



UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LUCAS DE LUCCA

**CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS - UMA PROPOSTA PARA
OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Palmas - TO
2015

LUCAS DE LUCCA

**CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS - UMA PROPOSTA PARA
OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática. Orientador: Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

Palmas - TO
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

L934c Lucca, Lucas de.
 Construções Geométricas: Uma proposta para os anos finais do ensino fundamental . / Lucas de Lucca. – Palmas, TO, 2015.
 73 f.

 Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2015.
 Orientador: Andrés Lázaro Barraza De La Cruz

 1. Construções Geométricas. 2. Número de Ouro. 3. Números Primos. 4. Sequência de Fibonacci. I. Título

CDD 510

TODOS OS DIREITOS RESERVADOS – A reprodução total ou parcial, de qualquer forma ou por qualquer meio deste documento é autorizado desde que citada a fonte. A violação dos direitos do autor (Lei nº 9.610/98) é crime estabelecido pelo artigo 184 do Código Penal.

Elaborado pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFT com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

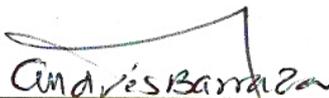
LUCAS DE LUCCA

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS - UMA PROPOSTA PARA
OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientador: Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz.

Aprovada em 16/10/2015

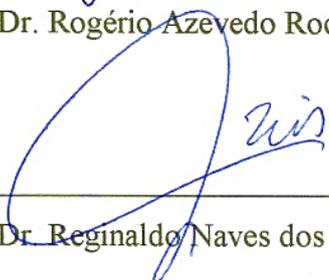
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz (Orientador-UFT)



Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)



Prof. Dr. Reginaldo Naves dos Reis (IFTO)

Este trabalho é dedicado à minha professora, educadora e mãe Ana Maria Lucca, pelo amor, dedicação e incentivo, tentando mostrar sempre, sem medir esforços, que a educação é o caminho para um futuro melhor.

Agradecimentos

A Deus, por tornar tudo possível.

À minha esposa e companheira Carla Barbosa, pela compreensão e amor.

A meus filhos, Eduarda e João Frederico, que mesmo sem compreenderem sempre me deram força para seguir em frente.

Ao meu pai Renato Lucca, pelo amor e pelo exemplo.

À minha querida avó, Angelina.

A meus irmãos, Luciana, Diego e Pedro, pelo apoio e carinho.

A todos os colegas de mestrado, especialmente aos amigos Paulo Roberto, Jairo Barros e Antônio Francisco, pelos momentos de estudos e descontração, e principalmente ao meu grande amigo Raylson Carneiro.

Ao Prof^o Dr. Andrés Lázaro Barraza De La Cruz, pela orientação e incentivo dedicados a esse trabalho.

À SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À UFT (Universidade Federal do Tocantins) nas pessoas do professor coordenador Andrés Lázaro Barraza De La Cruz e dos professores Betty Clara Barraza La Cruz, Christian José Quintana Pinedo, Gilmar Pires Novaes, Pedro Alexandre da Cruz e Rogério Azevedo Rocha, obrigado pela oportunidade de crescimento e pela contribuição significativa à minha formação.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

E, a todos os amigos e colegas que de alguma forma, no decorrer dessa jornada, contribuíram para que eu chegasse até o fim.

*...Isto, portanto, é Matemática; ela nos revela a forma invisível da alma;
ela dá vida às suas próprias descobertas; desperta a mente e purifica o intelecto;
traz à luz nossas ideias mais intrínsecas;
elimina o vazio e a ignorância que trazemos no nascimento.
(Proclus)*

Resumo

O fato de as Construções Geométricas não fazerem mais parte do currículo escolar transformou a Geometria em um dos “fantasmas” no ensino da Matemática, tanto para alunos como para professores. Assim, este trabalho procura resgatar uma prática, que já foi considerada uma das mais prazerosas no ensino da Matemática e que tem sido deixada de lado nas escolas brasileiras, as construções geométricas com régua e compasso, deixando as aulas menos monótonas ao lidar com instrumentos que permitem uma exploração visual e o desenvolvimento da capacidade motora. Mostra-se a importância de tais instrumentos desde a época de Euclides, através de feitos e fatos marcantes de diversos geômetras gregos, os precursores de tais práticas com os instrumentos citados e, desenvolve-se uma série de atividades fundamentadas na construção de figuras, na qual são exploradas duas sequências: a dos números primos e a de Fibonacci, baseando-se na busca por padrões, na construção de espirais e na relação empírica da sequência de Fibonacci com o número de ouro, além de algumas aplicações algébricas. No final, expõem-se outras aplicações interessantes integrando as Construções Geométricas e a Álgebra que são muito pouco aplicadas na sala de aula e que podem servir de suporte para aulas mais interessantes, auxiliando a aprendizagem e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo.

Palavras-chave: construções geométricas, número de ouro, números primos, sequência de Fibonacci.

Abstract

The fact that Geometric Constructions no longer a part of the school curriculum changed Geometry in one of the "ghosts" in the teaching of mathematics, both for students as for teachers. This work seeks to rescue a practice, which was already considered one of the most pleasant in the teaching of mathematics and which has been left hand in Brazilian schools, geometric constructions with ruler and compass, leaving less monotonous lessons when dealing with instruments that allow a visual exploration and development of motor skills. It shows the importance of such instruments from the time of Euclid, through achievements and milestones of several geometers Greeks, the precursors of such practices with the above instruments and develops one series of activities based on the construction of figures, in which are operated two sequences: that of prime numbers and the Fibonacci, based on the search for patterns, the spiral construction and the empirical relationship of the Fibonacci sequence number of gold, plus some algebraic applications. Finally, other applications are exposed interesting integrating Geometric Constructions and algebra that are very little applied in the classroom and that may provide support for more interesting classes, aiding learning and the development of logical-deductive reasoning.

Key-words: geometric constructions, number of gold, prime numbers, Fibonacci sequence.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Tales de Mileto	18
Figura 2 – Pitágoras (<i>David Smith Collection</i>)	20
Figura 3 – A demonstração segundo Pitágoras	20
Figura 4 – Construção da perpendicular por um ponto P da reta e sua justificativa através da congruência de triângulos.	22
Figura 5 – Construção da perpendicular por um ponto P não pertencente à reta e sua justificativa através da congruência de triângulos.	22
Figura 6 – Hipócrates de Chios	24
Figura 7 – <i>Lúnulas</i> de Hipócrates - 1	24
Figura 8 – Setores circulares	24
Figura 9 – <i>Lúnulas</i> de Hipócrates - 2	25
Figura 10 – Trapézio e a <i>lúnula</i> de Hipócrates	26
Figura 11 – <i>Lúnulas</i> de Hipócrates - 3	26
Figura 12 – Triângulo e a <i>lúnula</i> de Hipócrates	27
Figura 13 – Euclides de Alexandria	28
Figura 14 – Triângulo relacionando álgebra e geometria - 1	32
Figura 15 – Triângulo relacionando álgebra e geometria - 2	33
Figura 16 – Triângulo relacionando álgebra e geometria - 3	34
Figura 17 – Tansposição de segmentos de retas - 1	36
Figura 18 – Tansposição de segmentos de retas - 2	37
Figura 19 – Tansposição de segmentos de retas - 3	37
Figura 20 – Tansposição de ângulos - 1	37
Figura 21 – Tansposição de ângulos	38
Figura 22 – Tansposição de ângulos - 3	38
Figura 23 – Construção da perpendicular - 1	38
Figura 24 – Construção da perpendicular - 2	38
Figura 25 – Construção da paralela - 1	39
Figura 26 – Construção da paralela - 2	39
Figura 27 – Construção da paralela - 3	39
Figura 28 – Divisão de segmentos - 1	39
Figura 29 – Divisão de segmentos - 2	40
Figura 30 – Divisão de segmentos - 3	40
Figura 31 – Mediatriz e ponto médio - 1	40
Figura 32 – Mediatriz e ponto médio - 2	41
Figura 33 – Mediatriz e ponto médio - 3	41
Figura 34 – Bissetriz - 1	41

Figura 35 – Bissetriz - 2	42
Figura 36 – Bissetriz - 3	42
Figura 37 – Arco capaz	42
Figura 38 – Arco capaz de 90°	43
Figura 39 – Construção do arco capaz	43
Figura 40 – Triângulo de Sierpinski - Símbolo do PROFMAT	44
Figura 41 – Retângulo Áureo	46
Figura 42 – Construção do quadrado de lado 2	48
Figura 43 – Construção do quadrado de lado 3 e vértice no centro do quadrado de lado 2	49
Figura 44 – Construção do quadrado de lado 5 e vértice no centro do quadrado de lado 3	49
Figura 45 – Seis quadrados primos com vértices no centro dos anteriores	50
Figura 46 – Construção da espiral pelo centro dos quadrados primos	51
Figura 47 – Espiral passando pelo centro dos quadrados primos	51
Figura 48 – Espiral retangular pelo centro dos quadrados primos	53
Figura 49 – Construção do triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1	55
Figura 50 – Construção do triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2	56
Figura 51 – Triângulos retângulos e a sequência de Fibonacci	56
Figura 52 – Espiral e a sequência de Fibonacci - 1	57
Figura 53 – Espiral e a sequência de Fibonacci - 2	57
Figura 54 – 1º Teorema de Euclides	61
Figura 55 – Teorema de Pitágoras segundo Euclides	62
Figura 56 – O problema da divisão do terreno - 1	63
Figura 57 – O problema da divisão do terreno - 2	64
Figura 58 – F : O menor caminho ligando três pontos - 1	65
Figura 59 – F : O menor caminho ligando três pontos - 2	65
Figura 60 – F : O menor caminho ligando três pontos - 3	66
Figura 61 – F : O menor caminho ligando três pontos - 4	66
Figura 62 – a e b : Projeções dos catetos	67
Figura 63 – Triângulo retângulo	67
Figura 64 – Espiral Pitagórica	68
Figura 65 – $x = a\sqrt{21}$	69
Figura 66 – Localizando números irracionais na reta numérica	69
Figura 67 – Quadratura do triângulo	70

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO	16
3	SOBRE O ENSINO DA GEOMETRIA	30
3.1	Porque o Desenho Geométrico?	32
4	CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS	36
4.1	Transposição de Segmentos de Reta	36
4.2	Transposição de Ângulos	37
4.3	Retas Perpendiculares	38
4.4	Retas Paralelas	39
4.5	Divisão de um Segmento em Partes Iguais	39
4.6	Reta Mediatrix e Ponto Médio	40
4.7	Reta Bissetriz	41
4.8	Arco Capaz	42
5	DEFINIÇÕES	44
5.1	Sequências	44
5.2	O Número de Ouro	45
6	APLICAÇÕES EM SALA DE AULA	47
6.1	Números Primos	47
6.1.1	Atividade 1: Construção de Quadrados Primos	48
6.1.2	Atividade 2: Construção da Espiral pelo Centro dos Quadrados Primos	50
6.1.3	Atividade 3: Construção da Espiral Retangular pelo Centro dos Quadrados Primos	52
6.2	A Sequência de Fibonacci	54
6.2.1	Atividade 4: Construção de Triângulos Retângulos Adjacentes	55
6.2.2	Atividade 5: Construção da Espiral pelos Vértices dos Catetos dos Triângulos Retângulos Isósceles Adjacentes	56
6.2.3	Atividade 6: A Razão entre os Segmentos da Espiral e o Número de Ouro	58
7	OUTRAS APLICAÇÕES COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	61
7.1	1º Teorema de Euclides	61
7.2	O Problema da Divisão do Terreno	62

7.3	O Menor Caminho Ligando Três Pontos	64
7.4	Construção de Um Triângulo Retângulo Dada as Projeções . .	66
7.5	Construção dos Elementos da Sequência $a\sqrt{2}, a\sqrt{3}, a\sqrt{4}, \dots$	68
7.6	Quadratura do Triângulo	69
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71

1 Introdução

Um dos principais problemas enfrentado pelos professores de Matemática nos dias de hoje é como motivar os alunos fazendo com que se interessem pelas aulas, ou seja, como torná-las mais dinâmicas diante da concorrência encontrada na tecnologia cada vez mais avançada e que na maioria das vezes é mais atrativa que os conteúdos matemáticos.

Porém, ao falar-se de Matemática, acredita-se que nenhuma das inovações tecnológicas pode substituir de forma integral ao trabalho clássico na disciplina. Estratégias como o cálculo mental, contas com algoritmos, criação de gráficos com lápis e borracha e ainda o uso da régua e do compasso, entre outros instrumentos de desenho, continuam sendo de primordial importância no desenvolvimento do raciocínio matemático.

É sabido ainda que em diversas discussões de currículos, a Geometria é sempre citada como de vital importância no desenvolvimento do raciocínio, compreensão inicial de uma axiomática, etc. No entanto, na prática ela tem sido pouco ensinada, e, quando ensinada, na maioria das vezes com ênfase em aspectos algébricos menos relevantes. Segundo Putnoki,¹

já faz um bom tempo que o Desenho Geométrico foi banido das nossas escolas de 1º e 2º graus. “Coincidentemente”, de lá para cá, a Geometria, cada vez mais, vem se tornando o grande terror da Matemática, tanto para alunos quanto para professores (HELLMEISTER, 2013, p. 368).

Em discussões com diversos professores, percebe-se que muitos têm deixado as construções geométricas de lado, até mesmo as construções mais simples, às vezes por desconhecer sua importância, outras por não ter tido a formação ideal. Putnoki destaca que,

uma bibliografia para a formação do professor na disciplina discutida (construções planas) é praticamente nula a nível nacional. Mesmo a nível internacional, as melhores obras (para a formação do professor) são de edições antigas e esgotadas (HELLMEISTER, 2013, p. 372).

Essa preocupação ficou clara quando, durante o curso de mestrado, colegas professores encararam a Geometria como um dos “fantasmas”. Muitos não sabiam manusear ou fazer construções elementares com os instrumentos euclidianos aqui citados, como a construção de paralelas, ou não lembravam de propriedades simples como a de que “se duas semirretas se intersectam num ponto P e são tangentes a uma circunferência em A e B respectivamente, então $PA = PB$ ”.

Fazer com que os alunos reconheçam a importância da Matemática no cotidiano não é nada fácil, ainda mais abrindo mão de instrumentos que podem tornar o ensino

¹ José Carlos Putnoki, o Jota, professor de Matemática e autor de coleções de livros didáticos de Desenho Geométrico, falecido em 03/08/2012 aos 60 anos.

da Geometria mais palpável e interessante, deixando as aulas mais dinâmicas, auxiliando na criatividade e no desenvolvimento da coordenação motora, afinal, a sociedade atual está cada vez mais diversificada e multicultural, onde busca-se alternativas para fazer com que a aprendizagem seja acessível e bem sucedida para todos. Além disso, os professores tentam se adaptar da melhor forma possível à diversidade, levando-se em conta o atual contexto de inclusão escolar.

Nessa perspectiva, o que se defende nesse trabalho é exatamente a reincorporação da régua e do compasso à Geometria e a outras áreas da Matemática, mostrando tudo o que pode ser feito com o auxílio de tais instrumentos, por meio de aplicações interessantes e de como eles foram importantes no desenvolvimento da matemática, desde Euclides, e como continuam importantes até os dias de hoje. De fato, pode-se encontrar construções geométricas nas mais variadas atividades, como em obras de arte e na construção civil e ainda fazer uso delas no ensino dos mais variados assuntos da matemática despertando o interesse e a curiosidade dos alunos em relação a determinados conteúdos, como por exemplo no estudo das sequências por meio dos padrões geométricos.

Para isso, apresenta-se algumas atividades que podem ser desenvolvidas nos anos finais do ensino fundamental. Na primeira parte das atividades é proposta a construção, com régua e compasso, de quadrados com vértices no centro dos anteriores e medida dos lados seguindo a sequência dos números primos, destacando padrões como a construção de espirais passando pelo centro desses quadrados e calculando o comprimento das mesmas. Destaca-se ainda a construção, também por meio de régua e compasso, de triângulos retângulos isósceles cujas medidas dos catetos são a sequência de Fibonacci, destacando a construção de uma espiral com segmentos de reta sobre os vértices que compõe a hipotenusa de cada triângulo mas não pertence ao cateto do triângulo seguinte, onde a razão entre cada segmento da espiral pelo seu anterior revela a relação empírica² dessa sequência com o Número de Ouro, mostrando como usar a Matemática formal para chegar à demonstração de tão famoso número. Na segunda parte das atividades, apresenta-se alguns exemplos interessantes e pouco encontrados de aplicações com construções geométricas, relacionando Álgebra e Geometria, como o 1º Teorema de Euclides, que são um ótimo exercício a ser desenvolvido em sala de aula.

Assim, divide-se esse trabalho em oito capítulos. No capítulo dois, leva-se o leitor a uma breve viagem na história da Geometria grega, os criadores das Construções Geométricas, mostrando como elas foram importantes e fundamentais no desenvolvimento da Matemática, destacando grandes geômetras como Tales, Pitágoras, Oenópides, Hipócrates

² Empírico é um fato que se apóia somente em experiências vividas, na observação de coisas, e não em teorias e métodos científicos. O método empírico gera aprendizado, uma vez que aprendemos fatos através das experiências vividas e presenciadas, para obter conclusões. O conhecimento empírico é muitas vezes superficial, sensitivo e subjetivo (<http://www.significados.com.br/empirico/>, acesso em 01/10/2015).

e Euclides, e alguns de seus feitos históricos.

No terceiro capítulo, é feita uma análise sobre o ensino da geometria, com ênfase em alguns dos principais livros didáticos utilizados nas escolas públicas, na qual fica claro que a maioria deixa as construções geométricas em segundo plano, e quando dão algum destaque, o fazem sem as devidas justificativas. Destaca-se ainda a importância das construções geométricas.

Nos capítulos quatro e cinco, destaca-se algumas construções básicas e as definições que serão imprescindíveis no desenvolvimento das atividades.

As aplicações em sala de aula aparecem nos capítulos seis e sete, e, por fim, no oitavo capítulo as considerações finais. Trabalho semelhante, porém voltado à primeira série do ensino médio, foi desenvolvido por Thiago Ruiz Garcia, sob o tema “Construção geométrica de triângulos equiláteros com base na sequência de Fibonacci: Uma proposta de atividade para turmas de Primeira Série”, e pode ser encontrado em “www.profmatsbm.org.br/dissertacoes”.

2 Referencial Teórico

A história da geometria, como a de muitas outras matérias em desenvolvimento e mudança, compõe-se de dois fios entrelaçados. Um deles narra o desenvolvimento de seu conteúdo e o outro sua natureza mutável. Ninguém ignora que a geometria deve ter se iniciado provavelmente em tempos muito remotos na antiguidade, a partir de origens muito modestas, depois cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme que tem hoje. Por outro lado, não são muitas as pessoas que estão cientes de que a natureza, ou caráter inerente, da matéria teve conotações diferentes em períodos diferentes de seu desenvolvimento (EVES, 1992).

Afirmações sobre as origens da matemática, seja da aritmética seja da geometria (BOYER, 1974) são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Boyer destaca que,

os desenhos e figuras do homem neolítico sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar (BOYER, 1974, p. 4).

A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações podem ter origem em seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propõem a matemática de hoje.

Assim, ainda gostaria-se de pensar que pelo menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática, porém, acredita-se que o principal estímulo ao desenvolvimento da geometria, segundo Heródoto e Aristóteles, possa ter surgido das necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem (BOYER, 1974).

Poderia-se fazer conjecturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir, e desenhar. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo a respeito do começo da matemática, no entanto, seria confundir conjectura com história e, portanto, é melhor ir adiante, ao terreno mais firme da história da matemática encontrada em documentos escritos que chegaram aos dias de hoje (BOYER, 1974).

O Egito e a Mesopotâmia foram as fontes onde a Europa começou a obter seus conhecimentos matemáticos. Neste processo de assimilação, os gregos desempenharam um importantíssimo papel, pois foram eles os primeiros europeus que, em contato com o Oriente Médio, interessaram-se pelas técnicas e reconheceram a utilidade da Geometria.

Quem foram os gregos? Chegando em sucessivas ondas à península dos Balcãs, durante o II milênio a.C., os povos de fala grega ali construíram uma notável civilização que, por volta do século VII a.C., já estabelecera colônias na Magna Grécia (como eram chamados o Sul da Itália e a ilha da Sicília), no Norte da África, nas ilhas do mar Egeu, nas costas do mar Negro e nas costas da Anatólia (onde hoje situa-se a Turquia). Praticando no Mediterrâneo Oriental um intenso comércio de produtos não só do mundo grego mas, também, egípcios, fenícios, sírios e mesopotâmios, os jônios (como eram chamados os gregos das ilhas do Egeu e da Anatólia) obtiveram do governo do Egito permissão para instalar um entreposto comercial na cidade de Náucratis, no delta do Nilo, em meados do século VII a.C. Foi ali que os gregos tiveram contato com os esplendores da civilização egípcia, encantaram-se com seus templos, monumentos e pirâmides e começaram a aprender sua Matemática (GARBI, 2010).

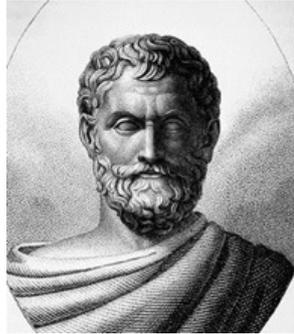
Os gregos (EVES, 1992) transformaram a geometria em algo diferente do conjunto de conclusões empíricas produzido por seus predecessores. Eles insistiram em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos por procedimentos dedutivos; as verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos e não no laboratório. Em suma, os gregos transformaram a geometria empírica, ou científica, dos egípcios e babilônios antigos no que poderíamos chamar de geometria “sistemática” ou “demonstrativa”. Eves afirma ser decepcionante que,

ao contrário dos antigos egípcios e babilônios, não haja quase nenhuma fonte primária para o estudo da geometria grega primitiva em si. Somos obrigados a nos apoiar em manuscritos e relatos que datam de vários séculos depois de os originais terem sido escritos (EVES, 1992, p. 7).

A principal fonte de informações referente à geometria grega primitiva é o chamado *Sumário eudemiano* de Proclus, filósofo, matemático e também poeta, que viveu aproximadamente entre 410 e 485 d.C. Apesar de ter vivido quase um milênio depois do início da geometria grega, acredita-se que ainda teve acesso a numerosos trabalhos históricos e críticos que depois se perderam, com exceção de alguns fragmentos e alusões preservadas por ele e outros. Entre esses trabalhos perdidos está o que era, ao que parece, uma história completa da geometria grega, cobrindo o período anterior a 335 a.C., escrita por Eudemo, um discípulo de Aristóteles. O *Sumário eudemiano* é assim chamado porque, supostamente baseia-se nesse trabalho mais antigo (EVES, 1992).

Segundo o *Sumário eudemiano*, a geometria grega parece ter começado essencialmente com o trabalho de Tales, nascido na cidade jônia de Mileto, cuja referência sobre o período em que viveu é o notável registro de que teria previsto um eclipse solar ocorrido por volta de 585 a.C. É considerado o primeiro grande matemático grego. Em razão de não ter deixado escritos, tem-se muita dificuldade de saber sobre sua vida e obra.

Figura 1 – Tales de Mileto



De acordo com Gilberto Garbi,

Tales não era um matemático profissional, até porque esta profissão não existia à época. Ele era um rico comerciante que podia dar-se ao luxo de estudar Astronomia, Filosofia e Matemática por puro prazer. Segundo ele, a Tales deve-se a primeira profunda transformação pela qual passou o pensamento matemático desde que o homem aprendera a contar (GARBI, 2010, p. 15).

Tales visitou o Egito e a Babilônia e de lá trouxe para a Grécia o estudo da Geometria. Entretanto, ao invés de apenas transmitir o que aprendera, introduziu um conceito revolucionário: as verdades matemáticas precisam ser demonstradas. Foi a primeira vez que um homem havia explicitado este princípio fundamental de toda a atividade científica. Merecidamente, ele foi considerado um dos Sete Sábios da Grécia (GARBI, 2010).

A chamada escola jônica, iniciada por Tales, foi a primeira de uma sequência de escolas dedicadas à criação e à difusão das ideias de seu grupo e de sua época. A matemática grega desponta e evolui num ambiente impregnado de Filosofia, que marca fortemente suas características. Entre os resultados matemáticos atribuídos a Tales, para os quais teriam sido dadas provas dedutivas, pode-se destacar (GALVÃO, 2008):

- *A circunferência é bissectada por seu diâmetro.*
- *Os ângulos da base de um triângulo isósceles têm a mesma medida.*
- *Os ângulos opostos pelo vértice determinados por duas retas concorrentes têm a mesma medida.*
- *O ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.*
- *Os lados de triângulos semelhantes são proporcionais.*
- *Dois triângulos são congruentes se têm dois ângulos e um lado respectivamente congruentes.*

Na viagem de Tales ao Egito, (GARBI, 2010) ficou registrado o deslumbramento do sábio de Mileto diante da imponência da Grande Pirâmide (Quéops). Construída por

volta de 2650 a.C. e empregando cerca de 2.000.000 de blocos de pedra calcária, alguns deles com 20 toneladas de “peso”, aquela pirâmide eleva-se a uma altura de cerca de 146 metros sobre as areias do vale do Nilo.

Encontraram-se, frente-a-frente, uma das Sete Maravilhas do Mundo Antigo e um dos Sete Sábios da Grécia, um homem capaz de admirá-la em todo seu significado. “Que altura terá este monumento?”, certamente perguntou-se o pai de todos os geômetras. Para respondê-la, empregou um método, por ele mesmo criado e que ainda hoje nos cativa pela simplicidade e precisão: plantou sobre a areia, verticalmente, um bastão de madeira, cujo comprimento conhecia, e mediu-lhe a sombra. Após fazer o mesmo com a sombra da pirâmide, deduziu-lhe a altura porque sombras e alturas, tanto em pirâmides quanto em bastões, quaisquer que sejam seus tamanhos, são sempre proporcionais. No momento em que a altura de um bastão é igual à sua sombra, a altura da pirâmide também será igual à sombra do monumento (GARBI, 2010).

Esta proporcionalidade entre alturas e sombras constitui a essência daquilo que hoje se aprende na escola sob a denominação Teorema de Tales e, 26 séculos depois, durante a corrida espacial, os cientistas da NASA ainda avaliavam alturas de montanhas na Lua e em Marte através de suas respectivas sombras obtidas em fotografias.

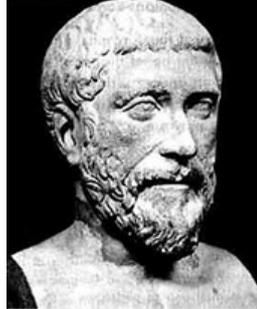
As informações a respeito de Tales levam a considerá-lo o precursor da ideia de organizar logicamente os fatos da Geometria. Pela primeira vez um estudioso da geometria se comprometeu com uma forma de raciocínio dedutivo, por mais parcial e incompleto que fosse. Após sua morte (GALVÃO, 2008) sua escola foi liderada por Anaximandro (cerca de 610 a 547 a.C.), também matemático, geógrafo e astrônomo que introduziu o “gnômon”, tipo de esquadro amplamente utilizado na antiguidade para relógios solares e cálculos com os chamados números figurados ou poligonais.

O próximo geômetra grego importante mencionado por Proclus em seu *Sumário* e que apareceu poucas décadas depois de Tales é Pitágoras. Nascido na ilha de Samos (estima-se que tenha vivido entre 581 a 497 a.C.), a 50 quilômetros de Mileto, e que provavelmente estudara com Tales ou com seus discípulos na chamada Escola de Mileto, demonstrou o teorema dos triângulos retângulos onde “o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos”, sem dúvida o mais famoso e popular de toda a matemática.

Muitos séculos antes de Pitágoras, os babilônios já sabiam daquela propriedade geral, enquanto os egípcios conheciam-na para o caso particular do triângulo de lados 3, 4 e 5. Há provas que os chineses também conheciam. Mas foi Pitágoras quem primeiro apresentou uma prova para tal relação entre hipotenusas e catetos, apesar de muitos historiadores da matemática questionarem se o teorema teria, efetivamente, sido formulado

por Pitágoras ou por um de seus seguidores já que os pitagóricos¹ não deixaram registros escritos e não distinguiam a autoria dos trabalhos por eles desenvolvidos.

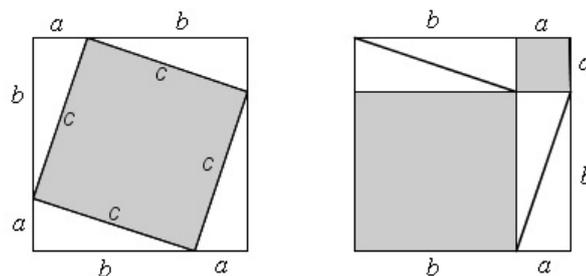
Figura 2 – Pitágoras (*David Smith Collection*)



Embora nascido em Samos, Pitágoras passou a maior parte de sua vida adulta na cidade de Crotona, no Sul da Itália, onde criou (cerca de 540 a.C.) uma escola voltada ao estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática. Em poucas décadas os pitagóricos espalharam por todo o mundo grego uma verdadeira febre pelo estudo da matemática, colocando a civilização em um caminho que nos trouxe à era científico-tecnológica de hoje. Esta, certamente, foi a maior contribuição histórica de Pitágoras e a razão pela qual o filósofo-matemático inglês Bertrand Russell (1872-1970) considerava-o *um dos maiores homens que já existiram* (GARBI, 2010).

Não se sabe ao certo qual demonstração foi dada por Pitágoras. Acredita-se (HELLMEISTER, 2013) que tenha sido do tipo “geométrica” utilizando igualdade de áreas estabelecidas com base nas divisões do quadrado das figuras a seguir.

Figura 3 – A demonstração segundo Pitágoras



Do quadrado que tem $a + b$ como lado, retira-se quatro triângulos iguais ao dado. Fazendo-se isso como na figura à esquerda, obtém-se um quadrado de lado c . Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados a e

¹ Os pitagóricos foram os membros da escola criada por Pitágoras, uma irmandade unida por mistérios, ritos cabalísticos e cerimônias e empenhada no estudo de filosofia, matemática e ciências naturais (EVES, 1992, p. 8)

b respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado c é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem a e b , (HELLMEISTER, 2013).

O Teorema de Pitágoras (GALVÃO, 2008) conduziu ao impasse a aritmética dos pitagóricos que se depararam com a irracionalidade (ou incomensurabilidade, utilizando o vocabulário da época) da raiz quadrada de dois (que é o bem conhecido comprimento da diagonal do quadrado de lado unitário). A partir de então, para contornar o problema provocado pela existência dos números irracionais, os procedimentos geométricos de construção com régua (sem marcas) e compasso firmam-se, juntamente com a introdução das “magnitudes” associadas aos comprimentos dos segmentos. As construções geométricas passam a ser adotadas para justificar propriedades algébricas. Todas essas questões com as quais se depararam os pitagóricos estão, portanto, associadas às origens das construções com régua e compasso.

A partir daí, os matemáticos gregos interessaram-se bastante pelas construções geométricas que podem ser realizadas exclusivamente com o emprego desses dois instrumentos. Esta limitação a apenas dois instrumentos espelhava, ao mesmo tempo, o conceito de elegância com que os gregos tratavam das questões geométricas e, também, a atração tipicamente helênica que eles nutriam pelos desafios intelectuais, independentemente de qualquer utilidade prática imediata (GARBI, 2010).

Alguns geômetras, posteriores aos pitagóricos são especialmente citados por Proclus. Entre eles é interessante destacar Oenópides e Hipócrates, ambos nascidos na ilha de Chios.

Oenópides viveu por volta de 490 a 420 a.C., foi um astrônomo cujo trabalho matemático reflete influências pitagóricas. Apesar de menos conhecido, são atribuídas a ele as descobertas relativas à estimativa da inclinação do eixo terrestre e da duração, mais precisa que se tem notícia na antiguidade, para o mês lunar e o ciclo anual. Proclus atribui a ele duas proposições (que aparecem nos *Elementos* de Euclides, no primeiro livro, proposições I.11 - I.12) relativas à construção da perpendicular à uma reta por um ponto fora dela ou pertencente à ela. Consta que foi o primeiro a estabelecer as restrições dos métodos a serem utilizados nas construções com régua e compasso e, provavelmente, o primeiro a resolver problemas geométricos com tais recursos. As construções de perpendiculares até então eram executadas com esquadros (os “gnômions”), e Oenópides é a referência mais antiga que temos relacionada às construções com régua e compasso (GALVÃO, 2008).

A seguir, a construção da perpendicular (GALVÃO, 2008) por um ponto P da reta e sua justificativa por meio da congruência de triângulos e a construção da perpendicular por um ponto P não pertencente à reta e sua justificativa através da congruência de triângulos, ambas segundo Oenópides.

Figura 4 – Construção da perpendicular por um ponto P da reta e sua justificativa através da congruência de triângulos.

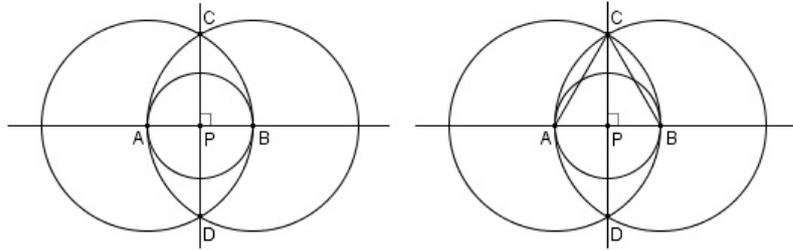
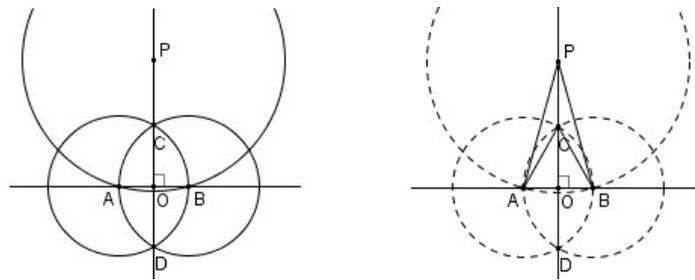


Figura 5 – Construção da perpendicular por um ponto P não pertencente à reta e sua justificativa através da congruência de triângulos.



A primeira construção utiliza-se do fato de que as duas circunferências se interceptam, e a segunda, de que a reta construída intercepta a reta dada, isto é, usa a intersecção de retas para determinar o ponto O .

Belíssimos problemas (GARBI, 2010) foram resolvidos com o uso de régua e compasso, mas nada menos que do que 5 questões investigadas pelos gregos não encontraram resposta dentro do conjunto de conhecimentos disponíveis à época e tiveram que aguardar dois milênios de evolução da Matemática até que fossem inteiramente compreendidos. Foram eles:

1. Construção da aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume de outro (*duplicação do cubo*);
2. Construção de um segmento de reta cujo comprimento seja igual ao perímetro de uma dada circunferência (*retificação da circunferência*);
3. Construção de um quadrado de área igual à de um dado círculo (*quadratura do círculo*);
4. Divisão de um ângulo qualquer em 3 partes iguais (*trisseção do ângulo*);
5. Construção de polígonos regulares (*divisão da circunferência em n partes iguais*).

A duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo ficaram conhecidos como *Os Três Problemas Clássicos*. Ficou demonstrado (GARBI, 2010) que as 3 primeiras construções são sempre impossíveis, se apenas régua (sem marcas) e compasso forem admitidos. A divisão do ângulo em três partes iguais, apenas com régua e compasso, só é exequível em alguns casos particulares (por exemplo, 45° , 90° , 180° , 270° , etc.) sendo impossível de uma maneira geral. E para a divisão da circunferência em n partes iguais Gauss², aos 19 anos, deu a seguinte resposta:

Ela somente é possível quando n é um número da forma $n = 2^s p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots$ onde s é um número inteiro não negativo, p_1, p_2, \dots são primos da forma $2^{2^k} + 1$, com $k = 0, 1, 2, \dots$ e r_1, r_2, \dots são, cada um deles, zero ou um (GARBI, 2010, p. 181).

De qualquer maneira, ainda resta uma dúvida nesta antiga questão: até hoje não se sabe se para $k > 4$ existem ou não primos do tipo $2^{2^k} + 1$.

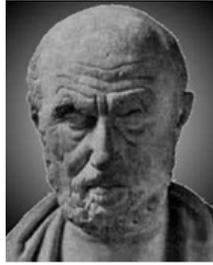
As origens desses problemas são diversas e existem várias histórias que as explicam. No entanto, eram a generalização natural de problemas já conhecidos. Muitos resultados matemáticos obtidos nesse período foram subprodutos dos esforços para resolvê-los.

É importante esclarecer que, se outros instrumentos forem permitidos, então essas construções tornam-se possíveis (GARBI, 2010). Por exemplo, Arquimedes, no século III a.C., mostrou como dividir qualquer ângulo em três partes iguais ou construir um heptágono regular usando um compasso e uma régua com marcas ou outros meios. Também Nicomedes (cerca de 240 a.C.) encontrou uma forma de dividir ângulos em três partes iguais por meio de uma curva por ele mesmo inventada, a Concóide. Antes de Arquimedes e de Nicomedes, Hípias de Elis (cerca de 460 a 400 a.C.), inventara uma curva, a Quadratriz, com a qual se pode efetuar tanto a quadratura do círculo como a trissecção do ângulo mas, evidentemente, nem a Concóide nem a quadratriz podem ser construídas com régua e compasso.

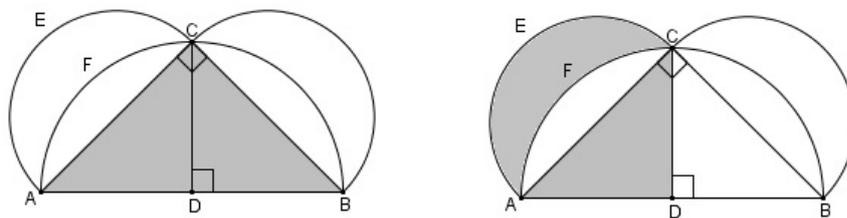
E foi na provável tentativa de resolver um desses problemas que Hipócrates (século V a.C.) escreveu seu nome na história da Geometria. Registra-se sua passagem por Atenas entre 450 e 430 a.C., era mercador e depois de ter seu navio saqueado por piratas, aportou em Atenas na tentativa de reaver seus bens. O contato com a cultura ateniense da época motivou sua permanência na cidade (GALVÃO, 2008).

² Carl Friedrich Gauss (1777-1855): astrônomo, matemático e físico alemão. Com apenas 16 anos, criou um método, usado até hoje, para deduzir os elementos da órbita de um planeta com medidas tomadas a partir de um ponto na superfície da Terra, (GUIMARÃES, 2006, p. 21).

Figura 6 – Hipócrates de Chios

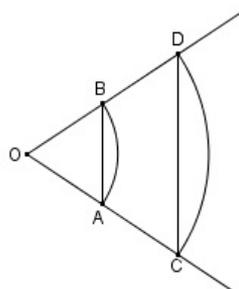


Sua matemática tinha características e influências pitagóricas. Trabalhou no problema da quadratura do círculo e construiu as chamadas *lúnulas* ou *luas de Hipócrates*, (GALVÃO, 2008). O registro do trabalho de Hipócrates sobre as *lúnulas* (isto é, crescentes), extraído das versões da *História da Geometria* escrita por Eudemus, traz como primeiro exemplo a quadratura de luas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles, como na Figura 7. Hipócrates mostrou que a área da lua é igual à área do triângulo retângulo, como ilustra a Figura 7 (à direita).

Figura 7 – *Lúnulas* de Hipócrates - 1

Para a quadratura (GALVÃO, 2008), em todos os exemplos que chegaram até os dias de hoje, Hipócrates utilizou uma propriedade simples dos setores circulares: a razão entre as áreas de dois setores cujos ângulos centrais congruentes são iguais a razão entre os quadrados dos comprimentos de suas respectivas cordas.

Figura 8 – Setores circulares



Ou seja, se A_1 e A_2 são as áreas dos setores circulares OAB e OCD na Figura 8, temos então:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AB^2}{CD^2}$$

Esta razão $\frac{AB^2}{CD^2}$ também é a razão entre as áreas dos triângulos $\triangle OAB$ e $\triangle OCD$ e entre as áreas dos correspondentes segmentos circulares.

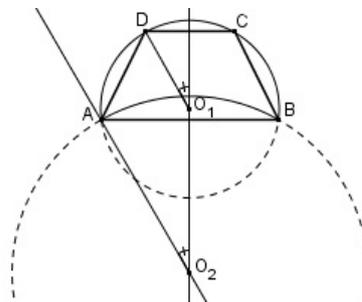
Voltando ao exemplo de Hipócrates (Figura 7), a base AB e o lado AC do triângulo retângulo isósceles $\triangle ABC$ são tais que $AB^2 = 2AC^2$. Usando esta relação, pode-se concluir que a razão entre as áreas das semicircunferências com diâmetros \overline{AB} e \overline{AC} é tal que $A_2 = A_1$.

Hipócrates, a partir destas informações, observou que a soma das áreas das duas luas (que denotaremos $2A$) pode ser obtida subtraindo a área da semicircunferência maior (A_2) da soma da área do triângulo (A_t) e as áreas das circunferências menores (A_1), ou seja: $2A = A_t + 2A_1 - A_2$.

Tem-se, portanto, $2A = A_t$ e a área A da lua será a metade da área do triângulo $\triangle ABC$, ou ainda igual à área do triângulo $\triangle ACD$ estando, portanto, resolvido o problema da quadratura da lua.

Na sequência de seu trabalho, Hipócrates exibiu ainda dois outros exemplos de quadraturas de luas, em que o arco exterior é maior ou menor do que uma semicircunferência (GALVÃO, 2008). O exemplo em que o arco exterior é maior do que a semicircunferência está baseado na construção de um trapézio isósceles cuja base menor é congruente aos lados não paralelos, ou seja, na Figura 9, $AD = CD = BC$. Além disso, supõe-se que $AB^2 = 3BC^2$ e que os ângulos entre os segmentos O_1D e O_2D e a mediatriz das bases são congruentes.

Figura 9 – *Lúnulas de Hipócrates - 2*



Com estas hipóteses, tem-se que a razão entre as áreas A_1 e A_2 dos segmentos circulares correspondentes às cordas e, respectivamente (ou, conseqüentemente, e) é 3, ou seja, $A_1 = 3A_2$. Novamente, pode-se escrever a igualdade:

$$A = A_T + 3A_2 - A_1$$

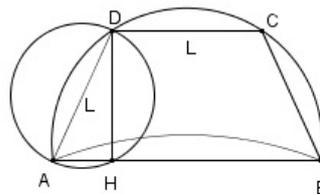
onde A é a área da lua e A_T é a área do trapézio; temos mais uma vez,

$$A = A_T$$

e a quadratura da lua é possível. Sendo o ângulo α um ângulo obtuso ($AB > CD$ e o prolongamento dos lados \overline{AB} e \overline{BC} determina um ponto F tal que o triângulo $\triangle CDF$ é isósceles e os ângulos de sua base são agudos) o ângulo α é agudo, e, portanto, o arco exterior é maior do que uma semicircunferência. Vale a pena ainda observar que a medida do arco exterior da lua é o triplo da medida de seu arco interior (GALVÃO, 2008).

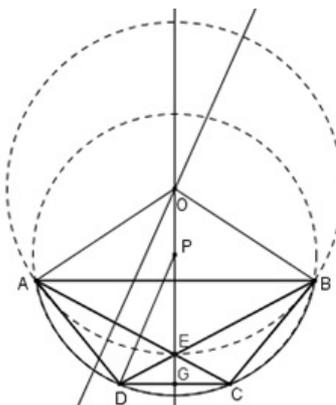
Ainda em Galvão (2008), a construção do trapézio nas condições acima com régua e compasso é um ótimo exercício; observe que uma possibilidade será começar pelo triângulo retângulo $\triangle AHD$ cuja hipotenusa tem comprimento $AD = L$ e o cateto \overline{AH} mede $\frac{\sqrt{3}-1}{2}L$, conforme Figura 10.

Figura 10 – Trapézio e a *lúnula* de Hipócrates



A Figura 11 ilustra o caso em que o arco externo é menor do que uma semicircunferência. Novamente, o trapézio é isósceles, a base menor é congruente aos lados não paralelos, e, neste caso, considera-se que $AE^2 = 3/2BC^2$; esta hipótese garante que as áreas A_1 e A_2 dos segmentos circulares correspondentes às cordas \overline{AE} e \overline{BC} , respectivamente, satisfaçam à relação $2A_1 = 3A_2$. A relação entre as áreas agora pode ser descrita pela expressão $A = A_P + 3A_2 - 2A_1$, onde A_P é a área do polígono $AEBCD$, que será equivalente à lua original (GALVAO, 2008).

Figura 11 – *Lúnulas* de Hipócrates - 3

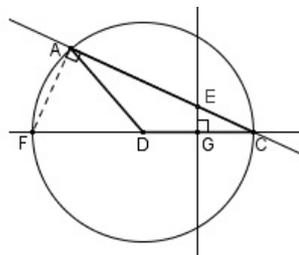


A construção com régua e compasso, do trapézio que serve de base à lua já é mais trabalhosa do que no exemplo anterior. A construção original descrita pelos escritores antigos começa pelo segmento \overline{DC} , na Figura 12, traça-se a mediatriz de \overline{DC} e uma circunferência com centro D e raio $\overline{DC} = a$. Toma-se uma reta pelo ponto C de forma que o segmento \overline{AE} que ela determina ao interceptar a mediatriz e a circunferência tenha o comprimento desejado, ou seja, $AE^2 = BC^2$ (este é um tipo de recurso frequentemente utilizado na resolução dos problemas na antiguidade, chamado “*neusis*”, do verbo grego *neuein*, que significa apontar ou acenar (GALVÃO, 2008).

Observe que o triângulo $\triangle ADC$ (Figura 12), pode ser construído com régua e compasso calculando o comprimento do lado \overline{AC} ; os triângulos retângulos $\triangle AFC$ e $\triangle GEC$ são tais que: $\frac{AC}{2a} = \frac{a/2}{EC}$, ou seja, tem-se uma equação do segundo grau em $y = AC$, usando que $EC = y - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$, cuja solução $y = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{22}}{4}a$ admite construção com régua e compasso.

O trapézio poderá ser construído a partir do triângulo, assim como os arcos de circunferência que determinam a lua. O ângulo do vértice D será obtuso. Pode-se ainda verificar que (Figura 11), se $\alpha = m(\angle APD)$, $m(\angle APB) = 3\alpha$ e $m(\angle AOB) = 2\alpha$, ou ainda, $2m(\angle APB) = 3m(\angle AOB)$.

Figura 12 – Triângulo e a *lúnula* de Hipócrates



Um dos principais personagens da história da Geometria e da Matemática, e um dos maiores matemáticos gregos da antiguidade e de todos os tempos foi Euclides. Pouco se sabe sobre sua vida, onde nasceu (se realmente foi em território grego) ou a data do seu nascimento. Talvez tenha sido por volta do ano 325 a.C. Sabe-se que ele viveu na cidade de Alexandria, no atual Egito, quase certamente durante o reinado de Ptolomeu I (323 a 283 a.C.) e morreu de causas desconhecidas no ano 265 a.C. Por essa razão ele é citado como Euclides de Alexandria (ANDRINI, 2012).

Euclides foi o mais famoso dos nomes da escola de Alexandria³ e, mesmo que parte de sua formação tenha provavelmente ocorrido em Atenas, foi em Alexandria, onde

³ O maior centro de estudo de Matemática da Antiguidade, formado por um museu e uma gigantesca biblioteca, concebida para abrigar todas as obras científicas e filosóficas produzidas no mundo grego (GARBI, 2010, p. 18)

dirigiu a área de Matemática do Museu e onde escreveu vários livros, entre eles os célebres *Elementos* (considerado a obra de Geometria mais importante de toda a história), que revelou seu talento (GARBI, 2010).

Figura 13 – Euclides de Alexandria



Os *Elementos* (GALVÃO, 2008) consistem em treze livros onde Euclides incorpora todo o conhecimento matemático acumulado em sua época, ou seja, os vários resultados originalmente obtidos por outros matemáticos anteriores a ele e seus trabalhos originais, contendo 465 proposições que tratam de tópicos de Geometria, Teoria dos Números e Álgebra (geométrica). Ao longo desses livros são consideradas construções geométricas com régua e compasso, demonstrações indiretas (ou “por absurdo”), a chamada “lei dos cossenos”, uma resolução geométrica para equações de segundo grau, entre vários outros resultados.

Nestes treze livros Euclides realizou o prodigioso trabalho de sistematizar os conhecimentos da Geometria elementar, de forma rigorosa e dedutiva, partindo de um número mínimo de definições e de verdades aceitas sem provas (GARBI, 2010). Logo no início dos *Elementos* ele explicitou algumas verdades evidentes por si mesmas, agrupando-as em cinco *postulados* de natureza geométrica e em cinco *axiomas* (noções comuns). Vejamos:

Os cinco postulados (AABOE, 2013):

1. É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a um ponto qualquer;
2. É possível prolongar arbitrariamente um segmento de reta;
3. É possível traçar um círculo com qualquer centro e raio;
4. Dois ângulos retos quaisquer são iguais entre si;
5. Se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

E os cinco axiomas, (AABOE, 2013):

1. Grandezas iguais a uma mesma grandeza são iguais entre si;
2. Se grandezas iguais forem adicionadas a grandezas iguais, as somas serão iguais;
3. Se grandezas iguais forem subtraídos de grandezas iguais, os resultados serão iguais;
4. Grandezas que coincidem entre si são iguais;
5. O todo é maior do que suas partes.

Os postulados são as hipóteses básicas relativas ao ramo específico do saber, neste caso a geometria plana, enquanto que os axiomas são aceitos em todos os campos.

O sistema geométrico apresentado por Euclides nos livros que formam os *Elementos* durante muito tempo foi considerado “a” Geometria. Era a única disponível e podia ser usada na vida diária sem contradições aparentes. Os *Elementos* de Euclides foram fundamentos do ensino de Geometria praticamente até o início do século XX.

Segundo Merlyn Retz e Meta Darlene Keihn,

em 1928, um pequeno livro intitulado *Euclides Danicus* foi descoberto num sebo na Dinamarca. Escrito por Georg Mohr (1640-1697) e publicado originalmente em 1672, este trabalho mostra como os problemas de construções com régua e compasso podem ser resolvidos apenas por meio de compasso. Essas construções ficaram conhecidas como “construções de Mohr-Mascheroni” (EVES, 1992, p. 31).

A obra de Mohr (EVES, 1992) se fez sob a forma de resposta à questão: “O que é possível usando-se apenas o compasso?”. Sua resposta foi: “Tudo de Euclides”.

3 Sobre o Ensino da Geometria

Segundo o Referencial Curricular do Ensino Fundamental do Estado do Tocantins,

o estudo dos conceitos geométricos revela o lado sedutor da matemática, as possíveis conexões de seus conteúdos com diversos fatores presentes no meio social (formas, áreas, volumes, planos, etc.) permite uma abordagem rica em imagens, desenhos e manipulações de objetos, talvez por isso, seja (ou era) a parte da matemática em que os alunos demonstram mais interesse. Destaca ainda a importância de que o aluno perceba a relação destes conteúdos com algumas áreas de conhecimentos aplicados (engenharia, construção civil, pintura, escultura, etc), pois isto ajuda a reforçar a aplicabilidade dos conhecimentos desenvolvidos, revelando a matemática como uma ciência atual de inestimada importância para a sociedade (TOCANTINS, 2008, p. 336).

Apesar disso, nota-se que a Geometria tem sido deixada em segundo plano pela maioria dos professores de Matemática do Ensino Fundamental, e isso se deve a uma série de fatores. Um deles (BRASIL, 1998) é que a formação dos professores, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência. Não tendo oportunidade e condições para aprimorar sua formação e não dispondo de outros recursos para desenvolver as práticas da sala de aula, os professores apóiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória.

Fazendo-se uma análise dos principais livros didáticos de Matemática utilizados no ensino fundamental nos últimos anos, verifica-se que, ao tratar do estudo da Geometria, a maioria tem pontos negativos. Veja a seguir algumas análises encontradas no Guia do Livro Didático - PNLD 2014 (BRASIL, 2013) e suas respectivas coleções e autores.

- (...) há sequências de demonstrações que adotam um encadeamento lógico que difere do usual. Essas escolhas tornam menos instrutivas e atraentes algumas demonstrações feitas no livro. É o que ocorre, por exemplo, na demonstração do caso ângulo-ângulo de semelhança de triângulos e do Teorema de Tales. (Coleção: DESCOBRINDO E APLICANDO A MATEMÁTICA, Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio F. Machado, Editora Dimensão, 1ª Edição - 2012);
- (...) há deficiências nos experimentos introdutórios das propriedades geométricas, nos quais o aluno é guiado para atingir muito rapidamente as conclusões desejadas, com pouca oportunidade de tirar suas próprias conclusões. E mais, o excesso de nomenclatura que permeia o desenvolvimento dos conteúdos pode desviar a atenção dos fatos mais relevantes. (Coleção: MATEMÁTICA – BIANCHINI, Edwaldo Roque Bianchini, Editora Moderna, 7ª Edição - 2011);

- (...) não há articulação e equilíbrio adequados entre atividades experimentais e dedutivas, já que é destinado pouco espaço para investigações, levantamento de hipóteses e verificação de propriedades pelo aluno. As construções geométricas com régua e compasso estão presentes, (...) porém sem as necessárias justificativas para os procedimentos empregados. (Coleção: MATEMÁTICA – IDEIAS E DESAFIOS, Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori, Saraiva Livresiros Editores, 17ª Edição - 2012);
- O termo “vistas” é usado para designar vários tipos de imagens gráficas, no entanto, algumas dessas imagens não possuem as propriedades geométricas que definem esse conceito. Além disso, no estudo de simetrias de reflexão, há pouca clareza com respeito à distinção entre eixos de simetria nas imagens gráficas, que sempre são planas (...). (Coleção: MATEMÁTICA – IMENES LELLIS, Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis, Editora Moderna, 2ª Edição - 2012);
- (...) são valorizadas construções com instrumentos de desenho, ainda que sem as devidas justificativas. (...) por vezes, sólidos geométricos são confundidos indevidamente com a superfície fechada que é o seu contorno. (Coleção: PRATICANDO MATEMÁTICA - Edição renovada, Miguel Asis Name e Maria José C. de V. Zampirolo, Editora do Brasil, 3ª Edição - 2012);
- As figuras geométricas planas são definidas de modo apropriado, ora como regiões planas, ora como contornos de regiões planas. Tal tratamento, entretanto, não é observado para as figuras geométricas espaciais. Além disso, por vezes, uma vista de um objeto é apresentada como aquilo que um observador vê de determinado ponto. Sabe-se que, em geometria, vistas são imagens de um objeto por meio de projeções paralelas ortogonais sobre um plano. Há desarticulação entre os conceitos de vistas, perspectiva e outros modos de representação plana de figuras geométricas espaciais. (Coleção: PROJETO TELÁRIS – MATEMÁTICA, Luiz Roberto Dante, Editora Ática, 1ª Edição - 2012);
- Em seguida, nesses livros, são apresentados conceitos da geometria plana, em especial o conceito de ângulo. No entanto, há repetições desnecessárias e são estabelecidas poucas articulações entre as figuras geométricas espaciais e as planas. (...) é bem conduzida a discussão das isometrias de rotação e de translação no plano. No entanto, tais transformações são mal articuladas com o conceito de simetria. (Coleção: VONTADE DE SABER MATEMÁTICA, Patricia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza, Editora FTD, 2ª Edição - 2012).

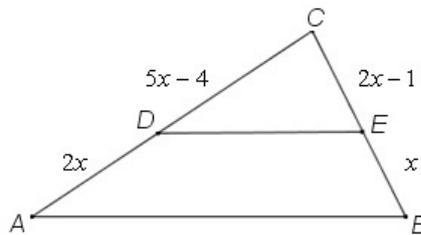
Além desses aspectos negativos citados acima é usual encontrar nesses livros problemas de Geometria que “chamam” ao pensamento e à resolução de equações. Mas, em muitos casos, esses problemas apontam que um verdadeiro contexto geométrico atue como

“cenário” para tal pensamento e tal resolução de uma equação, sem que se cheguem a estabelecer verdadeiras interações entre esses dois domínios. Trata-se de um olhar a respeito da potencialidade de propor um trabalho que requeira a utilização simultânea de recursos algébricos e geométricos de maneira que uns alimentem os outros (ITZCOVICH, 2012).

Para constatar-se o que foi falado, observe o seguinte exemplo (ITZCOVICH, 2012):

Dado o triângulo ABC, determinar o valor de x sabendo que DE é paralela a AB.

Figura 14 – Triângulo relacionando álgebra e geometria - 1



Neste exemplo, percebe-se claramente a intenção de recorrer às relações de proporcionalidade entre os segmentos, porém, parece que a dificuldade da resolução “se inclina mais para o lado” da resolução de uma equação.

Uma vez proposta a equação $\frac{5x-4}{2x} = \frac{2x-1}{x}$, o trabalho centra-se na técnica de resolução. Esta resolução não deixa ver nenhum novo “lado” do trabalho geométrico (ITZCOVICH, 2012). Neste sentido, não há interação entre Geometria e Álgebra, mas bem aproveita-se um contexto, o geométrico, para “gerar” o pensamento e a resolução de equações.

Observa-se ainda que em grande parte desses livros didáticos a Geometria vêm de forma isolada, e é apresentada e exaurida de uma única vez, quase sempre na parte final dos livros, outro fator que leva os professores a deixá-la de lado, sob o pretexto que não houve tempo para trabalhar o conteúdo.

3.1 Porque o Desenho Geométrico?

Como já citado na Introdução deste trabalho, José Carlos Putnoki destaca que o Desenho Geométrico foi banido das nossas escolas de 1.º e 2.º graus, e que, a partir de então, a Geometria vem se tornando o grande terror da Matemática, tanto para alunos quanto para professores. Segundo ele, não se trata de uma coincidência, mas sim de uma consequência. Mesmo sendo evidente que desde os tempos em que a régua e o compasso frequentaram os bancos escolares, até os dias de hoje, inúmeros são os fatores que incidiram negativamente no ensino, isso não anula em hipótese alguma, a defesa que se pretende apresentar (HELLMEISTER, 2013).

Hoje em dia, uma grande quantidade de alunos do ensino fundamental não conhecem, ou sequer ouviram falar o que é um compasso, quanto mais manipular, e alguns não sabem utilizar corretamente uma régua. Assim como eles, muitos professores de Matemática também não são da geração da régua e do compasso, ou seja, não aprenderam a utilizar os instrumentos euclidianos na escola.

Ainda em HELLMEISTER (2013), Putnoki enfatiza que, desde os *Elementos*, de Euclides, o Desenho Geométrico apresenta-se ligado à Geometria de forma indissolúvel, não com esse título, mas com a denominação de “Construções Geométricas”. A rigor, ensinar Geometria sem régua e compasso é como dar a uma criança um triciclo sem uma das rodas trazeiras. Ela até consegue se locomover, mas com muita dificuldade (HELLMEISTER, 2013).

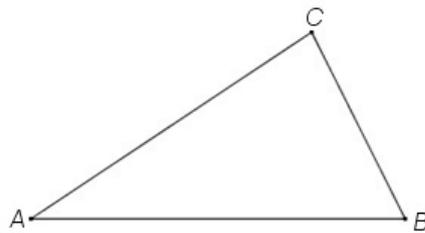
A forma como ensina-se Geometria hoje, abrindo mão de ferramentas cujo alcance didático é inesgotável é o mesmo que mutilá-la. Putnoki ressalta ainda que,

quando Euclides elaborou sua Geometria, não era sua proposta a *execução* dos traçados com régua e compasso, mas o estudo da possibilidade de construir a figura com aqueles instrumentos, e que didaticamente falando, discutir como construir e, em seguida, realizar a construção, são etapas que se completam, sendo a segunda a própria materialização das ideias da primeira (HELLMEISTER, 2013, p. 369).

Observe aqui um exemplo (ITZCOVICH, 2012) que permite claramente a interação entre a Geometria e a Álgebra, por meio das construções geométricas.

Considere o triângulo ABC.

Figura 15 – Triângulo relacionando álgebra e geometria - 2



Usando somente régua (não graduada) e compasso, construir um triângulo ADC, de maneira que D pertença à reta AB e que a área do triângulo ADC seja $\frac{1}{3}$ da área do triângulo ABC.

Neste exemplo, como se trata de construir um triângulo (sob dadas condições) cujas proporções entre segmentos constituem a resolução privilegiada, a mesma proporcionalidade é a que contribui às relações necessárias para poder pensar a resolução do problema (ITZCOVICH, 2012). Isto é, ao tentar desenvolver um caminho possível na construção,

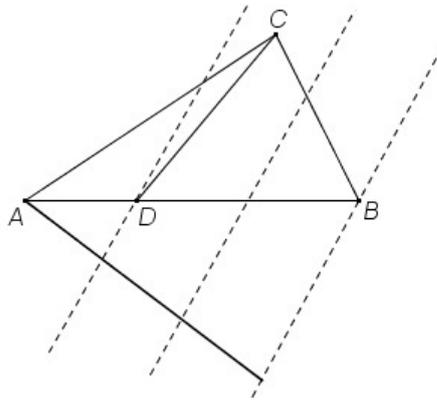
a expressão algébrica que relaciona a área do triângulo conhecido (A_{T1}) com o triângulo por construir (A_{T2}) permite conhecer a base do novo triângulo.

Veja a solução:

Sejam, a área do triângulo $ABC = A_{T1}$ e a área do triângulo $ADC = A_{T2}$, então, deve ocorrer que $A_{T1} = 3.A_{T2}$.

Considerando o novo triângulo com mesma altura que o original, bastará dividir sua base em três partes iguais e considerar uma delas (a mais próxima de A) para construir o novo triângulo. Para isso, basta utilizar o procedimento de dividir um segmento em partes iguais com régua e compasso, que pode ser encontrado no capítulo 4, Construções Geométricas Básicas.

Figura 16 – Triângulo relacionando álgebra e geometria - 3



Assim, tem-se que o triângulo ABC possui a mesma altura do triângulo construído ADC , e a construção está correta. A justificativa é simples já que se verificam as seguintes condições:

$$\frac{A_{T1}}{A_{T2}} = \frac{AB}{AD}$$

e como AD é a terceira parte de AB , é possível afirmar que $A_{T1} = 3.A_{T2}$.

Pode-se perceber neste exemplo que, as expressões algébricas permitem planejar a construção e ter a certeza de que a construção está correta e possível de ser realizada com régua (não graduada) e compasso (ITZCOVICH, 2012). Assim, trata-se de evidenciar algumas relações entre a Álgebra e a Geometria que cumprem a função de colaborar para o planejamento de uma construção, bem como de demonstrar se a construção realizada cumpre as condições propostas ou não.

Segundo Calixto Garcia,

as Construções Geométricas desempenham um papel relevante na Matemática, pois possibilitam a aplicação e a revisão de conceitos adquiridos, resolvem muitas situações aplicáveis ao cotidiano e seu estudo pode

esclarecer a solução de problemas tradicionais em Geometria (HELLMEISTER, 2013, p. 489).

É uma ferramenta cuja função essencial no ensino é a de permitir a aplicação de sua teoria, materializando ideias, para melhor compreensão de seus conceitos, tendo grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas (WAGNER, 2009).

Por esses e outros motivos, é sempre interessante enfatizar a importância de seu estudo nos currículos escolares.

4 Construções Geométricas Básicas

A seguir, destaca-se uma série de exemplos de construções com régua e compasso, baseados em um conjunto de ideias e demonstrações realizadas na obra de Eduardo Wagner (WAGNER, 2009).

Esses exemplos (MUNIZ NETO, 2013), objetivam desenvolver nos docentes e discentes uma relativa habilidade no manuseio da régua e do compasso. Em cada um desses exemplos é apresentada uma sequência de passos que, uma vez seguida, executa a construção correspondente. Observa-se, por fim, que uma construção geométrica não constitui prova de uma propriedade geométrica, uma vez que, necessariamente, envolve escolhas particulares e erros de precisão.

4.1 Transposição de Segmentos de Reta

Construir o triângulo ABC sendo dados os três lados:

Figura 17 – Tansposição de segmentos de retas - 1



Solução.

1. Desenhe uma reta r e sobre ela assinale o ponto B .
2. Para transportar o segmento a , pegue o compasso, ponha a ponta seca em uma das extremidades e abra até que a ponta do grafite coincida com a outra extremidade.
3. Ponha agora a ponta seca em B e trace um pequeno arco cortando a reta r . Este é o ponto C tal que $BC = a$. (Figura 18)
4. Pegue agora o segmento b com o compasso. Com centro em C desenhe, acima da reta r um arco de circunferência de raio b .
5. Para finalizar, pegue o segmento c com o compasso e, com centro em B desenhe um arco de raio c . A interseção desses dois arcos é o vértice A do triângulo. (Figura 19)

Figura 18 – Tansposição de segmentos de retas - 2

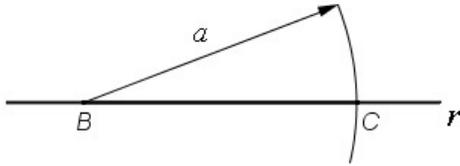
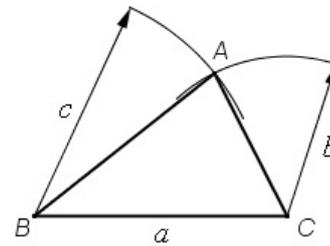


Figura 19 – Tansposição de segmentos de retas - 3

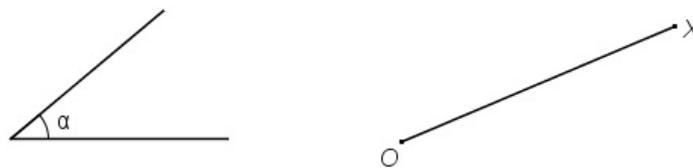


Este exemplo mostra como construir um triângulo dadas as medidas dos lados e, conseqüentemente, a transportar segmentos.

4.2 Transposição de Ângulos

Dado o ângulo α , e a semirreta OX construir o ângulo $XOY = \alpha$.

Figura 20 – Tansposição de ângulos - 1



Solução.

1. Com centro no vértice do ângulo dado trace um arco de circunferência cortando seus lados nos pontos A e B . (Figura 21)
2. Sem modificar a abertura do compasso trace um arco com centro O cortando OX em C .
3. Pegue com o compasso a distância AB e trace, com centro em C e com este raio, um arco determinando sobre o primeiro o ponto D . A semirreta OY que passa por D é tal que $XOY = \alpha$. (Figura 22)

Figura 21 – Tansposição de ângulos

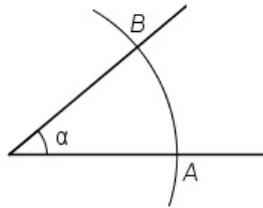
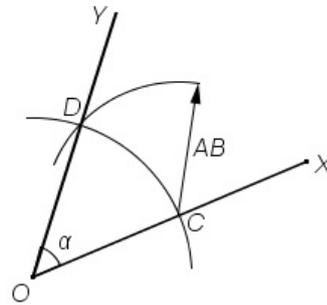


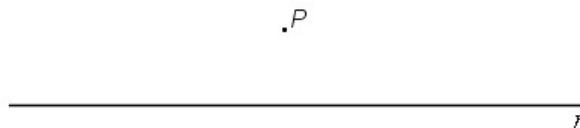
Figura 22 – Tansposição de ângulos - 3



4.3 Retas Perpendiculares

Seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. Construir, passando por P uma perpendicular à reta r .

Figura 23 – Construção da perpendicular - 1

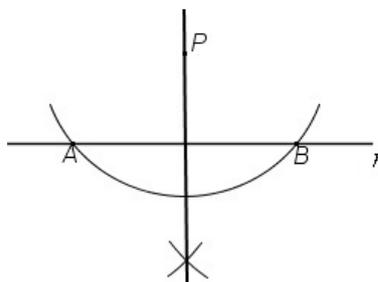


Solução.

1. Com centro em P trace uma circunferência qualquer cortando a reta r nos pontos A e B . (Figura 24)
2. Em seguida, desenhe dois arcos de circunferência de mesmo raio, com centros nos pontos A e B , determinando na interseção o ponto Q . A reta PQ é perpendicular à reta r e o problema está resolvido.

A primeira circunferência desenhada garante que $PA = PB$ e as duas seguintes, garantem que $QA = QB$. Assim, os pontos P e Q equidistam de A e B .

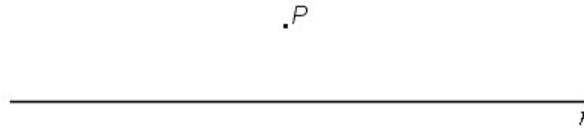
Figura 24 – Construção da perpendicular - 2



4.4 Retas Paralelas

Seja P um ponto dado fora de uma reta r dada. Construir a reta paralela a r passando por P .

Figura 25 – Construção da paralela - 1



Solução.

1. Trace um arco de circunferência com centro em P cortando a reta r em A . (Figura 26)
2. Trace outro arco de circunferência com mesmo raio que o primeiro e centro em A , cortando a reta r em B . (Figura 27)
3. Trace um terceiro arco de circunferência com mesmo raio que os outros e centro em B , cortando o primeiro arco em Q . (Figura 27)

Figura 26 – Construção da paralela - 2

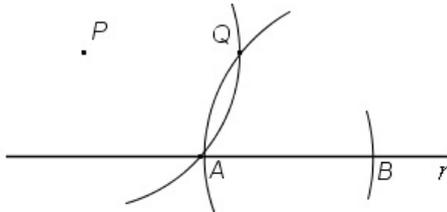
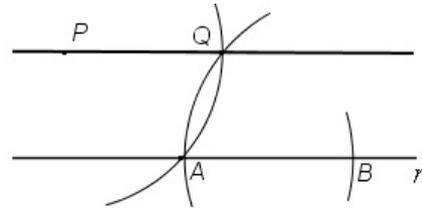


Figura 27 – Construção da paralela - 3



Para justificar, observe que pelas construções efetuadas, $PABQ$ é um losango. Portanto, seus lados opostos são paralelos. Logo, a reta PQ é paralela à reta r e o problema está resolvido.

4.5 Divisão de um Segmento em Partes Iguais

Dado um segmento AB , dividir AB em um número qualquer de partes iguais.

Figura 28 – Divisão de segmentos - 1



Solução.

1. Esse exemplo mostra como dividir o segmento AB em 5 partes iguais. Trace uma semirreta qualquer AX e sobre ela, com o compasso, determine 5 segmentos iguais: AA_1 ; A_1A_2 ; A_2A_3 ; A_3A_4 ; A_4A_5 . (Figura 29)
2. Trace agora a reta A_5B , e a seguir, as paralelas a esta reta traçadas pelos pontos A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 , determinando sobre AB os pontos P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 . (Figura 30)

Figura 29 – Divisão de segmentos - 2

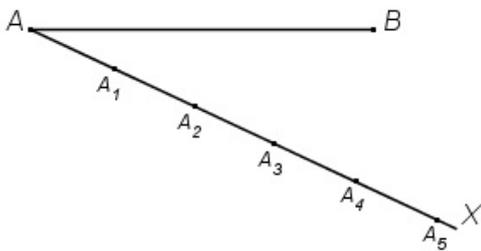
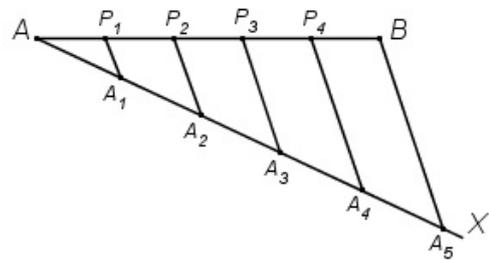


Figura 30 – Divisão de segmentos - 3



Assim, $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B$, ou seja, o segmento AB está dividido em 5 partes iguais.

4.6 Reta Mediatriz e Ponto Médio

Dado um segmento de reta AB , determinar o ponto médio de AB e a reta mediatriz a AB .

Figura 31 – Mediatriz e ponto médio - 1



Solução.

1. Trace um arco de circunferência com centro em A e raio maior que a metade de AB . (Figura 32)
2. Com o mesmo raio, trace outro arco de circunferência com centro em B , intersectando o primeiro em P e Q . (Figura 32)
3. Por fim, trace a reta PQ . (Figura 33)

Figura 32 – Mediatriz e ponto médio - 2

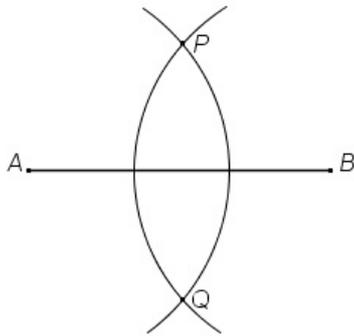
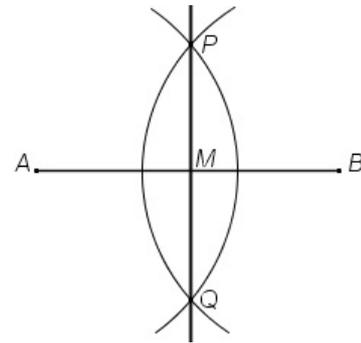


Figura 33 – Mediatriz e ponto médio - 3

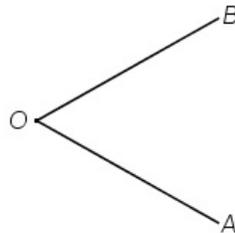


Pela construção feita, $APBQ$ é um losango e, como é sabido, suas diagonais são perpendiculares, assim, PQ é a mediatriz de AB . Sabe-se ainda que as diagonais do losango se intersectam nos seus respectivos pontos médios, logo $AM = MB$ e, portanto, M é o ponto médio de AB .

4.7 Reta Bissetriz

Dado um ângulo $A\hat{O}B$, construir a reta bissetriz desse ângulo.

Figura 34 – Bissetriz - 1



Solução.

1. Trace, com centro em O , um arco de circunferência cortando os lados do ângulo em X e Y . (Figura 35)
2. Depois, trace dois arcos de mesmo raio com centros em X e Y que se cortam em C . (Figura 35)
3. Para finalizar, trace a semirreta OC . (Figura 36)

Figura 35 – Bissetriz - 2

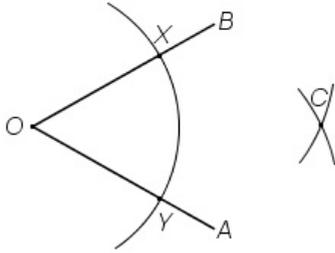
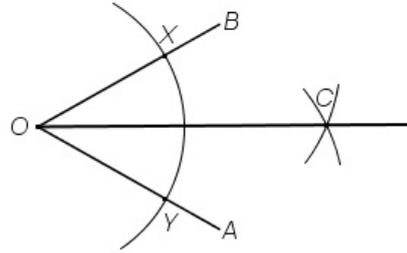


Figura 36 – Bissetriz - 3

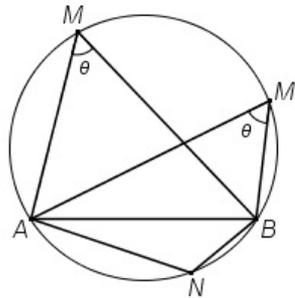


Observe que, os triângulos OXC e OYC são congruentes (caso LLL) e, portanto, $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$. Logo, a semirreta OC é bissetriz do ângulo \widehat{AOB} .

4.8 Arco Capaz

Considere dois pontos A e B sobre uma circunferência. Para todo ponto M sobre um dos arcos, o ângulo $\widehat{AMB} = \theta$ é constante.

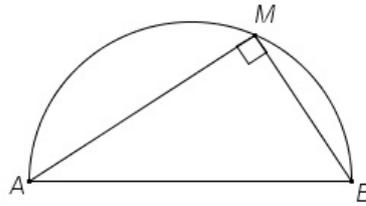
Figura 37 – Arco capaz



Um observador que percorra o maior arco AB da figura acima, consegue ver o segmento AB sempre sob mesmo ângulo. Este arco chama-se *arco capaz* do ângulo θ sobre o segmento AB .

Naturalmente que, se um ponto N pertence ao outro arco AB então o ângulo \widehat{ANB} é também constante e igual a $180^\circ - \theta$.

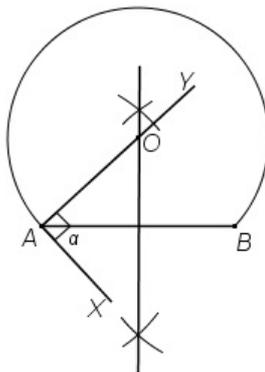
Ainda é interessante notar que se M é qualquer ponto da circunferência de diâmetro AB o ângulo \widehat{AMB} é reto. Por isso, cada semicircunferência de diâmetro AB é chamada de *arco capaz* de 90° sobre AB .

Figura 38 – Arco capaz de 90° 

Então, veja como construir o arco capaz dados o segmento AB e o ângulo α . Para construir o lugar geométrico dos pontos que conseguem ver AB segundo o ângulo α , acompanhe os seguintes passos.

1. Desenhe a mediatriz de AB . (ver Figura 33)
2. Trace a semirreta AX tal que $\widehat{BAX} = \alpha$.
3. Trace por A a semirreta AY perpendicular a AX .
4. A interseção de AY com a mediatriz, é o ponto O , centro do arco capaz.
5. Com centro em O desenhe o arco capaz AB .

Figura 39 – Construção do arco capaz



O arco AB que você desenhou é o lugar geométrico do ângulo α construído sobre o segmento AB . Para justificar, observe que se $\widehat{BAX} = \alpha$ então $\widehat{BAY} = 90^\circ - \alpha$ e, sendo M o ponto médio de AB , temos que $\widehat{AOM} = \alpha$. Assim $\widehat{AOB} = 2\alpha$ e, para qualquer ponto M do arco AB tem-se $\widehat{AMB} = \alpha$.

5 Definições

5.1 Sequências

O triângulo de Sierpinski (Figura 40),¹ símbolo do PROFMAT, é formado a partir de uma sequência de construções de triângulos equiláteros. Para obter esse símbolo, marca-se os pontos médios referentes a cada um dos lados de um triângulo equilátero inicial e, a união desses pontos dividirá esse triângulo em quatro novos triângulos equiláteros congruentes entre si.

Figura 40 – Triângulo de Sierpinski - Símbolo do PROFMAT



Excluindo-se o triângulo central e usando o mesmo processo nos outros três triângulos, obtêm-se doze novos triângulos equiláteros congruentes entre si. A medida do lado dos triângulos construídos em cada etapa forma uma **sequência** de números.

Uma sequência ou sucessão de números reais é definida como uma função cujo domínio é o conjunto \mathbb{N}^* , conjunto dos naturais excetuando-se o zero, e tomando valores no conjunto \mathbb{R} dos números reais: $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, DANTE (2010).

Assim, a cada elemento $n \in \mathbb{N}^*$ corresponde um único número real a_n . Os elementos a_n são os termos da sequência, e as notações para a sequência são:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) \text{ ou } (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ ou } (a_n)$$

Dessa forma, $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$

O índice n indica a posição do elemento na sequência. Desse modo, o primeiro termo é indicado por a_1 , o segundo por a_2 e assim por diante.

Assim, uma sequência numérica é uma organização de números, podendo ou não ter uma lei de formação, e ainda, serem finitas ou infinitas.

¹ O matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) foi o primeiro a descrevê-lo em 1915, também conhecido por Junta de Sierpinski ou Fractal de Sierpinski (https://pt.wikipedia.org/wiki/Triângulo_de_Sierpinski, acesso em 23/09/2015).

Exemplos:

- 1) A sequência dos números pares positivos é infinita: $(2, 4, 6, 8, \dots)$, onde $a_1=2, a_2=4, a_3=6, a_4=8$, etc. Observe que $2 = 2.1; 4 = 2.2; 6 = 2.3; 8 = 2.4$; etc, ou seja, cada termo é dado por $2n$ com $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Nesse caso, temos $f(n) = a_n = 2n$, com $a_1 = 2$. Essa expressão, $a_n = 2n$ é chamada de lei de formação ou termo geral da sequência.
- 2) A sequência $(8, 5, 1, 7, 0, 0, 5, 9)$ que compõe um número de telefone é finita e, nesse caso, não possui uma lei de formação.

Quando é dado o primeiro termo de uma sequência e uma regra que permite determinar cada termo a_n a partir dos seus anteriores, pode-se dizer que explicitou-se a sequência por recorrência. Por exemplo, veja como explicitar a sequência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 3, \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ n = 2 &\rightarrow a_2 = a_1 + 3 \rightarrow a_2 = 5; \\ n = 3 &\rightarrow a_3 = a_2 + 3 \rightarrow a_3 = 8; \\ n = 4 &\rightarrow a_4 = a_3 + 3 \rightarrow a_4 = 11. \end{aligned}$$

Logo, a sequência é $(2, 5, 8, 11, \dots)$.

Assim, voltando ao símbolo do PROFMAT e considerando o triângulo inicial de lado uma unidade, tem-se que os lados dos triângulos obtidos formam a sequência $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Pode-se continuá-la infinitamente com $a_1 = 1$ e seguindo a lei de formação $f(n) = a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, com $n \geq 2$.

Esta é apenas uma introdução ao conceito de sequência, preparando o aluno para, um pouco mais adiante, contemplar as ideias e operações das Progressões Aritméticas (P.A) e/ou Geométricas (P.G).

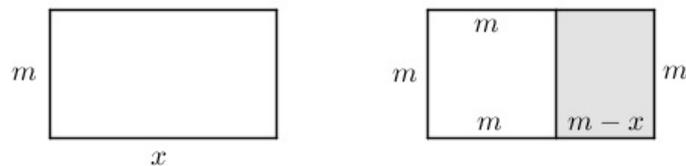
5.2 O Número de Ouro

A primeira grande crise no desenvolvimento da Matemática ocorreu quando se percebeu que havia segmentos de reta cuja medida não correspondia a nenhuma razão entre dois números naturais, o que significava que a reta numerada continha pontos que não correspondiam a nenhum número conhecido. E esses novos números foram chamados irracionais (DANTE, 2010).

Um dos mais famosos números irracionais é o chamado **número de ouro**, representado pela letra grega ϕ (lê-se: fi).

O número de ouro (STOCCO, 2013) é igual à razão entre o comprimento e a largura do retângulo, que possui a seguinte propriedade: Se as medidas de seus lados são x e m , e m é a medida do lado do maior quadrado que pode ser retirado do retângulo, então o retângulo menor é semelhante ao retângulo inicial.

Figura 41 – Retângulo Áureo



Isso significa que (STOCCO, 2013): $\frac{m}{x} = \frac{x-m}{m}$, o que equivale a:

$$m^2 = x^2 - mx$$

ou

$$x^2 - mx - m^2 = 0$$

Resolvendo essa equação na variável x , temos:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4m^2}}{2} = \frac{m \pm m\sqrt{5}}{2} = \frac{m(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Como x é um número positivo, não consideramos o sinal negativo, assim

$$\frac{x}{m} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398... = \phi$$

ou seja, o número de ouro.

Ele é considerado o símbolo da harmonia e da beleza e está presente em diversos elementos da natureza (forma de crescimento das plantas e dos demais seres vivos, corpo humano, cauda do pavão, quantidade de abelhas - machos e fêmeas - de uma colméia) e em vários campos do conhecimento (Arte, Arquitetura, Música), (DANTE, 2010).

O retângulo com essa propriedade chama-se retângulo áureo e foi utilizado pelos gregos em sua arquitetura e em muitas obras clássicas do Renascimento, como a *Mona Lisa*, do italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) (STOCCO, 2013).

6 Aplicações em Sala de Aula

Destaca-se aqui algumas atividades envolvendo duas sequências numéricas famosas e que podem ser muito bem exploradas por meio do desenho geométrico, estimulando a criatividade dos alunos, despertando seu interesse pelo uso da régua e do compasso e, conseqüentemente, pelo ensino da geometria. A sequência dos números primos e a sequência de Fibonacci.

6.1 Números Primos

É muito antiga a percepção que se teve quanto ao fato de estarem os números naturais classificados em duas categorias: Os que podem e os que não podem ser decompostos como produtos de outros naturais (GARBI, 2010). Por exemplo, 70 é o produto $2 \times 5 \times 7$. Entretanto, números como 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc., não são divisíveis por quaisquer outros, exceto por si mesmos e pela unidade. A este tipo de número dá-se o nome **primo** e seu estudo constitui um riquíssimo ramo da Teoria dos Números.

A sequência dos números primos é infinita, e a prova disso, dada por Euclides, que apesar de magistral geômetra também pesquisou os números inteiros e interessou-se em saber se a quantidade de números primos era ou não ilimitada, é considerada cativante (GARBI, 2010). Ele utilizou o método da redução ao absurdo. Suponha que houvesse apenas uma quantidade finita de primos, $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$. Seja então P tal que

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$$

Evidentemente, P é maior do que qualquer p_i e não é divisível por nenhum deles (pois sempre deixaria 1 como resto de divisão). Existem, então, duas alternativas: ou P é primo ou é divisível por algum primo P' . Se P é primo, foi encontrado um primo que não fazia parte do conjunto inicial de primos do qual se partiu. Se P não é primo e é divisível pelo primo P' , este é diferente de todos os primos iniciais. Assim, em ambas as alternativas, ou P ou P' seriam primos não incluídos no conjunto $p_1, p_2, p_3 \dots p_n$, que deveria conter todos os primos. Isto é uma contradição com a hipótese inicial da qual partiu-se e, portanto, a quantidade de primos não pode ser finita (GARBI, 2010).

Mesmo que Euclides não tivesse elaborado *os Elementos*, esse pensamento de pureza incomparável seria suficiente para imortalizá-lo (GARBI, 2010).

A seguir, utilizando a sequência dos números primos, desenvolve-se as Atividades de 1 à 3, resgatando as construções geométricas por meio do uso da régua e do compasso, onde é feita a construção de uma estrutura de quadrados, desenvolvendo a capacidade motora,

a percepção visual e a capacidade de reconhecer propriedades geométricas, procurando padrões, como a construção de espirais e estabelecendo generalizações que relacionem Geometria e Álgebra.

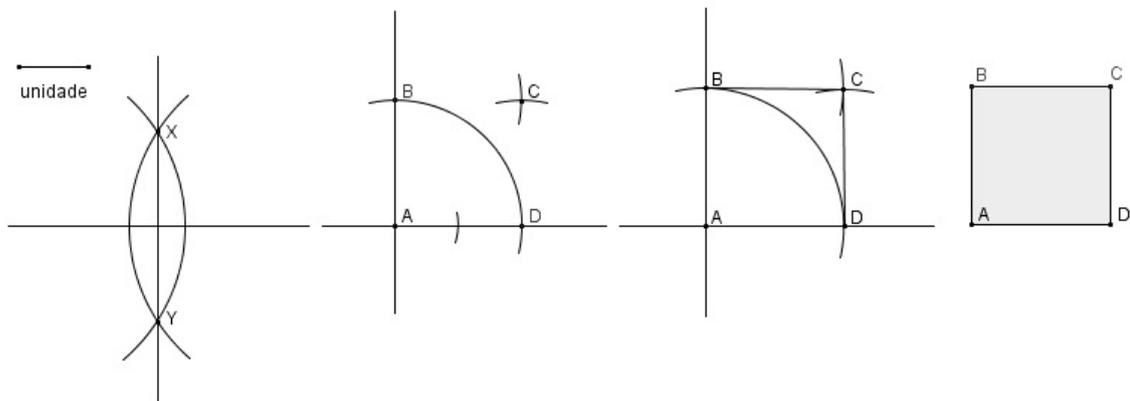
6.1.1 Atividade 1: Construção de Quadrados Primos

Construir, com régua e compasso, uma sequência de seis quadrados cuja medida dos lados sejam os seis primeiros números primos, seguindo o sentido horário, de forma que cada quadrado tenha seu vértice inicial no centro do quadrado anterior, mantendo os lados sempre na posição horizontal e vertical.

CONSTRUÇÃO

- 1) Defina um segmento de reta como sendo 1 unidade.
- 2) Trace agora duas retas perpendiculares, e com a ponta seca do compasso no ponto de intersecção (ponto A), faça um arco de círculo de 2 unidades de comprimento definindo os pontos B e D .
- 3) A seguir, com a mesma abertura e ponta seca em B e depois em D , trace dois arcos que se intersectam, definindo o ponto C .
- 4) Pronto, é só traçar os segmentos BC e CD definindo o quadrado $ABCD$ de lado 2 unidades.

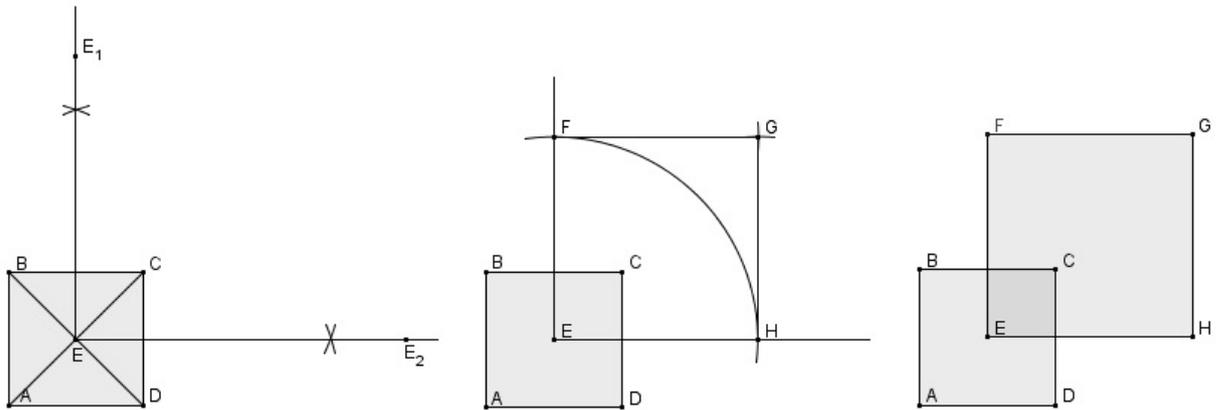
Figura 42 – Construção do quadrado de lado 2



- 5) Para construir o segundo quadrado, inicialmente trace as diagonais AC e BD definindo o ponto E , centro do quadrado $ABCD$ e primeiro vértice do novo quadrado.
- 6) A seguir, com a ponta seca do compasso em B e depois em C , trace dois arcos que se intersectem definindo o ponto E_1 . Análogamente, com a ponta seca em C e depois em D , faça dois arcos que se intersectam definindo o ponto E_2 .
- 7) Dando sequência, trace as retas $\overrightarrow{EE_1}$ e $\overrightarrow{EE_2}$, e a seguir, com a ponta seca do compasso em E e abertura de 3 unidades, trace um arco que intersecte $\overrightarrow{EE_1}$ e $\overrightarrow{EE_2}$ definindo os pontos F e H .

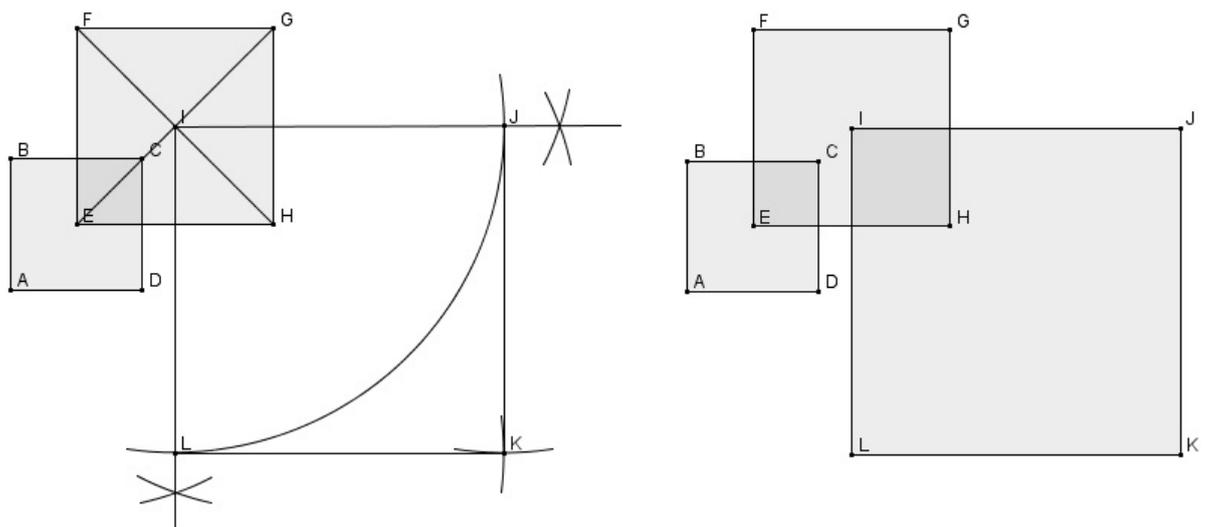
8) Para finalizar o segundo quadrado, com a mesma abertura anterior, 3 unidades, e com a ponta seca em F e depois em H , trace dois arcos que se intersectem definindo o ponto G . Agora é só traçar os segmentos FG e GH e finalizar o segundo quadrado, de lado 3 unidades.

Figura 43 – Construção do quadrado de lado 3 e vértice no centro do quadrado de lado 2



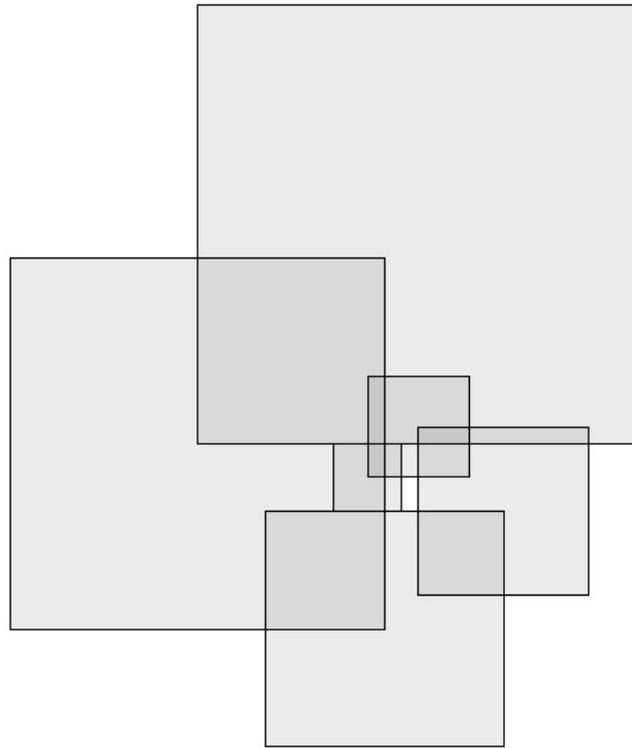
Para construir o terceiro quadrado, de lado 5, proceda de modo análogo ao segundo, de lado 3. Depois de finalizado, a construção ficará conforme a Figura 44 à direita.

Figura 44 – Construção do quadrado de lado 5 e vértice no centro do quadrado de lado 3



Ao finalizar a construção, ela deverá estar conforme a Figura 45.

Figura 45 – Seis quadrados primos com vértices no centro dos anteriores



6.1.2 Atividade 2: Construção da Espiral pelo Centro dos Quadrados Primos

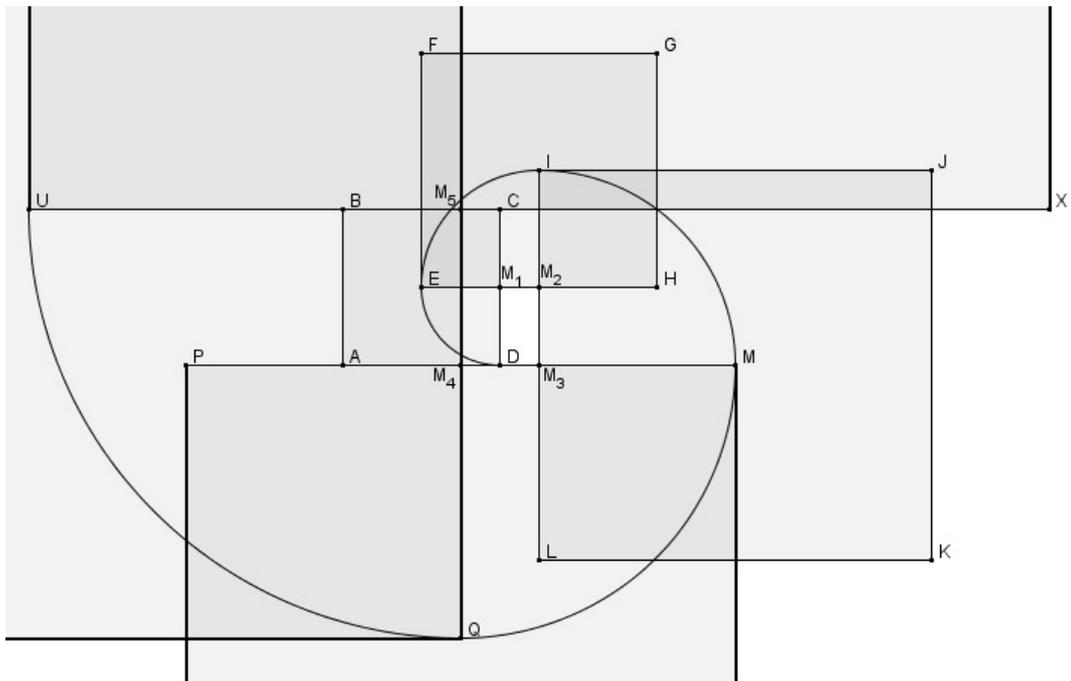
Construir uma espiral com origem no ponto D e que passe pelo centro de cada um dos quadrados construídos na Atividade 1 e, a seguir, calcular o seu comprimento.

CONSTRUÇÃO

Essa é uma atividade mais fácil, uma vez que os quadrados foram construídos. Basta definir os pontos M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 e M_6 , pontos de intersecção entre cada quadrado da seqüência com o seu sucessor.

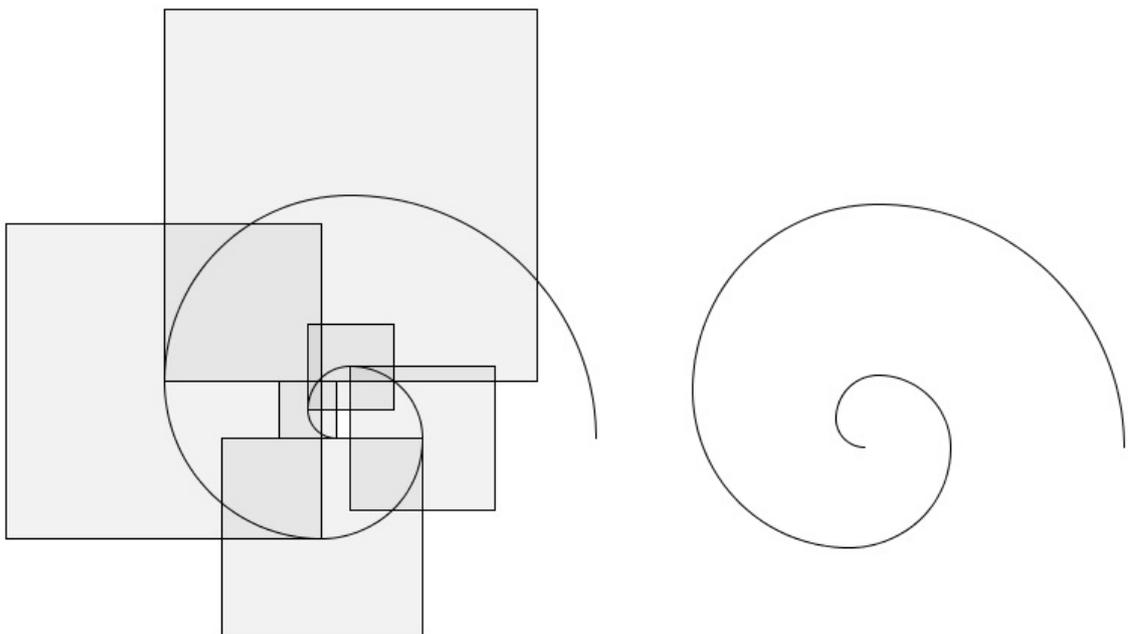
Depois, com a ponta seca do compasso em M_1 , trace o arco DE ; com a ponta seca em M_2 , trace o arco EI , com a ponta seca do compasso em M_3 , trace o arco IM , e assim sucessivamente conforme a Figura 46.

Figura 46 – Construção da espiral pelo centro dos quadrados primos



Depois de pronta, a espiral ficará conforme a Figura 47.

Figura 47 – Espiral passando pelo centro dos quadrados primos



Agora, veja como calcular o comprimento dessa espiral.

O comprimento de uma circunferência é dado pela fórmula $C = 2.\pi.r$. Note que

cada arco construído representa $\frac{1}{4}$ de círculo. Assim, o comprimento de cada arco é dado por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{1}{4} = r \cdot \frac{\pi}{2}$$

Sendo os raios a metade da medida do lado de cada um dos quadrados, então:

$$\cdot r_1 = \frac{2}{2} \text{ e } C_1 = \frac{2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cdot r_2 = \frac{3}{2} \text{ e } C_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cdot r_3 = \frac{5}{2} \text{ e } C_3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

...

$$\cdot r_6 = \frac{13}{2} \text{ e } C_6 = \frac{13}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{4}$$

ou seja,

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6$$

$$C_e = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{11\pi}{4} + \frac{13\pi}{4}$$

$$C_e = \frac{\pi}{4} \cdot (2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13)$$

$$C_e = \frac{41\pi}{4}$$

Observe que para encontrar o comprimento da espiral, basta fazer

$$C_e = \frac{\pi}{4} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

onde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são a sequência dos números primos.

Pode-se continuar a construção da espiral infinitamente de acordo com os resultados que se deseja alcançar, porém, como os números primos não possuem uma lei de formação, a generalização acima é o máximo que se pode fazer para a soma de n elementos.

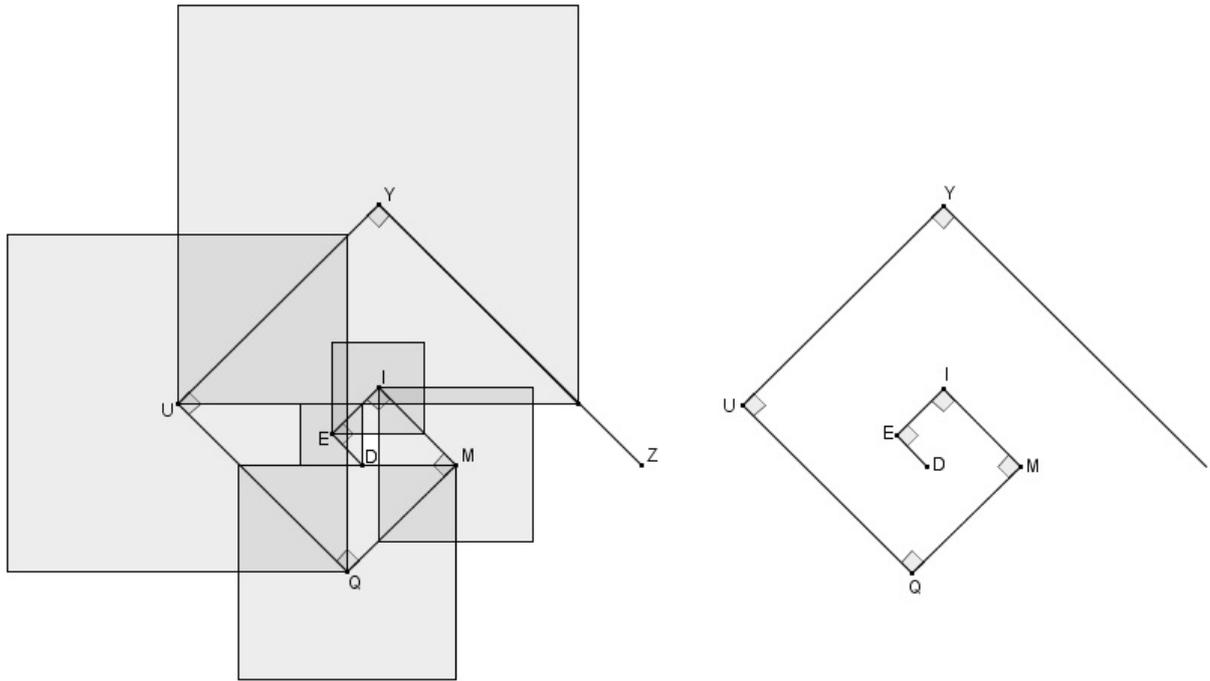
6.1.3 Atividade 3: Construção da Espiral Retangular pelo Centro dos Quadrados Primos

Construir agora, uma espiral retangular com origem também em D e passando pelo centro de cada um dos quadrados, e, a seguir, calcular também o seu comprimento.

CONSTRUÇÃO

Basta fazer os segmentos DE, EI, IM, MQ, QU, UY e YZ .

Figura 48 – Espiral retangular pelo centro dos quadrados primos



Para calcular o comprimento de cada segmento utilize o Teorema de Pitágoras.

$$\cdot C_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cdot C_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\cdot C_3 = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

...

$$\cdot C_6 = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{338}{4}} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$$

ou seja, de modo análogo a espiral da Atividade 2, tem-se

$$\begin{aligned} C_e &= C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \dots + \frac{13\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13) = \frac{41\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Assim, sendo novamente $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ os termos da sequência dos número primos, pode-se escrever o comprimento da espiral como

$$C_e = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n).$$

6.2 A Sequência de Fibonacci

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170 - 1250), mais conhecido como Fibonacci (cujo significado é filho de Bonaccio), contribuiu com diversas pesquisas para o desenvolvimento da Matemática, DANTE (2010).

O problema que o consagrou foi publicado em seu livro, *Liber Abaci*, em 1202. Veja o problema adaptado (DANTE, 2010) e (STOCCO, 2013):

Quantos casais de coelhos serão gerados em um ano, começando com um único casal, se em cada mês cada casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês de vida?

A solução é:

- no 1º mês temos um casal de coelhos, que chamaremos de A ;
- no fim do 1º mês o casal acasala. Continuamos com um par de coelhos;
- no 3º mês, A gera um par B e passamos a contar com dois casais;
- no 4º mês, A gera um novo par C , e passamos a ter três casais;
- no 5º mês, além da cria de A , teremos também uma cria de B , e passamos a ter cinco casais, A, B, C, D e E ;
- no 6º mês, além das crias de A e B , teremos uma cria de C , assim, passamos a ter oito casais, A, B, C, D, E, F, G e H ; e assim sucessivamente.

Os números que representam a quantidade de casais (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) formam uma sequência chamada *sequência de Fibonacci*.

A fórmula por recorrência dessa sequência é dada por:

$$\begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \text{ e } n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

ou seja, cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois anteriores.

A sequência de Fibonacci aparece frequentemente na natureza e está diretamente relacionada com o *número de ouro* (veja abaixo), ou seja, o número irracional $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$ que já foi visto anteriormente.

Considerando os termos da sequência de Fibonacci como $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$, $a_7 = 13$, $a_8 = 21$, $a_9 = 34$, ..., então, a razão entre cada número da sequência pelo anterior, cada vez mais se aproxima do número de ouro: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$, $\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$, $\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1,5$, $\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3} = 1,666\dots$, $\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5} = 1,6$, $\frac{a_7}{a_6} = \frac{13}{8} = 1,625$, $\frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} = 1,615\dots$, $\frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21} = 1,619\dots$, $\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34} = 1,617\dots$, $\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} = 1,618\dots$, ...

A seguir, as atividades de 4 à 6 contemplam a construção de uma estrutura de triângulos retângulos isósceles cujas medidas dos catetos é a sequência de Fibonacci, além da construção de uma espiral onde mostra-se a relação empírica entre essa sequência e o número de ouro.

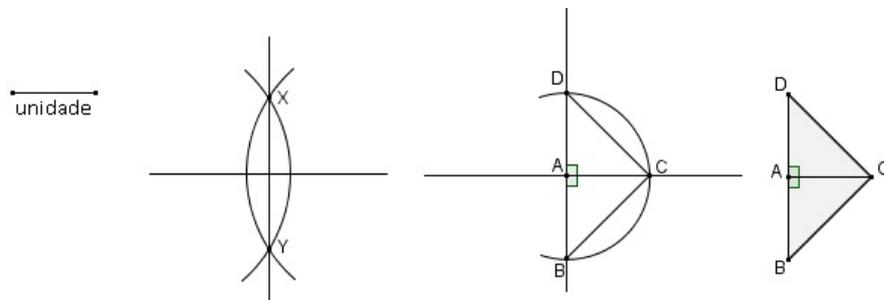
6.2.1 Atividade 4: Construção de Triângulos Retângulos Adjacentes

Construir triângulos retângulos isósceles, todos com o vértice do ângulo reto coincidentes e lados adjacentes. A construção deve ser feita no sentido anti-horário e a medida dos catetos será a sequência dos números de Fibonacci.

CONSTRUÇÃO

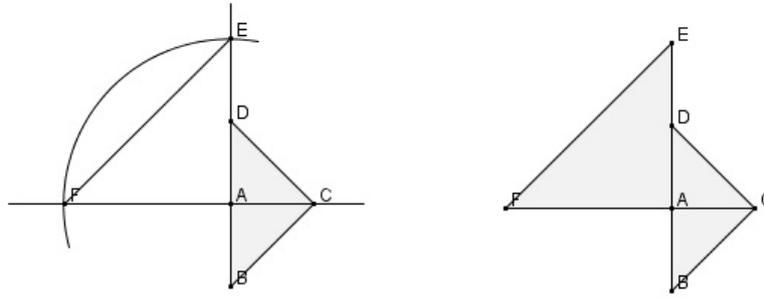
- 1) Defina um segmento de reta como sendo uma unidade.
- 2) Trace agora duas retas perpendiculares, e com a ponta seca do compasso no ponto de intersecção (ponto A) e abertura de 1 unidade, faça um arco de círculo definindo os pontos B , C e D sobre as perpendiculares.
- 3) Agora, trace os segmentos BC e CD definindo os triângulos retângulos isósceles ABC e ACD de catetos medindo 1 unidade.

Figura 49 – Construção do triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 1



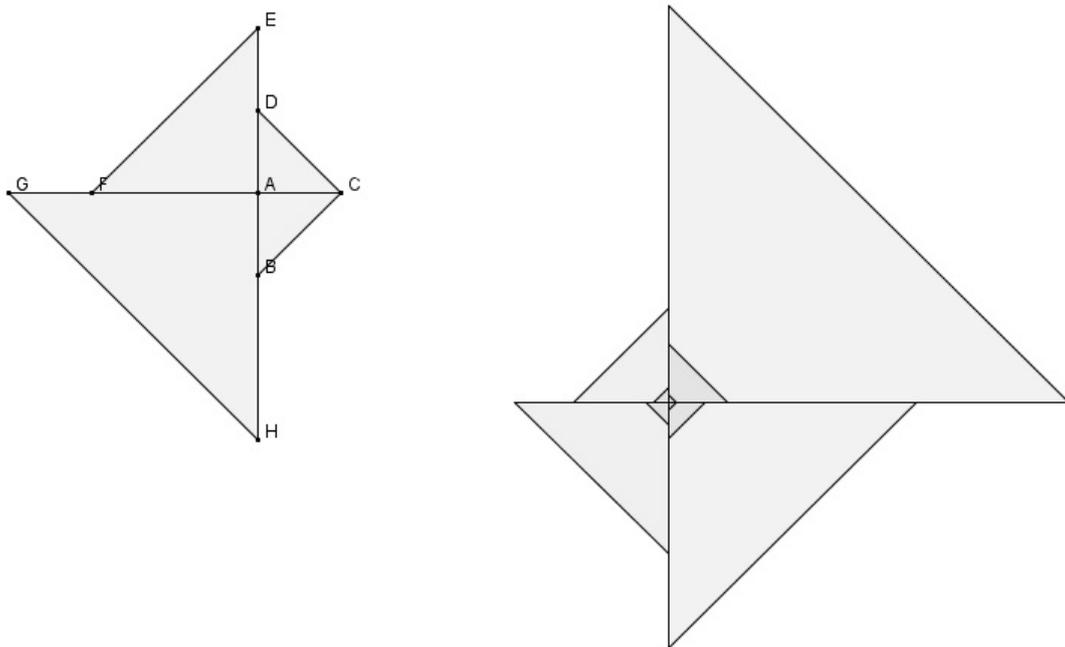
- 4) Usando o mesmo processo anterior, com a ponta fixa do compasso em A e abertura de 2 unidades, trace novamente um arco intersectando as perpendiculares e definindo os pontos E e F . A seguir trace o segmento EF finalizando a construção do terceiro triângulo retângulo AEF de catetos AE e AF medindo 2 unidades.

Figura 50 – Construção do triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2



Veja como fica a figura com quatro triângulos (Figura 51, à esquerda), e com dez triângulos (Figura 51, à direita), ou seja, já com triângulos sobrepostos.

Figura 51 – Triângulos retângulos e a sequência de Fibonacci



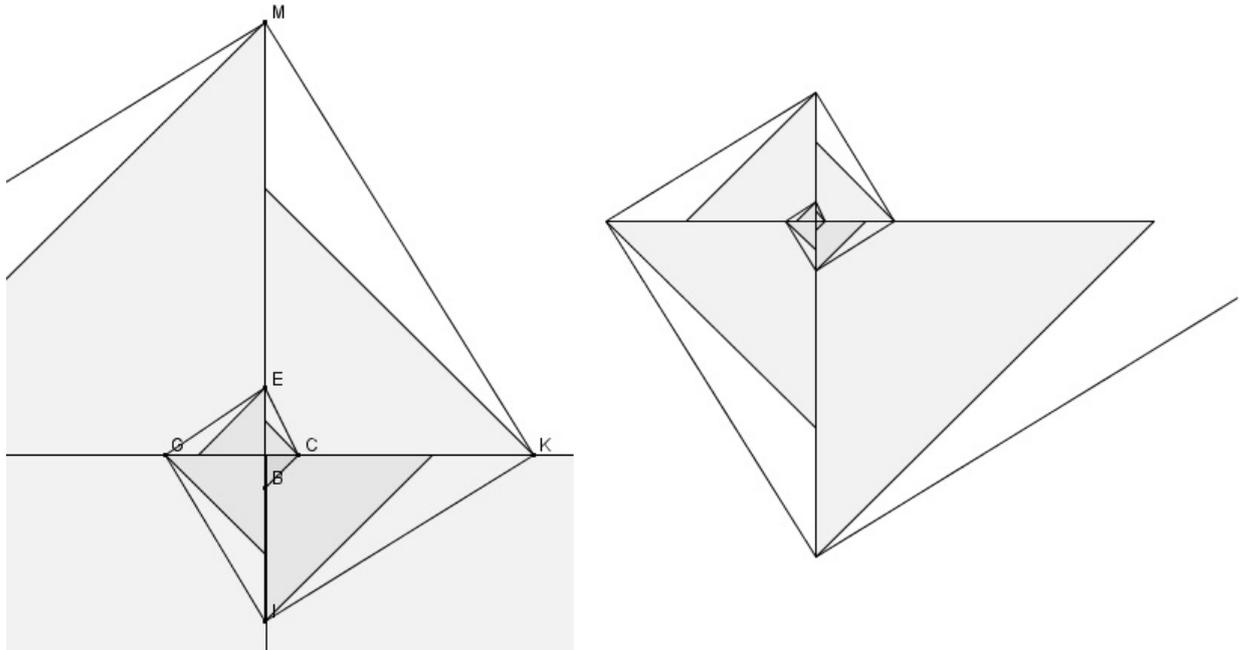
6.2.2 Atividade 5: Construção da Espiral pelos Vértices dos Catetos dos Triângulos Retângulos Isósceles Adjacentes

Traçar segmentos de retas, a partir do vértice C da Atividade 4, fazendo a união entre o vértice que compõe a hipotenusa de cada triângulo mas não pertence ao cateto do triângulo seguinte, definindo triângulos retângulos de catetos 1 e 2, 2 e 3, 3 e 5, 5 e 8, ... e assim sucessivamente, formando uma espiral com segmentos de reta.

CONSTRUÇÃO:

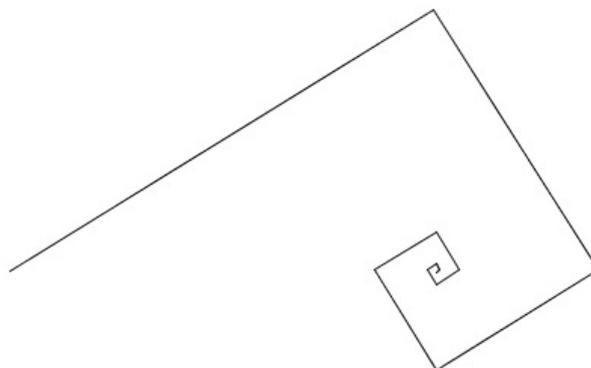
Basta construir os segmentos CE, EG, GI, IK, \dots . O resultado pode ser visto na figura a seguir.

Figura 52 – Espiral e a sequência de Fibonacci - 1



Retirando os triângulos e deixando apenas a espiral a partir do ponto B , ou seja, considerando a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles de catetos medindo 1 unidade, e acrescentando os dois próximos segmentos (11 no total), obtem-se a seguinte figura:

Figura 53 – Espiral e a sequência de Fibonacci - 2



Essa espiral pode ser continuada construindo-se quantos segmentos se queira, de acordo com a sequência de Fibonacci. Para isso, na Atividade 6, encontra-se f para a medida de cada segmento.

6.2.3 Atividade 6: A Razão entre os Segmentos da Espiral e o Número de Ouro

Calcular com a ajuda do Teorema de Pitágoras a medida dos segmentos da espiral da Atividade 5 e, a seguir, calcular a razão entre cada segmento formado com o anterior.

SOLUÇÃO

Segmento 1, hipotenusa do triângulo retângulo CDE de catetos de medidas 1,

$$f_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Segmento 2, hipotenusa do triângulo retângulo CEG de catetos de medidas 1 e 2,

$$f_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Segmento 3, hipotenusa do triângulo retângulo CGI de catetos de medidas 2 e 3,

$$f_3 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

Segmento 4, hipotenusa do triângulo retângulo CIK de catetos de medidas 3 e 5,

$$f_4 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

...

assim, temos que a sequência dos segmentos é

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{34}, \sqrt{89}, \dots$$

e, olhando para a sequência de Fibonacci temos

$$\sqrt{a_3}, \sqrt{a_5}, \sqrt{a_7}, \sqrt{a_9}, \sqrt{a_{11}}, \dots$$

ou seja, sendo $n = 1, 2, 3, \dots$ cada segmento será

$$f_n = \sqrt{a_{2n+1}}$$

Agora, fazendo a razão entre os segmentos temos

$$\sqrt{\frac{a_5}{a_3}}, \sqrt{\frac{a_7}{a_5}}, \sqrt{\frac{a_9}{a_7}}, \sqrt{\frac{a_{11}}{a_9}}, \sqrt{\frac{a_{13}}{a_{11}}}, \dots, \sqrt{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}}, \dots$$

ou seja,

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = 1,5811\dots, \sqrt{\frac{13}{5}} = 1,6124\dots, \sqrt{\frac{34}{13}} = 1,6172\dots, \sqrt{\frac{89}{34}} = 1,6179\dots, \sqrt{\frac{233}{89}} = 1,6180\dots, \dots$$

à medida que aumenta o número de termos da sequência, mais o resultado se aproxima do número de ouro.

Veja porque.

Pode-se calcular qualquer número de Fibonacci em função de seu índice n através da seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left[2^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n\right]}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Chamada de *Fórmula de Binet*.

Assim, imaginando um número infinito de segmentos na espiral encontrada e usando a Fórmula de Binet, segue que:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}}\right]} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n-1}}} \end{aligned}$$

Como n tende ao infinito e $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$, e sabendo que, se $|r| < 1$ tem-se $r^n \rightarrow 0$, então $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n$ tende a zero, e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n} = \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]^2$ tende a zero, ou seja,

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n+1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) = 0 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)$$

e

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{-1} = 0 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{-1}$$

também tendem a zero.

Portanto, para n muito grande

$$\sqrt{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1}} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1,61803398\dots$$

7 Outras Aplicações com Construções Geométricas

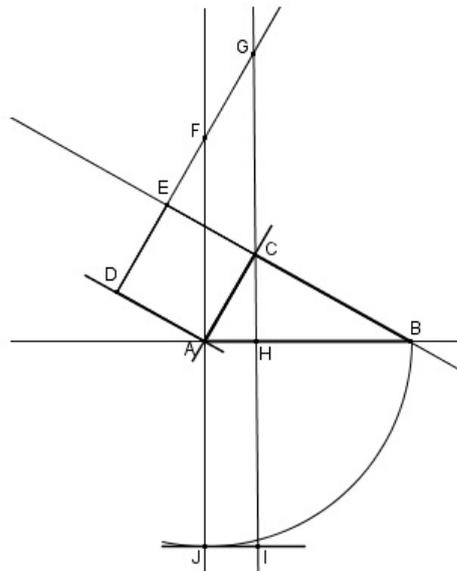
7.1 1º Teorema de Euclides

Demonstração do 1º Teorema de Euclides: o quadrado que tem por lado um cateto de um triângulo retângulo é equivalente ao retângulo que tem por lados consecutivos a hipotenusa e a projeção do cateto considerado, sobre a hipotenusa. Em ALBRECHT (2013, p. 60).

Solução

1. Dado o triângulo retângulo $\triangle ACB$, construa o quadrado $ADEC$ cujos lados possuem a mesma medida de AC .
2. Trace agora uma perpendicular à AB que passe por A .
3. Com centro em A e raio AB , defina o ponto J .
4. Em seguida, trace uma perpendicular à AB que passe pelo ponto C , definindo o ponto H .
5. Finalmente, com centro em H e raio AJ , defina o ponto I .

Figura 54 – 1º Teorema de Euclides

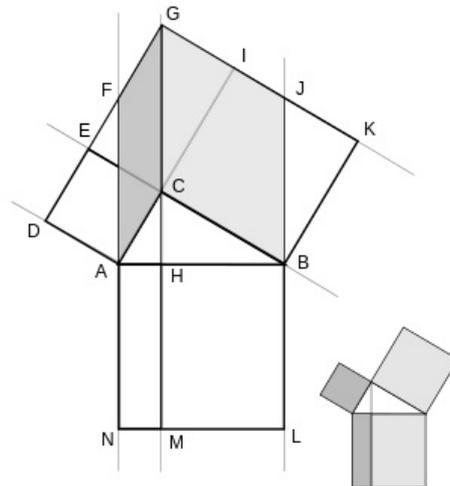


Justificativa

1. O quadrado $ACED$ é equivalente ao paralelogramo $ACGF$, pois têm a mesma base AC e a mesma altura, dada pela distância entre os segmentos paralelos AC e DG .
2. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AFD$ são congruentes, uma vez que $AC = AD$.
3. Os ângulos \widehat{CAB} e \widehat{DAF} são iguais, pois ambos são complementares do ângulo \widehat{FAC} , e portanto, $AF = AB$.
4. O paralelogramo $ACGF$ é equivalente ao retângulo $AHIJ$, já que têm bases iguais $AF = AJ$ e a mesma altura, dada pela distância AH entre os segmentos paralelos FJ e GI .
5. O segmento AH é a projeção do cateto AC sobre a hipotenusa AB .
6. Logo, $ACED$ é equivalente a $AHIJ$, e assim termina a justificativa.

O Teorema de Pitágoras foi demonstrado por Euclides utilizando seu 1º Teorema aplicado aos dois catetos do triângulo retângulo, conforme figura .

Figura 55 – Teorema de Pitágoras segundo Euclides



7.2 O Problema da Divisão do Terreno

Problema retirado de LIMA (2013, p. 106).

A história a seguir me foi contada pelo meu avô quando eu era ainda garoto.

Em algum momento na primeira metade do século passado, uma pessoa chamada Afrânio tinha um valioso terreno desocupado perto do centro da cidade do Rio de Janeiro.

Com a urbanização da cidade, ruas novas foram abertas e o terreno de Afrânio ficou reduzido a um triângulo ABC , retângulo em B , ainda de grande valor, pois o lado AB media 156 metros. Pois bem, Afrânio morreu e em seu testamento os advogados encontraram as instruções para dividir o terreno “igualmente” entre seus dois filhos. Era assim: “um muro deve ser construído perpendicularmente ao lado AB de forma que os dois terrenos resultantes da divisão tenham o mesmo valor; o que tem a forma de trapézio será do meu filho mais velho e o outro será do mais novo”.

Os advogados concluíram que os terrenos deviam ter mesma área pois o testamento dizia que deveriam ter mesmo valor. Mas não foram capazes de decidir em que posição deveria ficar o muro. Conta meu avô que o episódio ganhou as páginas dos jornais por vários dias com leitores opinando de diversas maneiras sobre a posição do muro. Ele falava e se divertia muito com as opiniões absurdas mas, ao mesmo tempo, me instigava a resolver o problema.

Então, veja a pergunta: Em que posição relativamente ao lado AB do terreno o muro deve ser construído?

De acordo com LIMA (2013, p. 106), o problema foi assim resolvido:

Na figura, MN é o muro que deve ser construído perpendicularmente ao lado AB . Seja $AM = x$ de forma que o triângulo AMN e o trapézio $MBCN$ tenham mesma área S . Os triângulos AMN e ABC são semelhantes e a razão de semelhança entre eles é $x/156$. Como a razão entre suas áreas é o quadrado da razão de semelhança devemos ter:

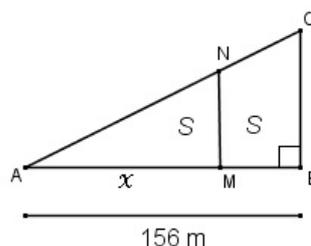
$$\frac{S}{2S} = \left(\frac{x}{156}\right)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados fica

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x}{156}$$

o que dá $x = 78\sqrt{2} \cong 110$, que é a solução. O muro deve ser construído a aproximadamente 110 metros a partir de A . As áreas dos dois terrenos serão iguais e Afrânio ficará feliz em ver sua vontade atendida.

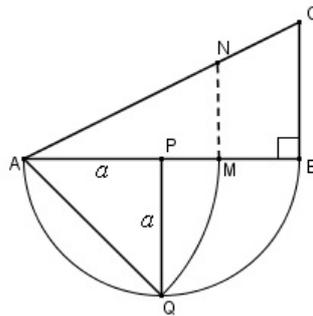
Figura 56 – O problema da divisão do terreno - 1



Mas como resolver o problema da divisão do terreno em duas partes de mesma área utilizando para isto apenas a régua e o compasso? Imagine que o engenheiro tem a planta do terreno e deseja desenhar o muro na posição exata, sem contas, sem aproximações. Veja como se faz isso.

Marque o ponto P médio de AB , e considerando $AB = 2a$, então $AP = a$. Pelo ponto P , trace o segmento $PQ = a$, perpendicular a AB .

Figura 57 – O problema da divisão do terreno - 2



Como $AQ = a\sqrt{2}$, fixando o compasso em A com abertura igual a AQ , faça um arco intersectando AB em M , encontrando a posição exata do muro. A justificativa se dá pela semelhança de triângulos. Sabe-se que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual a razão entre dois lados correspondentes dessas figuras (razão de semelhança) ao quadrado. Assim,

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC}\right)^2$$

e, sendo

$$\frac{MN}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

então,

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Portanto, $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, ou seja, $S_{AMN} = S_{MNCB}$.

7.3 O Menor Caminho Ligando Três Pontos

O problema do menor caminho ligando três pontos, adaptado de GRANJA (2012, p. 69).

O caminho mais curto ligando dois pontos no plano euclidiano é a linha reta, mas qual seria o caminho mais curto ligando três pontos?

Este é um problema interessante cuja história remonta aos tempos de Pierre Fermat (1601-1665) e Evangelista Torricelli (1608-1647). Ao que parece, Fermat foi o primeiro a propor o problema com o seguinte enunciado: encontrar um ponto no plano euclidiano cuja soma das distâncias a três pontos dados, não colineares, seja a menor possível.

Não é difícil imaginar situações práticas associadas a esse problema, como a da escolha de um local para a construção da garagem de uma empresa de ônibus cuja frota faz viagens regulares a três cidades. Parece razoável supor que se a garagem estiver localizada em um ponto do plano que minimize a soma das distâncias até as três cidades haverá economia de combustível no deslocamento da frota da garagem até as cidades no início do trabalho; e das cidades até a garagem no final do expediente.

Para solucionar o problema existem dois casos possíveis:

1. **Caso 1:** Se os ângulos internos do triângulo ABC forem menores que 120° , então F (Ponto de Fermat que minimiza a soma das distâncias) será tal que $med(A\hat{F}B) = med(A\hat{F}C) = med(B\hat{F}C)$. (Figura 58)
2. **Caso 2:** Se o ângulo obtuso do triângulo ABC for maior do que ou igual a 120° , então F coincidirá com o vértice desse ângulo. (Figura 59)

Figura 58 – F : O menor caminho ligando três pontos - 1

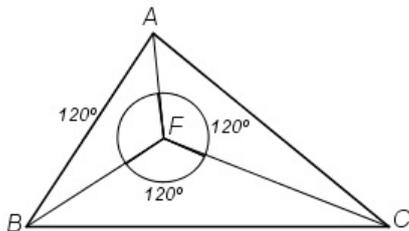
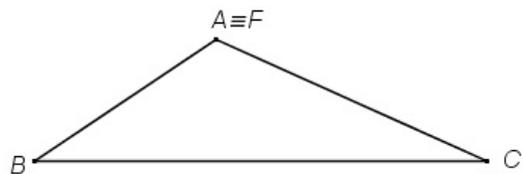


Figura 59 – F : O menor caminho ligando três pontos - 2

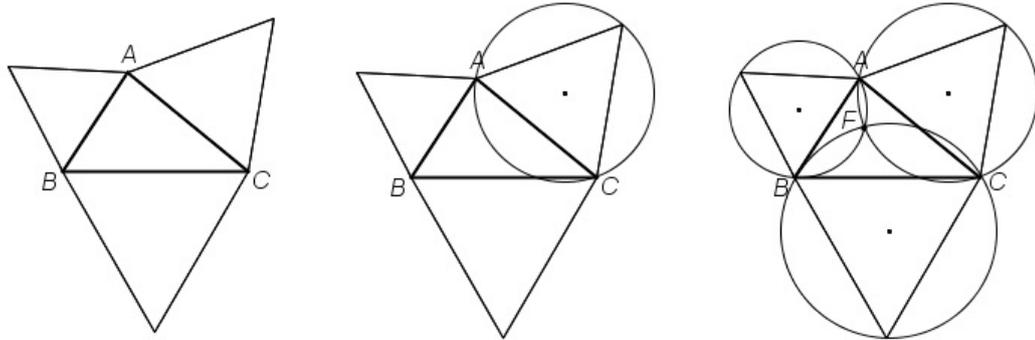


Portanto, no caso dos triângulos obtusângulos a solução do problema é trivial, porque F coincide com o vértice do ângulo obtuso do triângulo, e assim, basta mostrar a solução para o caso de triângulos com ângulos menores que 120° . Veja a seguir a construção proposta por Torricelli para encontrar o ponto F com régua e compasso.

1. Construa triângulos equiláteros de lados AB , AC e BC a partir dos lados do triângulo ABC . (Figura 60, à esquerda)
2. Determine o circuncentro dos triângulos construídos a partir dos lados do triângulo ABC e, em seguida, trace as circunferências circunscritas a esses triângulos. (Figura 60, ao centro)

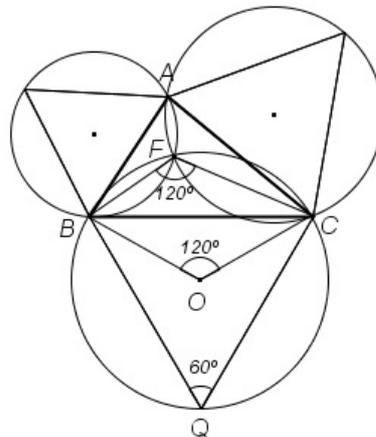
3. O ponto de intersecção das circunferências traçadas será o ponto F . (Figura 60, à direita)

Figura 60 – F : O menor caminho ligando três pontos - 3



A demonstração de que tal construção determina o ponto F procurado pode ser feita por meio do teorema do ângulo central e ângulo inscrito de um círculo. Observe que $B\hat{Q}C$ é um ângulo inscrito de $B\hat{O}C$. Como o triângulo BQC é equilátero, segue que $med(B\hat{Q}C) = 60^\circ$ e $med(B\hat{O}C) = 120^\circ$ e, conseqüentemente, que $med(B\hat{F}C) = 120^\circ$ ($B\hat{Q}C$ é inscrito de $B\hat{O}C$ quando este mede $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$).

Figura 61 – F : O menor caminho ligando três pontos - 4



Raciocínio análogo feito a partir dos dois outros círculos permite concluir que o ponto de intersecção das três circunferências traçadas na construção será tal que $B\hat{F}C = B\hat{F}A = A\hat{F}C = 120^\circ$.

7.4 Construção de Um Triângulo Retângulo Dada as Projeções

Sejam os segmentos a e b as projeções dos catetos de um triângulo retângulo.

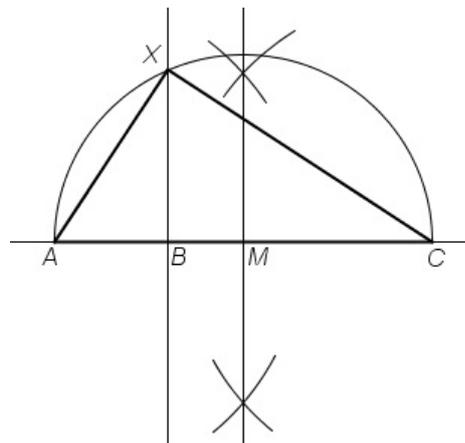
Figura 62 – a e b : Projeções dos catetos

Construir o triângulo.

Solução

1. Sobre uma reta, defina um ponto A e, a partir de A , trace o segmento a .
2. A partir da extremidade do segmento a , trace o segmento b , definindo os pontos B e C ao fim dos segmentos a e b , respectivamente.
3. Defina M , o ponto médio de AC e, com centro em M e raio MA , trace a semicircunferência cujo diâmetro é AC .
4. Trace uma perpendicular a AC , que passe por B definindo o ponto X na interseção da perpendicular com a semicircunferência. BX é a altura do triângulo relativa à hipotenusa AC .
5. Por fim, trace os catetos AX e CX .

Figura 63 – Triângulo retângulo



A construção se justifica pelo fato que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

Deve-se destacar ainda a importância dessa construção devido ao fato que, no ensino médio, ao estudar média geométrica, ela poderá ser definida por esse processo, já que pelas relações métricas, $BX^2 = a \cdot b$, ou seja, $BX = \sqrt{a \cdot b}$ que, por definição, é a média geométrica entre os segmentos a e b dados.

7.5 Construção dos Elementos da Sequência $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$,

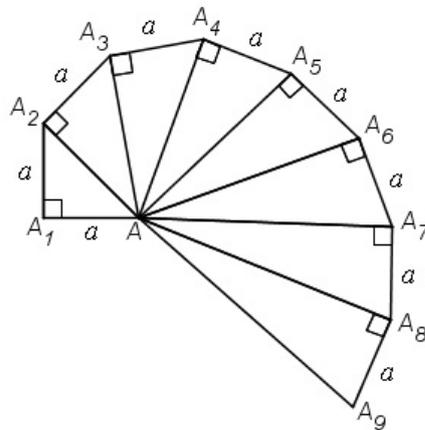
...

Dado um segmento a , construir todos os elementos da sequência $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, ... (WAGNER, 2009).

Solução

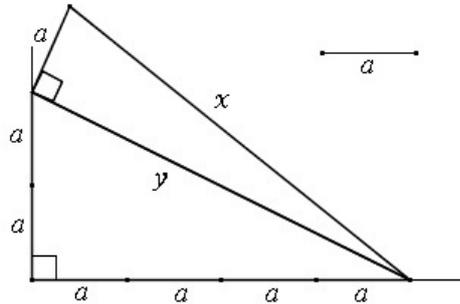
1. Construa, com régua e compasso, utilizando os procedimentos já vistos, um triângulo isósceles $\triangle AA_1A_2$ retângulo em A_1 cujos catetos sejam a . Aplicando o Teorema de Pitágoras temos $AA_2^2 = AA_1^2 + A_1A_2^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, ou seja, $AA_2 = a\sqrt{2}$.
2. Construa agora outro triângulo retângulo, $\triangle AA_2A_3$, onde um dos catetos AA_2 seja a hipotenusa do triângulo anterior e o outro seja a e, aplicando novamente Pitágoras temos que $AA_3^2 = AA_2^2 + A_2A_3^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, logo, $AA_3 = a\sqrt{3}$.
3. De maneira análoga encontra-se $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$, ... obtendo a Figura 64.

Figura 64 – Espiral Pitagórica



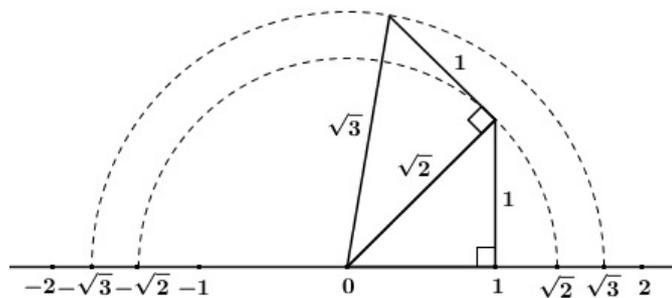
Entretanto, quando n é grande, pode-se buscar um caminho mais curto. Veja por exemplo como construir o segmento $x = a\sqrt{21}$.

Pesquisando um pouco, percebe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $4a$ e $2a$ é $y = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{16a^2 + 4a^2} = \sqrt{20a^2} = a\sqrt{20}$, e assim, com mais um passo, chega-se a $a\sqrt{21}$. (Figura 65)

Figura 65 – $x = a\sqrt{21}$ 

Pode-se usar $a = 1$, e assim representar alguns números irracionais na reta numérica. Basta usar os procedimentos acima, e o resultado pode ser visto na Figura 66.

Figura 66 – Localizando números irracionais na reta numérica



7.6 Quadratura do Triângulo

Construir a quadratura (encontrar um quadrado equivalente a uma figura geométrica dada) de um triângulo ABC dado (GALVÃO, 2008).

Solução

1. Construa um triângulo isósceles ABC' com a mesma base do triângulo ABC e o vértice C' na reta paralela à base AB que passa pelo vértice C .
2. Construa agora o retângulo cujos lados são $C'M$ e BM . Ele será equivalente ao triângulo isósceles ABC' .
3. Para finalizar, construa o triângulo retângulo MDC'' , cuja hipotenusa tem comprimento $MB + BC''$, e $BC'' = MC'$. A altura relativa à hipotenusa terá comprimento x tal que, pelas relações métricas $x^2 = BD = MB \cdot BC'' = MB \cdot MC'$, ou ainda:

$$\text{área do quadrado} = x^2 = \text{área do retângulo} = \text{área do triângulo } ABC.$$

8 Considerações Finais

Ficou claro que o estudo e a prática das Construções Geométricas constituem-se em um exercício mental capaz de desenvolver a coordenação motora, a criatividade, a intuição e o raciocínio lógico-dedutivo na busca por respostas a diversos problemas.

Diante de sua importância, é preciso que o professor encontre uma forma de aplicá-la com mais frequência no ensino da Matemática, uma vez que não há espaço no currículo para a incorporação de uma nova disciplina.

A construção de quadrados com vértices no centro dos quadrados anteriores, utilizando a sequência dos números primos, encontrando padrões no comprimento das espirais e, a construção de triângulos retângulos adjacentes com vértice do ângulo reto coincidentes, cuja medida dos catetos é a sequência de fibonacci, relacionando a razão entre os segmentos da espiral encontrada com o número de ouro, mostram, como podemos de forma simples, elaborar atividades envolvendo o uso da régua e do compasso e que conectem várias áreas da Matemática, permitindo ao aluno uma interpretação visual que pode, muitas vezes, facilitar a compreensão e ajudar na fixação dos conteúdos, além de tornar as aulas mais atrativas.

Por isso, esse trabalho visa desenvolver habilidades nos docentes e discentes quanto ao uso da régua e do compasso, como benefício para amenizar os problemas gerados pelas práticas tradicionais, abordando um tema que pode interferir qualitativamente na prática educativa e oferecer, a quem busca, uma prática alternativa de ensino.

Referências Bibliográficas

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira, 3ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ALBRECHT, Clarissa Ferreira, 1981. **Desenho geométrico [recurso eletrônico]**. Clarissa Ferreira Albrecht e Luiza Baptista de Oliveira. Viçosa-MG: Ed. UFV, 2013.

ANDRINI, Álvaro. **Praticando Matemática, 8**. Álvaro Andrini, Maria José Vasconcelos. - 3. ed. renovada. - São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica **Guia de livros didáticos: PNLD 2014**. Brasília: MEC/SEB, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto aplicações**. São Paulo-SP: Ática, 2010.

EVES, Howard. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

GALVAO, Maria Elisa Esteves Lopes. **História da Matemática: dos números à geometria**. Osasco: Edifício, 2008.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 4ª edição, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos. **Atividades experimentais de matemática nos anos finais do ensino fundamental**. Carlos Eduardo de Souza Campos Granja e José Luiz Pastore. São Paulo: Edições SM, 2012.

GUIMARÃES, Paulo Sérgio. **Equações Algébricas**. Santa Maria: Ed. da UFSM, 2006.

HELLMEISTER, Ana Catarina P. et al. **Geometria em sala de aula**, 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ITZCOVICH, Horacio. **Iniciação ao estudo didático da geometria: das construções às demonstrações**. *Tradução de Romina Amorebieta, Luciano Ismael Barrionuevo Guillermo Segú*. 1ª ed. - São Paulo: Anglo, 2012.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Projeto Araribá: Matemática**. 3 edição. São Paulo: Moderna, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Temas e problemas elementares**. Elon Lages Lima, Eduardo Wagner, Paulo Cezar Pinto Carvalho e Augusto César Morgado. 5ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Coleção: Vontade de Saber Matemática**. Joamir Roberto de Souza e Patricia Rosana Moreno Pataro. 1 edição, São Paulo: FTD, 2009.

STOCCO SMOLE, Kátia. **Matemática: ensino médio**, Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

TOCANTINS, Secretaria de Estado da Educação e Cultura. **Referencial Curricular do Ensino Fundamental das escolas públicas do Estado do Tocantins: Ensino Fundamental do 1º ao 9º ano**. SEDUC-TO, 2008.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas**. In *Apostila OBMEP*, 2009. Disponível em: http://www.obmep.org.br/export/sites/default/arquivos/apostilas_pic2010/Apostila8-construcoes_geometricas.pdf. Acesso em 30 de junho de 2015.