Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Fábio Alvaro Dantas

Explorando a lógica dentro da calculadora

Natal, 2015

Fábio Alvaro Dantas

Explorando a lógica dentro da calculadora

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Álgebra Booleana.

Orientador:
Prof. Dr. Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva

Natal, 2015

Fábio Alvaro Dantas

Explorando a matemática dentro da calculadora

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Álgebra Booleana.

Aprovado em: / /

Banca Examinadora

Prof. Dr. Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva.
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador

Prof. Dr. Marcelo Pedro dos Santos.
Departamento de Matemática - UFRPE

Prof. Dr. Débora Borges Ferreira.
Departamento de Matemática - UFRN

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Dantas, Fábio Alvaro.
Explorando a matemática dentro da calculadora / Fábio Alvaro Dantas. - Natal, 2015.
56 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Roberto Ferreira dos Santos Silva.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Álgebra booleana – Dissertação. 2. Ensino de lógica – Dissertação. 3. Ensino médio – Dissertação. 4. Calculadora – Dissertação. I. Silva, Paulo Roberto Ferreira dos Santos. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 512.563

Dedico este trabalho a minha família e amigos que tanto me ajudam a conseguir meus objetivos.

Agradecimentos

Agradeço a SBM por ter criado o PROFMAT, a UFRN por disponibilizar as turmas, a CAPES pelo auxílio financeiro, aos professores do curso e em especial ao meu orientador, Professor Paulo Roberto. Há também outras pessoas que com certeza são corresponsáveis por toda essa etapa. Entre elas começo destacando os colegas da turma Ana, Márcio, Rodrigo, Wendell, Rogério, Igor, Valdemiro, Emanuel, Fábio, Fernando, Hárrison, Adriano, Marthonni e Emerson. Ainda há o participante honorário da turma Alisson, marido da colega Ana. Por fim, agradeço minha família que aturou as horas de estudo e mau humor, nesse ponto ninguém foi mais tolerante que minha amada esposa Rosiane. A todos desejo tudo de melhor sempre em suas vidas.

Resumo

A presente dissertação tem por objetivo sugerir ao professor de matemática do ensino médio uma forma de ensinar lógica aos estudantes. Para isso utiliza-se uma sequência didática que explora os conceitos matemáticos que estão envolvidos no funcionamento da calculadora, um dos símbolos maiores da matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra Booleana, Ensino de lógica, Ensino Médio, Calculadora.

Abstract

This dissertation aims to suggest the teacher of high school mathematics a way of teaching logic to students. For this uses up a teaching sequence that explores the mathematical concepts that are involved in the operation of a calculator one of the greatest symbols of mathematics.

KEYWORDS: Boolean Algebra, Logic education, High scholl, Calculator.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Atualmente há diversos fatores que dispersam a atenção dos alunos e a escola tradicional, com seus métodos desatualizados, não consegue gerar interesse no educando. Essa nova geração de estudantes tem acesso à informação de maneira quase instantânea através de vários dispositivos como os celulares, tablets, notebooks e outros. Diante dessa perspectiva, cabe ao docente orientar esse processo de aquisição do conhecimento. Segundo Canavarro[1], os professores funcionam como mediadores entre o currículo e os alunos, no sentido de que é através dos professores que os alunos acedem ao currículo pré-definido.

Portanto o docente deve mediar esse processo e guiar/despertar a curiosidade e interesse do estudante em algo produtivo. No caso dos professores de matemática há a possibilidade de explorar um dos maiores símbolos da própria disciplina, a calculadora, com vistas ao seu funcionamento. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) [2], uma das finalidades do ensino de matemática para os estudantes é aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas.

Há diversos conceitos matemáticos envolvidos no funcionamento da calculadora, destacando-se nesse rol a lógica matemática. Roger Sperry, prêmio Nobel de Medicina, no final dos anos setenta anunciou em seus estudos que o hemisfério esquerdo do cérebro possui dominância sobre as funções verbais, lógicas, sequenciais, numéricas, lineares e analíticas do ser humano[1]. Estudar lógica estimularia esse hemisfério do cérebro e contribuiria ainda mais para o desenvolvimento do aluno. No âmbito da matemática há outros benefícios, como uma melhora no nível de abstração, maior apropriação da linguagem simbólica envolvida, uma compreensão mais clara dos encadea-

[1] Para maiores informações sobre o tema é sugerida a leitura de [3]

mentos lógicos das demonstrações e de forma geral desenvolve o raciocínio dedutivo. Novamente observando o que dizem os PCNEM [2]:

> *"A Matemática do Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas".*

Tendo em vista o que foi exposto até agora, a presente dissertação tem o objetivo de oferecer ao professor de matemática uma proposta de ensino, no formato de sequência didática, em que o aluno será introduzido à lógica, mais especificamente à álgebra Booleana, visando o desenvolvimento das habilidades descritas anteriormente. Para atingir o objetivo do trabalho, cada capítulo da dissertação tem um papel específico.

O primeiro capítulo reflete sobre a lógica proposicional e sua relação com a linguagem dos conjuntos. Esse capítulo é focado no professor de modo que ele tenha uma introdução ao tema e possa posteriormente buscar aprofundar seus conhecimentos em outras fontes.

Já o segundo capítulo trata de uma abordagem sobre a álgebra Booleana visando dar fundamentação teórica ao professor. O estudo da álgebra Booleana se torna importante pois os circuitos digitais que estão miniaturizados e presentes nas calculadoras são aplicações diretas dessa álgebra. Além disso, a álgebra de Boole operacionaliza a lógica proposicional e também apresenta alguns resultados necessários para fundamentar os métodos utilizados nas atividades, como por exemplo, os métodos de construção de circuitos lógicos.

O último capítulo apresenta a proposta de atividade em si e fecha a dissertação com as considerações finais sobre o tema e as expectativas sobre a continuidade do trabalho.

Capítulo 1

Lógica Proposicional

A lógica proposicional é um estudo que tem por objetivo determinar quais operações de raciocínio são válidas e quais não o são. Os entes fundamentais nessa análise são chamados de **proposições**. As proposições são frases afirmativas declarativas que contém palavras e/ou símbolos matemáticos e obedecem às três leis do pensamento. Há diversas formulações para esses leis, mas vamos adotar a que encontramos em Copi [4]

- *O Princípio da Identidade* afirma que se qualquer proposição é verdadeira, então ela é verdadeira.

- *O Princípio da Contradição* afirma que nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

- *O Princípio do Terceiro Excluído* afirma que um enunciado ou é verdadeiro, ou é falso.

São exemplos de proposições: “A Rússia é o maior país da Ásia", “O ouro é o metal mais valioso". e “2+3=5". Não são proposições: “Quanto custa esse picolé?"(frase interrogativa), “Esta frase é falsa"(incompatível simultaneamente com o Princípio do Terceiro Excluído e o da Contradição). Para realizarmos as operações de raciocínio mencionadas no primeiro parágrafo existe a necessidade de definirmos o conceito de tabela verdade e também alguns operadores lógicos.

1.1 Tabela Verdade

Dada uma proposição qualquer, P, sua *tabela verdade* é uma tabela que contém todos os valores lógicos possíveis para a proposição. Pelo princípio do terceiro excluído, qualquer proposição P tem apenas dois valores lógicos possíveis, Verdadeiro (V) ou Falso (F). Assim, a tabela verdade para uma proposição P será da forma:

P
F
V

Tabela 1.1: Tabela verdade da proposição P.

1.2 Operações Lógicas

1.2.1 Conjunção

Sejam P e Q proposições quaisquer. Denotaremos a conjunção entre essas proposições por P∧Q e lê-se: “P e Q". Os valores lógicos são definidos na seguinte tabela:

P	Q	P ∧ Q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Tabela 1.2: Conjunção entre as proposições P e Q.

Observe que P ∧ Q só assume o valor lógico V quando as duas proposições P e Q são verdadeiras. Por exemplo, sejam P e Q as proposições: “Maria é alta"e “Maria é loira". A proposição P ∧ Q, “Maria é alta e loira", só é verdadeira se P e Q forem ambas verdadeiras. Outra observação a ser feita é que proposições formadas por outras proposições (exemplo: P ∧ Q) são chamadas **proposições compostas**.

1.2.2 Disjunção

Sejam P e Q proposições quaisquer. Denotaremos a disjunção entre essas proposições por $P \vee Q$ e lê-se: “P ou Q". A palavra **ou** tem significado ambíguo e é utilizada em dois sentidos: o primeiro, o sentido forte ou exclusivo, o **ou** tem o significado de “exatamente um". Por exemplo, quando vamos ao restaurante e vemos o seguinte letreiro “Duas opções de Carne: Frango ou Peixe", o cliente entende que ele pode escolher exatamente uma das opções, mas não as duas. Já o outro sentido do **ou**, o sentido fraco ou inclusivo, pode ser entendido como “pelo menos um". Por exemplo, em um jogo de futebol existem dois tipos de meia entrada: Para idosos ou para professores. Nesse caso, desde que um dos pré-requisitos sejam atendidos, o torcedor pagará a meia entrada. Nada impede que o torcedor seja professor e idoso ao mesmo tempo.

O latim tem duas palavras diferentes para esses sentidos do **ou**, sendo que **aut** expressa o ou exclusivo e **vel** corresponde ao ou inclusivo. Na lógica proposicional é adotado o sentido inclusivo do **ou** e o símbolo $\vee$ é usado em referência a primeira letra da palavra **vel**. Podemos ver na tabela abaixo os valores lógicos de $P \vee Q$.

P	Q	$P \vee Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Tabela 1.3: Disjunção entre as proposições P e Q.

1.2.3 Negação

Seja P uma proposição qualquer. Denotaremos a negação dessa proposição por $\sim P$ e lê-se: “não P". Os valores lógicos da negação são definidos na tabela verdade abaixo:

P	$\sim P$
F	V
V	F

Tabela 1.4: Negação de P.

Note que $\sim F = V$ e $\sim V = F$, ou seja, quando P assume um valor lógico qualquer, ~P assume o outro valor. Tome como exemplo a proposição "O sol é uma estrela", sua negação seria "O sol não é uma estrela". Note que ambas as afirmações não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo (Princípio da contradição) e mais ainda, quando uma afirmação é verdadeira a outra é falsa e vice-versa. Outro ponto importante sobre a negação se refere ao seu uso combinado com outros operadores lógicos. A expressão ~P∧Q poderia ser interpretada de duas formas distintas: (~P)∧Q e ~(P∧Q). Essas duas interpretações tem tabelas verdade diferentes e assim com vistas a brevidade da expressão e para evitar ambiguidades convencionou-se que a negação será aplicada ao enunciado mínimo. Assim, no caso de ~P∧Q a interpretação válida será (~P)∧Q, ou seja, o ~ se aplica ao P e não a expressão mais extensa P∧Q.

1.2.4 Condicional

Sejam P e Q proposições quaisquer. Denotaremos o condicional entre essas proposições por $P \rightarrow Q$ e lê-se: " Se P, então Q"onde os valores lógicos são definidos na tabela abaixo:

P	Q	P → Q
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Tabela 1.5: Condicional entre as proposições P e Q.

Note que $P \rightarrow Q$ só assume o valor lógico F quando as proposições P e Q assumem os valores lógicos V e F respectivamente. Podemos ainda definir o condicional como sendo a negação da conjunção entre P e a negação de Q, ou seja, $\sim (P \wedge \sim Q)$. Mais adiante, no tópico onde se define equivalência lógica, será mostrado o motivo de existir essa outra definição para o condicional.

1.2.5 Bicondicional

Sejam P e Q proposições quaisquer. Denotaremos o bicondicional entre essas proposições por $P \leftrightarrow Q$ e lê-se: " P se e somente se Q". Pode-se alternativamente definir o bicondicional como uma dupla aplicação do conectivo (→) onde os valores lógicos são exibidos na tabela abaixo:

P	Q	P ↔ Q
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Tabela 1.6: Bicondicional entre as proposições P e Q.

A partir desse ponto será adotada uma ordem de aplicação dos operadores lógicos expostos nessa sessão. A ordem citada se baseia na exposta em Hegenberg [5] sendo da maior para a menor prioridade: ~, ∨, ∧, →, ↔. Assim a expressão P∧ ~Q ↔ P deve ser entendida como P∧ (~ Q) ↔ P.

1.3 Tautologia

Definição 1.1 *Uma proposição composta é dita tautológica se para quaiquer valores lógicos das sentenças que a compõe, seu valor lógico é sempre V.*

Exemplo:

P	~P	P ∨ ~ P
F	V	V
F	V	V
V	F	V
V	F	V

Tabela 1.7: Exemplo de tautologia.

1.3.1 Relação de Implicação

É um caso particular do operador condicional (→). Sempre que a condicional entre duas proposições for tautológico usaremos o símbolo (⇒) para denotar essa condicional e a chamaremos de implicação lógica ou implicação material.
Exemplo:

P	Q	$P \vee Q$	$P \Rightarrow (P \vee Q)$
F	F	F	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	V	V

Tabela 1.8: Exemplo de relação de implicação.

1.3.2 Relação de Equivalência

É um caso particular da relação bicondicional ($\leftrightarrow$). Sempre que a bicondicional entre duas proposições resultar em uma tautologia usaremos o símbolo ($\Leftrightarrow$) para denotar essa bicondicional e diremos que as proposições são equivalentes.
Exemplo:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim (P \wedge \sim Q)$	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \sim (P \wedge \sim Q)$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Tabela 1.9: Exemplo de relação de equivalência.

A equivalência ocorre sempre que a tabela verdade de duas proposições forem iguais. Isso significa que se duas proposições apresentarem a mesma tabela verdade elas possuem o mesmo significado, porém denotado de forma diferente. Esse método é utilizado constantemente na matemática para realizar as demonstrações visto que uma demonstração, na maioria das vezes, é uma série de equivalências que mostram a equivalência entre um conjunto de condições.

1.4 Relação entre conjuntos e lógica proposicional

Existe uma relação direta entre a linguagem dos conjuntos e a lógica proposicional. Podemos relacionar uma proposição sobre algo com um conjunto cuja propriedade está descrita pela proposição. Por exemplo, a afirmação "Existem seleções de futebol na América do Sul que foram campeãs de futebol.". É de conhecimento geral que há tais seleções, portanto a proposição é verdadeira. Do ponto de vista dos conjuntos seria equivalente a construir um conjunto P onde os elementos seriam as seleções sulamericanas campeãs de futebol. Esse conjunto P = {Brasil, Argentina, Uruguai} não é vazio e portanto existem seleções com a propriedade citada. Dessa maneira podemos estabelecer uma relação entre a validade de uma afirmação e a existência de um elemento em um conjunto. Podemos ainda fazer outras equivalências como na tabela abaixo.

Lógica	Conjuntos
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$
$\sim$	Complementar
$\rightarrow$	$\subset$
$\leftrightarrow$	$=$

Vamos detalhar como ilustração o caso da equivalência entre $\rightarrow$ e $\subset$. Suponha que existam dois conjuntos A e B onde $A \subset B$ e ainda que A e B estejam contidos em um conjunto universo U. Seja agora um elemento $x \in U$ sobre esse elemento existem as seguintes possibilidades:

$x \in A$	$x \in B$
não	não
não	sim
sim	sim

Assim quando $A \subset B$ só serão válidas as três propriedades descritas na tabela acima e a combinação $x \in A$ e $x \notin B$ não é possível, ou seja, é falsa. Note que essa tabela é equivalente à tabela verdade do condicional entre duas proposições. Veja na tabela abaixo a semelhança entre $\rightarrow$ e $\subset$.

$x \in A$	$x \in B$	$A \subset B$
não	não	sim
não	sim	sim
sim	não	não
sim	sim	sim

A	B	$A \rightarrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Podemos assumir que existe uma equivalência entre $\rightarrow$ e $\subset$, uma vez que eles possuem a mesma tabela verdade. O mesmo método pode ser empregado para verificar as outras equivalências mostradas na primeira tabela dessa sessão.

Sugestões de Exercícios

(1) Sejam as proposições A = Carlos é argentino e B = João é brasileiro. Traduza para a linguagem natural as seguintes proposições simbólicas:

a) $A \vee B$

b) $\sim A \wedge B$

c) $A \rightarrow B$

d) $A \rightarrow \sim B$

e) $\sim A \leftrightarrow B$

f) $\sim A \wedge \sim B$

(2) Dado que o valor lógico das proposições P e Q é V, e de R e S é F, determine o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\sim P \vee \sim Q$

b) $P \vee \sim Q$

c) $\sim P \wedge (Q \rightarrow R)$

d) $\sim P \wedge (\sim Q \rightarrow \sim R)$

e) $R \vee S \rightarrow P \wedge Q$

f) $P \wedge Q \rightarrow R \wedge S$

g) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

h) $(P \vee Q) \vee (S \rightarrow (P \rightarrow R))$

(3) Considerando-se P, Q e R proposições simples, construa as tabelas verdade das seguintes proposições:

a) $(P \vee Q) \to R$

b) $\sim(P \vee Q) \wedge P$

c) $(\sim P \to Q) \vee R$

d) $(\sim P \wedge P) \to (R \leftrightarrow Q)$

e) $(P \wedge Q) \to (R \leftrightarrow Q)$

f) $(\sim P \to Q) \vee (R \to \sim P)$

Capítulo 2

Funções Booleanas

2.1 Álgebra Booleana

Conforme dito na introdução, a álgebra Booleana operacionaliza a lógica proposicional, ou seja, oferece métodos para realizarmos operações entre proposições. Nesse capítulo faremos um estudo desse tema, visto que a literatura em língua portuguesa sobre o mesmo é escassa e de difícil acesso. Para tratar o tema utilizaremos o modelo axiomático seguindo uma linha semelhante à proposta por Garnier[6].

Definição 2.1 *Uma* **Álgebra Booleana** *consiste de um conjunto B munido de três operações. Quais sejam:*

1. *Uma operação binária, $\oplus : B \times B \to B$, denominada soma;*

2. *Uma operação binária, $* : B \times B \to B$, denominada produto;*

3. *Uma operação que age em um único elemento de B, denotada por $\bar{}$, onde para cada elemento $b \in B$, o elemento $\bar{b} \in B$ é chamado de complemento (ou negação) de b.*

Essas operações obedecem ainda aos seguintes axiomas:

- **Axioma 1:** *As operações $\oplus$ e $*$ são* **comutativas**, *ou seja, para todo $a, b \in B$*

$$a \oplus b = b \oplus a \ \ e$$

$$a * b = b * a.$$

- **Axioma 2:** *Existem* **elementos identidade** *em B para cada uma das operações binárias $\oplus$ e $*$. Nos denotaremos esses elementos por* $\mathbf{0}$ *e* $\mathbf{1}$*, respectivamente. Assim, para todo $b \in B$:*

$$b \oplus \mathbf{0} = b \ \ e$$

$$b * \mathbf{1} = b.$$

- **Axioma 3:** *Para todo $b \in B$, existe $\bar{b} \in B$ tal que, $b \oplus \bar{b} = \mathbf{1}$ e $b * \bar{b} = \mathbf{0}$.*

- **Axioma 4:** *A operação $\oplus$ é* **distributiva** *em relação a $*$ e o contrário também é válido, ou seja, para todo $a, b, c \in B$*

$$a \oplus (b * c) = (a \oplus b) * (a \oplus c) \ \ e$$

$$a * (b \oplus c) = (a * b) \oplus (a * c).$$

Denotaremos uma álgebra Booleana por um sêxtupla ordenada. No caso da definição acima, temos a álgebra Booleana $\langle B, \oplus, *, \bar{\ }, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$. Alguns autores, inclusive o Garnier, trazem ainda o axioma da associatividade, mas, como será visto mais adiante, a associatividade pode ser mostrada através dos demais axiomas e portanto não deve ser listada entre eles a fim de obter um conjunto mínimo de axiomas. Vejamos alguns exemplos de álgebras Booleanas.

Exemplo 2.1 *Considere um conjunto $\mathscr{B} = \{0, 1\}$. Defina nesse conjunto as seguintes operações*

$$\begin{array}{ccccc} \bar{1} = 0 & e & \bar{0} = 1 & & \\ 1 * 1 & = & 1 \oplus 1 & = & 1 \\ 1 \oplus 0 & = & 0 \oplus 1 & = & 1 \\ 0 \oplus 0 & = & 0 * 0 & = & 0 \\ 0 * 1 & = & 1 * 0 & = & 0. \end{array}$$

Afirmamos que esse conjunto $\mathscr{B}$ com as operações definidas como acima são uma álgebra Booleana.

De fato, os Axiomas 1, 2 e 3 são satisfeitos pela definição. Para verificarmos o Axioma 4, vamos construir uma tabela verdade com todas as possíveis combinações de valores de x, y e z. Vejamos a validade da distributividade em relação a $\oplus$, ou seja, que $x \oplus (y * z) = (x \oplus y) * (x \oplus z)$.

x	y	z	$(y*z)$	$x\oplus(y*z)$	$(x\oplus y)$	$(x\oplus z)$	$(x\oplus y)*(x\oplus z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Perceba que para a mesma combinação de valores das variáveis $x, y\, e\, z$, as expressões $x\oplus(y*z)$ *e* $(x\oplus y)*(x\oplus z)$ assumem os mesmos valores. Sempre que isso ocorrer diremos que as expressões são iguais. Assim a distributividade em relação a $\oplus$ é válida, pois vale a igualdade $x\oplus(y*z)=(x\oplus y)*(x\oplus z)$.

Agora verificaremos a validade da distributividade em relação a $*$, ou seja, que $x*(y\oplus z)=(x*y)\oplus(x*z)$.

x	y	z	$(y\oplus z)$	$x*(y\oplus z)$	$(x*y)$	$(x*z)$	$(x*y)\oplus(x*z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Do mesmo modo que na verificação anterior, a distributividade em relação a * é válida e, portanto, a álgebra proposta pelo exemplo é uma álgebra Booleana. Denotaremos esta álgebra Booleana por $\langle\mathscr{B},\oplus,*,\bar{\ },0,1\rangle$. Esta é a álgebra mais usual por se assemelhar à lógica proposicional. Indo mais além é possível afirmar que a álgebra $\langle\mathscr{B},\oplus,*,\bar{\ },0,1\rangle$ é equivalente à lógica proposicional no que se refere às suas operações? Vejamos isso no próximo exemplo.

Exemplo 2.2 *A álgebra* $\langle \mathscr{B}, \oplus, *, \bar{}, 0, 1\rangle$ *é equivalente à lógica proposicional.*

Observemos uma comparação entre as tabelas verdade das operações $\vee, \wedge$ *e* $\sim$ da lógica proposicional com as tabelas da álgebra Booleana $\langle \mathscr{B}, \oplus, *, \bar{}, 0, 1\rangle$.

x	y	$\sim x$	$x \vee y$	$x \wedge y$
F	F	V	F	F
F	V	V	V	F
V	F	F	V	F
V	V	F	V	V

x	y	$\bar{x}$	$x \oplus y$	$x * y$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Se fizermos corresponder o 1 ao V e o 0 ao F fica evidente que as tabelas verdade acima são equivalentes com a seguinte correspondência entre seus elementos:

Lógica proposicional	Álgebra Booleana $\mathscr{B}$
F	0
V	1
$\sim x$	$\bar{x}$
$\vee$	$\oplus$
$\wedge$	$*$

Tabela 2.1: Correspondência entre lógica proposicional e álgebra Booleana.

Assim, acabamos de mostrar que a álgebra $\langle \mathscr{B}, \oplus, *, \bar{}, 0, 1\rangle$ é equivalente à lógica proposicional. No próximo tópico serão mostrados alguns resultados sobre as propriedades que a álgebra Booleana possui. Dessa forma, os resultados serão válidos para a álgebra $\langle \mathscr{B}, \oplus, *, \bar{}, 0, 1\rangle$ e por consequência para a lógica proposicional também.

2.1.1 Propriedades

Dada um proposição qualquer sobre uma álgebra Booleana, nós definimos sua **dual** como sendo a proposição obtida substituindo $\oplus$ por $*$, $*$ por $\oplus$, $\mathbf{0}$ por $\mathbf{1}$ e $\mathbf{1}$ por $\mathbf{0}$. Por exemplo, o Axioma 2 traz duas proposições: $b \oplus \mathbf{0} = b$ e $b * \mathbf{1} = b$. Note que uma proposição é a dual da outra. O mesmo ocorre para os demais axiomas. Assim, cada axioma contém duas proposições que são duais entre si. Agora suponha que, usando os axiomas, nós provemos algum teorema sobre uma álgebra Booleana. Segue que usando na mesma ordem o dual de cada axioma podemos provar o dual do teorema. A esse fato damos o nome de **princípio da dualidade** que será amplamente utilizado daqui por diante.

Propriedade 2.1 (Unicidade do 0 e 1) *Os elementos* $\mathbf{0}$ *e* $\mathbf{1}$ *são únicos.*

Dem.: Suponha que existem dois elementos zero, $\mathbf{0}_1$ e $\mathbf{0}_2$. Sejam b_1 e b_2 dois elementos quaisquer em B. Pelo Axioma 1, temos que $b_1 \oplus \mathbf{0}_1 = b_1$ e $b_2 \oplus \mathbf{0}_2 = b_2$. Tome, em particular, $b_1 = \mathbf{0}_2$ e $b_2 = \mathbf{0}_1$. Assim temos $\mathbf{0}_2 \oplus \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$ e $\mathbf{0}_1 \oplus \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$. Pela comutatividade, temos que $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. A demonstração para $\mathbf{1}$ é dual a do $\mathbf{0}$.

$\square$

Propriedade 2.2 (Complemento de 0 e 1) $\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$ *e* $\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$

Dem.:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{1}} &= \bar{\mathbf{1}} * \mathbf{1} && \text{(Axioma 2)} \\ &= \mathbf{0}. && \text{(Axioma 3)} \end{aligned}$$

Portanto, $\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$. A prova de $\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ segue por dualidade.

$\square$

Propriedade 2.3 (Idempotência) *Para todo elemento* $b \in B$, $b \oplus b = b$ *e* $b * b = b$.

Dem.:

$$\begin{aligned} b \oplus b &= (b \oplus b) * \mathbf{1} && \text{(Axioma 2)} \\ &= (b \oplus b) * (b \oplus \bar{b}) && \text{(Axioma 3)} \\ &= b * (b \oplus \bar{b}) && \text{(Axioma 4)} \\ &= b * \mathbf{1} && \text{(Axioma 3)} \\ &= b. && \text{(Axioma 2)} \end{aligned}$$

Pela dualidade segue que $b * b = b$.

$\square$

Propriedade 2.4 (Identidade) $b \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1}$ *e* $b * \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Dem.:

$$\begin{aligned}
b \oplus \mathbf{1} &= \mathbf{1} * (b \oplus \mathbf{1}) && \text{(Axioma 2)}\\
&= (b \oplus \bar{b}) * (b \oplus \mathbf{1}) && \text{(Axioma 3)}\\
&= b \oplus (\bar{b} * \mathbf{1}) && \text{(Axioma 4)}\\
&= b \oplus \bar{b} && \text{(Axioma 2)}\\
&= \mathbf{1}. && \text{(Axioma 3)}
\end{aligned}$$

□

Propriedade 2.5 (Absorção) *Para todo* $b_1, b_2 \in B, b_1 \oplus (b_1 * b_2) = b_1$ *e* $b_1 * (b_1 \oplus b_2) = b_1$.

Dem.: Para todos $b_1, b_2 \in B$, temos

$$\begin{aligned}
b_1 \oplus (b_1 * b_2) &= (b_1 * \mathbf{1}) \oplus (b_1 * b_2) && \text{(Axioma 2)}\\
&= b_1 * (\mathbf{1} \oplus b_2) && \text{(Axioma 4)}\\
&= b_1 * \mathbf{1} && \text{(Identidade)}\\
&= b_1. && \text{(Axioma 2)}
\end{aligned}$$

□

Propriedade 2.6 (Unicidade do complemento) *Dado um elemento* $b \in B$*, há um único elemento* $\bar{b} \in B$ *tal que* $b \oplus \bar{b} = \mathbf{1}$ *e* $b * \bar{b} = \mathbf{0}$.

Dem.: Suponha que existam $\bar{b_1}, \bar{b_2} \in B$ de modo que ambos sejam o complemento de b.

$$\begin{aligned}
\bar{b_1} &= \mathbf{1} * \bar{b_1} && \text{(Axioma 2)}\\
&= (b \oplus \bar{b_2}) * \bar{b_1} && \text{(Axioma 3)}\\
&= (b * \bar{b_1}) \oplus (\bar{b_1} * \bar{b_2}) && \text{(Axioma 4)}\\
&= \mathbf{0} \oplus (\bar{b_1} * \bar{b_2}) && \text{(Axioma 3)}\\
&= (b * \bar{b_2}) \oplus (\bar{b_1} * \bar{b_2}) && \text{(Axioma 3)}\\
&= (b \oplus \bar{b_1}) * \bar{b_2} && \text{(Axioma 4)}\\
&= \mathbf{1} * \bar{b_2} && \text{(Axioma 3)}\\
&= \bar{b_2}. && \text{(Axioma 2)}
\end{aligned}$$

□

Propriedade 2.7 (Involução) *Para todo* $b \in B, \bar{\bar{b}} = b$.

Dem.: Note que $b \oplus \bar{b} = \bar{b} \oplus b = \mathbf{1}$ e $b * \bar{b} = \bar{b} * b = \mathbf{0}$, portanto b é o complemento de $\bar{b}$. Como o complemento é único, $\bar{\bar{b}} = b$.

$\square$

Propriedade 2.8 (Associatividade) *Para quaisquer $b_1, b_2, b_3 \in B$,*

$$b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3) = (b_1 \oplus b_2) \oplus b_3 \textit{ e } b_1 * (b_2 * b_3) = (b_1 * b_2) * b_3.$$

Antes de demonstrar a propriedade associativa será necessária a demonstração de um lema.

Lema 2.1 *Para quaisquer $b_1, b_2, b_3 \in B, b_1 * [(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] = b_1 * [b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] = b_1$.*

Demonstração do lema anterior:

$$\begin{aligned} b_1 * [(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] &= [b_1 * (b_1 \oplus b_2)] \oplus [b_1 * b_3] && \text{(Axioma 4)} \\ &= b_1 \oplus [b_1 * b_3] && \text{(Absorção)} \\ &= (b_1 \oplus b_1) * (b_1 \oplus b_3) && \text{(Axioma 4)} \\ &= b_1 * (b_1 \oplus b_3) && \text{(Idempotência)} \\ &= b_1. && \text{(Absorção)} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_1 * [b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] &= [b_1 * b_1] \oplus [b_1 * (b_2 \oplus b_3)] && \text{(Axioma 4)} \\ &= b_1 \oplus (b_1 * b_2) \oplus (b_1 * b_3) && \text{(Idempotência e Axioma 4)} \\ &= b_1 \oplus (b_1 * b_3) && \text{(Absorção)} \\ &= b_1. && \text{(Absorção)} \end{aligned}$$

Segue que $b_1 * [(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] = b_1 = b_1 * [b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)]$.

$\square$

Demonstração da Associatividade: Tome $Z = [(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] * [b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)]$

$$\begin{aligned} Z &= \{[(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] * b_1\} \oplus \{[(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] * (b_2 \oplus b_3)\} && \text{(Axioma 4)} \\ &= b_1 \oplus \{[(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] * (b_2 \oplus b_3)\} && \text{(Axioma 1 e Lema 2.1)} \\ &= b_1 \oplus \{\{[(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] * b_2\} \oplus \{[(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] * b_3\}\} && \text{(Axioma 4)} \\ &= b_1 \oplus \{\{b_2 * [(b_2 \oplus b_1) \oplus b_3]\} \oplus \{b_3 * [b_3 \oplus (b_1 \oplus b_2)]\}\} && \text{(Axioma 1)} \\ &= b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3). && \text{(Lema 2.1)} \end{aligned}$$

De forma similar

$$\begin{aligned}
Z &= [b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] * [(b_1 \oplus b_2) \oplus b_3] && \text{(Axioma 1)}\\
&= \{[b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] * (b_1 \oplus b_2)\} \oplus \{[b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] * b_3\} && \text{(Axioma 4)}\\
&= \{[b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] * (b_1 \oplus b_2)\} \oplus \{b_3 * [(b_3 \oplus b_2) \oplus b_1]\} && \text{(Axioma 1)}\\
&= \{[b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] * (b_1 \oplus b_2)\} \oplus b_3 && \text{(Lema 2.1)}\\
&= \{\{[b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] * b_1\} \oplus \{[b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)] * b_2\}\} \oplus b_3 && \text{(Axioma 4)}\\
&= \{\{b_1 * [b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3)]\} \oplus \{b_2 * [(b_2 \oplus b_3) \oplus b_1]\}\} \oplus b_3 && \text{(Axioma 1)}\\
&= (b_1 \oplus b_2) \oplus b_3. && \text{(Lema 2.1)}
\end{aligned}$$

Portanto $b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3) = (b_1 \oplus b_2) \oplus b_3$.

□

Propriedade 2.9 (Leis de De Morgan) *Para todos $b_1, b_2 \in B$,*

$$\overline{(b_1 \oplus b_2)} = \bar{b}_1 * \bar{b}_2 \text{ e } \overline{(b_1 * b_2)} = \bar{b}_1 \oplus \bar{b}_2$$

$$\begin{aligned}
(b_1 \oplus b_2) \oplus (\bar{b}_1 * \bar{b}_2) &= [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_1] * [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_2] && \text{(Axioma 4)}\\
&= [\bar{b}_1 \oplus (b_1 \oplus b_2)] * [(b_1 \oplus b_2) \oplus \bar{b}_2] && \text{(Axioma 1)}\\
&= [(\bar{b}_1 \oplus b_1) \oplus b_2] * [b_1 \oplus (b_2 \oplus \bar{b}_2)] && \text{(Associatividade)}\\
&= (\mathbf{1} \oplus b_2) * (b_1 \oplus 1) && \text{(Axioma 3)}\\
&= \mathbf{1} * \mathbf{1} && \text{(Identidade)}\\
&= \mathbf{1}. && \text{(Axioma 2)}
\end{aligned}$$

Nós provamos que $(b_1 \oplus b_2) \oplus (\bar{b}_1 * \bar{b}_2) = \mathbf{1}$, então $\bar{b}_1 * \bar{b}_2$ é o complemento de $b_1 \oplus b_2$, isto é, $\overline{(b_1 \oplus b_2)} = \bar{b}_1 * \bar{b}_2$.

□

Em resumo, as principais propriedades da álgebra Booleana são:

Nome	Propriedade
Complemento do **0** e **1**	$\bar{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$
Idempotência	$b \oplus b = b$ e $b * b = b$
Identidade	$b \oplus \mathbf{1} = \mathbf{1}$ e $b * \mathbf{0} = \mathbf{0}$
Absorção	$b_1 \oplus (b_1 * b_2) = b_1$
	$b_1 * (b_1 \oplus b_2) = b_1$
Involução	$\bar{\bar{b}} = b$
Associatividade	$b_1 \oplus (b_2 \oplus b_3) = (b_1 \oplus b_2) \oplus b_3$
	$b_1 * (b_2 * b_3) = (b_1 * b_2) * b_3$
Leis de De Morgan	$\overline{(b_1 \oplus b_2)} = \bar{b_1} * \bar{b_2}$
	$\overline{(b_1 * b_2)} = \bar{b_1} \oplus \bar{b_2}$

Tabela 2.2: Resumo das propriedades da álgebra Booleana.

2.2 Funções Booleanas

As calculadoras possuem sistemas digitais que trabalham por meio de códigos binários. Cada unidade desses códigos é chamada de bit e pode assumir os valores 0 ou 1. Segundo Matias[7], os sistema digitais podem ser modelados usando a lógica. Podemos então assumir que a álgebra $\langle \mathscr{B}, \oplus, *, \bar{}, 0, 1 \rangle$ vale para os sistemas digitais, sendo cada bit da informação um elemento de $\mathscr{B}$. Dessa forma, planejar sistemas digitais de calculadoras equivale a operar nessa álgebra. Para prosseguir com esse estudo será necessária a introdução dos conceitos de variável e função Booleana e alguns resultados acerca das mesmas.

Definição 2.2 (Variável Booleana)

1. *Dada uma álgebra Booleana $\langle B, \oplus, *, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$, uma variável Booleana é uma variável que pode assumir qualquer valor do conjunto B.*

2. *Dada uma variável Booleana x, o complemento de x denotado por $\bar{x}$, é uma variável que assume o valor $\bar{x} = \bar{b}$ quando $x = b$ para todo $b \in B$.*

3. *Um literal é uma variável Booleana ou seu complemento $\bar{x}$.*

Uma notação útil para distinguir literais é escrever x^1 para a variável x e x^0 para $\bar{x}$, ou seja:

$$x^e = \begin{cases} \bar{x}, & se\ e = \mathbf{0} \\ x, & se\ e = \mathbf{1} \end{cases}$$

Assim como as variáveis reais podem formar expressões algébricas, as variáveis Booleanas podem ser combinadas para formar expressões Booleanas. Uma expressão Booleana é definida recursivamente como a seguir.

Definição 2.3 (Expressão Booleana) *Dada uma álgebra Booleana $\langle B, \oplus, *, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$, uma expressão Booleana em n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é qualquer combinação das n variáveis com as operações de soma, produto e completo, além ainda dos elementos identidade.*

Um fato interessante sobre expressões Booleanas é que cada uma pode ser expressa de diferentes formas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.3 *$x \oplus (\bar{x} * y)$ e $x \oplus y$ são diferentes formas da mesma expressão, pois uma pode ser obtida a partir da outra aplicando os axiomas e propriedades da álgebra Booleana.*

$$\begin{aligned} x \oplus (\bar{x} * y) &= (x \oplus \bar{x}) * (x \oplus y) && \text{(Axioma 4)} \\ &= \mathbf{1} * (x \oplus y) && \text{(Axioma 3)} \\ &= (x \oplus y). && \text{(Axioma 2)} \end{aligned}$$

Quando uma expressão puder ser derivada de outra com uma sequência finita de aplicações dos axiomas da álgebra Booleana diremos que as expressões são **equivalentes**.

Assim como as expressões algébricas definem a lei de formação de algumas funções reais, as expressões Booleanas definem a “regra"de comportamento das funções Booleanas. Definiremos a seguir o que é uma função Booleana[1].

Definição 2.4 (Função Booleana) *Dada uma álgebra Booleana $\langle B, \oplus, *, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$, uma função Booleana de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma função $f : B^n \to B$ de tal modo que $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma expressão Booleana.*

Exemplo 2.4 *Tome a função f definida a partir da álgebra $\langle B, \oplus, *, \bar{}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ onde $f(x_1, x_2) = x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2$. Nessa função, as variáveis são x_1 e x_2, a expressão $x_1\bar{x}_2 \oplus \bar{x}_1 x_2$ é a lei de formação da função, o domínio da função é $B \times B$ e o contradomínio é B.*

[1]Daqui em diante, sempre que for conveniente, escreveremos xy para denotar $x * y$.

Exemplo 2.5 *Tome as expressões $x \oplus (\bar{x}y)$, $x \oplus y$ e defina as funções*

$$g : B^2 \to B \quad g(x,y) = x \oplus (\bar{x}y) \ \ e$$
$$h : B^2 \to B \quad h(x,y) = x \oplus y.$$

Conforme foi mostrado no Exemplo 2.3, as duas expressões são equivalentes. Observe que temos duas funções com mesmo domínio, contradomínio, lei de formação e consequentemente a mesma imagem. Assim as funções g e h representam funções equivalentes.

O exemplo anterior levanta uma questão: De modo geral, como saber se duas funções Booleanas são equivalentes? A primeira parte que consiste em avaliar o domínio e contradomínio é relativamente simples, mas como saber se as expressões Booleanas são equivalentes? Poderíamos tentar derivar uma expressão da outra usando os axiomas, mas nada garante que o processo não seja demasiado longo ou que consigamos aplicar a sequência correta de axiomas para chegar ao resutado desejado. Felizmente há um método para que façamos essa verificação de maneira mais simples, porém para isso devemos introduzir mais alguns conceitos.

Definição 2.5 (Mintermo) *Um mintermo em n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma expressão Booleana a qual tem a forma do produto entre cada variável Booleana ou seu complemento. Assim um mintermo consiste do produto de n literais, um correspondendo a cada variável.*

Por exemplo, são oito possíveis mintermos em três variáveis x, y e z. São eles:

$$\begin{array}{cccc} xyz & xy\bar{z} & x\bar{y}z & x\bar{y}\bar{z} \\ \bar{x}yz & \bar{x}y\bar{z} & \bar{x}\bar{y}z & \bar{x}\bar{y}\bar{z}. \end{array}$$

Usando a notação x^e dada anteriormente, nós denotaremos um mintermo em n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ por $m_{e_1 e_2 ... e_n}$ onde:

$$m_{e_1 e_2 ... e_n} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} ... x_n^{e_n}.$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} m_{10011} &= x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^1 x_5^1 \\ &= x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5. \end{aligned}$$

Teorema 2.1 *Há 2^n mintermos em n variáveis e não há dois mintermos equivalentes.*

Prova: Por definição, um mintermo em n variáveis é formado pelo produto entre cada variável ou seu complemento. Assim, em cada variável, temos duas possibilidades: a própria variável ou seu complemento. Usando o princípio fundamental da contagem teremos 2^n possíveis mintermos. Vamos mostrar agora que dentre esses 2^n mintermos não há dois que sejam equivalentes. Para isso, tome $m_{e_1 e_2 \ldots e_n} = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$ e considere

$$x_i = \begin{cases} \mathbf{1}, & se\ e_i = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, & se\ e_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

Dessa forma, $m_{e_1 e_2 \ldots e_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ será formado por um produto com n parcelas compostas por $\mathbf{1}^{\mathbf{1}}$ ou $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, daí $m_{e_1 e_2 \ldots e_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{1}$.

Qualquer outro mintermo m' tem pelo menos um literal x^{e_j} que é complemento do correspondente literal em m. Portanto, substituindo os valores de x_i definidos acima neste mintermo, haverá pelo menos um **0** no produto. Isto quer dizer que este mintermo vale **0** para estes valores em particular. Assim, para quaisquer dois mintermos, há sempre uma atribuição de valores às variáveis que torna um deles **1** e o outro **0**.

□

Teorema 2.2 (Existência da forma disjuntiva normal) *Se f é uma função Booleana, não identicamente nula, em n variáveis, então ela pode ser escrita como um mintermo ou pela soma de dois ou mais mintermos da forma*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigoplus_{e \in \{\mathbf{0},\mathbf{1}\}^n} f(e_1, e_2, \ldots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}.$$

Dem.: Nós vamos provar primeiramente para o caso em que o teorema vale para uma função de uma variável $f(x)$, ou seja, que:

$$f(x) = f(\mathbf{0})\bar{x} \oplus f(\mathbf{1})x.$$

Agora, pela definição de expressão Booleana, a função deve ter uma das seguintes formas:

a) $f(x) = \mathbf{0}\ ou\ f(x) = \mathbf{1}$;

b) $f(x) = x$;

c) $f(x) = \bar{x}$;

d) $f(x)$ consiste de somas e produtos de termos que são somas ou produtos de $x,\ \bar{x},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}$.

Se $f(x) = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} * \mathbf{1} && \text{(Axioma 2)} \\ &= \mathbf{0}(\bar{x} \oplus x) && \text{(Axioma 3)} \\ &= \mathbf{0}\bar{x} \oplus \mathbf{0}x && \text{(Axioma 4)} \\ &= f(\mathbf{0})\bar{x} \oplus f(\mathbf{1})x. \end{aligned}$$

Se $f(x) = \mathbf{1}$, nós temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{1} \\ &= \mathbf{1} * \mathbf{1} && \text{(Axioma 2)} \\ &= \mathbf{1}(\bar{x} \oplus x) && \text{(Axioma 3)} \\ &= \mathbf{1}\bar{x} \oplus \mathbf{1}x && \text{(Axioma 4)} \\ &= f(\mathbf{0})\bar{x} \oplus f(\mathbf{1})x. \end{aligned}$$

Se $f(x) = x$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ &= \mathbf{1}x && \text{(Axioma 2)} \\ &= \mathbf{1}x \oplus \mathbf{0} && \text{(Axioma 2)} \\ &= \mathbf{1}x \oplus \mathbf{0}\bar{x} && \text{(Identidade)} \\ &= f(\mathbf{0})\bar{x} \oplus f(\mathbf{1})x. && \text{(Axioma 4)} \end{aligned}$$

Se $f(x) = \bar{x}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{x} \\ &= \mathbf{1}\bar{x} && \text{(Axioma 2)} \\ &= \mathbf{1}\bar{x} \oplus \mathbf{0} && \text{(Axioma 2)} \\ &= \mathbf{1}\bar{x} \oplus \mathbf{0}x && \text{(Identidade)} \\ &= f(\mathbf{0})\bar{x} \oplus f(\mathbf{1})x. \end{aligned}$$

Portanto o teorema vale para os casos (a), (b) e (c). Vamos mostrar que também é válido para caso (d). Para isso, tome $f(x)$ e $g(x)$ dentre um dos casos para o qual o teorema já é válido. Seja $h(x) = f(x) \oplus g(x)$. Vamos observar todas as possibilidades para $h(x)$:

Disso conclui-se que qualquer soma entre os termos dos itens (a), (b) e (c) resulta em um deles. Mostraremos que o mesmo ocorre para o produto entre esses itens. Seja $i(x) = f(x) * g(x)$, observe o que acontece com $i(x)$ ao variarmos $f(x)$ e $g(x)$:

$g(x)$ \ $f(x)$	x	$\bar{x}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
x	x	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	x
$\bar{x}$	$\mathbf{1}$	$\bar{x}$	$\mathbf{1}$	$\bar{x}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	x	$\bar{x}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Tabela 2.3: $h(x) = f(x) \oplus g(x)$.

$g(x)$ \ $f(x)$	x	$\bar{x}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
x	x	$\mathbf{0}$	x	$\mathbf{0}$
$\bar{x}$	$\mathbf{0}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{1}$	x	$\bar{x}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

Tabela 2.4: $i(x) = f(x) * g(x)$.

Como percebe-se acima, qualquer produto ou soma entre $f(x)$ *e* $g(x)$ resulta em um dos itens (a), (b) e (c). Infere-se a partir daí que qualquer combinação de somas e produtos também permanece na forma $f(\mathbf{0})\bar{x} \oplus f(\mathbf{1})x$, portanto o item (d) é válido e o teorema é válido para funções de uma variável.

Agora considere uma função de n variáveis $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Se nós considerarmos a função como sendo de uma variável x_1 e aplicarmos o teorema, nós obteremos

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = [f(\mathbf{0}, x_2, ..., x_n)\bar{x_1}] \oplus [f(\mathbf{1}, x_2, ..., x_n)x_1].$$

Da mesma forma, considere $f(\mathbf{0}, x_2, ..., x_n)$ e $f(\mathbf{1}, x_2, ..., x_n)$ funções de uma variável x_2 e aplicando o teorema novamente temos

$$f(\mathbf{0}, x_2, ..., x_n) = [f(\mathbf{0}, \mathbf{0}, x_3, ..., x_n)\bar{x_2}] \oplus [f(\mathbf{0}, \mathbf{1}, x_3, ..., x_n)x_2] \text{ e}$$

$$f(\mathbf{1}, x_2, ..., x_n) = [f(\mathbf{1}, \mathbf{0}, x_3, ..., x_n)\bar{x_2}] \oplus [f(\mathbf{1}, \mathbf{1}, x_3, ..., x_n)x_2].$$

Juntando as equações acima concluímos que

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,...,x_n) &= [f(\mathbf{0},\mathbf{0},x_3,...,x_n)\bar{x_1}\bar{x_2}] \oplus [f(\mathbf{0},\mathbf{1},x_3,...,x_n)\bar{x_1}x_2] \oplus \\ &\oplus \{[f(\mathbf{1},\mathbf{0},x_3,...,x_n)x_1\bar{x_2}] \oplus [f(\mathbf{1},\mathbf{1},x_3,...,x_n)x_1x_2]. \end{aligned}$$

Repetindo esse processo mais n-2 vezes, com uma variável por vez, chegamos ao resultado

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \bigoplus_{e\in\{0,1\}^n} f(e_1,e_2,...,e_n)x_1^{e_1}x_2^{e_2}...x_n^{e_n}.$$

□

Definição 2.6 *Qualquer expressão que estiver na forma proposta pelo teorema anterior estará na* **forma disjuntiva normal**.

Teorema 2.3 *A forma disjuntiva normal de uma função Booleana é única.*

Dem.: A prova será dada por contradição. Suponha que a função $f(x_1,x_2,...,x_n)$ pode ser escrita na forma disjuntiva normal de duas maneiras distintas, então

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,...,x_n) &= P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_r \\ &= Q_1 \oplus Q_2 \oplus ... \oplus Q_s. \end{aligned}$$

Onde P_i e Q_j $(i = 1,2,...,r)$ e $(j = 1,2,...,s)$ são mintermos. Nós vamos assumir, sem perda de generalidade, que $r \geq s$. Agora, se as duas formas disjuntivas normais são diferentes, ao menos um dos P_i deve ser diferente de cada Q_j. Vamos supor que P_m tem essa propriedade.

Como P_m é diferente de todo Q_j, P_m e Q_j devem ser tais que um contenha x_k enquanto o outro contém $\bar{x_k}$ para algum valor de k. A expressão P_mQ_j então contém o produto $x_k\bar{x_k}$ e daí $P_mQ_j = \mathbf{0}$. Então é verdadeiro que para cada j

$$\begin{aligned} & P_mQ_1 \oplus P_mQ_2 \oplus ... \oplus P_mQ_s &= \mathbf{0} & \\ \Rightarrow\quad & P_m(Q_1 \oplus Q_2 \oplus ... \oplus Q_s) &= \mathbf{0} & \quad \text{(Axioma 4)} \\ \Rightarrow\quad & P_mf(x_1,x_2,...,x_n) &= \mathbf{0}. & \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} P_mf(x_1,x_2,...,x_n) &= P_m(P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_r) & \\ &= P_mP_1 \oplus P_mP_2 \oplus ... \oplus P_mP_s & \text{(Axioma 4)} \\ &= P_mP_m & (P_i \text{ diferentes}) \\ &= P_m. & \text{(Idempotência)} \end{aligned}$$

Portanto, $P_m f(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbf{0}$ e $P_m f(x_1, x_2, ..., x_n) = P_m$, ou seja, $P_m = \mathbf{0}$. Isso leva a uma contradição, pois tomando em P_m

$$x_i = \begin{cases} \mathbf{1}, & se\ e_i = \mathbf{1} \\ \mathbf{0}, & se\ e_i = \mathbf{0} \end{cases}$$

obtemos $P_m = \mathbf{1}$.

$\square$

A demonstração dos Teoremas 2.2 e 2.3 trazem consigo duas aplicações importantes:

- Um método para comparar expressões Booleanas que consiste em transformar as expressões que são objeto da comparação em suas formas disjuntivas normais. Como essas formas são únicas, caso alguma expressão tenha a mesma forma disjuntiva que outra, elas são equivalentes, conforme apresentado no Exemplo 2.6.
- Uma forma de obter uma função Booleana a partir de uma tabela que contenha os valores da função para todas as entradas possíveis.

Exemplo 2.6 *Vamos verificar se as funções $f : B^3 \to B$ e $g : B^3 \to B$ dadas por $f(x, y, z) = yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z}$ e $g(x, y, z) = yz \oplus xy \oplus xz$ são equivalentes*

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} & \\
&= 1yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} & \text{(Axioma 2)} \\
&= (x \oplus \bar{x})yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z} & \text{(Axioma 3)} \\
&= xyz \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z}. & \text{(Axioma 4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &= yz \oplus xy \oplus xz & \\
&= 1yz \oplus xy1 \oplus x1z & \text{(Axioma 2)} \\
&= (x \oplus \bar{x})yz \oplus xy(z \oplus \bar{z}) \oplus x(y \oplus \bar{y})z & \text{(Axioma 3)} \\
&= xyz \oplus \bar{x}yz \oplus xyz \oplus xy\bar{z} \oplus xyz \oplus x\bar{y}z & \text{(Axioma 4)} \\
&= xyz \oplus \bar{x}yz \oplus xy\bar{z} \oplus x\bar{y}z & \text{(Idempotência)} \\
&= xyz \oplus \bar{x}yz \oplus x\bar{y}z \oplus xy\bar{z}. & \text{(Axioma 1)}
\end{aligned}$$

Como ambas as funções apresentam a mesma forma disjuntiva normal podemos concluir que elas são equivalentes.

Exemplo 2.7 *Vamos encontrar a função Booleana equivalente ao condicional* $(\rightarrow)$.

Para encontrar uma função Booleana que seja equivalente ao condicional vamos primeiramente construir a tabela verdade da operação citada para nela aplicar o Teorema 2.2, assim:

P	Q	P → Q
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Tabela 2.5: Condicional entre P e Q.

Aplicando o Teorema 2.2 na tabela acima temos uma função Booleana f dada por:

$$
\begin{aligned}
f(P,Q) &= f(0,0)\bar{P}\bar{Q} \oplus f(0,1)\bar{P}Q \oplus \Rightarrow f(1,0)P\bar{Q} \oplus f(1,1)PQ \\
\Rightarrow f(P,Q) &= 1\bar{P}\bar{Q} \oplus 1\bar{P}Q \oplus 0P\bar{Q} \oplus 1PQ \\
\Rightarrow f(P,Q) &= \bar{P}\bar{Q} \oplus \bar{P}Q \oplus PQ \\
\Rightarrow f(P,Q) &= \bar{P}(\bar{Q} \oplus Q) \oplus PQ \\
\Rightarrow f(P,Q) &= \bar{P} \oplus PQ \\
\Rightarrow f(P,Q) &= (\bar{P} \oplus P)(\bar{P} \oplus Q) \\
\Rightarrow f(P,Q) &= \bar{P} \oplus Q.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.8 *Vamos encontrar a função Booleana equivalente ao “ou"exclusivo.*

O “ou"exclusivo tem por tabela verdade.

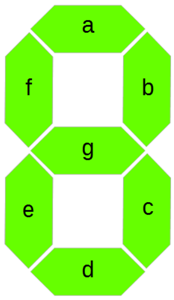
P	Q	P $\veebar$ Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Tabela 2.6: Disjunção exclusiva entre as proposições P e Q.

Aplicando o Teorema 2.2 na tabela acima temos uma função Booleana f dada por:

$$\begin{aligned}
f(P,Q) &= f(0,0)\bar{P}\bar{Q} \oplus f(0,1)\bar{P}Q \oplus f(1,0)P\bar{Q} \oplus f(1,1)PQ \\
\Rightarrow f(P,Q) &= 0\bar{P}\bar{Q} \oplus 1\bar{P}Q \oplus 1P\bar{Q} \oplus 0PQ \\
\Rightarrow f(P,Q) &= \bar{P}Q \oplus P\bar{Q}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.9 (Display de 7 segmentos) *Os display de 7 segmentos são muito comuns em calculadoras, relógios digitais e outros equipamentos eletrônicos que exibem números. Observe a figura abaixo que representa um desses display (de leds, por exemplo)*



Vamos adotar que esse conjunto de leds seja comandado por um número binário de quatro dígitos de acordo com o esquema da figura abaixo. Note que para os algarismos de 0 a 9 a escolha feita foi a sua própria representação binária enquanto as letras ocupam os binários restantes em ordem alfabética.

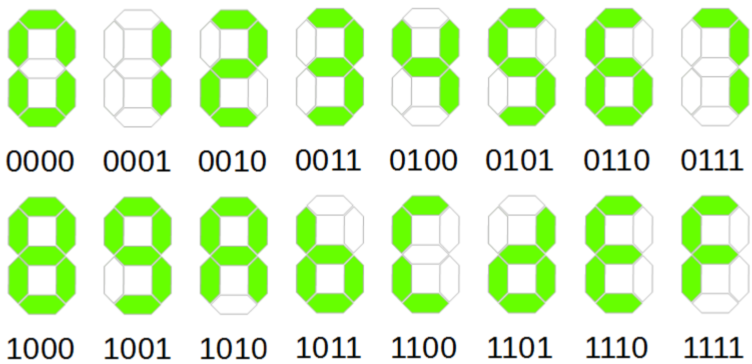


Figura 2.1: Relação entre os binários e a combinação de leds acessa.

As tabelas a seguir relacionam todos os números binários de quatro dígitos com o status de cada led, nomeados na Figura 2.1 acima. O valor 1 representa o led acesso e 0 representa o led apagado. A partir disso podemos montar uma função Booleana para cada led que determina seu funcionamento.

Binário				a	b	c	d	e	f	g	Binário				a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

Tabela 2.7: Tabulação dos dados da Figura 2.1.

Para ilustrar o método, vamos determinar a função $f : B^4 \to B$ definida na álgebra $\langle B, \oplus, *, \bar{}, 0, 1\rangle$ que representa o funcionamento do led **e**. Aplicando o Teorema 2.2, a função f será denotada por:

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) = \; & f(0,0,0,0)\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} \oplus f(0,0,0,1)\bar{x}\bar{y}\bar{z}w \oplus f(0,0,1,0)\bar{x}\bar{y}z\bar{w} \oplus f(0,0,1,1)\bar{x}\bar{y}zw \oplus \\ & \oplus f(0,1,0,0)\bar{x}y\bar{z}\bar{w} \oplus f(0,1,0,1)\bar{x}y\bar{z}w \oplus f(0,1,1,0)\bar{x}yz\bar{w} \oplus f(0,1,1,1)\bar{x}yzw \oplus \\ & \oplus f(1,0,0,0)x\bar{y}\bar{z}\bar{w} \oplus f(1,0,0,1)x\bar{y}\bar{z}w \oplus f(1,0,1,0)x\bar{y}z\bar{w} \oplus f(1,0,1,1)x\bar{y}zw \oplus \\ & \oplus f(1,1,0,0)xy\bar{z}\bar{w} \oplus f(1,1,0,1)xy\bar{z}w \oplus f(1,1,1,0)xyz\bar{w} \oplus f(1,1,1,1)xyzw. \end{aligned}$$

Substituindo os valores das tabelas acima temos

$$f(x,y,z,w) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} \oplus \bar{x}\bar{y}z\bar{w} \oplus \bar{x}yz\bar{w} \oplus x\bar{y}\bar{z}\bar{w} \oplus x\bar{y}z\bar{w} \oplus x\bar{y}zw \oplus xy\bar{z}\bar{w} \oplus xy\bar{z}w \oplus xyz\bar{w} \oplus xyzw.$$

Agora, simplificando a expressão Booleana

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} \oplus \bar{x}\bar{y}z\bar{w} \oplus \bar{x}yz\bar{w} \oplus x\bar{y}\bar{z}\bar{w} \oplus x\bar{y}z\bar{w} \oplus \\ & \quad \oplus x\bar{y}zw \oplus xy\bar{z}\bar{w} \oplus xy\bar{z}w \oplus xyz\bar{w} \oplus xyzw \\ &= \bar{x}\bar{y}\bar{w}(\bar{z} \oplus z) \oplus \bar{x}yz\bar{w} \oplus x\bar{y}\bar{w}(\bar{z} \oplus z) \oplus \\ & \quad \oplus x\bar{y}zw \oplus xy\bar{z}(\bar{w} \oplus w) \oplus xyz(\bar{w} \oplus w) && \text{(Axioma 4)} \\ &= \bar{x}\bar{y}\bar{w} \oplus \bar{x}yz\bar{w} \oplus x\bar{y}\bar{w} \oplus x\bar{y}zw \oplus xy\bar{z} \oplus xyz && \text{(Axiomas 4 e 3)} \\ &= (\bar{x} \oplus x)\bar{y}\bar{w} \oplus x\bar{y}zw \oplus \bar{x}yz\bar{w} \oplus xy(\bar{z} \oplus z) && \text{(Axiomas 1 e 2)} \\ &= \bar{y}\bar{w} \oplus x\bar{y}zw \oplus \bar{x}yz\bar{w} \oplus xy && \text{(Axiomas 4 e 3)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bar{y}(\bar{w} \oplus xzw) \oplus (\bar{x}z\bar{w} \oplus x)y && \text{(Axiomas 1 e 2)}\\
&= \bar{y}(\bar{w} \oplus xz) \oplus (z\bar{w} \oplus x)y && \text{(Exemplo 2.3)}\\
&= \bar{y}\bar{w} \oplus x\bar{y}z \oplus yz\bar{w} \oplus xy && \text{(Axioma 4)}\\
&= (\bar{y} \oplus yz)\bar{w} \oplus x(\bar{y}z \oplus y) && \text{(Axioma 1 e 2)}\\
&= (\bar{y} \oplus z)\bar{w} \oplus x(z \oplus y) && \text{(Exemplo 2.3)}\\
&= \bar{y}\bar{w} \oplus z\bar{w} \oplus xz \oplus xy. && \text{(Axioma 4)}
\end{aligned}
$$

Portanto, a função $f(x, y, z, w) = \bar{y}\bar{w} \oplus z\bar{w} \oplus xz \oplus xy$ determina o funcionamento do led **e**. Observe que após encontrar a expressão Booleana que determinava o funcionamento do led **e** foi feita uma simplificação da mesma. O motivo disso é que, como veremos na próxima sessão, a função Booleana determina o circuito lógico que será construído. Quanto menor a expressão em questão menor será o circuito e consequentemente também será menor o valor para construir esse circuito.

Existem outros métodos para obter funções booleanas mínimas, ou seja, funções com a menor quantidade de operações possível, a partir de uma tabela. Dentre eles destacam-se o mapa de Karnaught e o algoritmo de Quine-McCluskey. Como esses métodos não são o objeto de estudo do trabalho, recomendamos a quem desejar se aprofundar no tema a leitura de Garnier [6] e Daghlian [9].

2.3 Circuitos Lógicos

Os sistemas digitais citados no inicio da Sessão 2.2 são implementações de funções Booleanas de $\mathscr{B}^n$ em $\mathscr{B}^m$, onde n e m representam, respectivamente, a quantidade de bits de entrada e saída.

Conforme vimos na sessão anterior, uma função Booleana pode ser representada por uma expressão ou por sua tabela verdade. Porém uma função Booleana também pode ser representada graficamente, onde cada operação corresponde a um símbolo. Tais símbolos são chamados de portas lógicas. Vale salientar que cada porta lógica representa um recurso físico, ou seja, um objeto que é capaz de realizar a operação lógica a qual o símbolo representa. Ao conjunto de portas lógicas e as suas conexões que representam uma dada função Booleana chamamos de circuitos lógicos. As principais portas lógicas são as seguintes:

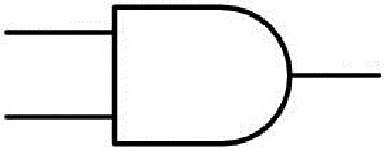


Figura 2.2: Porta AND.

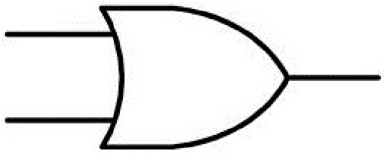


Figura 2.3: Porta OR.

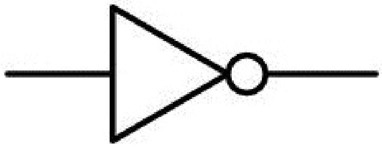


Figura 2.4: Porta NOT.

2.3.1 Construção de Circuitos Lógicos

Para ficar claro como funciona a construção de um circuito lógico vamos fazer a construção dos circuitos dos Exemplos 2.7 e 2.8. Primeiro vamos estabelecer uma relação entre as portas logicas apresentadas e as operações Booleanas através da tabela abaixo.

Porta Lógica	Operação Booleana
AND	$*$
OR	$\oplus$
NOT	$\bar{\ }$

Tabela 2.8: equivalência entre as portas lógicas e as operações Booleanas.

Exemplo 2.10 *Construção do circuito do Exemplo 2.7 (condicional):*

A função encontrada para o condicional foi $f(P,Q) = \bar{P} \oplus Q$. Segue que a construção do circuito que implementa a função será feita da forma que aparece na figura.

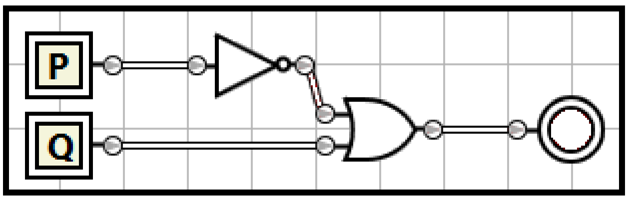
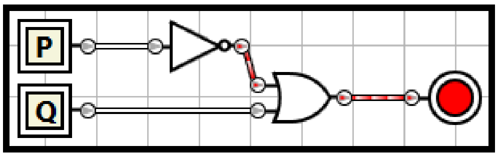
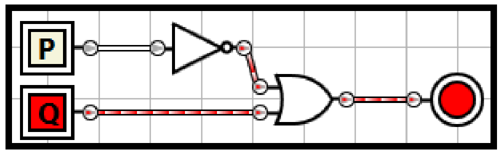


Figura 2.5: Circuito do condicional.

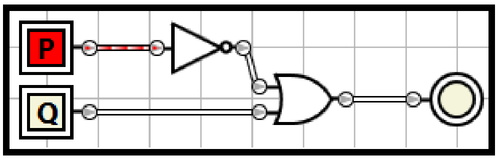
Note que os quadrados com P e Q são as entradas, as circunferências concêntricas no final da figura representam a saída. As portas lógicas tem a entrada pelo lado esquerdo e saída pelo lado direito. Vejamos as figuras a seguir que mostram o funcionamento do circuito, onde associa-se o valor 1 com a entrada ou saída acessa (vermelho) e o valor 0 no caso contrário.



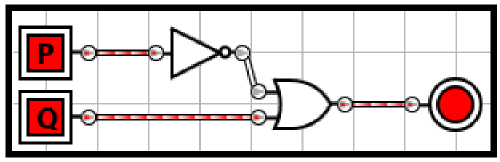
P = 0, Q = 0 e P →Q = 1;



P = 0, Q = 1 e P →Q = 1;



P = 1, Q = 0 e P →Q = 0;



P = 1, Q = 1 e P →Q = 1.

Exemplo 2.11 *Construção do circuito do Exemplo 2.8 (ou exclusivo):*

A função encontrada para o ou exclusivo foi $f(P,Q) = \bar{P}Q \oplus P\bar{Q}$. Segue que a construção do circuito que implementa a função será feita da forma que aparece na figura.

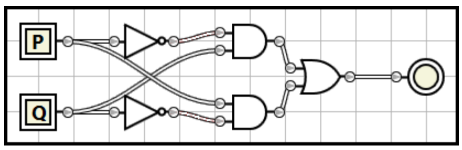


Figura 2.6: Circuito do ou exclusivo.

Devido a utilização recorrente do circuito desse exemplo, será introduzida a porta lógica abaixo para representar o circuito do *ou exclusivo*. A referida porta é chamada de XOR.

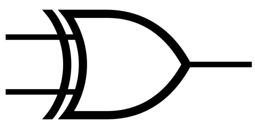


Figura 2.7: Porta XOR.

Em outras palavras, o circuito desse exemplo poderia ser representado de maneira mais econômica, pois trocamos cinco portas lógicas por apenas um única porta.

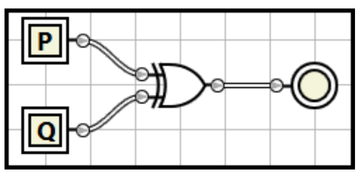


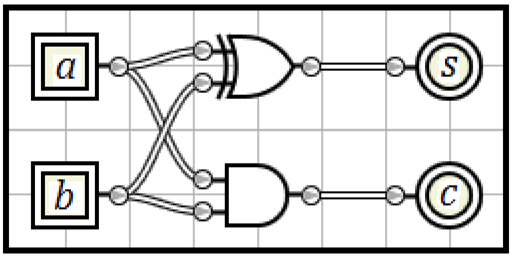
Figura 2.8: Circuito do ou exclusivo com a porta XOR.

Exemplo 2.12 *Circuito da soma no sistema de numeração binário com um algarismo.*

Conforme visto no capítulo inicial dessa dissertação, a soma de um bit é dada pela seguinte regra:

$$0+0=0, \quad \text{vai } 0,$$
$$1+0=1, \quad \text{vai } 0,$$
$$0+1=1, \quad \text{vai } 0,$$
$$1+1=0, \quad \text{vai } 1.$$

Considerando a regra da soma dada, podemos observar que o bit da soma coincide com a tabela do ou exclusivo (XOR) e que o bit carregado (o “vai") corresponde ao e (and). Assim o circuito dessa soma corresponde a:



Note que o circuito acima representa a soma $a+b$ em binário. O resultado será da forma cs, onde s é a soma entre a e b e c é o bit carregado, que será denominado de *bit carry* de agora em diante.

Exemplo 2.13 *Circuito da soma no sistema de numeração binário com n algarismos.*

Primeiramente será feita a análise para uma soma de dois bits. Sejam $A = a_1a_0$ e $B = b_1b_0$ números na base 2. De acordo com o exemplo anterior, s_0 será igual a a_0 XOR b_0 e c_0, a_0 AND b_0. Vamos construir uma tabela afim de determinar as equações Booleanas para s_1 e c_1.

a_1	b_1	c_0	s_1	c_1
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Agora aplicando o Teorema 2.2 para s_1, obtemos:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \bar{a}_1\bar{b}_1c_0 \oplus \bar{a}_1b_1\bar{c}_0 \oplus a_1\bar{b}_1\bar{c}_0 \oplus a_1b_1c_0 \\
&= c_0(\bar{a}_1\bar{b}_1 \oplus a_1b_1) \oplus \bar{c}_0(\bar{a}_1b_1 \oplus a_1\bar{b}_1) \\
&= c_0\overline{\overline{(\bar{a}_1\bar{b}_1 \oplus a_1b_1}}) \oplus \bar{c}_0(\bar{a}_1b_1 \oplus a_1\bar{b}_1) \\
&= c_0\overline{(\overline{(\bar{a}_1\bar{b}_1)}\overline{(a_1b_1)}}) \oplus \bar{c}_0(\bar{a}_1b_1 \oplus a_1\bar{b}_1) \\
&= c_0\overline{((a_1 \oplus b_1)(\bar{a}_1 \oplus \bar{b}_1)}) \oplus \bar{c}_0(\bar{a}_1b_1 \oplus a_1\bar{b}_1) \\
&= c_0\overline{(a_1\bar{b}_1 \oplus \bar{a}_1b_1}) \oplus \bar{c}_0(\bar{a}_1b_1 \oplus a_1\bar{b}_1).
\end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para c_1, temos:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \bar{a}_1b_1c_0 \oplus a_1\bar{b}_1c_0 \oplus a_1b_1\bar{c}_0 \oplus a_1b_1c_0 \\
&= b_1c_0(\bar{a}_1 \oplus a_1) \oplus a_1(b_1\bar{c}_0 \oplus \bar{b}_1c_0) \\
&= b_1c_0 \oplus a_1(b_1\bar{c}_0 \oplus \bar{b}_1c_0).
\end{aligned}$$

O circuito gerado nesse processo corresponde a Figura 2.9 no topo da próxima página. Observe que o circuito que está acima das barras verdes na figura corresponde ao circuito do exemplo anterior e que ele influencia no próximo através do seu bit carry.

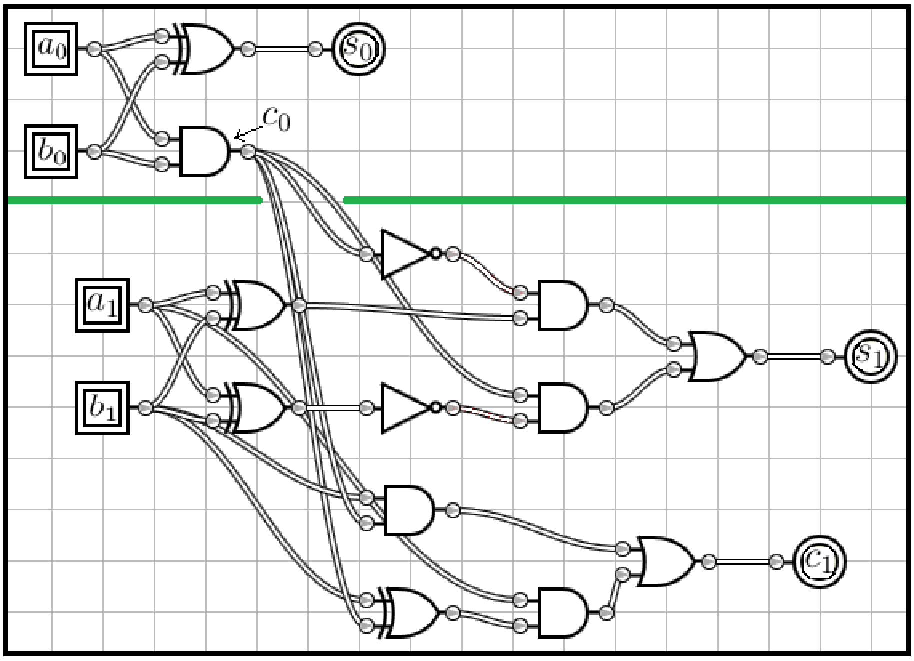
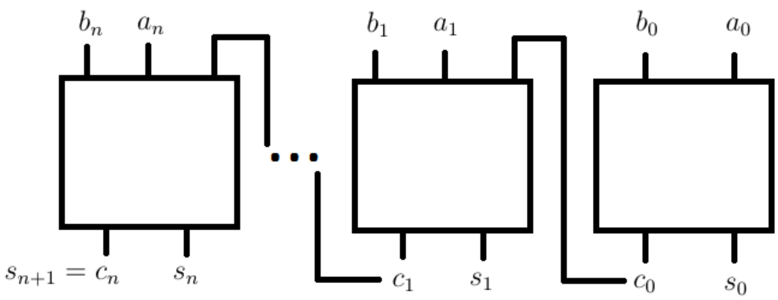


Figura 2.9: Circuito para realizar a soma de dois bits.

Para somar dois binários com uma quantidade $n > 2$ de dígitos basta adicionar $n-2$ vezes a parte do circuito que está abaixo das barras escuras. Segue abaixo uma figura que ilustra esse raciocínio.



Capítulo 3

Propostas de Sequência Didática

Neste capítulo descreveremos as atividades propostas para a sequência didática. Não há um pré-requisito estabelecido no que tange a outros conteúdos que o aluno deve conhecer antes de estudar lógica.Contudo, deixamos como recomendação que essa sequência seja aplicada com alunos à partir do primeiro ano do ensino médio que já tenham estudado conjuntos. As atividades serão estruturadas da seguinte maneira: conhecimentos prévios; materiais necessários; tempo de aula; objetivos e descrição da atividade. Na última atividade consta ainda um relato de aplicação em sala de aula, onde esclarecemos o motivo de apenas essa atividade contar com um relato.

ATIVIDADE 1: Construção de Portas Lógicas

Conhecimentos Prévios: Será necessário que antes dessa atividade o professor ministre uma aula expositiva para os alunos sobre a lógica proposicional introduzida no Capítulo 1 dessa dissertação.

Materiais Necessários: Palitos de picolé, fita adesiva, caixas de fósforos, cola e palitos de churrasco.

Tempo de aula: Um horário de aula para a demonstração das portas lógicas por parte do professor para os alunos e a construção delas. Seria interessante também disponibilizar outra aula em outro dia para que os alunos possam exibir os resultados de seu trabalho.

Objetivos: O objetivo geral será consolidar através de objetos manipuláveis os conceitos de disjunção, conjunção e negação da lógica proposicional vistos previamente em sala.

Descrição da atividade: Inicialmente o professor irá mostrar aos alunos os objetos que representam as portas lógicas e explicar como os mesmos funcionam. Nas figuras seguintes vemos os esquemas de como fazer essas portas.

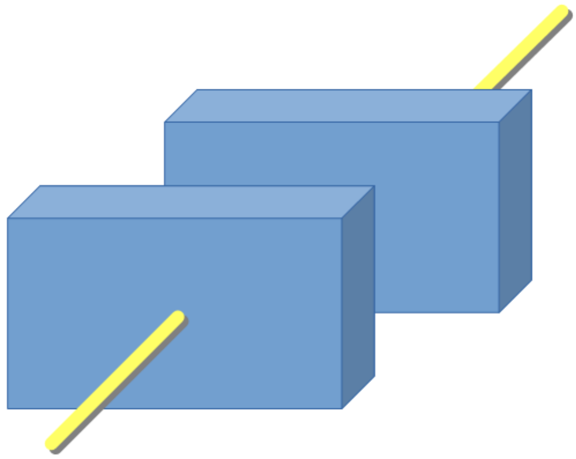


Figura 3.1: Esquema da base das portas lógicas, formado por caixas de fósforos e um palito de churrasco

Figura 3.2: Esquema do eixo das portas lógicas constituídos por palitos de picolé

Basta encaixar o palito da primeira figura dentro do espaço no centro do eixo da segunda figura que teremos construído uma porta inversora. No lado onde ficar a saída é interessante colocar um pedaço de palito de picolé para servir de contrapeso. As figuras a seguir ilustram essa situação.

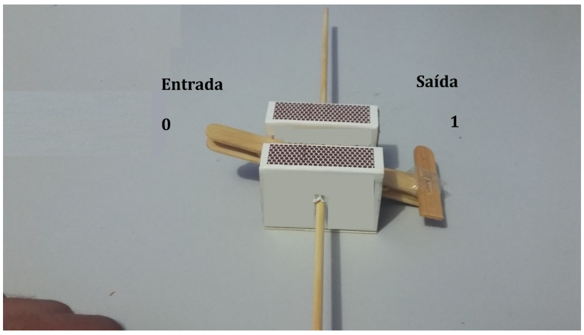


Figura 3.3: Porta NOT com entrada = 0 e saída = 1

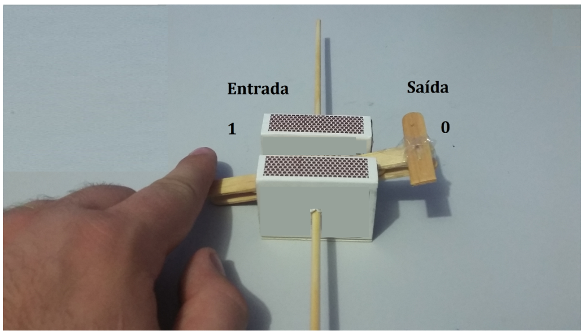


Figura 3.4: Porta NOT com entrada = 1 e saída = 0

Através de uma combinação de portas NOT podemos ainda construir as portas AND e OR. A diferença entre elas está na sobreposição ou não da última porta (da esquerda para a direita nas figuras). Caso ela esteja sobreposta temos uma OR, no caso contrário, uma AND. Vejamos elas prontas.

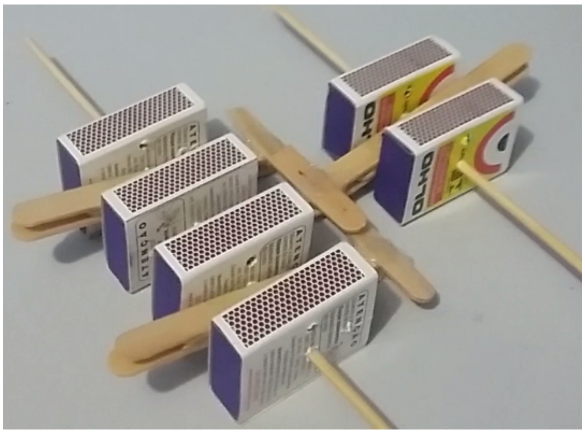


Figura 3.5: Porta OR

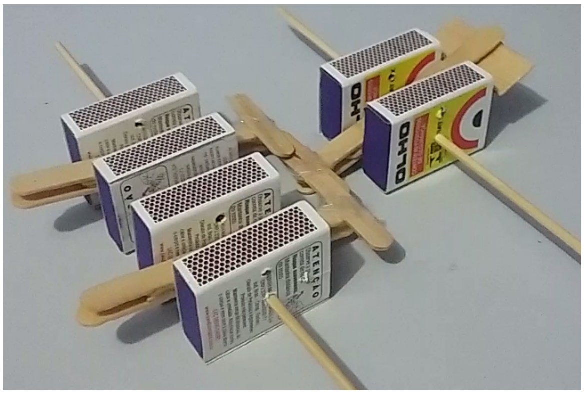


Figura 3.6: Porta AND

Após o docente explanar sobre o funcionamento, construção e responder as principais dúvidas, ele dividirá a turma em grupos de três a cinco alunos para que os mesmos tentem reproduzir as portas lógicas exibidas. Encerrada a fase de construção, será dado inicio a fase de testes onde todos os grupos verificarão se suas portas estão exibindo os valores lógicos de acordo com a tabela verdade do conectivo que representa. Perceba que nessa fase podem surgir portas diferentes das exibidas mas que realizam a mesma ação, ou ainda portas que executam parte das ações esperadas. Cabe nesse ponto o professor intervir e sugerir aos alunos caminhos pelos quais eles possam atingir seu objetivo. Com todos os circuitos funcionando é possível ainda pedir aos alunos para encadearem suas portas para criarem circuitos maiores. Como sugestão, os circuitos do condicional e da porta XOR.

Figura 3.7: porta XOR

ATIVIDADE 2: Display de 7 segmentos

Conhecimentos Prévios: Os mesmos da atividade anterior e ainda sobre sistema de numeração binário que será referido no apêndice A do presente trabalho.

Materiais Necessários: Laboratório de informática com capacidade para comportar os alunos e a instalação do software livre *LibreOffice* [12]. Pode ser usado qualquer outro software de planilha eletrônica: *Excel* (Windows) e *Numbers* (OSX Mac), por exemplo.

Tempo de aula: A proposta é que sejam utilizadas duas aulas para a realização dessa atividade. Dependendo do nível de conhecimento e habituação dos alunos com o uso de computadores, o tempo de aula pode ser maior ou menor.

Objetivos: Dado que na atividade anterior foi visto que a lógica pode ser usada para construir circuitos tangíveis, nessa atividade o objetivo é ampliar esse entendimento mostrando o funcionamento do display de 7 segmentos e ainda como eles podem fazer para transformar uma tabela verdade em um circuito lógico.

Descrição da atividade: Como motivação o professor deve observar se alguém possui calculadora ou relógio de pulso digital e perguntar se eles sabem como são gerados os números do display. A partir daí o docente seguirá os passos descritos no Exemplo 2.9, excetuando-se a parte da simplificação, da seguinte forma. Com os alunos no laboratório de informática, abra o LibreOffice e mostre aos alunos como construir uma tabela a partir da figura abaixo.

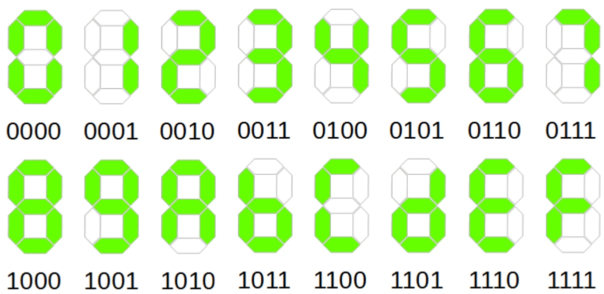


Figura 3.8: Relação entre os binários e a combinação de leds acessa

Com a tabela pronta, divida os alunos em seis grupos e mostre como obter a fórmula para o funcionamento do led E. Peça para cada grupo tentar descobrir a função correspondente a um dos seis leds restantes. Junte as fórmulas encontradas e veja se o circuito está funcionando como deveria. Para conseguir o efeito de acender/apagar basta selecionar as células com as fórmulas e aplicar uma formatação condicional. Para maiores informações sugere-se usar a ajuda do próprio software. Segue uma figura da tabela pronta e disponível em [13] com todas as fórmulas para inspirar a construção com os alunos.

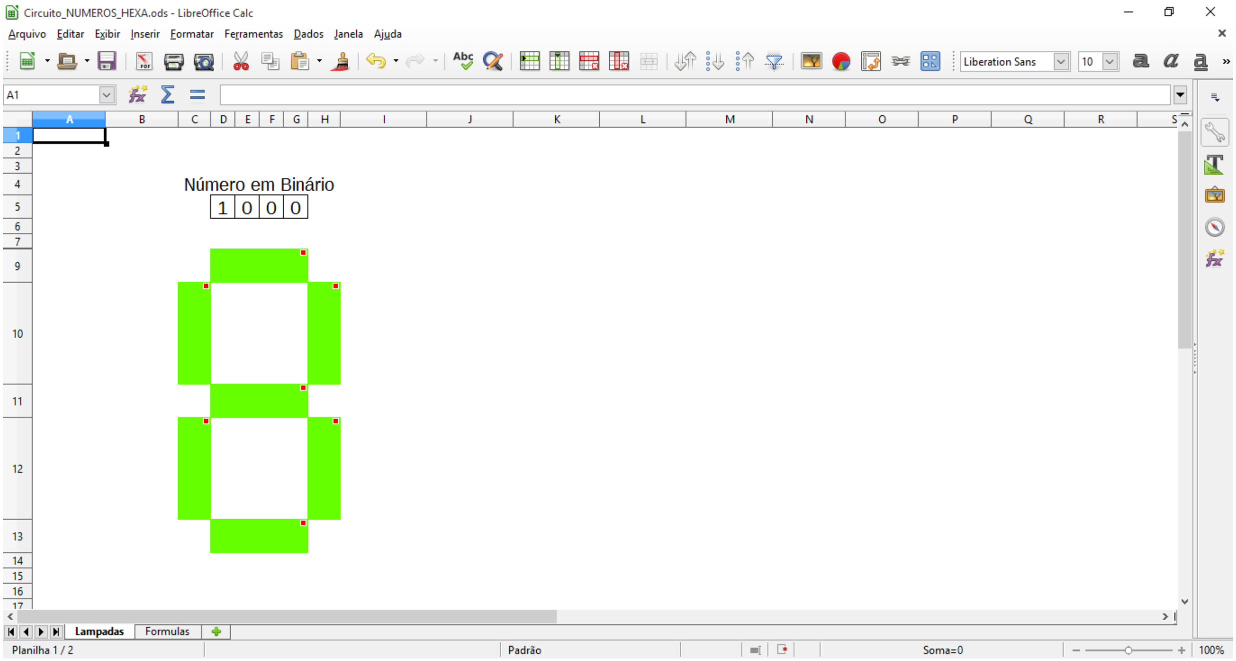


Figura 3.9: Versão final da tabela do display de 7 segmentos

As fórmulas são:

$$
\begin{aligned}
D6 &= \text{NÃO(D5)} \\
E6 &= \text{NÃO(E5)} \\
F6 &= \text{NÃO(F5)} \\
G6 &= \text{NÃO(G5)} \\
D9 &= OU(E(E6;G6);E(D5;G6);E(D6;F5);E(E5;F5);E(D5;E6;F6);E(D6;E5;G5)) \\
H10 &= OU(E(E6;G6);E(D6;E6);E(D6;F5;G5);E(D6;F6;G6);E(D5;F6;G5)) \\
H12 &= OU(E(D6;F6);E(D5;E6);E(F6;G5);E(D6;E5);E(D6;G5)) \\
D13 &= OU(E(D5;F6);E(D6;E6;G6);E(E6;F5;G5);E(E5;F5;G6);E(E5;F6;G5)) \\
C12 &= OU(E(E6;G6);E(D5;F5);E(F5;G6);E(D5;E5)) \\
C10 &= OU(E(D5;E6);E(D5;F5);E(F6;G6);E(D6;E5;F6);E(E5;G6)) \\
D11 &= OU(E(E6;F5);E(F5;G6);E(D5;G5);E(D5;E6);E(D6;E5;F6))
\end{aligned}
$$

ATIVIDADE 3: Calculadora Humana

Conhecimentos Prévios: Operações com números em binário, em especial a adição, Lógica proposicional e conhecimentos sobre a porta XOR.

Tempo de aula: Duas aulas.

Objetivos: Realizar uma atividade dinâmica com os alunos onde eles mesmos serão as portas lógicas e aplicar o conhecimento adquirido até o momento em um objeto do dia a dia, a calculadora.

Descrição da atividade: De início, o professor irá determinar que o braço erguido corresponde a valor lógico verdadeiro (1) e o braço abaixado corresponde a falso (0). Como aquecimento pode ser feito um jogo do estilo vivo ou morto, onde o professor alternará a posição de seus braços de acordo com as figuras abaixo e os alunos vão responder como se fossem alguma das portas lógicas.

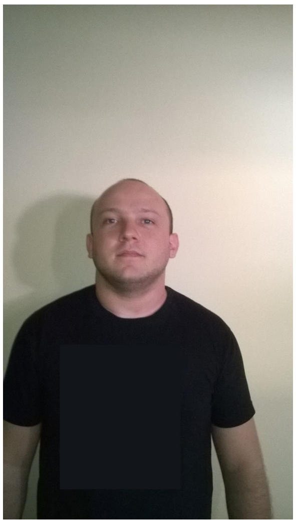


Figura 3.10: Professor representando valores 0 e 0.

Figura 3.11: Professor representando valores 0 e 1.

Figura 3.12: Professor representando valores 1 e 0.

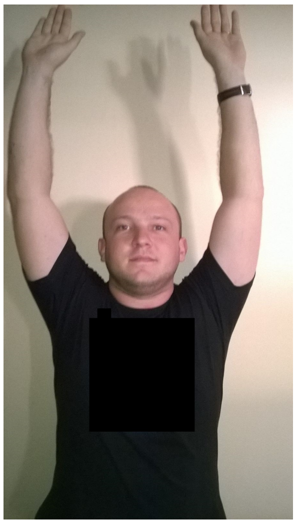


Figura 3.13: Professor representando valores 1 e 1.

Por exemplo, suponha que foi determinado para a turma representar a porta AND. Então a cada rodada o professor assumirá uma das quatro posições representadas nas figuras acima e os alunos só podem responder com um braço erguido caso o professor levante ambos os braços.

Para iniciar a atividade da calculadora humana de 1 bit são necessários grupos de três alunos, onde um deles representará os dois bits de entrada, outro será uma XOR representando a soma e o terceira será um AND. Uma forma de dispor os três alunos seria de acordo com o diagrama abaixo.

$$AND \qquad\qquad XOR$$
$$Entrada$$

Depois dos trios posicionados e sabendo duas respectivas tarefas vá pedindo para as pessoas responsáveis pelas entradas mudarem as posições dos braços e veja se os valores de AND e XOR, nessa ordem, correspondem à soma. Pode-se ainda, para aproveitar, fazer uma competição da calculadora mais rápida.

Já para realizar uma calculadora humana de 2 bits são necessários 15 alunos. A disposição deles vai obedecer a figura abaixo.

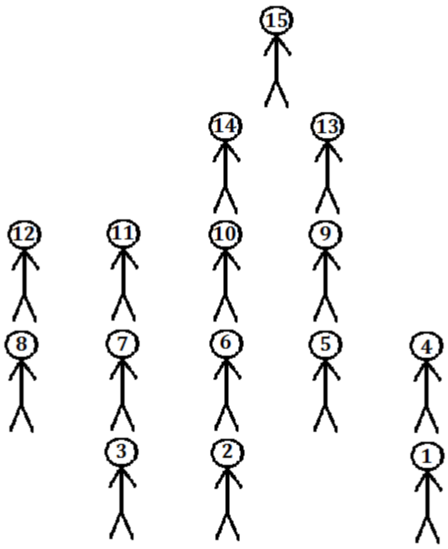


Figura 3.14: Disposição da calculadora humana de 2 bits

Em relação às funções de cada aluno em uma soma de dois bits $a_1a_0 + b_1b_0$ temos:

1. Representa os dígitos a_0 (braço esquerdo) e b_0 (braço direito);
2. Representa os dígitos a_1 (braço esquerdo) e b_1 (braço direito);
3. Repete as ações do aluno 5;
4. XOR em relação ao aluno 1;
5. AND em relação ao aluno 1;
6. XOR em relação ao aluno 2;

7. XOR em relação ao braço direito do aluno 2 e o aluno 3;

8. AND em relação ao braço direito do aluno 2 e o aluno 3;

9. NOT em relação ao aluno 5;

10. NOT em relação ao aluno 6;

11. AND em relação ao braço esquerdo do aluno 2 e o aluno 7;

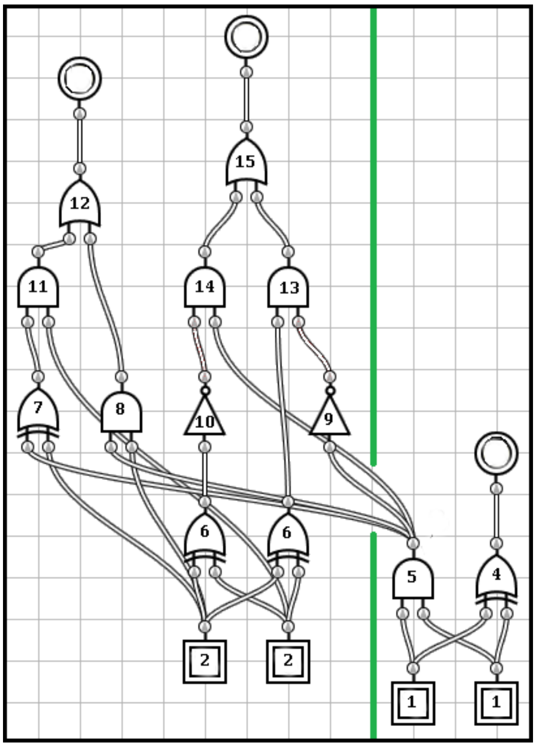
12. OR em relação aos alunos 8 e 11;

13. AND em relação aos alunos 6 e 9;

14. AND em relação aos alunos 5 e 10;

15. OR em relação aos alunos 13 e 14.

O resultado da soma são os alunos 12, 15 e 4 nessa ordem. Abaixo segue a Figura 2.9 rotacionada para ficar no formato da calculadora humana de dois bits. Observe que cada porta lógica foi numerada de acordo com a numeração dos alunos na Figura 3.14.



Relato de aplicação em sala de aula: Nesta parte, descrevo uma das atividades que envolvem a lógica e que foi aplicada em uma turma de 1^o ano do ensino médio do curso de informática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Campus Parelhas. A atividade desenvolvida foi a calculadora humana no dia 15 de setembro de 2015. A turma possuía 38 alunos que frequentavam as aulas regularmente, porém no dia da aplicação das atividades estavam presentes 15 alunos, sendo 4 meninas e 11 meninos, com faixa etária entre 14 e 16 anos. Para a realização da atividades foram utilizados 2 aulas seguidas de 45 minutos, das 10h30min às 12h00min.

O motivo de realizarmos apenas uma das atividades propostas foi que a lógica ainda não figura entre os conteúdos programáticos de matemática para o ensino médio. Consultando o setor pedagógico da instituição fui orientado a entrar em acordo com o professor da disciplina de lógica para a aplicação da atividade. De imediato, o professor achou que seria interessante aplicarmos uma delas, a calculadora, a fim de obtermos algum feedback sobre a atividade e pelo curto espaço de tempo disponível para a aplicação.

A principio o professor reuniu os alunos, explicou como funcionaria a atividade e distribuiu entre eles as funções que cada uma realizaria. Após isso, foi feito um teste para ver se cada aluno entendeu como funcionava a porta lógica que estava representando.

Figura 3.15: Professor testando as "portas lógicas".

Em seguida, com todos sabendo suas respectivas funções, foi iniciada a atividade da calculadora humana de 1 bit. Nas imagens abaixo está o registro fotográfico dessa atividade. A menina que está de costas representa a entrada dos bits, onde o primeiro é representado pelo braço esquerdo e o segundo pelo braço direito. Já os meninos representam a soma $a_1 a_0$, sendo o menino da esquerda o dígito a_1 e o da direita a_0.

Figura 3.16: Entrada 0 + 0 e resultado 00.

Figura 3.17: Entrada 0 + 1 e resultado 01.

Figura 3.18: Entrada 1 + 0 e resultado 01.

Figura 3.19: Entrada 1 + 1 e resultado 10.

Os demais alunos ficaram empolgados em participar e então foi sugerido que fosse realizada a calculadora humana de 2 bits. O posicionamento inicial foi registrado na imagem seguinte.

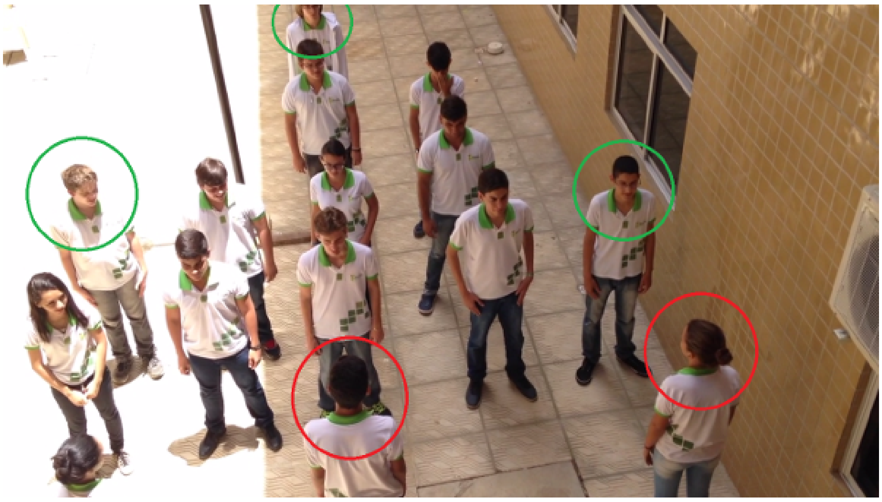


Figura 3.20: posicionamento dos alunos na calculadora humana de 2 bits.

Nesse posicionamento os alunos cujas cabeças estão circuladas em vermelho representam a entrada e os que estão circulados em verde são as saídas. Foram realizadas algumas tentativas inicialmente sem sucesso, pois os alunos ainda estavam acostumando-se com suas funções. Mas, após essas tentativas, a calculadora funcionou de maneira ideal. Segue abaixo uma imagem desse funcionamento.

Figura 3.21: Entrada 11 + 00 e resultado 011

Encerrada a calculadora humana, alguns alunos vieram até o professor e relataram, por exemplo: "Ah, agora eu entendi essa história de negação, eu pensava que dava sempre Falso"e "Finalmente entendi a diferença entre o ou normal e o ou exclusivo".

Considerações Finais

Alguns alunos já chegaram a falar em sala de aula que matemática não tem lógica. Refletindo sobre isso cheguei a duas constatações. A primeira é que os estudantes não sabem o que realmente seja a lógica e a segunda que o programa oficial de ensino de matemática brasileiro não contempla tal tópico.

A lógica proposicional está intimamente ligada com a matemática do ensino médio, desde enunciados onde há questões que utilizam o **e**, **ou** e **não** no seus sentidos lógicos até em linguagem de conjuntos. Vendo por esse lado, resolvi escrever essa dissertação com o intuito de promover a discussão sobre a adição do ensino da lógica ao currículo de matemática.

Sobre o trabalho em si foi muito interessante e satisfatório descobrir e aprender sobre as aplicações da lógica proposicional na construção de circuitos lógicos. Vejo ainda, a partir da experiência da aplicação com os alunos, que trabalhar esse tema através de atividades lúdicas o torna mais interessante e responde àquela pergunta constante dos alunos sobre o "Para que serve isso professor?".

Para concluir espero que como continuidade ao trabalho eu, ou qualquer outra pessoa, possa expandi-lo, aprofundá-lo e aplicar as demais atividades sugeridas. E mais, que daqui a algum tempo, as autoridades em matemática e demais pessoas encarregadas do currículo escolar vejam a contribuição que a inserção da lógica pode dar aos estudantes e a suas maneiras de raciocinar.

Apêndice A

Sistema de numeração binário

As pessoas comumente utilizam o sistema decimal posicional para representar os números naturais, mas há outros sistemas de numeração em uso, em especial o sistema binário, fortemente utilizado em computação. Os sistemas citados tem uma característica comum que é o fato de serem posicionais de base constante. Ambos os sistemas tem sua fundamentação no seguinte teorema, que é uma aplicação da divisão euclidiana.

Teorema A.1 *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, ..., c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que*

$$a = c_n b^n + ... + c_2 b^2 + c_1 b + c_0. \tag{A.1}$$

Prova: Vamos demonstrar o teorema usando a segunda forma do princípio da indução matemática sobre a. Se $a < b$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$.

Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, com\ r < b.$$

Daí $a - r = bq \Rightarrow q | a - r \Rightarrow q \leq a - r \Rightarrow q < a$. Pela hipótese de indução, segue que existem números naturais univocamente determinados m e $d_0, d_1, ..., d_m$, com $d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_m b^m + ... + d_2 b^2 + d_1 b + d_0.$$

Substituindo a segunda equação destacada na primeira temos,

$$\begin{aligned} a &= b(d_m b^m + ... + d_2 b^2 + d_1 b + d_0) + r \\ &= d_{m+1} b^{m+1} + ... + d_2 b^3 + d_1 b^2 + d_0 b + r. \end{aligned}$$

Tome $r = c_0, n = m+1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, ..., n.$, assim

$$a = c_n b^n + ... + c_2 b^2 + c_1 b + c_0.$$

A unicidade decorre das unicidades acima estabelecidas.

□

A expressão (A.1) será denominada a **expansão de a na base** b, onde b é a base e $(c_n c_{n-1} ... c_1 c_0)_b$ é a representação de a na base b.

Exemplo A.1 *Vamos representar o número 57 na base 2 e na base 3.*

Utilizando a ideia da demonstração acima, utilizaremos o algoritmo da divisão euclidiana para mudar o 57 da base 10 para a base binária. Vamos dividir o 57 por 2 sucessivas vezes até o quociente da divisão resultar em um número menor ou igual a 2.

$$\begin{aligned}
57 &= 28.2+1\\
&= (14.2).2+1\\
&= [(7.2).2].2+1\\
&= \{[(3.2+1).2].2\}.2+1\\
&= \{\{[(2.1+1).2+1].2\}.2\}.2+1\\
&= 2^5+2^4+2^3+1\\
&= 1.2^5+1.2^4+1.2^3+0.2^2+0.2^1+1.2^0\\
&= (111001)_2.
\end{aligned}$$

Agora na base 3, temos

$$\begin{aligned}
57 &= 19.3\\
&= (6.3+1).3\\
&= [(2.3).3+1].3\\
&= 2.3^3+3\\
&= 2.3^3+0.3^2+1.3^1+0.3^0\\
&= (2010)_3.
\end{aligned}$$

Portanto do número 57 da base decimal se escreve como $(111001)_2$ na base binária e $(2010)_3$ na base 3. Vale salientar que foram utilizados os parenteses com um índice 2 para não confundir o 57 binário com o 111001 da base decimal, o mesmo serve para o índice 3.

Exemplo A.2 *Represente o número 41 na base 5 e na base 7.*

O exemplo dado apesar de fugir da intenção geral dessa seção serve para mostrar a generalidade do teorema A.1.

$$\begin{aligned} 41 &= 5.8+1 \\ &= 5.(5.1+3)+1 \\ &= 5^2+5.3+1 \\ &= 1.5^2+3.5^1+1.5^0 \\ &= (131)_5. \end{aligned}$$

Agora na base 7, obtemos

$$\begin{aligned} 41 &= 5.7+6 \\ &= 5.7^1+6.7^0 \\ &= (56)_7. \end{aligned}$$

A.1 Operações

A.1.1 Adição

A adição no sistema binário é similar a realizada no sistema decimal, mas com a ressalva de haver apenas dois algarismos. Dessa forma, vamos listar todos os resultados possíveis na soma de dois algarismos do sistema binário. Assim:

$$\begin{aligned} 0+0=0, &\quad \text{vai } 0, \\ 1+0=1, &\quad \text{vai } 0, \\ 0+1=1, &\quad \text{vai } 0, \\ 1+1=0, &\quad \text{vai } 1. \end{aligned}$$

Exemplo A.3 *Vamos somar os binários* $(101)_2$ *e* $(110)_2$

Vamos realizar a soma de duas maneiras, a primeira usando o teorema e a segunda usando um método prático.

$$\begin{aligned}(101)_2+(110)_2 &= (1.2^2+0.2^1+1.2^0)+(1.2^2+1.2^1+0.2^0)\\ &= 1.2^2+1.2^2+0.2^1+1.2^1+1.2^0+0.2^0\\ &= 2.2^2+1.2^1+1.2^0\\ &= 1.2^3+0.2^2+1.2^1+1.2^0\\ &= (1011)_2.\end{aligned}$$

Ou de forma prática, segue que

$$\begin{array}{cccc} {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & \\ & 1 & 1 & 0\\ + & 1 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 1 & 1\end{array}$$

A.1.2 Subtração

A subtração no sistema binário segue a mesma linha de raciocínio da adição em relação a base decimal. Um resultado que merece destaque é 0 - 1. Assim como ocorre no sistema decimal existe um “empréstimo"de uma unidade do próximo número não-nula. Portanto

$$\begin{aligned} 0-0&=0, \quad \text{pede } 0,\\ 1-0&=1, \quad \text{pede } 0,\\ 0-1&=1, \quad \text{pede } 1,\\ 1-1&=0, \quad \text{pede } 0.\end{aligned}$$

Exemplo A.4 *Subtraia* $(1010)_2$ *de* $(1101)_2$

$$\begin{aligned}(1101)_2-(1010)_2 &= (1.2^3+1.2^2+0.2^1+1.2^0)-(1.2^3+0.2^2+1.2^1+0.2^0)\\ &= 1.2^3-1.2^3+1.2^2-0.2^2+0.2^1-1.2^1+1.2^0-0.2^0\\ &= 1.2^2-1.2^1+1.2^0\\ &= 2.2^1-1.2^1+1.2^0\\ &= 1.2^1+1.2^0\\ &= (0011)_2.\end{aligned}$$

Fazendo de outra maneira, temos

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & {\scriptstyle 1} & \\
 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\
- & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Explicando o cálculo a partir da primeira coluna da direita: 1 - 0 = 1, pela definição; Na segunda coluna da direita 0 - 1 = 1 e pediu 1 ao número ao lado que está em negrito; Na terceira coluna temos 0 - 0 = 0 e, por último, 1 - 1 = 0 na coluna da esquerda.

A.1.3 Multiplicação

A multiplicação em binário segue as mesmas regras da multiplicação no sistema decimal.

$$0 \text{ x } 0 = 0,$$
$$1 \text{ x } 0 = 0,$$
$$0 \text{ x } 1 = 0,$$
$$1 \text{ x } 1 = 1.$$

Exemplo A.5 *Multiplique os binários* $(1001)_2$ *e* $(110)_2$

$$
\begin{aligned}
(1001)_2.(110)_2 &= (1.2^3+0.2^2+0.2^1+1.2^0)(1.2^2+1.2^1+0.2^0)\\
&= 1.2^3.2^2+1.2^3.2^1+1.2^0.2^2+1.2^0.2^1\\
&= 1.2^5+1.2^4+0.2^3+1.2^2+1.2^1+0.2^0\\
&= (110110)_2.
\end{aligned}
$$

De outra maneira, obtemos

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & \text{x} & & 1 & 1 & 0 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

A.1.4 Divisão

A divisão entre binários é análoga à divisão entre números decimais.

Exemplo A.6 *Divida* $(1010)_2$ *por* $(101)_2$

Usando o algoritmo de Euclides, temos

$$
\begin{array}{rcccccl}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \underline{|1\;0\;1} \\
- & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & & & \;\;1\;\;0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & - & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

Sugestões de Exercícios

1. Represente os números abaixo nas bases indicadas:

a) 130 na base 2;

b) 791 na base 6;

c) 289 na base 9;

2. Efetue as operações indicadas entre os números binários abaixo:

a) 1011010 + 1001110;

b) 11110111 - 10111110;

c) 1010101 x 11101;

d) 1010010000 ÷ 1011;

Referências Bibliográficas

[1] CANAVARRO, A.P.; PONTE, J.P. *O papel do professor no currículo de Matemática* 2005. Disponível em: < http : //docs.di.fc.ul.pt/bitstream/10451/4085/1/05 – Canavarro – Ponte%28GTI%29.pdf >.Acesso em: 19 de abril de 2015.

[2] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio*

[3] CARVALHO, J.N. *Relações inter-hemisféricas cerebrais* . Disponível em: < http : //pt.slideshare.net/andersonbalbinot/relacoes – interhemisfericas2 >. Acesso em: 02 de agosto de 2015.

[4] COPI, I. M. *Introdução à Lógica* São Paulo: Mestre Jou, 1978. 488 p.

[5] HEGENBERG, L. *Lógica* Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2015. 426 p.

[6] GARNIER, R.; TAYLOR, J. *Discrete Mathematics for New Technology.* Londres: Institute of Physics, 2002. 749 p.

[7] MATIAS, R.R.; JÚNIOR, J.M.P.M. *Laboratório de Circuitos Lógicos.* Disponível em: < http : //www.ufpi.br/subsiteFiles/menezes/arquivos/files/Guia$_e$xperimentos%204.pdf >. Acesso em: 08 de agosto de 2015.

[8] GUNTZEL, J.L.; NASCIMENTO, F.A. *Introdução aos Sistemas Digitais.* Disponível em: < http : //www.inf.ufsc.br/ guntzel/isd/isd2.pdf >. Acesso em: 08 de agosto de 2015.

[9] DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. São Paulo: Editora Atlas S.A., 2008. 167 p.

[10] HEFEZ, A. *Elementos de aritmética* Rio de Janeiro: SBM, 2011. 176 p.

[11] Logic Gate Simulator. Disponível em: $< http://www.kolls.net/gatesim/ >$. Acesso em: 18 de setembro de 2015.

[12] LibreOffice. Disponível em: $< https://pt-br.libreoffice.org/ >$. Acesso em: 18 de setembro de 2015.

[13] Planilha do Display de sete segmentos. Disponível em: $< https://www.dropbox.com/s/5poxs56cfa6x9bf/Circuito_{N}UMEROS_{H}EXA.ods?dl = 0 >$. Acesso em: 21 de setembro de 2015.