é o diâmetro do círculo) e como CE e AB são duas cordas do círculo que se intersectam no ponto D , então pelo Corolário 12 da página 92, temos a seguinte relação:

$$\overline{CD} \cdot \overline{DE} = \overline{AD} \cdot \overline{DB}. \quad (7.1)$$

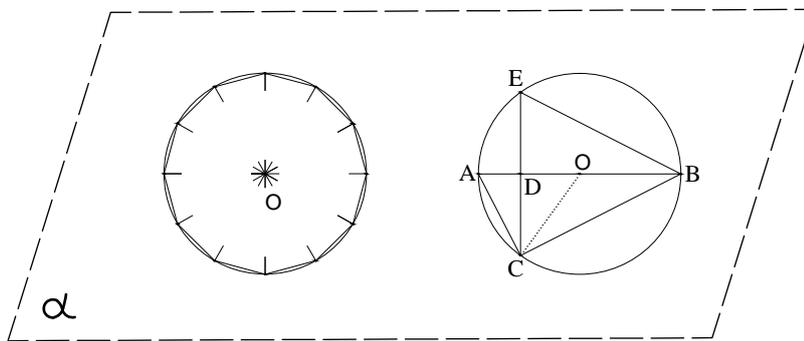


Figura 84 – Calculando o comprimento do círculo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe também que os triângulos ODC e ODE são congruentes, pois $\overline{CO} = \overline{OE}$ (raios), o lado OD é comum e $\widehat{ODC} = \widehat{ODE} = 90^\circ$. Portanto, $\overline{CD} = \overline{DE}$. Usando este fato na equação (7.2), temos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}. \quad (7.2)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ACD , obtemos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2.$$

Combinando isto com (7.2), temos:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB},$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DB} \\ &= \overline{AD} \cdot (\overline{AD} + \overline{DB}) \\ &= \overline{AD} \cdot \overline{AB}. \end{aligned}$$

Note que como o triângulo CDO é retângulo, então o Teorema de Pitágoras nos dá a seguinte relação:

$$\overline{DO}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{CD}^2. \quad (7.3)$$

Note que se $\overline{CE} = s_n$, então $\overline{AC} = s_{2n}$ e pelas fórmulas acima, temos:

$$(s_{2n})^2 = 2R \cdot m,$$

onde $m = \overline{AD}$. Além disso, pela equação (7.3), temos:

$$(R - m)^2 = R^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2.$$

Então, pela primeira equação, obtemos:

$$m = \frac{(s_{2n})^2}{2R},$$

o que implica

$$\left(R - \frac{(s_{2n})^2}{2R}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2.$$

Disto, obtemos:

$$s_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - s_n^2}}.$$

Portanto, temos:

$$s_4 = 4R\sqrt{2}$$

$$s_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$s_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$s_{32} = R\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

e assim por diante.

Obtemos, portanto, fazendo as contas acima, aproximadamente os seguintes valores para o comprimento do círculo de raio R descritos na tabela abaixo, que foi retirada de (BARBOSA, 2012).

n	s_n	p_n
4	$1,41421 \cdot R$	$5,6568 \cdot R$
8	$0,76537 \cdot R$	$6,1229 \cdot R$
16	$0,39018 \cdot R$	$6,2428 \cdot R$
32	$0,19603 \cdot R$	$6,2730 \cdot R$
64	$0,09814 \cdot R$	$6,2806 \cdot R$
128	$0,04908 \cdot R$	$6,2825 \cdot R$
256	$0,02454 \cdot R$	$6,2830 \cdot R$
512	$0,01227 \cdot R$	$6,2831 \cdot R$

Vemos, portanto, que adicionando-se a um polígono convexo inscrito no círculo mais vértices, aumentamos o seu perímetro. Entretanto, não aumentamos ilimitadamente, uma vez que o perímetro de qualquer polígono convexo inscrito no círculo é sempre menor que o perímetro de um polígono circunscrito ao círculo. Logo, podemos encontrar o menor dos números maiores do que o perímetro de qualquer polígono convexo nele inscrito e chamaremos este número de **comprimento do círculo**.

Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$, podemos sempre inscrever um polígono convexo no círculo tal que a diferença do seu perímetro para o comprimento do círculo (em valor absoluto) seja menor do que ε .

O comprimento do círculo é dado por $2\pi R$, onde R é o raio do círculo e π é o comprimento de um semicírculo de raio 1. O valor de π aproximado é dado por $\pi = 3,141593$, o que mostra que conseguimos uma boa aproximação usando poligonais para o perímetro do círculo. Para mais detalhes, veja ([BARBOSA, 2012](#)).

ÁREAS

Neste capítulo, apresentaremos métodos para calcular a área de diversas figuras planas importantes em Geometria Plana Euclidiana.

Iniciaremos apresentando algumas definições, depois enunciaremos alguns axiomas e, por fim, provaremos os teoremas, formando uma cadeia lógica de raciocínio, para que o conceito de área seja rigorosamente estabelecido.

As definições que apresentaremos a seguir podem ser encontradas em (BARBOSA, 2012).

Definição 41. Uma **região triangular** é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos, cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. Veja figura 85.

Por outro lado, o triângulo é chamado de **fronteira** da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular, que não pertencem a sua fronteira, é chamada de **interior** da região triangular.

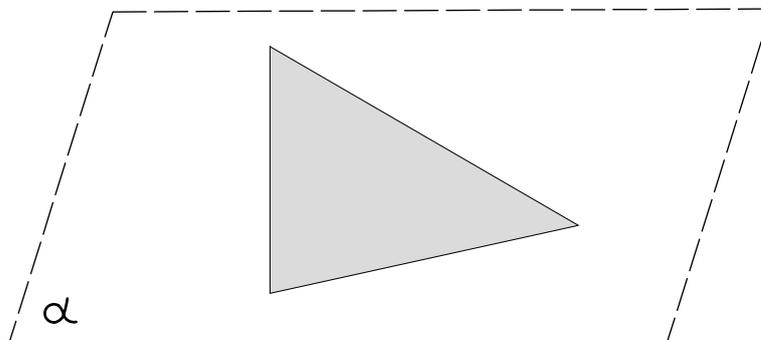


Figura 85 – Região triangular

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 42. Uma **região poligonal** é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não têm pontos interiores em comum. Veja a figura 86.

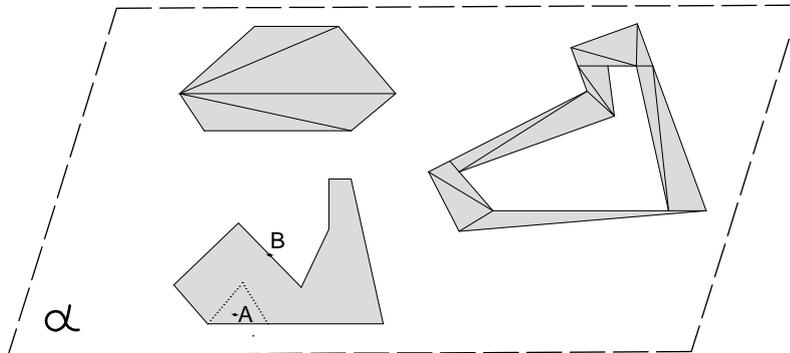


Figura 86 – Região poligonal

Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, um ponto é **interior** a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto no seu interior. O **interior** da região poligonal é o conjunto dos pontos que lhe são interiores. A **fronteira** da região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

Na figura 86, vemos pelas definições anteriores que A é um ponto interior à região, enquanto B é ponto da fronteira.

Para iniciarmos nosso estudo sobre área de figuras planas, começaremos enunciando os axiomas que serão fundamentais para o desenvolvimento deste estudo. Eles podem ser encontrados em (BARBOSA, 2012).

Axioma 5. A toda região poligonal corresponde um número maior do que zero. Este número será chamado de **área**.

Axioma 6. Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que duas a duas não tenham pontos interiores em comum, então sua área será a soma das áreas daquelas regiões.

Axioma 7. Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes têm áreas iguais.

Note que o Axioma 7 acima pode ser reescrito conforme abaixo:

Axioma 8. Triângulos congruentes possuem áreas iguais.

Finalmente, apresentaremos o último axioma que traz uma propriedade muito importante sobre a área do retângulo $ABCD$.

Axioma 9. Se $ABCD$ é um retângulo, então sua área é dada pelo produto: $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

Usando os axiomas acima, iremos provar algumas propriedades muito úteis e importantes sobre a área de diferentes figuras geométricas.

Teorema 28. [(BARBOSA, 2012, Proposição 10.1)] A área do paralelogramo é o produto do comprimento de um de seus lados pelo comprimento da altura relativa a este lado.

Demonstração. Para facilitar a demonstração deste resultado, designaremos por b o comprimento do lado AB e por h o comprimento de um segmento ligando as retas que contêm os segmentos AB a CD e que seja perpendicular a ambas. Note que h representa a altura deste paralelogramo. Então, nosso objetivo é provar que a área do paralelogramo $ABCD$ é $b \cdot h$.

Para isto, traçaremos a partir dos pontos A e B dois segmentos AE e BF , perpendiculares à reta que contém CD . Veja a figura 87 para ilustração.

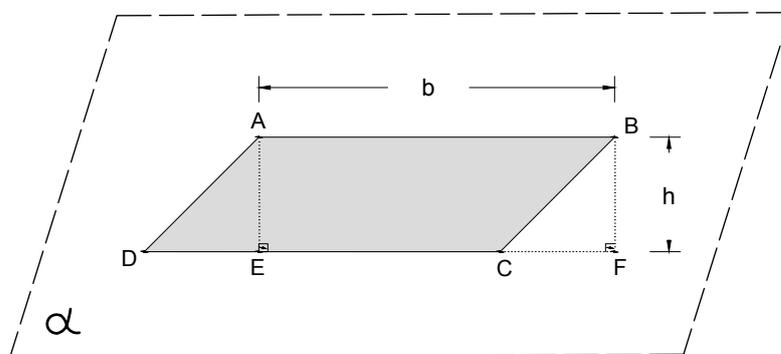


Figura 87 – Área do paralelogramo

Fonte: Elaborada pelo autor.

O quadrilátero $ABEF$ é um retângulo cuja área é $\overline{AB} \cdot \overline{BF}$, pelo Axioma 9. Em termos de notação, a área de $ABFE$ é $b \cdot h$.

Para concluir a demonstração, note que os triângulos ADE e CBF são congruentes. De fato, como DF é paralelo a AB , então os pontos de DF são equidistantes de AB , pelo Teorema 18 (página 66). Logo,

$$\overline{AE} = \overline{BF},$$

bem como $\widehat{AED} = \widehat{BFC} = 90^\circ$.

Além disso, usando o fato de AD e BC serem paralelos e DF ser uma reta cortando ambas, vemos que $\widehat{ADE} = \widehat{BCF}$ e isto implica que $\widehat{FBC} = \widehat{EAD}$ (pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°). Logo, pelo caso ALA, concluímos que os triângulos ADE e CBF são congruentes e pelo Axioma 8, eles possuem mesma área. Logo,

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(ADE)$$

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABCE) + \text{Área}(CBF),$$

o que implica em:

$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ABFE)$$

e, portanto,

$$\text{Área}(ABCD) = b \cdot h,$$

como queríamos demonstrar. □

Como consequência deste resultado, temos o seguinte teorema que nos dá uma relação para área de um triângulo qualquer.

Teorema 29. [(BARBOSA, 2012, Proposição 10.2)] A área de um triângulo qualquer é a metade de produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado.

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer. Ao traçar pelo vértice C , uma reta paralela ao lado AB e, em seguida, traçando outra reta passando pelo vértice B paralela ao lado AC , obtemos a figura 88.

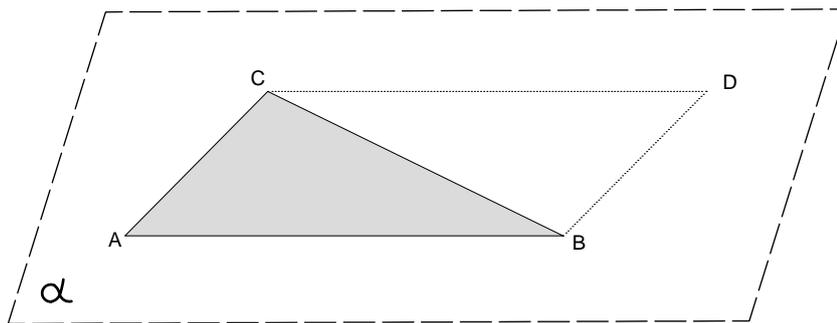


Figura 88 – Área do triângulo

Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que estas duas retas \overleftrightarrow{CD} e \overleftrightarrow{BD} se intersectam em um ponto D e o polígono formado $ABDC$ é um paralelogramo. Além disso, vemos que os triângulos ABC e BCD são congruentes pelo caso LLL pois $\overline{AC} = \overline{BD}$, $\overline{CD} = \overline{AB}$ e \overline{CB} é lado comum dos dois triângulos (estas congruências dos lados segue pela propriedade do paralelogramo).

Como

$$\text{Área}(ABDC) = \text{Área}(ABC) + \text{Área}(CDB)$$

e

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(CDB)$$

pelos Axiomas 6 e 8, então

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \text{Área}(ABDC).$$

Note que a altura do triângulo ABC pelo vértice C relativa a base AB é exatamente a altura do paralelogramo $ABDC$ relativamente ao lado AB . Portanto, temos que:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h,$$

obtendo assim o resultado desejado □

Como consequência, temos o seguinte resultado que nos fornece a área de um triângulo equilátero.

Corolário 15. A área de um triângulo equilátero é dada por $\frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, onde l é a medida do lado do triângulo equilátero.

Demonstração. Seja ABC um triângulo equilátero, trace a partir do vértice C uma altura relativa a base AB . Esta altura coincide com a mediana do triângulo ABC relativa ao lado AB . Então, obtemos que $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{l}{2}$, conforme ilustrado na figura 89.

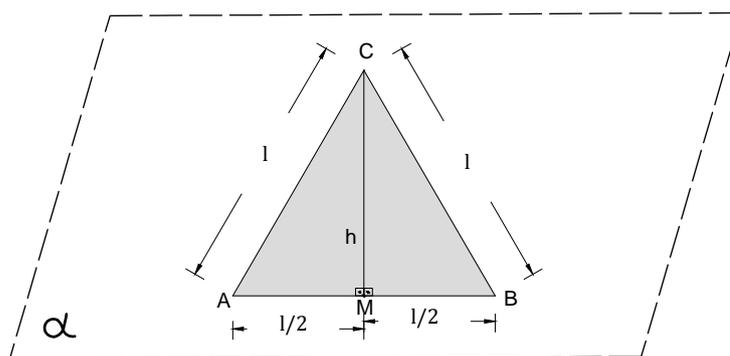


Figura 89 – Área de um triângulo equilátero

Fonte: Elaborada pelo autor.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AMC , temos:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Portanto,

$$h^2 = \frac{3 \cdot l^2}{4},$$

o que implica em:

$$h = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, pelo Teorema 29, temos que a área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4},$$

obtendo o resultado desejado. □

iguais a BA e AC . Portanto, a área do quadrado construído sobre BC é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre BA e AC , provando o resultado desejado. \square

O problema de determinar área sempre fascinou os povos na Antiguidade. Eles desenvolveram diversos métodos distintos para calcular a área das figuras planas. Um dos grandes desafios que apareceu foi o cálculo da área do círculo, que foi uma necessidade desde os tempos mais remotos, dado que este formato geométrico aparecia em várias situações, sendo considerado um dos símbolos mais antigos desenhado pela humanidade. Este símbolo aparece na roda, nos templos divinos, na natureza, e em muitos outros lugares. Veja (BOYER, 1974; SINGH, 2010; ROQUE, 2012).

Entretanto, apesar das dificuldades, vários povos da antiguidade desenvolveram métodos para conseguirem boa aproximação para o cálculo da área do círculo. Por exemplo, nos problemas 41-43, 48 e 50 do papiro Rhind, aparecem métodos de como calcular a área do círculo. Mais precisamente, no problema 48 do papiro Rhind, lê-se:

Comparar a área do círculo com a do quadrado circunscrito

Ainda no papiro Rhind, lê-se:

Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?

Neste problema, o escriba apresenta a seguinte solução:

Remover $\frac{1}{9}$ do diâmetro, o restante é 8. Multiplicar 8 por 8; perfaz 64. Portanto, a área é 64.

A solução apresentada pelo escriba pode ser traduzida pela seguinte fórmula matemática

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\frac{8}{9}d\right]^2,$$

onde d é o diâmetro do círculo. Considerando que a área do círculo é πr^2 , vemos que a aproximação para o número π dadas pelos egípcios era aproximadamente 3,160493, que era aproximação muito boa, dado o avanço da matemática naquela época. Não se sabe ao certo como os egípcios chegaram a esta fórmula. Vejamos algumas possíveis explicações. Estas podem ser encontradas em (GASPAR, 2006).

A primeira explicação se baseia na figura que aparece no problema 48 do papiro Rhind e no procedimento utilizado pelos egípcios para decorarem as paredes das construções. Para “transportar” o desenho que eles queriam para a parede, eles cobriam tanto a parede como o desenho com malhas quadriculadas e “transportavam” cada parte do desenho proporcionalmente para o local correspondente na parede, até levar todo o desenho. Ainda hoje, vários livros de desenho e de pintura ensinam essa técnica para pintura de quadros.

Considere agora o desenho representado na figura 91 baseado no desenho feito pelos egípcios no problema 48. Usando malhas quadriculadas, obtemos uma malha formada por 9 quadrados congruentes.

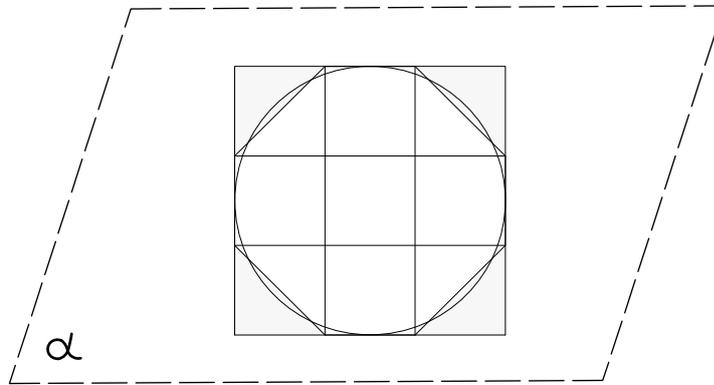


Figura 91 – Malha quadriculada

Fonte: Elaborada pelo autor.

Se d é o diâmetro do círculo, obtemos que cada quadradinho possui lado igual a $d/3$. Então, obtemos que a área aproximada do círculo é dada por:

$$A = d^2 - 2 \left(\frac{d}{3} \right)^2 = d^2 - \frac{2}{9}d^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2,$$

o que nos dá aproximadamente $\frac{64}{81}d^2$, que é $\left(\frac{8}{9}d \right)^2$. Para maiores detalhes, veja (GASPAR, 2006).

Além disso, em (GASPAR, 2006), aparece uma outra possível explicação para a fórmula encontrada pelos egípcios para o cálculo da área do círculo. Esta segunda explicação também é baseada na figura que aparece no problem 48, mas neste caso, usa-se uma malha mais fina que a anterior. Considere, portanto, o desenho feito pelos egípcios no problema 48 e refine ainda mais a malha anterior (conforme a figura 92).

Desenhe agora apenas o quadrado com a mesma malha quadriculada e pinte os respectivos quadradinhos da primeira malha nesta nova figura.

Como dividimos a figura acima em 81 quadradinhos (9 linhas de 9 quadrados). Temos que o lado de cada quadradinho mede $d/9$. Então, temos que a área de cada quadradinho é $d^2/81$, e portanto, como pintamos 18 quadradinhos, temos que a área do círculo é dada por:

$$d^2 - \frac{18}{81}d^2,$$

o que implica em $\frac{63}{81}d^2$. Portanto, aproximando conforme feito anteriormente, temos que a área do círculo é dada por:

$$\frac{64}{81}d^2 = \left[\left(\frac{8}{9} \right) d \right]^2.$$

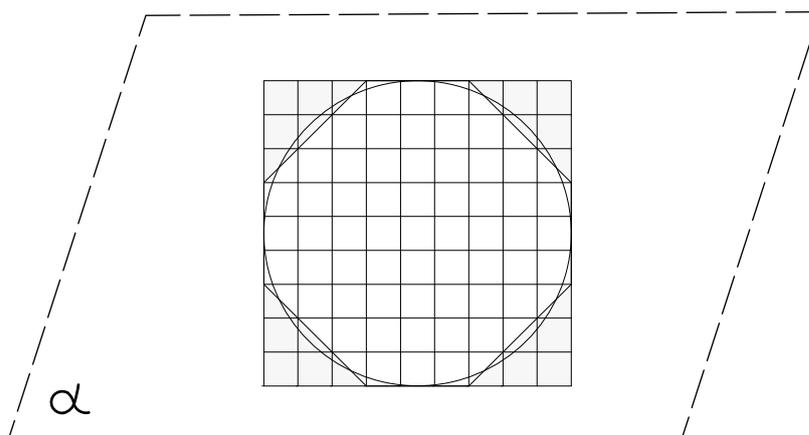


Figura 92 – Malha quadriculada para o cálculo da área do círculo

Fonte: Elaborada pelo autor.

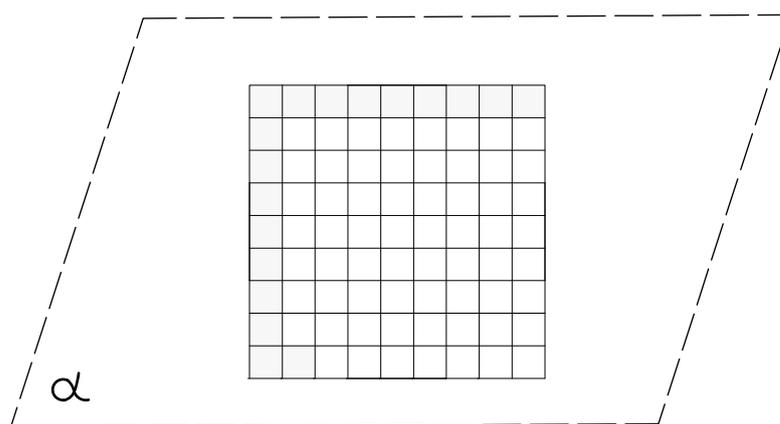


Figura 93 – Malha quadriculada pintada

Fonte: Elaborada pelo autor.

Existem outras teorias sobre como os egípcios chegaram nesta fórmula para área do círculo. Entretanto, apresentaremos aqui apenas essas duas. Para mais detalhes consulte ([GASPAR, 2006](#)).

Apesar dos egípcios terem feito boas aproximações para o cálculo de áreas de figuras planas, também não podemos esquecer de citar os gregos, que tiveram uma grande contribuição para a Geometria Euclidiana Plana. O procedimento usado pelos gregos, no entanto, era diferente e era conhecido como o **método da exaustão**, que consiste em aproximar uma figura dada por outras, cujas áreas eram conhecidas.

Em geometria, aplicamos este método o tempo todo. Por exemplo, sabemos calcular a área do triângulo e para encontrar a área de outras figuras, dividimos a figura dada em triângulos e calculamos sua área. Também, podemos fazer o mesmo utilizando a área do retângulo (que

sabemos calcular pelo Axioma 9). Note que este procedimento foi utilizado nos Teoremas 28 e 29 apresentados anteriormente.

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DA GEOMETRIA

A geometria está presente em tudo ao nosso redor, basta olharmos a nossa volta para vermos diversos objetos nas mais variadas formas geométricas. Entretanto, a geometria não se limita apenas a objetos, mas também podemos encontrá-la nas construções, em edifícios, nas paisagens naturais, dentre outros. Essa presença da geometria no nosso cotidiano evidencia a importância da sua abordagem na formação de futuros profissionais nas mais diversas áreas do conhecimento.

Além disso, diversos estudiosos já perceberam que o ensino da geometria nas séries iniciais possibilita um aprimoramento da percepção espacial, desenvolvendo assim o raciocínio geométrico e possibilitando uma melhor análise de mapas, gráficos, desenhos, dentre outros.

Entretanto, apesar de toda sua importância, o ensino da geometria tem sido um desafio em sala de aula, pois não existe um consenso entre os educadores com relação às propostas que sejam mais eficazes para o seu ensino. Apesar disto, um ponto consensual se baseia na necessidade de adotar materiais complementares em sala de aula e não apenas ficar restrito ao livro didático adotado. O livro deve ser um referencial, um apoio ao professor, mas não pode se tornar o cenário principal em sala de aula. Segundo Pavão, 2011, apud (BRANDT; KLUPPEL, 2012),

O livro deve oferecer uma orientação para que o professor busque, de forma autônoma outras fontes e experiências para complementar seu trabalho. Deve garantir ao professor liberdade de escolha e espaço para que ele possa agregar ao seu trabalho outros instrumentos. E o professor não pode se transformar em refém do livro, imaginando encontrar ali todo o saber verdadeiro e a narrativa ideal.

Portanto, é de suma importância procurar ferramentas adicionais que possam auxiliar na abordagem do conteúdo, na consolidação dos conceitos e resultados estudados em sala de aula. Para isso, é necessário que o professor consiga trazer o conteúdo ensinado para a realidade do aluno, mostrando a este a importância dos tópicos que estão sendo estudados. Além disso, no

estudo da geometria, que é uma ciência muito abstrata, é indispensável apresentar aos alunos figuras para que estes possam entender os problemas que estão sendo estudados. Portanto, a utilização de apenas quadro e giz nesta tarefa é muito limitado, sendo necessário aliar a estes recursos outras ferramentas.

Dentro desta perspectiva e considerando a era tecnológica que estamos inseridos, uma possibilidade que tem sido muito discutida por educadores é o uso de ferramentas tecnológicas em sala de aula. Estas têm se mostrado muito eficazes, conseguindo atrair a atenção dos alunos e suprir muitas deficiências que são encontradas em sala de aula. No artigo (GONÇALVES; OLIVEIRA; ALVES, 2015), os autores afirmam:

A pesquisa apontada neste artigo levanta claramente quanto é crucial se pensar em processos inovadores e diferenciados para apresentar uma aprendizagem significativa, uma educação de qualidade, com inclusão digital e dinamização, no processo de construção do conhecimento. Essas tecnologias possuem mais vantagens quando são usadas de maneira adequada, visando à construção do conhecimento do estudante e do professor.

Essa inserção da tecnologia em sala de aula vem com o propósito de promover aos alunos um contato maior com a realidade que estão inseridos e colocá-los em contato com softwares na área de geometria que possibilitem suprir algumas deficiências encontradas em sala de aula, em que a explicação do conteúdo e a exposição de desenhos geométricos usando apenas giz e quadro-negro podem estar limitadas. Desta forma, o uso destes softwares onde os alunos podem fazer suas próprias construções geométricas permite que o aluno saia do papel de sujeito passivo em sala de aula e assuma um papel ativo na construção do conhecimento, potencializando a assimilação destes.

Além disso, os recursos computacionais permitem uma maior interação entre os alunos, pois permitem a realização de atividades em grupos, possibilitando a discussão das suas dificuldades, consolidando, portanto, o conhecimento de forma interativa.

Considerando este contexto, nosso foco neste capítulo será a utilização do software *geogebra* no ensino da Geometria Euclidiana Plana. Primeiramente, explicaremos como utilizar este software em sala de aula, apresentando diversas atividades que podem ser realizadas com os alunos. As atividades descritas aqui foram realizadas com os alunos do 9º ano da Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro, no Departamento de Computação e Matemática da Universidade de São Paulo, campus Ribeirão Preto no dia 04 de Novembro de 2014. Após descrevermos todas as atividades, faremos uma análise sobre a atividade que foi desenvolvida e como isso impactou na formação dos alunos.

9.1 Atividade Pedagógica

Nesta seção, descreveremos a atividade realizada no Departamento de Computação e Matemática da Universidade de São Paulo, campus Ribeirão Preto com os alunos do 9º ano da

Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro.

Descreveremos a seguir os dados da atividade:

- **Data de realização:** 04 de Novembro de 2014
- **Duração:** 9h às 12h30
- **Participantes:**
 - Profa. Dra. Jaqueline Godoy Mesquita (orientadora do trabalho)
 - Prof. André Luiz Brazão - Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro
 - Prof. Milton Donizete Dalben - Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro
 - Profa. Fabiana Porto - Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro
 - Profa. Fernanda Batista - Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro
 - Profa. convidada Michele Barbin Bodelon
 - 23 alunos do 9º ano da Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro.
- **Local de realização:** Departamento de Computação e Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto da Universidade de São Paulo, campus Ribeirão Preto.
- **Cidade:** Ribeirão Preto-SP.
- **Material utilizado:**
 - Computadores
 - Quadro branco;
 - Pincel atômico;
- **Descrição da atividade**

A atividade começou às 9 horas e terminou às 12h30min. Para realizar a atividade, foi necessário primeiramente instalar o software *geogebra*, que pode ser baixado gratuitamente pelo endereço eletrônico <http://www.geogebra.org/download>, em todos os computadores. Após abrir o software *geogebra*, os alunos tiveram um primeiro contato com os principais comandos, como as janelas de álgebra, janela de gráficos e campo de entrada. Em seguida, os alunos fizeram algumas atividades básicas como ativar/desativar eixos, pontos, construir retas definidas por dois pontos, semirretas definidas por dois pontos e, por fim, como salvar as atividades. Estas noções mais básicas já haviam sido apresentadas aos alunos em sala de aula de uma forma não tão eficaz. A primeira vez que eles viram este software foi na escola por meio de uma televisão que havia sido conectada a um computador para que todos os alunos pudessem ver juntos essa ferramenta em uso. No entanto, esta opção de

mostrar na escola a ferramenta *geogebra* foi apenas uma tentativa de motivar os alunos, de modo que eles pudessem ver o quão poderosa e eficaz é esta ferramenta.

• Roteiro da atividade

Iniciamos a atividade propondo construções mais simples para que os alunos pudessem se familiarizar com o software *geogebra*. A seguir, descreveremos as atividades propostas.

Começamos apresentando definição de retas concorrentes, paralelas e perpendiculares. Em seguida, propomos as seguintes construções:

(i) Desenhar duas retas concorrentes

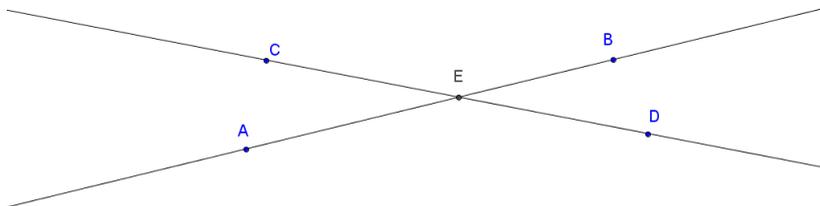


Figura 94 – Retas concorrentes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na barra de ferramentas, clique na seta da 3ª opção e selecione *reta definida por dois pontos*. Em seguida, marque dois pontos quaisquer para definir a reta. Repita o procedimento e faça com que as retas se cruzem. Veja figura 94.

(ii) Desenhar retas paralelas

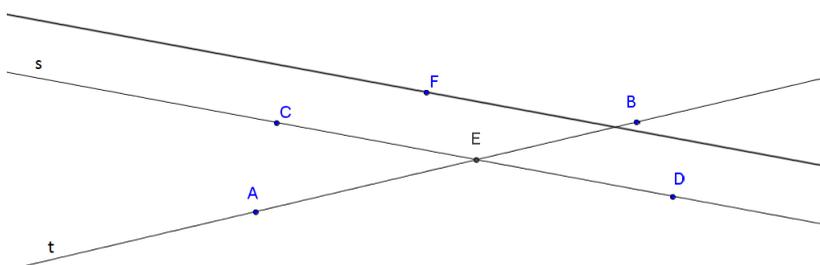


Figura 95 – Reta paralela a reta s

Fonte: Elaborada pelo autor.

Escolha uma das retas da atividade anterior e renomeie. Para isto, clique com o botão direito do mouse sobre uma das retas e escolha *renomear*, digite *s* e clique em *ok*. Repita o procedimento e renomeie a outra reta com *t*. Na barra de ferramentas, clique na seta da 4ª opção e selecione a opção *reta paralela*. Clique sobre a reta *s* e um ponto por onde passará a nova reta. Veja figura 95.

(iii) **Desenhar retas perpendiculares**

Na barra de ferramentas, clique na seta da 4ª opção e selecione a opção *reta perpendicular*. Clique sobre a reta *t* e um ponto por onde passará a nova reta.

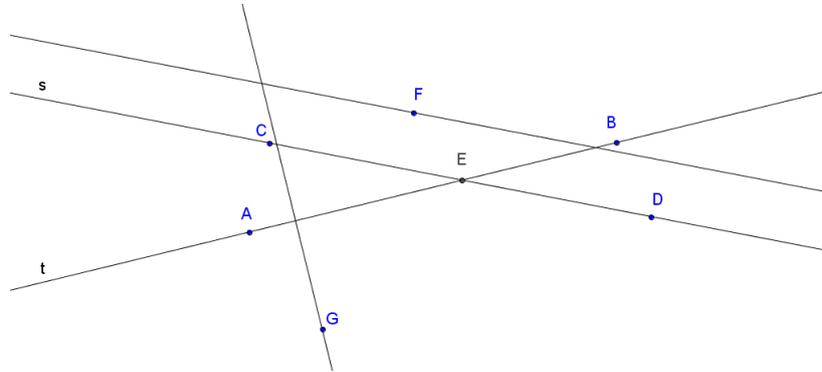


Figura 96 – Reta perpendicular a reta *t*

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida, foram apresentadas as definições 10, 11 e 12, que podem ser encontradas nas páginas 37 e 38, aos alunos, bem como as seguintes atividades básicas sobre ângulos.

(iv) **Ângulos**

Primeiramente, construa duas retas concorrentes, conforme explicado anteriormente. Na barra de ferramentas, clique na seta da 2ª opção e selecione *intersecção de dois objetos*.

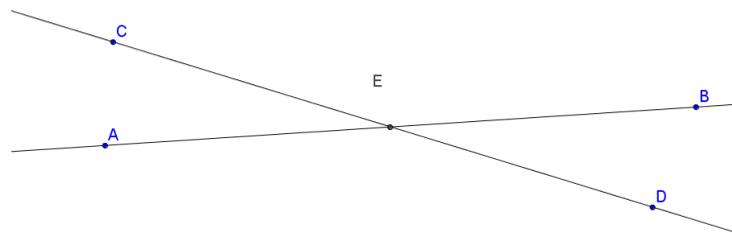


Figura 97 – Retas concorrentes

Fonte: Elaborada pelo autor.

(v) **Verificação da medida de ângulos opostos pelo vértice**

Na barra de ferramentas, clique na seta da 8ª opção e selecione a opção *ângulo*. Clique nos pontos *A*, *E* e *D* nessa ordem e depois, clique nos pontos *B*, *E* e *C*. Fazendo isto, podemos medir os ângulos opostos pelo vértice e checar que ambos são congruentes. Clique em *Esc* para sair do comando.

Após isto, o professor explicou a turma sobre a propriedade de ângulos opostos pelo vértice no quadro e demonstrou que, de fato, eles são congruentes.

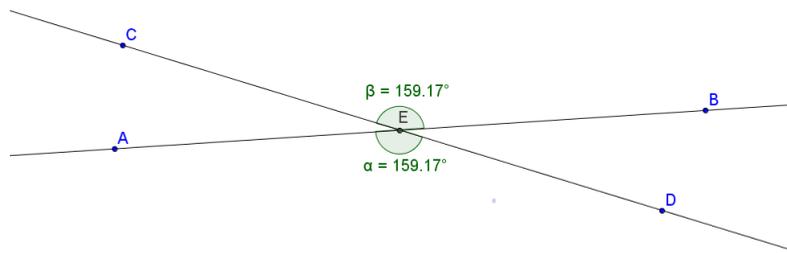


Figura 98 – Ângulos opostos pelo vértice (OPV)

Fonte: Elaborada pelo autor.

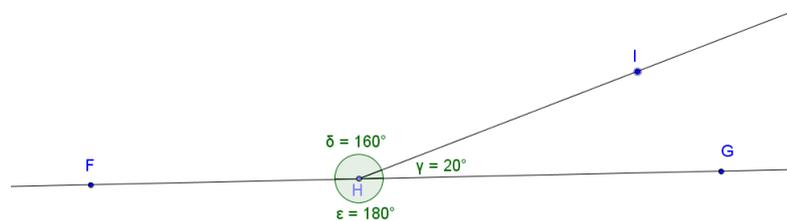


Figura 99 – Ângulos suplementares e ângulo raso

Fonte: Elaborada pelo autor.

(vi) Ângulos suplementares

Diminua o zoom e mova a tela para cima. Em seguida, aumente o zoom e na barra de ferramentas, clique na seta da 3ª opção e selecione a opção *reta definida por dois pontos*. Na seta da 2ª opção, selecione a opção *ponto em objeto*, clique sobre a reta para definir o ponto. Na seta da 3ª opção, selecione a opção *semirreta definida por dois pontos*, clique sobre o ponto central e escolha outro ponto para definir a semirreta de tal modo que $I \notin \overrightarrow{FG}$. Na seta da 8ª opção, selecione a opção *ângulo*, clique sobre três pontos para medir o ângulo. Repita o procedimento para o ângulo suplementar e usando o mesmo comando que antes meça o ângulo raso. Clique *Esc* para sair do comando. Veja a figura 99.

Clique e segure o ponto pertencente à semirreta e mova para ver o que acontece com as medidas dos ângulos.

(vii) Ângulos complementares

Diminua o zoom e mova a tela para cima. Em seguida, aumente o zoom e na barra de ferramentas, clique na opção *semirreta definida por dois pontos*. Após isso, clique sobre a janela de visualização em dois pontos distintos e na barra de ferramentas, selecione *ângulo com amplitude fixa*. Clique sobre os dois pontos da semirreta e digite 90, depois clique em *ok*. Na barra de ferramentas, clique na opção *semirreta*

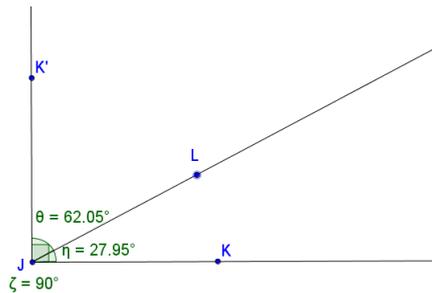


Figura 100 – Ângulo complementar

Fonte: Elaborada pelo autor.

definida por dois pontos. Clique na origem da semirreta anterior e no ponto que determina o ângulo de 90° , então construa outra semirreta com a mesma origem e com a nova semirreta pertencendo a região angular de 90° . Na barra de ferramentas, clique na opção *ângulo*, clique sobre os três pontos que determinam um ângulo. Repita o mesmo procedimento para determinar a abertura do outro ângulo. Veja figura 100.

A seguir, antes de começar as próximas atividades, o professor apresentou a definição de triângulo, bem como apresentou os diferentes tipos de triângulos e suas propriedades.

(viii) Triângulo qualquer

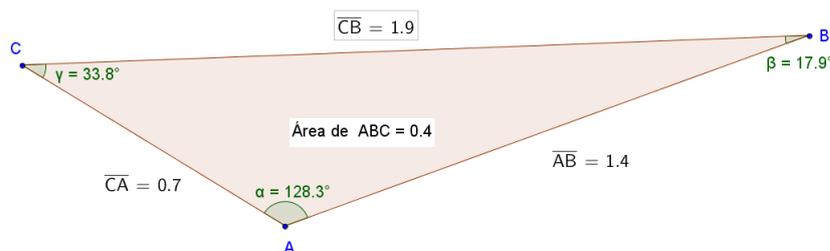


Figura 101 – Triângulo qualquer

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando a ferramenta *Polígono*, construa um triângulo ABC . Com a ferramenta *área*, é possível determinar a área do triângulo ABC . Também, é possível determinar a medida dos lados do triângulo e de seus ângulos. Para isto, utilize a ferramenta *Distância* ou *comprimento* para determinar a medida dos lados AB , BC e AC do triângulo ABC . Utilizando a ferramenta *ângulo*, determine também a medida dos ângulo \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} .

(ix) Triângulo equilátero

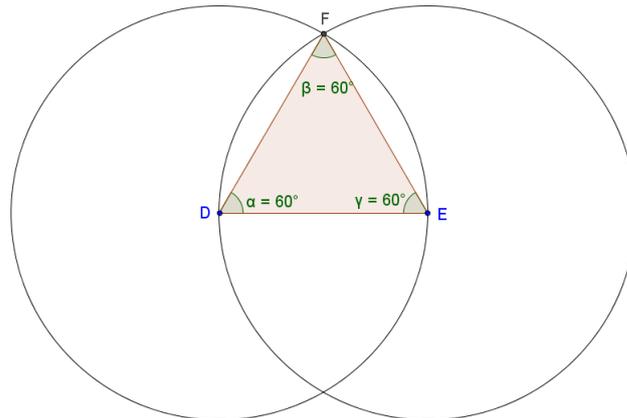


Figura 102 – Triângulo equilátero

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a opção *Segmento definido por dois pontos*, crie um segmento DE de tamanho qualquer. A partir desse segmento DE , com a opção *círculo definido pelo centro e um de seus pontos*, crie uma primeira circunferência com o centro no ponto D e raio DE . Depois, construa uma segunda circunferência com o centro no ponto E e raio ED . Note que o raio das duas circunferências será o segmento DE . Selecione a opção *Intersecção de dois objetos* e crie um ponto F no ponto de intersecção superior das duas circunferências. Com a ferramenta *polígono*, crie um triângulo DEF , de modo que os pontos sejam coincidentes aos pontos D, E, F definidos anteriormente. Com a opção *ângulo*, defina os três ângulos do triângulo DEF .

- **Observações**

É importante ressaltar que para não correr o risco de se perder parte do trabalho, a cada passo realizado, os alunos foram lembrados de salvar as atividades.

As atividades, até agora apresentadas, foram descritas de forma simples e não apresentaram dificuldades para serem realizadas. No que segue, apresentaremos atividades mais elaboradas que foram realizadas. Estas estão acompanhadas de suas respectivas figuras, em um passo-a-passo mais detalhado.

9.1.1 Atividade 1: Construção do Triângulo, Incentro e inscrição da circunferência

Nessa atividade, nosso objetivo principal é construir o incentro e discutir com os alunos sobre suas principais propriedades. Para isto, seguimos os passos abaixo descritos:

- Utilizando a ferramenta *Polígono*, construa um triângulo ABC .

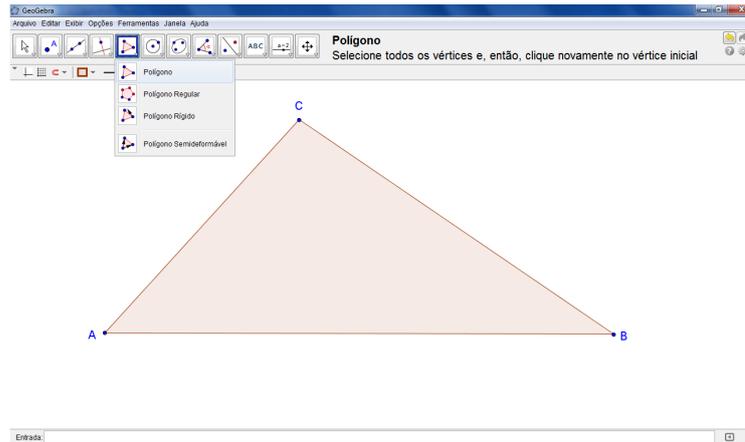


Figura 103 – Construção do incentro: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Utilizando a ferramenta *bissetriz*, marque os três vértices do triângulo começando pelo ponto A. Repita o procedimento, começando pelo ponto B e em seguida pelo ponto C.

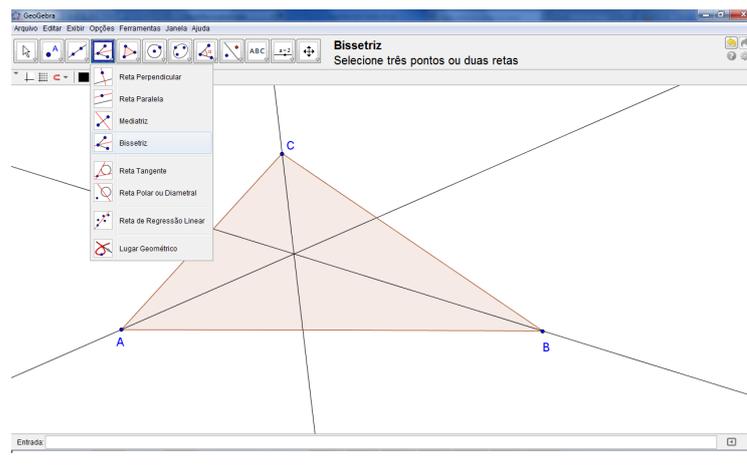


Figura 104 – Construção do incentro: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Para facilitar a compreensão, vamos colorir as bissetrizes. Para isto, clique com o botão direito do mouse sobre uma das retas, selecione a opção *propriedades*, clique sobre cor e em seguida, clique sobre algum verde. Repita o procedimento para as outras duas retas.
- Selecione a ferramenta *intersecção de dois objetos* e clique sobre a intersecção das três retas.
- Selecione a opção *reta perpendicular*, clique sobre o incentro e sobre um dos lados do triângulo.
- Selecione a opção *intersecção de dois objetos*, clique sobre a intersecção da reta perpendicular com um dos lados do triângulo.

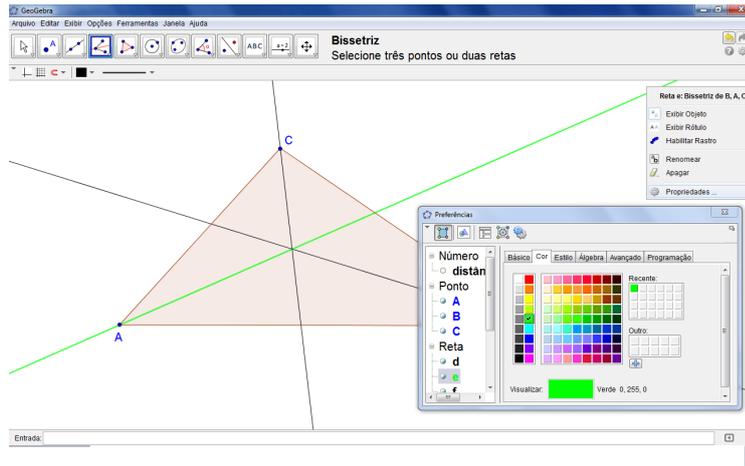


Figura 105 – Construção do incentro: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

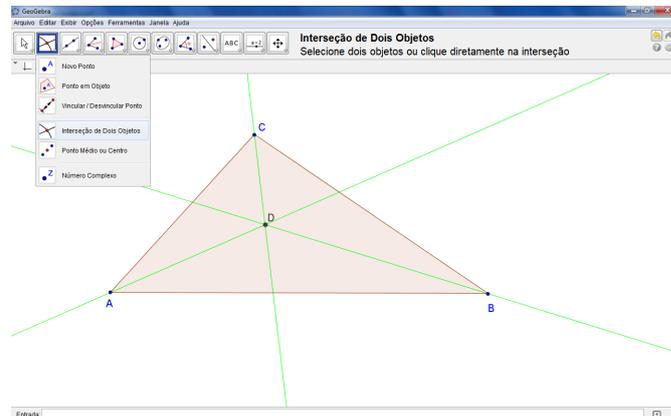


Figura 106 – Construção do incentro: Passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor.

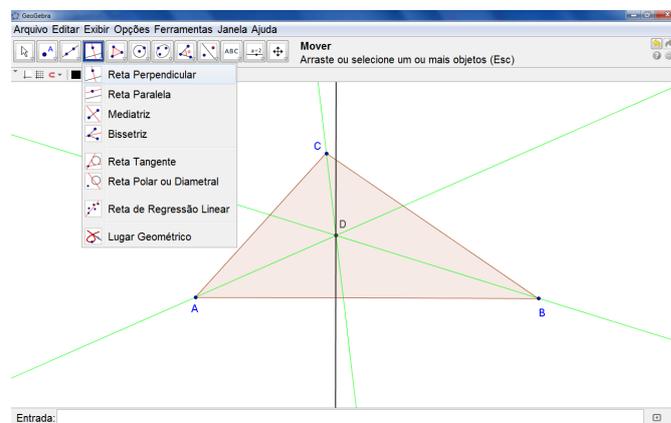


Figura 107 – Construção do incentro: Passo 5

Fonte: Elaborada pelo autor.

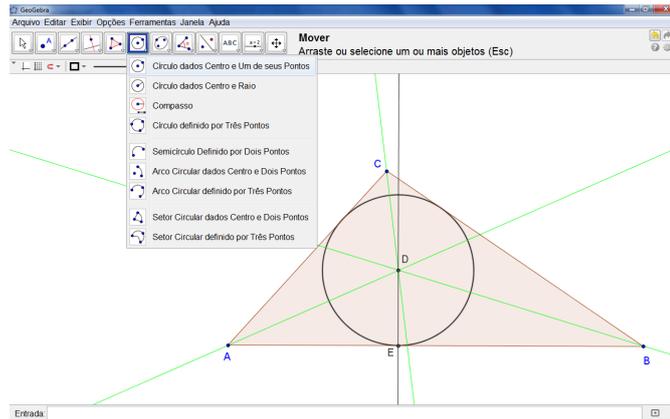


Figura 108 – Construção do incentro: Passo 6

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Selecione a opção *Círculo dados centro e um de seus pontos*, clique sobre o incentro e sobre o ponto de intersecção entre a reta perpendicular e o lado do triângulo.

Ao terminar a atividade, o professor explicou as principais propriedades do incentro, bem como explicou no quadro a construção realizada pelos alunos.

9.1.2 Atividade 2: Triângulo, Circuncentro e Circunscrição da circunferência

Nessa atividade, nosso objetivo principal é construir o circuncentro e ensinar suas principais propriedades aos alunos. Para isto, seguimos os passos abaixo descritos:

- Utilizando a ferramenta *Polígono*, construa um triângulo *ABC*.

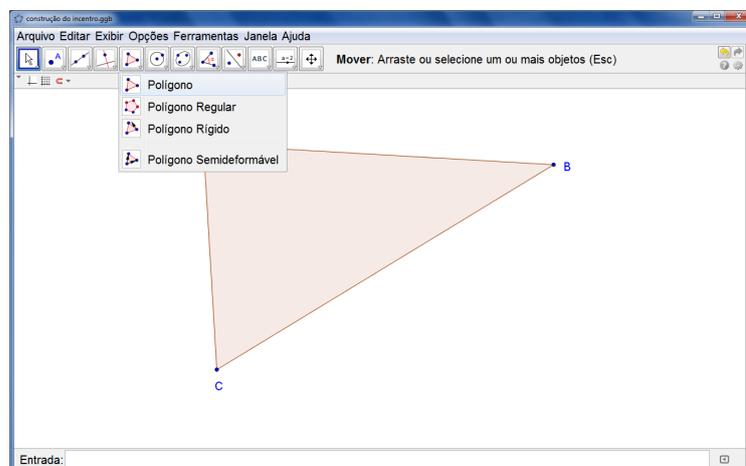


Figura 109 – Construção do circuncentro: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Utilizando a ferramenta *mediatriz*, clique sobre os três lados do triângulo.

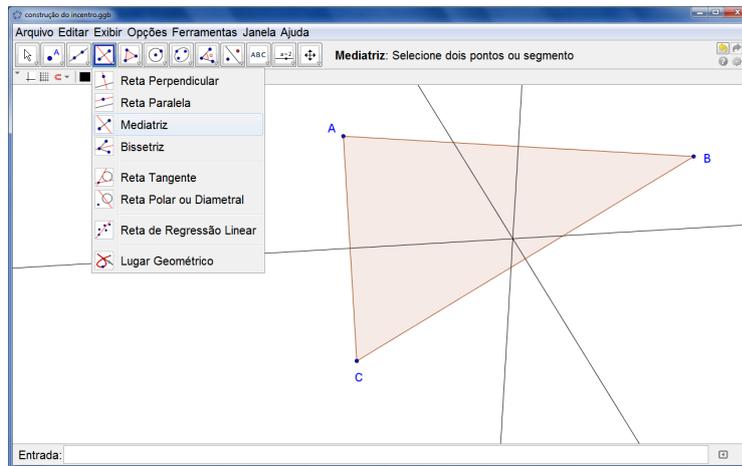


Figura 110 – Construção do circuncentro: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Selecione a opção *intersecção de dois objetos*, clique sobre a intersecção das três mediatrizes. Já temos o circuncentro que é o ponto equidistante dos vértices. Agora basta selecionar *círculo dado centro e um de seus pontos* e clique sobre o circuncentro e em algum vértice.

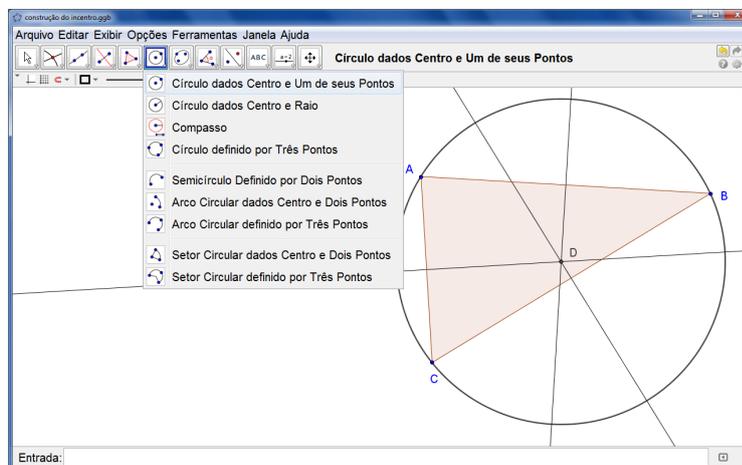


Figura 111 – Construção do circuncentro: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Para facilitar a visualização, podemos esconder as mediatrizes de modo a dar um enfoque maior no triângulo, no circuncentro e na circunferência circunscrita. Para isto, clique em *exibir* e escolha a opção *janela de álgebra*, vai aparecer uma coluna a esquerda com os elementos utilizados no desenho. Nesta coluna, escolha a opção *reta*. Use isto com as três retas **d**, **e** e **f**. A esquerda de cada reta, tem um pequeno círculo em azul, selecione este círculo, a cor azul então irá desaparecer e a reta será escondida. Repita este procedimento

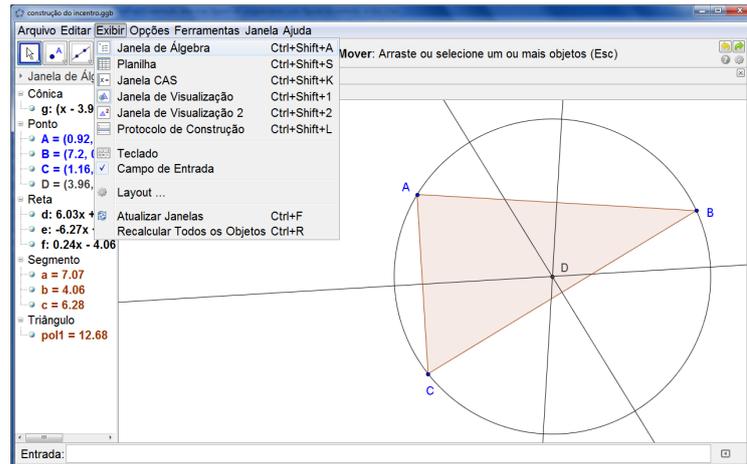


Figura 112 – Construção do circuncentro: Passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor.

para cada reta. Com isto, facilitará a visualização do circuncentro e o professor pode aproveitar esta oportunidade para descrever as características do circuncentro.

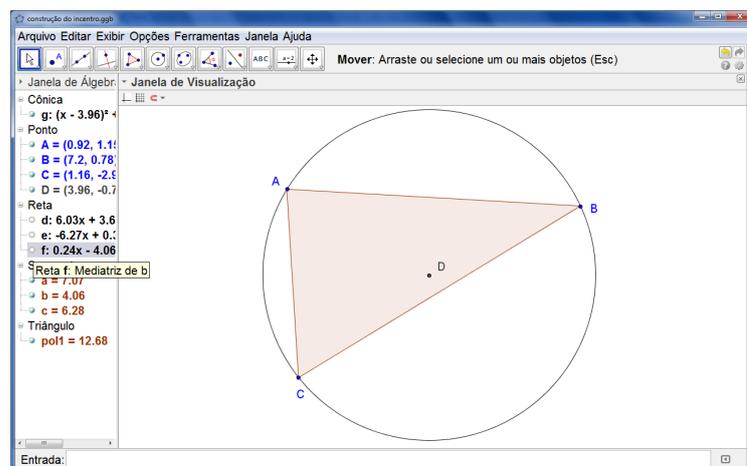


Figura 113 – Construção do circuncentro: Passo 5

Fonte: Elaborada pelo autor.

9.1.3 Atividade 3: Triângulo, Medianas e Baricentro

Nesta atividade, nosso objetivo é a construção do baricentro de um triângulo. Após isto, iremos discutir com os alunos as principais propriedades do baricentro.

- Utilizando a ferramenta *Polígono*, construa um triângulo ABC .
- Selecione a ferramenta *ponto médio* e clique sobre os vértices A e B , B e C e por fim, clique nos vértices A e C .

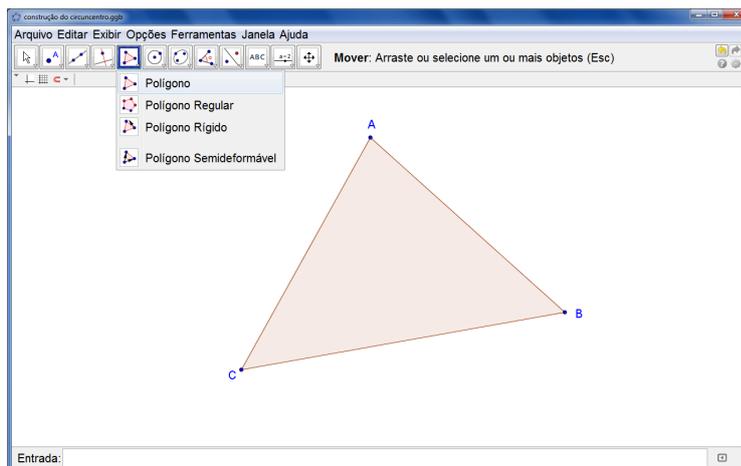


Figura 114 – Construção do baricentro: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

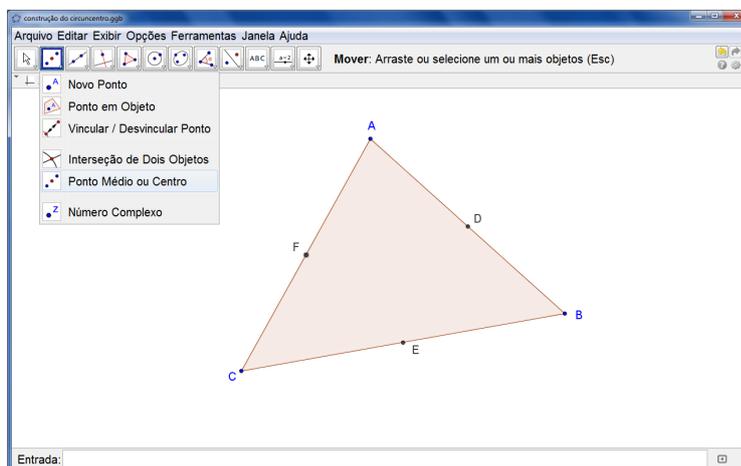


Figura 115 – Construção do baricentro: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Selecione a ferramenta *segmento* e clique sobre o vértice A e o ponto médio do lado oposto. Repita o procedimento, clicando sobre o vértice B e o ponto médio do lado oposto e, por fim, clicando sobre o vértice C e sobre o ponto médio do lado oposto. Com isto, construímos as três medianas (cada uma relativa a cada lado). Note que as medianas construídas se intersectam em um único ponto.
- Selecione a ferramenta *intersecção de dois objetos* e clique sobre o ponto de intersecção das três medianas. Este ponto é chamado **baricentro**.
- Selecione a ferramenta *polígono*, clique sobre os vértices A e B e sobre o baricentro. Novamente, selecionando a ferramenta *polígono*, clique sobre os vértices B e C e sobre o baricentro. Por fim, repita o mesmo procedimento e clique sobre os vértices A e C e sobre o baricentro.

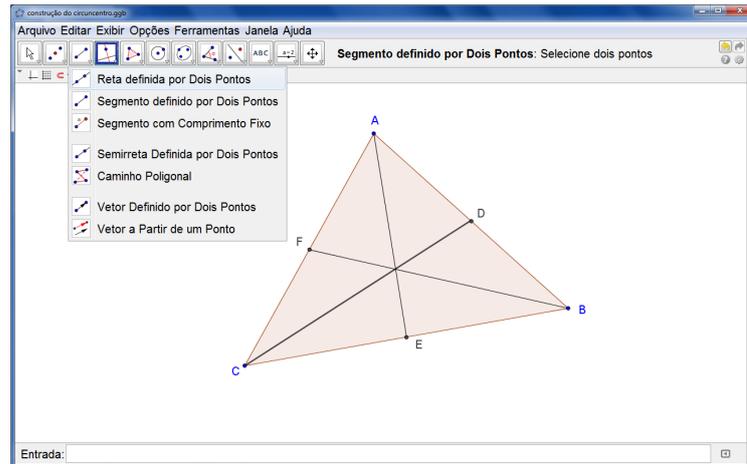


Figura 116 – construção do baricentro: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

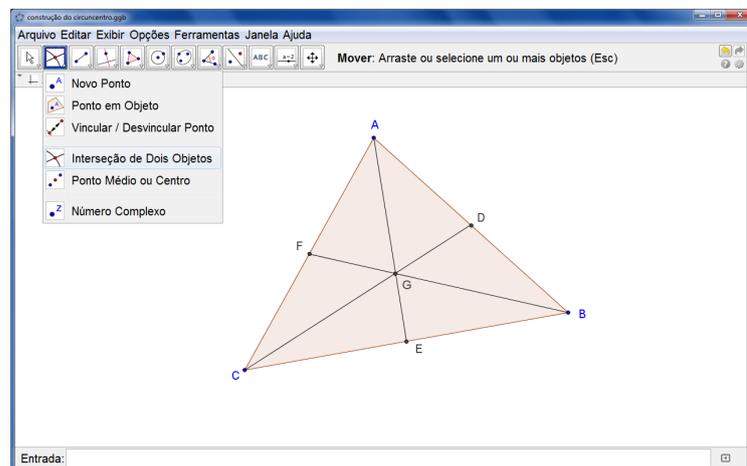


Figura 117 – Construção do baricentro: Passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Para facilitar a visualização dos três últimos triângulos, iremos colorir cada um com uma cor diferente.
- Na janela de álgebra na aba triângulo, clique em pol 1 para esconder o triângulo maior. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre pol 2 e clique em propriedades. Aparecerá uma caixa de diálogo, então clique em *cor* e selecione a cor vermelha. Sem fechar a caixa de diálogo, clique em pol 3 e selecione a cor amarela. Finalmente, sem fechar a caixa de diálogo, clique em pol 4 e selecione a cor azul.
- Na barra de ferramenta, selecione a opção *área* e clique sobre os triângulos AGC , CGB e AGB para constatar que os três triângulos possuem a mesma área.
- Verifique que as áreas destes triângulos são iguais. Clique em *Esc* no teclado para sair do comando área.

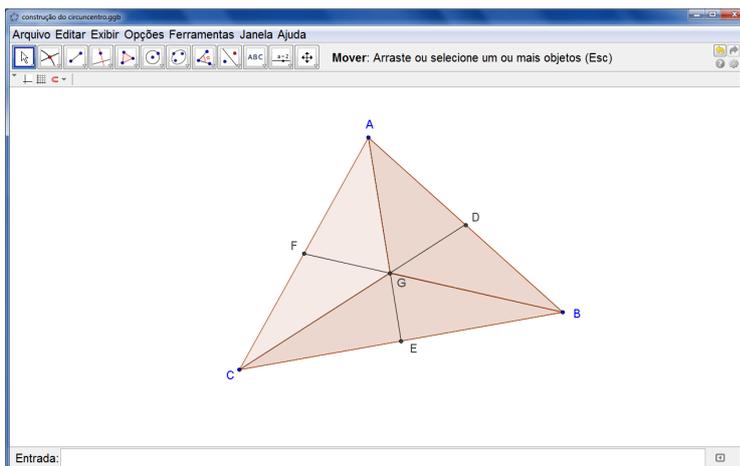


Figura 118 – Construção do baricentro: Passo 5

Fonte: Elaborada pelo autor.

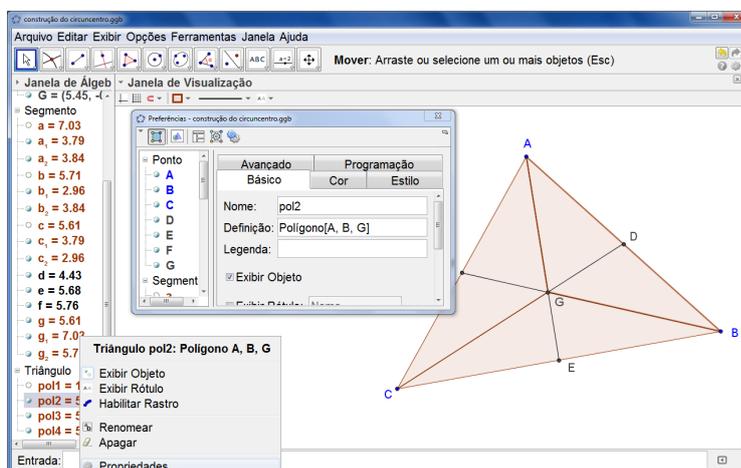


Figura 119 – Construção do baricentro: Passo 6

Fonte: Elaborada pelo autor.

9.1.4 Atividade 4: Demonstração do Teorema de Pitágoras

Nesta atividade, nosso objetivo é apresentar aos alunos uma demonstração do Teorema de Pitágoras, usando o geogebra.

- Vamos começar construindo um triângulo retângulo. Para isto, selecione a opção *ângulo com amplitude fixa*. Depois, clique na janela de visualização em dois pontos distintos e aparecerá uma caixa de diálogo. Digite 90 e clique em *ok*.
- Clique em *Esc* para sair do comando, depois clique e arraste o ângulo de 90° para algum lugar visível. Então, selecione a opção *segmento* e clique em *A* e *B*, em *B* e *A'*, e em *A* e *A'*.
- Selecione a opção *polígono regular*, clique sobre os vértices que delimitam a hipotenusa, então aparecerá uma caixa de diálogo, digite 4 e clique em *ok* (se o quadrado aparecer

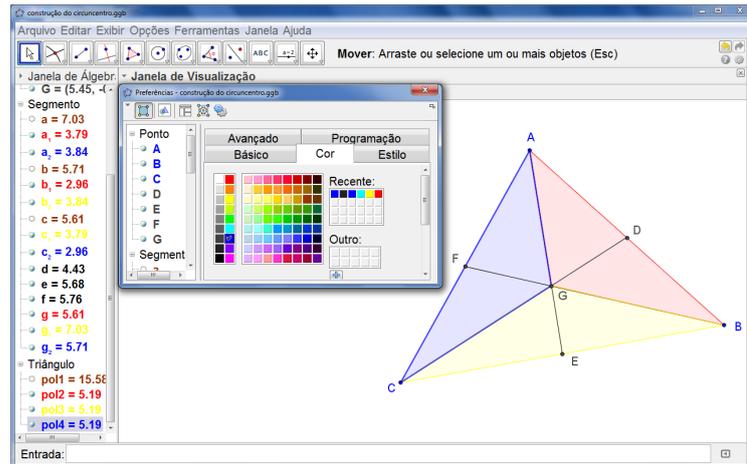


Figura 120 – Construção do baricentro: Passo 7

Fonte: Elaborada pelo autor.

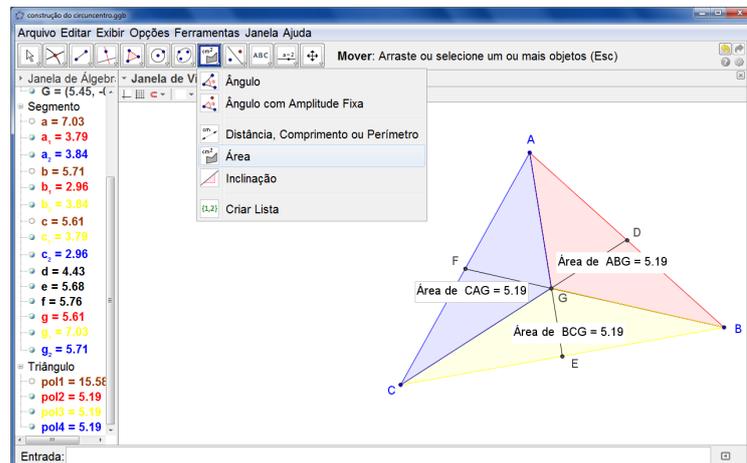


Figura 121 – Construção do baricentro: Passo 8

Fonte: Elaborada pelo autor.

sobre o triângulo, apague-o e inverta a ordem dos vértices).

- Repita o procedimento descrito acima de construção do quadrado sobre os catetos.
- Selecione a opção *área*, clique sobre os quadrados formados a partir dos lados do triângulo.
- Para provar o Teorema de Pitágoras, some as áreas dos quadrados formados a partir dos catetos do triângulo e verifique que o resultado é numericamente igual a área do quadrado formado a partir da hipotenusa. Com isto, obtemos a relação do Teorema de Pitágoras.

9.1.5 Atividade 6: O Número π

Finalmente, apresentaremos nossa última atividade realizada com os alunos. O objetivo principal desta atividade é encontrar o valor do número π usando o geogebra. Para isso, iremos

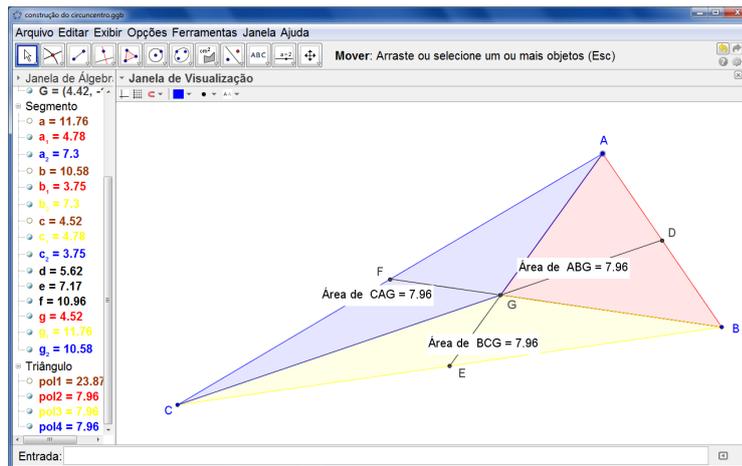


Figura 122 – Construção do baricentro: Passo 9

Fonte: Elaborada pelo autor.

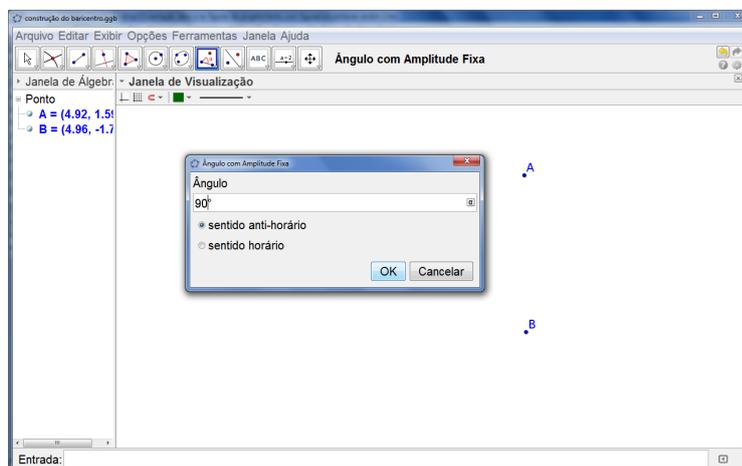


Figura 123 – Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

seguir os passos abaixo:

- Selecione a ferramenta *Círculo dados centro e um de seu pontos* e clique na janela de visualização em dois pontos distintos.
- Selecione a opção *distância, comprimento ou perímetro*, clique sobre a circunferência e em seguida, clique no centro e em um dos pontos das circunferência para medir o raio.
- Na barra de menu, clique em *exibir* e escolha a opção *planilha*.
- Na janela de álgebra, clique com o botão direito sobre *perímetro* e selecione *renomear*, digite comprimento.
- Na célula A1, digite $= 2 * AB$ e pressione enter. Na célula B1, digite comprimento e pressione enter. Por fim, na célula C1, digite $= B1/A1$ e pressione enter.

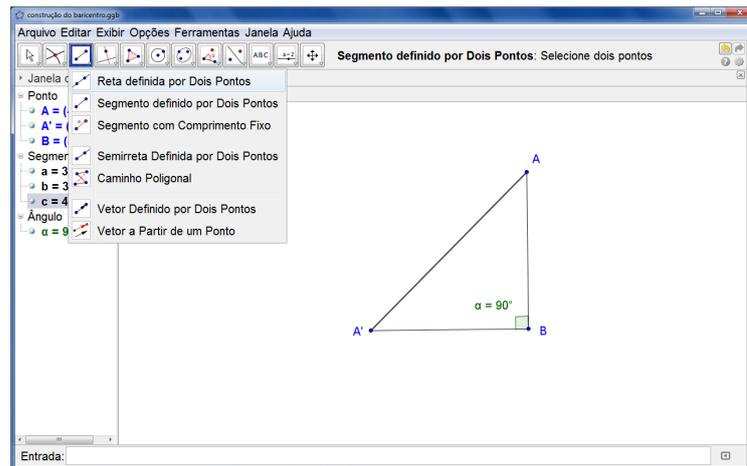


Figura 124 – Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

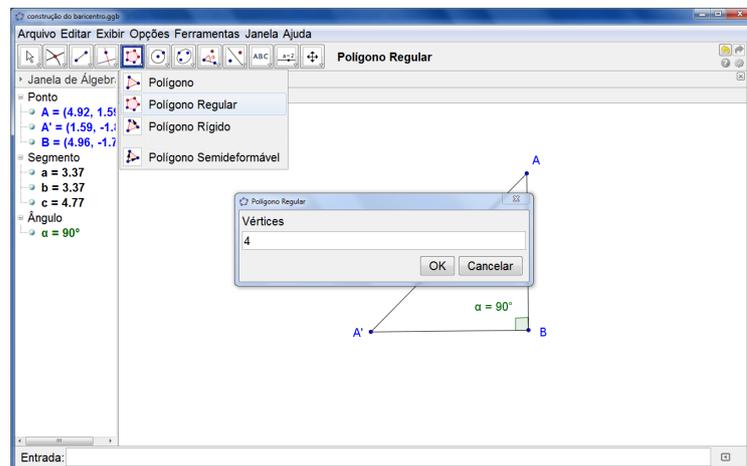


Figura 125 – Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

- Note que podemos ampliar ou reduzir a circunferência, entretanto a razão entre o comprimento e o diâmetro se mantém constante e igual a π . Portanto, concluímos que:

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{diâmetro}} = \pi.$$

9.2 Considerações e análise do uso desta ferramenta

Utilizar o software geogebra com os alunos no ensino de Geometria Euclidiana Plana foi uma experiência importante e enriquecedora, pois demonstrou bastante eficácia no ensino desta, despertando bastante o interesse dos alunos.

Durante todas as atividades, os alunos demonstraram-se entusiasmados e a cada nova atividade, sentiram-se desafiados a solucionar o problema. A motivação e o entusiasmo eram

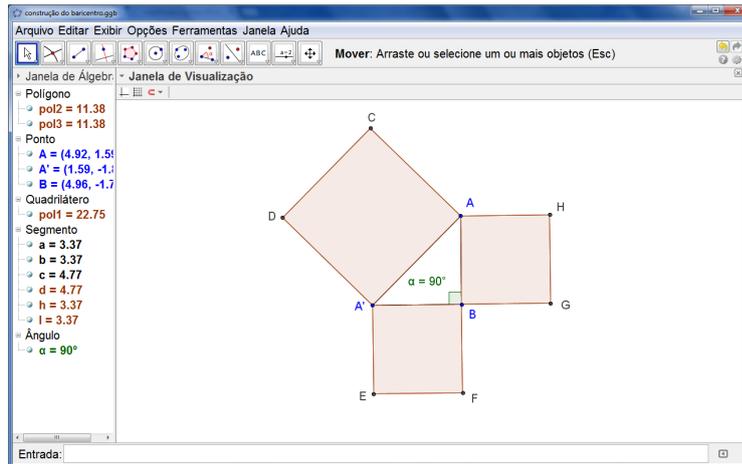


Figura 126 – Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor.

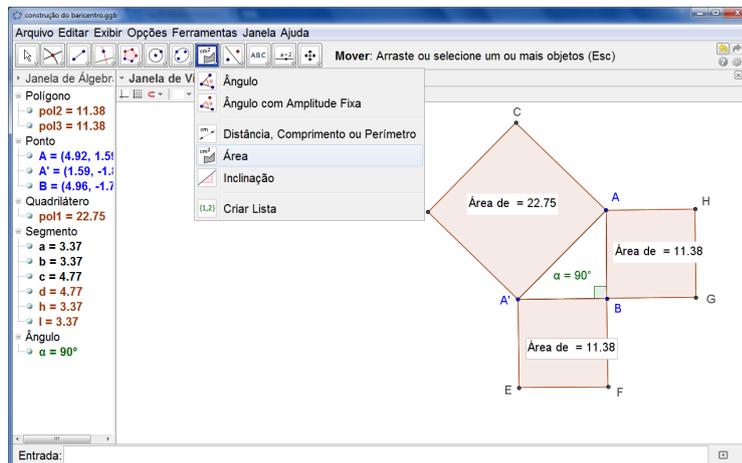


Figura 127 – Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 5

Fonte: Elaborada pelo autor.

evidentes, principalmente após o termino de cada atividade, pois havia certa ansiedade para verificar se a figura fora construída corretamente. Para isso, eles precisavam selecionar um ponto de sua figura construída e movê-lo (nenhum ponto poderia se mover exceto um ou dois pontos no máximo). Além disso, este ponto ao se mover poderia alterar a escala ou rotacionar a figura, mas não poderia afetar as suas características. Por exemplo, na construção de um triângulo equilátero, ao escolher o ponto de intersecção dos dois círculos (que coincidia com um dos vértices do triângulo), não era possível arrastá-lo, enquanto que a escolha de qualquer um dos outros dois vértices do triângulo permitia alterar a escala ou rotacionar a figura, de tal modo que o triângulo continuava a ser equilátero, independente do movimento. No entanto, se houvesse alguma falha de execução, a figura poderia abrir e perder todas as suas características. Então, todos ficavam apreensivos para ver se a sua figura estava correta e quando alguém errava na construção, eles não aceitavam deixar a figura com erro, buscavam imediatamente a ajuda de um dos professores

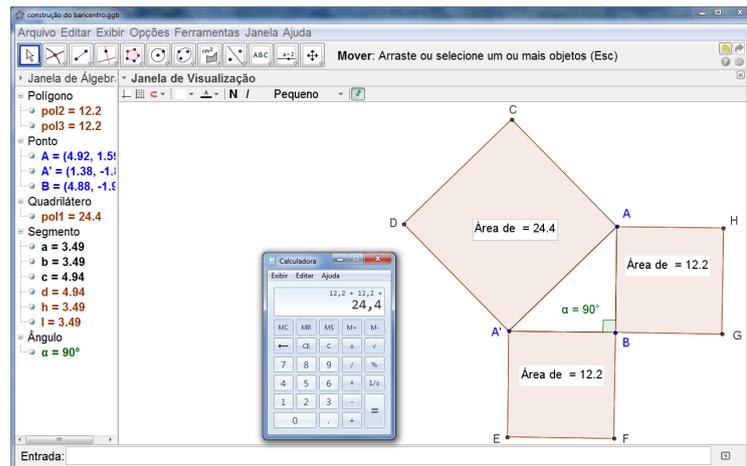
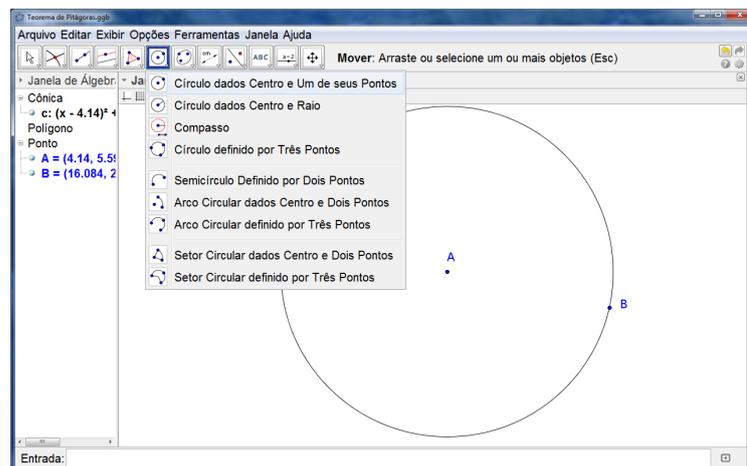


Figura 128 – Demonstração do Teorema de Pitágoras: Passo 6

Fonte: Elaborada pelo autor.

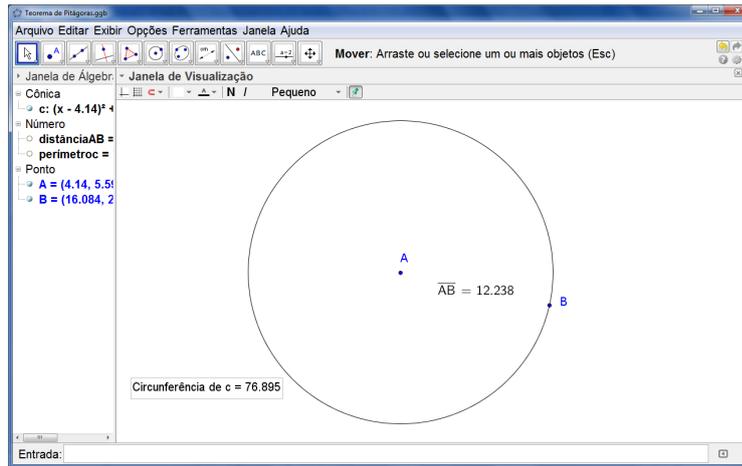
Figura 129 – O número π : Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

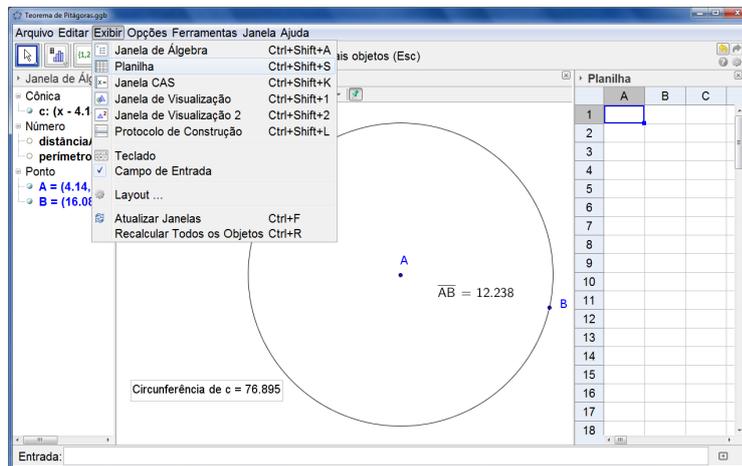
para construir uma nova figura.

Cabe ainda destacar a importância de ensinar ao aluno a encontrar o erro de execução (quando acontece), pois eles aprendem bastante com os erros. Alguns dos erros mais comuns estão relacionados a selecionar uma intersecção aparente sem utilizar o comando intersecção de objetos.

A aplicação desta atividade permitiu aos alunos participantes fazer algumas investigações que eles não estavam habituados a fazer. Por exemplo, colocamos duas retas, de modo que os alunos desconfiassem que elas fossem paralelas. Entretanto, pela definição de retas paralelas, elas nunca poderiam se encontrar. Então, neste caso, eles aplicaram um zoom out para perceber que elas se encontravam. Em sala de aula, apenas com quadro negro e giz, seria impossível fazer com os alunos este tipo investigação.

Figura 130 – O número π : Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

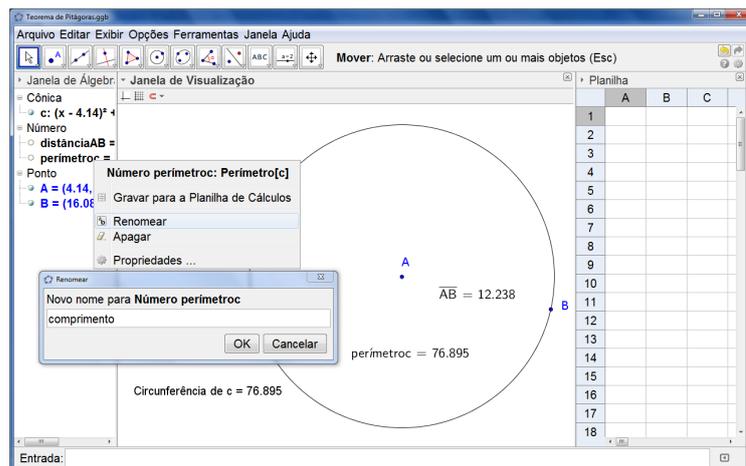
Figura 131 – O número π : Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

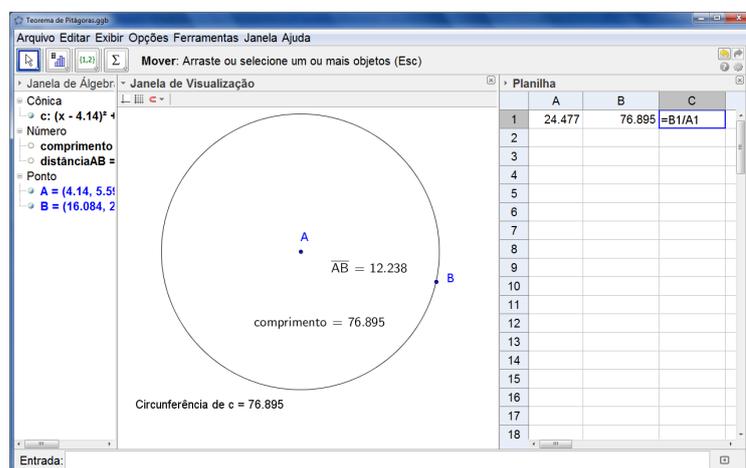
Podemos observar que as atividades realizadas com o geogebra mostraram-se muito eficazes, pois conseguiram prender a atenção dos alunos na maior parte do tempo, despertando o interesse até mesmo dos alunos que habitualmente não fazem as atividades propostas. Também, as atividades propostas ampliaram a capacidade de investigação dos alunos, propiciando a compreensão de algumas definições mais facilmente, uma vez que elas foram feitas de modo mais interativo.

Depois das atividades, percebemos que os alunos que não participaram delas tiveram mais dificuldade para assimilar os conteúdos ensinados posteriormente relacionados a Geometria Euclidiana Plana. Outro fato importante que vale ressaltar é que no ano seguinte às atividades, os alunos que passaram para o 9º ano pediram para fazer o mesmo curso, afinal a propaganda por parte dos colegas foi grande e motivou os alunos das outras turmas.

Entre os 23 alunos, haviam alunos das turmas 9ºA e 9ºB. Foram escolhidos alunos

Figura 132 – O número π : Passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 133 – O número π : Passo 5

Fonte: Elaborada pelo autor.

de diferentes níveis de desempenho. Os principais resultados foram em relação ao interesse despertado em alunos com notas baixas. Quanto aos alunos de melhor desempenho, os resultados também foram positivos, pois puderam ampliar seus horizontes de compreensão.

A seguir, apresentaremos algumas fotos desta aula.



Figura 134 – Atividade com os alunos

Fonte: Elaborada pelo autor.



Figura 135 – Atividade com o geogebra feita com os alunos

Fonte: Elaborada pelo autor.

O LÚDICO NO ENSINO DA GEOMETRIA

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar a abordagem da geometria utilizando atividades lúdicas. Começaremos com a apresentação de atividades utilizando dobraduras.

10.1 Geometria e dobraduras

Todas as atividades propostas a seguir foram retiradas da referência ([CARNEIRO; SPIRA, 2014](#)) e as figuras construídas se basearam nas encontradas nesta referência. Elas abordam conceitos básicos e propriedades de Geometria Euclidiana Plana para motivar os alunos a aprenderem estes conceitos e propriedades de formas lúdicas.

Sempre que o professor trabalhar com dobraduras em sala de aula, é importante que, ao terminar cada atividade, o professor explique no quadro porque o procedimento resultou na construção da figura geométrica desejada. Este ponto é fundamental, pois muitas vezes, os alunos não compreendem como as dobraduras realizadas resultaram naquela figura geométrica, sendo portanto de extrema importância o papel do professor nesta tarefa.

Apresentaremos a seguir quatro atividades para serem realizadas em sala de aula. A primeira delas é a construção por meio de dobraduras de uma reta perpendicular que passa por um ponto fora da reta. A segunda atividade apresenta a construção da mediatriz do segmento AB . A atividade 3, por sua vez, traz a construção da bissetriz e por fim, na atividade 4, temos a construção do triângulo equilátero.

Estas atividades foram realizadas com os alunos da 1ª série do ensino médio da escola estadual Profa. Dolores Martins de Castro. Detalharemos mais adiante estas atividades.

Atividade 1: Reta perpendicular que passa por um ponto fora da reta.

Considere um ponto A e uma reta r de modo que A não pertença a r . Veja a figura [136](#)

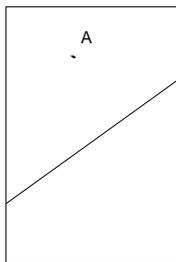


Figura 136 – Construção da perpendicular usando dobraduras: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

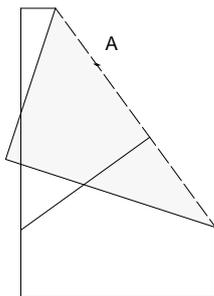


Figura 137 – Construção da perpendicular usando dobraduras: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

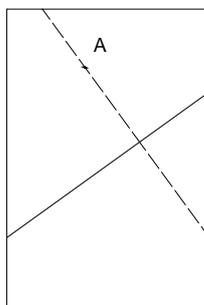


Figura 138 – Construção da perpendicular usando dobraduras: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

para ilustrar.

1. Usando uma dobra que passa em A , faça uma dobradura que leve a reta sobre si mesma. Veja a figura 137.
2. Desdobre. A reta formada é perpendicular a reta r e passa pelo ponto A . Veja a figura 138.

Justificativa: A reflexão obtida envia uma reta sobre ela mesma. Como uma reflexão preserva ângulos, os dois ângulos obtidos possuem a mesma medida. Como a soma desses ângulos é igual a 180 graus, obtém-se que os ângulos são retos e, portanto, a reta construída é perpendicular a reta r passando por A .

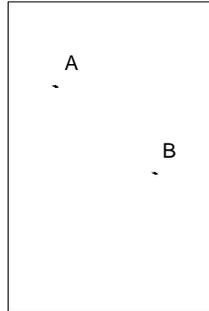
Atividade 2: Mediatriz do segmento AB .

Figura 139 – Construção da mediatriz usando dobraduras: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

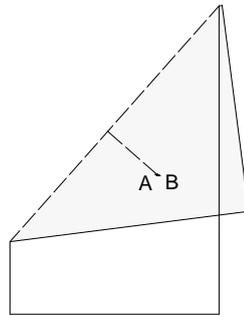


Figura 140 – Construção da mediatriz usando dobraduras: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

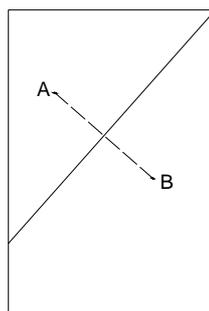


Figura 141 – Construção da mediatriz usando dobraduras: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

1. Marque dois pontos distintos A e B no papel. Veja a figura [139](#).
2. Faça a dobradura de modo que o ponto A se sobreponha ao ponto B . Veja a figura [140](#).
3. Desdobre. A reta encontrada é a mediatriz do segmento AB . Veja a figura [141](#).

Justificativa: Sejam r a reta obtida na construção e O sua interseção com o segmento AB . Mostraremos que r é, de fato, a mediatriz de AB . De acordo com a construção feita no item anterior, vemos que a reta r é perpendicular ao segmento AB . Pela propriedade de reflexão (como construímos), vemos que $\overline{AO} = \overline{OB}$. Resta mostrar que para qualquer outro ponto Q pertencente a r , teremos $\overline{AQ} = \overline{QB}$. De fato, tome $Q \in r$, então os dois triângulos QOA e QOB são congruentes, pelo caso LAL, pois $\widehat{QOA} = \widehat{QOB} = 90^\circ$ (AB é perpendicular a reta r), $\overline{AO} = \overline{OB}$ e \overline{QO} é lado comum. Então, pela congruência, obtemos $\overline{QA} = \overline{QB}$. Logo, Q é equidistante de A e de B e pertence, portanto, à mediatriz, obtendo assim que a reta r é a mediatriz.

Atividade 3: Bissetriz

1. Desenhe duas semirretas em um papel. Veja a figura 142.
2. Dobre uma das semirretas do ângulo de modo que se sobreponha sobre o outro. Veja a figura 143.
3. Desdobre, a reta obtida será a bissetriz. Veja a figura 144.

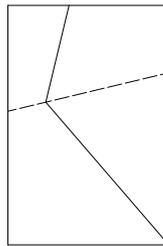


Figura 142 – Construção da bissetriz usando dobraduras: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

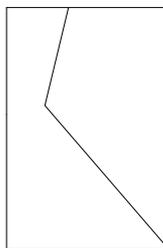


Figura 143 – Construção da bissetriz usando dobraduras: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Seja O a origem das semirretas, como elas são colocadas uma por cima da outra, podemos fixar um ponto P e este ponto irá refletir na outra reta um ponto P' de modo que $\overline{OP} = \overline{OP'}$. Além disso, seja r a reta construída, podemos traçar uma reta perpendicular a r passando pelos pontos P e P' (ver atividade 1) e a intersecção desta com a reta r é um ponto R . Como OR é lado comum, temos pelo Teorema 17 item 2, que os triângulos ORP e ORP' são

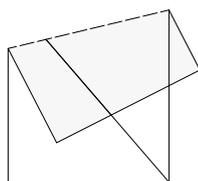


Figura 144 – Construção da bissetriz usando dobraduras: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

congruentes e, portanto, a reta r é equidistante dos pontos P e P' . Isto implica que a reta r divide o ângulo em outros dois congruentes e, portanto, é a bissetriz.

Atividade 4: Triângulo Equilátero

1. Pegue um papel de tamanho retangular. Veja a figura 145.
2. Escolheremos o lado do triângulo como sendo igual ao lado menor da folha de papel, denote por A e B os extremos do segmento. Veja a figura 146.
3. Dobre a folha ao meio de modo a encontrar a mediatriz do segmento AB . Veja a figura 147.
4. Dobre a folha de modo que o ponto refletido de B encontre a mediatriz (construída no passo 3). Marque esse ponto C . Veja a figura 148.
5. Dobre os segmentos AC e AB para completar o triângulo. Veja a figura 149.
6. Desdobre, o triângulo ABC construído é equilátero. Veja a figura 150.

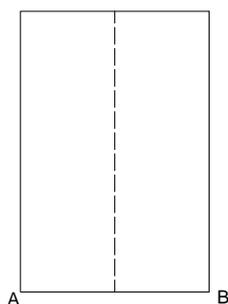


Figura 145 – Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Justificativa: Note que o triângulo obtido é equilátero, pois o lado AC foi construído de modo que $\overline{AC} = \overline{AB}$. Também, tomando D como sendo o ponto de intersecção entre a mediatriz construída no passo 3 e o lado AB , segue que ADC e BDC são triângulos retângulos, uma vez que $\widehat{ADC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ e, além disso, como \overline{CD} é lado comum e $\overline{AD} = \overline{DB}$, pois D pertence a mediatriz, então pela congruência de triângulos retângulos, segue que ADC e BDC são triângulos

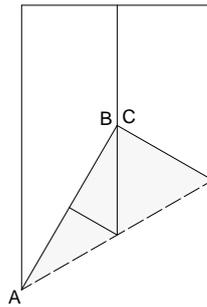


Figura 146 – Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor.

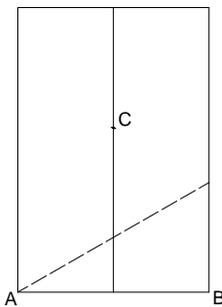


Figura 147 – Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor.

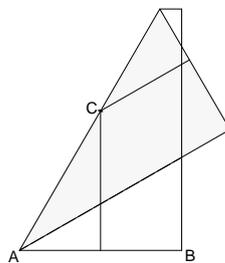


Figura 148 – Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor.

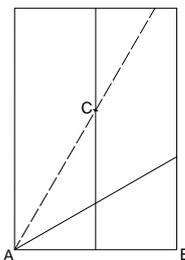


Figura 149 – Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 5

Fonte: Elaborada pelo autor.

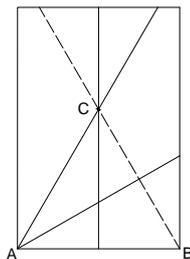


Figura 150 – Construção do triângulo equilátero usando dobraduras: Passo 6

Fonte: Elaborada pelo autor.

congruentes. Portanto, segue que $\overline{AC} = \overline{CB}$ e como $\overline{AC} = \overline{AB}$ por construção, então segue por transitividade, que todos os lados são congruentes e concluímos que o triângulo é equilátero.

A seguir, relataremos a atividade que foi realizada com os alunos da escola estadual Profa. Dolores Martins de Castro.

- **Data de realização:** 06 de Agosto de 2015.
- **Participantes:** Prof. André Luiz Brazão e 18 alunos.
- **Série dos alunos:** 1^a série B, ensino médio.
- **Local de realização:** Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro.
- **Cidade:** Pontal-SP
- **Duração da atividade:** 100 minutos, equivalente a 2 aulas.
- **Material utilizado:**
 - Papel;
 - Lápis, borracha;
 - Quadro negro;
 - Giz.
- **Objetivo da atividade:** Potencializar o aprendizado dos alunos, permitindo uma maior visualização das figuras planas e a interação entre os colegas.
- **Descrição da atividade realizada:** O professor realizou as quatro atividades descritas acima com os alunos e ao final de cada uma, explicou a construção realizada.
- **Análise da atividade realizada:** A atividade foi muito importante para motivar os alunos com relação a disciplina de Geometria Euclidiana Plana, possibilitando outra visão da disciplina. Também, a atividade permitiu uma maior interação entre os alunos.

A seguir, apresentamos algumas fotos da atividade realizada.



Figura 151 – Atividade envolvendo dobraduras em sala de aula

Fonte: Elaborada pelo autor.

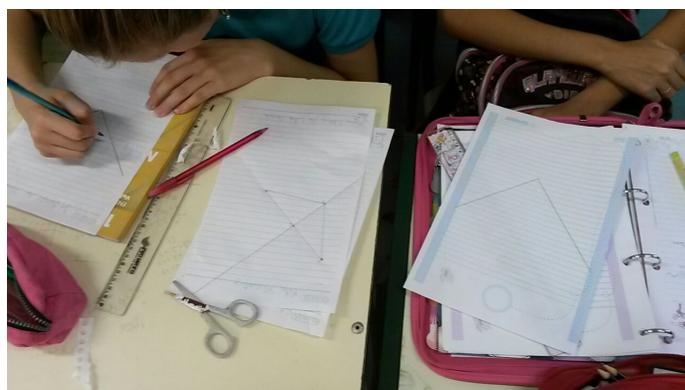


Figura 152 – Atividade com dobraduras em sala de aula

Fonte: Elaborada pelo autor.

10.2 Geometria e geoplano

Nesta seção, apresentaremos uma proposta de atividade para ser realizada em sala de aula com o geoplano. O geoplano é uma ferramenta lúdica muito interessante para se abordar Geometria Euclidiana Plana, pois ele permite que os alunos visualizem o problema estudado e construam as figuras geométricas, desenvolvendo a percepção geométrica e noção espacial. Com o geoplano, podemos estudar os mais vários tópicos de Geometria Euclidiana Plana, desde a área das figuras planas, a quantidade de vértices que cada figura possui, quantidade de diagonais, até a convexidade de uma dada figura.

O geoplano é basicamente feito com uma tábua de madeira e pregos igualmente espaçados. Também, no uso do geoplano, utilizamos elásticos para representar as figuras geométricas no geoplano.

Veamos a seguir algumas atividades que podem ser realizadas em sala de aula com o uso do geoplano. Os seguintes exercícios podem ser pedidos aos alunos para que eles resolvam em duplas ou em triplas, por exemplo, dependendo do número da turma e da quantidade de geoplanos disponíveis.

Exercícios Propostos:

1. Determine para quais valores de n podem ser construídos segmentos de comprimento \sqrt{n} no geoplano.
2. No geoplano, construa polígonos com perímetro $P = n + \sqrt{2}$ unidades, indicando os valores possíveis para n .
3. No geoplano, construa polígonos com perímetro $P = n + \sqrt{13}$ unidades, indicando os valores possíveis para n .
4. No geoplano, construa polígonos com perímetro $P = n + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{13}$ unidades, indicando os valores possíveis para n .
5. Construa um polígono com perímetro $P = 9 + \sqrt{2} + \sqrt{13}$ e depois calcule a área.
6. Construa todas as possíveis figuras que possuem área de quatro unidades de área em um geoplano 6×6 .
7. Construa no geoplano diferentes triângulos com área de 2 unidades de área.
8. Construa polígonos convexos e não-convexos.
9. Construa figuras planas com 2 diagonais.
10. Construa retângulos com áreas de 4 unidades de área.

Observe que com as atividades acima, os alunos irão aprender e fixar conceitos aprendidos em sala de aula. Por exemplo, nos exercícios 2 a 5, os alunos irão trabalhar com o conceito de perímetro, bem como terão que aplicar o Teorema de Pitágoras para obterem os polígonos com os perímetros pedidos nos exercícios.

Também, nas atividades acima, os alunos irão lembrar como se calcula a área de diversas figuras plana. Note que no exercício 6, por exemplo, não se especifica que tipo de figura plana deve ser construída, de modo que se o aluno usar sua imaginação, ele poderá criar figuras bem diferentes e trabalhar com decomposição destas figuras em figuras conhecidas. Desta forma, ele estará fixando os conceitos de geometria aprendidos em sala de aula, bem como melhorando sua criatividade, aperfeiçoando sua habilidade de criação e percepção geométrica.

Além disso, nas atividades apresentadas, os alunos irão manusear figuras, facilitando a compreensão, o conceito de figuras convexas e não convexas, por exemplo, despertando no aluno um novo olhar.

Estas atividades representam apenas algumas ideias iniciais para o professor apresentar aos seus alunos. Entretanto, de acordo com o conteúdo que está sendo ensinado, o professor pode acrescentar muitas outras atividades que abordem os tópicos a serem estudados.

O uso do geoplano em sala de aula representa uma ferramenta poderosa para o aprendizado do aluno, pois o aluno passa do papel de sujeito passivo em sala de aula para se tornar sujeito ativo. Além disso, o geoplano permite aos alunos a visualização das figuras planas estudadas através da sua construção, podendo assim aprender e fixar melhor os conceitos abordados em sala de aula.

Outro ponto crucial no uso do geoplano é que esta ferramenta permite uma maior interação entre os alunos da turma, de modo que eles poderão discutir a cada exercício suas dificuldades, bem como suas facilidades, havendo assim uma troca de experiências entre os alunos. Além disso, o geoplano também é uma ferramenta pedagógica sem muito custo sendo, portanto, acessível aos alunos, podendo facilmente ser utilizada em sala de aula.

Desta forma, o geoplano representa uma ferramenta lúdica poderosa no ensino de Geometria Euclidiana Plana.

A seguir, relataremos a atividade que foi realizada com os alunos da escola estadual Profa. Dolores Martins de Castro.

- **Data de realização:** 06 de agosto de 2015.
- **Participantes:** Prof. André Luiz Brazão e 18 alunos.
- **Série dos alunos:** 1^a série B, ensino médio.
- **Local de realização:** Escola Estadual Profa. Dolores Martins de Castro.
- **Cidade:** Pontal-SP.
- **Duração da atividade:** 150 minutos, equivalente a 3 aulas.
- **Material utilizado:**
 - 5 geoplanos;
 - 1 saco com vários elásticos;
 - Lápis, borracha;
 - Papel;
 - Quadro negro;
 - Giz.
- **Objetivo da atividade:** Potencializar o aprendizado dos alunos, permitindo uma maior visualização das figuras planas e a interação entre os colegas.
- **Descrição da atividade realizada:** Os alunos foram divididos em grupos de quatro alunos, no máximo, e foi entregue a cada grupo uma lista com os dez exercícios descritos anteriormente. Então, os alunos foram resolvendo os exercícios em grupo, discutindo

as questões propostas, propondo resoluções diferentes para cada problema. Ao final da atividade, o professor discutiu com os alunos no quadro os problemas propostos e alguns alunos tiveram a oportunidade de mostrar aos demais colegas as soluções propostas para resolver os problemas.

- **Análise da atividade realizada:** A atividade foi muito importante para motivar os alunos com relação a disciplina de Geometria Euclidiana Plana, possibilitando outra visão da disciplina. Também, a atividade permitiu uma maior interação da turma, em que os alunos com maior facilidade puderam ajudar os colegas com maiores dificuldades, permitindo o diálogo e a discussão dos exercícios.

De um modo geral, a atividade se mostrou bastante enriquecedora tanto para os alunos quanto para o professor.

A seguir, apresentamos algumas fotos da atividade realizada.



Figura 153 – Atividade com o geoplano em sala de aula

Fonte: Elaborada pelo autor.

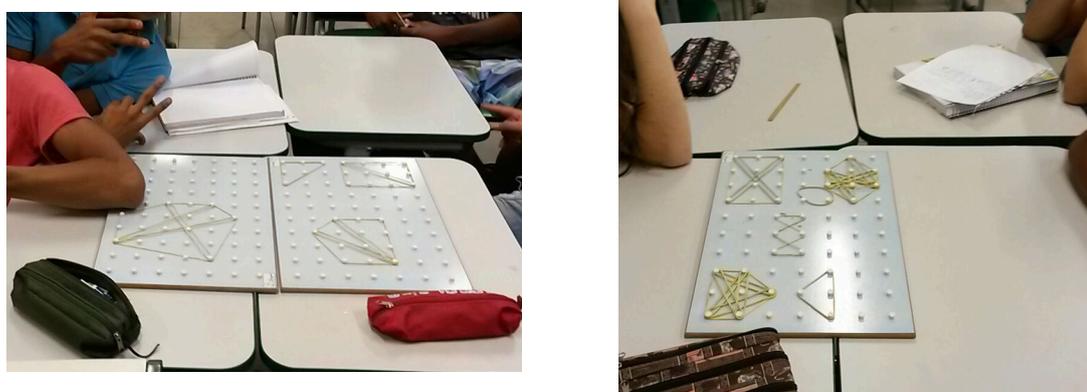


Figura 154 – Atividade com o geoplano em sala de aula

Fonte: Elaborada pelo autor.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado 51 vezes nas páginas 25, 27, 30, 32, 33, 34, 39, 41, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 69, 72, 73, 74, 75, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 96, 98, 99, 101, 103, 104, 105, 106, 107 e 108.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974. Citado na página 111.
- BRANDT, C. F.; KLUPPEL, G. T. Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo raymond duval. **Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul**, p. 18, 2012. Citado na página 115.
- CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M. **Oficina de Dobraduras**. Rio de Janeiro: Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 24, 25 e 139.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Plana**. São Paulo: Editora Atual, 1997. Citado 11 vezes nas páginas 25, 27, 41, 42, 69, 70, 71, 77, 78, 97 e 101.
- EUCLIDES. **Os elementos**. São Paulo: Traduzido por: Irineu Bicudo, Editora Unesp, 2009. Citado na página 110.
- GASPAR, M. T. J. **Notas de aula do curso de extensão História da Matemática Grega: Os Elementos de Euclides**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 25, 111, 112 e 113.
- GONÇALVES, S. D.; OLIVEIRA, K. P.; ALVES, M. F. A tecnologia no ensino da geometria plana: semelhança de triângulos por meio do cabri géomètre. **X Encontro Capixaba de Educação Matemática, SBEM**, p. 9, 2015. Citado na página 116.
- NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: Editora SBM, Coleção PROFMAT, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.
- ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012. Citado na página 111.
- SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 2010. Citado na página 111.
- STEWART, I. **17 equações que mudaram o mundo**. Rio de Janeiro: Zahar, 2013. Citado na página 85.