UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ANA PATRÍCIA MOREIRA SANTIAGO

Conteúdos de Matemática do Ensino Médio com Abordagem de Raciocínio Recursivo e Questões do ENEM e OBMEP

orientadora:

Professora Débora Borges Ferreira

Natal/RN - 2015

ANA PATRÍCIA MOREIRA SANTIAGO

Conteúdos de Matemática do Ensino Médio com Abordagem de Raciocínio Recursivo e Questões do ENEM e OBMEP

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT -CCET - UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora:

Profª. Drª Débora Borges Ferreira.

Natal/RN - 2015

Setor de Informação e Referência
Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Central Zila Mamede

Santiago, Ana Patrícia Moreira.
Conteúdos de matemática do ensino médio com abordagem de raciocínio recursivo e questões do ENEM e OBMEP. – Natal, RN, 2015.
63 f.

Orientadora: Débora Borges Ferreira.

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

1. Recorrências – Dissertação. 2. Raciocínio recursivo - Dissertação. 3. ENEM - Dissertação. 4. OBMEP – Dissertação. 5. Ensino médio – Dissertação. I. Ferreira, Debora Borges. II. Título.

RN/UF/BCZM CDU 519.111.1

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ANA PATRÍCIA MOREIRA SANTIAGO

Conteúdos de Matemática do Ensino Médio com Abordagem de Raciocínio Recursivo e Questões do ENEM e OBMEP

Comissão Examinadora:

Profª. Drª. Débora Borges Ferreira (PROFMAT/UFRN - Orientadora)
Prof°. Dr°. Walter Batista dos Santos (UFG - Membro externo)
Profª. Drª. Viviane Simioli Medeiros Campos (UFRN - Membro interno)

Natal/RN - 2015

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por ter me dado força durante toda a minha caminhada no PROFMAT.

Ao meu esposo, Alisson Gardênio, por ter me ajudado durante todo o curso, pelo apoio e dedicação.

À minha orientadora e professora Débora Borges Ferreira que sempre foi muito atenciosa e dedicada e mesmo estando de licença maternidade lia com muito cuidado o trabalho.

Aos meus familiares que sempre me apoiaram.

Aos professores do PROFMAT: Carlos Gomes, Marcelo Gomes, Ronaldo Freire e Paulo Roberto por terem estimulado e incentivado os nossos estudos.

A todos os colegas da turma, por terem estimulado uns aos outros nos grupos de estudos.

Dedicatória

Dedico este trabalho a DEUS e a meu esposo, Alisson.

Resumo

Neste trabalho, temos a finalidade de relembrar ao professor de matemática do ensino médio o processo recursivo para que o mesmo possa utilizar essa ferramenta ao introduzir conteúdos usando recursão, como uma alternativa para o ensino de matemática. Para tanto, foi feito uso de questões oriundas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), além de apresentarmos alguns conteúdos de matemática que são definidos por recursão. Nesta dissertação, mostramos também algumas atividades que envolvem o raciocínio recursivo e foram aplicadas em uma turma de 3° ano do ensino médio de uma escola estadual de Natal/RN.

PALAVRAS-CHAVE: Recorrências. Raciocínio recursivo. ENEM. OBMEP. Ensino médio.

Abstract

In this work, we have the purpose of reminding the math teacher of High School the recursive process so that he/she can use this tool to introduce contents, using recursion as an alternative to the teaching of mathematics. For this, we used questions taken from the Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) [National Examination of High School] and from the Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) [Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools], in addition to present some contents of mathematics that are defined by recursion. In this dissertation, we also showed some activities that involved the recursive reasoning and were applied in a 3rd grade class of high school in a public school in Natal / RN.

KEYWORDS : Recurrences. Recursive reasoning. ENEM. OBMEP. High school.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O trabalho aqui apresentado visa relembrar ao professor de matemática do ensino médio o processo recursivo, sua importância e aplicabilidade, para que o mesmo possa ensiná-lo aos alunos. Para tanto, foi feito um levantamento de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) no intervalo de 2008 a 2013, como também da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) no período de 2005 a 2014, as quais possibilitassem o uso do raciocínio recursivo em sua resolução.

A recursão é uma ferramenta bastante interessante e útil na resolução de problemas que envolvem progressão aritmética, progressão geométrica, contagem, entre outros. Seu domínio é imprescindível para se chegar à resposta correta de algumas questões, e, em outros casos, utilizar esse processo pode ser um caminho mais rápido para obter a solução desejada.

No ensino médio, a recursão é trabalhada superficialmente no que tange as progressões aritméticas e geométricas, entretanto, sua importância não se restringe somente a isso. A mesma pode ser usada em decaimento químico, crescimento populacional de espécies, assim como na proliferação de vírus computacionais, além de que o processo recursivo é utilizado na definição de diversos assuntos como conjuntos, funções e sequências, entre outros. O professor Morgado era um dos defensores do ensino de recorrências no ensino médio, como pode ser verificado em Simões[14]:

> Em uma das aulas do PAPMEM, o professor Augusto César Morgado, hoje não mais entre nós, defendia a ideia de implantar o raciocínio recursivo junto ao estudo das recorrências no ensino básico, justificando tal desejo pelo fato do conteúdo ajudar a resolver diversos problemas de contagem de forma inteligente, problemas esses que por sua vez não são facilmente resolvidos pelas ferramentas estudadas em combinatória. (SIMÕES, p.11, 2014)[14]

A OBMEP vem dando destaque ao raciocínio recursivo tanto em seus bancos de questões quanto em suas avaliações, pois um dos seus objetivos principais é contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica. Sendo assim, estimular o aluno a pensar recursivamente é de fundamental importância para desenvolver seu raciocínio lógico e sua capacidade criativa de utilizar conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas os quais, muitas das vezes, fogem dos padrões convencionais das questões utilizadas em livros didáticos, pois a OBMEP tem uma proposta peculiar e diferenciada no que se refere à metodologia para a resolução de seus problemas.

Nas avaliações de 2008 a 2013, o ENEM trouxe diversas questões que podem utilizar o processo recursivo como um caminho para se chegar à solução do problema proposto. Um dos motivos que desencadearam a escolha deste assunto para fazer parte do exame é o fato do mesmo favorecer a leitura, o raciocínio, a interligação entre conteúdos, isto é, a interdisciplinaridade. Favorece ainda uma lógica de estabelecimento de padrões matemáticos onde o aluno possa analisar situações dentro de um contexto, que a maior parte das vezes é algo relacionado com aspectos reais da sociedade, tomando decisões frente a situações-problema. Essa metodologia de trabalho está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Aprender matemática no ensino médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer matemática e de um saber pensar matemático [...] com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (PCN, 1998, p. 41).

Assim, no Capítulo 1 apresentamos o que é recursão, ou ainda definição recorrente, apresentamos tipos de equações de recorrência, resolução de recorrências lineares de primeira ordem, além de listarmos alguns conteúdos de matemática que são definidos por recursão. As principais referências deste capítulo são Gersting (2012)[3], Hefez (2011)[4], Lima (2006)[6] e Rosen (2009)[13].

No Capítulo 2 apresentamos um breve relato sobre o ENEM, assim como a OBMEP, além de resolver e comentar diversas questões que podem ser resolvidas pelo raciocínio recursivo e que foram utilizadas nas avaliações destes exames. É válido salientar que os comentários feitos nas questões objetivam ajudar o professor do ensino médio a perceber a importância do processo recursivo, assim como buscam orientá-lo durante a aplicação das questões em sala de aula. As questões trabalhadas neste capítulo foram retiradas dos portais do INEP[1][2] e da OBMEP[2][7].

Finalmente, no Capítulo 3 mostramos algumas atividades que foram aplicadas em uma turma do 3° ano da Escola Estadual Professora Maria Queiroz na cidade de Natal-RN, que envolvem o raciocínio recursivo em suas resoluções, entre elas: a atividade Conjunto de Sierpinski e a Torre de Hanói.

[1] http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos

[2] http://www.obmep.org.br/provas.htm

Capítulo 1

Recorrências Lineares de Primeira Ordem

1.1 Introdução

Neste capítulo, abordamos as definições recursivas, os tipos de equações de recorrência, resolução de relações de recorrência e também mostramos alguns conteúdos de matemática que podem ser definidos por recursão, como por exemplo: conjuntos, funções, progressão aritmética, soma dos termos de uma progressão aritmética, progressão geométrica, soma dos termos de uma progressão geométrica, operações, algoritmo de Euclides, juros compostos e problemas de contagem.

1.2 Definições Recursivas

De acordo com Gersting[3]: "Uma definição onde o item sendo definido aparece como parte da definição é chamada de uma definição recorrente ou definição por recorrência ou ainda definição por indução". Podemos reescrevê-la da seguinte maneira: Considere (x_n), $n \in \mathbb{N}$, uma sequência numérica, existe uma função f que nos proporciona determinar cada termo de (x_n) a partir de seus antecessores , $(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1)$, ou seja,

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1).$$

Assim, a sequência é definida por recursão.

Esse tipo de definição utiliza-se do passo base que consiste na especificação de alguns elementos iniciais úteis para o passo recursivo, já que por meio do mesmo constrói-se novos elementos e, em seguida, formam-se outros a partir destes novos e assim por diante. De acordo com Pacheco:

> O raciocínio recursivo, também chamado de recursão, permite a resolução de inúmeros problemas estruturados em etapas, onde o procedimento a ser empregado em uma determinada etapa caracteriza-se pela repetição completa do raciocínio utilizado na etapa anterior. Um procedimento caracterizado pela recursão é dito recursivo. (PACHECO, p.11, 2013)[10]

A regra que define um valor de um termo de uma sequência em função de um ou mais termos anteriores é chamada de relação de recorrência, é expressa por meio de uma equação de recorrência. Como por exemplo:

Exemplo 1.1. *Considere a sequência* (x_n), $n \in \mathbb{N}$,

$$(2, 4, 8, 16, 32, \ \cdots),$$

esta é definida recursivamente por:

$$x_1 = 2$$
$$x_n = 2x_{n-1} \ \textit{para} \ n \geq 2.$$

Por meio da recursão podemos definir também conjuntos, funções e operações. Conjuntos, por recorrência, caracterizam-se quando identificamos alguns de seus elementos específicos e os demais, que pertencem ao mesmo conjunto, são formados a partir daqueles que já são conhecidos. Usa-se dois passos para definir recursivamente uma função, o passo base em que especifica o valor da função em zero e o passo recursivo em que é fornecido uma lei para obter seu valor em um número inteiro a partir dos valores nos números inteiros menores. Já em relação às operações, essas são caracterizadas, segundo Gersting [3] , como: "Um caso 'pequeno' da operação fornece um valor específico; outros casos são definidos a partir de casos menores." Ou seja, para generalizar a operação faz-se uso de si mesma.

1.3 Tipos de Equações de Recorrência

As equações de recorrência são classificadas quanto a ordem, a linearidade e homogeneidade ou heterogeneidade.

Uma equação de recorrência de ordem k possui um termo em função de seus k antecessores imediatos, sendo assim a de primeira ordem tem um termo em função do termo anterior, ou seja, x_n depende de x_{n-1}. Já a de segunda ordem, contém um termo em função de seus dois antecessores imediatos. Dessa forma, a de ordem k contém um termo em função de seus k antecessores imediatos. Seguem os exemplos abaixo.

Exemplo 1.2. *Equação de recorrência de primeira ordem:*

$$x_n = nx_{n-1}.$$

Exemplo 1.3. *Equação de recorrência de segunda ordem:*

$$x_n = x_{n-1} + 4x_{n-2} - 3.$$

Segundo Gersting[3]: " Uma relação de recorrência para uma sequência $x(n)$ é dita linear se os valores anteriores de S que aparecem na definição aparecem apenas na primeira potência". Uma relação de recorrência de uma sequência (x_n) é linear se a função que relaciona os termos for uma função do primeiro grau. As recorrências lineares de primeira ordem são da forma:

$$x_n = f(n)x_{n-1} + g(n),$$

em que as funções f e g têm como domínio o conjunto dos números naturais.

Se $f(n) = a,\ g(n) = 0,\ \text{e}\ \ a \in \mathbb{R}$, $x_n = ax_{n-1}$ é uma recorrência linear de primeira ordem homogênea. A equação de recorrência é homogênea se não possuir termo independente de x_n, caso contrário é não-homogênea. Veja os exemplos:

Exemplo 1.4. *Recorrência linear de primeira ordem homogênea*

$$x_{n+1} = nx_n$$

.

Exemplo 1.5. *Recorrência linear de primeira ordem não-homogênea*

$$x_{n+1} = 2x_n – n^2$$

1.4 Resolução de Relações de Recorrência

Neste trabalho enfatizamos na resolução de relações de recorrência lineares de primeira ordem. Resolvê-las é obter uma solução em forma fechada, isto é, encontrar uma equação na qual podemos obter todos os termos da sequência em função da posição n sem precisar calcular os valores dos termos anteriores.

Existem algumas técnicas de resolução de equações de recorrência, a que usamos neste trabalho está de acordo com o pensamento de Gersting:

> Uma técnica para resolver relações de recorrência é uma abordagem do tipo "expandir, conjecturar e verificar", que usa repetidamente a relação de recorrência para expandir a expressão a partir do n-ésimo termo até podermos ter uma ideia da forma geral. Finalmente essa conjectura é verificada por indução matemática.(GERSTING, 2002, p. 105)[3].

A indução matemática se caracteriza como um dos mais importantes instrumentos para verificar a validade da fórmula que representa a solução da recorrência. Entretanto, fica a critério do professor ensiná-la ou não, isso depende da realidade de seus alunos. O enunciado e a prova do Axioma de Indução e do princípio de indução matemática se baseiam em Hefez [4], vemos a seguir.

Para compreendermos o princípio da indução matemática é necessário assumir o Axioma de Indução: sendo S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que

i) $0 \in S$.
ii) Para todo n, $n \in S$ temos que $n+1 \in S$. Então, $S = \mathbb{N}$.

Nesse trabalho, usamos a notação:

$$a + A = \{a + x; x \in A\}, A \subset \mathbb{N} \ \ e \ \ a \in \mathbb{N}.$$

Verificamos que

$$a + \mathbb{N} = \{m \in \mathbb{N}; m \geq a\}.$$

Do Axioma de Indução, segue-se esta importante ferramenta para provar teoremas:

Teorema 1.1 (Princípio de Indução Matemática)**.** *Sendo $a \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma sentença aberta em n*[1]*. Supondo que:*

(i) $P(a)$ é verdade, e que
(ii) $\forall n \geq a$, $P(n) \Longrightarrow p(n+1)$ é verdade. Então $P(n)$ é verdade para todo $n \geq a$.

Demonstração: Sendo $V = \{n \in \mathbb{N}; P(n)\}$, isto é, V é o subconjunto dos elementos de $\mathbb{N}$ para os quais $P(n)$ é verdade.

Considerando o conjunto:

$$S = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\},$$

verificamos que $a + S \subset V$. Pela condição (i), temos $a + 0 = a \in V$, então $0 \in S$. E se $m \in S$, então $a + m \in V$ e, por (ii), $a + m + 1 \in V$. Dessa forma $m + 1 \in S$. Pelo Axioma da Indução, temos $S = \mathbb{N}$. Sendo assim,

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V,$$

[1]Uma sentença aberta em n é uma frase de conteúdo matemático onde figura a letra n como palavra e que se torna uma sentença verdadeira ou falsa quando n é substituído por um número natural bem determinado.

provando assim o resultado. ■

A seguir, resolvemos a relação de recorrência usando a abordagem de expandir, conjecturar e verificar.

Exemplo 1.6. *Considere uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz:*

$$x_1 = 2 \quad e \tag{1.1}$$

$$x_n = 2x_{n-1} \;\; para \;\; n \geq 2. \tag{1.2}$$

Começando com x_n, expandimos utilizando a relação de recorrência e obtemos:

$$x_n = 2x_{n-1} = 2[2x_{n-2}] = 2^2x_{n-2} = 2^2[2x_{n-3}] = 2^3x_{n-3}.$$

Conjecturamos que após k tais expansões temos uma equação do tipo:

$$x_n = 2^kx_{n-k}.$$

Quando $n-k=1$, temos que $k=n-1$. Sendo assim:

$$x_n = 2^{n-1}x_{n-(n-1)} = 2^{n-1}x_1 = 2^{n-1}.2 = 2^n.$$

Assim, $x_n = 2^n$ representa a solução em forma fechada. Analisando a conjectura através da indução matemática, temos:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e definindo a proposição $P(n)$: $x_n = 2^n$ para $n \geq 1$. Verificamos a validade para $n = 1$, obtemos:

$$x_1 = 2^1 = 2.$$

Dessa forma, $P(1)$ é verdadeira, comprovamos em (1.1).

Agora, supondo que para algum $n \in \mathbb{N}$ a proposição $P(n) : x_n = 2^n$ seja verdadeira, assim para provar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos pela Equação (1.2) e pela hipótese de indução (H.I) que:

$$x_{n+1} \overset{(1.2)}{=} 2x_n \overset{(H.I)}{=} 2.(2^n) = 2^{n+1}.$$

Verificamos assim que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, logo o princípio da indução nos garante que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in N$. Portanto, a solução em forma fechada está correta.

Também podemos resolver uma equação linear homogênea de primeira ordem listando os termos da relação de recorrência e multiplicando todos eles membro a membro, como podemos verificar no exemplo a seguir extraídos de Lima et al [6].

Exemplo 1.7. *Considere uma sequência que satisfaz*

$$x_{n+1} = nx_n \text{ e}$$

$$x_1 = 1.$$

Listando os termos, temos:

$$\begin{aligned} x_2 &= 1x_1 \\ x_3 &= 2x_2 \\ x_4 &= 3x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (n-1)x_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando todos os membros das equações acima temos

$$x_2x_3x_4 \cdots x_n = 1x_1.2x_2.3x_3 \cdots (n-1)x_{n-1}.$$

Fazendo o cancelamento, obtemos $x_n = (n-1)!x_1$. Como $x_1 = 1$, temos $x_n = (n-1)!$ que é a solução na forma fechada.

Verificamos a validade da fórmula acima por indução. Note que

$$x_1 = (1-1)!x_1 = 1.$$

Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$ a proposição $P(n)$: $x_n = (n-1)!$ seja verdadeira. Multiplicando n em ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$nx_n = n(n-1)! = n!.$$

Como $x_{n+1} = nx_n$, então $x_{n+1} = n!$. Verificamos assim que $P(n)$ implica em $P(n+1)$, logo o princípio da indução nos garante que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a solução em forma fechada corresponde à equação de recorrência.

No exemplo a seguir, resolvemos uma relação de recorrência não-homogênea.

Exemplo 1.8. *Seja* (x_n) *onde* $n \in \mathbb{N}$ *e vale*

$$x_n = 2x_{n-1} + 1$$

$$x_1 = 1.$$

Listando os quatro primeiros termos, temos:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2.1 + 1 = 3$$
$$x_3 = 2.3 + 1 = 7$$
$$x_4 = 2.7 + 1 = 15.$$

Veja que nós podemos usar o método do exemplo anterior. Após algumas substituições, x_4 pode ser escrito como uma soma de potências de base dois, como podemos ver a seguir:

$$x_4 = 2x_3 + 1 = 2.(2.3 + 1) + 1 = 2.[2.(2.1 + 1) + 1] + 1 = 2.(2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1.$$

Seguindo o mesmo procedimento para $x_5 = 2x_4 + 1$, constatamos então:

$$x_5 = 2.(2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1.$$

Por consequência, podemos generalizar que:

$$x_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1.$$

Observamos que x_n é a soma dos termos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é igual a 1 e a razão (q) é igual a 2. Portanto:

$$x_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1.(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Assim, $x_n = 2^n - 1$ é a possível solução da recorrência. Agora, pelo método da indução, verificamos se a proposição $P(n) : x_n = 2^n - 1$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Primeiro, verificamos que $P(1)$ é válida, já que:

$$x_1 = 2^1 - 1 = 1.$$

Suponhamos que $P(n)$ seja válida para algum número natural $n > 1$, ou seja, $x_n = 2^n - 1$. Queremos mostrar que $P(n + 1)$ vale, isto é:

$$x_{n+1} \stackrel{?}{=} 2^{n+1} - 1.$$

Utilizando a expressão $x_n = 2^n - 1$, multiplicando ambos os membros por 2 e adicionando 1 a cada membro, chegamos a:

$$2x_n + 1 = 2.(2^n - 1) + 1 = 2.2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

De fato, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, logo $x_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Esse raciocínio nos leva a concluir que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ e que $x_n = 2^n - 1$ é a solução da relação de recorrência.

1.5 Conteúdos de Matemática Definidos por Recursão

1.5.1 Conjuntos

Alguns conjuntos podem ser definidos por recursão, para tanto é necessário que exista uma lei de formação composta pelo passo base e o passo recursivo. No passo base, os elementos iniciais do conjunto são determinados. Já no recursivo, são estabelecidas as regras para obter novos elementos a partir dos iniciais. Veja o exemplo e sua resolução presente em Rosen [13].

Exemplo 1.9. *Considere o subconjunto S do conjunto dos números inteiros definido por*
Passo base: $3 \in S$.
Passo recursivo: Se $x \in S$ e $y \in S$, então $x + y \in S$.

Os novos elementos encontrados em S são 3, pelo passo base, $3 + 3 = 6$ na primeira aplicação do passo recursivo, $3 + 6 = 6 + 3 = 9$ e $6 + 6 = 12$, na segunda aplicação do passo recursivo, e assim por diante.

1.5.2 Funções

Muitas funções podem ser definidas por recursão. Para definir recursivamente uma função que tenha como domínio o conjunto dos números inteiros não-negativos, procedemos da seguinte maneira: em primeiro lugar, especificamos o valor da função em zero, ou seja, $f(0)$, em seguida, procedemos com o passo recursivo como afirma Rosen: "Forneça uma regra para encontrar seu valor em um número inteiro a partir dos valores nos números inteiros menores" (ROSEN, 2009, p. 295)[13].

A função fatorial é um exemplo de função definida por recursão, ou seja, definição indutiva.

Especificando o valor da função em zero, ou seja, $F(0) = 1$ e estabelecendo uma regra para encontrar $F(n+1)$ a partir de F(n), sabendo que $(n+1)!$ é igual ao produto de $n!$ por $n+1$, então a regra é:

$$F(n+1) = (n+1).F(n).$$

Desse modo, concluímos que $F(n) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.10. *Determinar o valor da função fatorial em 4, isto é, $F(4) = 4!$ através da definição recursiva.*

Utilizamos a regra $F(n+1) = (n+1).F(n)$ várias vezes temos:

$$F(4) = 4.F(3) = 4.3.F(2) = 4.3.2.F(1) = 4.3.2.1.F(0) = 4.3.2.1.1 = 24.$$

Outro caso de função é uma sequência de números reais, $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um número $x_n \in \mathbb{R}$, este é chamado de n-ésimo termo da sequência.

Várias sequências utilizam recorrência na sua definição, como por exemplo a sequência dos números naturais pares, a sequência dos números naturais ímpares e a sequência de Fibonacci.

Exemplo 1.11. *Considerando (a_n) como a sequência dos números naturais pares, não admitindo aqui o zero como natural, temos então que $(a_n) = (2, 4, 6, 8...)$, a qual pode ser definida por $f(n+1) = f(n) + 2$ para $n \geq 1$, com $f(1) = 2$, sendo f uma função cujo domínio está contido ao conjunto dos naturais.*

Exemplo 1.12. *A sequência (b_n) dos números naturais ímpares com, $(b_n) = (1, 3, 5, 7...)$, por sua vez, também pode ser definida por recorrência, seja g uma função cujo domínio está contido ao conjunto dos naturais, temos: $g(n+1) = g(n) + 2$ e $g(1) = 1$.*

Uma sequência bastante conhecida entre os matemáticos é a de um italiano chamado Fibonacci, ou Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci (1175–1250), que surgiu a partir de seu interesse em solucionar o seguinte problema:

Determinar quantos casais de coelhos terão em um lugar cercado após um ano, sabendo que inicialmente tinha apenas um casal de coelhos recém- nascidos, que a cada mês um casal de coelhos reproduz outro casal e que um casal começa a reproduzir dois meses após seu nascimento.

Leonardo percebeu que a solução do problema são alguns termos de números naturais e que ficou conhecida como sequência de Fibonacci, que pode ser definida por recorrência[2]. Denominando o número de coelhos existentes no n-ésimo mês por x_n, temos a seguinte relação de recorrência linear homogênea de segunda ordem:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \ \ x_1 = x_2 = 1.$$

Fibonacci obteve a seguinte solução, conforme indica a tabela abaixo.

[2]A fórmula fechada para a sequência de Fibonacci pode ser encontrada em Pacheco [10].

mês	número de casais do mês anterior	número de casais recém-nascidos	total
1°	0	1	1
2°	1	0	1
3°	1	1	2
4°	2	1	3
5°	3	2	5
6°	5	3	8
7°	8	5	13
8°	13	8	21
9°	21	13	34
10°	34	21	55
11°	55	34	89
12°	89	55	144

Tabela 1.1: Números de coelhos - sequência de Fibonacci

1.5.3 Progressão Aritmética

Nesta seção, utilizando como ponto de partida a Questão 161 da prova amarela do ENEM de 2011, definimos por recursão a progressão aritmética.

(Enem 2011*) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas* 33.000 *passagens; em fevereiro* 34.500*; em março* 36.000*. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?*

A) 38.000   *B)* 40.500   *C) 41.000*   *D) 42.000*   *E) 48.000*

Solução:

Organizando os dados do problema em uma tabela, em que a primeira coluna seja o mês e a segunda o número de passagens mensal, percebemos que existe uma relação entre o número de passagens de um mês com o do mês anterior.

Mês	n° de passagens
Janeiro	33.000
Fevereiro	34.500
Março	36.000

Tabela 1.2: Número de passagens mensal

Representando a quantidade de passagens do mês de janeiro por a_1, fevereiro por a_2 e março por a_3, temos:

$$a_1 = 33.000; \quad a_2 = 34.500; \quad a_3 = 36.000;$$

$$a_2 – a_1 = 1.500; \quad a_3 – a_2 = 1.500.$$

A diferença entre o termo seguinte e o termo anterior é constante, chamada de razão (r), e é igual a 1.500. Assim, o problema é expresso por uma progressão aritmética (P.A), isto é, uma sequência de números reais (a_n), $n \geq 1$, tal que a_1 é fornecido e

$$a_{n+1} = a_n + r, \text{ para algum } r \in \mathbb{R}.$$

Considerando o primeiro termo "a", ou seja, a_1 igual a "a", uma P.A. é uma sequência da forma: $(a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r, ...)$.

Através do método de expandir, conjecturar e verificar temos que:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + r,$$

resolvendo a não-homogênea

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + r + a_2 + r + \cdots + a_{n-1} + r,$$

$$a_n = a_1 + (n - 1).r,$$

em que a_n é o termo geral.

Podemos observar que na progressão aritmética, para determinarmos os elementos da sequência utilizamos recorrência linear de primeira ordem não-homogênea, $r \neq 0$, pois para encontrar um termo qualquer da sequência recorremos ao termo anterior, uma vez que a razão é a diferença de um termo da sequência e o termo anterior.

Podemos provar que $a_n = a_1 + (n-1).r$ tem validade por indução para todo n natural. Por indução, definimos a proposição $P(n) : a_n = a_1 + (n-1).r$, observamos que a mesma vale para $n = 1$, pois:

$$a_1 = a_1 + (1-1).r.$$

Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$ $a_n = a_1 + (n-1).r$ seja verdadeira. Verificamos, agora, a veracidade para $n+1$. A partir da fórmula $a_n = a_1 + (n-1).r$ adicionando r em ambos os membros temos:

$$a_n + r = a_1 + (n-1).r + r = a_1 + n.r.$$

Sabemos que em uma P.A. o termo seguinte é igual ao termo anterior adicionado da razão, assim, observamos que $a_{n+1} = a_n + r$, temos:

$$a_{n+1} = a_1 + n.r = a_1 + [(n+1) - 1].r.$$

Assim, verificamos que $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, logo o princípio da indução nos garante que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

1.5.4 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

A fórmula que representa a soma dos termos de uma progressão aritmética é utilizada na resolução de várias recorrências lineares de primeira ordem não - homogêneas.

Realizando a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$, obtemos a fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Como a operação de adição é comutativa, podemos escrever a soma de trás para frente,

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_2 + a_1 \text{ e} \tag{1.3}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n. \tag{1.4}$$

Somando membro a membro as equações (1.3) e (1.4) obtemos:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1). \tag{1.5}$$

Observamos que $(a_1 + a_n) = (a_2 + a_{n-1}) = (a_3 + a_{n-2}) = (a_{n-1} + a_2) = (a_n + a_1)$, pois em (1.5) de um parêntese para o outro, a primeira parcela aumenta r e a segunda parcela diminui r, assim não altera a soma. Então,

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Longrightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Para verificarmos a validade da fórmula para todo $n \in \mathbb{N}$, utilizamos indução matemática. Seja a proposição $P(n) : S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$, verificamos que a mesma é verdadeira para $n = 1$, pois

$$S_1 = \frac{(a_1 + a_1)1}{2} = a_1.$$

Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ seja verdadeira, ou seja:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

.

Averiguamos a validade de $P(n+1)$, utilizando a hipótese de indução $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ e somando a_{n+1} a cada membro, obtemos:

$$S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} = \frac{n.a_1 + n.a_n + 2.a_{n+1}}{2}.$$

Como, $S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$, $a_n = a_1 + (n-1).r$ e $a_{n+1} = a_1 + n.r$, temos:

$$S_{n+1} = \frac{n.a_1 + n.[a_1 + (n-1)r] + 2(a_1 + n.r)}{2} = \frac{2(n+1).a_1 + n.(n+2-1)r}{2}.$$

Logo,

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2a_1 + n.r)}{2} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}.$$

Pela indução matemática fica provada a validade da fórmula da soma de n termos de uma progressão aritmética para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.5.5 Progressão Geométrica

Outra sequência que se constitui como recorrência linear homogênea de primeira ordem é a progressão geométrica (P.G), onde, multiplicando cada termo por uma constante q, a qual é denominada de razão da progressão, obtemos o termo seguinte. Um exemplo é a sequência $(3, 6, 12, 24, 48...)$ de razão $q = 2$.

Uma progressão geométrica pode ser definida por recorrência da seguinte forma:

$$a_1 = a$$
$$a_{n+1} = a_n.q, n \geq 1.$$

Assim, a sequência é da forma:

$$(a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, ...).$$

Para determinarmos o termo geral de uma P.G. escrevemos cada termo em função do termo anterior:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1.q \\ a_3 &= a_2.q \\ a_4 &= a_3.q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1}.q, \end{aligned}$$

sendo assim, o n-ésimo termo é:

$$a_2.a_3.a_4 \cdots a_n = a_1.a_2.a_3 \cdots a_{n-1}.q^{n-1}$$
$$\implies a_n = a_1.q^{n-1}.$$

Através do princípio da indução finita verificamos a validade da fórmula do termo geral a_n para todo n natural.

Considerando como $P(n)$: $a_n = a_1.q^{n-1}$, verificamos que $P(1)$ é válida:

$$a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1.$$

Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$ a proposição $P(n) : a_n = a_1.q^{n-1}$ seja verdadeira.

Devemos ver que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Multiplicando q em ambos os membros de $a_n = a_1.q^{n-1}$, temos:

$$q.a_n = q.a_1.q^{n-1} = a_1.q^n. \tag{1.6}$$

Como em uma P.G. o termo seguinte é igual ao termo anterior multiplicado pela razão, temos que:

$$a_{n+1} = a_n.q. \tag{1.7}$$

A partir das Equações (1.6) e (1.7) concluímos que $a_{n+1} = a_1.q^n$, verificamos assim que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, logo o princípio da indução nos garante que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

1.5.6 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica

A fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) com razão $q \neq 1$, é

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{1.8}$$

Na resolução de várias recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem, (1.8) é muito útil e vamos obtê-la a partir de Lima et al [6]. Sendo $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$, multiplicando por q, temos

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_{n+1}.$$

Realizando a subtração, $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$, ficando evidente que, $S_n(1-q) = a_1 - a_1q^n$, daí temos que:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Vamos comprovar a validade de P(n): $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$ por indução. $P(1)$ é válida, de fato:

$$S_1 = a_1 \frac{q^1-1}{q-1} = a_1.$$

Suponhamos que $P(n)$ é válida para algum n natural, ou seja,

$$S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}.$$

Queremos provar que $P(n+1)$ vale, isto é,

$$S_{n+1} \stackrel{?}{=} a_1 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Somando a_{n+1} a ambos os membros de $S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$ chegamos a:

$$S_n + a_{n+1} = \frac{a_1(q^n-1) + (q-1)a_{n+1}}{q-1},$$

Como, $a_{n+1} = a_1q^n$, vemos que: $S_n + a_{n+1} = \dfrac{a_1(q^n-1) + (q-1)a_1q^n}{q-1} = \dfrac{a_1q^n - a_1 + a_1q^{n+1} - a_1q^n}{q-1} =$

$\dfrac{-a_1 + a_1q^{n+1}}{q-1} = \dfrac{a_1(q^{n+1}-1)}{q-1}$. Já que $S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$, temos:

$$S_{n+1} = \frac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1}.$$

E assim, provamos que a fórmula é válida para todo n natural.

1.5.7 Operações

A operação de potenciação a^n, com n inteiro não negativo e a um número real não nulo, sendo definida por recorrência, é:

$$a^0 = 1$$

$$a^n = (a^{n-1}).a \text{ para } n \geq 2.$$

Também podemos definir por recorrência a multiplicação de dois inteiros positivos a e b:

$$a(1) = a$$

$$a(b) = a(b–1) + a \text{ para } b \geq 2.$$

A adição de números naturais é uma função definida por recorrência[3]. Seja k um número natural arbitrário, a correspondência $n \mapsto k + n$ é uma função $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$, $f(n) = k + n$, com:

$$k + 1 = s(k) \text{ e} \tag{1.9}$$

$$k + s(n) = s(k + n). \tag{1.10}$$

Assim, por definição, $k + 1$ é o sucessor de k. Portanto, se conhecemos $k + n$, obtemos o valor de $k + s(n)$. Por definição, $k + s(n) = s(k + n)$. Dessa forma, usando as notações $n + 1$ em vez de $s(n)$ e $(k + n) + 1$ em vez de $s(k + n)$, a igualdade (1.10) se escreve:

$$k + (n + 1) = (k + n) + 1. \tag{1.11}$$

Portanto as igualdades (1.9) e (1.10) ou, equivalentemente, (1.9) e (1.11) definem, por recorrência, a soma $k + n$ de dois números naturais quaisquer k e n.

1.5.8 Algoritmo de Euclides

Nesta subseção, mostramos, a título de curiosidade, ao professor que a recursão está presente no Algoritmo de Euclides.

O Algoritmo de Euclides é um método prático para se calcular o Máximo Divisor Comum (MDC) de dois números inteiros quaisquer, ambos diferentes de zero. O MDC de a e b é denotado por (a, b).

O Algoritmo de Euclides utiliza a recorrência para provar a existência do Máximo Divisor Comum e utiliza o seguinte lema extraído do livro de Abramo [4]:

[3] Abordada em Elon [5] e em http://mtm.ufsc.br/ensinomedio/jul-09/aritmetica.pdf [12].

Lema 1.1. *Sendo a, b e $n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a, b - na)$, então:*

$$(a, b) = (a, b - na)$$

Demonstração: Seja k o MDC de a e $b - na$, ou seja, $k = (a, b - na)$. Como k divide a e k divide $(b - na)$, temos que k divide b, pois b é igual a $b - na + na$, assim k é um divisor comum de a e de b. Supondo que z seja um divisor comum de a e de b, temos que z é um divisor comum de a e de $b - na$, dessa forma, z divide k provando assim, que k é o Máximo Divisor Comum de a e de b. ■

A partir do Lema 1.1, chega-se no Algoritmo de Euclides: dados $a, b \in \mathbb{Z}$, sem perca de generalidade, podemos supor $a \leq b$, se a for igual a 1 ou se a for igual a b ou ainda a divide b, temos: $(a, b) = a$ e termina o algoritmo. Supondo que $1 < a < b$ e que a não divide b. Pela divisão Euclidiana temos:

$$b = a.q_1 + r_1, \ \ com \ \ r_1 < a.$$

Existem duas possibilidades:

i) r_1 divide a, assim pelo Lema 1.1 $r_1 = (a, r_1) = (a, b - q_1 a) = (a, b)$ e termina o algoritmo ou
ii) r_1 não divide a, assim efetuamos a divisão de a por r_1, chegando a $a = r_1 q_2 + r_2$, com $r_2 < r_1$

Mais uma vez temos duas possibilidades:
i') r_2 divide r_1, e, neste caso, mais uma vez, pelo Lema 1.1 temos,

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, a - q_2 r_1) = (r_1, a) = (b - q_1 a, a) = (b, a) = (a, b),$$

assim, paramos, pois o algoritmo terminou, ou

ii') r_2 divide r_1, e, neste caso, podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, com $r_3 < r_2$. Este processo não poderá continuar indefinidamente, pois teríamos uma sequência de números naturais $a > r_1 > r_2 > ...$ o qual não possui menor elemento, o que não pode ocorrer pela propriedade da boa ordem [4]. Assim, para algum n, temos que r_n divide r_{n-1}, e $(a, b) = r_n$.

Pelas divisões sucessivas temos:
$a = bq_1 + r_1 \quad (0 < r_1 < b)$
$b = r_1 q_2 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)$
$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$
$r_2 = r_3 . q_4 + r_4 \quad (0 < r_4 < r_3)$
Os restos sucessivos formam uma sequência decrescente de números positivos:

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > ... > 0$$

[4] A propriedade da boa ordem pode ser encontrada em Hefez [4].

Com $(a,b) = (b,r_1),\ (b,r_1) = (r_1,r_2),\ (r_1,r_2) = (r_2,r_3),$

$$(r_2,r_3) = (r_3,r_4),...,(r_{n-1},r_n) = (r_n,0) = r_n.$$

Vimos que no Algoritmo de Euclides foi utilizada uma equação de recorrência, pois após no máximo b etapas temos:

$$r_{n-2} = r_{n-1}.q_n + r_n.$$

1.5.9 Juros Compostos

Juros compostos é um modelo de aplicação financeira que utiliza o raciocínio recursivo fundamentado em progressões geométricas. Vejamos:

Exemplo 1.13. *Um capital de* $R\$\ 20.000,00$ *foi aplicado à taxa de* 2% *ao mês durante 3 meses. Qual foi o montante no final de 3 meses?*

No primeiro mês, temos que 2% de 20000 é igual a 400 (juros produzidos no primeiro mês). O montante, no final do primeiro mês, é a soma do capital mais os juros, isto é, $20.000 + 400 = 20400$. No segundo mês, temos 2% de 20400 que é igual a 408 (os juros produzidos no segundo mês), assim o montante no final do segundo mês será o anterior somado aos juros produzidos no segundo mês, isto é, $20400+408 = 20808$. No terceiro mês, já teremos 2% de 20808 que é igual a 416,16 (juros produzidos no terceiro mês) e o montante no final dos três meses será $20808 + 416,16$, isto é, $21224,16$.

Observamos no exemplo que o montante no final de cada período depende do montante anterior, podemos sintetizar por meio de uma tabela, sendo o montante (M), o capital (C), a taxa i e t o período.

Períodos	Início	Juros	Montante Final
1° período	C	iC	$M_1 = C + iC = C(1+i)$
2° período	M_1	iM_1	$M_2 = M_1 + iM_1 = M_1(1+i) = C(1+i)(1+i)$
			$M_2 = C(1+i)^2$
3° período	$M2$	iM_2	$M_3 = M_2 + iM_2 = M_2(1+i) = C(1+i)^2(1+i)$
			$M_3 = C(1+i)^3$

Tabela 1.3: Montante no final de cada período

Os montantes resultantes no final de cada período formam uma recorrência linear homogênea de primeira ordem, onde, m_n representa o montante no n-ésimo período.

$$m_{n+1} = m_n(1+i) \quad e \quad m_0 = C_0.$$

Observamos que no final de n períodos os montantes obtidos formam uma progressão geométrica em que C_0 (capital inicial) é o primeiro termo da progressão e a razão é $(1+i)$. Como o termo geral da progressão geométrica é $a_n = a_1.q^{n-1}$, temos que no final de n períodos o montante será $M_n = C(1+i)^n$ e os juros (j) será: $j = M - C$.

1.5.10 Problemas de Contagem

Nesta subseção, apresentamos e resolvemos alguns problemas de contagem usando recursão.

Problema 01 (extraído de Lima et. al[6])

Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a $\{0, 1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a zero. Chamamos de x_n o número de sequências com n termos que satisfaz as condições do problema. Dividimos o problema em dois casos:

i) Se o primeiro elemento for 1, para formar a sequência basta determinar os termos a partir do primeiro o que pode ser feito de x_{n-1} modos;

ii) Se o primeiro elemento for 0 (zero), teremos que o resto da sequência deverá ter uma quantidade par de zeros, sendo assim, para encontrarmos essa quantidade, podemos pegar 2^{n-1} que é a quantidade total de sequências e subtrair o número de sequências que tem uma quantidade ímpar de zeros. Sendo assim, teremos: 2^{n-1}–x_{n-1}.

Logo, o número de sequências de n termos todos pertencentes a $\{0, 1\}$ que possui um número ímpar de termos iguais a zero será igual à soma da quantidade de sequências dos dois casos, portanto, temos: $x_n = x_{n-1} + (2^{n-1} – x_{n-1}) = 2^{n-1}$.

Problema 02 (extraído de Lima et. al [6])

Determine o número máximo de regiões em que n retas podem dividir o plano.

Observamos que o número máximo de regiões é obtido para cada n, a reta $n+1$ intersecta as n já existentes, pois traçando uma reta temos duas regiões, com a segunda reta se origina mais duas novas regiões e a terceira reta obtem-se a mais três novas regiões. Como verificamos na tabela:

Número de retas	Quantidade de regiões
0	1
1	2
2	4
3	7

Tabela 1.4: Relação entre o número de retas e a quantidade de regiões

Dessa maneira, a nova reta subdivide $n+1$ regiões obtendo assim $n+1$ novas regiões, ou ainda, a quantidade de regiões obtidas por n retas igual ao número de regiões definidas por $(n-1)$ retas mais n.

Dessa forma, a equação de recorrência $x_n = x_{n-1} + n$, para $n = 0, 1, 2, ...$, com $x_0 = 1$ determina o número máximo de regiões x_n, em que n retas podem dividir o plano. Resolvemos esta recorrência não-homogênea pelo método de expandir, conjecturar e verificar, temos:

$$x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = x_n + (n + 1)$$

Listando os termos obtemos:

$$\begin{gathered} x_1 = x_0 + 1 \\ x_2 = x_1 + 2 \\ x_3 = x_2 + 3 \\ \vdots \\ x_n = x_{n-1} + n \end{gathered}$$

Somando membro a membro, tem-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$x_n = x_0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$
$$\Longrightarrow x_n = x_0 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Assim, a possível solução da recorrência é:

$$x_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Agora, verificamos a validade da fórmula acima por indução. Note que para $n = 0$

$$x_0 = \frac{0^2 + 0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Suponhamos agora que $x_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$. Somando $n + 1$ a ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + n + 1 &= \frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \\ &= \frac{n^2+n+2+2n+2}{2} = \frac{(n^2+2n+1)+n+3}{2} = \\ &= \frac{(n+1)^2+n+3}{2}, \end{aligned}$$

o que mostra que a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 2

O ENEM e a OBMEP: Utilização do raciocínio recursivo

2.1 Introdução

Neste capítulo, falamos um pouco sobre o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), suas características, matriz curricular, objetivos principais, assim como a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), além de apresentarmos e analisarmos algumas questões do ENEM de 2008 a 2013, e problemas que foram utilizados em provas da OBMEP de 2005 a 2014, os quais utilizam o raciocínio recursivo em sua resolução. Sempre que possível, mostramos ao professor algumas sugestões de como o mesmo pode utilizar estas questões para que os alunos do ensino médio possam compreender o processo recursivo com mais afinco.

2.2 ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio é uma avaliação anual criada em 1998, oferecida principalmente a concluintes e egressos do ensino médio, cujo o propósito é avaliar o desempenho dos estudantes quanto às competências e habilidades adquiridas ao longo de sua vida escolar básica. Inicialmente, até o ano de 2008, o ENEM era composto por 63 questões interdisciplinares aplicadas apenas em um único dia. A partir de 2009, o exame passou a ser um dos principais meios de acesso ao ensino superior, contendo agora 180 questões de múltipla escolha divididas igualmente em dois dias de aplicação nas 4 áreas do conhecimento as quais são:

1. Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (incluso a redação): Correspondendo a Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física e Tecnologia da Informação e Comunicação.

2. Ciências Humanas e suas Tecnologias: Abrangendo História, Geografia, Filosofia e Sociologia.

3. Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Referente aos componentes curriculares de Química, Física e Biologia.

4. Matemática e suas Tecnologias: Referindo-se a conteúdos de Matemática.

Além da nova reformulação no que tange a aplicação, a matriz de referência ganhou uma nova roupagem em 2009, compartilhando com todas as áreas os cinco eixos cognitivos de acordo com o relatório pedagógico do ENEM [1]:

I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. Compreender fenômenos (CF): construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Ainda de acordo com [1] a matriz de referência de Matemática e suas tecnologias é dividida em sete competências, como segue:

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Os conteúdos matemáticos que utilizam o raciocínio recursivo que foram abordados em questões do ENEM, são principalmente, termo geral e soma dos termos de uma progressão aritmética, esses fazem parte da competência da área 1, enfatizando o item H2, isto é, identificar padrões numéricos.

2.3 Questões do ENEM de 2008 a 2013

No ano de 2008, a Questão 54, prova amarela, utilizou o raciocínio recursivo em sua resolução. Em relação a mesma, não tecemos comentários e nem resolvemos aqui, pois sua solução está na Seção 3.2, página 51. No Enem de 2009, não apareceram questões envolvendo o raciocínio recursivo. Já no Enem de 2010, houve duas avaliações, a primeira foi anulada, nela apareceram duas questões, as quais podem ser resolvidas por meio de recursão. Abaixo, listamos as questões e resolvemos.

2.3.1 Questão 149 de 2010: Prova Azul - Primeira Aplicação

Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

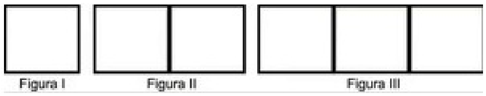


Figura 2.1: Questão 149 de 2010- prova azul- primeira aplicação

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?
a) $C = 4Q$
b) $C = 3Q + 1$
c) $C = 4Q - 1$
d) $C = Q + 3$
e) $C = 4Q - 2$

Resolução e Comentário:

Nesta questão o aluno terá que observar cada figura chegando à conclusão que para formar um quadrado é necessário utilizar quatro canudos. Para formar dois quadrados precisará de sete canudos e para formar três quadrados, dez canudos. O professor precisa estar atento, conferindo se todos os alunos conseguiram chegar a esse raciocínio.

Organizando esses dados em uma tabela, temos:

Número de Quadrados (Q)	Quantidade de Canudos (C)
1	4
2	7
3	10

Tabela 2.1: Relação entre o número de quadrados e a quantidade de canudos

Visualizando os dados da tabela podemos observar que existe uma relação entre a quantidade de canudos de uma figura e a quantidade de canudos da figura anterior. Representando a quantidade de canudos da primeira figura por C_1, da segunda figura como C_2 e assim respectivamente, temos:

$$C_3 - C_2 = C_2 - C_1 = 3.$$

Sendo assim, a quantidade de canudos descreve uma progressão aritmética de razão 3.

Como vimos no Capítulo 1, progressão aritmética, faz uso de recorrência em sua definição, dessa forma, para solucionar a questão basta utilizar a fórmula do termo geral, $a_n = a_1 + (n-1)r$.

De acordo com os dados da questão, $a_n = C$ e $n = Q$, pois as n posições da progressão coincidem com a quantidade de quadrados dessa forma, temos:

$$C = 4 + (Q - 1).3$$

$$C = 4 + 3Q - 3$$

$$C = 3Q + 1.$$

Logo, a alternativa correta é a letra b.

2.3.2 Questão 179 de 2010: Prova Azul - Primeira Aplicação

Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostra no esquema a seguir.

Figura 2.2: Questão 179 de 2010 - prova azul - primeira aplicação

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.

A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

A) 9

B) 45

C) 64

D) 81

E) 285

Resolução e Comentário:

Para resolver essa questão, seria muito interessante que o professor procedesse explicando aos alunos duas maneiras de resolvê-la. A primeira o conduz à observação da sequência e por fim, a percepção do raciocínio recursivo que chega à resolução por meio da progressão aritmética. A segunda leva em consideração a capacidade do aluno averiguar e compreender padrões estabelecidos em cada linha, culminando na habilidade de observar as linhas anteriores e a partir disto encontrar uma propriedade que generalize a solução sem a necessidade de recorrer diretamente às linhas anteriores. Bem, vamos às soluções.

Solução 01

Observando as quatro primeiras linhas, o aluno chega à conclusão que em cada uma foi estabelecida uma sequência ($1, ..., n, n-1, n-2, ..., 1$),assim, tem duas progressões aritméticas, a primeira de 1 até n e a segunda de $n-1$ a 1, sendo que a primeira possui razão igual a 1 e a segunda razão igual a -1. O problema deseja encontrar a soma dos elementos da nona linha da sequência, portanto, temos que a sequência é:

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1).$$

Sendo assim, dividimos a sequência em duas outras:

i) $(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9)$
ii) $(8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1)$
Em (i) a soma dos termos é:

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9).9}{2} = \frac{(1+9).9}{2} = \frac{90}{2} = 45.$$

Já em (ii), temos:

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8).8}{2} = \frac{(8+1).8}{2} = \frac{72}{2} = 36.$$

Assim, a soma dos termos da nona linha é $S_9 + S_8 = 45 + 36 = 81$. A resposta é alternativa D.

Solução 02

Observando a soma dos elementos nas quatro primeiras linhas percebemos um padrão, como expressa a tabela:

Linha	Soma dos elementos da linha
1	1
2	4
3	9
4	16

Tabela 2.2: Soma dos elementos de cada linha

Observamos que a soma dos elementos corresponde ao número da respectiva linha ao quadrado, sendo assim, generalizando para encontrar o da n-ésima linha temos que a soma é n, sendo assim, a soma dos elementos correspondentes a nona linha é igual a $9^2 = 81$.

Agora, analisaremos as questões da segunda prova do ENEM de 2010 pertencentes à prova azul.

2.3.3 Questão 141 de 2010: Prova Azul - Segunda Aplicação

Nos últimos anos, a corrida de rua cresce no Brasil. Nunca se falou tanto no assunto como hoje, e a quantidade de adeptos aumenta progressivamente, afinal, correr traz inúmeros benefícios para a saúde física e mental, além de ser um esporte que não exige um alto investimento financeiro.

Um corredor estipulou um plano de treinamento diário, correndo 3 quilômetros no primeiro dia e aumentando 500 metros por dia, a partir do segundo. Contudo, seu médico cardiologista autorizou essa atividade até que o corredor atingisse, no máximo, 10 km de corrida em um mesmo dia de treino. Se o atleta cumprir a recomendação médica e praticar o treinamento estipulado corretamente em dias consecutivos, pode-se afirmar que esse planejamento de treino só poderá ser executado em, exatamente,
A) 12 dias.
B) 13 dias.
C) 14 dias.
D) 15 dias.
E) 16 dias.

Resolução e Comentário:

Essa questão não trouxe em seu enunciado um texto longo e cheio de informações secundárias que não são relevantes para a resolução, ela é direta. Desta forma, para resolvê-la, o professor precisa instigar os alunos a organizarem os dados, assim como buscarem raciocinar de forma a descobrirem que se trata de uma sequência, e que a partir do segundo dia é acrescentado 0,5 km em relação à quantidade de km percorridos no dia anterior. Sendo assim, é preciso que o estudante compreenda que se trata de uma recorrência, já que a quantidade de km de um dia decorre da quantidade de km do dia anterior, e que é expressa através da progressão aritmética.

Para solucionar a questão, antes de tudo, precisamos transformar as unidades, isto é, passar os 500 m percorridos para quilômetros, ou passar de quilômetros para metros o que for mais conveniente para os alunos. Em seguida, basta utilizarmos a fórmula do termo geral objetivando encontrarmos a quantidade de termos que é equivalente à quantidade de dias. Logo, temos:

Dados $a_1 = 3km, \quad r = 0,5km \quad$ e $\quad a_n = 10km$

$$10 = 3 + (n-1).0,5$$

$$10 = 3 + 0,5n - 0,5$$

$$7,5 = 0,5n$$

$$n = 15.$$

Então, a resposta é 15 dias, ou seja, a alternativa D.

O professor pode também, seguindo como base esta questão, elaborar outras perguntas, assim como, montar outras circunstâncias induzindo os alunos a extraírem o máximo de informações trabalhando seu raciocínio lógico, além de treinar suas habilidades em estabelecer padrões.

2.3.4 Questão 167 de 2010: Prova Azul - Segunda Aplicação

O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

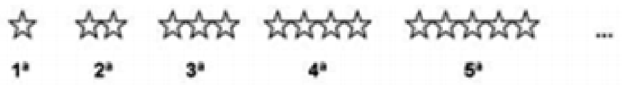


Figura 2.3: Questão 167 de 2010 - prova azul - segunda aplicação

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:
FUNCIONÁRIO I: aproximadamente 200 estrelas.
FUNCIONÁRIO II: aproximadamente 6 000 estrelas.
FUNCIONÁRIO III: aproximadamente 12 000 estrelas.
FUNCIONÁRIO IV: aproximadamente 22 500 estrelas.
FUNCIONÁRIO V: aproximadamente 22 800 estrelas.
Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?
A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

Resolução e Comentário:

Para esta questão os alunos precisam, a princípio, observar atentamente a figura, examinando e chegando à conclusão que à partir do segundo termo, a quantidade de estrelas de uma linha é dada pela soma entre as estrelas da linha anterior acrescida uma estrela. Na segunda linha temos duas estrelas, isto é, a quantidade de estrelas da primeira mais uma nova estrela. Na terceira linha temos a quantidade de estrelas da segunda mais uma nova estrela. Sendo assim, o número de estrelas em cada linha forma uma progressão aritmética em que o termo geral corresponde, $a_n = n$, com n $(n \geq 1)$, o número da linha e para calcular a quantidade de estrelas utilizada nas 150 linhas, basta utilizar a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 1.

O professor deve estar atento, analisando se os alunos conseguiram chegar às conclusões acima citadas, assim como se os mesmos estão organizando os dados corretamente, além de saberem, de fato, o que o problema realmente quer, isto é, a soma do número de termos.

Sendo assim, para resolver o problema, temos que $a_{150} = 150$, $a_1 = 1$, $r = 1$ e

$$S_{150} = \frac{(1 + 150) \times 150}{2}$$

$$S_{150} = 151 \times 75$$

$$S_{150} = 11325.$$

Ao chegar neste ponto, o aluno deve perceber que precisa verificar nas alternativas qual o valor mais próximo de 11 325 que é 12 000. Portanto, a resposta correta é a alternativa C.

No ano de 2011, prova amarela, as Questões 161 e 162 poderiam ser resolvidas através do raciocínio recursivo, a primeira foi comentada na Subseção 1.5.3, página 10. Já em relação à segunda, utiliza-se recursão, assim como porcentagem. Abaixo, resolvemos e comentamos essa questão.

2.3.5 Questão 162 de 2011: Prova Amarela

Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação. A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

A) R$ 4 222,22.

B) R$ 4 523,80.

C) R$ 5 000,00.

D) R$ 13 300,00.

E) R$ 17 100,00.

Resolução e Comentário:

Essa questão utiliza o raciocínio recursivo, pois o montante no segundo mês gerado pela aplicação vai depender do montante do primeiro mês, estabelecendo assim uma relação de recorrência. Chamando de C a quantia inicial que foi aplicada em ações, também considerando o montante do primeiro e do segundo mês, respectivamente por M_1 e M_2, temos:

$$M_1 = C - 30\%.C \text{ e}$$

$$M_2 = M_1 + 20\%(30\%.C).$$

Pelo enunciado temos que o montante $M_2 = 3800$, logo:

$$(0,7)C + (0,2).(0,3)C = 3800$$
$$\Longrightarrow C = 5000.$$

Então, a solução da questão é a alternativa C.

No exame de 2012 apareceram duas questões que poderiam ser solucionadas por meio do processo recursivo. Abaixo comentamos ambas.

2.3.6 Questão 142 de 2012: Prova Amarela

Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é
A) 21.
B) 24.
C) 26.
D) 28.
E) 31.

Resolução e Comentário:

Nessa questão, o ENEM faz uma contextualização com o baralho. Se o professor identificar que uma quantidade considerável da turma não tem conhecimento suficiente de como o mesmo funciona, sugerimos que o mestre possa trazer um baralho e demonstrar para os alunos, constituindo-se uma excelente oportunidade para que os estudantes possam obter mais informações sobre este jogo que, geralmente, é utilizado em outros conteúdos de matemática como probabilidade e análise combinatória. Também aconselhamos que os alunos sejam estimulados, sempre que possível, a fazerem um desenho, ou ainda uma tabela, organizando os dados da questão.

Para resolver a questão, os alunos precisam observar que a primeira coluna é composta por uma carta, a segunda por 2 cartas, e assim sucessivamente, o enunciado é bem claro quanto a isto, além disto, percebam o que o problema quer, isto é, saber quantas cartas constituem o monte, a princípio, se faz necessário saber quantas cartas estão dispostas nas 7 colunas, e para isto, os mesmos podem utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, sabendo que a razão é 1, o primeiro termo também é 1 e o sétimo termo é igual a 7. No entanto, se os alunos fizerem o desenho da questão, provavelmente observarão com mais clareza que, em detrimento da progressão aritmética, existe, por trás do processo, o raciocínio recursivo, onde em cada coluna, a partir da segunda, a soma das cartas é igual a quantidade de cartas da coluna anterior mais 1, sendo assim, para que um padrão possa ser estabelecido, podemos escrever a_2 como sendo $a_1 + 1$, assim como a_3 como sendo $a_2 + 1$, desta forma, generalizando:

$$a_n = a_{n-1} + 1.$$

Calculando através da soma dos termos de uma progressão aritmética, temos:

$$S_7 = \frac{(1+7)}{2} \times 7 = 28.$$

Finalmente, para chegarmos à solução, basta subtrairmos da quantidade de cartas que compõem o baralho, isto é, 52 cartas, a quantidade dispostas nas 7 colunas, ou seja, 28 cartas, sendo assim, temos:

$$52 - 28 = 26.$$

Como podemos perceber, a alternativa correta é letra C.

2.3.7 Questão 146 de 2012: Prova Amarela

Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias. Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?
A) 37
B) 51

C) 88
D) 89
E) 91

Resolução e Comentário:

A questão acima pode ser resolvida por meio de recursão através da progressão aritmética, utilizando-se de duas formas diferentes as quais comentamos logo abaixo. É interessante que o professor instigue a curiosidade dos alunos para que os mesmos pensem em fazer a questão de formas diferentes, assim, provavelmente durante a aula aparecerão as duas ou mais maneiras de se resolver o problema. Na primeira forma de resolução o aluno pode pensar em fazer uma subtração entre o número de dias do ano, isto é, 365 dias, menos a quantidade de dias que o maquinista ficou de férias, ou seja, 10 dias, resultando assim em 355 dias, sendo assim, este valor ou é um termo da progressão aritmética de razão 4 ou é maior que o último termo dessa progressão a qual podemos expressar em linguagem matemática como observamos a seguir:

$$355 \geq 1 + (n-1).4$$

$$355 \geq 4n - 3$$

$$n \leq 88,5.$$

Como n representa a quantidade máxima de viagens que o maquinista realizará, então n é um número natural, desta maneira, o maior natural que satisfaz as condições do problema é 88. Pois, $88 \times 4 + 3 = 355$.

Na segunda maneira de resolver a questão, o aluno pode verificar que no intervalo de 1° de janeiro até o dia 31 de maio, data que antecede as férias do maquinista, é composto por 155 dias, assim percebemos que:

$$151 = 37.4 + 3.$$

Logo, temos 37 viagens neste período. Agora, analisando o restante do ano, o intervalo correspondente ao período posterior às férias do maquinista, que vai do dia 11 de junho à 31 de dezembro, temos um total de 204 dias, que pode ser expresso por 4×51, isto é, durante este período o maquinista irá realizar 51 viagens, assim sendo, no total serão $37 + 51$ totalizando 88 viagens.

Portanto a alternativa correta é a letra C.

No ano de 2013 foram aplicadas duas questões na prova do ENEM que poderiam ser resolvidas através do raciocínio recursivo. No entanto, comentamos aqui a Questão 154, já a Questão 166 está respondida na Seção 3.4, página 58.

2.3.8 Questão 154 de 2013: Prova Amarela

As projeções para a produção de arroz no período de 2012 - 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

Figura 2.4: Questão 154 de 2013 - prova amarela

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de

A) 497,25.
B) 500,85.
C) 502,87.
D) 558,75.
E) 563,25.

Resolução e Comentário:

Observando o quadro, percebe-se que a projeção da produção anual de arroz está com perspectiva de crescimento constante de 1,25 toneladas. Considerando P_1, P_2, P_3, P_4, respectivamente as projeções dos anos de 2012, 2013, 2014 e 2015, assim:

$$P_2 - P_1 = P_3 - P_2 = P_4 - P_3 = 1,25.$$

Dessa maneira temos:

$$P_1 = 50,25 \;\; e$$

$$P_n = P_{n-1} + 1,25.$$

Como vimos no Capítulo 1, a relação de recorrência acima representa uma progressão aritmética de razão 1,25 com $a_1 = P_1 = 50,25$. Aqui, é preciso tomar bastante cuidado, pois como a proposta do problema é obter a quantidade total de arroz, em toneladas produzidas no período de 2012 a 2021 que corresponde a 10 anos, haja vista que o ano de 2012 deve ser incluído, o natural é que os alunos subtraiam $2021 - 2012 = 9$, no entanto, os mesmos devem somar mais 1, pelas razões já mencionadas anteriormente, dessa maneira o professor deve ser cuidadoso na eminência de ajudar aos estudantes a compreenderem este fato. Sendo assim, para determinarmos o valor da produção nos intervalo de 2012 a 2021 temos que utilizar a soma dos termos de uma progressão aritmética. Antes disso, precisamos obter o valor de $a_{10} = P_{10}$, logo:

$$P_{10} = P_1 + 9 \times 1,25 = 61,5.$$

Finalmente, de posse do a_n, calculamos a soma dos termos

$$S_{10} = \frac{(50,25 + 61,5) \times 10}{2} = 558,75.$$

Logo, a alternativa correta é letra D.

2.4 OBMEP

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas(OBMEP) é um programa de realização, desde 2005, do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada(IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática em parceria com os Ministérios da Educação e de Ciência e Tecnologia. É constituída de uma prova nacional realizada em duas fases para estudantes do 6° ano do ensino fundamental ao ensino médio das escolas públicas, dividida em três níveis, nível I compreende ao 6° e 7° anos, nível II, participam os alunos dos 8° e 9° anos, já o nível III abrange todo o ensino médio.

É importante destacar que os objetivos da OBMEP de acordo com o regulamento [8] da mesma são:

1. Estimular e promover o estudo da matemática entre alunos das escolas públicas.
2. Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica.
3. Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso nas áreas científicas e tecnológicas.
4. Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional.
5. Contribuir para a integração das escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas.
6. Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

2.5 Questões da OBMEP

Nesta seção, apresentamos, resolvemos e analisamos 8 questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), as quais foram utilizadas no período de 2005 a 2014, que por sua vez, podem ser resolvidas utilizando o raciocínio recursivo.

2.5.1 Questão 08 do Nível 02 de 2005

Quantos são os números inteiros, múltiplos de 3, existem entre 1 e 2005?
A) 664
B) 665
C) 667
D) 668
E) 669

Resolução e Comentário:

A progressão aritmética é útil na resolução da questão, já que os múltiplos de 3 entre 1 e 2005 são representados pela sequência: (3,6,9,...2004), em que a razão é 3 e o primeiro termo também é igual a 3. Através da fórmula do termo geral, segue que:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$
$$2004 = 3 + (n-1).3$$
$$2001 = 3n - 3$$
$$n = \frac{2004}{3}$$
$$n = 668.$$

Assim, a resposta é 668 múltiplos e corresponde à alternativa D.

2.5.2 Questão 07 do Nível 02 de 2006

No início de janeiro de 2006, Tina formou com colegas um grupo para resolver problemas de matemática. Eles estudaram muito e por isso, a cada mês, conseguiam resolver o dobro de números de problemas resolvidos no mês anterior. No fim de junho de 2006 o grupo havia resolvido um total de 1134 problemas. Quantos problemas o grupo resolveu em janeiro?

A) 12
B) 18

C) 20
D) 24
E) 36

Resolução e Comentário:

É muito importante que os alunos compreendam que a cada mês, o grupo consegue resolver o dobro da quantidade de problemas resolvidos no mês anterior, entender essa informação é imprescindível para chegarmos à solução do problema. Prosseguindo, podemos considerar a seguinte notação: a_n equivale ao número de problemas resolvidos no mês anterior. Por conseguinte, temos:

$$a_n = 2a_{n-1},$$

que é uma progressão geométrica. Desse modo pode-se utilizar a fórmula da soma dos termos, já que no sexto mês totalizou 1134 problemas resolvidos, assim:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

em que $S_n = 1134$, $q = 2$ e $n = 6$:

$$1134 = a_1.(2^6 - 1)$$
$$1134 = 63a_1$$
$$a_1 = \frac{1134}{63}$$
$$a_1 = 18.$$

Portanto, no mês de janeiro foram resolvidos 18 problemas. Dessa forma, a resposta correta corresponde a alternativa B.

2.5.3 Questão 04 do Nível 03 de 2008

Com quadrinhos de lado 1 cm, constrói-se uma sequência de retângulos acrescentando-se, a cada etapa, uma linha e duas colunas ao retângulo anterior. A figura mostra os três primeiros retângulos dessa sequência. Qual é o perímetro do 100° retângulo dessa sequência?

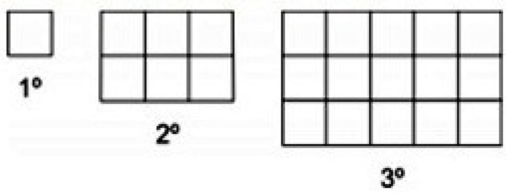


Figura 2.5: Questão 04 do nível 03 de 2008

A) 402 cm
B) 472 cm
C) 512 cm
D) 598 cm
E) 634 cm

Resolução e Comentário:

Esta questão é muito interessante e bem proveitosa, haja vista que o raciocínio recursivo pode ser trabalhado com grande afinco, pelo menos, de duas maneiras diferentes. Sendo assim, vamos comentar aqui duas formas de resolução desse problema.

Para solucionar o problema, o aluno necessita saber a definição de perímetro. Observando atentamente a figura, o perímetro do primeiro ao terceiro quadrado, e ele deve estabelecer algum padrão que o norteie a chegar na solução desejada. Sabendo que o perímetro do primeiro quadrado é igual a 4, o do segundo é o valor do anterior mais 6, isto é, 10 centímetros, e o terceiro é igual ao valor do anterior mais 6, ou seja, 16 centímetros. Diante disso, pode-se notar que essa é uma progressão arimética em que o primeiro termo é 4 e a razão é igual a 6. Portanto, para encontrarmos o 100º termo dessa sequência, basta aplicarmos a fórmula do termo geral, onde temos:

$$a_{100} = 4 + (100 - 1) \times 6$$

$$a_{100} = 598.$$

Assim, a resposta é 598.

Segunda solução:

Para chegarem à segunda forma de resolver o problema, os alunos precisam observar que a sequência de retângulos, escrita como altura x base, é da forma:

$$1 \times 1, 2 \times 3, 3 \times 5, ..., n \times (2n - 1).$$

É fácil perceber, em relação a esse problema, que a altura de qualquer retângulo corresponde à sua respectiva posição, por exemplo, o 100° retângulo tem altura 100 cm, já as bases formam uma progressão aritmética em que o primeiro termo é igual a 1 e a razão igual a 2, por consequência, a base do n-ésimo retângulo é:

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1.$$

Logo, o centésimo retângulo tem como base $2 \times 100 - 1 = 199$, e a altura 100 cm, assim é da forma 100×199. Portanto, seu perímetro é $2 \times (100 + 199) = 598 \ \ cm$, que compreende à alternativa D.

2.5.4 Questão 11 do Nível 02 de 2009

Na sequência $9, 16, 13, 10, 7, ...$*, cada termo, a partir do segundo, é a soma de 7 com o algarismo das unidades do termo anterior. Qual é o* 2009 *termo da sequência?*

A) 9
B) 10
C) 11
D) 13
E) 15

Resolução e Comentário:

Inicialmente, o professor deve instigar o aluno a perceber o padrão na sequência. Se o mesmo observar apenas os cinco primeiros termos, é bem provável que chegue à conclusão que a partir do segundo, toda a sequência é uma progressão aritmética de razão -3. Porém, analisando mais alguns termos, podemos perceber que não se trata de uma progressão aritmética. Observando com mais afinco os dados do problema, notamos que a sequência utiliza o raciocínio recursivo, pois para obter o termo seguinte é necessário recorrer ao termo anterior somando 7 ao algarismo das unidades, dessa maneira, temos:

$$\underbrace{9, 16, 13, 10, 7, 14, 11, 8, 15, 12}_{\text{10 termos}}, 9, 16...,$$

a cada 10 termos a sequência se repete. Como $2009 = 200 \times 10 + 9$, segue que 2009 é igual ao 9° termo da sequência, que corresponde a 15. Diante disso, chegamos à conclusão que a alternativa correta é letra E.

2.5.5 Questão 16 do Nível 03 de 2009

Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?

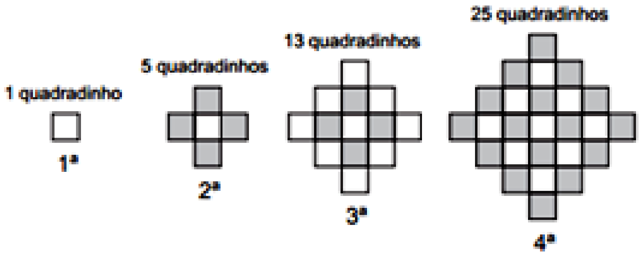


Figura 2.6: Questão 16 do nível 03 de 2009

A) A 30ª
B) A 31ª
C) A 32ª
D) A 33ª
E) A 34ª

Resolução e Comentário:

Analisando as quatro primeiras figuras, verificamos que a diferença no número de quadradinhos entre as figuras 2ª e 1ª, 3ª e 2ª, 4ª e 3ª, respectivamente, obtemos a sequência:

$$(5-1, 13-5, 25-13) = (4, 8, 12). \tag{2.1}$$

A sequência acima é uma progressão aritmética de razão 4. Além disso, vemos que a quantidade de quadradinhos segue também o seguinte padrão expresso na tabela:

Figura	Quadradinhos
1	1
2	1 + 4 = 5
3	1 + 4 + 8 = 13
4	1 + 4 + 8 + 12 = 25

Tabela 2.3: Relação entre a posição da figura e a quantidade de quadradinhos

Assim, temos que o número de quadradinhos da n-ésima figura é igual à soma dos $(n-1)$ termos da sequência (2.1) com 1. Por consequência, para sabermos qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos, aplicamos a desigualdade abaixo, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, com $r = 4$, $a_1 = 4$, $a_n = 4n$.

$$2009 < \frac{(4+4n).(n-1)}{2} + 1$$

$$4018 < 4n - 4 + 4n^2 - 4n + 2$$

$$n^2 > 1005.$$

Sabendo que $n > 31$, precisamos verificar qual valor de n satisfaz as condições propostas no problema. Fazendo os devidos cálculos para $n = 32$ e $n = 33$, obtemos:

$$\frac{(a_1 + a_{31})(n-1)}{2} + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{(4+124).31}{2} + 1 = 1985.$$

Dessa forma, $n = 32$ está descartado, pois 1985 é menor que 2009. Agora vamos verificar para $n = 33$, assim, temos:

$$\frac{(a_1 + a_{32})(n-1)}{2} + 1$$

$$\frac{(4+128)(32)}{2} + 1 = 2113.$$

Diante disso, constatamos que a 33ª, corresponde a primeira figura com mais de 2009 quadradinhos, então, a alternativa correta é a D.

Segunda solução:

O professor pode orientar os alunos a contarem os quadradinhos brancos e sombreados que aparecem em cada figura, observando a relação entre eles. Organizando em uma tabela, verificamos que:

Figura	Quadradinhos Brancos	Quadradinhos Sombreados	Total
1ª	1 = 1^2	0 = 0^2	1^2 + 0^2
2ª	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$2^2 + 1^2$
3ª	$9 = 3^2$	$4 = 2^2$	$3^2 + 2^2$
4ª	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	$4^2 + 3^2$

Tabela 2.4: Relação entre os quadradinhos brancos e sombreados

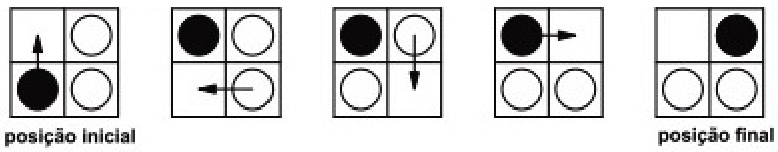
A partir da tabela, concluímos que generalizando a n-ésima figura tem $n^2 + (n-1)^2$ quadradinhos. Já que o objetivo é encontrar o menor inteiro positivo n tal que $n^2 + (n-1)^2 \geq 2009$. Podemos chegar ao valor de n analisando o sinal do polinômio:

$$2n^2 - 2n - 2008. \tag{2.2}$$

Se torna mais rápido obter o valor de n através de aproximações, como segue. Sabendo que $n^2 > (n-1)^2$ para $n \geq 1$, percebemos que $2n^2 > 2009$, pelo polinômio (2.2), assim, $n^2 > 2005$, então $n > 31$. Como $32^2 > (n-1)^2 = 1985$, logo $n = 32$ está excluído, por outro lado, calculando para $n = 33$ temos $33^2 + 32^2 = 2113$. Esse raciocínio nos leva a concluir que a figura que ocupa a 33ª posição é a primeira figura que possui o número de quadradinhos maior que 2009.

2.5.6 Questão 04 do Nível 03 de 2010 - Segunda fase

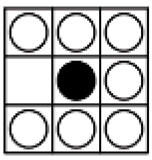
No jogo Arrasta Um usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um movimento consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o Arrasta Um em quatro movimentos em um tabuleiro 2 x 2.



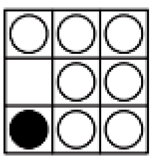
Esta sequência de movimentos pode ser descrita por (↑, ←,↓,→).

Figura 2.7: Questão 04 do nível 03 de 2010 - segunda fase

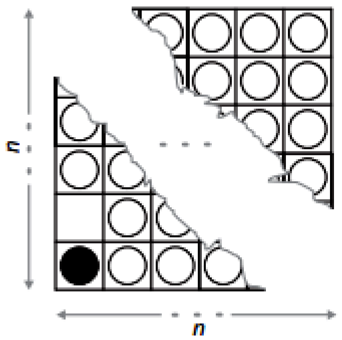
a) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em seis movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



b) Descreva como terminar o *Arrasta Um* em dez movimentos no tabuleiro 3×3 abaixo.



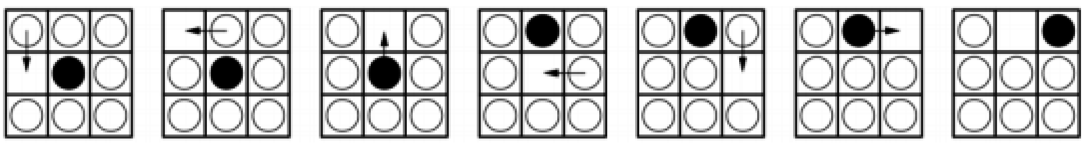
c) Mostre que em um tabuleiro $n \times n$, como na figura, é possível terminar o *Arrasta Um* em $6n-8$ movimentos.



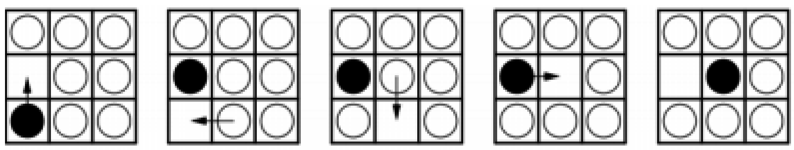
Resolução e Comentário:

A resolução do item c desta questão mostra o quanto a recursão é útil e pode ser utilizada para facilitar a resolução do problema. A primeira resolução do item c não utiliza recursão, a mesma foi obtida no site da OBMEP. Abaixo, segue a solução tradicional dos três itens, em seguida, mostramos a solução da alternativa c por recursão baseado na dissertação de Theodorovski [15].

a) A figura expressa abaixo mostra que a sequência constituída por seis movimentos termina o jogo a partir da posição inicial dada.

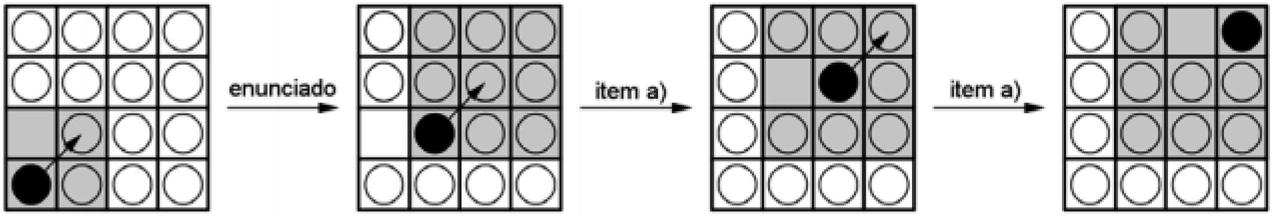


b) A figura abaixo demonstra que a sequência composta de quatro movimentos transforma a posição inicial dada na posição inicial do item a), a partir da qual é possível terminar o jogo em seis movimentos.



Assim, podemos terminar o jogo num total de 4 + 6 = 10 movimentos.

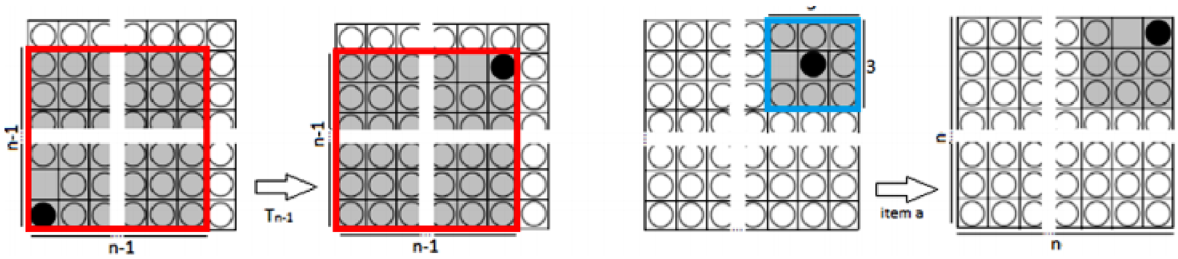
c) A ideia é fazer a peça preta se mover ao longo da diagonal do tabuleiro. Isso pode ser feito uma casa de cada vez utilizando primeiro os movimentos do exemplo do enunciado seguidos da repetição dos movimentos do item a). Ilustramos isso abaixo em um tabuleiro 4 x 4.



Em geral, em um tabuleiro $n \times n$ a peça preta vai subir $n-1$ casas na diagonal; pelo método indicado, pode-se subir a primeira delas em 4 movimentos e cada uma das $n-2$ restantes em 6 movimentos cada uma. Logo, pode-se acabar o jogo em $4+6(n-2) = 6n-8$ movimentos.

Solução da alternativa c por recorrência:

Sendo t_n o número de movimentos necessário para resolver o jogo Arrasta Um, em um tabuleiro $n \times n$, iniciando com a peça preta no canto inferior esquerdo e a casa adjacente superior vazia. Para mover o círculo de cor preta no canto superior direito do tabuleiro $n \times n$ são necessários t_{n-1} movimentos em um tabuleiro $(n-1) \times (n-1)$ adicionado à 6 movimentos referentes ao item a, como podemos ver abaixo:



A relação de recorrência obtida para o problema é:

$$t_2 = 4$$

$$t_n = t_{n-1} + 6, n > 2.$$

Expandido os termos da recorrência, temos:

$$t_3 = t_2 + 6$$

$$t_4 = t_3 + 6$$

$$t_5 = t_4 + 6$$

$$\vdots$$

$$t_n = t_{n-1} + 6.$$

Adicionando membro a membro, obtemos:

$$t_3 + t_4 + t_5 + \cdots + t_{n-1} + t_n = t_2 + 6 + t_3 + 6 + \cdots + t_{n-1} + 6.$$

Subtraindo $t_3 + t_4 + t_5 + \cdots + t_{n-1}$ em ambos os membros da equação acima e reescrevendo as $n-2$ parcelas iguais a 6, obtemos:

$$t_n = t_2 + 6(n-2).$$

Substituindo $t_2 = 4$ na equação acima, obtemos que $t_n = 4 + 6(n-2) = 6n - 8$.

Portanto, é possível terminar o Arrasta Um em $6n - 8$ movimentos.

2.5.7 Questão 14 do Nível 02 de 2013

No primeiro estágio de um jogo, Pedro escreve o número 3 em um triângulo e o número 2 em um quadrado. Em cada estágio seguinte, Pedro escreve no triângulo a soma dos números do estágio anterior e no quadrado a diferença entre o maior e o menor desses números. Qual é o número escrito no triângulo do 56° estágio?

Figura 2.8: Questão 14 do nível 02 de 2013

A) 3 x 2^{26}
B) 5 x 2^{28}
C) 5 x 2^{56}
D) 3 x 2^{28}
E) 5 x 2^{27}

Resolução e Comentário:

É importante que o professor oriente os alunos a organizarem os dados do problema em uma tabela, pois fica mais perceptível o padrão estabelecido nos estágios. Apresentando alguns deles, tem-se:

Estágio	Triângulo	Quadrado
1	3	2
2	5	1
3	$6 = 3 \times 2$	4
4	$10 = 5 \times 2$	2
5	$12 = 3 \times 2^2$	8
6	$20 = 5 \times 2^2$	4
7	$24 = 3 \times 2^3$	16
8	$40 = 5 \times 2^3$	8

Tabela 2.5: Padrão estabelecido nos estágios

Note que há um padrão na coluna dos triângulos, os estágios de posição par, que é da forma $2k$, formam a sequência

$$(5, 10, 20, 40, ...).$$

A sequência representa uma progressão geométrica, vimos no Capítulo 1 a definição da mesma por recursão, para saber o número que aparece no 56° triângulo, utilizamos a fórmula do termo geral da progressão geométrica, em que $n = \frac{56}{2}$, $q = 2$ e $a_1 = 5$, então:

$$a_n = a_1.q^{n-1} = 5 \times 2^{28-1} = 5 \times 2^{27}.$$

Logo, a alternativa correta é a letra E.

2.5.8 Questão 12 do Nível 02 de 2014

Começando com um quadrado de 1 cm de lado, formamos uma sequência de figuras, como na ilustração. Cada figura, a partir da segunda, é formada unindo-se três cópias da anterior. Os contornos destacados em vermelho das quatro primeiras figuras medem, respectivamente, 4 cm, 8 cm, 20 cm e 56 cm. Quanto mede o contorno da Figura 6?

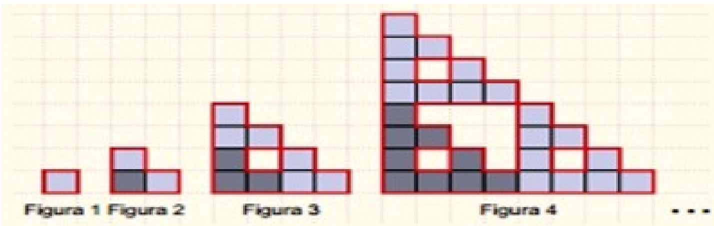


Figura 2.9: Questão 12 do nível 02 de 2014

A) 88 cm
B) 164 cm

C) 172 cm
D) 488 cm
E) 492 cm

Resolução e Comentário:

A partir da observação, os alunos devem ser motivados a constatarem o padrão estabelecido entre as figuras, chegando assim à conclusão que existe, de fato, um processo recursivo o qual pode ser utilizado para resolver o problema, pois cada figura é constituída por 3 cópias de uma figura anterior, e estas, estão posicionadas de forma a colocar em contato apenas dois pares de quadradinhos das cópias das figuras. Logo, o comprimento do contorno da nova figura, o qual denominamos de C_n, é igual a 3 vezes a medida do contorno da anterior, a qual chamamos de C_{n-1}, menos 4 cm (referente aos lados em contato). Sendo assim, podemos expressar pela relação de recorrência:

$$C_1 = 4$$

$$C_n = 3C_{n-1} - 4.$$

Organizando os dados em uma tabela, segue que:

Figura	Contorno (cm)
1	4
2	3 x 4 - 4 = 8
3	3 x 8 - 4 = 20
4	3 x 20 - 4 = 56
5	3 x 56 - 4 = 164
6	3 x 164 - 4 = 488

Tabela 2.6: Medida do contorno de cada figura

Portanto, a medida do contorno da figura é 488 cm, logo a resposta é a alternativa D.

Capítulo 3

Atividades Aplicadas em Sala de Aula

3.1 Introdução

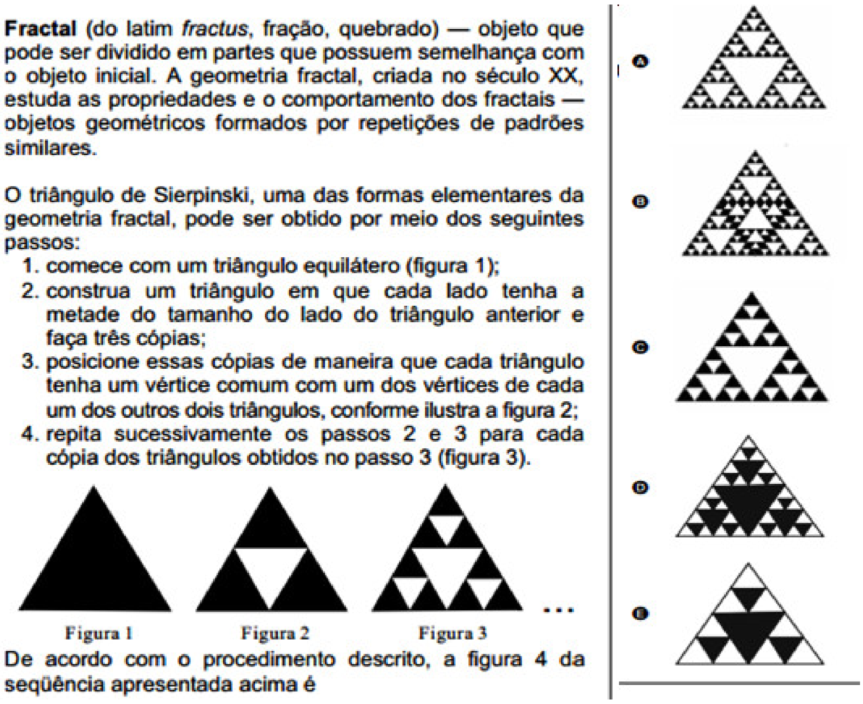
Neste capítulo, mostramos algumas atividades que envolvem o raciocínio recursivo e foram aplicadas em uma turma de 3° ano do ensino médio da Escola Estadual Professora Maria Queiroz, localizada no bairro Felipe Camarão da cidade de Natal-RN. As atividades foram desenvolvidas no dia 03 de novembro de 2014, a escolha desse dia foi motivada pela aproximação com os dias de aplicação do ENEM,isto é, dias 08 e 09 de novembro de 2014.

A turma possuía 21 alunos que frequentavam as aulas regularmente, porém no dia da aplicação das atividades estavam presentes 15 alunos, sendo 8 meninas e 7 meninos, com faixa etária entre 17 e 18 anos.

Para a realização das atividades foram utilizados 3 aulas seguidas de 50 minutos, das 13h00min às 15h30min. Os alunos foram divididos em 3 grupos com 5 componentes cada.

3.2 Atividade- Conjunto de Sierpinski

Nesta seção, apresentamos como foi aplicada a atividade referente ao conjunto de Sierpinski. No primeiro momento, com os alunos em grupos, foi entregue a cada componente uma folha contendo as atividades que foram realizadas no dia. Iniciamos lendo a questão do ENEM 2008 sobre o triângulo de Sierpinski:



Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais — objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

Figura 1 Figura 2 Figura 3 ...

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da seqüência apresentada acima é

A

B

C

D

E

Figura 3.1: Questão do ENEM-2008

Em seguida, os alunos passaram a dialogar em seus respectivos grupos em prol de chegarem a uma conclusão definitiva à respeito da resolução da questão do ENEM 2008, como mostra a Figura (3.2).

Figura 3.2: Alunos dialogando em grupo

Ao término do tempo de reflexões, os três grupos apresentaram corretamente a resposta da questão que é a alternativa C. Ao fazermos uma análise das resoluções apresentadas por todos, percebemos que nas justificativas desenvolvidas os mesmos demonstraram categoricamente que fizeram uso do raciocínio recursivo mesmo que de forma intuitiva.

Posteriormente, ainda baseado na questão do ENEM 2008, foi solicitado que os alunos observassem as áreas das regiões escuras das figuras e construíssem uma tabela contendo suas respectivas áreas em função das anteriores. Um aluno logo percebeu que a área da região escura correspondente à Figura 2 era 3/4 da figura anterior, no entanto, de modo geral, os estudantes tiveram dificuldades em perceber que a área da região escura da Figura 3 correspondia a 3/4 da área da Figura 2, depois da mediação do professor todos se convenceram e chegaram à conclusão que a área das regiões escuras (a_n) poderiam ser representadas pela equação de recorrência:

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n. \tag{3.1}$$

Para resolver (3.1) foi utilizado o método de resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem conforme vimos no Capítulo 1.

Solução. Temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= \frac{3}{4}a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{4}a_2 \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{3}{4}a_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí multiplicando os membros das equações acima, obtemos:

$$a_1.a_2.a_3 \cdots a_n = 1.\frac{3}{4}a_1.\frac{3}{4}a_2 \cdots \frac{3}{4}a_{n-1}.$$

$$\Longrightarrow a_n = 1.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Depois da resolução, a professora instigou os alunos a perceberem que a_1, a_2 e a_3, nessa ordem, estão em progressão geométrica e que a razão é $\frac{3}{4}$. Entretanto, dos 15 alunos presentes, apenas 3 alunos não tiveram dificuldades na resolução da recorrência linear acima. Depois que a professora fez uma explicação mais detalhada, percebeu-se que todos os alunos demonstraram que compreenderam a resolução.

Figura 3.3: Professora instigando os alunos

3.3 Atividade- Torre de Hanói

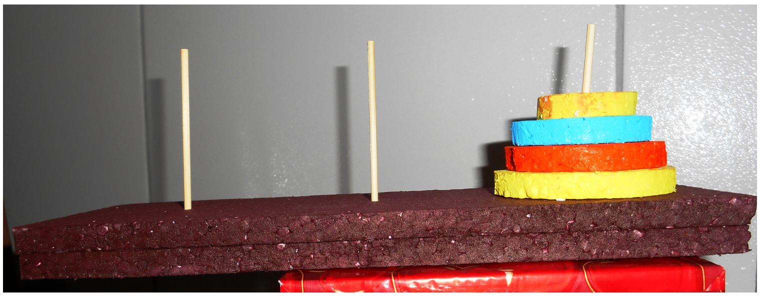


Figura 3.4: Torre de Hanói

A torre de Hanói, também conhecida como quebra-cabeça do fim do mundo, assim como torre de bramanismo, foi inventada e comercializada como brinquedo em 1883, pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891). Segundo o próprio Edouard, este jogo era muito popular no Japão e na China. Sua inspiração surgiu por uma lenda Hindu que falava de um templo em uma cidade da Índia onde existiam 3 torres sagradas do bramanismo. De lá para cá, muita coisa foi escrita e pesquisada sobre esse jogo lúdico que estimula a criatividade, memória, a capacidade de planejamento e solução de problemas por meio de técnicas de estratégia. Seu objetivo se constitui em transferir os n discos de uma haste para outra vazia, de forma que os discos de diâmetro maiores não fiquem sobrepostos aos de diâmetros menores.

No início das atividades, foi entregue para cada grupo um exemplar da torre, em seguida foi explicado o que era e qual o objetivo do jogo. Depois, os estudantes manusearam e brincaram com os exemplares entregues pela professora, tentando passar todos os 4 discos de uma haste para a outra, como mostram as Figuras (3.5) e (3.6).

Figura 3.5: Observação da Torre de Hanói

Figura 3.6: Jogando com a Torre de Hanói

Posteriormente, solicitamos que os alunos construíssem uma tabela organizada de modo que na primeira coluna fosse exposto a quantidade de discos, e na segunda o número mínimo de movimentos necessários para transferi-los à outra haste.

Os alunos ficaram entusiasmados para contarem a quantidade mínima de movimentos e cada componente do grupo, colaborava na realização da atividade. Todos os grupos construíram uma tabela do tipo:

discos	movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15

Tabela 3.1: Quantidade de movimentos de acordo com o número de discos

Na etapa posterior da atividade, fizemos o seguinte questionamento: Qual é a relação de recorrência que associa o número mínimo de movimentos para n discos com o número mínimo de movimentos para os $(n-1)$ discos? De início, os grupos tiveram bastante dificuldade, entretanto, a partir do momento que mediamos, auxiliando-os de forma moderada, solicitando sempre que os mesmos observassem atentamente quantidade de movimentos em relação a casos em que a quantidade de discos sejam menores, os estudantes passaram a compreender melhor as relações chegando assim na resolução do problema, essa maneira do professor proceder está alinhada com o pensamento de George Polya (1978):

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (POLYA, 1978, p. 17).

Para resolvermos o problema com n discos, introduzimos as estratégias de resolução de problemas estabelecidas por George Polya, que nos orienta a compreender o problema, estabelecer um plano de ação, executar o plano de ação e examinar a solução obtida para verificar se satisfaz o problema, além de observar questões particulares, menores, para utilizar suas informações em prol da resolução de casos gerais.

Seguindo as ideias de Polya, os grupos mediados pela professora, foram incentivados a dividirem o problema em casos menores, para em seguida, generalizarem para n discos. Foi sugerido que observassem atentamente os movimentos mínimos necessários para transportar uma torre com três discos de uma haste para outra, cumprindo assim a regra do jogo. Ao observarem os três primeiros movimentos, quando o jogo tem três discos, os alunos perceberam que é o mesmo procedimento para resolver quando se tem apenas dois discos na torre. Como podemos verificar na Figura (3.3).

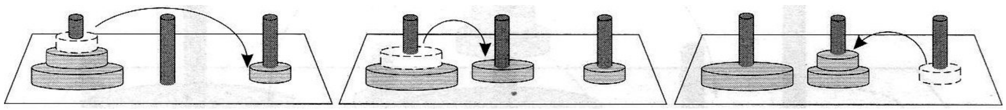


Figura 3.7: Os três primeiros movimentos

Depois, os estudantes observaram os outros movimentos, em que o próximo se consistia em transferir o disco maior para o pino sem discos, como vemos na figura (3.4).

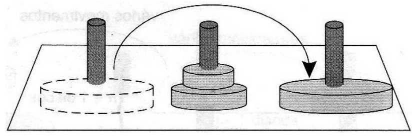


Figura 3.8: Movimento do disco maior para o pino sem discos

Posteriormente, os mesmos verificaram os três últimos movimentos, como podemos constatar na figura (3.5):

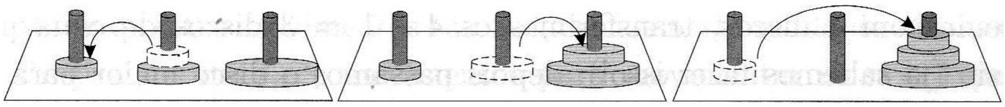


Figura 3.9: Os três últimos movimentos

Nos três últimos movimentos foi realizado o mesmo procedimento que o caso n = 2, assim, a quantidade mínima de movimentos é o dobro da quantidade de movimento para o caso n= 2 adicionado de uma unidade, ou seja, chamando x_3 da quantidade mínima de movimentos para n=3 e x_2 a quantidade de movimento para o caso n=2 obtemos que x_3 é igual a $2 \times 2 + 1.$ Ao chegar a essa conclusão, os alunos ficaram empolgados em verificar se para n = 4 seguia o mesmo raciocínio, e constataram que era o dobro da quantidade de movimentos do caso 3 adicionado de uma unidade, ou seja, $x_4 = 2 \times 3 + 1$, a partir destas etapas, os alunos estavam prontos para conseguirem desenvolver os cálculos necessários para resolver o problema geral. Em seguida, os estudantes foram estimulados a imaginarem uma torre com n discos e que sabiam resolver o problema para n-1 discos, assim, os mesmos foram acompanhando o raciocínio: chamando x_{n-1} (movimentos mínimos para mover $n - 1$ discos), podemos transferir os $n - 1$ discos de cima para uma haste vazia com x_{n-1} movimentos, como está disposto na figura (3.10):

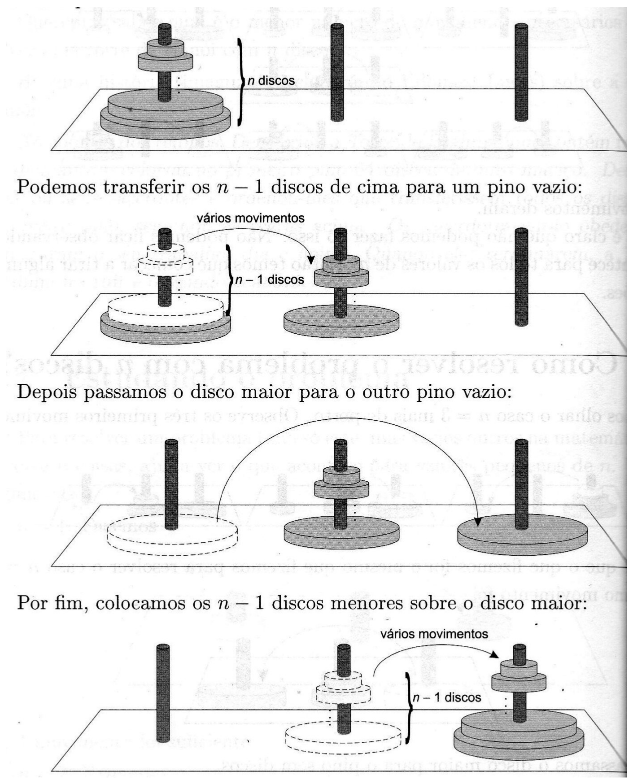


Figura 3.10: Movimentos de uma torre com n discos

Em seguida, colocamos o disco maior na outra haste vazia, finalizamos passando os n-1 discos menores para a haste que tem o disco maior, utilizando-se assim de mais x_{n-1} movimentos, portanto, no total foram $x_{n-1} + 1 + x_{n-1} = 2x_{n-1} + 1$, isto é, $x_n = 2x_{n-1} + 1$, chegando a essa relação de recorrência.

3.4 Atividade - Questões da OBMEP e ENEM

Nesta seção, apresentamos e resolvemos três questões feitas em sala de aula, as duas primeiras oriundas da OBMEP-2012 e a terceira do ENEM 2013, em que utilizam-se o raciocínio recursivo, além de discutir as dificuldades apresentadas pelos alunos ao resolvê-las.

01. (OBMEP - 2012) *Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, segundo o padrão indicado na figura. Quantos palitos ela vai usar para construir o quinto triângulo da sequência?*

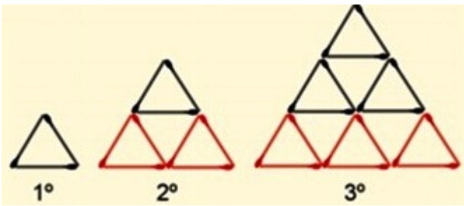


Figura 3.11: OBMEP - 2012

A) 36
B) 39
C) 42
D) 45
E) 48

Solução:

Chamando de x_n a quantidade de palitos necessários para a construção do n-ésimo triângulo e listando os termos, temos:

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 3.2 + x_1$$

$$x_3 = 3.3 + x_2$$

$$\vdots$$

$$x_n = 3.n + x_{n-1}.$$

Somando as equações acima membro a membro obtemos:

$$x_n = 3 + 3.2 + 3.3 + ... + 3n \Longrightarrow$$

$$\implies x_n = 3(1 + 2 + ... + n).$$

Chegamos à conclusão que:

$$x_n = \frac{3n(n+1)}{2}. \tag{3.2}$$

Assim, para construir o quinto triângulo da sequência basta substituir n por 5 em (3.2), obtemos que $x_5 = 45$. Dessa forma, a resposta correta é a alternativa D.

02. (OBMEP - 2012)*Renata montou uma sequência de triângulos com palitos de fósforo, seguindo o padrão indicado na figura. Um desses triângulos foi construído com 135 palitos de fósforo. Quantos palitos formam o lado desse triângulo?*

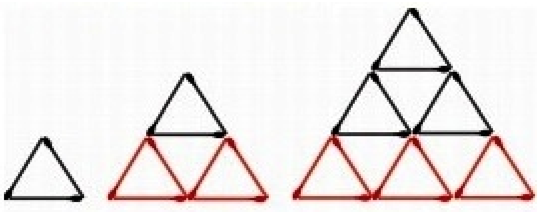


Figura 3.12: OBMEP - 2012- sequência de triângulos

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

Solução:

Segue o mesmo raciocínio de resolução do primeiro problema, ou seja, substituindo x_n por 135 em (3.2) obtemos:

$$135 = \frac{3.n(n+1)}{2}$$
$$270 = 3n(n+1)$$
$$270 + 3n^2 + 3n = 0.$$

Resolvendo a equação, temos $n = 9$. Diante disto, concluímos que a resposta do problema é a alternativa D.

03. (ENEM - 2013) *O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividades magnéticas do Sol têm sido registrados.*

Disponível em: `http://g1.globo.com`. *Acesso em: 27 fev. 2013.*

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número:

A) 32 *B) 34* *C)33* *D)35* *E) 31*

Essa questão pode ser resolvida por meio de uma progressão aritmética cuja solução se encontra nesta seção, página 59.

Comentários sobre a experiência em sala de aula:

Ao resolver o primeiro problema 20% dos alunos presentes fizeram a construção do quinto triângulo da sequência seguindo o padrão, e em seguida, apenas contaram os palitos.

Constatamos também que 60% da turma resolveu o problema utilizando o raciocínio recursivo, percebendo logo a relação entre a posição do triângulo na sequência e a quantidade de palitos que formam o lado do mesmo. Quando chegou em $x_n = 3(1 + 2 + ... + n)$, alguns alunos tiveram dificuldades, pois não lembravam da fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética, além de que não lembravam de como chegar até a mesma. Em seguida, com o auxílio do professor, os estudantes conseguiram encontrar a solução do problema. Os outros 20% apresentaram muitas dificuldades, pois informaram que nunca estudaram progressões, no entanto, os mesmos perceberam o padrão na sequência de triângulos, porém não conseguiram resolvê-lo.

Já em relação ao segundo problema, todos os alunos constataram que tinha os mesmos dados da questão anterior isto é, havia semelhanças que os ajudariam a compreendê-lo com mais propriedade, essa metodologia está de acordo com o pensamento de George Polya [11], pois, segundo o mesmo, para ajudar o educando a compreender o problema, o mesmo deve observar se existe outro semelhante ao que está analisando, para que possa se apropriar das técnicas que lhe ajudam a interpretar, e assim, chegar à solução almejada com mais facilidade.

Continuando no problema já citado, o objetivo era encontrar a posição do triângulo construído com 135 palitos de fósforo. Os alunos utilizaram a solução oriunda da questão anterior e substituíram x_n por 135, chegando a:

$$x_n = 3\frac{n(n+1)}{2}$$

$$135 = 3\frac{n(n+1}{2}$$
$$270 = 3n(n+1)$$
$$270 - 3n^2 - 3n = 0.$$

Solucionando a equação do segundo grau, chegamos à conclusão que n = 9. Como a quantidade de palitos que formam o lado do triângulo é o mesmo que a sua posição, a solução do problema é 9 palitos, ou seja, alternativa D.

Na terceira questão , todos os alunos observaram que a mesma apresentava o raciocínio recursivo, onde, o segundo ciclo iniciava 11 anos após o primeiro, o terceiro 11 anos após o segundo e assim sucessivamente. Ou seja, os mesmos perceberam que se tratava de uma progressão aritmética, em que o primeiro termo é 1755, o termo geral é 2101 e a razão é 11, dessa forma, temos:

$$a_1 = 1755, a_n = 2101, r = 11.$$

Aplicando a fórmula do termo geral da progressão aritmética, obtemos:

$$2101 = 1755 + (n-1).11$$
$$2101 - 1755 = 11n - 11$$
$$346 + 11 = 11n$$
$$\Longrightarrow n = \frac{357}{11} \ \ (aproximadamente \ \ 32,45).$$

Como o resultado de n foi um valor aproximado, cerca de 40% da turma errou a questão, pois arredondaram para 33, marcando assim a alternativa C o que é um erro, já que o trigésimo terceiro ciclo inicia no ano 2107, então, 2101 estará no trigésimo segundo ciclo que se inicia em 2096, como verificamos:

$$a_{32} = 1755 + (32-1).11 = 2096$$
$$a_{33} = a_{32} + 11 = 2107.$$

Dessa forma, a alternativa correta é a letra A, isto é, no trigésimo segundo ciclo.

Considerações Finais

É notório que a recursão se constitui como uma alternativa para o ensino de matemática, pois é uma ferramenta importante na compreensão de padrões e no desenvolvimento da capacidade de estabelecer relações, os quais são pré-requisitos essenciais para o desenvolvimento do raciocínio lógico.

O ENEM e a OBMEP tem explorado nos seus exames problemas que podem ser resolvidos com o auxílio do raciocínio recursivo, mostrando assim a importância do mesmo. Porém, os conteúdos que estes exames nacionais deram mais ênfase foram as progressões aritméticas, haja vista que no ensino médio a recursão é trabalhada intuitivamente nas progressões, no entanto, a maioria dos livros didáticos não deixa explícito o processo recursivo ao trabalhar estes conteúdos, não lhe dando assim o merecido destaque.

Acreditamos que o raciocínio recursivo deve ser mais abordado no ensino básico, pois o mesmo possibilita que os alunos, a partir de regularidades, estabeleçam regras favorecendo o pensamento lógico e a aprendizagem significativa, formando indivíduos reflexivos, críticos e autônomos. Por isso, o professor deve ser estimulado a trabalhar com questões da OBMEP e do ENEM, pois as mesmas, principalmente a primeira, dão a oportunidade de que se trabalhem com padrões, os quais podem ser descobertos e analisados pelo educando propiciando que modelos matemáticos sejam descritos para chegar na solução almejada.

Nesse trabalho, foi dado ênfase nas recorrências lineares de primeira ordem, pelo fato delas poderem ser utilizadas na definição de vários conteúdos do ensino básico, já que a finalidade desta dissertação é ser uma fonte que possibilite ao professor relembrar a recursão e consequentemente motivá-lo a introduzir vários conteúdos por meio dessa ferramenta tão importante. O método de resolução de equações de recorrências adotado aqui é de expandir, conjecturar e verificar a validade, pois o mesmo é mais acessível à compreensão de um aluno do ensino médio. Como o objetivo do ensino de matemática é formar alunos críticos e reflexivos, torna-se imprescindível que o professor não forneça fórmulas prontas e sim mostre como chegar até elas.

Na aplicação das atividades, levamos as torres de Hanói já construídas, entretanto, uma atividade prática bastante interessante é a confecção das mesmas pelo professor juntamente com os alunos, por meio de isopor e palito de churrasco, os quais foram materiais que constituíram as torres utilizadas na escola. É válido ressaltar que a torre de Hanói é um material concreto que possibilita a compreensão da recursão, pois para alcançar o objetivo do jogo, o aluno utiliza o raciocínio recursivo e chega à recorrência linear de primeira ordem. Mesmo sendo alunos do ensino médio, os quais têm uma maior resistência a aulas ministradas em uma perspectiva lúdica, percebemos que os discentes ficaram motivados em realizar a atividade com o jogo.

Esperamos que este trabalho possa ser uma fonte que os professores do ensino médio utilizem como objeto de estudos e pesquisas no intuito de enriquecer suas aulas promovendo uma melhor aprendizagem matemática, culminando em jovens mais preparados para enfrentar os desafios do por vir.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA(INEP) *Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) - Relatório Pedagógico 2009 - 2010*. Disponível em: `http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/relatorios_pedagogicos/relatorio_pedagogico_enem_2009_2010.pdf`. Acesso em: 16 de fev. 2015.

[2] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA(INEP)*Provas e Gabaritos*, Disponível em: `http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-anteriores/provas-e-gabaritos`. Acesso em: 01 de nov. 2014.

[3] GERSTING, Judith L. *Fundamentos matemáticos para a ciência da computação : um tratamento moderno de matemática discreta*, 5.ed. - Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[4] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética.*, 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[5] LIMA, Elon Lages. *Análise Real - volume 1*, 8.ed. - Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[6] LIMA, Elon Lages et. al. *A matemática do ensino médio - volume 2*, 6.ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas *Provas e Soluções*. Disponível em: `http://www.obmep.org.br/regulamento.html`. Acesso em: 16 de fev. 2015.

[8] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas *Regulamento*. Disponível em: `http://www.obmep.org.br/provas.htm`. Acesso em: 02 de out. 2014.

[9] OLIVEIRA, Carlo Alexandre Santana. *Recorrência Matemática Aplicada à Resolução de Problemas no Ensino Médio*.2014. 57 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT). Programa Nacional de Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, Macapá, 2014.

[10] PACHECO, Adriano Mendes. Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência. 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT). Programa

Nacional de Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2013.

[11] POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.

[12] *Por que estudar os inteiros?*. Disponível em: http://mtm.ufsc.br/ensinomedio/jul-09/aritmetica.pdf. Acesso em: 04 de out. 2014.

[13] ROSEN, Kenneth H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*, 6.ed. - São Paulo: McGraw Hill, 2009.

[14] SIMÕES,Diêgo Ayllo da Silva. *Recorrências: Conceitos e Aplicações*.2014. 76 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT). Programa Nacional de Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal da Paraíba - UFPB, João Pessoa, 2014.

[15] THEODOROVSKI, Ronaldo. Padrões e o trabalho com sequências recursivas: uma abordagem no desenvolvimento do pensamento algébrico. 2014. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Estadual de Ponta Grossa - Paraná, 2014.