UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Ana Luiza de Freitas Kessler

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES NA ÁREA DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA POR MEIO DO GEOGEBRA

Santa Maria, RS
2015

Ana Luiza de Freitas Kessler

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES NA ÁREA DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA POR MEIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**

Orientadora: Professora Dra. Carmen Vieira Mathias

Santa Maria, RS
2015

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Kessler, Ana Luiza de Freitas
Aplicações de funções na área das ciências da natureza por meio do geogebra / Ana Luiza de Freitas Kessler.- 2016.
150 p.; 30cm

Orientador: Carmen Vieira Mathias
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2016

1. Funções 2. Geogebra 3. Interdisciplinariedade I. Mathias, Carmen Vieira II. Título.

Ana Luiza de Freitas Kessler

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES NA ÁREA DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA POR MEIO DO GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Matemática**

Aprovado em 04 de dezembro de 2015:

Carmen Vieira Mathias (UFSM)
(presidente /Orientador)

Ana Marli Bulegon (UNIFRA)

Ricardo Fajardo (UFSM)

Santa Maria, RS
2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Magno e Elaine, pelo amor e apoio incondicional, pelo carinho, pela compreensão e incentivo que sempre me deram e nunca me deixaram desistir;

ao meu irmão, Carlos, por estar sempre ao meu lado, apoiando-me e incentivando-me, e, nessa reta final, trouxe a Izabel e a Júlia para alegrar ainda mais nossas vidas;

às minhas irmãs do coração, Paula e Luiza, e à família Weber, pelo incentivo e torcida em cada etapa enfrentada. Obrigada por cada carona, cada mate, cada copo de cerveja, cada risada entre tantas lágrimas que vocês ajudaram a secar nesse longo caminho até aqui;

aos amigos que estiveram por perto nesses últimos anos, apoiando-me e incentivando-me, e que compreenderam minha ausência em muitos momentos;

aos colegas professores nesses anos de docência, da Escola Estadual Ensino Médio Emílio Sander, de São Leopoldo, do Colégio de Aplicação da UFRGS, de Porto Alegre e Escola Estadual de Ensino Médio Professora Maria Rocha, de Santa Maria. As aprendizagens e os desafios do caminho da docência foram motivação para essa busca;

a todos os professores do PROFMAT que, assim como eu, enfrentaram o desafio do desconhecido desde 2011 e seguem até hoje nos auxiliando muito nessa caminhada;

em especial à professora Carmen Vieira Mathias, pela orientação, dedicação, amizade, apoio e paciência;

aos colegas da turma de 2011, em especial às colegas Márcia e Renata, pelo companheirismo, pelas conversas, pelas risadas e pelos momentos de estudos e trocas;

aos colegas da turma de 2014, que me acolheram de braços abertos na preparação de mais um ENQ, em especial ao amigo Mauro;

aos integrantes da ANPMat, que me incentivaram e me deram forças para estudar, levantar a cabeça e hoje finalizar este trabalho;

à Renata e Betyna, pela amizade, pelo incentivo, pelas sugestões e contribuições para este trabalho;

à SBM, por oferecer este curso, e à CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

APLICAÇÕES DE FUNÇÕES NA ÁREA DAS CIÊNCIAS DA NATUREZA POR MEIO DO GEOGEBRA

AUTORA: Ana Luiza de Freitas Kessler

ORIENTADORA: Carmen Vieira Mathias.

A partir da implantação do ensino Politécnico no Rio Grande do Sul, nota-se de maneira crescente a necessidade de trabalharmos de forma interdisciplinar, realizando articulações entre as diferentes disciplinas e os assuntos estudados na escola básica. Assim, surgiu a necessidade de fazer uma ligação entre conteúdos estudados em Matemática com aqueles vistos em disciplinas da área das Ciências da Natureza, uma vez que essas necessitam de conceitos matemáticos para serem desenvolvidas. Este trabalho realiza algumas conexões entre estas disciplinas utilizando-se dos conhecimentos compartilhados para tornar os conteúdos mais atrativos e conectados à realidade dos alunos. Isso foi feito por meio de oficinas, aplicadas a alunos de primeiro e segundos anos do ensino médio politécnico de uma escola pública se Santa Maria, RS, utilizando os conceitos apreendidos no estudo do tema Funções e aplicando estes conceitos na área das Ciências da Natureza, ou seja, em Física, Biologia e Química, por meio, principalmente da análise dos gráficos, realizada com o auxílio do software GeoGebra. Dessa forma, os alunos foram capazes de estabelecer relações entre o conteúdo estudado em Matemática e os diferentes conteúdos estudados nas Ciências da Natureza, aplicando os conhecimentos adquiridos para interpretar os problemas propostos das outras disciplinas.

Palavras-chave: Funções; GeoGebra; Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

APPLICATIONS OF FUNCTIONS IN NATURE SCIENCES FIELD USING GEOGEBRA

AUTHOR: Ana Luiza de Freitas Kessler

ADVISER: Carmen Vieira Mathias.

From implementation of Polytechnic teaching in Rio Grande do Sul, note if a need crescent way the need to work in the interdisciplinary way, performing articulations among different disciplines and the topics studied in basic school. Thus, it appeared the need to do a link between topics studied in Math with those studied in Nature Sciences field, since these need the mathematical concepts to be developed. This paper does some connections between these disciplines using share knowledge to become the contents more attractive and connected to the students' reality. This was done by means of workshops, applied to students of first and second years of high polytechnic education in a public school in Santa Maria, RS, using the apprehended concepts in the study of function topic, and applying these concepts in the Nature Sciences field, that is, in Physics, Biology and Chemistry, by means, mainly of graph analysis, developed with the software Geogebra. This way the students were capable to establish relations between the content studied in Mathematics and the different contents studied in Nature Sciences field, applying the acquired knowledge to interpret the proposed problems in other disciplines.

Keywords: Mathematics functions; GeoGebra; Interdisciplinarity

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No ano de 2011 foi introduzida no Estado do Rio Grande do Sul uma nova proposta de Ensino Médio denominada Ensino Médio Politécnico, a qual passou a ser implementada no ano de 2012. Segundo a Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio (2011 – 2014) do Governo do Estado do Rio Grande do Sul (SEDUC - RS, 2001). O Ensino Médio Politécnico tem, em sua concepção, a base na dimensão politécnica, constituindo-se no aprofundamento da articulação das áreas de conhecimentos e suas tecnologias, com os eixos Cultura, Ciência, Tecnologia e Trabalho, na perspectiva de que a apropriação e a construção de conhecimento embasam e promovem a inserção social da cidadania.

O Ensino Politécnico visa ao ensino integrado do ponto de vista curricular, onde os conteúdos devem ser organizados de forma que haja um diálogo entre as áreas do conhecimento, a partir de práticas sociais, priorizando a qualidade do conhecimento adquirido pelo aluno sobre a quantidade de conteúdos apropriados mecanicamente, dando a esses conteúdos significado social e contextualizado com a realidade.

Nesse sentido, o Ensino Politécnico passa a trabalhar por áreas do conhecimento, onde a Matemática constitui uma área e as disciplinas de Física, Química e Biologia constituem a área das Ciências da Natureza. Visto essa particularidade do ensino e a necessidade de produzir materiais para esse fim, o objetivo principal desta dissertação é apresentar e aplicar propostas de atividades que integrem os conteúdos de funções estudadas na área da Matemática com aplicações em problemas da área das Ciências da Natureza, pois

> A compreensão de que os problemas não são resolvidos apenas à luz de uma única disciplina ou área do saber desmistifica a ideia, ainda predominante, da supremacia de uma área do conhecimento sobre outra.
> O pressuposto básico da interdisciplinaridade se origina no diálogo das disciplinas, no qual a comunicação é instrumento de interação com o objetivo de desvelar a realidade.
> A interdisciplinaridade é um processo e, como tal, exige uma atitude que evidencie interesse por conhecer, compromisso com o aluno e ousadia para tentar o novo em técnicas e procedimentos. (SEDUC - RS, 2011, p. 19.).

Dentre os assuntos estudados na disciplina de Matemática durante o Ensino Médio, considero, como professora, o estudo de Funções um dos mais importantes. Sua relevância pode ser justificada, pois este estudo permite expressar relações entre grandezas e modelar situações-problema, construir modelos descritivos de fenômenos, permitindo fazer conexões entre assuntos dentro e fora da Matemática.

Segundo o PCN+ Ensino Médio Ciências da Natureza e Matemática (BRASIL, 2002, p. 121), os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivos e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. Cita como exemplos de aplicações para funções exponenciais o crescimento de populações, e para funções logarítmicas o estudo do pH[1] de substâncias, assuntos estes que foram utilizados neste trabalho.

Ainda (BRASIL, 2002, p. 122) destaca a importância da análise gráfica no estudo das funções trigonométricas e a resolução de problemas que envolvam fenômenos periódicos. No presente trabalho, utilizamos a função seno e sua análise gráfica para aplicar os conhecimentos no estudo da equação de uma onda sonora, e também utilizamos algumas funções e suas aplicações em movimentos observados na disciplina de Física e na decomposição de substâncias aprendidos na disciplina de Química.

Para fazer uma boa articulação interdisciplinar, acreditamos que é necessário que os professores das diferentes áreas relacionem as nomenclaturas e os conceitos que são envolvidos em mais de uma disciplina, construindo, assim, uma identidade única para o aluno e exigindo dos professores o conhecimento não só do que se trata da sua disciplina, mas também do que está sendo tratado nas demais disciplinas em comum, o que não é simples ou fácil.

Em geral, o estudo de Funções é realizado de forma algébrica (fórmulas), gráfica e numérica (tabelas). Na escola, muitas vezes damos maior ênfase ao estudo algébrico e por isso é comum que os alunos considerem função tudo aquilo

---

[1] Potencial Hidrogeniônico, que é o índice que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer.

que tem uma fórmula, confundindo com outras formas de identidades matemáticas, tal como uma equação, por exemplo.

O modelo mais utilizado em sala de aula é a partir de uma fórmula dada, e constrói-se uma tabela a partir de alguns valores, marcando pontos no plano cartesiano e ligando esses pontos, obtendo, assim, um esboço do gráfico. Para modificar o modelo, utilizamos, nesta proposta, o software GeoGebra para a construção dos gráficos das funções e das aplicações utilizadas nesta dissertação, para que, por meio deste software.

Os aplicativos foram construídos pela autora de forma que os gráficos pudessem ser manipulados, por meio de controles deslizantes, e assim formar diversos gráficos para que os alunos pudessem trabalhar de forma dinâmica e ágil com diversos gráficos para realizar a análise de cada função e seu comportamento. Além do mais, construímos um Blog para que todas as atividades ficassem de fácil acesso aos alunos e para que possa ter maior abrangência para outros alunos.

O presente trabalho constitui-se de cinco capítulos. No capítulo 1, são descritos os aportes teóricos, iniciando com um breve estudo sobre o uso de tecnologias na educação e sobre o software GeoGebra, seguindo com o estudo sobre funções. No segundo capítulo, descrevemos o caminho para a realização e aplicação da proposta, os recursos didáticos utilizados, o público o qual queremos abranger com as atividades e onde as atividades foram aplicadas, ou seja, a metodologia utilizada para a construção desta dissertação.

No capítulo 3, apresentamos a proposta das atividades que foram realizadas com os alunos, seus respectivos objetivos, as respectivas respostas esperadas pelo professor, as respostas obtidas pelos alunos, alguns comentários sobre a aplicação e a análise dos resultados obtidos após a aplicação das atividades. Por fim, o capítulo 4 apresenta as considerações finais da presente dissertação.

1 REFERENCIAIS TEÓRICOS

1.1 Uso de tecnologias

Diante da evolução do uso de tecnologias em nossas vidas e também relacionadas à educação, torna-se fundamental que nós, professores, possamos introduzir tal uso no cotidiano escolar com o intuito de tornar o ensino mais próximo aos alunos e fazer com que eles façam parte do processo de produção do conhecimento.

Nos últimos anos, as escolas têm sido equipadas com laboratórios de informática, notebooks e outros equipamentos. Recentemente, no Estado do Rio Grande do Sul, os professores atuantes em sala de aula também receberam tablets, mas estes acabam sendo pouco ou nada utilizados pela comunidade escolar, uma vez que os professores não dominam a tecnologia e muitos desconhecem os recursos disponíveis que podem ser aplicados no ensino. Temos aqui uma zona de conflito entre a atual realidade de inserção das tecnologias na educação e a necessidade de adaptação dos professores que tiveram suas formações em sistemas educacionais tradicionais de ensino.

Segundo Kenski (2007), ao se falar em novas tecnologias, na atualidade, estamos nos referindo aos processos e produtos relacionados com os conhecimentos provenientes da eletrônica, da microeletrônica e das telecomunicações. Essas tecnologias caracterizam-se por serem evolutivas, ou seja, estão em permanente transformação. Seu principal espaço de ação é virtual e sua principal matéria-prima é a informação.

Como professores, não podemos nos privar dessas informações em constante transformação, temos que estar acompanhando a evolução das tecnologias e buscando novos conhecimentos que engrandeçam nosso trabalho e que busquem aprimorar nossas aulas, com o objetivo de ajudar no ensino e aprendizado dos nossos alunos. Nesse sentido, é importante que busquemos aprender sobre as tecnologias, em particular as digitais, que possam nos auxiliar em sala de aula, a fim de tornar nossas aulas mais atrativas e mais acessíveis aos alunos, fazendo com que os conteúdos se tornem algo que faça sentido para eles, não simplesmente símbolos e teorias vazias de significado prático.

Sabemos que a preparação de uma aula utilizando um software exige mais tempo e esforço extra do professor, uma vez que ele terá que estudar tanto a forma de abordar os conteúdos como o próprio aplicativo a ser utilizado. No segundo momento, o professor tem que deslocar os alunos até a sala de informática, que, na maioria das vezes, não conta com pessoal técnico para a manutenção das máquinas e auxílio no laboratório, enfim, ainda são muitos os desafios encontrados para este tipo de atividade ser realizada. Nesse sentido, o professor precisa sentir-se motivado e preparado para realizar um trabalho diferenciado.

O software utilizado para o desenvolvimento das atividades sobre funções e suas aplicações na área das Ciências da Natureza deste trabalho foi o GeoGebra, criado pelo austríaco Markus Hohenwater, o GeoGebra (http://www.geogebra.org) é um *software* multiplataforma distribuído gratuitamente, que serve para trabalhar conceitos de Matemática e que tem uma interface muito simples e de fácil utilização. Atualmente, o GeoGebra é denominado como aplicativo de Matemática Dinâmica, com recursos de geometria, álgebra, planilhas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. A escolha do GeoGebra deu-se por ser um software acessível de forma livre, de interface em português, de fácil instalação, que permite fácil manipulação e a visualização gráfica e algébrica das funções trabalhadas.

Segundo Rezende (2012), outra vantagem do sofware GeoGebra que foi bastante explorada nesta dissertação é que as funções podem ser definidas em termos de seus parâmetros, e estes, por sua vez, podem ser alterados dinamicamente através de controles deslizantes, permitindo aos alunos visualizarem as características variacionais da função (crescimento, concavidade e extremos) mudam de acordo com cada parâmetro.

Existe um grande suporte na rede para os usuários desse software, o próprio site oficial contém manuais de utilização, além de serem ofertados muitos cursos sobre sua utilização. Por outro lado, o GeoGebra tem algumas falhas como, por exemplo, restrições de domínio de funções, mas que podem ser observadas e contornadas pelo professor.

Outra ferramenta tecnológica utilizada nesta dissertação foi o Blog. Essa ferramenta tem sido muito utilizada como portifólio de aprendizagens e trocas entre professores e alunos. No caso dessa dissertação o Blog construído pela autora serviu como repositório das atividades estabelecidas para utilização durante as oficinas com os alunos e também para que os mesmos pudessem ter acesso em outros momentos além da sala de aula. A utilização de um Blog permite o acesso facilidado dos materiais pelos alunos, também pode abranger um maior número de alunos e professores, pois ao estar disponível na rede, qualquer um pode ter acesso as atividades, a qualquer momento e manipular os aplicativos, tendo a possibilidade de entrar em contato com o autor para esclarecimentos em caso de dúvidas.

1.2 Funções

Este capítulo tem como objetivo servir de base teórica aos professores que desejarem trabalhar conteúdos de funções na perspectiva proposta nesta dissertação. Aqui pretende-se descrever funções de forma mais ampla para depois defini-las via suas especificidades. As principais referências utilizadas são livros didáticos utilizados no Ensino Médio Politécnico como Paiva (2013), Souza (2010a, 2010b), Leonardo (2013a, 2013b) e Fugita (2009a, 2009b). Tais referências foram utilizadas por terem sido distribuídas pelas editoras para a escolha do livro didático a ser utilizado pelas escolas a partir de 2015 nas escolas de ensino politécnico e portanto são materiais disponíveis aos professores da rede pública, mas que separadamente nem sempre dispõem do material necessário para compormos nossas aulas, por isso foram utilizadas partes de cada livro para compor o referencial teórico considerado apropriado pelo autor, e complementado com Bortolossi (2014.1), Lima (2006) e Lima (2009), além dos autores das disciplinas das Ciências da Natureza.

Segundo Lima et al. (2006), dados os conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ (lê-se “uma função de X em Y) é uma regra que diz como associar a cada elemento

$x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se *domínio* e Y é o *contra-domínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Também Paiva (2013a) diz que uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde a um único valor de y. A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de lei de associação.

Na presente dissertação, vamos trabalhar com funções do tipo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Segundo Paiva (2013), toda função em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de função real de variável real. Uma função f pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$ se, e somente se, o domínio de f é o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ em que f pode ser definida e o contradomínio de f é $\mathbb{R}$.

A noção de função está presente em muitas situações do nosso dia a dia, pois é um conceito que possibilita analisar duas grandezas que se relacionam em determinado fenômeno.

A construção e a interpretação de gráficos de funções requerem a noção de plano cartesiano, o plano cartesiano ortogonal de coordenadas, cujo eixo horizontal é o x, denominado eixo das abscissas, e o eixo vertical y, eixo das ordenadas. Os eixos x e y se interceptam no ponto denominado origem do sistema cartesiano, representado por O, e determinam quatro regiões no plano, denominadas quadrantes. Todo ponto P representado neste sistema tem uma localização determinada por um par ordenado $P(x, y)$, onde x é a coordenada horizontal e y é a coordenada vertical do ponto. A Figura 1 apresenta um esboço do plano cartesiano. Salientamos que, em todo o trabalho, as imagens que não citam a autoria, foram produzidas pela autora deste texto.

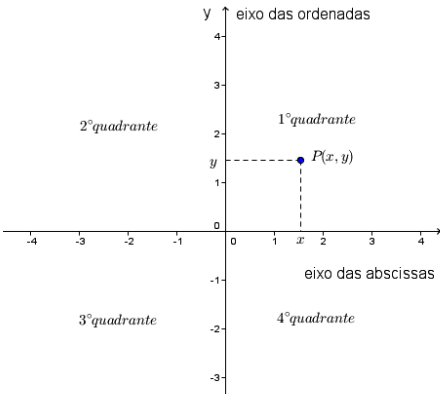


Figura 1. Representação do plano cartesiano

Podemos dizer que o plano cartesiano faz a ligação entre a geometria e a álgebra, pois nele há a correspondência entre pontos do plano e pares ordenados de números reais, assim como um par ordenado tem um ponto correspondente no plano. Dessa forma, problemas geométricos podem ser interpretados algebricamente e problemas algébricos podem ser interpretados geometricamente.

Observamos que nem sempre um conjunto de pares ordenados representa uma função, e, para verificar se um gráfico de fato representa uma função, é preciso verificar se, para cada elemento do domínio, representado pelo eixo x, existe apenas um único valor correspondente no contra-domínio, representado pelo eixo y. Um método simples de verificar essa propriedade é se traçar uma perpendicular ao eixo x e conferir se esta intercepta o gráfico em apenas um ponto, chamado teste das retas verticais, o que podemos visualizar na Figura 2.

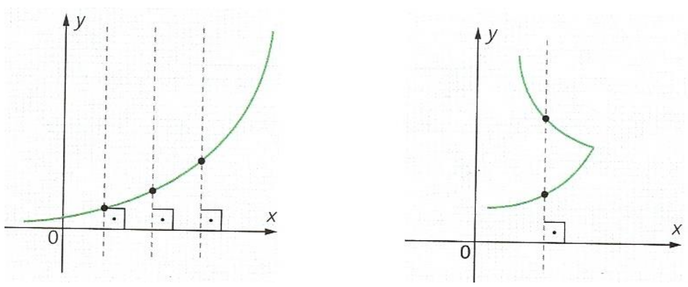


Figura 2: Gráfico da esquerda representa uma função e gráfico da direita não representa uma função.

Fonte: Dante (2013, p.52)

Segundo Lima et al. (2006), uma função $f: X \to Y$ chama-se injetiva quando elementos diferentes de X são transformados por f em elementos diferentes de Y. Ou seja, f é injetiva quando $x \neq x' em\, X \Rightarrow f(x) \neq f(x')$; diz-se que uma função $f: X \to Y$ é sobrejetiva quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Caso a função satisfaça as duas condições, então é chamada de bijetiva.

Segundo o mesmo autor, diz-se que a função $g: Y \to X$ é a inversa da função $f: X \to Y$ quando se tem $g\big(f(x)\big) = x$ e $f\big(g(x)\big) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se f é inversa de g. Se uma função possui inversa, então ela é bijetiva.

Ao compararmos grandezas, é importante sabermos a relação entre elas, como se comportam uma em relação a outra. Para isso, a seguir, definiremos proporcionalidade entre grandezas.

As definições de proporcionalidade direta e inversa podem ser encontradas em Fugita (2009). Segundo esse autor, duas grandezas, x e y, são diretamente proporcionais quando satisfazem as seguintes condições: o valor de x aumenta e o correspondente valor de y também aumenta e a relação $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$ é constante, ou seja, $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{k}$, com $\mathrm{k} > 0$. Também define que duas grandezas, x e y, são inversamente proporcionais quando os valores de x aumentam quando os de y diminuem, e vice-versa e o produto $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ é constante, ou seja, $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{k}$, com $\mathrm{k} > 0$.

Uma noção importante, ao se trabalhar funções, é a de monotonicidade. Quanto a esse tópico, Leonardo (2013a) apresenta as seguintes definições:

1) Uma função f é crescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$, tem-se $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) < \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$.

2) Uma função f é decrescente em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$, tem-se $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) > \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)$.

3) Uma função f é constante em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$, tem-se $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_2) = \mathrm{k}$, sendo k uma constante real.

No estudo de funções, deparamo-nos com um importante conceito sobre taxa média de variação, uma vez que é uma característica das funções e nos permite distinguir diferentes funções. Existem funções que possuem taxa de variação constante, o que caracteriza ser uma função linear, ao contrário de outras, que têm taxa de variação variada. Nessas funções, a taxa de variação representa a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em determinado ponto, mas, quando aplicamos, por exemplo, no movimento retilíneo uniforme (MRU) e uniformemente variado (MRUV), a taxa de variação representa a velocidade do objeto.

Segundo Paiva (2013), podemos definir o comportamento de uma função através de sua taxa média de variação.

Para qualquer função $y = f(x)$, a razão entre a variação de y e a correspondente variação de valores de x, nessa ordem, é chamada de taxa média de variação de y em relação a x, isto é, se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois pontos distintos do gráfico da função $y = f(x)$, então a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, que é igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, que é a taxa média de variação de y em relação a x, quando este varia de x_A a x_B. Como vimos anteriormente, podemos dizer que taxa média de variação de y é diretamente proporcional à variação de x. Assim as definições 1), 2) e 3), apresentadas anteriormente, tomam um novo sentido, conforme segue:

i) Uma função é crescente em um subconjunto S do domínio se, e somente se, a taxa média de variação é positiva para quaisquer dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do gráfico, com $\{x_A, x_B\} \subset$S.

ii) Uma função é decrescente em um subconjunto S do domínio se, e somente se, a taxa média de variação é negativa para quaisquer dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do gráfico, com $\{x_A, x_B\} \subset$S.

iii) Uma função é constante em um subconjunto S do domínio se, e somente se, a taxa média de variação é nula para quaisquer dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do gráfico, com $\{x_A, x_B\} \subset$S.

Uma função pode assumir valores reais, portanto positivos, negativos ou zero, o que pode ser verificado através do estudo do sinal da função, que se dá de forma algébrica ou de forma gráfica.

Daremos ênfase ao estudo do sinal de uma função por meio do seu gráfico em que todos os pontos acima do eixo x têm ordenada positiva ($y > 0$) e todos os pontos abaixo do eixo x têm ordenada negativa ($y < 0$). Nos pontos do gráfico sobre o eixo x, a ordenada é nula ($y = 0$).

Sendo f uma função de domínio D, dizemos que:

a) f é positiva para um elemento x, com $x \in D$, se e somente se, $f(x) > 0$;

b) f é negativa para um elemento x, com $x \in D$, se e somente se, $f(x) < 0$;

c) f é nula para um elemento x, com $x \in D$, se e somente se, $f(x) = 0$; Neste caso, x é chamado raiz da função.

Além do estudo do sinal, trabalhamos de forma intensa com a análise dos gráficos. Sendo assim, existe a necessidade de revisitar algumas transformações que podem ser feitas nos gráficos das funções. O que segue foi baseado em no material disponibilizado Bortolossi (2014).

Dado o gráfico de uma função $y = f(x)$ e uma constante c, vamos observar o que ocorre com o gráfico da função:

a) $g(x) = f(x + c)$

Ao somar uma constante c à variável independente x de uma função f tem efeito geométrico de transladar o gráfico de f horizontalmente para direita quando $c < 0$ ou para esquerda quando $c > 0$, conforme apresenta a Figura 3.

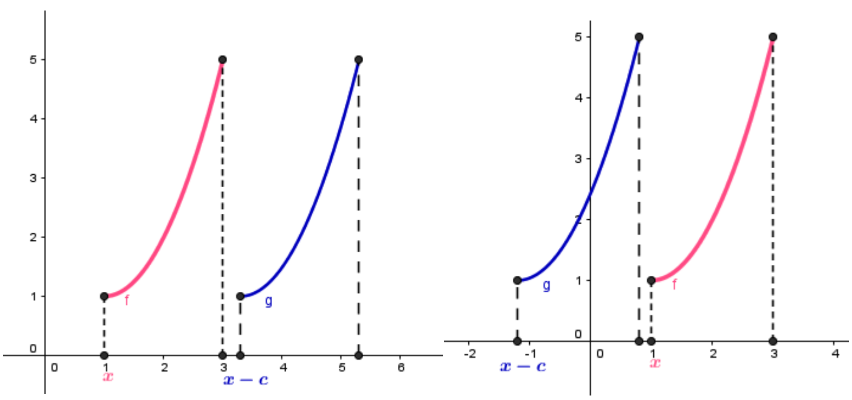


Figura 3: Translação horizontal de uma função f.

b) $g(x) = f(x) + c$

Somar uma constante c a uma função f tem o efeito geométrico de transladar verticalmente para cima quando $c > 0$ ou verticalmente para baixo quando $c < 0$ o gráfico de f, conforme apresenta a Figura 4.

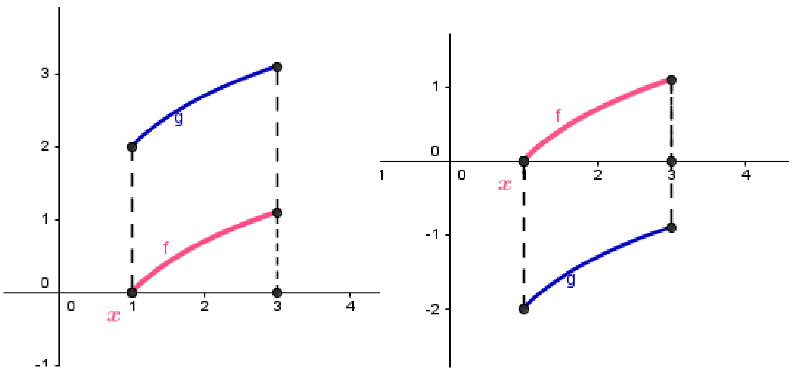


Figura 4: Translação vertical de uma função f.

c) $g(x) = f(c \cdot x)$

Multiplicar a variável independente de uma função f por uma constante não negativa c tem o efeito geométrico de alongar (para $0 < c < 1$) ou comprimir (para $c > 1$) horizontalmente o gráfico de f. A Figura 5 exemplifica essa transformação.

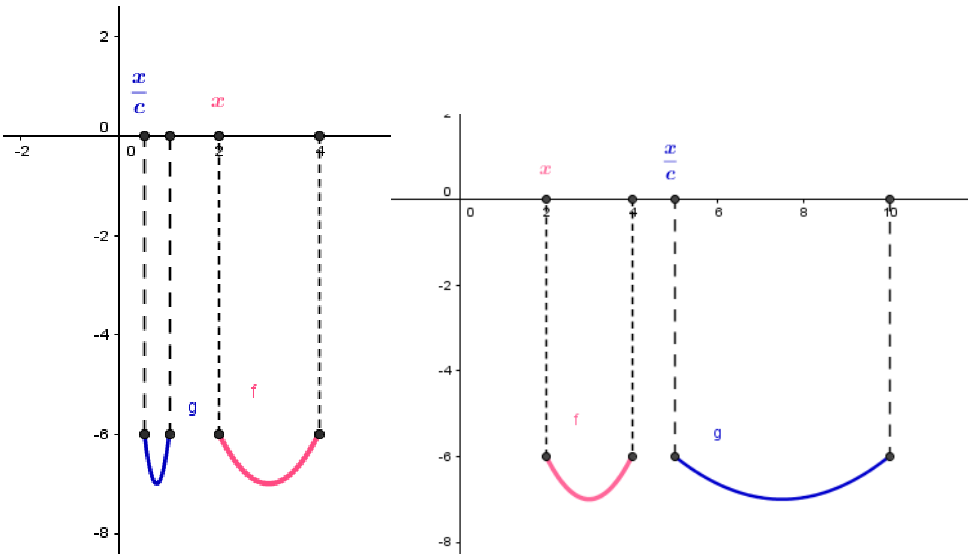


Figura 5: Compressão e alongamento horizontal de uma função f.

d) $g(x) = c \cdot f(x)$

Multiplicar uma função f por uma constante não negativa c tem o efeito geométrico de alongar (para $c > 1$) ou comprimir (para $0 < c < 1$) verticalmente o gráfico de f. Observemos a Figura 6, que apresenta um exemplo do indicado.

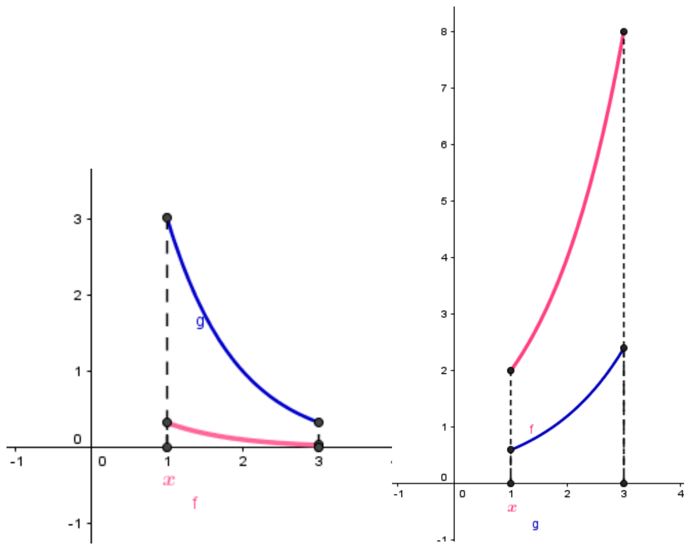


Figura 6: Compressão e alongamento vertical de uma função f.

e) $g(x) = -f(x)$

Multiplicar uma função f por -1 tem o efeito geométrico de refletir com relação ao eixo x o gráfico de f, conforme apresenta a Figura 7.

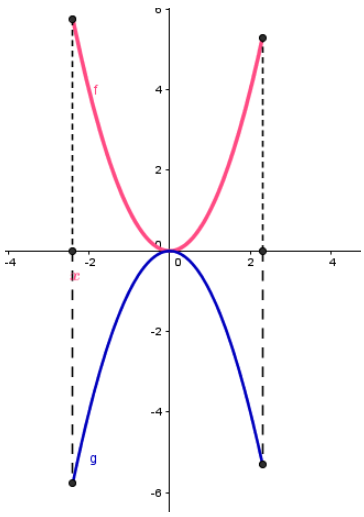


Figura 7: Reflexão uma função f sobre o eixo x.

f) $g(x) = f(-x)$

Multiplicar a variável independente x de uma função f por -1 tem o efeito geométrico de refletir com relação ao eixo y o gráfico de f. A Figura 8 apresenta um exemplo desse tipo de transformação.

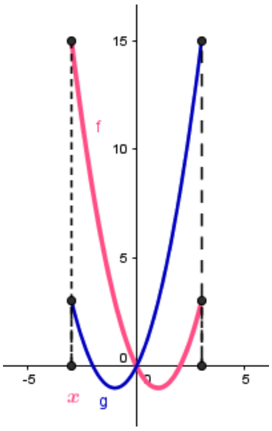


Figura 8: Reflexão uma função f sobre o eixo y.

No que segue, vamos revisar alguns conceitos pertinentes à função afim, pois essa função é importante na descrição de situações cotidianas que envolvem taxas de variação constantes, e, neste trabalho, vamos aplicar os conhecimentos desse tipo de função no estudo do Movimento Retilíneo Uniforme.

Observamos que apresentamos as transformações de forma geral, mas vamos reforçá-las para cada tipo de função, que serão apresentadas na sequência.

1.3 Função Afim

Segundo Fugita (2009a), *uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando, para todo $x \in \mathbb{R}$ o valor de $f(x)$ é dado por uma expressão do tipo $f(x) = ax + b$, em que a, b são constantes reais.*

Existem alguns casos particulares em que a função afim definida em $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não se apresenta da forma usual. São eles:

a) $f(x) = ax$ com $a \neq 0$ e $b = 0$ é chamada de função linear;

b) $f(x) = b$ com $a = 0$ e $b \neq 0$ é chamada de função constante;

c) $f(x) = x$ com $a = 1$ e $b = 0$ é chamada de função identidade.

O coeficiente a da função afim é a taxa de variação da função, ou ainda a é a variação de $f(x)$ por unidade de variação de x. Este coeficiente também pode ser visto como o responsável pela direção da reta em relação à horizontal (declividade). A função afim é caracterizada pela taxa de variação (coeficiente a) ser constante para qualquer intervalo do domínio, e seu gráfico é representado por uma reta.

Quanto maior o valor absoluto do coeficiente a, mais a direção da reta se aproxima da posição vertical, o que é válido se os eixos x e y estão na mesma escala. Dadas as funções $f(x) = ax$, $g(x) = a_1x$ e $h(x) = a_2x$, com $a_1 > a > a_2$, a Figura 9 apresenta uma representação gráfica dessas funções, onde $g(x)$ está mais próxima do eixo y por ter a maior taxa de variação.

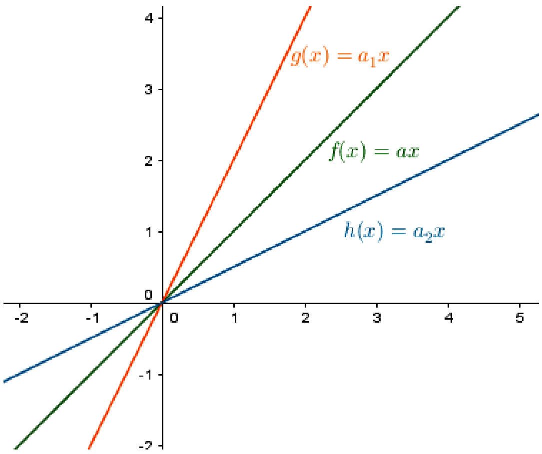


Figura 9: Representação gráfica do comportamento da taxa de variação da função afim.

Além disso, a função afim é classificada de acordo com o valor do coeficiente angular a. Se $a > 0$, f é crescente; se $a < 0$, f é decrescente e se $a = 0$, f é constante, e a reta que representa o seu gráfico é paralela ao eixo horizontal x.

Também o coeficiente linear b da função afim possui importância na representação gráfica dessa função. Podemos dizer que é o valor inicial da função, ou seja, esse coeficiente determina o ponto de intersecção da reta com o eixo y. O gráfico intercepta o eixo das ordenadas quando $x = 0$ e, portanto, $f(0) = b$. A Figura 10 apresenta as situações acima descritas.

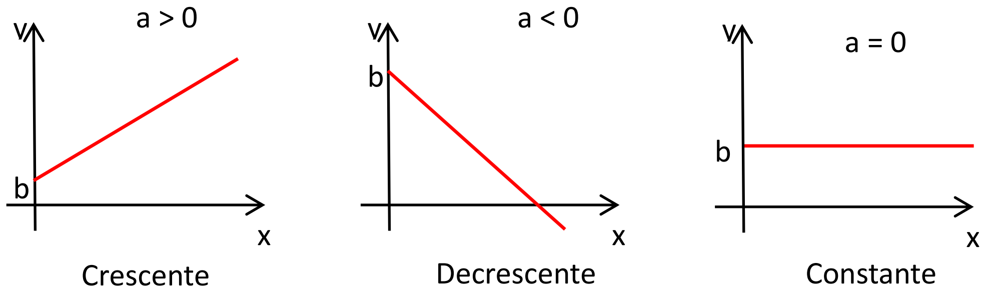


Figura 10: Gráficos da função afim para $b > 0$.

Ainda tratando da representação gráfica de uma função afim, Souza (2013) afirma que os gráficos das funções afim $g(x) = ax + b$ e $h(x) = ax - b$ são semelhantes ao gráfico da função linear $f(x) = ax$, porém transladados, da seguinte forma, para cima no eixo y em b unidades, se $b > 0$ ou para baixo no eixo y, em valores absolutos, em b unidades, se $b < 0$. A Figura 11 apresenta uma ilustração das situações acima descritas.

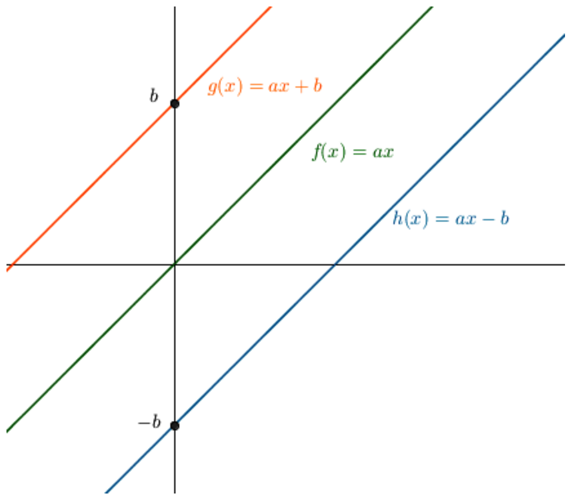


Figura 11: Translação de uma função afim.

No que segue, utilizaremos os conhecimentos de função afim no Movimento Retilíneo Uniforme.

1.3.1 Aplicação Função Afim

Um dos pontos abordados em nosso trabalho são as aplicações da função afim na Física. Com isso, necessitamos revisar alguns conceitos pertinentes aos conteúdos de Movimento Retilíneo Uniforme (MRU). Tomamos como base Sant'anna et al. (2010a) para realizar a revisão desses conceitos.

Começaremos revisando o conceito de Cinemática, a parte da Física que estuda o movimento de um corpo. Um corpo está em movimento quando há variação de sua posição em um intervalo de tempo em relação a um referencial, e, caso não haja variação da posição, dizemos que o corpo encontra-se em repouso.

Em nosso trabalho, utilizaremos as seguintes notações:

t: instante final, ou seja, o momento em que o corpo está na posição final S;

t_0: instante inicial, ou seja, o momento em que o corpo encontra-se na posição inicial do movimento S_0;

Δt: intervalo de tempo, ou seja, $\Delta t = t - t_0$;

S_0: posição inicial do corpo no instante $t = 0$;

S: posição final, posição do corpo no instante t;

ΔS: deslocamento do corpo, ou seja, $\Delta S = S - S_0$;

v: velocidade escalar indica a rapidez com que o móvel se movimenta.

Observamos que a velocidade é chamada de velocidade escalar média (v_m) quando está relacionada a um intervalo de tempo e pode ser calculada através da relação $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Se a velocidade for relacionada a um instante, é chamada de velocidade escalar instantânea. Também denotaremos por a a aceleração, que é a grandeza que indica a variação da velocidade em um intervalo de tempo $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Segundo Sant'anna et al. (2010a), no MRU, tem-se um corpo deslocando-se em distâncias iguais, em intervalos de tempos iguais, ou seja, estas variações são diretamente proporcionais, portanto o corpo desenvolve uma velocidade constante, que pode ser descrita através de uma reta. Neste movimento, não há diferença entre velocidade média e velocidade instantânea, a única grandeza que varia com a posição é o tempo.

A equação matemática que relaciona a posição S do móvel dependente do tempo t de percurso é chamada de Função Horária do Espaço de um corpo e é do tipo

$$S = S_0 + vt$$

em que v é a velocidade escalar constante desenvolvida pelo corpo e S_0 é a posição inicial que ele ocupa na trajetória. O estudo de um movimento pode ser feito através das funções que o descrevem ou através do estudo da representação gráfica dessas funções.

A função horária do espaço no MRU é uma função afim cuja variável é o tempo t. Logo podemos fazer sua representação gráfica através de uma reta representada em um gráfico posição *versus* tempo (sxt), conforme a Figura 12.

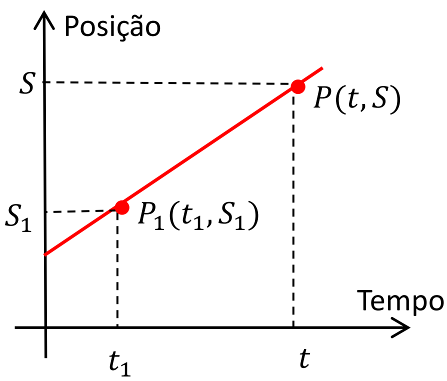


Figura 12: Representação gráfica da função horária do Espaço de um corpo em MRU

Aplicando a expressão de taxa de variação aos pontos $P(t, S)$ e $P_1(t_1, S_1)$, obtemos $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_1}{t - t_1} = v$, logo a taxa de variação do gráfico sxt no MRU é a velocidade desenvolvida pelo corpo. Portanto o coeficiente angular da função horária do espaço do MRU é dado pela velocidade v.

Quando o corpo se desloca no mesmo sentido da trajetória, temos $v > 0$ o gráfico é uma reta crescente e o movimento é chamado de progressivo, caso contrário, se o corpo se desloca no sentido contrário ao da trajetória, temos $v < 0$ a reta é decrescente e o movimento é chamado retrógrado. A posição inicial S_0 é o coeficiente linear da função horária do MRU, quando consideramos o início do movimento em $t_0 = 0$.

Assim, a Figura 13 apresenta os seguintes gráficos sxt do MRU:

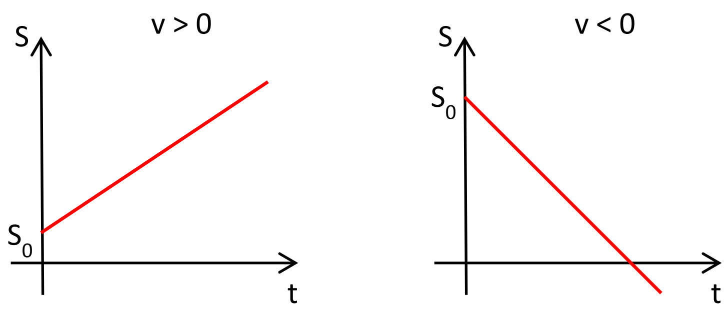


Figura 13: Gráficos sxt no MRU.

Se o corpo estiver em repouso, não há variação da posição do corpo com o passar do tempo, portanto sua velocidade é nula, e o gráfico pode ser representado através de uma reta paralela ao eixo x que representa o tempo. Ao compararmos com o gráfico de uma função afim, podemos dizer que, se o corpo está em repouso, seu gráfico sxt é uma reta constante, conforme a Figura 14.

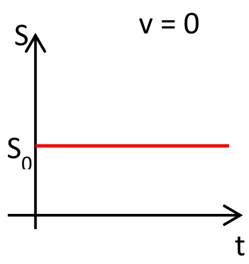


Figura 14: Gráfico sxt de um corpo em repouso no MRU.

Assim, podemos perceber as relações existentes entre os gráficos da função Afim e os gráficos do Movimento Retilíneo Uniforme estudado na Física e aplicar estes conhecimentos na interpretação do movimento. A seguir, definiremos Função Quadrática e, logo após, exploraremos sua aplicação no Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, também da Física.

1.4 Função Quadrática

Segundo Leonardo (2013), define-se *função quadrática ou função polinomial do 2º grau* como uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *quando existem números reais* a, b *e* c, *com* $a \neq 0$, *tais que* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$. Os números a, b e c são chamados coeficientes da função quadrática.

O gráfico da função quadrática é uma curva chamada parábola. O sentido de abertura de uma parábola é chamado de concavidade, que pode ser voltado para cima ou para baixo. Sendo a função quadrática da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, o que determina sua concavidade é o valor do coeficiente a, se $a > 0$, a concavidade é voltada para cima; se $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.

As abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox são os zeros da função e podem ser determinados algebricamente tomando $f(x) = 0$. Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ter dois zeros reais distintos, apenas um zero real duplo ou não ter zeros reais. Podemos demonstrar isso da seguinte forma:

Segundo Lima et al. (2006), consideremos o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right], a \neq 0$$

As duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $(x + \frac{b}{2a})^2$. Completando o quadrado, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

ou:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Chamamos esta maneira de escrever o trinômio do segundo grau de forma canônica do trinômio.

Para obter as raízes de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, temos:

$ax^2 + bx + c = 0$, se e somente se, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0.$ (1)

Logo, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$ (2)

Daí, $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. (3)

Portanto $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. (4)

A passagem de (2) para (3) só tem sentido quando o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é maior ou igual a zero. Caso tenhamos $\Delta < 0$, a equivalência entre (1) e (2) significa que a equação dada não possui solução real, pois $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ não pode ser negativo. Se o discriminante é positivo, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais distintas. Quando $\Delta = 0$, a equação tem uma única raiz real dupla.

Outra característica de uma função quadrática é ter um valor máximo ou mínimo, que corresponde, na curva que a representa, denominada parábola como um ponto máximo ou mínimo, dependendo do sentido de sua concavidade.

De fato, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode ser escrita na forma canônica do trinômio do segundo grau, com $a > 0$. Temos $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$, apresenta uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre maior ou igual a zero. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é igual a zero, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ assume seu valor mínimo, portanto, o menor valor assumido por $f(x)$ é $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \left(\frac{b^2}{4a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$. Se $a < 0$, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Portanto, o vértice da parábola que representa a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, é o ponto $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$.

Assim podemos perceber que, quando $a > 0$, a parábola que representa a função f tem concavidade voltada para cima e, portanto, o vértice V é o ponto mínimo e a ordenada y_v é o valor mínimo da função. Desta forma, o conjunto imagem de f é dado por: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}/y \geq y_v\}$ ou $Im(f) = [-\frac{\Delta}{4a}, \infty[$.

Quando $a < 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para baixo e, portanto, o vértice V é o ponto máximo e a ordenada y_v é o valor máximo da função; o conjunto imagem de f é dado por: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y \leq y_v\}$ ou $Im(f) =]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$.

Segundo Souza (2013a), analisando o coeficiente a de uma função quadrática, também podemos obter informações sobre a abertura da parábola. As funções quadráticas que têm coeficiente a com valores absolutos iguais estão relacionados com parábolas de aberturas iguais. Observamos este fato na Figura 15.

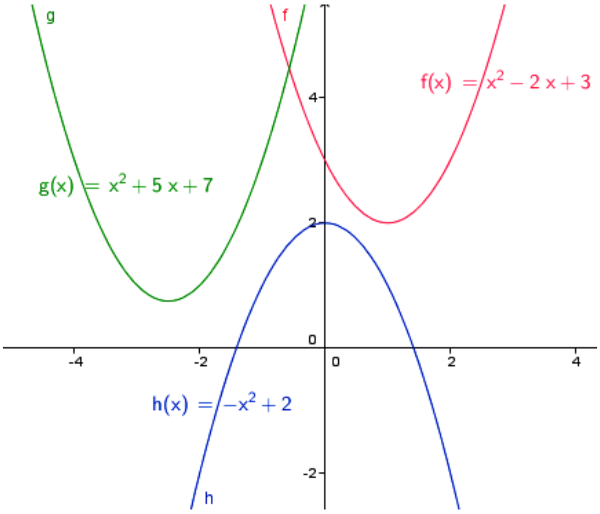


Figura 15: Parábolas com mesmo valor absoluto do coeficiente a.

Aquelas que possuem diferentes valores absolutos do coeficiente a estão relacionadas a parábolas com aberturas diferentes, conforme a Figura 16.

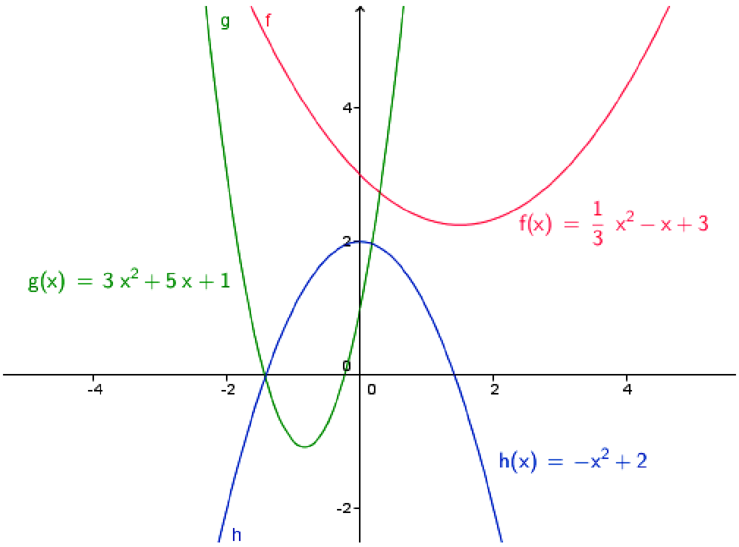


Figura 16: Parábolas com diferentes valores absolutos do coeficiente a.

Na Figura 17, podemos visualizar que, quanto menor for o valor absoluto do coeficiente a de uma função quadrática, maior será a abertura da parábola relacionada a ela. Quanto maior é o valor absoluto de a, maior é a taxa média de variação, conforme foi citado anteriormente neste texto.

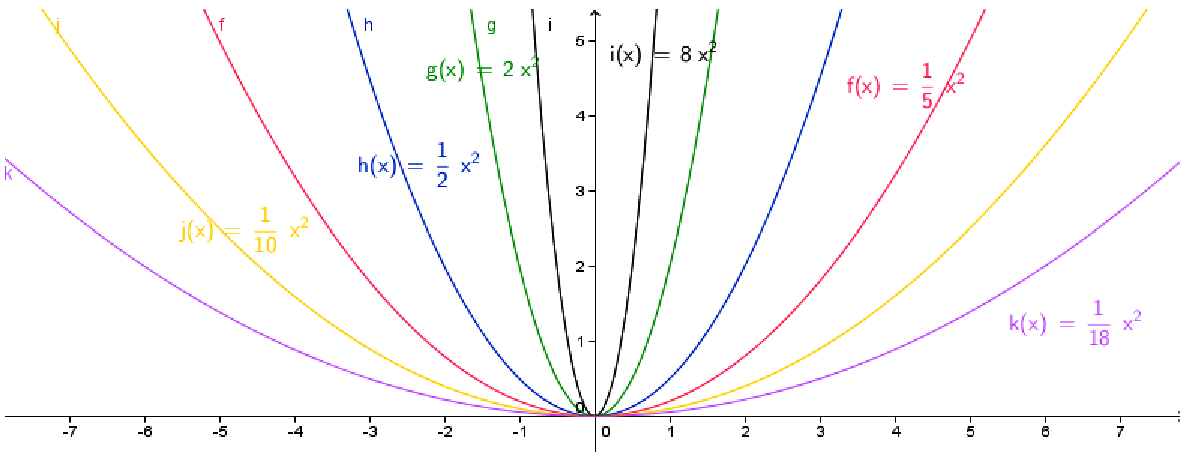


Figura 17: Parábolas com diferentes coeficientes a.

Uma parábola tem dois ramos, que são divididos pelo seu eixo de simetria e tem como ponto comum o vértice. Quando temos $a > 0$, a parábola tem um ramo decrescente seguido de um ramo crescente, se $a < 0$ a parábola tem um ramo crescente seguido de um ramo decrescente, conforme a Figura 18.

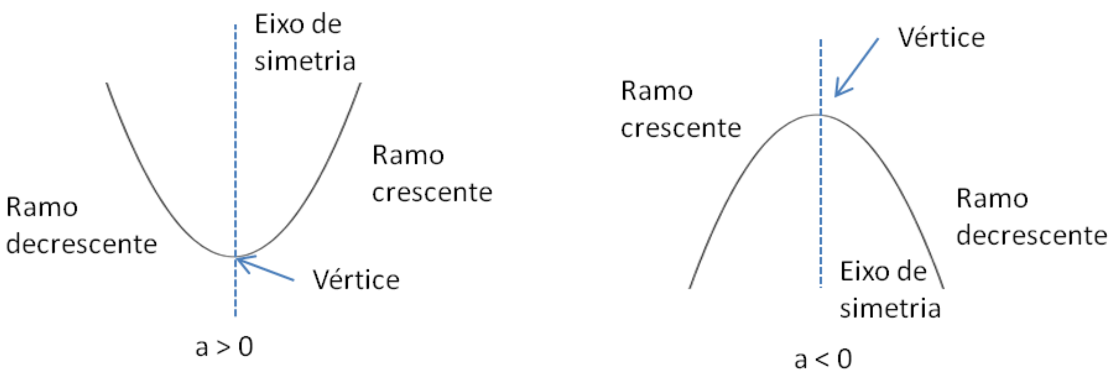
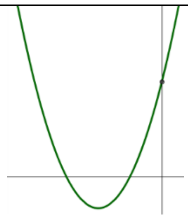
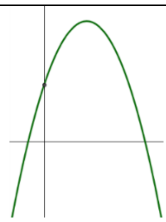
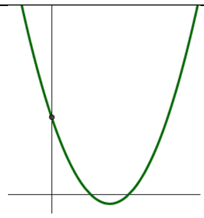
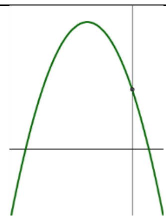
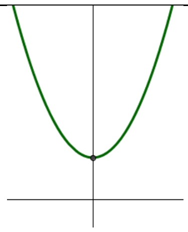
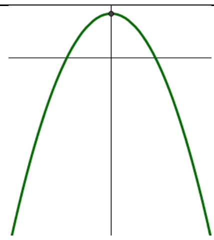


Figura 18: Ramos de uma parábola.

A parábola que representa função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta o eixo Oy no ponto de ordenada c, ponto de coordenadas $(0, c)$.O coeficiente b de uma função quadrática indica se a parábola relacionada a esta função intercepta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente, se $b > 0$ a parábola intercepta o eixo y no ramo crescente; se $b < 0$ a parábola intercepta o eixo y no ramo decrescente e se $b = 0$ a parábola intercepta o eixo y no vértice. Observamos, na Quadro 1, os gráficos correspondentes a cada situação descrita acima.

Intersecção do gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ no eixo y	$a > 0$	$a < 0$
No ramo crescente se $b > 0$		
No ramo decrescente se $b < 0$		
No vértice se $b = 0$		

Quadro 1: Intersecção do gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ no eixo y

A seguir, vamos observar simetrias e translações que podem ocorrer com o gráfico da função quadrática.

Podemos observar, na Figura 19, que os gráficos das funções $f(x) = ax^2$ e $g(x) = -ax^2$ têm como vértice a origem e são simétricos em relação aos eixos x e y.

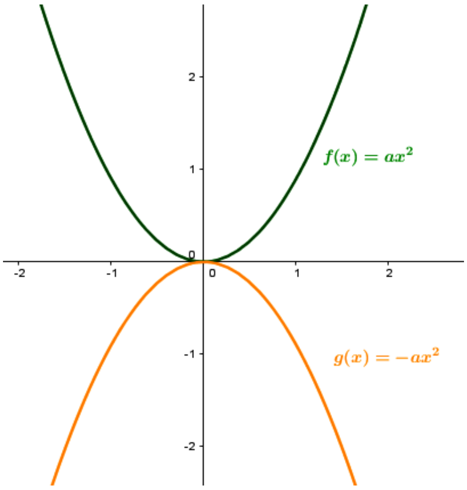


Figura 19: Simetria em relação aos eixos x e y.

Os gráficos das funções de $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $f(x) = -ax^2 + bx + c$ são simétricos em relação à reta $y = c$, paralela ao eixo x, pois a e $-a$ são simétricos. Isso pode ser observado na Figura 20.

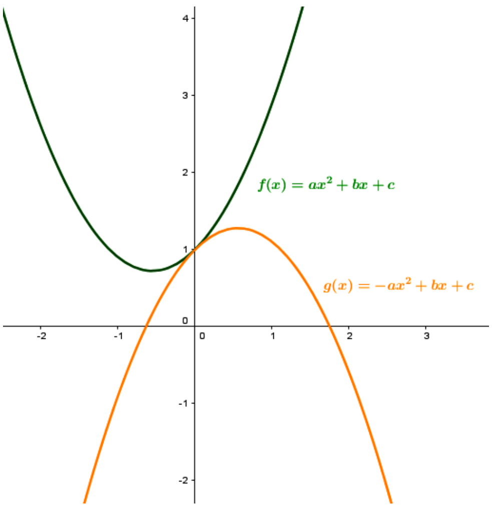


Figura 20: Simetria em relação ao eixo horizontal.

As parábolas das funções definidas por $g(x) = f(x) - k$ e $h(x) = f(x) + k$, onde $f(x) = ax^2 + bx + c$, representadas na Figura 21, são congruentes à parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$, podendo ser obtidas por uma translação vertical de k unidades para cima, se $k > 0$, ou para baixo se $k < 0$, no gráfico da função f.

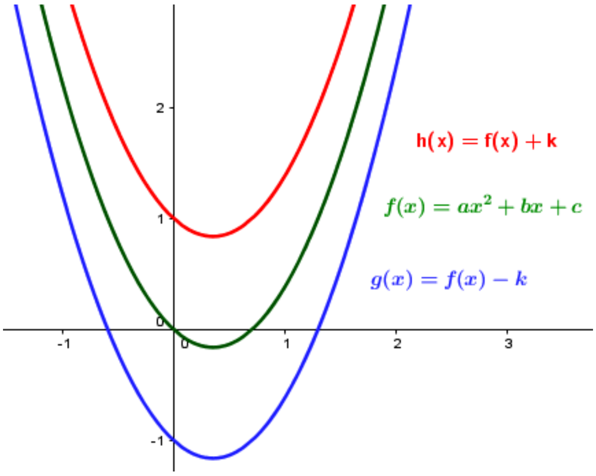


Figura 21: Translação vertical

As parábolas definidas por $h(x) = a(x-m)^2 + b(x-m) + c = f(x-m)$ e $g(x) = a(x+m)^2 + b(x+m) + c = f(x+m)$ são congruentes à $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo uma translação horizontal de m unidades para a esquerda se $m < 0$, ou para a direita do gráfico de f se $m > 0$. Isso pode ser observado na Figura 22.

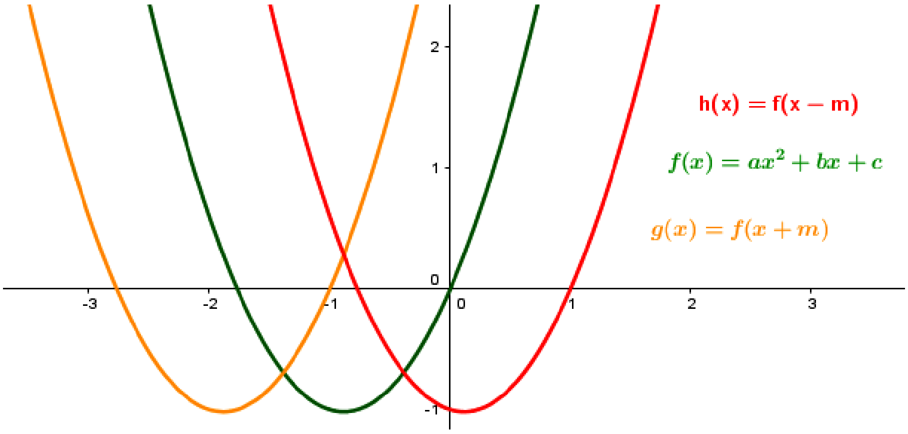


Figura 22: Translação horizontal.

Podemos ter mais de uma alteração em uma mesma parábola, por exemplo, uma parábola pode sofrer sucessivas translações, uma translação horizontal seguida de uma translação vertical e assim seu gráfico terá essas duas características. Por exemplo, na Figura 23, temos o gráfico de uma função f que sofreu uma translação horizontal seguida de uma translação vertical dando origem ao gráfico da função g.

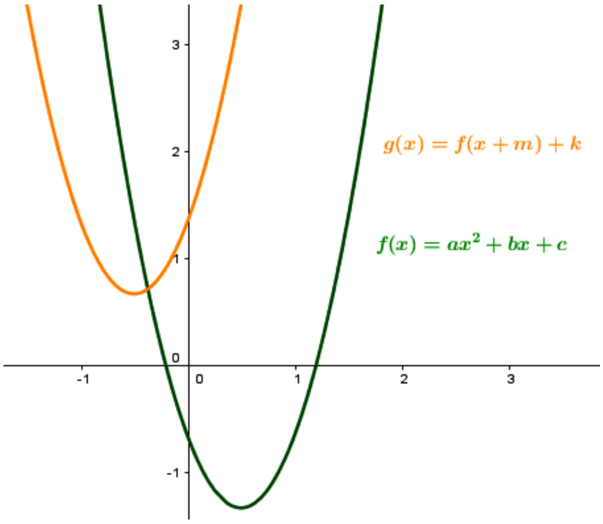


Figura 23: Duas translações sendo aplicadas na mesma função.

1.4.1 Aplicação Função Quadrática

Vamos aplicar os conhecimentos adquiridos sobre a Função Quadrática no estudo do Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV), visto na Física, uma vez que sua equação horária é representada por uma função deste tipo.

Um corpo em MRUV varia o valor de sua velocidade em um determinado intervalo de tempo. Em consequência, a distância percorrida pelo corpo em cada unidade de tempo também varia, de tal maneira que, se sua velocidade estiver aumentando, estará crescendo o espaço percorrido por unidade de tempo, e vice-versa. A direção do movimento também pode sofrer variação.

Neste movimento variado, a velocidade do corpo sofre sempre a mesma variação à medida que o tempo passa, caracterizando a existência de aceleração constante durante o movimento, uma vez que a aceleração escalar média de um corpo é a razão entre a variação da velocidade (Δv) em um intervalo de tempo (Δt), ou seja, $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

De acordo com Sant'anna (2010a), no MRUV, a Função Horária da Velocidade de um corpo com velocidade inicial v_0 e aceleração escalar constante a pode ser descrita como $v = v_0 + at$, onde a velocidade varia linearmente com o tempo. O mesmo não se pode afirmar sobre a posição, pois esta aumenta ou diminui em dependência do quadrado do tempo de percurso.

No estudo do movimento de um corpo, é importante poder descrever seu movimento, sua posição ou a variação de posição em determinado instante de tempo, e isso é possível através da análise da Função Horária do Espaço s de um corpo em MRUV com aceleração a, velocidade inicial v_0, e posição inicial s_0 é dada por:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Conforme Artuso (2013), podemos comparar a função horária do espaço do MRUV com uma função quadrática, onde a posição no espaço varia com o tempo, portanto o gráfico da $posição\ versus\ tempo$ no MRUV é representado por uma parábola. A concavidade da parábola está relacionada com a aceleração a, se $a > 0$ será voltada para cima e se $a < 0$ a concavidade será para baixo. Os pontos de máximo e mínimo das curvas correspondem às posições em que ocorre a inversão de sentido do movimento que o corpo apresenta até então.

Continuando a comparação função horária do espaço do MRUV $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$, com uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos verificar que a posição inicial s_0 é a ordenada do ponto de corte do gráfico com o eixo y, o que equivale ao coeficiente c na função quadrática, já a velocidade inicial v_0 equivale ao coeficiente b, ou seja, se a velocidade inicial for positiva $(v_0 > 0)$ a parábola intercepta o eixo y no ramo crescente; se a velocidade inicial for negativa $(v_0 < 0)$ a parábola intercepta o eixo y no ramo decrescente e se a velocidade inicial for nula $(v_0 = 0)$ a parábola intercepta o eixo y no vértice. Figura 24.

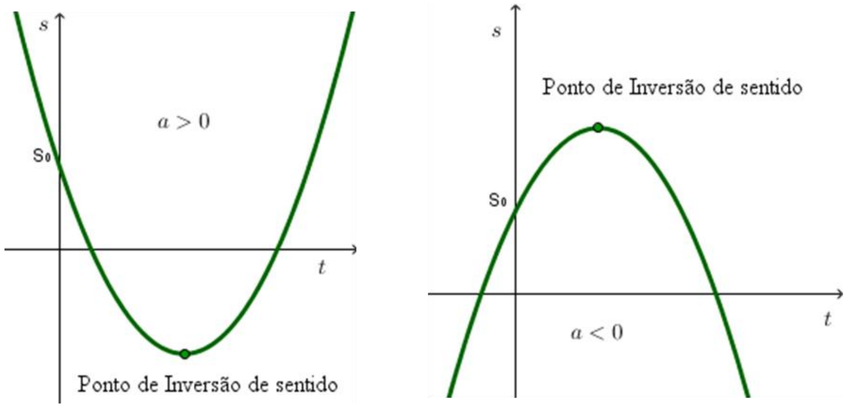


Figura 24: Gráficos representando a Equação Horária do Espaço MRUV

O movimento pode ser classificado quanto ao módulo de sua velocidade, é retardado quando o módulo da velocidade do móvel diminui à medida que o tempo passa e acelerado quando o módulo da velocidade do móvel aumenta à medida que o tempo passa.

A Função Horária da Velocidade no MRUV definida por $v = v_0 + at$ pode ser comparada com uma função afim, pois seus gráficos são representados por retas, conforme a Figura 25, cujo gráfico $velocidade\ versus\ tempo$ é uma reta em que a aceleração determina sua declividade, se $a > 0$, reta crescente e o movimento é chamado de acelerado e se $a < 0$, reta decrescente e o movimento é chamado retardado.

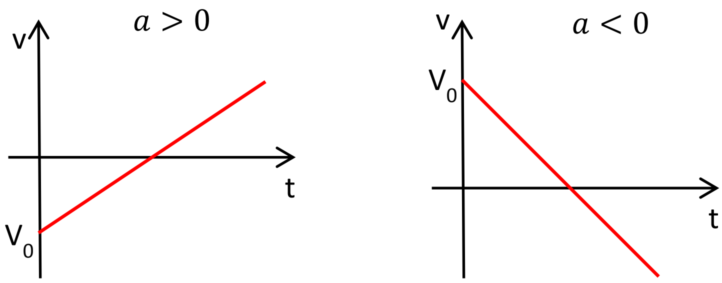


Figura 25: Gráficos da Função Horária da Velocidade do MRUV

Outra informação que o gráfico $v\ versus\ t$ nos permite verificar é o deslocamento do móvel, que é dado pela área compreendida entre o segmento de reta que representa a função da velocidade e o eixo horizontal.

Segundo Halliday (2008), a velocidade v é definida em termos da posição x como $v = \frac{dx}{dt}$, logo

$$\int_{t_0}^{t_1} v\,dt = x_1 - x_0 \qquad (1)$$

onde x_0 é a posição no instante t_0 e x_1 é a posição no instante t_1. A integral definida do lado esquerdo da equação (1) pode ser calculada a partir do gráfico de $v(t)$, como mostra a Figura 26 abaixo. Em particular,

$$\int_{t_0}^{t_1} v\,dt = (\acute{a}rea\ entre\ a\ curva\ da\ velocidade\ e\ o\ eixo\ do\ tempo, de\ t_0\ a\ t_1).$$

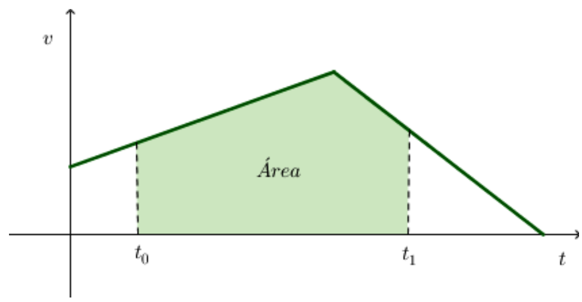


Figura 26: Área que representa o deslocamento do móvel.

Um movimento também pode ser classificado como retrógrado quando o sentido é contrário ao da orientação da trajetória ($v < 0$) e é chamado progressivo quando o sentido é o mesmo da orientação da trajetória ($v > 0$). Podemos verificar a classificação dos movimentos nos gráficos da Figura 27.

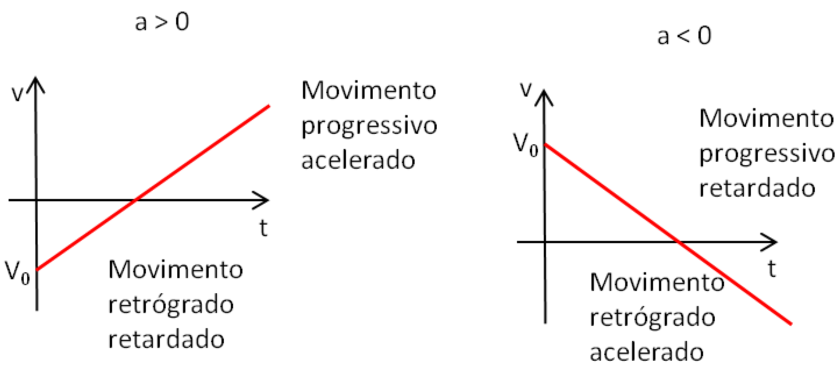


Figura 27: Classificação MRUV.

De acordo com Artuso (2013) podemos concluir que o movimento que antecede a inversão do sentido será sempre retardado e o posterior movimento será acelerado. Dessa forma, nos instantes em que ocorrem inversões de sentido do movimento, a velocidade do corpo será nula. Isso é apresentado na Figura 28, que traz a classificação do MRUV no gráfico da posição $s\ versus\ t$.

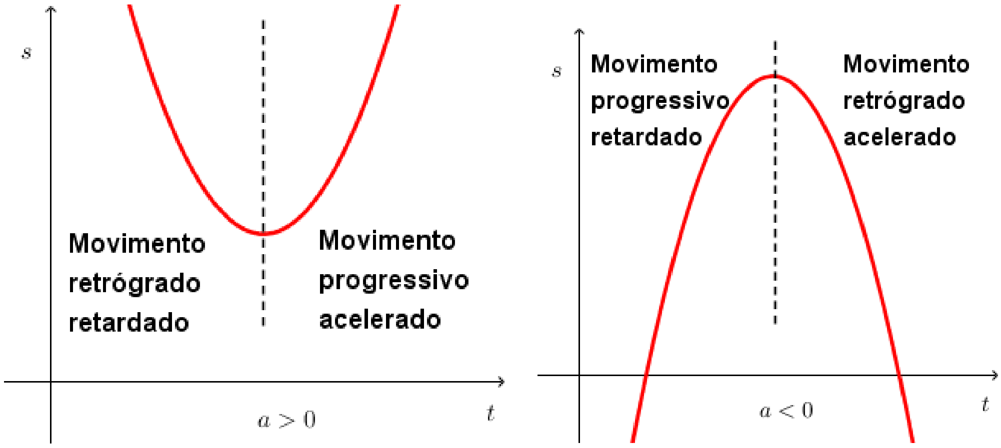


Figura 28: Classificação do MRUV no gráfico $s\ x\ t$

A seguir, apresentaremos os conceitos de função exponencial e suas aplicações na Química e Biologia.

1.5 Função Exponencial

A função exponencial é uma ferramenta matemática presente na descrição e análise de muitas situações do nosso cotidiano, tais como juro em aplicações financeiras ou empréstimos, crescimento ou decrescimento populacional, depreciação de um bem, decaimento radioativo de uma substância, datação de materiais arqueológicos etc.

Segundo Lima et al. (2006), a função exponencial possui as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^1 = a$; se $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$. Outras propriedades importantes dessa função são o fato de ela ser contínua, ilimitada superiormente e ser sobrejetiva.

Este mesmo autor traz o Teorema da Caracterização da Função Exponencial, conforme segue: *Seja função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

ii) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $a = f(1)$*;*

iii) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Lima et al. (2006, p. 183) e tem como princípio que: $i)$ acarreta que, para todo número racional $r = m/n$ (com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$) tem-se que $f(rx) = f(x)^r$. Com efeito, como $nr = m$, podemos escrever $f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$, logo $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$. Assim, se pusermos $f(1) = a$, teremos $f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Para completar a demonstração de que $i) \Rightarrow ii)$ suponhamos que f seja crescente, logo $1 = f(0) < f(1) = a$. Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq a^x$. Digamos, por exemplo, que seja $f(x) < a^x$. Então, pelo *Lema: fixado o número real positivo* $a \neq 1$*, em todo intervalo de* $\mathbb{R}^+$*existe alguma potência* a^r*, com* $r \in \mathbb{Q}$, existe um número real $f(x) < f(r) < a^x$. Como f é crescente, tendo $f(x) < f(r)$ concluímos que $x < r$. Por outro lado, temos também $a^r < a^x$, logo $r < x$. Esta contradição completa a prova de que $i) \Rightarrow ii)$. As implicações restantes, $ii) \Rightarrow iii)$ e $iii) \Rightarrow i)$ são óbvias.

Segundo Paiva (2013), define-se *função exponencial toda função* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$*, tal que* $f(x) = a^x$*, com* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *e* $a \neq 1$*.* Como a própria definição já mostra, se a base $a = 0$ e $x < 0$, a^x não está definida em $\mathbb{R}$, podemos observar também que se $a = 0$ e $x > 0$, a função $f(x) = a^x$ é constante, e $f(x) = 0$. Além disso, se $a < 0$, a função não está definida em $\mathbb{R}$ e se $a = 1$ e $x \in \mathbb{R}$, a função é constante, e $f(x) = 1$.

O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ é denominado curva exponencial. De modo geral, seu gráfico apresenta comportamento crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$, a função não assume valores negativos ou nulos.

Fugita (2009a) afirma que, quando $a > 0$ tem-se que, ao diminuir indefinidamente os valores de x, os valores de $f(x)$ também diminuem, podendo se aproximar muito do zero. Quando $0 < a < 1$ tem-se que os valores de $f(x)$ se aproximam muito de zero quando os valores de x crescem indefinidamente. Assim, o gráfico da função não encosta no eixo x e diz-se que esse eixo $y = 0$ é uma assíntota horizontal desse gráfico, conforme observado na Figura 29.

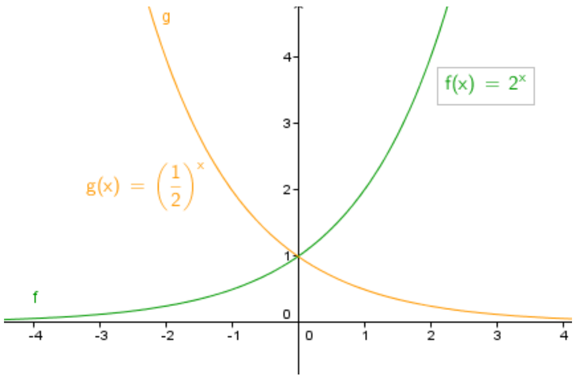


Figura 29: Função f crescente e função g decrescente.

Segundo Fugita (2009a), existem funções da forma $f(x) = b \cdot a^x$ que são obtidas a partir da função exponencial, e são denominadas *funções do tipo exponencial.*

O gráfico de uma função do tipo $f(x) = b \cdot a^x$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é simétrico em relação ao eixo x ao gráfico da função $g(x) = -b \cdot a^x$. O eixo x é assíntota horizontal de ambos os gráficos, onde $f(x)$ é crescente e $g(x)$ é decrescente. Podemos obter o gráfico da função $g(x)$ aplicando uma simetria de reflexão em relação ao eixo das abscissas. Observemos esta simetria na Figura 30.

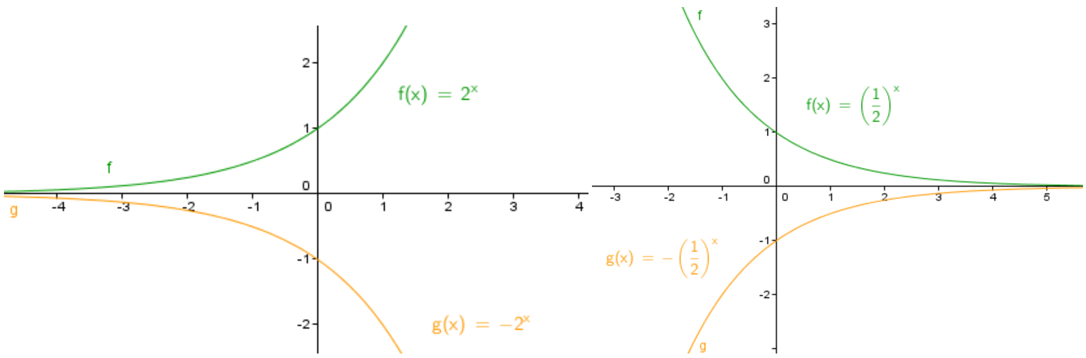


Figura 30: Simetria de reflexão em relação ao eixo das abscissas.

Dizemos que o gráfico da função $f(x) = b \cdot a^x$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é simétrico ao eixo y ao gráfico da função $g(x) = b \cdot a^{-x}$. O eixo x é assíntota de ambos os gráficos, onde $f(x)$ é crescente e $g(x)$ é decrescente. Podemos obter o gráfico da função $g(x)$ aplicando uma simetria de reflexão em relação ao eixo das ordenadas. A Figura 31 exemplifica estes casos.

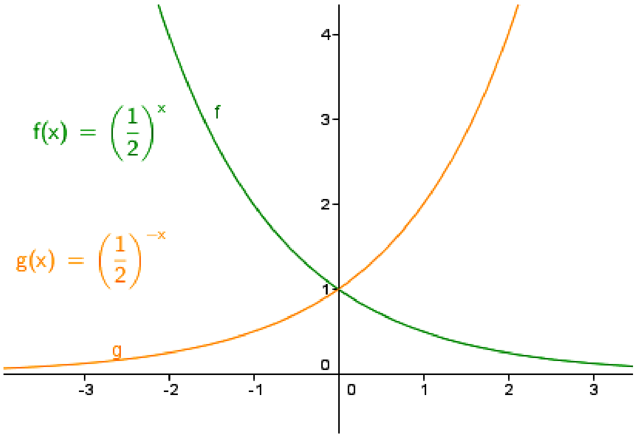


Figura 31: simetria de reflexão em relação ao eixo das ordenadas.

Dizemos que o gráfico da função $f(x) = b \cdot a^x$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é simétrico em relação à função $f(x) = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) ao gráfico da função $g(x) = -b \cdot a^{-x}$, em que o eixo x é assíntota horizontal de ambos. Podemos obter o gráfico da função $g(x)$ aplicando uma simetria de reflexão em relação ao gráfico da função identidade. A Figura 32 apresenta um exemplo do que foi descrito.

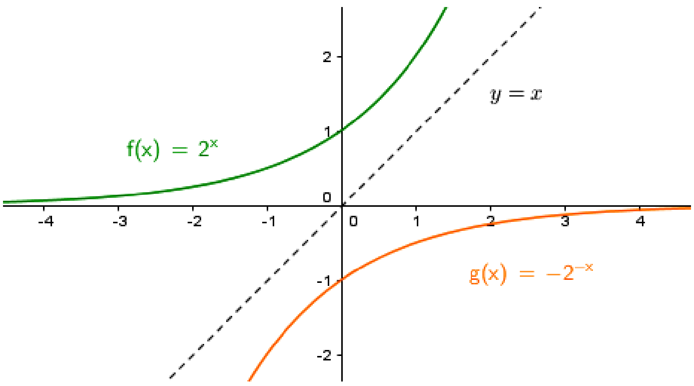


Figura 32: simetria de reflexão em relação ao gráfico da função identidade.

O gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ pode sofrer transformações chamadas translações horizontais e verticais. Nas translações verticais, o gráfico da função $f(x) = a^x + k$, com $k \in \mathbb{R}$ tem o mesmo formato da função $f(x) = a^x$ porém é deslocado k unidades para cima, já o gráfico $f(x) = a^x - k$, com $k \in \mathbb{R}$ é deslocado k unidades para baixo, conforme apresenta a Figura 33.

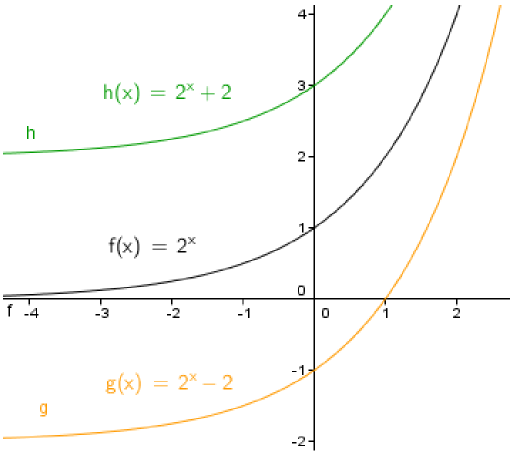


Figura 33: Translação vertical.

Nas translações horizontais, o gráfico da função $f(x) = a^{x+k}$, com $k \in \mathbb{R}$ tem o mesmo formato da função $f(x) = a^x$, porém é deslocado k unidades para a esquerda, já o gráfico da função $f(x) = a^{x-k}$ desloca k unidades para a direita, conforme a Figura 34.

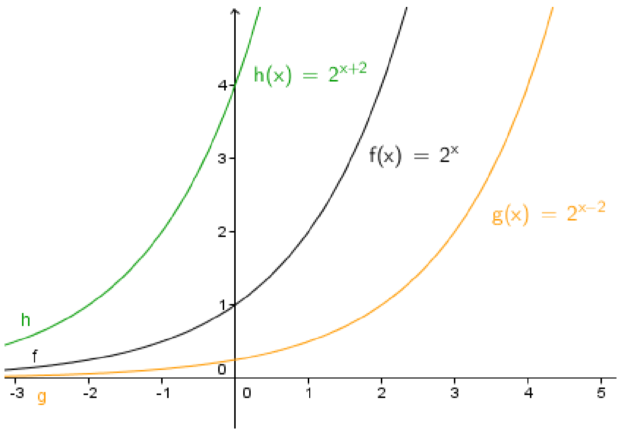


Figura 34: Translação horizontal.

Outro tipo de transformação que ocorre no gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ é a reflexão que pode ocorrer em relação ao eixo x ou em relação ao eixo y. O gráfico da função $f(x) = -a^x$ tem o mesmo formato da função $f(x) = a^x$, porém é simétrico a esse gráfico em relação ao eixo x, já o gráfico $f(x) = a^{-x}$ é simétrico em relação ao eixo y. Observemos este fato na Figura 35.

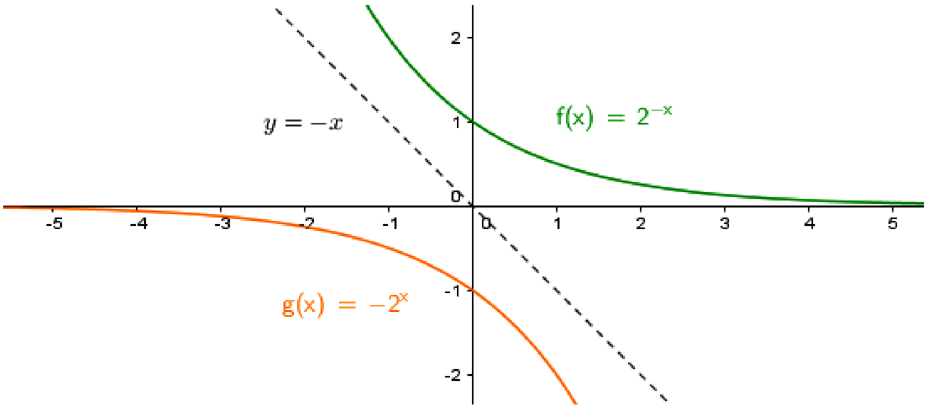


Figura 35: Reflexão.

Nas funções exponenciais também podemos ter a seguinte variação $f(x) = a^{dx}$ com $d \in \mathbb{R}$. Ao aumentarmos o valor de d em módulo, o gráfico da função se aproxima do eixo y, ou seja, se a função é crescente, o crescimento ocorre mais rapidamente, e se for decrescente, o decrescimento é mais rápido conforme a Figura 36.

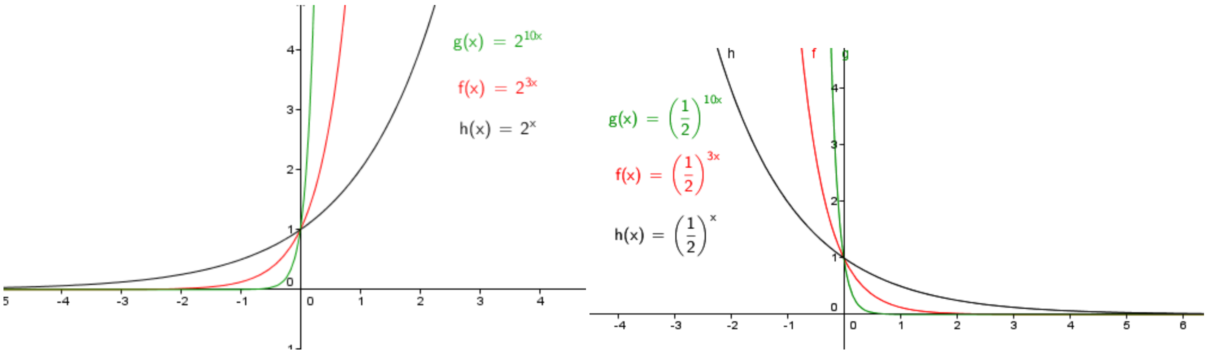


Figura 36: Exponenciais se aproximando do eixo y quanto maior o valor de $|d|$.

Ao diminuirmos o valor de d em módulo, o gráfico da função se aproxima da reta $y = 1$. A Figura 37 ilustra esse fato.

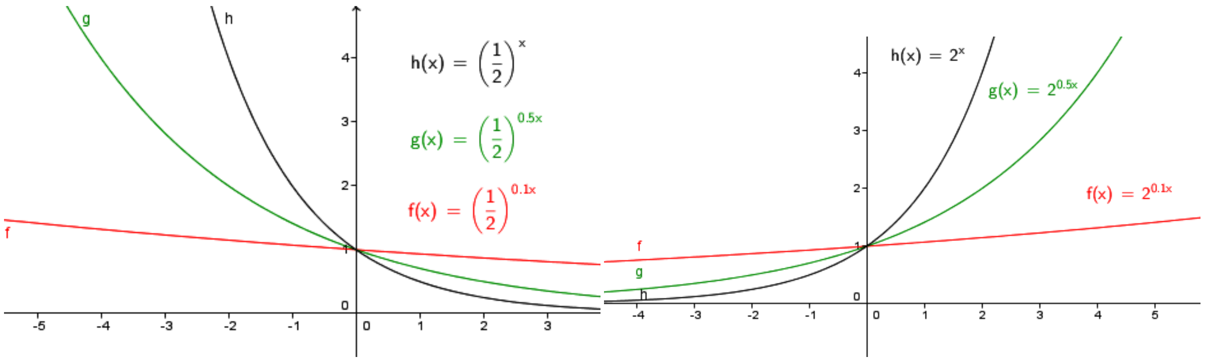


Figura 37: Exponenciais se aproximando da reta $y = 1$quanto menor o valor de $|d|$.

Segundo Dante (2013), uma função exponencial muito importante é aquela cuja base é o número irracional e, $f(x) = e^x$, ou ainda $f(x) = b \cdot e^{ax}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Observamos que são funções crescentes, pois $e = 2{,}718281 \ldots$ Essas funções aparecem com frequência nas aplicações matemáticas e na descrição de fenômenos naturais.

1.5.1 Aplicação Função Exponencial

Em conformidade com Larson (2008), a lei do crescimento e decaimento exponencial é definida por: se y é uma grandeza positiva cuja taxa de variação com o tempo é proporcional à quantidade da grandeza presente no instante t, y é da forma $y = Ce^{kt}$ onde C é o valor inicial e k é a constante de proporcionalidade. No caso de crescimento exponencial, $k > 0$; no caso de decaimento exponencial, $k < 0$.

Uma aplicação na Biologia é na análise do crescimento o número de bactérias de uma cultura, descrita em função do tempo t pela função $N(t) = N_o e^{at}$, onde N_o é o número inicial de bactérias e a é a taxa de crescimento.

Ao analisarmos o gráfico da função $N(t) = N_o e^{at}$, No é o número inicial de bactérias é o ponto de corte do gráfico com o eixo y, conforme a Figura 38.

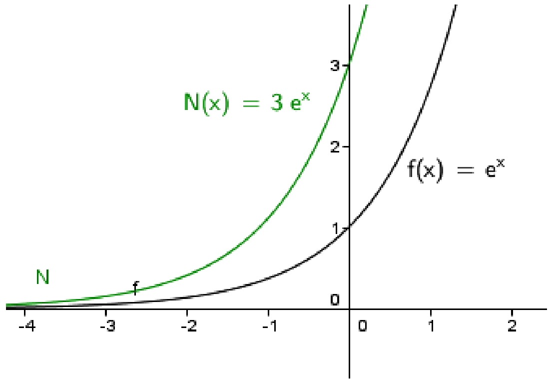


Figura 38: Ponto de corte no eixo y representado por $(0, N_o)$.

Temos que a é a taxa de crescimento, ou seja, se aumentarmos o valor de a o gráfico se aproxima do eixo y, ou seja, a população de bactérias cresce mais rapidamente, como ilustra a Figura 39.

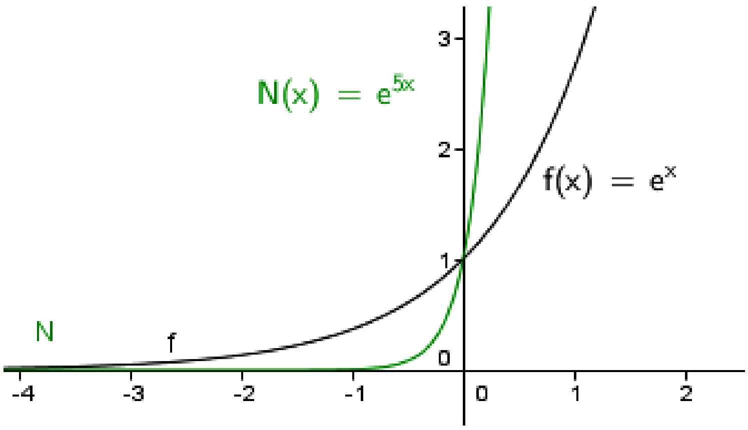


Figura 39: Variação do coeficiente$a$.

Outra aplicação é facilmente encontrada na Química, com o estudo da desintegração radioativa de uma substância, por exemplo, a datação com carbono-14. Chamam-se datação as técnicas utilizadas para descobrir a idade de objetos e vestígios arqueológicos encontrados na natureza. O método utilizado com o carbono-14 (C^{14}) permite verificar com precisão a idade real da peça analisada, desde que seja de origem orgânica.

O isótopo de carbono, o C^{14} é formado em camadas superiores da atmosfera por bombardeios de raios cósmicos na terra. Os seres vivos absorvem o isótopo por meio da cadeia alimentar, e, quando o ser morre, cessa a absorção de C^{14}, e a quantidade existente no organismo passa a desintegrar-se, e é essa informação que permite determinar a idade do material analisado.

Segundo Lima (2009), a meia vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que a massa de um corpo formado por aquela substância se desintegre pela metade e pode ser calculada segundo a função $M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$ onde M_0 é a massa do corpo, α é a taxa de desintegração e t é o tempo decorrido.

Ao modificarmos o valor de onde M_0, da massa do corpo, estamos fazendo uma alteração no ponto de corte do gráfico com o eixo y. Há uma translação vertical no gráfico da função, como podemos observar na Figura 40.

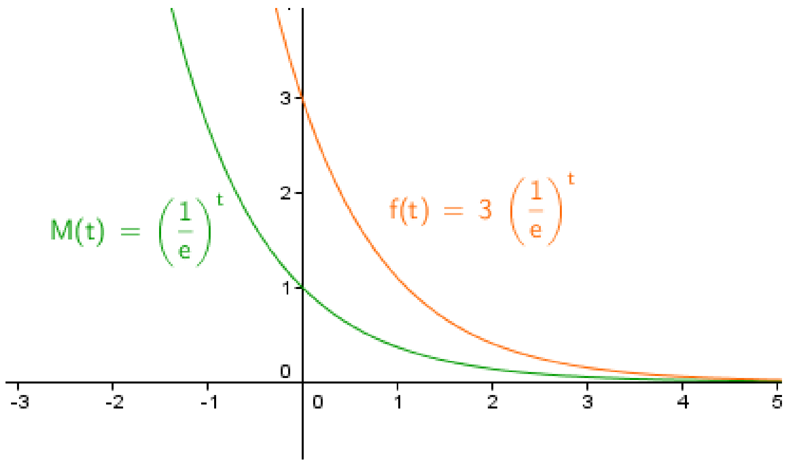


Figura 40: Deslocamento vertical.

Quando alteramos o valor de α, da taxa de desintegração da substância, estamos alterando a velocidade de decrescimento da quantidade de substância contida no corpo. Quando aumentamos este valor, o gráfico se aproxima do eixo vertical, e, portanto, aumenta sua velocidade de decaimento. Porém ao diminuirmos este valor, o gráfico se afasta do eixo vertical, fazendo com que o decaimento seja mais lento como podemos observar na Figura 41.

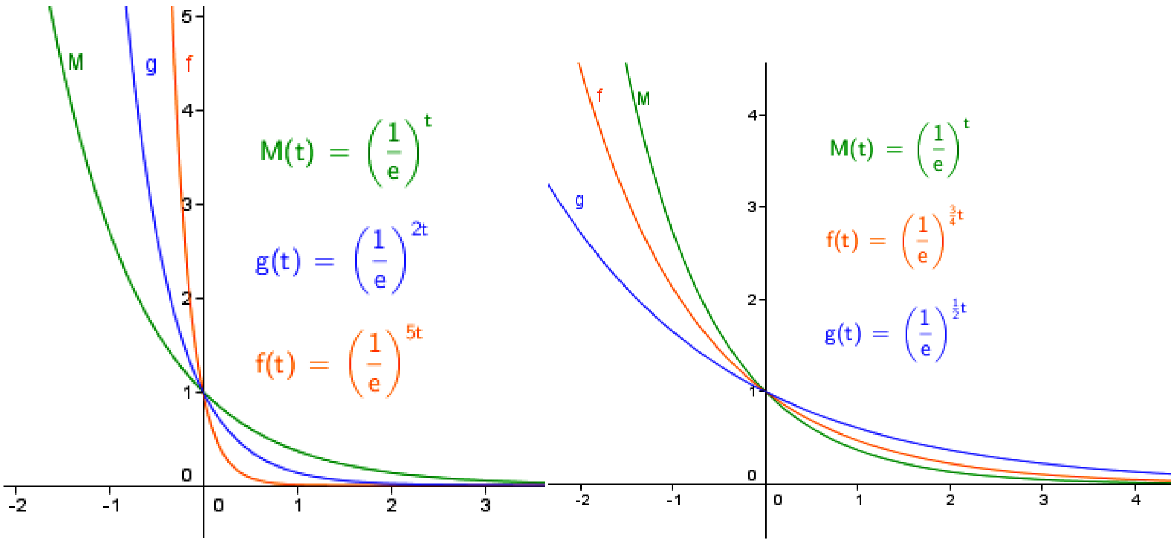


Figura 41: Velocidade de decaimento da quantidade de substância.

Na sequência, vamos apresentar os conceitos de função logarítmica e uma aplicação desta função em conceitos de Química.

1.6 Função Logarítmica

A função logarítmica é, na maioria dos livros didáticos, definida como a inversa da função exponencial. Assim como as funções exponenciais exercem um papel central em diversas áreas da ciência além da Matemática, na Química, na Física, na Biologia e na Economia. Vários problemas do nosso cotidiano e do universo científico relacionam grandezas que crescem ou decrescem através do produto por taxas constantes, exigindo o conhecimento das funções exponenciais e logarítmicas.

Lima et al. (2006, p. 194) traz o Teorema da Caracterização das Funções Logarítmicas conforme segue: *Seja* $f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ *uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) tal que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^{+}$*. Então existe* $a > 0$ *tal que* $f(x) = log_a\, x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^{+}$*.*

A demonstração deste fato pode ser encontrada na mesma referência e é dada da seguinte forma: Admitamos f crescente (o outro caso é tratado igualmente). Temos por hipótese que $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, logo $f(1) = 0$. Provemos o teorema inicialmente supondo que exista $a \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $f(a) = 1$. Depois mostraremos que isto sempre acontece, logo não é uma hipótese adicional. Como f é crescente e $f(a) = 1 > 0 = f(1)$, tem-se que $a > 1$. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} f(a^m) &= f(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \\ &= f(a) + f(a) + \cdots + f(a) \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 = m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= f(1) = f(a^m \cdot a^{-m}) \\ &= f(a^m) + f(a^{-m}) = m + f(a^{-m}), \end{aligned}$$

logo $f(a^{-m}) = -m$. Se $r = m/n$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ então $rn = m$, portanto

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f((a^r)^n) = n \cdot f(a^r)$$

e daí $f(a^r) = \frac{m}{n} = r$. Se $x \in \mathbb{R}$ é irracional então, r, s racionais tem-se:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s \Rightarrow f(a^r) < f(a^x) < f(a^s) \Rightarrow f(a^x) < s.$$

Assim, todo número racional r, menor do que x, é também menor do que $f(a^x)$ e todo número racional s, maior do que x, é também menor do que $f(a^x)$. Segue-se que $f(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(y) = log_a\, y$ para todo $y > 0$.

Consideremos agora o caso geral, em que se tem uma função crescente $g: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, tal que

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

sem mais nenhuma hipótese. Então $g(1) = 0$, como $1 < 2$, devemos ter $g(2) = b > 0$. A nova função $f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = g(x)/b$, é crescente, transforma somas em produtos e cumpre $f(2) = 1$. Logo pela primeira parte da demonstração, tem-se $f(x) = log_2\, x$ para todo $x > 0$. Isto significa que, para todo $x > 0$, vale

$$x = 2^{f(x)} = 2^{g(x)/b} = (2^{1/b})^{g(x)} = a^{g(x)},$$

com $a = 2^{1/b}$. Tomando log_a de ambos os membros da igualdade $a^{g(x)} = x$ vem, finalmente: $g(x) = log_a\, x$.

Segundo Paiva (2013), a função logarítmica é toda função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_b x$, em que b é um número real, positivo e diferente da unidade. A função é crescente quando $b > 1$ e decrescente se $0 < b < 1$. A propriedade que caracteriza uma função logarítmica é a de transformar produtos em somas, ou seja, $log_b(x_1 \cdot x_2) = log_b x_1 + log_b x_2$.

O gráfico da função logarítmica $f(x) = log_b x$ pode ser obtido por meio do gráfico de uma função exponencial, pois os gráficos de funções inversas são simétricos em relação ao gráfico da função identidade $i(x) = x$. A Figura 42 apresenta o gráfico de uma função crescente.

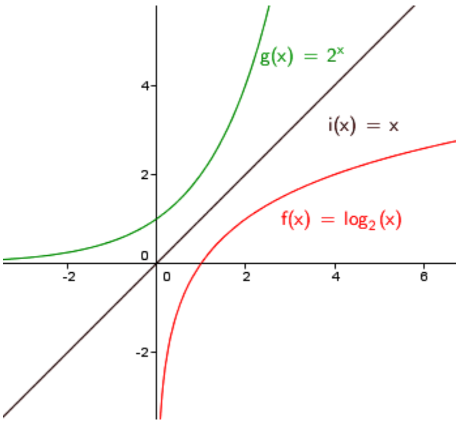


Figura 42: Função exponencial e logarítmica crescentes, simétricas em relação à função identidade.

Fugita (2009a), podemos observar que na função logarítmica crescente $f(x) = log_b x$, com $b > 1$, se $x > 1$, ao aumentarmos x indefinidamente, o valor de $log_b x$ também aumenta indefinidamente; se $0 < x < 1$ ao aproximarmos os valores de x a zero, o valor de $log_b x$ decresce indefinidamente.

Ainda segundo o mesmo autor, podemos observar que, na função logarítmica decrescente $f(x) = log_b x$, com $0 < b < 1$, se $x > 1$, ao aumentarmos x indefinidamente, o valor de $log_b x$ também decresce indefinidamente; se $0 < x < 1$, ao aproximarmos os valores de x a zero, o valor de $log_b x$ cresce indefinidamente, conforme ilustra a Figura 43.

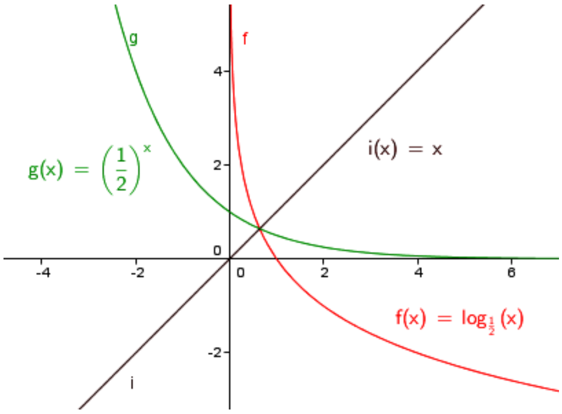


Figura 43: Função exponencial e logarítmica decrescentes, simétricas em relação à função identidade.

O gráfico da função logarítmica $f(x) = log_b x$ pode sofrer transformações se a função logarítmica for do tipo $g(x) = log_b(x + k)$, em que b é um número real, positivo e diferente de 1 e k é um número real, seu gráfico sofre uma translação horizontal de k unidades para a esquerda se $k > 0$, e para a direita se $k < 0$. A Figura 44 ilustra esse fato.

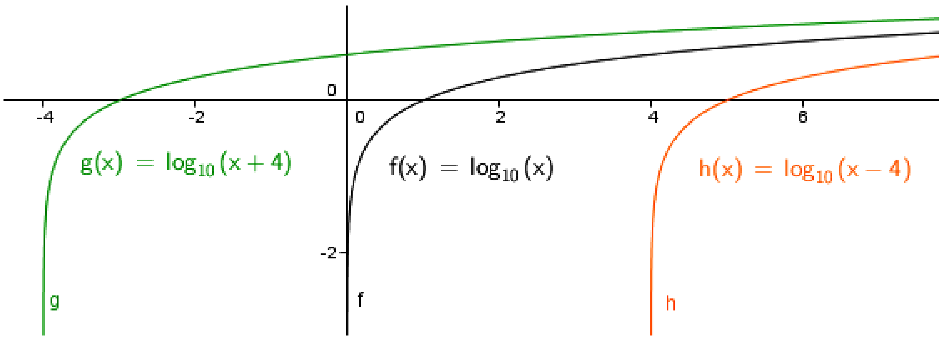


Figura 44: Translação horizontal da função logarítmica.

Outro tipo de transformação que podemos observar é a reflexão sobre o eixo x. Isso ocorre quando temos funções do tipo $g(x) = k \cdot log_b(x)$, em que b é um número real, positivo e diferente de 1 e k é um número real negativo, conforme a Figura 45.

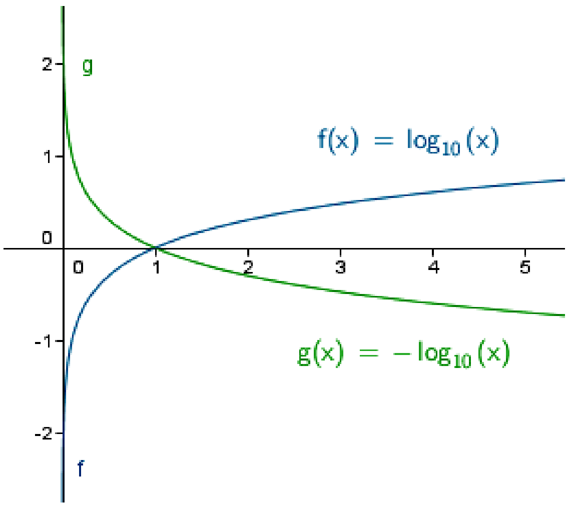


Figura 45: Reflexão da função logarítmica sobre o eixo x.

Quando alteramos k, que é um número real, o gráfico tem uma mudança de inclinação, pois a ordenada de cada ponto fica multiplicada por k, conforme ilustra a Figura 46.

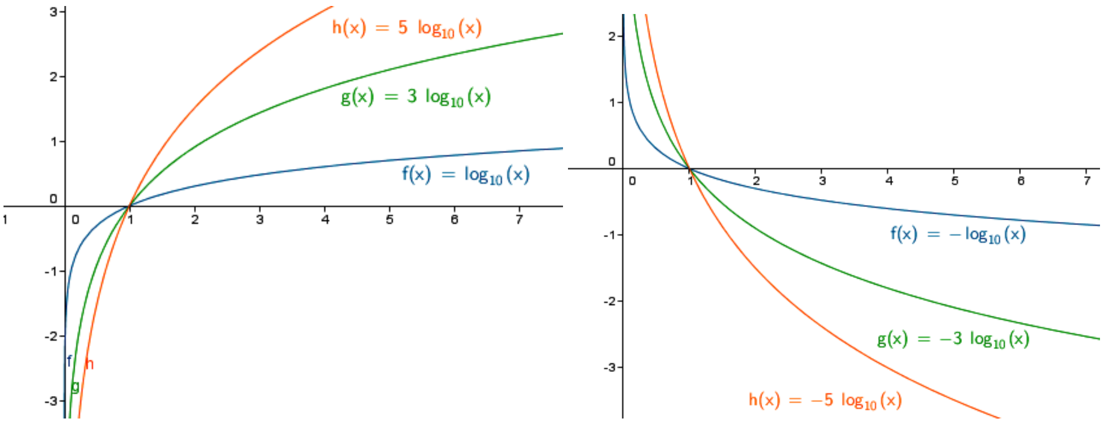


Figura 46: Mudança de inclinação da função $g(x) = k \cdot log_b(x)$.

Mais uma transformação possível no gráfico de uma função logarítmica é a translação vertical. Esta ocorre em funções do tipo $g(x) = log_b(x) + k$, onde k é um número real. Se $k > 0$ o gráfico desloca-se k unidades para cima, e se $k < 0$ o gráfico se desloca k unidades para baixo, conforme ilustra a Figura 47.

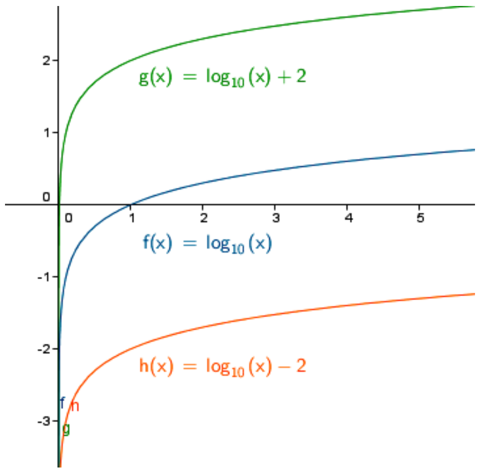


Figura 47: Translação vertical da função logarítmica.

1.6.1 Aplicação da Função Logarítmica

Uma aplicação da função logarítmica é a escala pH, que é encontrada na área Química e é bastante conhecida (escala de potencial hidrogênico de uma solução aquosa). Segundo Usberco e Salvador (2002), o termo pH foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939), com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas.

A escala de pH é logarítmica, usada para medir a acidez de uma solução, que depende da concentração de íons de hidrogênio na solução. Essa concentração é representada pelo símbolo [H^+] e mols de íons de hidrogênio por litro. A escala de pH apresenta normalmente valores que variam de zero a quatorze. A expressão usada para calcular o pH é a seguinte:

$$pH = colog[\mathrm{H}+] \text{ ou } pH = -log[\mathrm{H}+] \text{ ou } pH = \log\frac{1}{[\mathrm{H}+]}$$

O valor de [H^+] para a água pura é 10^{-7}, o que significa que o pH da água pura é 7, onde 7 representa o neutro. A substâncias cujo pH é menor que 7 são chamados ácidos. Estas substâncias têm gosto azedo. As substâncias cujo pH é maior que 7 são chamadas de bases. Estas substâncias têm gosto amargo.

Quanto menor o valor de concentração de íons de hidrogênio, mais básica é a solução, conforme ilustra a Figura 48.

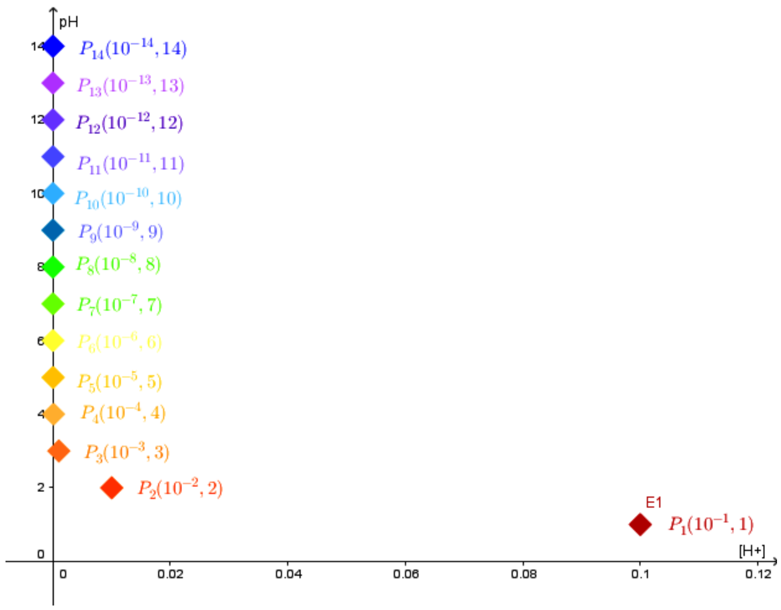


Figura 48: Gráfico da concentração de íons de hidrogênio da solução

A utilização do pH na indústria permitiu que processos como produção de vacinas, fermentações, produção de leite e derivados fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados. Assim, o pH adquiriu importância no segmento industrial, permanecendo até os dias atuais, nos quais os estudos envolvendo pH não são mais de exclusividade dos químicos, sendo realizados por profissionais de diversas áreas, como farmacêuticos, geólogos e agrônomos.

Outro método bastante utilizado em laboratório para verificar a acidez de uma substância é o papel de tornassol. Sua faixa de viragem é ampla, ou seja, a troca de cor, tornando mais difícil fazer a verificação através desta técnica, de modo que só é usado para indicar se a solução é nitidamente ácida (quando fica vermelho) ou nitidamente básica (quando ele fica azul).

A escala de pH pode ser vista em cores conforme a Figura 49.

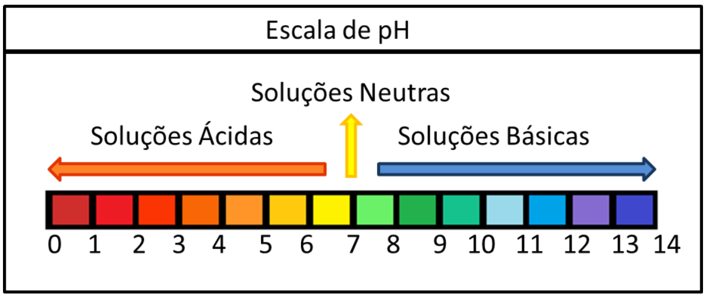


Figura 49: Escala de pH.

Na sequência, vamos estudar a função Seno, importante função periódica presente na representação de uma onda sonora.

1.7 Função Seno

Muitos fenômenos físicos e sociais de comportamento cíclico, ou periódico podem ser modelados por funções trigonométricas. É comum encontrarmos situações relacionadas à aplicação desse conteúdo matemático em campos da ciência como Acústica, Astronomia, Economia e Medicina.

Conforme Leonardo (2013b), uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada função periódica quando existe um número real positivo p tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x+p)$. Onde o menor valor positivo de p que satisfaz a igualdade é chamado de período de f.

A função seno surge com frequência na modelagem matemática de fenômenos naturais que apresentam periodicidade. Segundo Fugita (2009b), a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é denominada função seno quando associa cada número real x ao número real $sen(x)$, $f(x) = sen(x)$. Sua representação gráfica é a curva chamada senoide. A Figura 50 apresenta uma ilustração dessa curva.

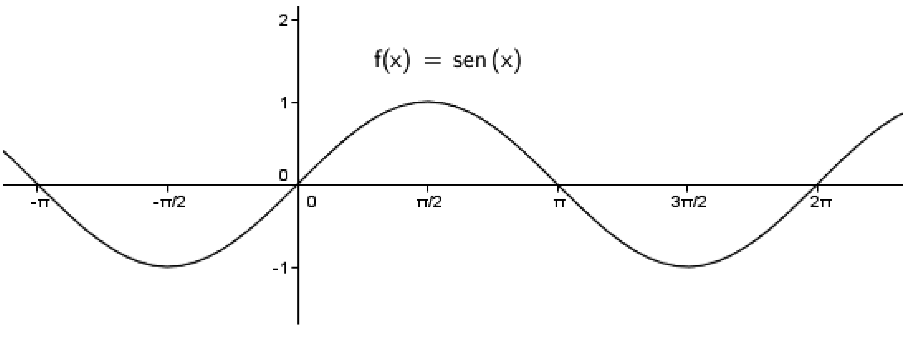


Figura 50: Gráfico da função seno.

Podemos observar algumas características importantes a partir do gráfico da função seno: temos que a função é limitada e também que a função é periódica e seu período é 2π.

Chamamos de amplitude do gráfico a metade da diferença entre os valores das ordenadas máxima e mínima da função. No caso da função representada na Figura 51, a amplitude é igual a 1.

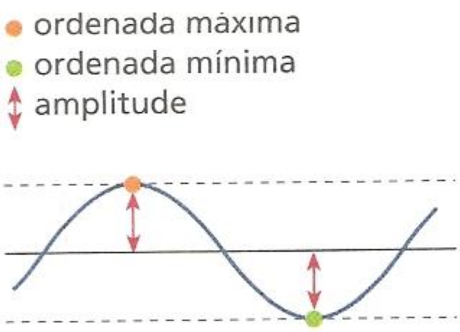


Figura 51: curva identificando a amplitude de uma onda.

Fonte: Leonardo (2013b, p. 47)

As funções trigonométricas geralmente são combinadas com outras funções, e vamos estudar o comportamento de algumas delas.

Apresentaremos um exemplo da transformação gráfica $g(x) = f(x) + c$ citada anteriormente neste texto, que apresenta como efeito geométrico transladar um gráfico verticalmente.

O gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a + sen(x)$, com $a \in \mathbb{R}$, pode ser obtido transladando o gráfico da função seno verticalmente em $|a|$ unidades, de maneira que, quando $a > 0$, o deslocamento é para cima, e quando $a < 0$, o deslocamento é para baixo. Podemos observar os exemplos na Figura 52.

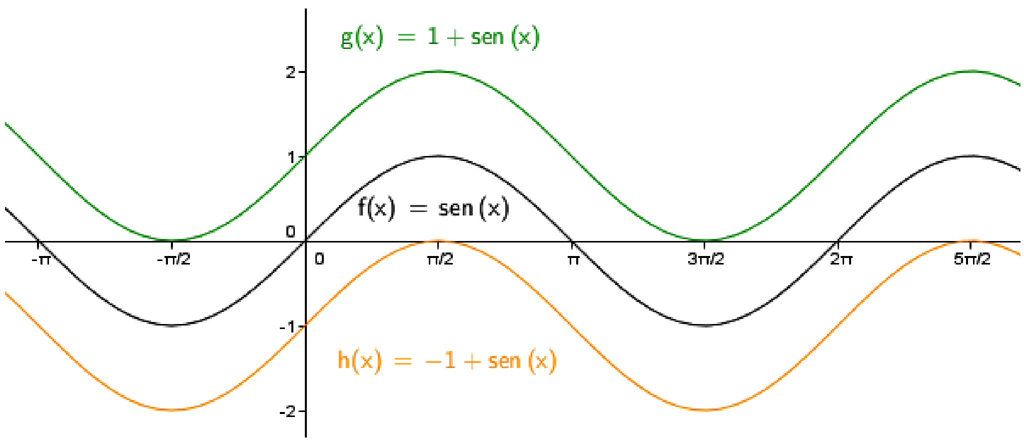


Figura 52: Deslocamento vertical.

A constante a altera a imagem da função, como podemos observar na Figura 47, não há modificação no período da função, mas há alteração em sua imagem. A imagem da função g é $Im(g) = [0,1]$, e que a imagem da função h é $Im(h) = [-1,0]$.

Um exemplo da transformação gráfica $g(x) = c \cdot f(x)$, citada anteriormente neste texto, que apresenta como efeito geométrico alongar ou comprimir verticalmente o gráfico da função.

Segundo Fugita (2009b), o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = b \cdot senx$, com $b \in \mathbb{R}$, tem amplitude igual a $|b|$. Além disso, os valores máximo e mínimo do conjunto imagem são, respectivamente, b e $-b$. Podemos observar, nos exemplos apresentados na Figura 53 que não há alteração no período da função.

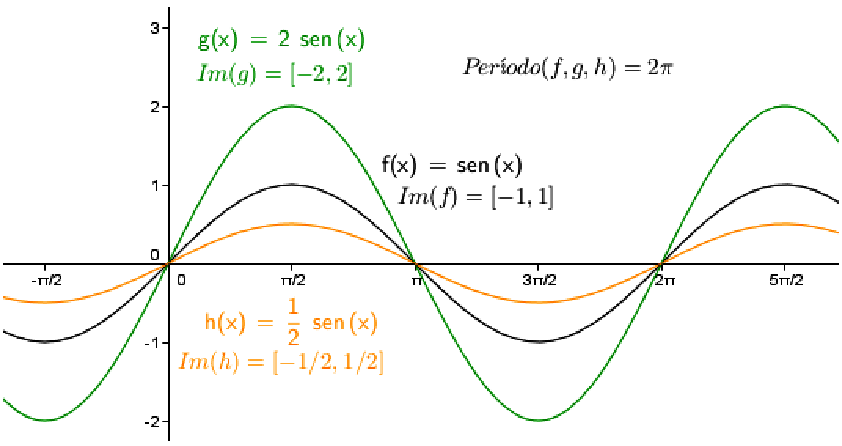


Figura 53: Gráficos de funções da forma $f(x) = b \cdot senx$.

Souza (2010b) afirma que a constante b amplia verticalmente o gráfico da função se $|b| > 1$ e comprime verticalmente se $|b| < 1$. A constante b altera a imagem da função.

Os gráficos das funções do tipo $f(x) = b \cdot senx$ e $f(x) = -b \cdot senx$ são simétricos em relação ao eixo das abscissas. A Figura 54 ilustra o gráfico das funções $g(x) = 2 \cdot senx$ e $h(x) = -2 \cdot senx$ como um exemplo desse tipo de função.

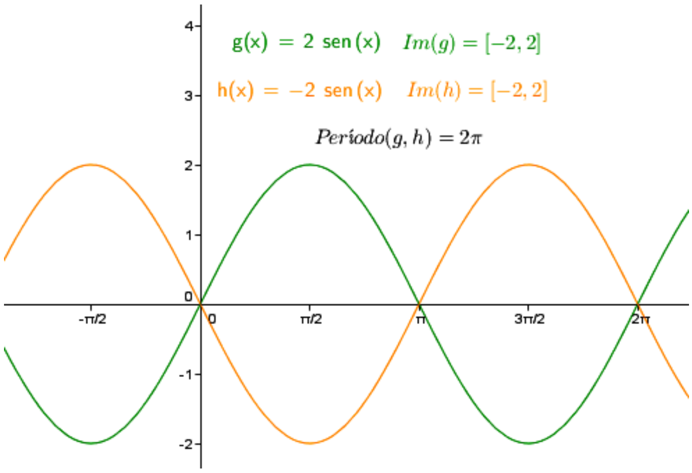


Figura 54: Gráficos das funções $f(x) = b \cdot senx$ e $f(x) = -b \cdot senx$

A seguir mostraremos um exemplo da transformação gráfica $g(x) = f(c \cdot x)$ citada anteriormente neste texto, que apresenta como efeito geométrico alongar ou comprimir horizontalmente o gráfico da função.

Conforme Fugita (2009b), o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = sen(c \cdot x)$, com $c \in \mathbb{R}$, tem período igual a $P = \frac{2\pi}{|c|}$. Ainda Souza (2010b) diz que a constante c amplia o período da função se $|c| < 1$ e comprime se $|c| > 1$. Podemos observar, nos exemplos na Figura 55, que a imagem das funções não se altera.

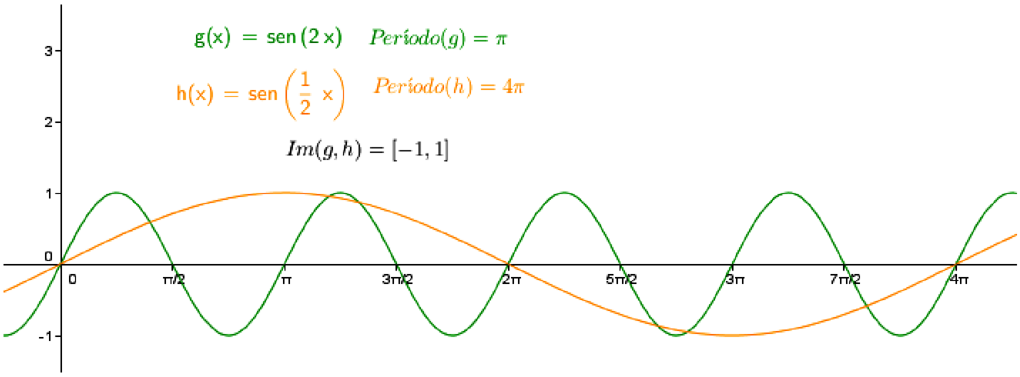


Figura 55: Exemplos de funções do tipo $f(x) = sen(c \cdot x)$

A seguir, mostraremos um exemplo da transformação gráfica $g(x) = f(x + c)$ citada anteriormente neste texto, que apresenta como efeito geométrico transladar horizontalmente o gráfico da função.

Fugita (2009b) ensina que o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = sen(x + d)$, com $d \in [0,2\pi]$, pode ser obtido deslocando-se horizontalmente o gráfico da função seno em $|d|$ unidades para esquerda, quando $d > 0$, ou para direita, quando $d < 0$. Neste caso, não há alteração na imagem nem no período da função, conforme apresenta a Figura 56.

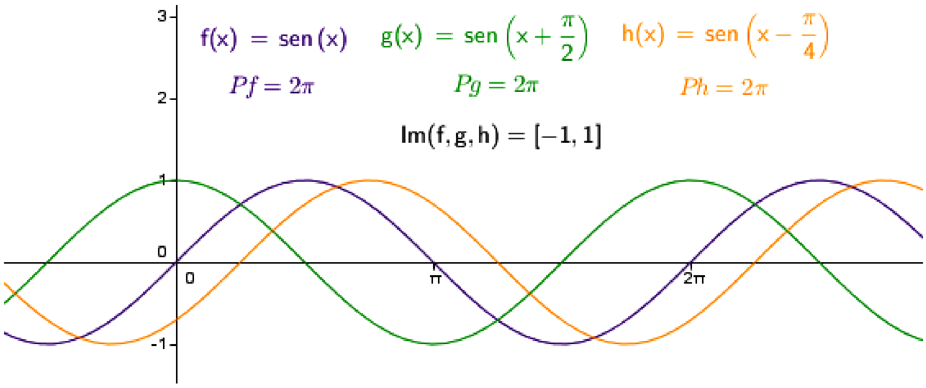


Figura 56: Deslocamento horizontal da função seno.

Notamos, na Figura 56, que a função $g(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$ deslocou-se $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda em relação ao gráfico da função $f(x) = sen\, x$. Já a função $h(x) = sen(x - \frac{\pi}{4})$ deslocou-se $\frac{\pi}{4}$ unidades para a direita em relação ao gráfico da função $f(x) = sen\, x$. As duas funções mantêm o mesmo período e imagem da função seno.

Podemos ter todas as variações citadas anteriormente numa mesma função e assim teremos uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e $c \neq 0$ e $d \in [0,2\pi]$, onde a imagem dessa função é dada por $[a - |b|, a + |b|]$ conforme o ilustrado na Figura 57.

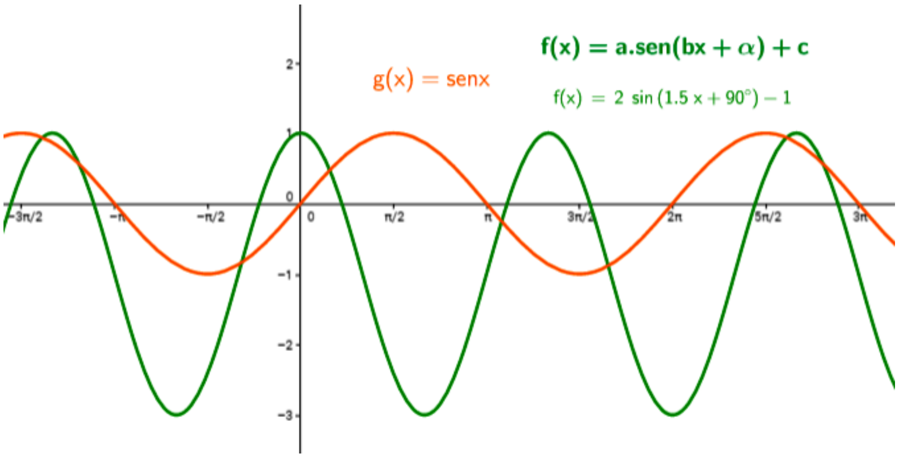


Figura 57: Gráfico de uma função do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ comparado à função $g(x) = senx$.

Esse tipo de função senoidal é encontrado na modelagem de problemas físicos como, por exemplo, na descrição da equação de uma onda. Vamos agora estudar um pouco mais sobre essa aplicação.

1.7.1 Aplicação Função Seno

Segundo Sant'anna (2010b), podemos imaginar que estamos segurando a extremidade de uma corda, mantendo-a tensionada, sendo que a outra extremidade fica presa a uma parede. Se fizermos um movimento brusco com a mão na direção vertical, veremos essa perturbação se propagar pela corda. Essa propagação é também chamada de pulso e é uma reprodução do movimento da mão pelos pontos da corda.

Ainda segundo o mesmo autor, se fizermos uma sequência de movimentos verticais com a mão, provocaremos uma série de pulsos propagando-se ao longo da corda. Essa série de perturbações forma o que chamados de onda que pode ser observada na Figura 58.

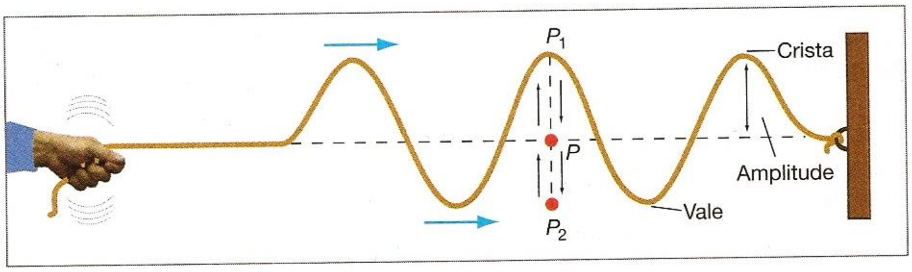


Figura 58: Representação de uma onda ao longo de uma corda.
Fonte: Sant'anna (2010b, p.381)

Os pontos mais altos dos pulsos são chamados de cristas da onda, e os pontos mais baixos dos pulsos são chamados de vales da onda. A distância de P a P_1 ou de P a P_2 é chamada de amplitude da onda (A). O número de vezes por segundo que o ponto da corda realiza a trajetória completa (saindo de P e retornando a P) define a frequência de vibração desse ponto e, portanto, a frequência da onda (f). O intervalo de tempo gasto para realizar uma oscilação completa é o período (T) da onda.

Durante um período, a onda percorre uma certa distância, denominada comprimento de onda (λ), que pode ser determinado através da distância entre duas cristas ou dois vales.

Com essas definições, podemos escrever a equação da velocidade da onda, que é determinada pela velocidade de propagação dos pulsos no meio, que pode ser determinado por $v = \frac{L}{\Delta t}$, onde L é o comprimento da corda e Δt o tempo gasto pelo pulso. Se a onda percorre uma distância λ em um intervalo de tempo T, então $L = \lambda$ e $\Delta t = T$. Considerando a velocidade da onda constante e que $f = \frac{1}{T}$, podemos escrever: $v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow v = \lambda \cdot f$.

As equações da onda são descritas pela Equação da Onda:

$$F(x,t) = Asen(kx - \omega t),$$

onde a amplitude A da onda medida em metros; ω é a frequência angular calculada por $\omega = 2\pi f$; f é a frequência quantificada em hertz (Hz); $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda angular; λ é o comprimento da onda medido em metros (equivale a uma volta no ciclo trigonométrico); t é o tempo; x é a posição e v é a velocidade de propagação de uma onda em um meio é constante e determinada por $v = \lambda f$. Esta função não é uma função real a variáveis reais, mas sim uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mas como no Ensino Médio não trabalhamos este tipo de função, não vamos considerar o tempo como uma variável, portanto, trabalharemos a "Equação da Onda" de forma mais simples onde o tempo é uma constante logo a função considerada será $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $F(x) = Asen(kx - \omega t)$.

Sendo assim, ao realizarmos o estudo gráfico de cada parâmetro da função que descreve a equação de uma onda, não considerando o tempo como uma variável, podemos perceber as variações do som que ocorrem nas qualidades fisiológicas do som: altura e intensidade.

A altura do som está relacionada com sua frequência. Quanto maior a frequência sonora, mais agudo é o som, e quanto menor a frequência mais grave é o som.

A intensidade sonora está ligada à amplitude das vibrações, e, portanto, à energia transportada pela onda. Esta qualidade difere o som forte (grande amplitude é equivalente a muita energia que é igual a volume alto) e som fraco (pequena amplitude que equivale a pouca energia e é igual a volume baixo).

Podemos observar, na Figura 59, baseada em Bulegon e Trevisan (2011), alguns elementos da função que descreve uma onda.

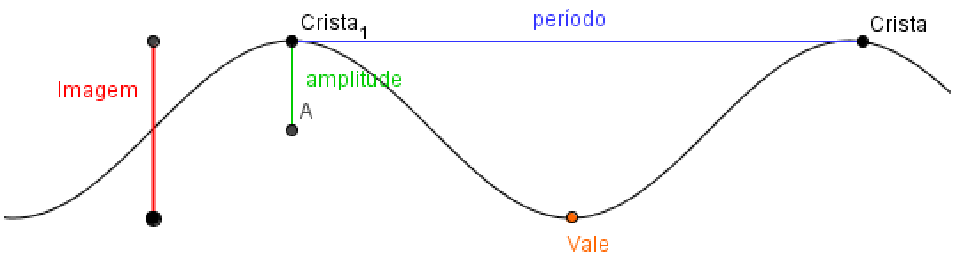


Figura 59: Elementos de uma onda.

Período é o intervalo necessário para completar um ciclo completo; imagem é o intervalo de variação do valor de $f(x)$, intervalo de variação entre um vale e uma crista; amplitude é a metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima do gráfico; crista é o ponto máximo que a função atinge e vale é o ponto mínimo que a função atinge.

Comparando as funções seno $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$ e a equação da onda $F(x) = Asen(kx - \omega t)$ podemos perceber que: a amplitude tem a mesma função do parâmetro b, ou seja, a constante A amplia verticalmente o gráfico da função se $|A| > 1$ e comprime verticalmente se $|A| < 1$, logo a amplitude A altera a imagem da função. O parâmetro $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, que é o número de onda angular, tem a mesma função do parâmetro c, a constante k amplia o período da função se $|k| < 1$ e comprime se $|k| > 1$, com o novo período $P = \frac{2\pi}{|k|}$. A constante ωt onde ω é a frequência angular calculada por $\omega = 2\pi f$ e t é o tempo, que neste caso não está sendo considerado como uma variável, tem a mesma função do parâmetro d da função seno. A constante ωt translada o gráfico da função em $|\frac{\omega t}{k}|$ unidades para a esquerda se $\omega t > 0$, ou para a direita se $\omega t < 0$.

No que segue, apresentaremos a metodologia utilizada e as propostas de atividades onde pretendemos fazer algumas conexões entre as disciplinas de Matemática e da Área da Ciência da Natureza.

2 METODOLOGIA

A proposta apresentada nesta dissertação foi elaborada para aplicação no Ensino Médio Politécnico, que visa ao trabalho integrado entre a Matemática e as disciplinas da área das Ciências da Natureza.

O conteúdo de funções é visto no primeiro e segundo anos do Ensino Médio, por isso são sugeridas quatro atividades para o primeiro ano e uma para o segundo ano. Porém, acreditamos que todas são aconselhadas para o terceiro ano, uma vez que servem de revisão para concursos de acessos às universidades, como o ENEM.

As atividades propostas requerem um conhecimento mínimo sobre funções, que possivelmente o aluno tenha adquirido nas séries finais do Ensino Fundamental, além disso, os conhecimentos sobre conjuntos numéricos, intervalos, representação de pontos no plano cartesiano e regras básicas de álgebra serão necessários para realizá-las.

O projeto foi elaborado e aplicado no final do ano letivo de 2014, em uma escola estadual de Ensino Médio Politécnico em Santa Maria, do Estado do Rio Grande do Sul, que dispunha de uma sala de informática com 15 computadores. Porém, destes computadores, apenas sete estavam funcionando e tinham acesso à internet.

Cada oficina proposta trata de um diferente conteúdo de funções, logo podem ser trabalhadas individualmente conforme a necessidade de cada professor. Na aplicação na escola, cada oficina foi ofertada em um dia e para uma turma diferente de alunos, logo abrangemos cinco turmas entre primeiros e segundos anos do ensino médio, dentro do próprio turno em que estudavam. No caso do primeiro ano no turno da tarde e o segundo ano no turno da manhã, as atividades não tiveram caráter avaliativo, mas serviram como uma revisão de conteúdos já estudados durante o ano letivo.

As funções trabalhadas em cada aplicativo produzido pela autora, foram definidas em termos de seus parâmetros, par que estes pudessem ser manipulados dinamicamente por meio de controles deslizantes. Este recurso permite ao aluno visualizar diferentes gráficos de forma dinâmica e assim perceber suas características variacionais como crescimento, concavidade, extremos, entre outros.

Para o desenvolvimento das atividades, foi disponibilizado material impresso para as duplas, que continha os enunciados das atividades, onde os alunos deveriam escrever suas respostas. Para facilitar, foram disponibilizadas as atividades em formato “*.pdf” e os arquivos do aplicativo GeoGebra no Blog construído pela autora do trabalho (Kessler (2014)), que pode ser acessado pelo link http://analuizakessler.blogspot.com.br/. A Figura 60 apresenta a tela inicial do referido Blog.

Figura 60: Tela inicial do Blog produzido pelo autor.

As atividades foram dispostas através de links facilmente acessados por meio da internet. A Figura 61 ilustra uma das atividades disponibilizadas.

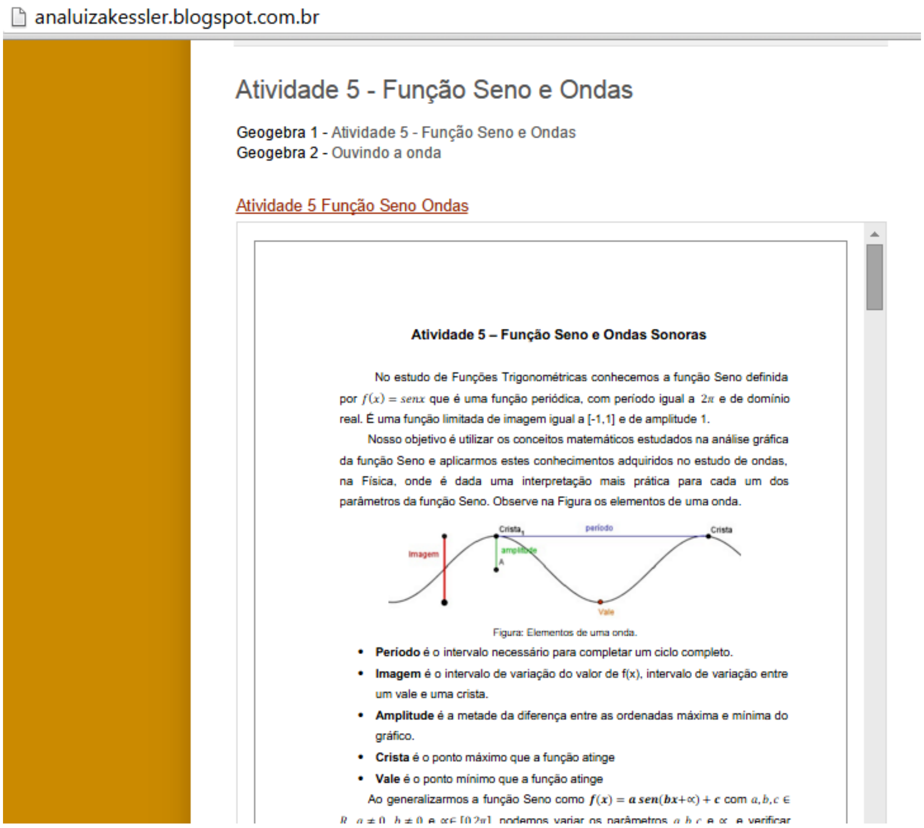


Figura 61: Atividade no Blog

Os alunos foram orientados pela professora (e autora desse trabalho) a abrir o arquivo previamente elaborado no software GeoGebra correspondente a cada atividade que seria executada.

Após a aplicação, no final de 2014, percebemos a necessidade de fazer adaptações e modificações nas atividades, tanto na parte escrita quanto na implementação concebida via o aplicativo. Assim, foi realizada uma nova aplicação das atividades de setembro a outubro de 2015 na mesma escola, agora para grupos de 15 a 20 alunos.

No ano de 2015, a escola recebeu equipamentos para dois novos laboratórios de informática. No momento, cada laboratório possui 20 netbooks. Mas continuamos com as mesmas dificuldades encontradas no ano anterior, pois nem todos os aparelhos funcionam, e alguns não possuem acesso a internet. Desta forma, optamos por desenvolver as atividades em duplas nos mesmos moldes das oficinas anteriores.

Salientamos que, para fim de dissertação, optamos por apresentar o relato da aplicação das oficinas e atividades realizadas em 2015, visto que não existiu a necessidade de adaptá-las novamente. Acreditamos que essa opção se justifica, pois nosso intuito é apresentar uma proposta funcional aos professores que venham a realizar a mesma proposta.

3 PROPOSTA DE ABORDAGEM E RELATO DE APLICAÇÃO

3.1 Introdução

Nota-se frequentemente a necessidade de fazermos ligações entre as diferentes disciplinas e os assuntos estudados na escola básica, por isso e também pela imposição pelo currículo integrado, existente nas escolas públicas de Ensino Médio do estado do Rio Grande do Sul, surgiu a necessidade de fazer uma ligação entre o estudo da Matemática com as disciplinas da área da Natureza, uma vez que estas necessitam de conceitos matemáticos para serem desenvolvidas. Nada mais natural então que se utilizem dos conhecimentos compartilhados para tornar os conteúdos mais atrativos e conectados à realidade dos alunos. A seguir, apresentaremos cinco atividades que foram propostas aos alunos acompanhada de seus objetivos (conforme o Quadro 2), o relato de experiência nas turmas onde foram aplicadas e as análises dos resultados.

Atividade	Descrição	Objetivo	Duração da atividade e Ano indicado
Função Afim e Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)	Esta atividade relaciona as equações e os gráficos da função Afim com o Movimento Retilíneo Uniforme estudado na Física.	Fazer com que o aluno consiga perceber que a variação do espaço do MRU é uma função afim e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada na matemática. Portanto a atividade deve levar o aluno a concluir que os conhecimentos utilizados na Matemática para o estudo gráfico da função afim podem ser transferidos para a Física e assim tornar mais simples o estudo do MRU.	2 horas aula Indicado para alunos do 1º ano do Ensino Médio.
Função Quadrática e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)	Esta atividade estuda a variação dos parâmetros da função quadrática na parábola e relaciona-os com os parâmetros da função horária do espaço no MRUV.	Fazer com que o aluno consiga perceber que a variação do espaço do MRUV é uma função quadrática e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada na Matemática. Fazer com que o aluno identifique que os conhecimentos utilizados na matemática para o estudo gráfico da função quadrática podem ser transferidos para a Física e assim tornar mais fácil o estudo do MRUV.	2 horas aula Indicado para alunos do 1º ano do Ensino Médio.
Função Exponencial e Desintegração do Carbono-14 e Cultura de bactérias	Esta atividade desenvolve os conceitos da função exponencial a partir da análise gráfica e, após, faz duas aplicações, uma na Química, envolvendo a desintegração do Carbono-14 de um organismo e outra na Biologia, no estudo do número de bactérias de uma cultura.	Fazer com que o aluno consiga perceber que a expressão que representa o número de bactérias de uma cultura e a desintegração do Carbono-14 são funções exponenciais e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada na Matemática. Levar o aluno a concluir que os conhecimentos utilizados na matemática para o estudo gráfico da função exponencial podem ser transferidos para a Biologia e para a Química e assim facilitar a interpretação do problema.	2 horas aula Indicado para alunos do 1º ano do Ensino Médio.
Função Logarítmica e Escala pH	Esta atividade desenvolve os conceitos da função logarítmica por meio da análise gráfica e, após, faz uma aplicação na Química, envolvendo a Escala de pH de uma solução.	Fazer com que o aluno faça o estudo gráfico dos parâmetros da função logarítmica e use os conceitos dessa função estudada na Matemática, no estudo do comportamento da função da escala de pH de uma substância estudada na Química e assim facilitar a interpretação do problema.	1 hora aula Indicado para alunos do 1º ano do Ensino Médio.
Função seno e Ondas sonoras	Esta atividade desenvolve os conceitos da função periódica seno por meio da sua análise gráfica. Após, é feita uma aplicação na Física no estudo das qualidades fisiológicas do som a partir da Equação da Onda. Acompanha esta atividade uma atividade prática audível elaborada no GeoGebra.	Fazer com que o aluno consiga perceber que a expressão que modela uma onda sonora é uma função senoidal e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada em Matemática. Permitir que o aluno perceba que os conhecimentos utilizados na Matemática para o estudo gráfico da função seno podem ser transferidos para a Física e assim tornar mais fácil o seu estudo.	2 horas aula. Indicado para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Quadro 2: Descrição de atividades.

A seguir, além da apresentação das atividades, colocamos as respostas esperadas, para posterior comparação com as respostas obtidas. Quanto às últimas, foram selecionadas aquelas que consideramos mais significativas no contexto do trabalho.

3.2 Oficina 1 - Função Afim e Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

Como descrito no Quadro 2, pretendemos que, por meio dessa oficina, o aluno consiga perceber que a expressão dada na disciplina de Física que modela o MRU é uma função afim.

Esta oficina foi desenvolvida com um grupo de 10 alunos de 1º ano do turno da tarde, durante dois períodos. Os alunos tinham noção do conteúdo de função do primeiro afim por terem trabalhado nas séries finais do ensino fundamental, mas ainda não tinham visto no Ensino Médio, porém já haviam trabalhado na disciplina de Física o conteúdo de MRU.

A interface que foi apresentada aos alunos no GeoGebra foi criada pela autora e pode ser visualizada na Figura 62.

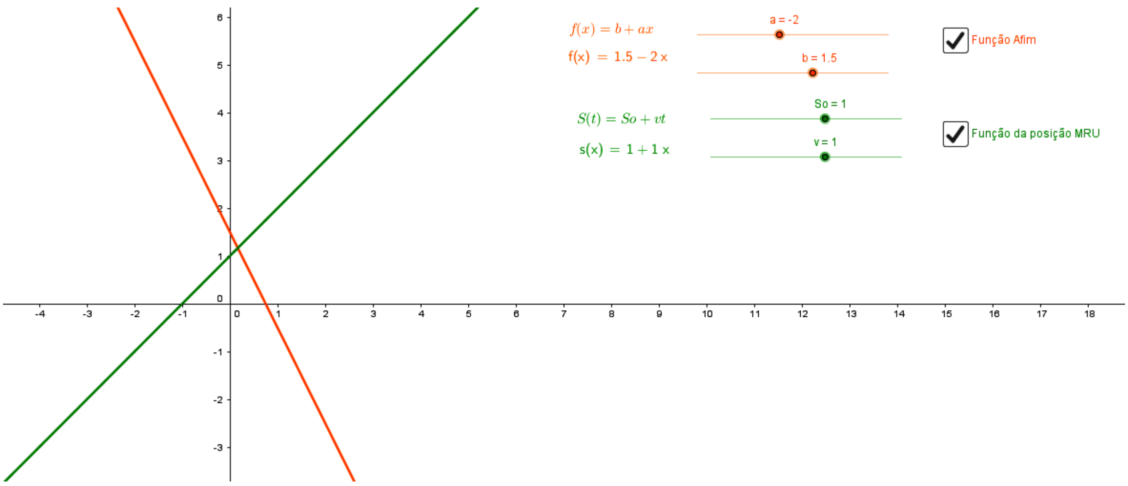


Figura 62: Aplicativo criado no GeoGebra relativo a Atividade 1.

A descrição completa e detalhada da atividade encontra-se no anexo. Na sequência, apresentaremos a oficina desenvolvida com os alunos, seguida das respostas esperadas.

Ao entrar no laboratório de informática, os alunos encontraram computadores com as telas abertas no Blog com as atividades e foram orientados a abrir o arquivo referente à atividade a ser executada. A seguir, modificando os parâmetros através dos controles deslizantes e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível responder às questões abaixo descritas observando dos gráficos gerados na tela após a manipulação dos controles deslizantes:

1. Como se comporta o gráfico da função $f(x) = b + ax$ quando $a > 0$, crescente ou decrescente?

Resposta esperada: *A função é crescente. Podemos observar um exemplo de gráfico a ser obtido na Figura 63.*

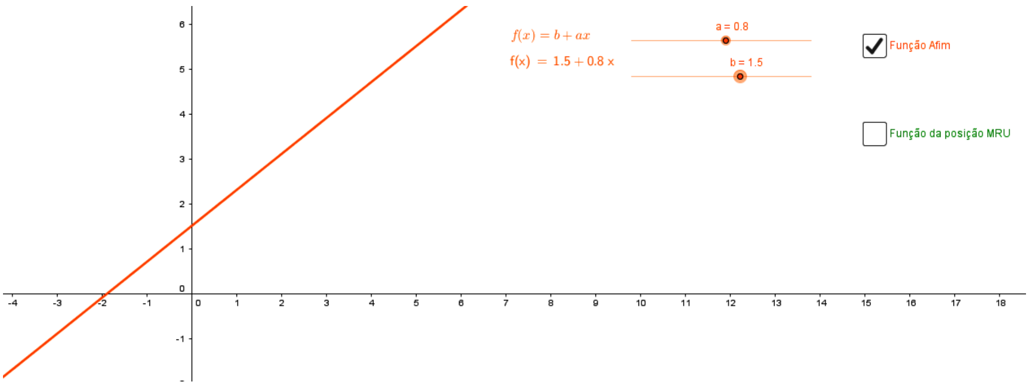


Figura 63: Gráfico de uma função crescente.

O aluno deverá modificar o valor do parâmetro a através do controle deslizante.

a) O que ocorre no gráfico quando aumentamos o valor de a, com $a > 0$?

Resposta esperada: *Ao aumentarmos o valor de a temos o gráfico mais próximo ao eixo y, ou seja, aumentamos a inclinação do gráfico em relação ao eixo x.*

b) O que ocorre com o gráfico quando <u>diminuímos</u> o valor de a, com $a > 0$?

Resposta esperada: <u>*Ao diminuímos o valor de a temos o gráfico mais próximo ao eixo x, ou seja, diminuímos a inclinação do gráfico em relação ao eixo x.*</u>

Podemos observar que os alunos conseguiram perceber essa relação, conforme apresenta a Figura 64.

a)

Quando aumentamos o A ele fica na vertical
aproximando-se do y

"Quando aumentamos o a ele fica na vertical aproximando-se do y."

b)

Quando diminuimos o valor de A ele
aproximase do Horizontal

"Quando diminuímos o valor de a ele aproxima-se da horizontal."

Figura 64: Resposta 1.a) e 1.b) de uma dupla de alunos.

2. Como se comporta o gráfico da função $f(x) = b + ax$ quando $a < 0$, crescente ou decrescente?

Resposta esperada: <u>*Neste caso a função é decrescente. Podemos observar um exemplo de gráfica a ser obtido na Figura 65.*</u>

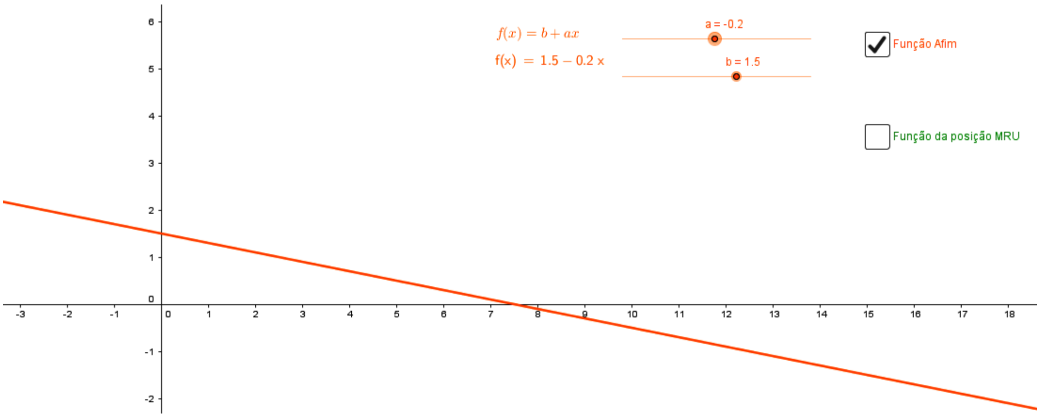


Figura 65: Gráfico de uma função decrescente.

a) O que ocorre no gráfico da função $f(x) = b + ax$ quando aumentamos o valor de a, com $a < 0$, ou seja, quando aproximamos o valor do parâmetro "a" à zero?

Resposta esperada: *Ao aumentarmos o valor de a, com $a < 0$, temos o gráfico mais próximo ao eixo x, ou seja, aumentamos a inclinação do gráfico em relação ao eixo x.*

b) O que ocorre no gráfico quando diminuímos o valor de a, com $a < 0$?

Resposta esperada: *Ao diminuirmos o valor de a, com $a < 0$, temos o gráfico mais próximo ao eixo y, ou seja, diminuímos a inclinação do gráfico em relação ao eixo x.*

A Figura 66 apresenta a resposta de uma dupla de alunos para essa situação. Percebemos, a partir das respostas (semelhantes às apresentadas), que os alunos conseguiram atingir o objetivo esperado.

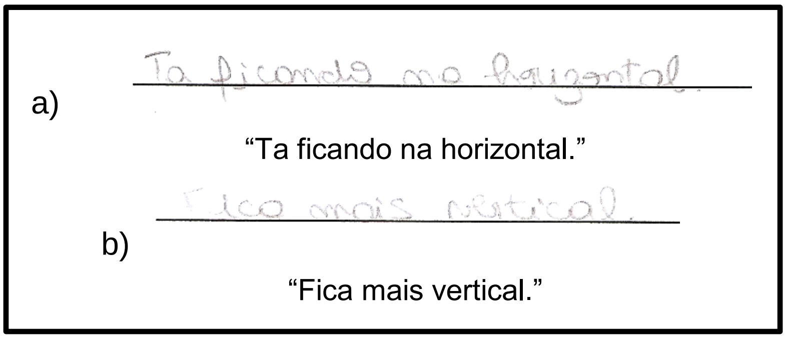


Figura 66: Resposta 2.a) e 2.b) de uma dupla de alunos.

3. O que podemos observar no gráfico quando $a = 0$? Como se chama essa reta?

   Resposta esperada: *O gráfico torna-se uma reta paralela ao eixo x. É o gráfico de uma função constante. Podemos observar um exemplo desse tipo de gráfico na Figura 67.*

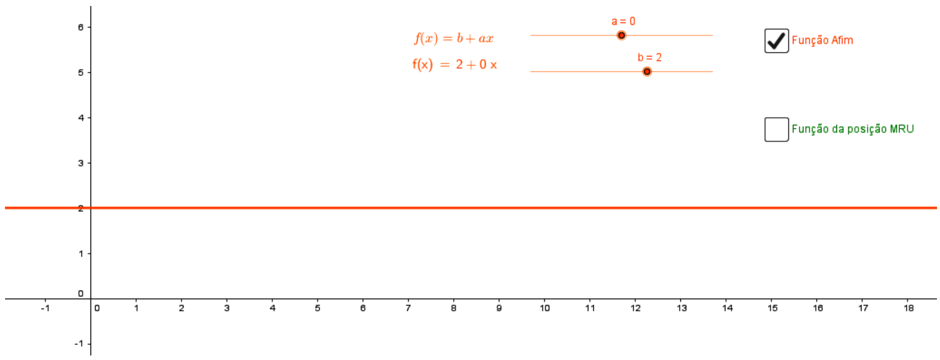


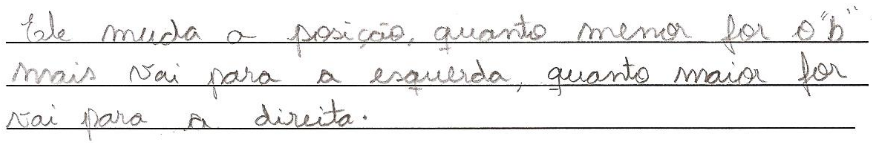
Figura 67: Gráfico da função constante.

4. O que ocorre no gráfico da função $f(x) = b + ax$ quando variamos o valor do parâmetro b? Se $b > 0$ e se $b < 0$?

   Resposta esperada: _Ocorre um deslocamento vertical na função. O valor de b é o valor da interseção do gráfico com o eixo y. Se b é positivo o ponto de interseção da função com o eixo y está acima do eixo x, caso contrário o ponto está abaixo de x. Se $b = 0$ o ponto de interseção é a origem._

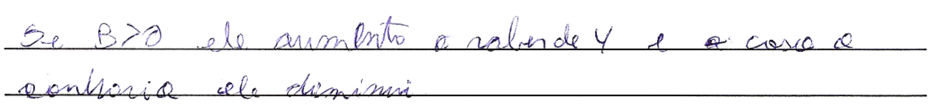
Neste momento da oficina, esperávamos que os alunos mantivessem o coeficiente a como um valor qualquer e modificassem os valores do coeficiente b. Alguns alunos tiveram um pouco de dificuldade em visualizar o deslocamento do gráfico em relação ao eixo y, citaram o deslocamento em relação à esquerda e direita (conforme a Figura 68 (1)), mas a maioria conseguiu, com o auxílio da professora, no sentido dos alunos observarem o as alterações do gráfico em relação ao eixo y, observar o deslocamento vertical (conforme a Figura 68 (2)).

(1)



"Ele muda a posição, quanto menor for o "b" mais vai para a esquerda, quanto maior for vai para a direita."

(2)



"Se o b>o ele aumenta o valor de y e o caso contrário ele diminui."

Figura 68: Respostas de duas duplas de alunos para a pergunta 4.

3.2.1 Aplicação na Física – Movimento Retilíneo Uniforme

Para a segunda etapa da atividade, a aplicação na Física os alunos foram instruídos a ativar a caixa Função da posição do MRU no arquivo disponibilizado e construído por meio do aplicativo GeoGebra e desativar a caixa Função Afim, pois esta segunda etapa visa trabalhar a variação do espaço do MRU, que é uma função Afim.

1. Ao relacionar a função horária do espaço $\boldsymbol{s = s_0 + vt}$ com a função afim $\boldsymbol{f(x) = b + ax}$ podemos dizer que a posição inicial s_0 do corpo se comporta conforme o comportamento de que parâmetro? E a velocidade escalar v que é constante se comporta como que parâmetro?

Resposta esperada: *A posição inicial se comporta como o parâmetro b e a velocidade é o parâmetro a. Podemos visualizar um exemplo de equação do MRU na Figura 69.*

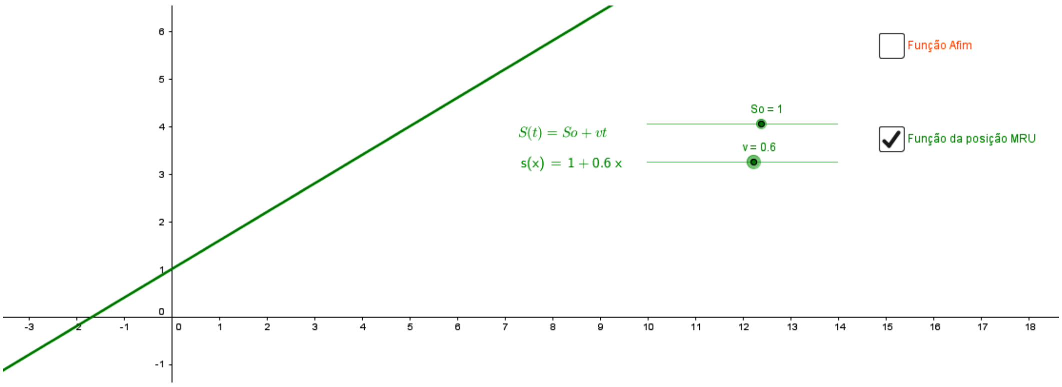


Figura 69: Gráfico da função horária do espaço do MRU

2. No MRU quando um corpo se desloca no mesmo sentido da orientação da trajetória dizemos que o movimento é classificado como **progressivo**, em comparação a função afim, diríamos que a função é **crescente**, logo podemos concluir que a velocidade é positiva ou negativa?

Resposta esperada: *A velocidade é positiva.*

3. No MRU, quando um corpo se desloca no sentido contrário ao da trajetória, dizemos que o movimento é **retrógrado**, em comparação à função afim, diríamos que a função é **decrescente**, logo podemos concluir que a velocidade é positiva ou negativa?

Resposta esperada: *A velocidade é negativa.*

4. No MRU, quando um corpo permanece parado, em repouso, dizemos que sua velocidade é nula, ou seja, $v = 0$. Em comparação ao gráfico da função do afim, o que podemos dizer sobre o valor de a e como chamamos o gráfico desse tipo? O que podemos concluir sobre o gráfico de um corpo em repouso no MRU?

Resposta esperada: *O gráfico da função afim onde $a = 0$ é chamado de função constante. O gráfico de um corpo em repouso é uma reta paralela ao eixo x, e intersecta o eixo y no ponto $(0, S_0)$.*

Observamos que, durante a aplicação, os alunos não tiveram dificuldades para realizar as atividades de 1 a 4, respondendo de acordo com o esperado.

Após analisar as atividades 1 a 4, os alunos foram convidados a explorar o aplicativo produzido por Hernàndez (2014) e adaptado pela autora que apresenta uma atividade prática do que foi estudado anteriormente.

Os alunos foram instruídos a abrir o link “Atividade Função Afim_Gráficos do MRU” que consta no Blog para visualizar as alterações que ocorrem no gráfico da posição pelo tempo e da velocidade pelo tempo. Para isso deviam modificar a posição inicial do móvel e observar. Após, modificar a velocidade, observar o gráfico e o deslocamento do carro sobre o eixo. Ao modificar o tempo, o aluno também poderia acompanhar a posição do móvel em cada segundo. A Figura 70 apresenta a imagem do aplicativo utilizado pelos alunos.

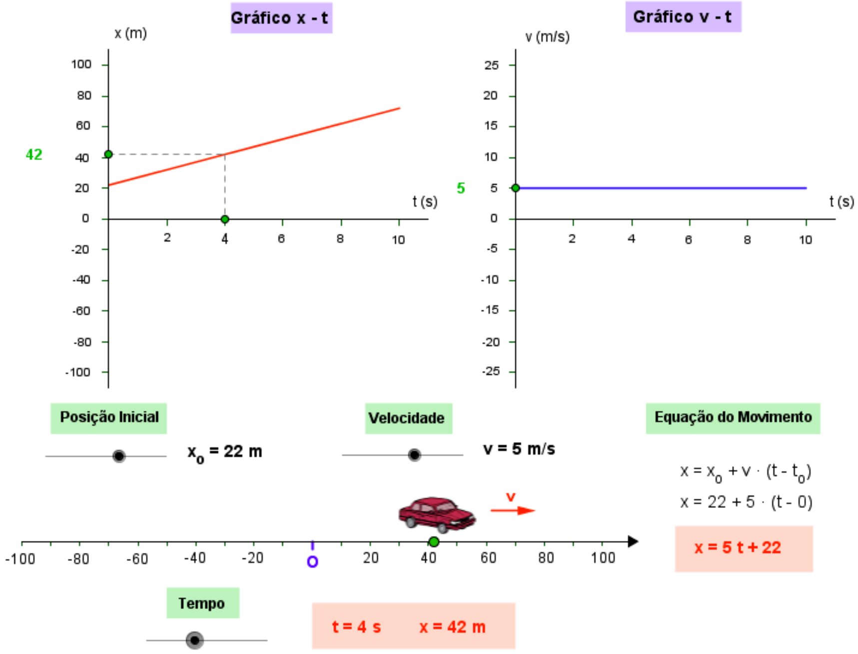


Figura 70: Atividade aplicada do MRU.

Fonte: (Hernàndez, 2014) adaptado

Após a utilização dos aplicativos, os alunos responderam à seguinte questão.

1. O que você observou nesta atividade, confere com as atividades realizadas anteriormente?

Resposta esperada: *Sim*

Durante a oficina, percebemos que a maioria dos alunos conseguiu entender a relação entre as atividades propostas. Ao final da atividade, os alunos foram questionados sobre suas percepções em relação ao conteúdo trabalhado e às atividades propostas.

2. Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em Matemática e o conteúdo da atividade referente ao conteúdo abordado na Física? Relate o que você achou desta experiência.

Resposta Pessoal: ____

A Figura 71, apresenta algumas respostas obtidas.

(1)

Sim. Apesar de usarem fórmulas diferentes, podem se relacionar entre si.

“Sim. Apesar de usar fórmulas diferentes, podem se relacionar entre si.”

(2)

Sim, relacionando com o nosso conteudo de Fisica, é ate mais facil

“Sim, relacionando com o nosso conteúdo de Física, é ate mais fácil.”

Figura 71: Respostas pessoais de duas duplas sobre a atividade.

3.3 Oficina 2 - Função Quadrática e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

Esta atividade tem por objetivo fazer com que o aluno consiga perceber que a equação do espaço do MRUV é uma função quadrática e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada na Matemática. O aluno deve concluir que os conhecimentos utilizados na Matemática para o estudo gráfico da função quadrática podem ser transferidos para a Física.

Esta oficina foi desenvolvida para um grupo de 12 alunos do 1º ano do turno da tarde, durante dois períodos no turno manhã, os alunos tinham noção do conteúdo por ter visto função do segundo grau nos anos finais do ensino fundamental, mas não tinham visto função quadrática no Ensino Médio.

Para esta atividade, foi disponibilizado aos alunos um arquivo, produzido pela autora e disponibilizado no Blog. A interface do aplicativo foi criada pela autora e está conforme apresenta a Figura 72.

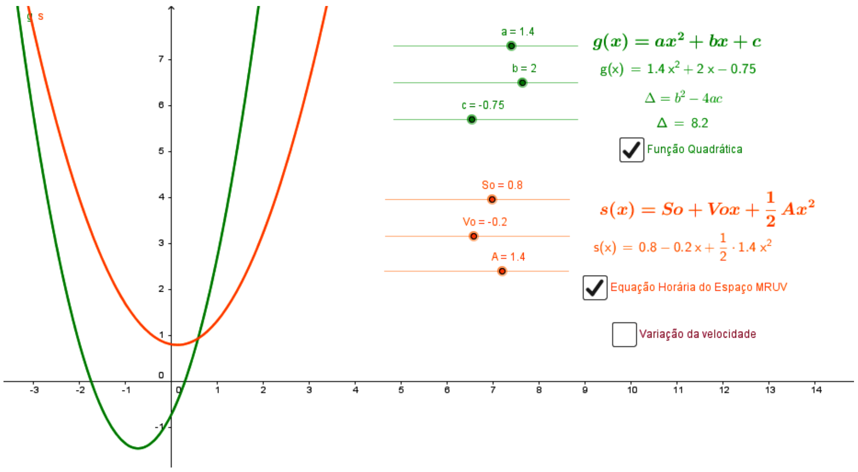


Figura 72: Atividade função quadrática e MRUV.

A descrição completa e detalhada da atividade encontra-se no anexo. Na sequência, apresentaremos a atividade desenvolvida pelos alunos, seguida da resposta esperada.

Ao entrar no laboratório de informática, os alunos encontraram computadores com as telas abertas no Blog com as atividades e foram orientados a abrir o arquivo referente à atividade a ser executada. A primeira atividade trabalhada foi a denominada Função Quadrática. A Figura 73 apresenta uma imagem do aplicativo.

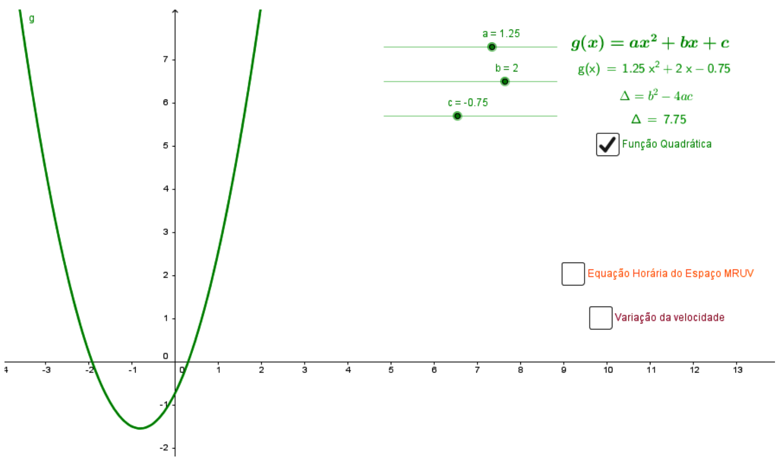


Figura 73: Gráfico de uma função quadrática.

A seguir, modificando os parâmetros por meio dos controles deslizantes, observando as modificações nos gráficos obtidos e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível responder às questões abaixo descritas.

1. Mantendo os parâmetros b, c constantes na função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ e variando o parâmetro a:
   a) O que podemos dizer sobre a concavidade da parábola ao modificar o parâmetro a, se $a > 0$ e se $a < 0$?

   Resposta esperada: *Quando a é positivo a concavidade é voltada para cima. Se a for negativo a concavidade é voltada para baixo.*

   b) O que ocorre no gráfico quando aumentamos o valor de a quando $a > 0$?

   Resposta esperada: *O gráfico se aproxima do eixo y, ou seja, a concavidade da parábola fica mais acentuada, mais fechada.*

   c) O que ocorre no gráfico quando aproximamos de zero o valor de a quando $a > 0$?

   Resposta esperada: *O gráfico se aproxima do eixo x, ou seja, a concavidade da parábola fica menos acentuada, mais aberta.*

   d) O que ocorre no gráfico da função quando aumentamos o valor de a quando $a < 0$, ou seja, quando tornamos seu valor mais próximo de zero?

   Resposta esperada: *O gráfico se aproxima do eixo x, ou seja, a concavidade da parábola fica menos acentuada, mais aberta.*

   e) O que ocorre no gráfico quando diminuímos o valor de a quando $a < 0$?

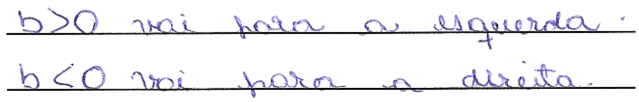
   Resposta esperada: *O gráfico se aproxima do eixo y, ou seja, a concavidade da parábola fica mais acentuada, mais fechada.*

Observamos durante a oficina que os alunos não apresentaram dificuldades em relação à questão 1.

2. Ao variar o parâmetro b na função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, e mantendo fixos os valores de a e c, observe o gráfico da função em relação a sua trajetória quando passa pelo eixo y. Qual é a diferença se $b > 0$ ou $b < 0$?

Resposta esperada: *Quando $b > 0$ a função ao cortar o eixo y tem um comportamento crescente, se $b < 0$, ao cortar o eixo y tem um comportamento decrescente. Além disso, o vértice da parábola sofre um deslocamento.*

Nessa atividade, os alunos apresentaram bastante dificuldade em visualizar o comportamento do parâmetro b. Eles conseguiram perceber que, quando $a > 0$ e o valor de $b > 0$ o gráfico se move para a esquerda e, se $b < 0$ o gráfico se move para a direita e se $a < 0$ ocorre o inverso. Salientamos que o enunciado pedia para manter a e c fixos. A Figura 74 apresenta a resposta de uma dupla para essa atividade.



b>0 vai para a esquerda.
b<0 vai para a direita.

"$b > 0$ vai para a esquerda; $b < 0$ vai para a direita."

Figura 74: Resposta de uma dupla para a questão 2.

3. O que ocorre no gráfico da função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$ quando modificamos o parâmetro c?

   Resposta esperada: *O parâmetro c é a ordenada do ponto de corte do gráfico com o eixo y, (0,c).*

4. Sabendo que o discriminante da equação quadrática é $\Delta = b^2 - 4.a.c$. Variando os parâmetros a, b e c, da função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ax}^2 + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}$ observamos que o valor de Δ varia. O que podemos perceber em relação ao número de pontos de corte que o gráfico tem com o eixo x em relação ao valor de Δ? Quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$?

   Resposta esperada: *Se $\Delta > 0$ a função tem duas raízes reais, assim o gráfico toca o eixo x em dois pontos; se $\Delta = 0$ a função tem uma raiz real, assim o gráfico toca o eixo x em apenas um ponto, que coincide com o vértice da* _parábola; se $\Delta < 0$ a função não tem raiz real, assim o gráfico não intercepta o eixo x._

Observamos que essa atividade foi relativamente simples e que os alunos não tiveram dificuldades para responder às questões 3 e 4.

Na segunda parte da atividade, fazemos a aplicação dos conhecimentos adquiridos com o estudo de função quadrática no MRUV, e, para isso, os alunos foram instruídos pela professora a ativar a caixa Equação Horária do Espaço no MRUV e desativar a caixa da Função Quadrática no aplicativo.

3.3.1 Aplicação na Física – Função Horária do Espaço no MRUV

Nesta atividade, o esperado é que os alunos relacionem os parâmetros da equação do MRUV com os parâmetros estudados na equação quadrática. Para isso o aplicativo apresenta imagem conforme a Figura 75.

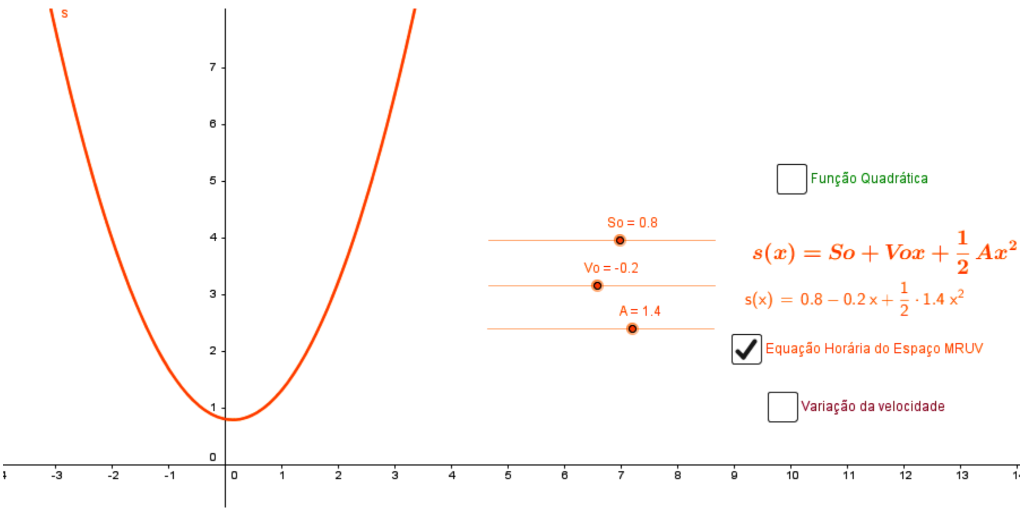


Figura 75: Gráfico equação horária do MRUV.

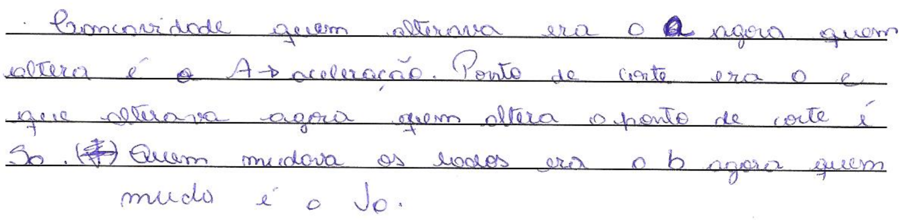
1. Ao relacionar a função horária do espaço $\boldsymbol{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}At^2}$ com a função quadrática $\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c}$ podemos dizer que a posição

inicial s_0 do corpo se comporta conforme o comportamento de que parâmetro? A velocidade inicial v_0? A expressão $\frac{1}{2}A$ que equivale à metade do valor da aceleração se comporta como que parâmetro?

Resposta esperada: *A posição inicial s_0 comporta-se como o termo independente c, a velocidade inicial v_0 como o parâmetro b e $\frac{1}{2}A$ equivale ao parâmetro a da função quadrática.*

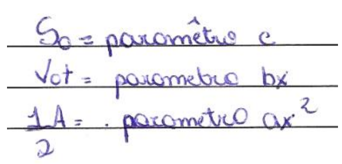
Observamos, durante a oficina, que bastava os alunos fazerem alterações nos controles deslizantes e perceberem as alterações feitas no gráfico para comparar com a função quadrática, além da comparação direta entre as equações. Algumas duplas, porém, compararam o parâmetro a com apenas a aceleração A ao invés de comparar com $\frac{1}{2}A$, conforme podemos observar nas respostas da Figura 76.

(1)


Concavidade quem alterava era o a agora quem altera é o A → aceleração. Ponto de corte era o c que alterava agora quem altera o ponto de corte é So. Quem mudava os lados era o b agora quem muda é o Vo.

"Concavidade quem alterava era o a agora quem altera é o A – aceberação. Ponto de corte era o c que alterava agora quem altera o ponto de corte é o S_o. Quem mudava os lados era o b agora quem muda é o V_o."

(2)


So = parâmetro c
Vot = parometro bx
$\frac{1}{2}$A = . parametro ax²

"S_o = parâmetro c; $V_o t$ =parâmetro bx; $\frac{1}{2}A$ =parâmetro ax^2"

Figura 76: Respostas de duas duplas para a questão 1.

2. Que parâmetro da equação $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s_0} + \boldsymbol{v_0 t} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A t}^2$ determina a concavidade da parábola que descreve a posição de um corpo em MRUV? E o que ele representa no MRUV?

Resposta esperada: *$\frac{1}{2}A$ equivale ao parâmetro a da função quadrática, logo é ele que determina a concavidade da parábola que descreve o MRUV. Como ½ é uma constante, é a aceleração A que determina a concavidade. Temos na Figura 77 um exemplo com a aceleração negativa.*

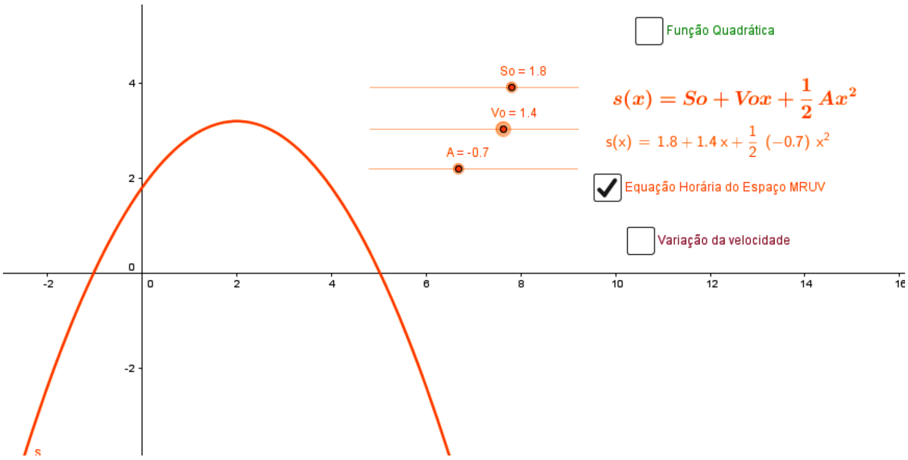


Figura 77: a aceleração determina a concavidade da parábola no MRUV.

3. O que significa o ponto de corte da parábola com o eixo y no gráfico da posição no MRUV?

Resposta esperada: *O que determina o ponto de corte com o eixo y é o valor da posição inicial S_0.*

Observamos, durante a oficina, que os alunos não tiveram dificuldade em responder às atividades 2 e 3.

4. Onde, no gráfico, podemos identificar a velocidade inicial do móvel? Descreva o que acontece quando esta velocidade é positiva e quando é negativa.

Resposta esperada: *A velocidade inicial pode ser identificada através do comportamento da função ao passar pelo eixo y, se a função tiver um* *comportamento crescente ao cruzar o eixo y, a velocidade inicial é positiva, caso contrário é negativa.*

Percebemos, nessa atividade, que, assim como os alunos apresentaram dificuldade em responder à questão 2 sobre função quadrática, que tratava da variação do parâmetro b, eles tiveram dificuldade em visualizar a resposta esperada para a questão 4, e aqueles que haviam entendido a questão 2 entenderam da mesma forma a 4.

5. Ative o botão Variação da velocidade e observe a trajetória descrita pelo vértice da parábola ao variarmos o coeficiente V_0. Observe se o que você verificou anteriormente nas questões 3 e 4 confere. Relate o que você pode observar em relação à variação da velocidade inicial e ao traçado do gráfico.

Resposta esperada: *Enquanto a velocidade inicial toma valores positivos, os pontos da trajetória descrita é crescente, e para valores negativos da velocidade inicial, os pontos descrevem uma trajetória decrescente. Podemos visualizar um gráfico formado no aplicativo na Figura 78.*

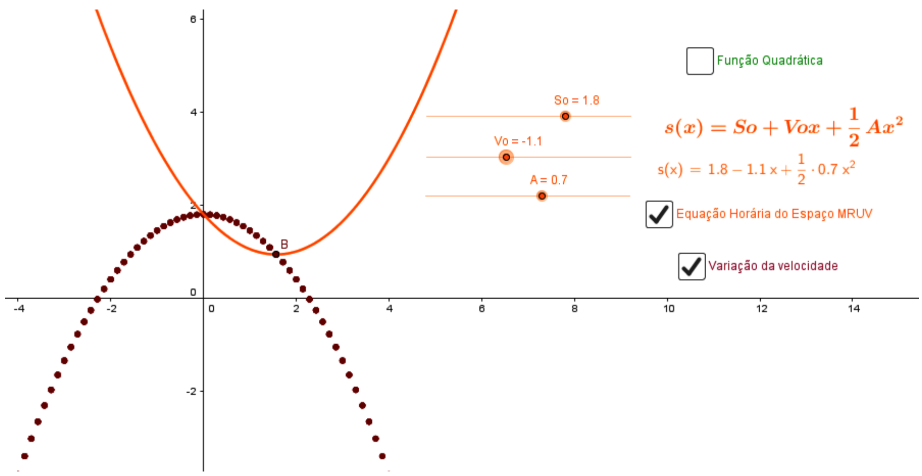


Figura 78: variação da velocidade

Observamos que os alunos conseguiram visualizar a variação da velocidade por meio da parábola formada. A Figura 79 apresenta a resposta de uma dupla para essa atividade.

Quando a velocidade é positivo o parâmetro vai crescendo e quando é negativo o ponto de corte se torna decrescente.

"Quando a velocidade é positiva o parâmetro vai crescendo e quando é negativa o ponto de corte se torna decrescente."

Figura 79: Resposta de uma dupla para a pergunta 5.

Ao final da atividade, os alunos foram questionados sobre suas percepções em relação ao conteúdo trabalhado, conforme segue:

Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em Matemática e o a atividade referente ao conteúdo abordado na Física? Relate o que você achou desta experiência.

Resposta pessoal: ____

A Figura 80 apresenta a resposta para duas duplas.

(1)

Muito interessante. Algo que não é muito comum em sala de aula.

"Muito interessante. Algo que não é muito comum em sala de aula."

(2)

Sim, é muito interessante

"Sim, é muito interessante."

Figura 80: Respostas de duas duplas sobre a Atividade 2.

3.4 Oficina 3 - Função Exponencial e Desintegração do Carbono-14 e Cultura de bactérias

O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno consiga perceber que a expressão que representa o número de bactérias de uma cultura e a desintegração do Carbono-14 são funções exponenciais e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada na disciplina de Matemática.

A descrição completa e detalhada da atividade encontra-se no anexo. Na sequência, apresentaremos a atividade desenvolvida aos alunos, seguida das respostas esperadas.

Esta atividade foi desenvolvida para um grupo de 17 alunos de 1º ano do turno da tarde, durante o período regular de aula. Os alunos relataram que ainda não tinham estudado o conteúdo de Função Exponencial na disciplina de Matemática.

Ao entrar no laboratório de informática, os alunos encontraram computadores com as telas abertas no Blog com as atividades e foram orientados a abrir o arquivo referente à atividade a ser executada. Nesta atividade, os alunos dispõem da interface conforme apresenta a Figura 81, para interação no aplicativo, a qual foi produzida pela autora.

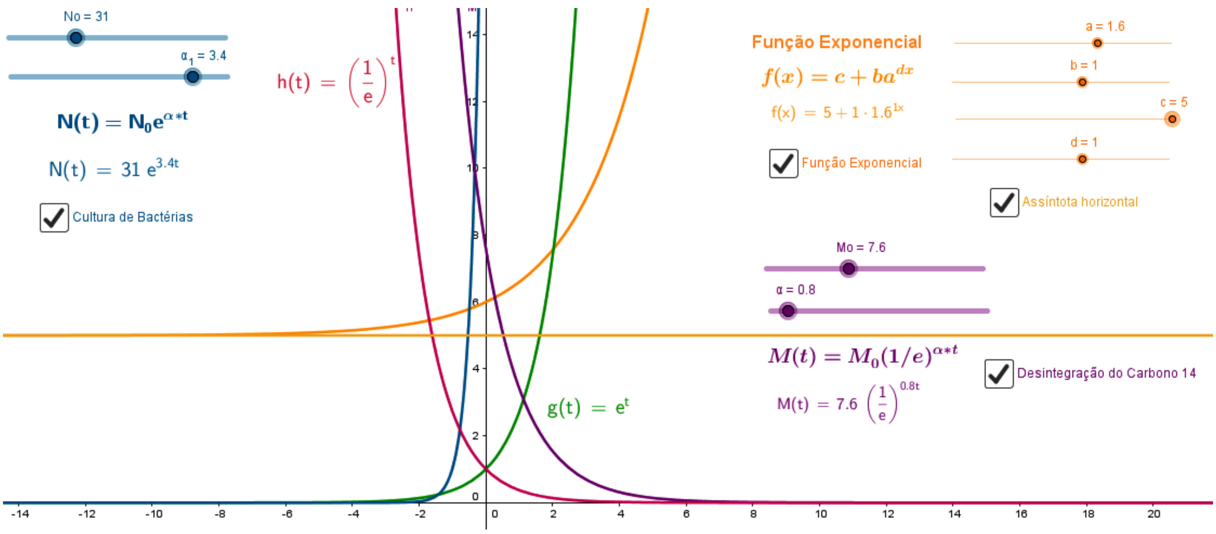


Figura 81: Interface da atividade exponencial

A primeira parte da atividade diz respeito ao estudo da função exponencial e seus parâmetros. Sua tela de interação pode ser observada na Figura 82.

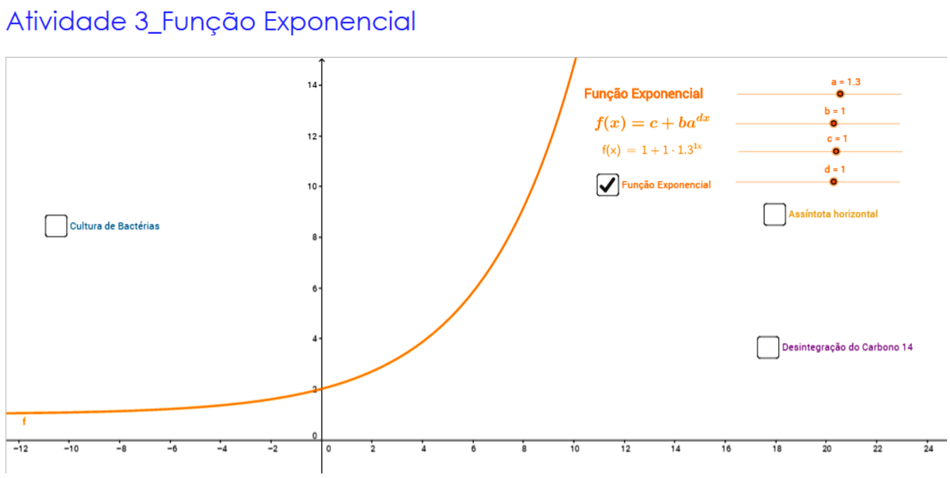


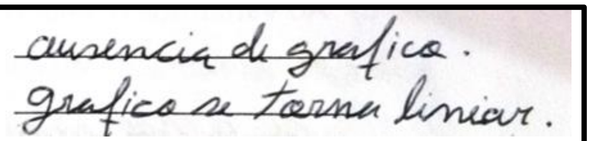
Figura 82: Interface para estudo da função exponencial.

A seguir, modificando os parâmetros por meio dos controles deslizantes, observando as modificações nos gráficos gerados pelas modificações nos parâmetros e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível responder às questões abaixo descritas:

1. Por que a definição da função exponencial $f(x) = ba^{dx} + c$ diz que $a > o$ e $a \neq 1$.
   a) O que acontece com o gráfico se $a < 0$? Resposta esperada: *Não existe o gráfico.*
   b) O que acontece com o gráfico se $a = 1$? Resposta esperada: *O gráfico da função vira uma reta.*

Observamos que todos os grupos conseguiram visualizar corretamente os gráficos obtidos, algumas duplas usaram o termo linear para indicar que o gráfico se torna uma reta, conforme podemos observar na Figura 83.

a)
b)



a) “ausência de gráfico.”

b) “gráfico se torna linear.”

Figura 83: Resposta pergunta 1.

2. Vamos explorar o que acontece com o gráfico da função $f(x) = ba^{dx} + c$ se $a > 0$.

a) Se $0 < a < 1$, quanto maior o valor de x, o valor de $f(x)$ aumenta ou diminui? Ou seja, o gráfico da função é crescente ou decrescente neste intervalo?
Resposta esperada: *Quanto maior o valor de x, menor o valor da função, ou seja, a função é decrescente neste intervalo. A Figura 84 apresenta um exemplo.*

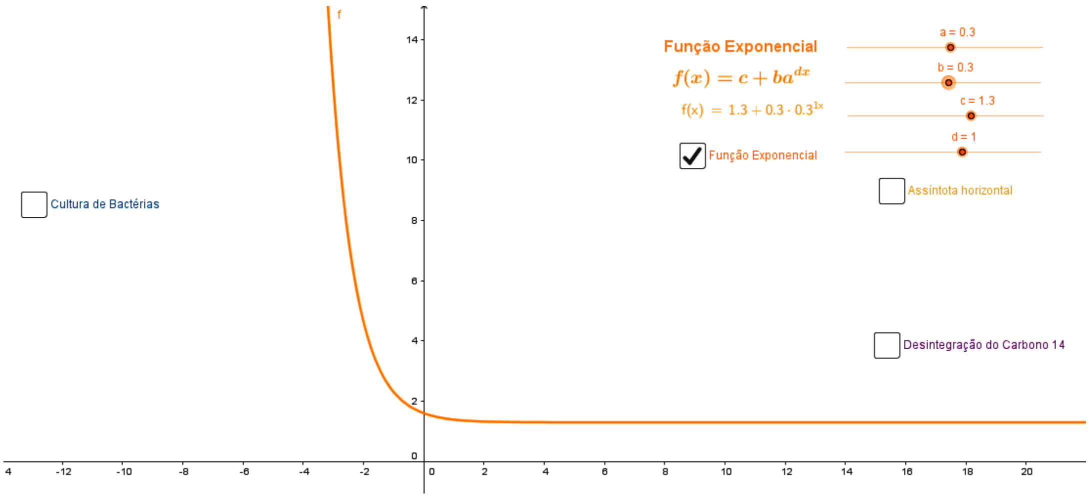


Figura 84: Gráfico da função exponencial decrescente.

b) Se $a > 1$, à medida que aumentamos o valor de x, o valor de $f(x)$ aumenta ou diminui? Ou seja, o gráfico da função é crescente ou decrescente neste intervalo?
Resposta esperada: *Neste caso, quanto maior o valor de x, maior é o valor da função, ou seja, a função é crescente neste intervalo. Podemos observar um exemplo de função crescente na Figura 85.*

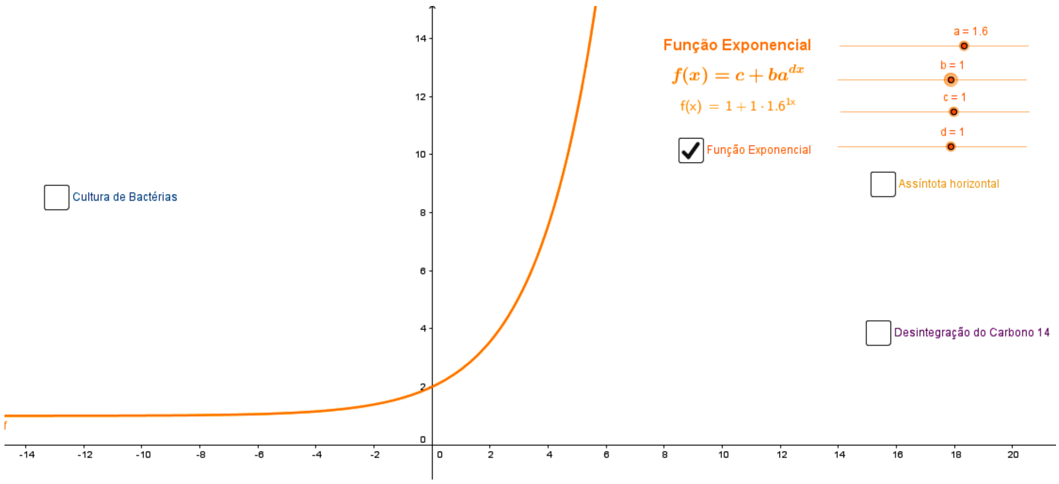


Figura 85: Gráfico da função exponencial crescente.

3. Mantendo $a > o\ e\ a \neq 1$, e c fixos, o que ocorre quando variamos b na função $f(x) = ba^{dx} + c$

a) Se $b > 0$ observe o ponto de corte do gráfico da função no eixo y.

b) Se $b < 0$ observe o ponto de corte do gráfico da função no eixo y.

c) Qual a relação entre o valor de b e o ponto de corte do gráfico da função sobre o eixo y?

Resposta esperada: *O valor de b é o mesmo valor do ponto de corte do gráfico com o eixo y. Ou seja, o ponto de corte com o eixo y é $(0, b)$.*

d) Se $b = 0$ e $c = 0$ como fica o gráfico? E se $b = 0$ e $c \neq 0$ como fica o gráfico?

Resposta esperada: *O gráfico se torna o próprio eixo x. Se $c \neq 0$ o gráfico é uma reta paralela ao eixo x.*

Observamos que os alunos não tiveram dificuldades em responder as questões 1, 2 e 3, e as respostas apresentadas foram conforme o esperado,

Na sequência da atividade os alunos são orientados a manter $a > 0, b = 1, d = 1$ e acionar a caixa de texto chamada de assíntota horizontal disponível no aplicativo para responder a pergunta a seguir.

4. O que podemos dizer sobre o deslocamento do gráfico da função $f(x) = ba^{dx} + c$ quando variamos o parâmetro c?

Resposta esperada: *Quando variamos o parâmetro c o gráfico da função se desloca verticalmente para cima se aumentarmos o valor de c e para baixo se diminuirmos o valor de c. O gráfico permanece todo positivo se $c > 0$.* Podemos encontrar maiores explicações sobre isso na página 38 do texto.

a) Tal deslocamento altera a imagem da função?

Resposta esperada: *Sim, pois o deslocamento é vertical.*

b) Se aumentarmos o valor de c o que acontece com o gráfico?

Resposta esperada: *O gráfico se desloca para cima.*

c) Se diminuirmos o valor de c o que acontece com o gráfico?

Resposta esperada: *O gráfico se desloca para baixo.*

d) Ao variarmos o valor de c, podemos perceber que o gráfico desta função está se aproximando de que número?

Resposta esperada: *O gráfico se aproxima da assíntota horizontal, que é o valor de c. Observe na Figura 86 o gráfico de uma função exponencial e a assíntota horizontal desta função.*

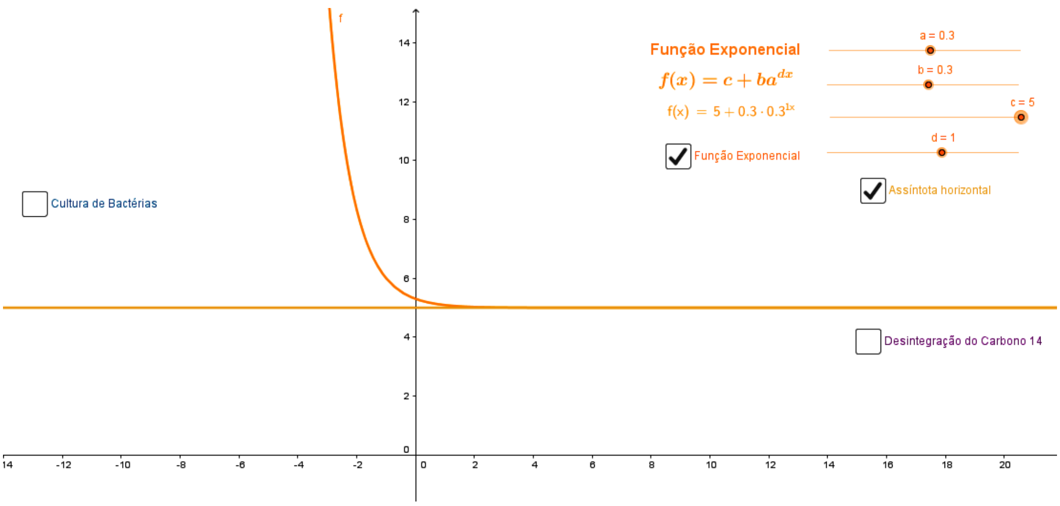
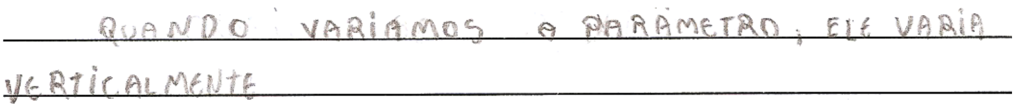
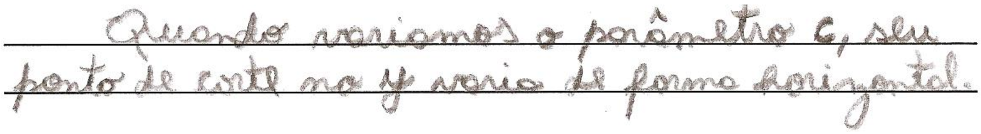


Figura 86: Gráfico da função exponencial em destaque a assíntota horizontal da função.

Notamos que a maioria dos alunos não soube expressar em palavras o deslocamento vertical do gráfico da função em função do parâmetro c, nem a aproximação do gráfico com a assíntota horizontal, e acreditamos que este fato possa ter ocorrido por eles não terem visto o conteúdo de função exponencial na disciplina de Matemática, e também seus professores podem não ter comentado em aula esse tipo de translação. A Figura 87 apresenta algumas respostas produzidas pelos estudantes.

a) 

"Quando variamos o parâmetro, ele varia verticalmente."

b) 

"Quando variamos o parâmetro c, seu ponto de corte no y varia de forma horizontal."

Figura 87: Respostas das duplas para a questão 4.

Para a questão a seguir ,os alunos foram orientados a manter $a > 1$, $b = 1$, $c = 0$.

5. Ao aumentarmos o valor do parâmetro d, com $d > 0$, podemos observar no gráfico da função $f(x) = ba^{dx} + c$ um crescimento mais rápido ou mais lento para os valores da função?

Resposta esperada: *O crescimento é mais rápido, pois quanto mais aumentarmos o valor de d, ao tomarmos um valor fixo de x, obteremos valores cada vez maiores para a função.*

6. Ao diminuirmos o valor do parâmetro d, com $d < 0$, podemos observar no gráfico da função $f(x) = ba^{dx} + c$ um decrescimento mais rápido ou mais lento para os valores da função?

   Resposta esperada: *O crescimento é mais lento, uma vez que ao diminuirmos os valores de d, e tomarmos um valor fixo de x, obteremos valores cada vez menores para a função.*

Observamos que os alunos tiveram um pouco de dificuldade em visualizar e responder às questões 5 e 6. Foi necessária a intervenção da professora para explicar que eles deveriam escolher um valor fixo para o x e comparar o valor de y

encontrado conforme faziam a variação do parâmetro. Só após a explicação eles compreenderam o que estava sendo solicitado.

7. Qual é o domínio da função$f(x) = ba^{dx} + c$, se $a > 0$ e $a \neq 1$, independente dos valores dos outros parâmetros?

   Resposta esperada: *Todos os números reais.*

Observação sobre a aplicação: a maioria dos alunos não sabia, ou não lembrava o que era domínio de uma função, foi necessária a explicação da professora para eles responderem à questão.

A segunda parte da atividade foi a aplicação dos conhecimentos de função exponencial em atividades da Biologia e da Química. A primeira aplicação foi na Biologia, com uma atividade sobre o número de bactérias de uma cultura.

3.4.1 Aplicação na Biologia – Cultura de bactérias

Para a realização desta etapa da oficina, os alunos tiveram à disposição a interface de iteração conforme a Figura 88.

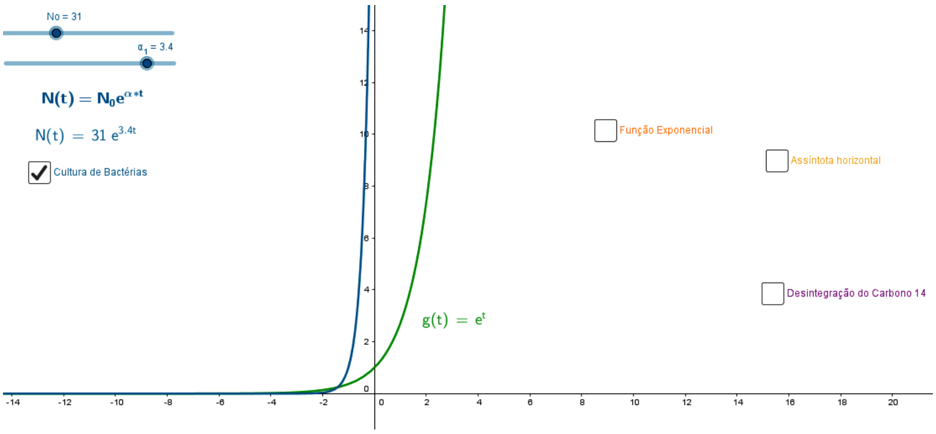


Figura 88: Atividade 3, aplicação na Biologia - cultura de barctérias.

A seguir, foram convidados a responder às seguintes questões:

1. A função $\boldsymbol{N(t) = Noe^{\alpha t}}$ é crescente ou decrescente? Por quê?
   Resposta esperada: *A função é crescente pois a base e é um número maior que um.*

Observamos que os alunos não tiveram dificuldades para responder a esta questão.

2. O que ocorre no gráfico da função $\boldsymbol{N(t) = Noe^{\alpha t}}$ quando alteramos o valor do número inicial No de bactérias dessa cultura?
   Resposta esperada: *Alteramos o ponto de corte do gráfico com o eixo y.*

Notamos que os alunos não conseguiram perceber por meio do aplicativo que o No era o ponto de corte do gráfico com o eixo y. Acreditamos que, se a escala utilizada fosse menor e o controle deslizante de No tivesse um intervalo menor, os alunos poderiam ter percebido mais facilmente, pois o foi utilizado $1 < No < 100$ e os alunos acabavam mexendo na escala do gráfico ao manuseá-lo, dificultando algumas visualizações.

3. O que acontece com o número de bactérias quando aumentamos o valor de α? O que isso significa para o crescimento da cultura de bactérias, mais rápido ou mais lento?
   Resposta esperada: *O número de bactérias cresce mais rapidamente quanto maior o valor de α.*

4. O que acontece com o número de bactérias quando diminuímos o valor de α? O que isso significa para a o crescimento da cultura de bactérias, mais rápido ou mais lento?
   Resposta esperada: *O número de bactérias cresce mais lentamente quanto menor o valor de α.*

Percebemos que os alunos tiveram dificuldade em interpretar esta questão. Foi necessária a intervenção da professora, que os orientou a tomar um valor fixo de

x, e, ao variar o valor de α comparar os novos valores que a função assumia. Assim os alunos conseguiram compreender como responder às questões 3 e 4.

A segunda aplicação dos conhecimentos adquiridos sobre função exponencial foi realizada a partir de conceitos aprendidos na disciplina de Química, na desintegração radioativa de uma substância. Neste caso, o Carbono 14, utilizado para a datação de objetos.

3.4.2 Aplicação na Química - Desintegração Radioativa de uma substância - Datação com carbono-14.

Para esta parte da atividade, foram disponibilizados aos alunos os applets produzidos pela autora, conforme apresenta a Figura 89.

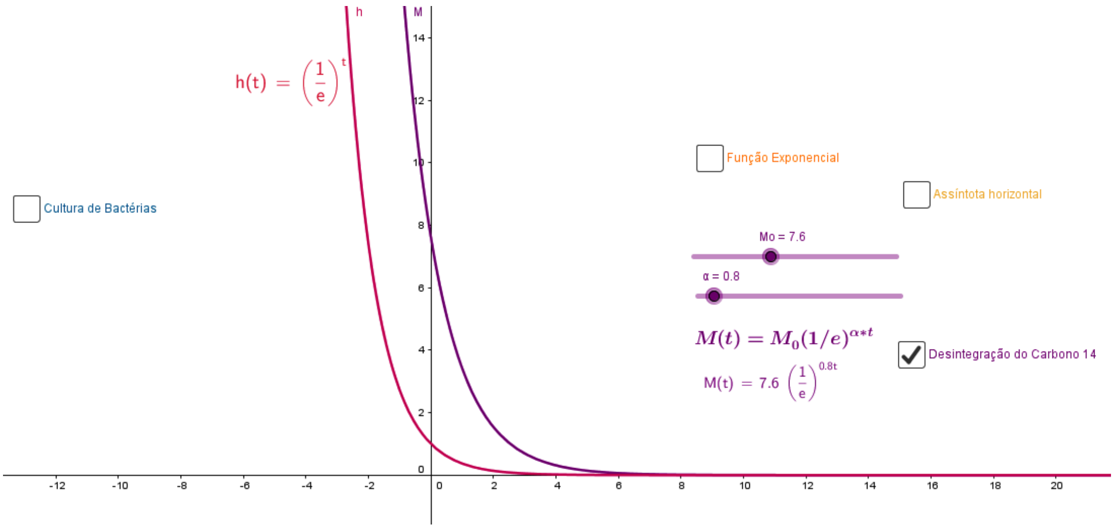


Figura 89: Atividade 3 – Aplicação na Química

A partir da manipulação deste aplicativo, por meio dos controles deslizantes os alunos conseguiram responder às seguintes questões:

1. A função $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ é crescente ou decrescente? Por quê?

Resposta esperada: *<u>A função é decrescente, pois a base é $1/e$, é um número que está entre 0 e 1.</u>*

Observamos que os alunos conseguiram perceber que a função é decrescente, mas algumas duplas consideraram que o gráfico se torna uma reta quando se aproxima do eixo y. Neste caso, uma escala menor ajudaria a perceber que o gráfico não se torna linear, em nenhum momento. Podemos observar duas respostas dadas a esta pergunta na Figura 90.

a) Decrescente, pois os valores diminuem até ficar um gráfico linear.

"Decrescente, pois os valores diminuem até ficar um gráfico linear."

b) Decresce já qe se aproxima do eixo x.

"Decresce já que se aproxima do eixo x."

Figura 90: Respostas da pergunta 1.

2. O que ocorre com o gráfico da função $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ quando modificamos o valor de Mo (massa inicial do corpo)? O que isso significa para a quantidade de C^{14} na peça analisada?
   Resposta esperada: *<u>Mo é o valor do ponto de corte do gráfico com o eixo y. Quanto maior o valor de Mo, maior o valor inicial de Carbono 14 da peça analisada.</u>*

Assim como na atividade aplicada à Biologia, os alunos tiveram dificuldades em reconhecer o parâmetro Mo (massa inicial do corpo) como sendo a ordenada do ponto de corte do gráfico com o eixo y. Teoricamente, isso tem a ver com o fato de $e^0 = 1$. Geometricamente, isso tem a ver com uma dificuldade em compreender o significado de par ordenado (x, y). Apenas uma dupla respondeu corretamente esta questão. Neste caso, quanto maior o valor de α mais difícil se torna a visualização da variação da massa inicial no gráfico. Acreditamos que devíamos ter fixado o valor de $\alpha = 1$, por exemplo, para facilitar o entendimento dos alunos.

3. O que ocorre no gráfico da função $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ quando aproximamos o valor de α a zero? O que acontece com a quantidade de C^{14} na peça analisada, sabendo que α representa a constante de desintegração do C^{14} em cada material?

   Resposta esperada: <u>*O decrescimento de carbono no organismo é mais lento quanto menor for o valor de α. Podemos observar na Figura 91 o gráfico da função quando $\alpha = 0{,}1$.*</u>

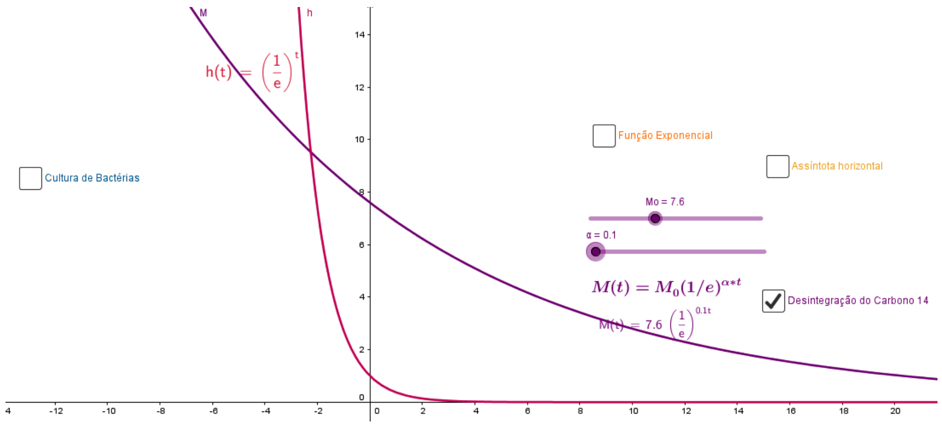


Figura 91: Gráfico de desintegração lenta de C^{14}.

Notamos que 3 das 8 duplas igualaram α a zero, verificando que o gráfico torna-se uma reta paralela ao eixo x, mas infelizmente não era esse nosso objetivo. Os alunos fizeram uma leitura equivocada da questão e não conseguiram visualizar que a quantidade de substância diminui mais lentamente. Para uma próxima aplicação da atividade, acreditamos que é necessário um maior acompanhamento e mais explicação do professor nessa questão para que os alunos compreendam o que está sendo solicitado.

4. O que ocorre no gráfico de $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{at}$ quando aumentamos o valor de α? O que acontece com a quantidade de C^{14} na peça analisada, aumenta ou diminui, mais rápido ou mais lentamente? Sabendo que α representa a constante de desintegração do C^{14} em cada material?

Resposta esperada: *<u>Quanto maior o valor de α, mais rápido será o desintegração da substância. Podemos observar na Figura 92 o gráfico da função quando $\alpha = 9{,}6$.</u>*

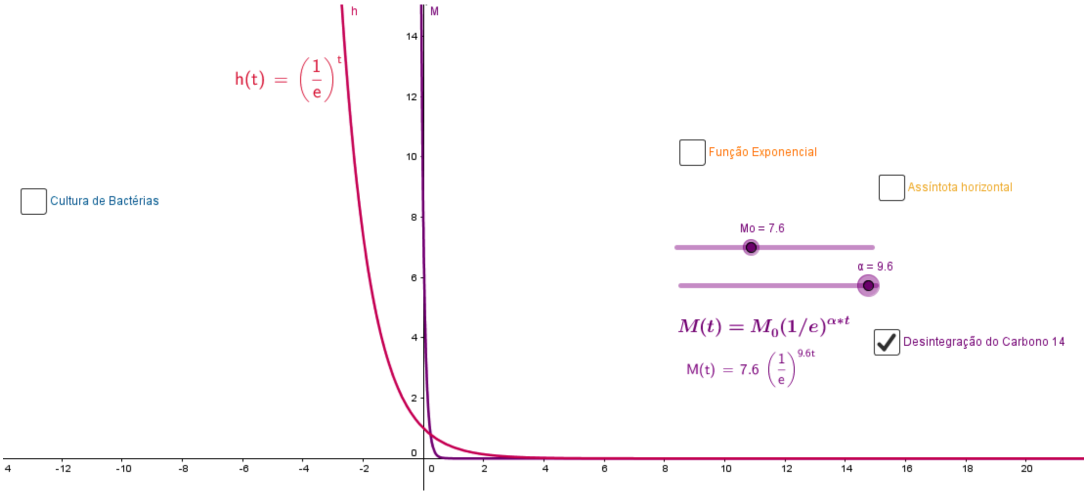


Figura 92: Gráfico de desintegração rápida de C^{14}.

Novamente observamos que algumas das duplas igualaram α a zero, verificando que o gráfico torna-se uma reta paralela ao eixo x, mas, como ocorreu na atividade, não conseguimos cumprir com o nosso objetivo. Os alunos fizeram uma leitura equivocada da questão e não conseguiram visualizar que a quantidade de substância diminui mais lentamente.

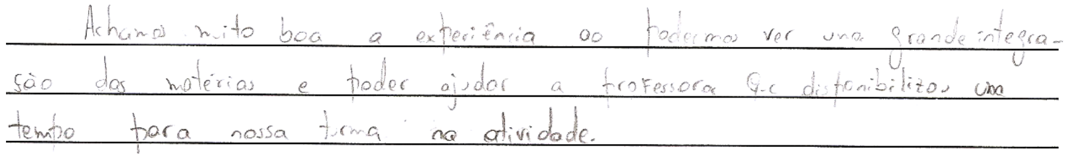
Ao final da oficina, os alunos foram questionados sobre suas percepções a cerca das atividades e em relação ao conteúdo trabalhado:

Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em Matemática e as atividades referentes a conteúdos abordados na Biologia e na Química? Relate o que você achou desta experiência.

Resposta pessoal: ____

Podemos observar algumas respostas das duplas na Figura 93.

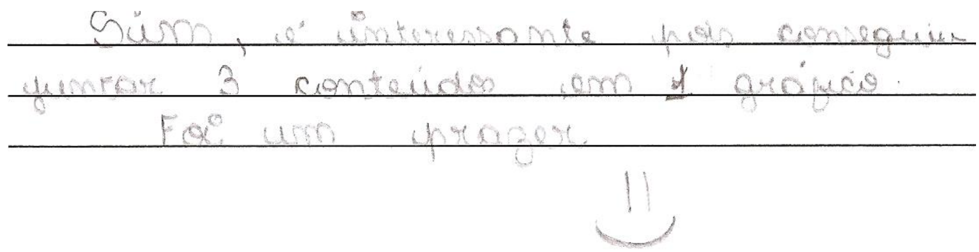
a)



Achamos muito boa a experiência ao podermos ver uma grande integração das matérias e poder ajudar a professora q.c disponibilizou um tempo para nossa turma na atividade.

"Achamos muito boa a experiência ao podermos ver uma grande integração das matérias e poder ajudar a professora que disponibilizou um tempo para nossa turma na atividade."

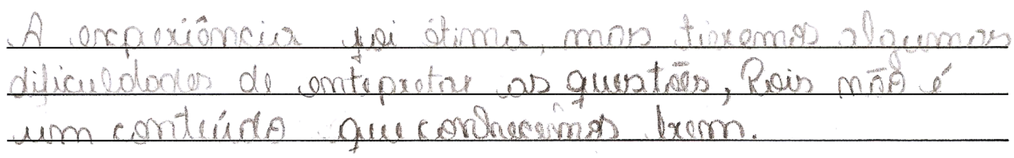
b)



Sim, é interessante pois conseguiu juntar 3 conteúdos em 1 gráfico. Foi um prazer.

"Sim, é interessante pois conseguiu juntar 3 conteúdos em 1 gráfico. Foi um prazer."

c)



A experiência foi ótima, mas tivemos algumas dificuldades de interpretar as questões, pois não é um conteúdo que conhecemos bem.

"A experiência foi ótima, mas tivemos algumas dificuldades de interpretar as questões, pois não é um conteúdo que conhecemos bem."

Figura 93: algumas respostas sobre o que as duplas acharam da atividade 3.

3.5 Oficina 4 – Função Logarítmica e Escala pH

O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno realize o estudo gráfico dos parâmetros da função logarítmica e use os conceitos dessa função estudada na disciplina de Matemática. Em particular, o estudo gráfico da função da escala de pH de uma substância estudada na Química e, assim, facilitar a interpretação do problema.

A descrição completa e detalhada da atividade encontra-se no anexo. Na sequência, apresentaremos a atividade desenvolvida pelos alunos, seguida das respostas esperadas e observações sobre a aplicação.

Esta atividade foi desenvolvida para um grupo de 14 alunos de 1º ano do turno da tarde, durante o período regular de aula. A atividade foi aplicada em um sábado pela manhã. Os alunos relataram que ainda não viram o conteúdo de Função Logarítmica na disciplina de Matemática.

Ao entrar no laboratório de informática, os alunos encontraram computadores com as telas abertas no Blog com as atividades. Foram orientados a abrir o arquivo referente à atividade a ser executada.

Os alunos dispunham da interface da Figura 94 pra manipular a atividade 4.

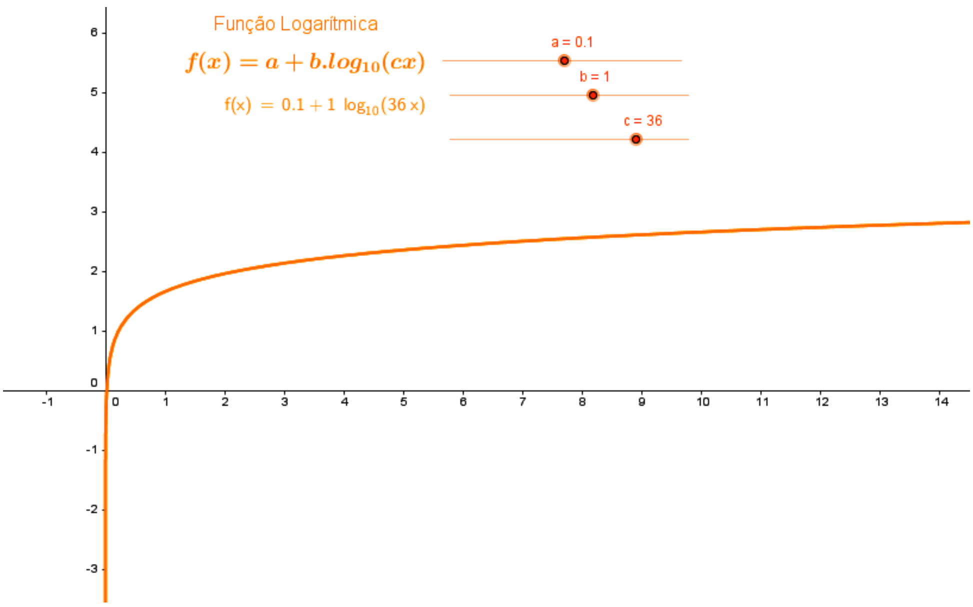


Figura 94: Interface da Oficina 4 – Função logarítmica.

A seguir, modificando os parâmetros por meio dos controles deslizantes e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível responder às questões abaixo descritas:

1. Mantendo $a = 0$ e $b = 1$, vamos analisar o que acontece com o gráfico da função $f(x) = a + b \cdot log(cx)$.

a) Qual é o comportamento do gráfico da função quando $c > 0$, crescente ou decrescente?

Resposta esperada: *A função é crescente.*

b) O que ocorre no gráfico da função quando aumentamos o valor de c, com $c > 0$, o crescimento é mais lento ou mais rápido?

Resposta esperada: *O crescimento é mais rápido.*

c) Qual é o comportamento do gráfico da função quando $c < 0$, crescente ou decrescente? E o que mais ocorre?

Resposta esperada: *Decrescente e é uma reflexão sobre o eixo y. Podemos observar um exemplo na Figura 95.*

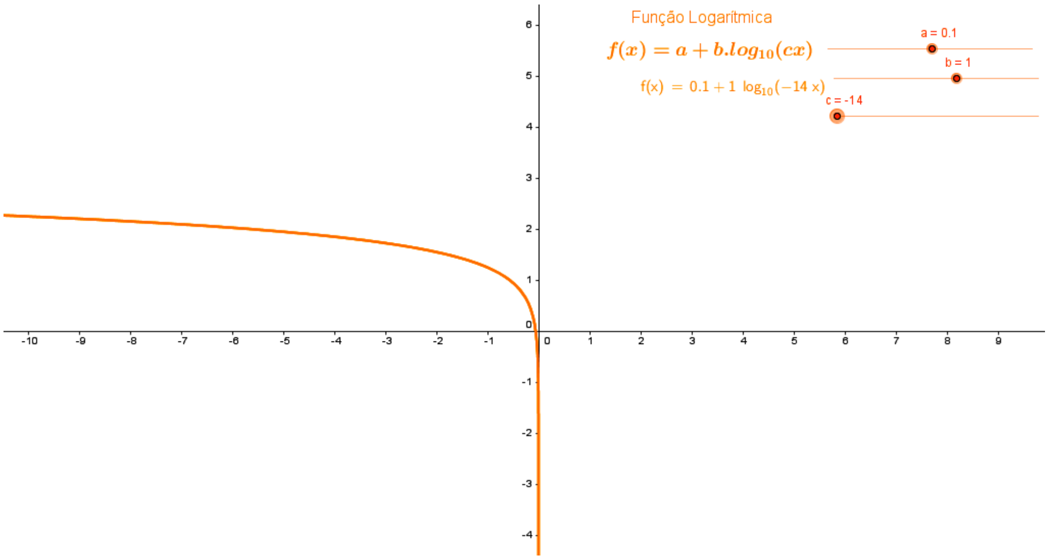


Figura 95: Gráfico referente a questão 1 da atividade 4.

Observamos que algumas duplas não conseguiram perceber que o crescimento é mais rápido quando aumentamos o valor de c. Percebemos também que não é conhecido dos alunos o termo reflexão, pois, quando comentado, eles não sabiam o que significava.

2. Mantendo $a = 0$ e $c = 1$, vamos analisar o que acontece com o gráfico da função $f(x) = a + b \cdot log(cx)$ ao variar o parâmetro b na função $f(x) = a + b \cdot log(cx)$.

   a) O crescimento da função é mais rápido ou mais lento quando aumentamos o valor de b, com $b > 0$?

   Resposta esperada: <u>*O crescimento é mais rápido. O gráfico aproxima-se do eixo y conforme representado na Figura 96.*</u>

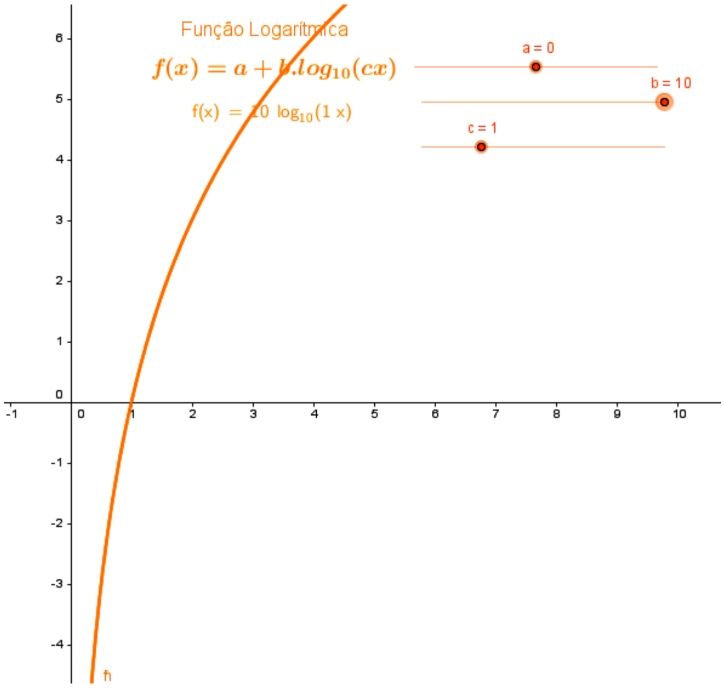


Figura 96: Gráfico obtido na manipulação do aplicativo para resolução da questão 2 letra a.

   b) O que ocorre no gráfico quando b é negativo?

   Resposta esperada: <u>*Há uma reflexão sobre o eixo x, conforme apresenta a Figura 97.*</u>

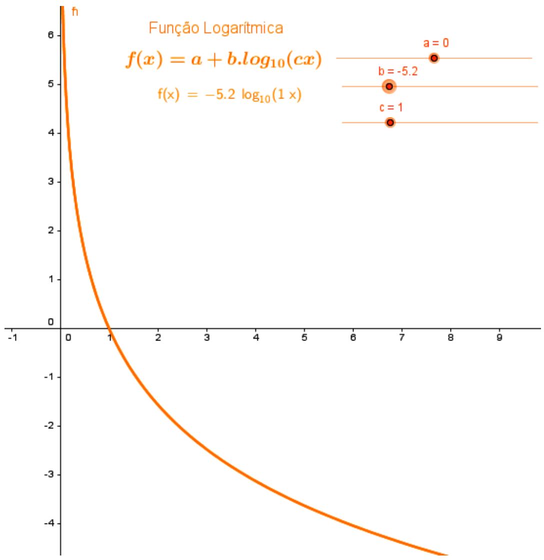


Figura 97: Gráfico obtido na manipulação do aplicativo para resolução da questão 2 letra b.

Após perceber as dificuldades encontradas ao responder à questão 1, a professora realizou uma intervenção para explicar alguns conceitos desconhecidos pelo grupo. A partir dessas explicações, os alunos conseguiram responder com êxito a questão 2, verificando corretamente a velocidade de crescimento e a reflexão do gráfico sobre o eixo x.

3. Mantendo $b > 0$ e $c > 0$ varie o parâmetro a da função$f(x) = a + b \cdot log(cx)$.

   a) O que ocorre quando aumentamos o valor de a, com $a > 0$?

   Resposta esperada: <u>*A função tem um deslocamento vertical para cima.*</u>

   b) O que ocorre quando a é negativo?

   Resposta esperada: <u>*A função tem um deslocamento vertical para baixo.*</u>

Notamos que os alunos conseguiram perceber o deslocamento vertical da função sem maiores dúvidas.

No segundo momento da oficina, os alunos fizeram a aplicação dos conhecimentos adquiridos com a função logarítmica no estudo da escala de pH de uma solução, estudada na Química.

3.5.1 Aplicação na química

Para acompanhar esta atividade, os alunos tiveram à disposição a escala de pH (Figura 98) disponível em cores no Blog (salientamos que material impresso era preto e branco).

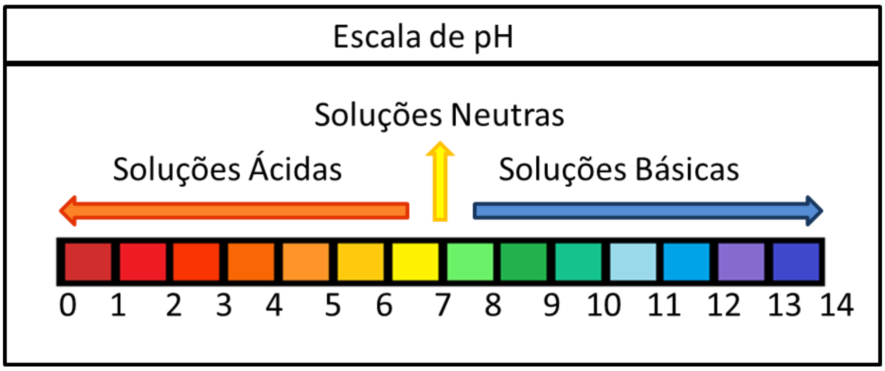


Figura 98: Escala de pH. Fonte o autor.

Os alunos foram orientados a abrir o aplicativo Atividade 3_Escala de pH através do disponibilizado no Blog. A professora orientou-os que observassem que o eixo x representa a concentração de H^+ e o eixo y é o valor do pH. A Figura 99 apresenta o aplicativo disponível para os alunos realizarem esta atividade.

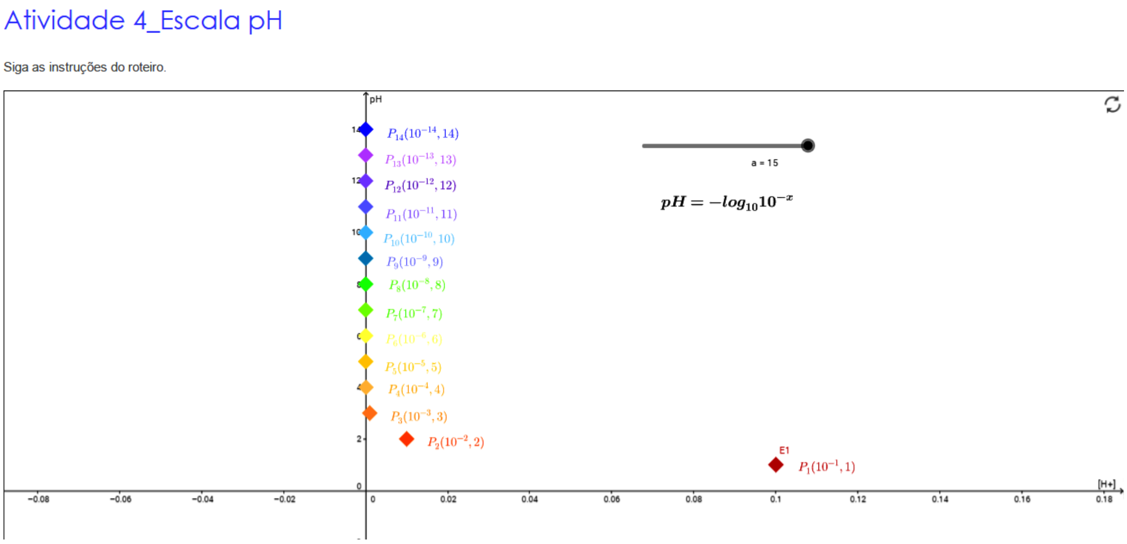


Figura 99: gráfico para a realização da Atividade 4.

Após a manipulação do aplicativo, os alunos deveriam responder às seguintes questões:

1. Quanto maior o valor de $[H^+]$, ou seja, se aumentamos o valor de x, o que podemos dizer sobre a acidez?

Resposta esperada: *O pH é cada vez mais ácido.*

2. Quanto menor o valor de $[H^+]$, ou seja, se diminuímos o valor de x, o que podemos dizer sobre a acidez?

Resposta esperada: *Quanto menor o valor de x, mais básica é a substância.*

3. Considerando a tabela a seguir, escreva as substâncias em ordem crescente de acidez.

Substância	$[H^+]$ (mol/L)	Acidez
Leite	10^{-7}	7
Café	10^{-5}	5
Refrigerante	10^{-3}	3
Suco de tomate	10^{-4}	4
Clara de ovo	10^{-8}	8
Leite de magnésia	10^{-10}	10
Urina	10^{-6}	6

Resposta esperada: *(Base) Leite de magnésia, clara de ovo, leite (neutro), urina, café, suco de tomate, refrigerante (ácido).*

Observamos que os alunos não tiveram dificuldades de responder as questões 1, 2 e 3, observando o gráfico e utilizando a tabela em cores disponibilizada no Blog.

4. Como podemos explicar o sinal negativo de $pH = -log[\mathrm{H+}]$?

Resposta esperada: *A concentração é um valor muito pequeno, menor que zero, logo seu logaritmo é um valor negativo.*

Observamos que, para responder a esta questão, o aluno precisava conhecer as propriedades de logaritmos. Como esta turma não viu este conteúdo na disciplina de Matemática, não tiveram condições de respondê-la.

5. O que podemos concluir sobre a relação entre a acidez de uma substância e $[H^+]$?

Resposta esperada: <u>*Quanto menor a concentração de íons de hidrogênio mais básica é a solução.*</u>

Neste caso, os alunos conseguiram concluir corretamente a questão.

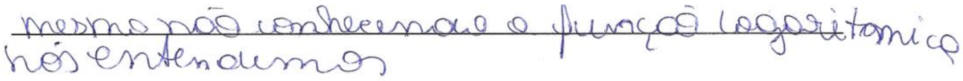
Seus conhecimentos adquiridos com o estudo da Função Logarítmica auxiliaram na análise da Escala de pH em função de $[H^+]$?

Resposta Pessoal: ____

A Figura 100 apresenta algumas das respostas obtidas.

a) 

“Mesmo não tendo estudado eu entendi.”

b) 

“ Mesmo nós não conhecendo a função logarítmica nós entendemos.”

Figura 100: respostas obtidas sobre a atividade.

3.6 Oficina 5 – Função Seno e Ondas Sonoras

Esta oficina tem por objetivo fazer com que o aluno consiga perceber que a equação da onda é uma função senoidal e que seus parâmetros seguem os mesmos critérios que os dessa função estudada na disciplina de Matemática, e portanto, os conhecimentos utilizados na Matemática para o estudo gráfico da função quadrática podem ser transferidos para a Física.

Esta oficina foi aplicada a um grupo de 14 alunos do segundo ano do Ensino Médio do turno da manhã, durante dois períodos em que o professor titular estava de laudo médico. Os alunos já haviam visto na disciplina de Matemática o conteúdo de função seno, mas ainda não estudaram ondas na disciplina de Física.

A descrição completa e detalhada desta atividade encontra-se no anexo. Na sequência, apresentaremos a oficina desenvolvida pelos alunos, seguida das respostas esperadas e observações sobre a aplicação.

O aplicativo desenvolvido para esta atividade tem a interface apresentada na Figura 101.

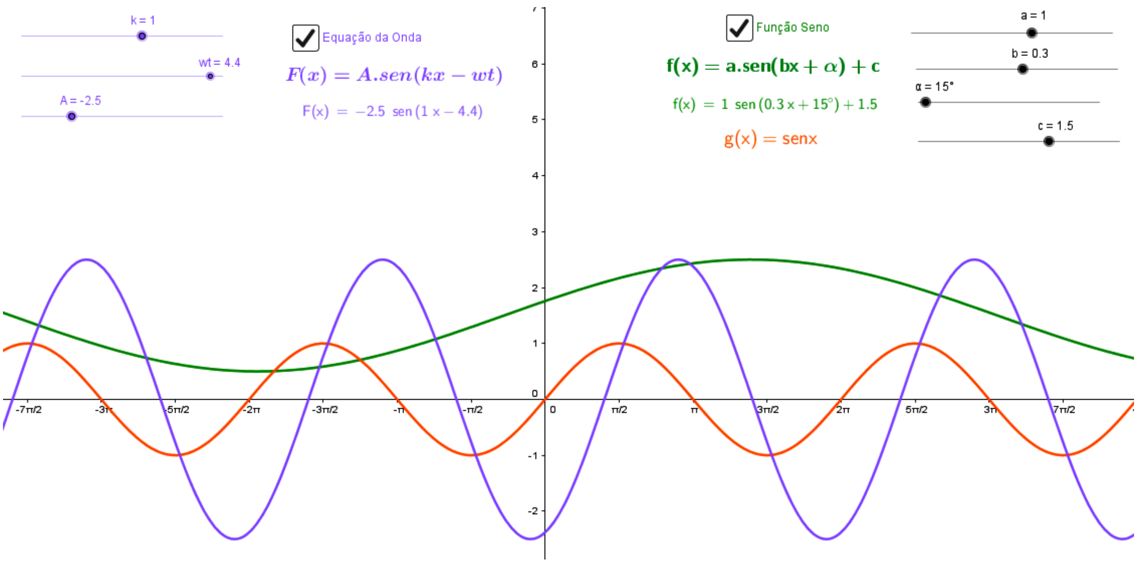


Figura 101: Interface da atividade seno e equação da onda.

Na primeira etapa da oficina, os alunos fizeram a manipulação do aplicativo da função seno conforme a Figura 102.

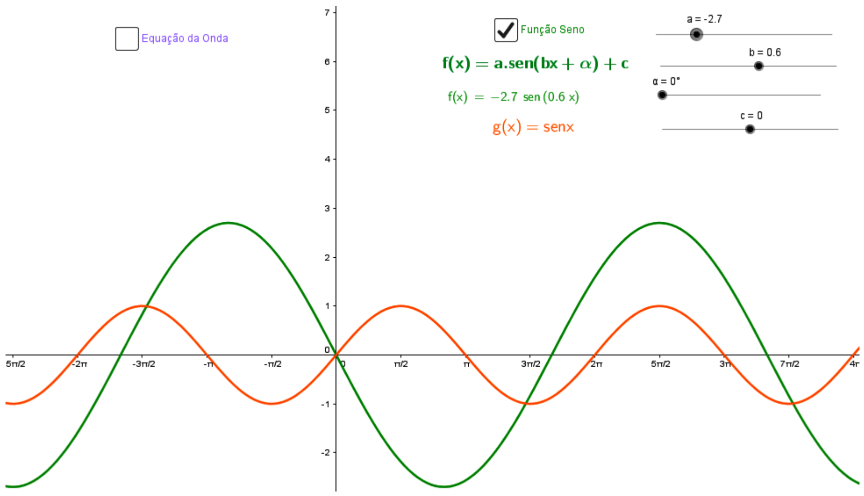


Figura 102: Aplicativo para manipulação da função seno.

A seguir, modificando os parâmetros por meio dos controles deslizantes e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível responder às questões abaixo descritas:

Para responder às questões a seguir, os alunos foram orientados a manter os parâmetros $b = 1, \propto = 0\ e\ c = 0$.

1. O que ocorre com a imagem da função $f(x) = a\ sen(1x + 0) + 0$ quando aumentamos o valor de a para valores $a > 0$?

   Resposta esperada: _O intervalo de variação da imagem da função aumenta conforme o valor escolhido para a e $Im = [-a, a]$_

E o que ocorre com a amplitude do gráfico da função?

   Resposta esperada: _aumento da amplitude, conforme o aumento do valor de a. A Figura 103 apresenta um exemplo._

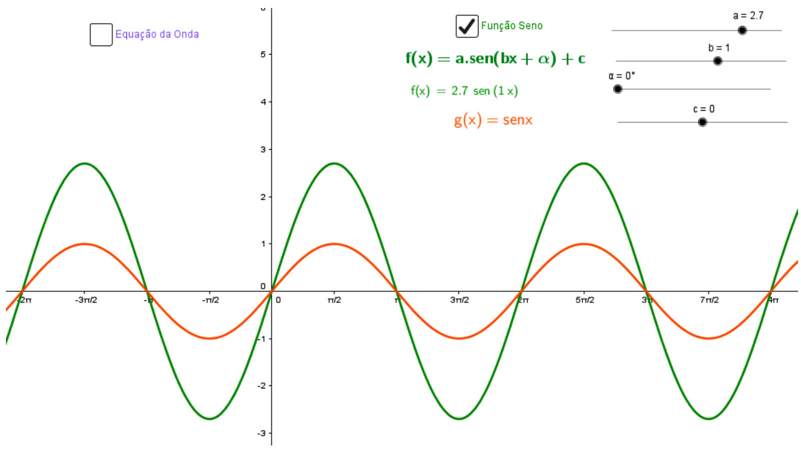


Figura 103: Função com amplitude e imagem alteradas.

2. O que ocorre com a imagem da função $f(x) = a\, sen(1x + 0) + 0$ quando diminuímos o valor de a para valores $a < 0$?

   Resposta esperada: _O intervalo de variação da imagem da função aumenta proporcionalmente ao valor escolhido para a e $Im = [-a, a]$. Há uma inversão do gráfico da função, ele fica refletido sobre o eixo x._

E o que ocorre com a amplitude do gráfico da função?

Resposta esperada: _A amplitude aumenta, conforme diminuímos o valor de a. A Figura 104 apresenta um exemplo._

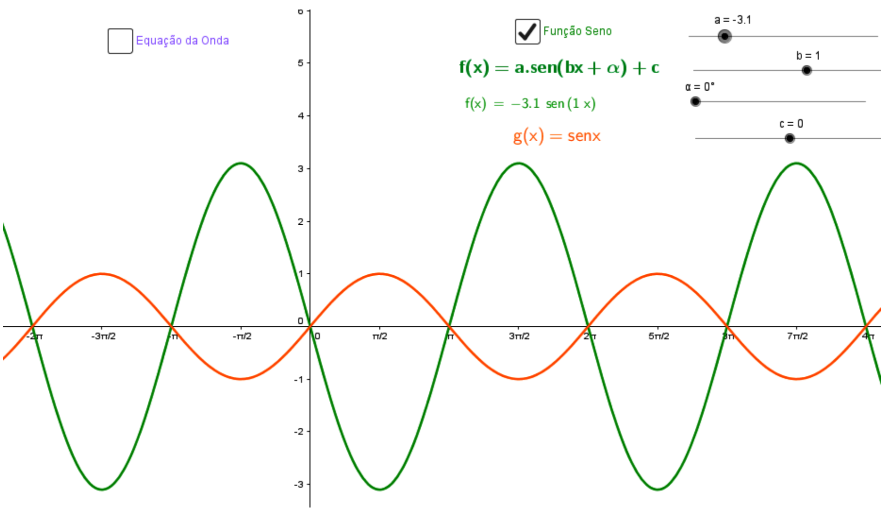


Figura 104: Função com amplitude e imagem alteradas e refletido em relação ao eixo x.

3. O que podemos concluir sobre a variação do gráfico da função $f(x) = a\, sen(bx + \propto) + c$ quando variamos o parâmetro a?

   Resposta esperada: _Podemos concluir que a variação do parâmetro a modifica de forma diretamente proporcional o intervalo que define a imagem da função e a amplitude do gráfico da função é definida pelo valor absoluto de a, ou seja, $A = |a|$_

Observamos, durante a aplicação, que os alunos não tiveram dificuldades para realizar as atividades 1, 2 e 3, respondendo de acordo com o esperado.

Para responder às questões a seguir, os alunos foram orientados a manter os parâmetros $a = 1, \propto = 0\ e\ c = 0$.

4. O que ocorre com a imagem da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando variamos o valor de b com $b \neq 0$?

   Resposta esperada: _A imagem não se altera._

5. O que ocorre com a amplitude da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando variamos o valor de b com $b \neq 0$?

   Resposta esperada: _A amplitude não se altera._

6. O que ocorre com o período da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando aumentamos o valor de b quando $b > 0$?

   Resposta esperada: _Quanto maior o valor positivo de b menor o período da função. A Figura 105 apresenta um exemplo de função onde o período foi alterado._

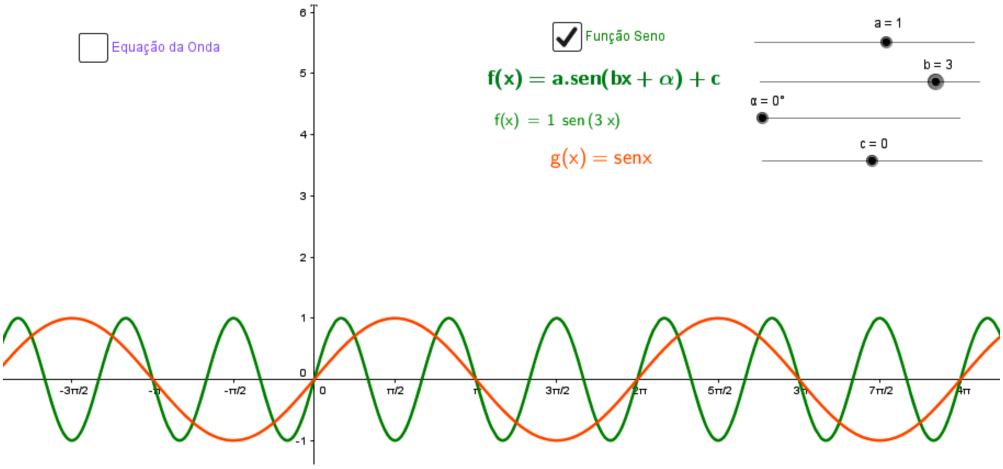


Figura 105: Função com alteração no período.

7. O que ocorre com o período da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando diminuímos o valor de b quando $b > 0$?

   Resposta esperada: _Quanto mais próximo de zero o valor positivo de b maior é o período da função._

8. O que ocorre com o período da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando diminuímos o valor de $b$quando $b < 0$, ou seja, quando afastamos o valor de b de zero?

Resposta esperada: *<u>Quanto menor for o valor de b negativo menor o período da função.</u>*

9. O que ocorre com o período da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando aumentamos o valor de b quando $b < 0$, ou seja, quando aproximamos o valor de b a zero?

   Resposta esperada: *<u>Quanto maior o valor negativo de b maior o período da função, conforme apresenta um exemplo na Figura 106.</u>*

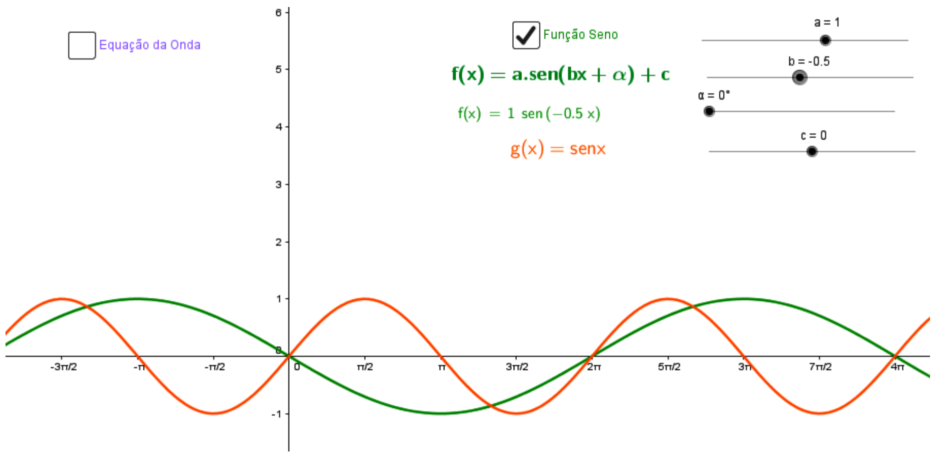


Figura 106: Gráfico com o período alterado.

Observamos, durante a aplicação, que os alunos não tiveram dificuldades para realizar as atividades de 4 até a 9, respondendo de acordo com o esperado.

Para responder às questões a seguir, os alunos foram orientados a manter os parâmetros $a = 1, b = 1\ e\ c = 0$.

10. O que ocorre com o período da função $f(x) = 1\,sen(1x{+}\propto) + 0$ quando variamos o valor de $\propto$? Resposta esperada: *<u>Não se altera.</u>*

    E o que ocorre com a amplitude? Resposta esperada: *<u>Não se altera.</u>*

11. O que ocorre com a imagem da função $f(x) = 1\,sen(1x{+}\propto) + 0$quando variamos o valor de $\propto$?

    Resposta esperada: *<u>Não se altera.</u>*

Observamos, durante a aplicação, que os alunos não tiveram dificuldades para realizar as atividades de 10 e 11, respondendo de acordo com o esperado.

Para responder às questões a seguir, os alunos foram orientados a manter os parâmetros $a = 1, b = 1\ e\ \propto = 0$.

12. O que ocorre com o período da função $f(x) = 1sen(1x + 0) + c$ quando variamos o valor de c? Resposta esperada: *<u>Não se altera.</u>* E com a amplitude? Resposta esperada: *<u>Não se altera.</u>*

13. Há alteração na imagem da função $f(x) = 1\ sen(1x + 0) + c$ quando alteramos o valor de c?
Resposta esperada: *<u>Sim, pois o gráfico da função se desloca verticalmente, e consequentemente sua imagem é alterada. A Figura 107 apresenta um exemplo de variação da imagem.</u>*

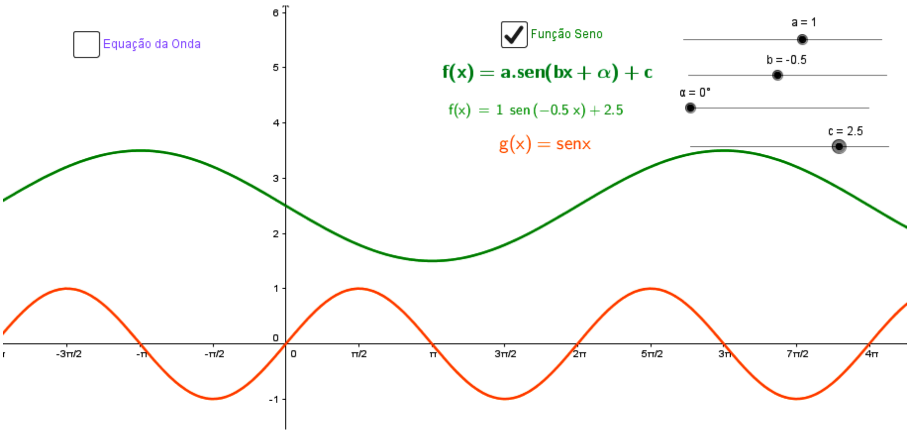


Figura 107: Alteração na imagem da função.

Na segunda parte da atividade, os alunos aplicaram os conhecimentos adquiridos sobre função seno no estudo da onda, uma aplicação na Física.

3.6.1 Aplicação na Física

Para esta etapa da oficina, os alunos foram orientados a desativar a caixa *Função Seno* e ativar a caixa *Equação da Onda* no aplicativo que estava sendo utilizado, ficando com a interface da Figura 108 para manipulação.

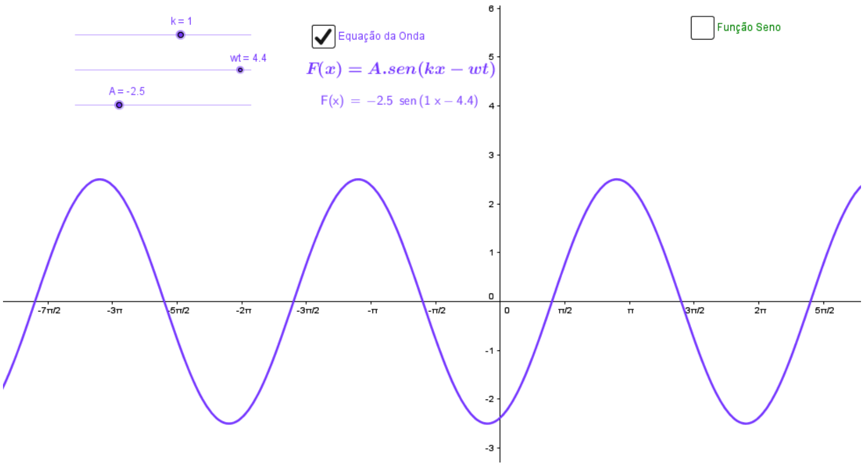


Figura 108: Interface para manipulação da equação da onda.

A seguir, modificando os parâmetros por meio dos controles deslizantes e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível responder às questões abaixo descritas:

1. Se aumentarmos o valor do parâmetro A, o que ocorre com a qualidade do som?

   Resposta esperada: <u>*A amplitude altera a intensidade do som, logo se aumentarmos A, teremos o som mais forte.*</u>

2. Se diminuirmos o valor do parâmetro A, o que ocorre com a qualidade do som?

   Resposta esperada: <u>*A amplitude altera a intensidade do som, logo se diminuirmos A, teremos o som mais fraco.*</u>

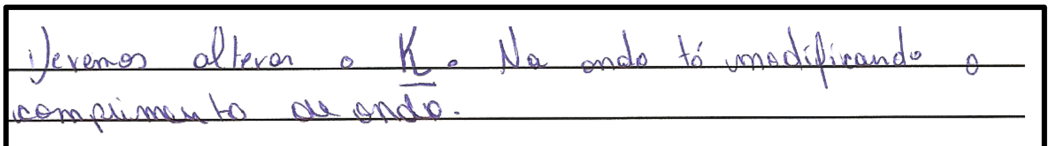
Observamos que, apesar de os alunos não terem visto o conteúdo de equação da onda na disciplina de Física, com as informações contidas no texto e a manipulação do aplicativo, foram capazes de responder às questões 1 e 2 conforme o esperado.

Para responder à questão de número 3, foi importante salientar informações da Física, tais como: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $v = \lambda\, f$, para que os alunos pudessem responder às seguintes questões:

3. O que devemos alterar na equação da onda para alterarmos a frequência f?

   Resposta esperada: *A velocidade de uma onda em determinado meio é constante, logo a frequência é inversamente proporcional ao comprimento de onda, logo para alterar a frequência podemos alterar o comprimento de onda, e na equação da onda isso pode ser feito alterando o valor de k.*

Observamos, durante a oficina, que os alunos ficaram com certo receio em relação a esta questão, pois não souberam fazer a relação através das equações sugeridas, então a professora orientou que eles utilizassem os controles deslizantes para responder à questão, assim eles conseguiram visualmente reconhecer a modificação necessária para alterar a frequência. Podemos observar, na Figura 109, a resposta de uma dupla.



“Devemos alterar o K. Na onda tá modificando o comprimento de onda.

Figura 109: Resposta de uma dupla para questão 3.

4. Para tornar o som mais grave, devemos alterar que parâmetro na equação da onda? O que ocorre com o valor de λ?

   Resposta esperada: *Para tornar mais grave é preciso diminuir a frequência, ou seja, diminuir o valor de k, para isso o λ deve ser aumentado, pois como a velocidade é constante, quando diminuímos a frequência, consequentemente o λ comprimento de onda deve ser aumentado, podemos observar na Figura 110.*

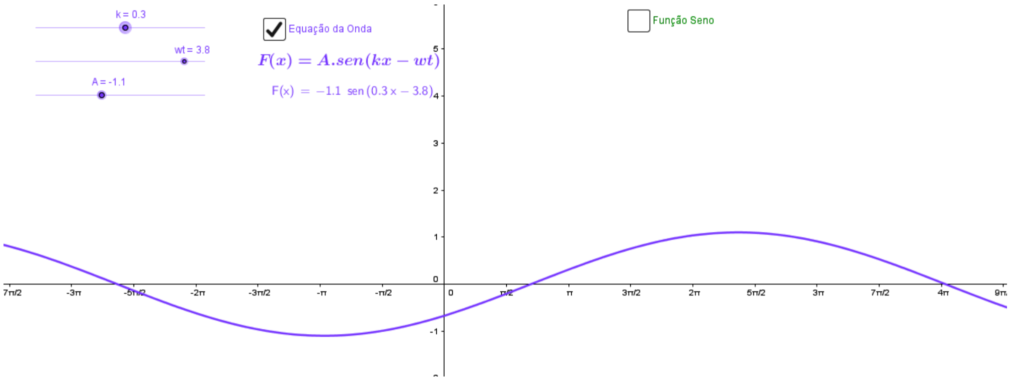


Figura 110: Exemplo de gráfico de baixa frequência e grande comprimento de onda.

Podemos observar, na Figura 111, as respostas de duas duplas para a questão 4.

(1)

DEVEMOS ALTERAR A FREQUÊNCIA. O COMPRIMENTO DA ONDA É ALTERADO FICANDO MAIS ESPICHADA.

“Devemos alterar a frequência. O comprimento de onda é alterado, ficando mais espichada.”

(2)

O seu comprimento deve aumentar.

“O seu comprimento deve aumentar.”

Figura 111: Respostas questão 4.

5. Para tornar o som mais agudo, devemos alterar que parâmetro na equação da onda? O que ocorre com o valor de λ?

   Resposta esperada: <u>*Para tornar o som mais agudo é preciso ter maior frequência, ou seja, é necessário diminuir o comprimento de onda, portanto devemos aumentar o valor de k na função, podemos observar a variação gráfica na Figura 112.*</u>

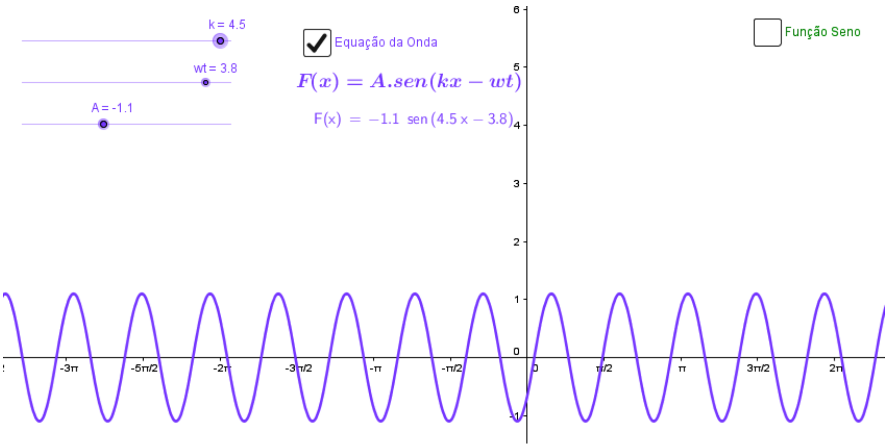
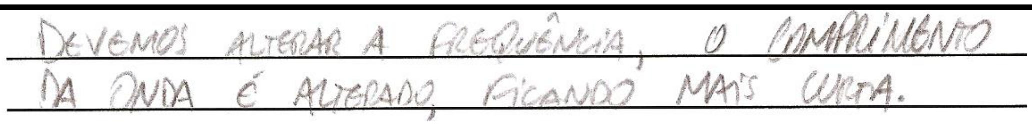


Figura 112: Gráfico com grande frequência e pequeno comprimento de onda.

Podemos observar, na Figura 113, a resposta de uma dupla para a questão 5.



“Devemos alterar a frequência, o comprimento de onda é alterado, ficando mais curta”

Figura 113: Resposta de uma dupla para a questão 5.

Observamos, durante a oficina, que os alunos conseguiram responder às questões 3, 4 e 5 conforme o esperado através da manipulação gráfica.

A terceira e última parte desta oficina consiste em uma atividade prática sobre o movimento senoidal e a equação da onda.

3.6.2 “Ouvindo uma Onda Senoidal”

Para esta atividade, os alunos foram orientados a abrir o link Ouvindo a Onda disponível no Blog, que consiste em uma atividade prática onde o aluno poderá perceber essas variações na qualidade do som. Este applet foi desenvolvido por

BORTOLOSSI (2013) no software GeoGebra disponibilizado com o nome de **“Ouvindo uma Onda Senoidal”**. A Figura 114 apresenta a interface do applet.

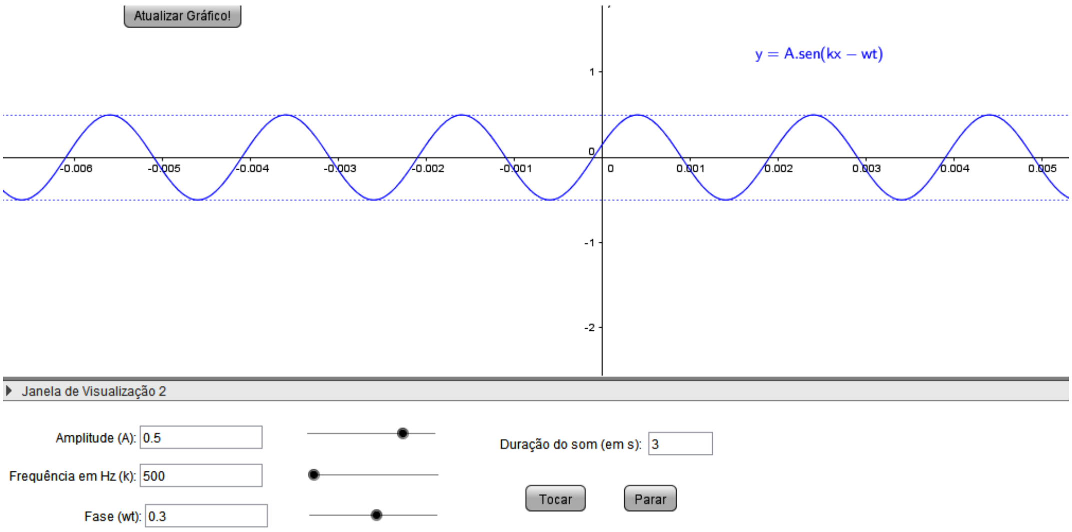


Figura 114: Applet “Ouvindo uma onda senoidal”.

A seguir, modificando os parâmetros por meio dos controles deslizantes e da sequência de passos descritas no roteiro, foi possível ouvir o som produzido e responder às questões abaixo descritas:

1. Altere, através do controle deslizante, o valor da Amplitude e observe o que ocorre com o som.

a) Descreva o que você pode constatar em relação às qualidades do som.

Resposta esperada: *Quanto maior a amplitude mais forte é o som, maior volume. Menor amplitude, som mais fraco.*

b) Você percebeu alguma semelhança no som quando a amplitude era negativa ou positiva? Se percebeu, que semelhança é essa?

Resposta esperada: *Independente do sinal, quanto maior o valor absoluto da amplitude, mais forte o som.*

2. Altere através do controle deslizante o valor da Frequência, medida em Hz (Hertz).

a) Descreva o que você pode observar em relação as qualidades do som.

Resposta esperada: *A frequência altera a altura do som, som agudo ou grave.*

b) O que ocorre quando aumentamos a frequência? E quando diminuímos?

Resposta esperada: *Quanto maior a frequência mais agudo é o som. Quanto menor a frequência mais grave é o som.*

3. Quando alteramos a fase (wt) ocorre alguma alteração no som?

Resposta esperada: *Não.*

Observamos que os alunos não tiveram dificuldades nas questões de 1 a 3, respondendo conforme o esperado.

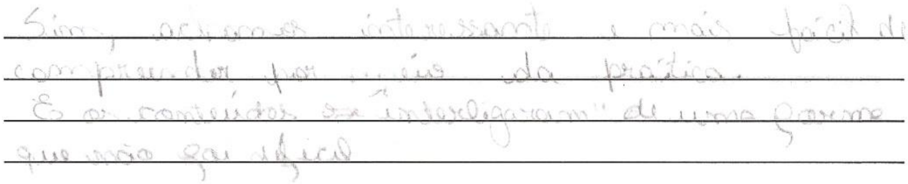
Ao final da atividade, os alunos foram questionados sobre suas percepções acerca da atividade e em relação ao conteúdo trabalhado.

Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em Matemática e o que você aprendeu na Física através desta atividade? Relate o que você achou desta experiência.

Resposta Pessoal____

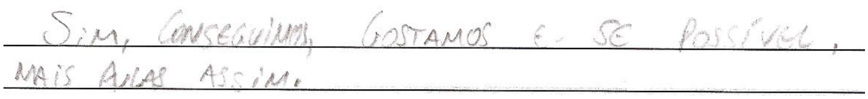
Na Figura 115, podemos observar algumas respostas obtidas.

(1)



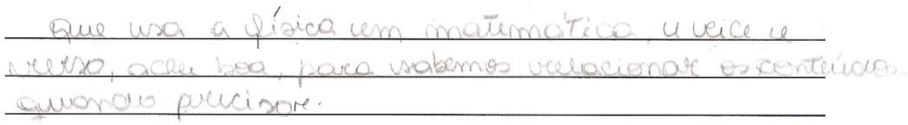
“Sim, achamos interessante e mais fácil de compreender por meio da prática. E os conteúdos se interligam de uma forma que não é difícil.”

(2)



“Sim, conseguimos. Gostamos e se possível mais aulas assim.”

(3)



“Que usa a física em matemática e vice e versa, achei boa, para sabermos relacionar os conteúdos quando precisar.”

Figura 115: Considerações de algumas duplas sobre a oficina.

Após a realização dessas atividades, acreditamos que o próximo passo seria mostrar aos alunos como manipular o software para que os mesmos tivessem condições de construírem os gráficos de aplicações vistas em sala de aula sobre cada um dos assuntos trabalhados, ou até mesmo o professor disponibilizar aos alunos outros exemplos de atividades para que os mesmos construírem seus gráficos e resolverem os problemas por meio do GeoGebra.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar e aplicar propostas de atividades que integrassem os conteúdos de funções estudados na área da Matemática com aplicações em problemas da área das Ciências da Natureza por meio do GeoGebra. Para isso, abordamos sobre o uso de tecnologias e, em especial, o software GeoGebra. Além disso, fizemos uma pesquisa na Proposta Pedagógica para o Ensino Politécnico do Estado do Rio Grande do Sul, assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais, além de livros didáticos atuais utilizados no Ensino Médio Politécnico sobre a importância e a utilização das funções em outras áreas do conhecimento.

As atividades produzidas foram disponibilizadas em um Blog e por meio de oficinas foram aplicadas com alunos de Ensino Médio, em dois momentos. O primeiro momento foi em 2014, quando, ao final das oficinas, verificamos que era necessário fazer adaptações nas atividades. Feitas tais modificações, em setembro e outubro de 2015, foram realizadas novas oficinas e, a partir destas, foi realizado o relato da aplicação, bem como obtidas as conclusões em termos de atividades com potencial para uso interdisciplinar.

O trabalho traz as cinco oficinas que foram criadas e aplicadas a alunos de primeiro e segundo anos do Ensino Médio, juntamente com as respostas esperadas e algumas respostas obtidas, consideradas mais relevantes para cada questão.

Percebemos, durante as oficinas, que foi bastante motivador para os alunos realizarem um trabalho diferenciado por meio de software, tornando a aula mais dinâmica. Apesar da pouca infraestrutura disponível nas salas de informática utilizadas, fazendo com que os alunos tenham que trabalhar em duplas e por vezes em trios, mesmo assim, o trabalho foi realizado com êxito.

Acreditamos que, para um melhor aproveitamento nas oficinas, é importante que os alunos tenham estudado os conteúdos previamente em sala de aula com o professor, e, posteriormente, sejam utilizadas as atividades sugeridas neste trabalho. Acreditamos também que recordar os conteúdos por meio dos aplicativos em sala de aula, no momento em que estes forem retomados, seja importante para que a oficina não seja um momento isolado do resto das aulas. Além disso, ter o feedback em sala de aula é importante para os alunos relacionarem o que viram no laboratório com o que é trabalhado no seu dia a dia.

O trabalho integrado com os professores das demais disciplinas seria o ideal, pois os alunos poderiam relacionar o que foi trabalhado na oficina com o que é trabalhado em sala de aula, fazendo a relação com a Matemática e dando continuidade ao trabalho de forma independente. Neste caso, isso não foi possível de ser realizado, uma vez que a autora atua apenas com turmas de terceiros anos do Ensino Médio, não tendo como fazer um trabalho integrado juntamente com os professores e alunos dos primeiros e segundos anos.

O ideal é trabalhar com turmas em que o professor atua diariamente de primeiro e segundos anos, em que trabalha os conteúdos referentes às oficinas diretamente com os alunos, para, posteriormente, utilizar os recursos abordados neste trabalho, e, assim, poder trabalhar de forma integrada com os professores das demais disciplinas que atuam nessas turmas, fazendo um trabalho conjunto e integrado.

Para mim, como professora de Ensino Médio, atuante no Ensino Politécnico a realização deste trabalho contribuiu para conhecer mais sobre o GeoGebra e suas funcionalidades, além de ampliar meus conhecimentos sobre alguns conteúdos das Ciências da Natureza e assim poder incrementar minhas aulas com exemplos e conteúdos afim entre as duas áreas do conhecimento.

Após a aplicação das oficinas, acreditamos que as atividades possam ser um recurso útil a ser utilizado pelos professores de forma a complementar suas aulas. Observamos que pensamos em termos complementar, no que tange ao uso das mesmas nas disciplinas de Seminários Integrados, visto que acreditamos que as atividades isoladas não garantem a aprendizagem. A forma com que o professor conduzirá as oficinas é crucial para que os objetivos da proposta sejam atendidos, no anexo disponibilizamos um guia do professor com sugestões de como conduzir as atividades, juntamente com as oficinas para serem impressas aos alunos.

As escolas estão cada dia sendo mais equipadas com computadores e outras tecnologias e acreditamos que o professor deve estar preparado para utilizar adequadamente estes recursos e promover não somente a inserção dos alunos no mundo tecnológico, mas, acima de tudo, garantir que estes entes promovam a aprendizagem de novos saberes.

Ciente da carência de tempo dos professores para produzir materiais diferenciados para suas aulas, e da necessidade de interdisciplinaridade que a escola exige hoje, pensamos que esta proposta possa servir de sugestão para os professores utilizarem em suas aulas de Matemática no ensino de funções no Ensino Médio.

Concluindo, esperamos que este trabalho possa contribuir, de alguma forma, para o ensino de funções na Matemática e que facilite o entendimento das diversas funções que estão presentes nas Ciências da Natureza, uma vez relacionadas com os conhecimentos apreendidos na Matemática. Pretendemos, além de oferecer aos professores uma nova metodologia para o ensino de funções e suas aplicações, oportunizar um momento de reflexão sobre o ensino da Matemática e, com isso, incentivar outros professores a fazer uso de tecnologias.

REFERÊNCIAS

ARTUSO, A. R.; WRUBLEWSKI, M. **Física**. Curitiba: Positivo. 2013. v. 1.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. v. 1. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 2002.

BORTOLOSSI, H. J. **Ouvindo uma onda senoidal.** 2013. Disponível em: <http://www.geogebratube.org/material/show/id/48682> Acesso em: 23 nov. 2014.

BORTOLOSSI, H. J. **Aulas Cálculo I-A Período 2014.1**. 2014. Disponível em: < http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2014.1/gma00108/index.html> Acesso em 31 nov. 2015.

BULEGON, A. M.; TREVISAN, M. do C. B. **O uso do GeoGebra, Funções Trigonométricas e sons musicais como recursos motivacionais para o ensino de Acústica no ensino médio.** Disponível em: <http://laclo2011.seciu.edu.uy/publicacion/laclo/laclo2011_submission_54.pdf> Acesso em 23 nov. 2014.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. 2.ed. São Paulo: Ática, 2013.

FUGITA, F. **Matemática, 1ª série: ensino médio.** São Paulo: Edições SM, 2009a. (Coleção ser protagonista).

_______**Matemática, 2ª série: ensino médio.** São Paulo: Edições SM, 2009b. (Coleção ser protagonista).

HALLIDAY, D. 1916 – **Fundamentos de Física, volume 1: mecânica** / tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. – 8.ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HERNÀNDEZ, E. **MRU. Gràfics Del Moviment.** 2014. Disponível em <https://geogebratube.org/student/m146022> Acesso em 23 de novembro de 2014.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação.** Campinas, SP. Papirus, 2007. (Coleção Papirus Educação).

KESSLER, Ana Luiza de Freitas. **Aplicações de funções na área das Ciências da Natureza por meio do GeoGebra. 2014.** Disponível em: < http://analuizakessler.blogspot.com.br/> Acesso em 31 out. 2015.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo com Aplicações**. Ronaldo Sérgio de Biasi (trad.). 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a matemática** / organizadora Editora Moderna: obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013a. V.1.

_______concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013b. V.2.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2009

LIMA, E. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v 1. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PAIVA, M. **Matemática 1**. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013a.

REZENDE, W. M. et al. **Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra.** 1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra. ISSN 2237-9657, pp.74 - 89, 2012.

SANT'ANNA, B. **Conexões com a Física.** v.1. 1.ed. São Paulo: Moderna. 2010a.

______**Conexões com a Física**. v.2. 1.ed. São Paulo: Moderna. 2010b.

SEDUC - RS. **Proposta Pedagógica para o Ensino Médio Politécnico e Educação Profissional Integrada ao Ensino Médio (2011 – 2014).** Governo do Estado do Rio Grande do Sul: SEDUC, 2011.

SOUZA, J. R. de. **Novo olhar matemática**. Coleção novo olhar; 1.ed. São Paulo: FDT, v. 1, 2010a.

______**Novo olhar matemática**. Coleção novo olhar; 1.ed. São Paulo: FDT, v. 2, 2010b.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física.** v.1: **Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica**. SILVA, Fernando Ribeiro da. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

USBERCO, J.; SALVADOR, E. **Química**. Volume único. 5.ed reformulada. São Paulo: Saraiva, 2002

ANEXO

GUIA DO PROFESSOR

As atividades a seguir são sugestões de oficinas integradas entre Matemática e Ciências da Natureza direcionadas a alunos de primeiro e segundo ano do ensino médio.

Sugerimos tais atividades como complemento as aulas sobre funções, ou seja, nossa sugestão é que este material seja utilizado pelo professor após ter ensinado em sala de aula o conteúdo de cada função referente à oficina disponibilizada, para então fazer o estudo dos seus parâmetros graficamente e aplicar este conhecimento nas Ciências da Natureza com o auxílio do GeoGebra.

As oficinas abordam os seguintes assuntos sobre funções e as aplicações nas ciências da natureza seguem conforme o quadro abaixo:

Oficina	**Área das Ciências da Natureza**	**Ano indicado**
1. Função Afim e Movimento Retilíneo Uniforme	Física	1º ano
2. Função Quadrática e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado	Física	1º ano
3. Função Exponencial e Desintegração do Carbono-14 e Cultura de Bactérias	Química e Biologia	1º ano
4. Função Logarítmica e Escala pH	Química	1º ano
5. Função Seno e Ondas Sonoras	Física	2º ano

As atividades estão disponíveis no blog analuizakessler.blogspot.com.br na versão em “*.pdf” para impressão e também os links para acesso aos aplicativos do GeoGebra.

Sugere-se que o professor execute as atividades antes de aplicá-las aos alunos, pois em caso de dúvidas pode consultar essa dissertação que contem as respostas esperadas de cada pergunta.

No retorno para sala de aula, dando continuidade as aulas, é importante que o professor faça referência ao que foi visto na oficina com o conteúdo visto em sala de aula, para que a oficina não seja um momento desconexo do resto das aulas e sim parte integrante para o entendimento do conteúdo de funções.

Oficina 1 - Função Afim e Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

No **Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)**, tem-se um corpo deslocando-se em distâncias iguais em intervalos de tempos iguais, ou seja, estas variações são diretamente proporcionais, portanto podem ser descritas através de uma reta.

Analisemos o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\boldsymbol{f(x) = b + ax}$ com $a, b \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta função recebe o nome de **Função Afim**.

1. Como se comporta o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = b + ax}$ quando $a > 0$, crescente ou decrescente?

   ____

   a) O que ocorre no gráfico quando <u>aumentamos</u> o valor de a, com $a > 0$?

   ____

   ____

   b) O que ocorre com o gráfico quando <u>diminuímos</u> o valor de a, com $a > 0$?

   ____

   ____

2. Como se comporta o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = b + ax}$ quando $a < 0$, crescente ou decrescente?

   ____

a) O que ocorre no gráfico da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}$ quando aumentamos o valor de a, com $a < 0$, ou seja, quando aproximamos o valor do parâmetro "a" à zero?

____

____

b) O que ocorre no gráfico quando diminuímos o valor de a, com $a < 0$?

____

____

- Podemos concluir que ao modificar o parâmetro a estamos alterando o crescimento ou decrescimento da função, e também a inclinação da função em relação ao eixo x.

3. O que podemos observar no gráfico quando $a = 0$? Como se chama essa reta?

____

4. O que ocorre no gráfico da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}$ quando variamos o valor do parâmetro b? Se $b > 0$ e se $b < 0$?

____

____

____

- Podemos concluir que o parâmetro b gera um deslocamento vertical no gráfico, de forma que o ponto de intersecção da função com o eixo y é o ponto *(0,b).*

Aplicação na Física (MRU)

No **Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)** um corpo percorre sempre a mesma distância a cada intervalo de tempo igual, pois desenvolve velocidade constante.

A equação matemática que relaciona a posição s do móvel e o tempo t de percurso é chamada de **Função Horária do Espaço** de um corpo é do tipo

$$\boldsymbol{s = s_0 + vt}$$

em que v é a velocidade escalar constante desenvolvida pelo corpo e s_0 é a posição que ele ocupa no início da trajetória.

Ative o botão Função da posição MRU no arquivo GeoGebra e desative o botão Função Afim.

1. Ao relacionar a função horária do espaço $\boldsymbol{s = s_0 + vt}$ com a função afim $\boldsymbol{f(x) = b + ax}$ podemos dizer que a posição inicial s_0 do corpo se comporta conforme o comportamento de que parâmetro? E a velocidade escalar v que é constante se comporta como que parâmetro?

   ____

   ____

2. No MRU quando um corpo se desloca no mesmo sentido da orientação da trajetória dizemos que o movimento é classificado como **progressivo**, em comparação a função afim, diríamos que a função é **crescente**, logo podemos concluir que a velocidade é positiva ou negativa?

   ____

   ____

3. No MRU quando um corpo se desloca no sentido contrário ao da trajetória dizemos que o movimento é **retrógrado**, em comparação a função afim, diríamos que a função é **decrescente**, logo podemos concluir que a velocidade é positiva ou negativa?

   ____

   ____

4. No MRU quando um corpo permanece parado, em repouso, dizemos que sua velocidade é nula, ou seja, $v = 0$. Em comparação ao gráfico da função do

afim, o que podemos dizer sobre o valor de a e como chamamos o gráfico desse tipo? O que podemos concluir sobre o gráfico de um corpo em repouso no MRU?

Utilize o arquivo GeoGebra **Atividade Função Afim_Gráficos do MRU** para visualizar as alterações que ocorrem no gráfico da posição pelo tempo e da velocidade pelo tempo. Para isso modifique a posição inicial do móvel e observe. Após modifique a velocidade e observe além do gráfico o deslocamento do carro no eixo. Ao modificar o tempo você pode acompanhar a posição do móvel em cada segundo.

O que você observou nesta atividade, confere com as atividades realizadas anteriormente?

Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em matemática e o conteúdo da atividade referente ao conteúdo abordado na Física? Relate o que você achou desta experiência.

Oficina 2 - Função Quadrática e Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

O **Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)** de um corpo é caracterizado pela variação de sua velocidade, ocasionando percorrer distâncias variáveis na unidade de tempo. A descrição deste movimento pode ser feita através de uma equação quadrática.

Vamos analisar o comportamento gráfico da **Função Quadrática** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ através do GeoGebra.

1. Mantendo os parâmetros b, c constantes na função $\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c}$ e variando o parâmetro a:

a) O que podemos dizer sobre a concavidade da parábola ao modificar o parâmetro a, se $a > 0$ e se $a < 0$?

____

____

b) O que ocorre no gráfico quando aumentamos o valor de a quando $a > 0$?

____

____

c) O que ocorre no gráfico quando aproximamos de zero o valor de a quando $a > 0$?

____

____

d) O que ocorre no gráfico da função quando aumentamos o valor de a quando $a < 0$, ou seja, quando tornamos seu valor mais próximo de zero?

____

____

e) O que ocorre no gráfico quando diminuímos o valor de a quando $a < 0$?

____

____

- A abertura da parábola diminui a medida que o valor absoluto de a aumenta.

2. Ao variar o parâmetro b na função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$, e mantendo fixos os valores de a e c, observe o gráfico da função em relação a sua trajetória quando passa pelo eixo y. Qual é a diferença se $b > 0$ ou $b < 0$?

____

____

____

3. O que ocorre no gráfico da função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ quando modificamos o parâmetro c?

____

____

4. Sabendo que o discriminante da equação quadrática é $\Delta = b^2 - 4.a.c$. Variando os parâmetros a, b e c, da função $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$ observamos que o valor de Δ varia. O que podemos perceber em relação ao número de pontos de corte que o gráfico tem com o eixo x em relação ao valor de Δ? Quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$?

____

____

____

____

Aplicação na Física – Função Horária do Espaço no MRUV

Um corpo em movimento retilíneo acelerado (MRUV) varia o valor de sua velocidade. Em consequência, a distância percorrida pelo corpo em cada unidade de tempo também varia, de tal maneira que, se sua velocidade estiver aumentando, estará crescendo o espaço percorrido por unidade de tempo, e vice-versa.

A Função Horária do Espaço s de um corpo em MRUV com aceleração a, velocidade inicial v_0, e posição inicial s_0 é dada por: $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Um movimento é considerado **retrógrado** quando o sentido é contrário ao da orientação da trajetória ($v < 0$), e é **retardado** quando o módulo da velocidade do móvel diminui.

Um movimento é considerado **progressivo** quando o sentido é o mesmo da orientação da trajetória ($v > 0$), e é **acelerado** quando o módulo da velocidade do móvel aumenta.

Desative o botão Função Quadrática e ative o botão **Equação Horária do Espaço MRUV**.

1. Ao relacionar a função horária do espaço $\boldsymbol{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}At^2}$ com a função quadrática $\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c}$ podemos dizer que a posição inicial s_0 do corpo se comporta conforme o comportamento de que parâmetro? E a velocidade inicialv_0? E a expressão $\frac{1}{2}A$ que equivale a metade do valor da aceleração se comporta como que parâmetro?

   ____
   ____
   ____
   ____

2. Que parâmetro da equação $\boldsymbol{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}At^2}$ determina a **concavidade** da parábola que descreve a posição de um corpo em MRUV? E o que ele representa no MRUV?

.

3. O que significa o ponto de corte da parábola com o eixo y no gráfico da posição no MRUV?

4. Onde no gráfico podemos identificar a velocidade inicial do móvel? Descreva o que acontece quando esta velocidade é positiva e quando é negativa.

5. Ative o botão Variação da velocidade e observe a trajetória descrita pelo vértice da parábola ao variarmos o coeficiente V_0. Observe se o que você verificou anteriormente nas questões 3 e 4 conferem. Relate o que você pode observar em relação a variação da velocidade inicial e o traçado do gráfico.

Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em matemática e o a atividade referente ao conteúdo abordado na Física? Relate o que você achou desta experiência.

Oficina 3 - Função Exponencial e Desintegração do Carbono-14 e Cultura de bactérias

Vamos fazer a análise gráfica da variação dos parâmetros da **Função Exponencial** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $\boldsymbol{f(x) = ba^{dx} + c}$ com $a \in \mathbb{R}_+^*\ e\ a \neq 1, b, c, d \in \mathbb{R}$. Posteriormente aplicaremos estes conhecimentos no estudo da função $\boldsymbol{N(t) = Noe^{at}}$ que descreve o número de bactérias de uma cultura, presentes no estudo de Biologia e também para analisarmos a função $\mathbf{M(t)} = \boldsymbol{M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{at}}$ que descreve a desintegração do Carbono-14 de um organismo, estudo presente na Química.

Vamos analisar o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = ba^{dx} + c}$ com $a > o\ e\ a \neq 1$

Com $b = d = 1, c = 0$

1. Por que a definição da função exponencial $f(x) = ba^{dx} + c$ diz que $a > o$ e $a \neq 1$.

a) O que acontece com o gráfico se $a < 0$? ______________________________

b) O que acontece com o gráfico se $a = 1$? ______________________________

____

2. Vamos explorar o que acontece com o gráfico da função$f(x) = ba^{dx} + c$ se $a > 0$.

a) Se $0 < a < 1$, quanto maior o valor de x, o valor de $f(x)$ aumenta ou diminui? Ou seja, o gráfico da função é crescente ou decrescente neste intervalo?

____

____

b) Se $a > 1$, a medida que aumentamos o valor de x, o valor de $f(x)$ aumenta ou diminui? Ou seja, o gráfico da função é crescente ou decrescente neste intervalo?

____

____

3. Mantendo $a > o\ e\ a \neq 1$, e c fixos, o que ocorre quando variamos b na função $f(x) = ba^{dx} + c$

a) Se $b > 0$observe o ponto de corte do gráfico da função no eixo y.

b) Se $b < 0$observe o ponto de corte do gráfico da função no eixo y.

c) Qual a relação entre o valor de b e o ponto de corte do gráfico da função sobre o eixo y?

____

____

d) Se $b = 0$ e $c = 0$ como fica o gráfico? E se $b = 0$ e $c \neq 0$ como fica o gráfico?

____

____

Com $a > 0, b = 1\ e\ d = 1$. Acione a caixa de texto Assíntota horizontal.

4. O que podemos dizer sobre o deslocamento do gráfico da função $f(x) = ba^{dx} + c$ quando variamos o parâmetro c?

____

____

____

a) Tal deslocamento altera a imagem da função?

____

b) Se aumentarmos o valor de c o que acontece com o gráfico?

____

c) Se diminuirmos o valor de c o que acontece com o gráfico?

____

d) Ao variarmos o valor de c, podemos perceber que o gráfico desta função está se aproximando de que número?

____

____

- Podemos concluir que a **imagem** da função $f(x) = ba^{dx} + c$ varia conforme a variação do parâmetro c e que a assíntota horizontal é uma reta $y = c$ paralela ao eixo x, valor o qual a função chega muito próxima, mas nunca é atingido. A imagem da função é o intervalo $Im =]c, \infty[$.

- Com $a > 1$, $b = 1$, $c = 0$

5. Ao aumentarmos o valor do parâmetro d, com $d > 0$, podemos observar no gráfico da função$f(x) = ba^{dx} + c$ um crescimento mais rápido ou mais lento para os valores da função?

____

____

____

6. Ao diminuirmos o valor do parâmetro d, com $d < 0$, podemos observar no gráfico da função $f(x) = ba^{dx} + c$ um decrescimento mais rápido ou mais lento para os valores da função?

____

____

____

7. Qual é o **domínio** da função$f(x) = ba^{dx} + c$, se $a > 0$ e $a \neq 1$,independente dos valores dos outros parâmetros?

____

Aplicação na Biologia – Cultura de bactérias

Ao compararmos os gráficos das funções $\boldsymbol{g(t) = e^{t}}$ com o gráfico da função $\boldsymbol{N(t) = Noe^{at}}$ que descreve o número de bactérias de uma cultura, depois de um tempo *t*, onde No é o número inicial de bactérias e α é a taxa de crescimento que varia de 0,01 até 1. Sabendo que e é um número irracional positivo, e tem como aproximação 2,71.

1. A função $\boldsymbol{N(t) = Noe^{\alpha t}}$ é crescente ou decrescente? Por quê?

____

2. O que ocorre no gráfico da função$\boldsymbol{N(t) = Noe^{\alpha t}}$ quando alteramos o valor do número inicial No de bactérias dessa cultura?

____

3. O que acontece com o número de bactérias quando aumentamos o valor de α? O que isso significa para o crescimento da cultura de bactérias, mais rápido ou mais lento?

____

4. O que acontece com o número de bactérias quando diminuímos o valor de α? O que isso significa para a o crescimento da cultura de bactérias, mais rápido ou mais lento?

____

Aplicação na Química

Desintegração Radioativa de uma substância - Datação com carbono-14.

Chama-se datação as técnicas utilizadas para descobrir a idade de objetos e vestígios arqueológicos encontrados na natureza. O método utilizado com o carbono-14 (C^{14}) permite verificar com precisão a idade real da peça analisada, desde que seja de origem orgânica.

O isótopo de carbono, o C^{14} é formado em camadas superiores da atmosfera por bombardeios de raios cósmicos na terra. Os seres vivos absorvem o isótopo através da cadeia alimentar, quando o ser morre, cessa a absorção de C^{14}, e a quantidade existente no organismo passa a desintegrar-se, e é essa informação que permite determinar a idade do material analisado.

Sabemos que a meia vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que massa de um corpo formado por aquela substância se desintegre pela metade e pode ser calculada segunda a função $\boldsymbol{M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}}$ onde M_0 é a massa do corpo, α é a taxa de desintegração e t é o tempo decorrido. Sabendo que e é um número irracional positivo, e tem como aproximação 2,71.

Analise o gráfico da função $M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha t}$ ou $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ em comparação ao gráfico da função $\mathrm{g(t)} = \left(\frac{1}{e}\right)^{t}$.

1. A função $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ é crescente ou decrescente? Por quê?

   ____

2. O que ocorre com o gráfico da função $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ quando modificamos o valor de Mo (massa inicial do corpo)? O que isso significa para a quantidade de C^{14} na peça analisada?

   ____

3. O que ocorre no gráfico da função $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ quando aproximamos o valor de α à zero? O que acontece com a quantidade de C^{14} na peça analisada, sabendo que α representa a constante de desintegração do C^{14} em cada material?

   ____

   ____

4. O que ocorre no gráfico de $\mathrm{M(t)} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{\alpha t}$ quando aumentamos o valor de α? O que acontece com a quantidade de C^{14} na peça analisada, aumenta ou diminui, mais rápido ou mais lentamente? Sabendo que α representa a constante de desintegração do C^{14} em cada material?

   ____

   ____

Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em matemática e as atividades referentes a conteúdos abordados na Biologia e na Química? Relate o que você achou desta experiência.

____

Oficina 4 – Função Logarítmica e Escala pH

A escala de pH

O termo pH (potencial hidrogeniônico) foi introduzido, em 1909, pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen (1868-1939), com o objetivo de facilitar seus trabalhos no controle de qualidade de cervejas.

A **escala de pH, é uma escala logarítmica,** usada para medir a acidez de uma solução, que depende da **concentração de íons de hidrogênio** na solução. Essa concentração é representada pelo símbolo **[H$^+$]** e mols de íons de hidrogênio por litro. A escala de pH apresenta normalmente valores que <u>variam de zero a quatorze</u>. A expressão usada para calcular o pH é a seguinte:

$$pH = colog[\mathrm{H}+] \text{ ou } pH = -log[\mathrm{H}+] \text{ ou } pH = \log\frac{1}{[\mathrm{H}+]}$$

O valor de [H$^+$] para a água pura é 10^{-7}, o que significa que o pH da água pura é 7, onde <u>7 </u>representa o **neutro**. A substâncias cujo pH é <u>menor que 7</u> são chamados **ácidos**. Estas substâncias têm gosto azedo. As substâncias cujo pH é <u>maior que 7 </u>são chamadas de **bases**. Estas substâncias têm gosto amargo.

Tanto os ácidos como as bases são substâncias perigosas em altas concentrações, podendo, entre outras coisas, causar graves queimaduras.

Vamos utilizar o GeoGebra para analisar o comportamento gráfico da **Função Logarítmica**$f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot log(cx)}$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $(cx) > 0$ e posteriormente analisarmos a **Escala de pH** em função de [H$^+$].

1. Mantendo $a = 0$ e $b = 1$, vamos analisar o que acontece com o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot log(cx)}$.

a) Qual é o comportamento do gráfico da função quando $c > 0$, crescente ou decrescente?

____

b) O que ocorre no gráfico da função quando aumentamos o valor de c, com $c > 0$, o crescimento é mais lento ou mais rápido?

____

c) Qual é o comportamento do gráfico da função quando $c < 0$, crescente ou decrescente? E o que mais ocorre?

____

2. Mantendo $a = 0$ e $c = 1$, vamos analisar o que acontece com o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot log(cx)}$ ao variar o parâmetro b na função $f(x) = a + b \cdot log(cx)$.

a) O crescimento da função é mais rápido ou mais lento quando aumentamos o valor de b, com $b > 0$?

____

____

b) O que ocorre no gráfico quando b é negativo?

____

3. Mantendo $b > 0$ e $c > 0$ varie o parâmetro a da função$f(x) = a + b \cdot log(cx)$.

a) O que ocorre quando aumentamos o valor de a, com $a > 0$?

____

b) O que ocorre quando a é negativo?

____

Aplicação na química

Agora vamos analisar como se comporta a escala de pH, sabendo que é possível determinar o pH de uma solução através da função:$\boldsymbol{pH(H+) = -log}[\mathrm{H}+]$

Outro método bastante utilizado em laboratório para verificar a acidez de uma substância é o papel de tornassol. Sua faixa de viragem é ampla, de modo que só é usado para indicar se a solução é nitidamente ácida (quando fica vermelho) ou nitidamente básica (quando ele fica azul).

A escala de pH pode ser vista em cores conforme o esquema a seguir.

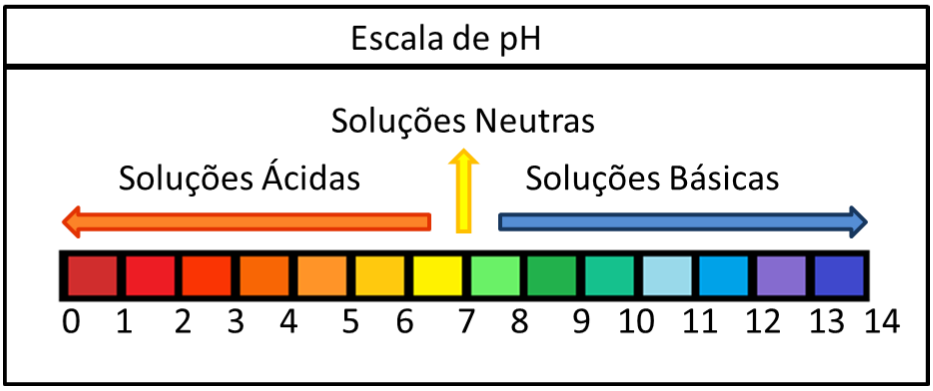


Figura: Escala de pH. Fonte o autor.

No arquivo GeoGebra Atividade 3_Escala de pH observe que o eixo x representa a concentração de H^+ e o eixo y é o valor do pH.

Os pontos indicados no gráfico representam os valores de

$$pH = -\log[H+] = -log10^{-x} = -(-x)log10 = x$$

1. Quanto maior o valor de $[H^+]$, ou seja, se aumentamos o valor de x, o que podemos dizer sobre a acidez?

____

2. Quanto menor o valor de $[H^+]$, ou seja, se diminuímos o valor de x, o que podemos dizer sobre a acidez?

____

3. Considerando a tabela a seguir, escreva as substâncias em ordem crescente de acidez.

Substância	$[H^+]$ (mol/L)	Acidez
Leite	10^{-7}	
Café	10^{-5}	
Refrigerante	10^{-3}	
Suco de tomate	10^{-4}	
Clara de ovo	10^{-8}	
Leite de magnésia	10^{-10}	
Urina	10^{-6}	

4. Como podemos explicar o sinal negativo de $pH = -log[\mathrm{H}+]$?

5. O que podemos concluir a relação entre a acidez de uma substância e $[H^+]$?

Seus conhecimentos adquiridos com o estudo da Função Logarítmica auxiliaram na análise da Escala de pH em função de $[H^+]$?

Oficina 5 – Função Seno e Ondas Sonoras

No estudo de Funções Trigonométricas conhecemos a função Seno definida por $f(x) = senx$ que é uma função periódica, com período igual a 2π e de domínio real. É uma função limitada de imagem igual a [-1,1] e de amplitude 1.

Nosso objetivo é utilizar os conceitos matemáticos estudados na análise gráfica da função Seno e aplicarmos estes conhecimentos adquiridos no estudo de ondas, na Física, onde é dada uma interpretação mais prática para cada um dos parâmetros da função Seno. Observe na Figura os elementos de uma onda.

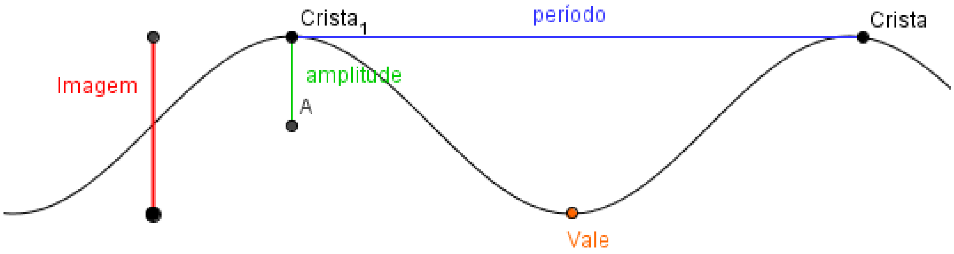


Figura: Elementos de uma onda.

- **Período** é o intervalo necessário para completar um ciclo completo.
- **Imagem** é o intervalo de variação do valor de f(x), intervalo de variação entre um vale e uma crista.
- **Amplitude** é a metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima do gráfico.
- **Crista** é o ponto máximo que a função atinge
- **Vale** é o ponto mínimo que a função atinge

Ao generalizarmos a função Seno como $\boldsymbol{f(x) = a\, sen(bx}{+}\propto) + \boldsymbol{c}$ com $a, b, c \in R$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $\propto \in [0,2\pi]$, podemos variar os parâmetros a, b, c e $\propto$, e verificar através do GeoGebra o que ocorre com seu gráfico em comparação ao gráfico de $f(x) = senx$.

- Mantendo os parâmetros $b = 1, \propto = 0$ e $c = 0$.

1. O que ocorre com a **imagem** da função $f(x) = a\, sen(1x + 0) + 0$ quando aumentamos o valor de a para valores $a > 0$?

___

E o que ocorre com a **amplitude** do gráfico da função?

2. O que ocorre com a **imagem** da função $f(x) = a\,sen(1x + 0) + 0$ quando diminuímos o valor de a para valores $a < 0$?

____

E o que ocorre com a **amplitude** do gráfico da função?

____

3. O que podemos concluir sobre a variação do gráfico da função $f(x) = a\,sen(bx + \propto) + c$ quando variamos o parâmetro a?

____

- Podemos concluir que a **imagem** da função $\boldsymbol{f(x) = a\,sen(bx + \propto) + c}$ variada seguinte forma: $Im = [-a, a]$ e a **amplitude** da função varia de acordo com o valor absoluto do parâmetro a, ou seja, de acordo com $|a|$.

- Mantendo os parâmetros $a = 1, \propto = 0\ e\ c = 0$.

4. O que ocorre com a **imagem** da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando variamos o valor de b com $b \neq 0$?

____

5. O que ocorre com a **amplitude** da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando variamos o valor de b com $b \neq 0$?

____

6. O que ocorre com o **período** da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando aumentamos o valor de b quando $b > 0$?

____

7. O que ocorre com o **período** da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando diminuímos o valor de b quando $b > 0$?

____

8. O que ocorre com o **período** da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando diminuímos o valor de b quando $b < 0$, ou seja, quando afastamos o valor de b de zero?

____

9. O que ocorre com o **período** da função $f(x) = 1\,sen(bx + 0) + 0$ quando aumentamos o valor de b quando $b < 0$, ou seja, quando aproximamos o valor de b a zero?

____

- Portanto o **período** da função $\boldsymbol{f(x) = a\,sen(bx{+}\propto) + c}$ diminui quando aumentamos o valor absoluto do parâmetro b e o período da função aumenta quando diminuímos o valor absoluto do parâmetro b.

- Mantendo os parâmetros $a = 1, b = 1\ e\ c = 0$.

10. O que ocorre com o **período** da função $f(x) = 1\,sen(1x{+}\propto) + 0$ quando variamos o valor de $\propto$? ______________________________
E o que ocorre com a **amplitude**? ______________________________

11. O que ocorre com a **imagem** da função $f(x) = 1\,sen(1x{+}\propto) + 0$ quando variamos o valor de $\propto$? ______________________________

- Podemos concluir há um **deslocamento horizontal** no gráfico da função $f(x) = a\,sen(bx{+}\propto) + c$ quando variamos o parâmetro $\propto$ e que este deslocamento não altera o período, nem a imagem nem a amplitude do gráfico da função.

- Mantendo os parâmetros $a = 1, b = 1\ e\ \propto = 0$

12. O que ocorre com o **período** da função $f(x) = 1sen(1x + 0) + c$ quando variamos o valor de c? ______________________________
E com a **amplitude**? ______________________________

13. Há alteração na **imagem** da função $f(x) = 1\,sen(1x + 0) + c$ quando alteramos o valor de c?

- Podemos concluir que há um **deslocamento vertical** no gráfico da função $f(x) = a\,sen(bx{+}\propto) + c$ quando variamos o parâmetro c, e, portanto há variação na imagem da função. A imagem da função fica definida tendo como extremos os valores $(-1) \cdot a + c$ e $(+1) \cdot a + c$

Aplicação na Física

No estudo da Física, nos deparamos com o estudo das ondas que são descritas pela Equação da Onda: $F(x) = Asen(kx - \omega t)$ onde:

- A é a **amplitude** da onda medida em metros.
- $\omega = 2\pi f$ é a **frequência angular.**
- f é o número de vezes que esse comprimento de onda ocorre na unidade de tempo, denominada **frequência** quantificada em hertz (Hz).
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o **número de onda** angular.
- λ é o **comprimento da onda**, é a distância entre duas cristas ou dois vales em metros (equivale a uma volta no ciclo trigonométrico).
- v é a **velocidade** de propagação de uma onda em um meio é constante e determinada por $v = \lambda\, f$.
- t é o **tempo**.
- x é a **posição**.

Observação: não estamos considerando o tempo como uma variável, pois no ensino médio estudamos apenas funções de uma única variável que neste caso é o x.

Ao estudarmos as qualidades fisiológicas do som nos deparamos com duas delas: altura e intensidade.

- A **altura** do som está relacionada com sua **frequência**.

Quanto maior a frequência sonora, mais agudo é o som, e quanto menor a frequência mais grave é o som.

- A **intensidade** sonora está ligada à **amplitude** das vibrações, e portanto à energia transportada pela onda.

Esta qualidade difere o som **forte** (grande amplitude = muita energia = volume alto) e som **fraco** (pequena amplitude – pouca energia = volume baixo).

Sendo assim, ao alterarmos cada parâmetro da seguinte função, não considerando o tempo como uma variável, $\boldsymbol{F(x) = Asen(kx - \omega t)}$ o que irá ocorrer em termos da qualidade do som?

No GeoGebra desative a caixa ***Função Seno*** e ative a caixa ***Equação da Onda.***

1. Se aumentarmos o valor do parâmetro A o que ocorre com a qualidade do som?

   ____

2. Se diminuirmos o valor do parâmetro A o que ocorre com a qualidade do som?

   ____

Sabendo que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ e $v = \lambda\, f$ responda as seguintes questões:

3. O que devemos alterar na equação da onda para alterarmos a **frequência** f?

   ____

4. Para tornar o som mais **grave**, devemos alterar que parâmetro na equação da onda? O que ocorre com o valor de λ?

   ____

5. Para tornar o som mais **agudo**, devemos alterar que parâmetro na equação da onda? O que ocorre com o valor de λ?

   ____

“Ouvindo uma Onda Senoidal”

Aplicação na Física, que consiste na atividade **“Ouvindo uma Onda Senoidal”.** Esta atividade foi criada no GeoGebra e compartilhada pelo Prof. Humberto José Bortolossi. Está disponível no site http://tube.geogebra.org

1. Altere através do controle deslizante o valor da Amplitude e observe o que ocorre com o som.

a) Descreva o que você pode constatar em relação as qualidades do som.

____

b) Você percebeu alguma semelhança no som quando a amplitude era negativa ou positiva? Se percebeu, que semelhança é essa?

____

2. Altere através do controle deslizante o valor da Frequência, medida em Hz (Hertz).

a) Descreva o que você pode observar em relação as qualidades do som.

____

b) O que ocorre quando aumentamos a frequência? E quando diminuímos?

____

3. Quando alteramos a fase (wt) ocorre alguma alteração no som?

____

Você conseguiu fazer relação entre o que você aprendeu em matemática e o que você aprendeu na física através desta atividade? Relate o que você achou desta experiência.

____

____