Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

FUNÇÕES E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES

por

Márcio André Costa Barbosa

sob orientação do

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Setembro/2015
Natal - RN

FUNÇÕES E ALGUMAS DE SUAS PROPRIEDADES

por

Márcio André Costa Barbosa

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFRN, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Funções.

Aprovado por:

Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira - UFRN (Orientador)

Prof. Dr. Viviane Simioli Medeiros Campos - UFRN (Membro Interno)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos - UFCG (Membro Externo)

Setembro/2015

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Barbosa, Márcio André Costa.
Funções e algumas de suas propriedades / Márcio André Costa Barbosa. - Natal, 2015.
xiv, 84 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Campos Pereira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Definição de Função – Dissertação. 2. Algumas propriedades de funções – Dissertação. 3. Modelagem – Dissertação. I. Pereira, André Gustavo Campos. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET CDU: 517.5

Dedicatória

"Dedico este trabalho a minha esposa, Arlete Gurgel, e ao nosso filho, Miguel Gurgel."

Agradecimentos

A quem eu poderia agradecer primeiramente, senão àquele que esteve e permanece presente em todos os momentos da minha vida, que me levanta quando tropeço ou mesmo quando desanimo com a intolerância dos homens, e que me conduz em seu caminho de luz e sabedoria. Verdadeiro amigo, de amor infinito que nem a matemática mais avançada consegue explicar. Assim é o nosso Deus, que enviou seu único filho para nos salvar e para nos mostrar o quanto ele nos ama de verdade. Amo ao Senhor e o agradeço pelos momentos de tristeza, pois me fizeram crescer, e pelos momentos de felicidade que o Senhor proporcionou na minha vida e na vida de minha família.

Agradeço também ao professor e orientador Dr. André Gustavo, doutor no título e na arte de ensinar, que com sua paciência e extrema dedicação, sempre me incetivou e apoiou nos momentos difíceis, tornando possível criar uma proposta de trabalho diferente com iniciativa de tentar ajudar àqueles que o leem, mostrando o quanto valeu a pena o tempo que passamos para desenvolvê-lo. Sem me esquecer de agradecer a sua esposa, profª. Dra. Viviane Simioli, quem me orientou no início dessa jornada, mostrando-se uma pessoa de grande coração e profundo conhecimento na área em que atua.

Meus agradecimentos a todos os professores e amigos do PROFMAT, sempre caminhando juntos e passando pelas mesmas dificuldades em sala de aula, rompendo barreiras que pareciam inquebráveis, mas mantendo sempre um ambiente alegre e descontraído, com pequenas pausas entre as aulas para um "lanchinho" providencial, que nos induzia a um debate de dúvidas sobre os conteúdos apresentados.

Lembro de agradecer minha família: amigos verdadeiros, sogro, sogra, cunhados, irmãos, sobrinhos e, principalmente, meus pais, Manoel Félix e Maria das Graças, que tanto me apoiaram e acreditaram que esse dia iria chegar. Sem contar os momentos de orações e lágrimas de minha mãe e de meu pai, que tomaram para si o fardo de minhas noites em claro, como também os sábios conselhos de meu irmão Maikon, que há pouco tempo passou por experiência semelhante e, que graças à Deus, foi bem sucedida.

Claro que não poderia deixar de agradecer a minha esposa, Arlete Gurgel, e ao nosso filho, Miguel Gurgel, que foram e sempre serão minha fonte de inspiração, que vivem tudo o que se passa comigo, compartilhando os mesmos sonhos e emoções, apoiando-me e orando por tudo o que acontece em nossas vidas, sem os quais eu não teria forças para continuar em frente com a mesma garra e determinação.

"A Matemática, quando a compreendemos bem, possui
não somente a verdade, mas também a suprema beleza."

Bertrand Russel
(1872-1970)

Resumo

Neste TCC tratamos de um tópico muito básico, porém essencial em Matemática, a saber: Funções. Muitos alunos entram na universidade se perguntando: Para que serve função? Pensando nisso, procuramos nos adiantar a essa pergunta e tentamos mostrar que funções aparecem de maneira tão natural que foi preciso um nome para caracterizar essa associação dos elementos de dois conjuntos. Depois que essa definição foi estabelecida, aproveitamos para apresentar e formalizar alguns conceitos que as funções possuem, como: crescimento/decrescimento, injetividade, etc.

Palavras chave: Definição de função . Algumas propriedades de funções . Modelagem

Abstract

In this TCC the deal with a underlying but essential topic of Mathematics, namely: Functions. Many students start their course in the University asking: Why do we need functions? With that in mind we try to antecipate to this question and we try to show that functions come up so naturally that a name was needed to express that association which exists between the elements of two sets. After this definition was established, we present and formalize some other concepts that functions might have, as: an interview of ascendence/descendence, 1-1, etc.

Keywords: Function's definition. Some function's properties. Modelling

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Vemos que funções é um assunto muito temido no ensino fundamental e médio. Além disso, constatamos que os alunos chegam ao ensino superior sem entender realmente tal conceito. Isso compromete muito o entendimento posterior das propriedades que algumas funções possuem, a saber: Injetividade, sobrejetividade, bijetividade, crescimento/decrescimento, paridade, etc.

Acreditamos que isso acontece devido ao modo que o assunto é apresentado aos alunos. Parece-nos que a forma de começar o estudo de função não deveria ser pela apresentação da definição e em seguida exemplos apresentando situações que satisfazem o conceito que acabou de ser apresentado. Acreditamos que a maneira de apresentar tal conceito deveria ser em uma ordem inversa. Primeiro, deveríamos apresentar situações do cotidiano aos alunos. Situações que possam ser modeladas de maneira natural, e estas nos levem para uma formalização do conceito desejado.

Tentando exemplificar como deveria ser feita essa abordagem, desenvolvemos este trabalho. Aqui, apresentamos uma forma alternativa, que acreditamos ser mais eficaz e mais natural de apresentar o conceito de função, e suas propriedades. Cremos que essa abordagem tome um pouco mais de tempo, esse tempo a mais será compensado mais a frente quando necessitarmos novamente do conceito de funções em contextos mais específicos. A revisão do conceito se dará de forma mais rápida.

Esta dissertação é dividida em quatro capítulos. No segundo capítulo, apresentamos o conceito de função, apresentando a ideia de domínio, contradomínio, imagem e lei de formação, bem como o conceito de igualdade de funções. No terceiro capítulo, apresentamos algumas propriedades como: Injetividade, sobrejetividade e bijetividade, extensão/restrição, composta e inversa de funções, conceito de crescimento/decrescimento e paridade. Além disso, no quarto capítulo, aproveitamos para dar a ideia de gráfico de uma função, e como verificar através do gráfico, algumas propriedades apresentadas no Capítulo 3.

Capítulo 2

Reconhecendo uma Função no Cotidiano

Você já parou para pensar como as pessoas têm a necessidade de associar as coisas? Por exemplo, associado ao nome de uma pessoa, temos o CPF (Cadastro de Pessoa Física) e o RG (Registro Geral). Já na escola, mais precisamente, nas aulas de educação física, temos ligados ao nome, o peso e a altura. Na universidade, temos o número da matrícula. Esses são exemplos de algumas das inúmeras associações que podem ser criadas envolvendo o nome de uma pessoa. Esquematicamente, podemos imaginar algo da forma da Figura 2.1.

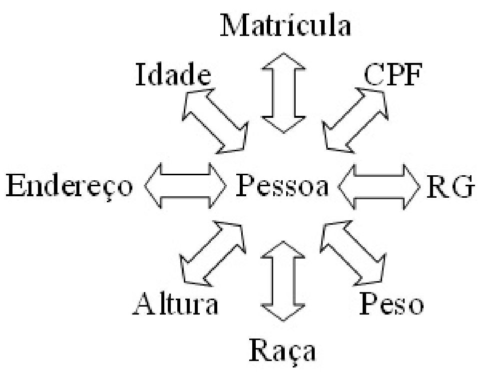

Figura 2.1: Pessoas e algumas associações.

Vejamos outras situações do nosso dia a dia em que associações entre objetos de várias naturezas aparecem naturalmente.

Exemplo 2.0.1 *Uma pessoa sai de casa para o trabalho de carro e, ao passar por um posto de combustível, ela decide parar o carro para abastecer com gasolina, cujo preço do litro está três reais e trinta e quatro centavos (R$ 3,34). Daí, enquanto o frentista abastece o tanque, a pessoa fica observando a marcação da bomba através do visor, no qual aparece, de forma instantânea, a quantidade de gasolina abastecida e o preço a ser pago. Claro que estes valores mudam rapidamente à medida que o tanque é abastecido, mas, ainda assim, ela verifica e anota alguns valores, como mostra a Tabela 2.1.*

Litros	Preço
1,4	4,68
6,9	23,05
11,5	38,41
17,2	57,45
22,8	76,15
29,4	98,20
40	133,60

Tabela 2.1: Quantidades de litros × Preços.

Vemos, neste exemplo, que existe alguma ligação entre os valores da coluna da esquerda com aqueles da coluna da direita. Não são números escolhidos ao acaso que aparecem lado a lado.

Exemplo 2.0.2 *Na maioria das academias é comum, no primeiro dia de aula, o instrutor fazer anotações sobre as medidas dos alunos: cintura, bíceps, peso, altura, etc. Dependendo do que ele queira acompanhar, é possível fazer várias associações.*

Por exemplo, se ele quer acompanhar o peso do aluno mês a mês, ele poderá construir uma tabela, como a Tabela 2.2.

Mês - Ano	Peso
Outubro - 2014	88 kg
Novembro - 2014	90 kg
Dezembro - 2014	85 kg
Janeiro - 2015	85 kg
Fevereiro - 2015	80 kg

Tabela 2.2: Meses e anos × Pesos.

Por outro lado, se ele quer acompanhar o IMC do aluno mês a mês, será preciso, além do mês e do ano, o peso e a altura para cada mês, como mostrado na Tabela 2.3.

Mês - Ano - Peso - Altura	IMC
Janeiro - 2014 - 85 kg - 1,78 m	26,23
Fevereiro - 2014 - 95 kg -1,78 m	29,98
Março - 2014 - 93 kg - 1,78 m	29,35
Abril - 2014 - 90 kg - 1,78 m	28,41
Maio - 2014 - 92 kg - 1,78 m	29,04

Tabela 2.3: Meses, anos, pesos e alturas × IMC.

Caso o instrutor queira apenas fazer um levantamento sobre o IMC atual dos alunos, ele montará uma tabela como a Tabela 2.4.

Alunos da academia	Peso - Altura	IMC
João	80 kg - 1,78 m	25,25
Patrícia	50 kg - 1,64 m	18,59
Marcos	70 kg - 1,70 m	24,22
Andreza	65 kg - 1,68 m	23,03
Samuel	85 kg - 1,75 m	27,76

Tabela 2.4: Alunos, pesos e alturas × IMC.

Exemplo 2.0.3 *Na cidade de Natal, capital do estado do Rio Grande do Norte, as tarifas praticadas pelos taxistas, segundo a SEMOB (Secretaria de Mobilidade Urbana), passaram a ser, a partir de oito de janeiro de 2014, R\$ 4,55 para bandeirada, R\$ 2,35 para bandeira I e, R\$ 3,30 para bandeira II. Nesse sistema de tarifas, o valor da bandeirada é um valor fixo acrescido ao custo da corrida, que é obtido multiplicando-se o valor da bandeira I ou II, pela quantidade de quilômetros rodados. Dessa forma, no momento em que você entra num táxi que esteja funcionando com bandeira I, você verá o taxímetro marcando 4,55 e, à medida que o táxi se desloca, você vai observando algumas mudanças de valores no taxímetro: 4,55 - 6,90 - 9,25 - 11,60 - 13,95 - 16,30 - $\cdots$. Se você pega o mesmo táxi, num horário de bandeira II, você observa outros valores: 4,55 - 7,85 - 11,15 - 14,45 - 17,75 - 21,05 - $\cdots$.*

Exemplo 2.0.4 *Algumas instituições financeiras de cartões de crédito informam em suas faturas os percentuais de juros que incidirão sobre o montante devido em caso de atraso no pagamento por parte dos clientes.*

A Figura 2.2, a seguir, mostra parte da fatura de uma destas instituições, na qual o percentual de encargos por financiamento de fatura é 9,90%, e de juro de mora e de multa são 1,00% e 2,00%, respectivamente. Se a fatura for paga com atraso, incide sobre o total da fatura os juros, que são a soma dos encargos por financiamento de fatura com o juros de mora e a multa.

Despesas Internacionais em Dólar (US$)

TOTAL Internacional (R$)	**0,00**
Cotação (R$)	**0,00**
Total de despesas Nacional + Internacional (R$)	**466,56**

SALDO ANTERIOR(R$)	-	CRÉDITOS E PAGAMENTOS(R$)	+	DÉBITO E DESPESAS(R$)	=	TOTAL DA FATURA(R$)
250,99		-250,99		466,56		466,56

PAGAMENTO MÍNIMO (R$)
78,00

INFORMAÇÕES FINANCEIRAS

Encargos por financiamento de fatura (%)	9,90
Encargos de saque no mês (%)	5,90
Encargos máximos para o próximo mês (%)	16,99
Mora (%)	1,00
Multa (%)	2,00

Figura 2.2: Fatura do cartão de crédito.

Suponha que o cliente não coseguirá pagar sua fatura (a da Figura 2.2) até o vencimento, e tenha pedido ao seu gerente que lhe enviasse o quanto pagará de juros, caso pagasse em até 5 dias após o vencimento. Alguns dias depois, seu gerente lhe envia uma tabela, como a Tabela 2.5.

Dias em atraso	Juros
1	R$ 11,26
2	R$ 12,99
3	R$ 14,72
4	R$ 16,45
5	R$ 18,18

Tabela 2.5: Dias em atraso $\times$ Juros.

Exemplo 2.0.5 *Um banco realiza empréstimos a uma taxa de juros de 3,78% ao mês. Um cliente que venha a realizar um empréstimo de R$ 1000,00 neste banco,* *com a finalidade de quitá-lo em uma só parcela, será informado pelo gerente que: depois de um mês, o montante devido é de R$ 1037,80; depois de dois meses, é de R$ 1077,03; depois de três meses, é de R$ 1117,74; depois de quatro meses, é de R$ 1159,99; etc. Você pode perceber que, quanto mais tempo ele levar para quitar a dívida, maior será o valor que ele terá que pagar.*

Exemplo 2.0.6 *Em Parnamirim, munícipio do estado do Rio Grande do Norte, região de grande crescimento na construção civil, algumas imobiliárias optaram por vender terrenos usando o preço do metro quadrado, acreditando ser uma maneira lucrativa e rápida de vendê-los. Suponha que uma delas só venda terrenos retangulares com um dos lados fixo em 15 metros, ao preço de 400 reais o metro quadrado. Então, o comprador observa que o valor de um terreno em que o outro lado mede 10 metros é 60 mil reais. Além disso, ele percebe que a cada metro que venha acrescentar a este lado, o valor vai aumentando conforme mostra a Tabela 2.6.*

Acréscimo aos 10 metros	Preços
0	60000
1	66000
2	72000
3	78000
4	84000
5	90000
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2.6: Metros acrescidos a 10m × Preços.

Exemplo 2.0.7 *Ao chegar nos correios para enviar uma carta, deparamo-nos com uma tabela de preços para envio de cartas comerciais de diversos pesos, conforme mostra a Figura 2.3.*

Peso (g)	Sem serviços adicionais	Registrada	Registrada + AR*	Registrada + MP**	Reg+AR+MP
Até 20	1,30	4,50	7,70	8,80	12,00
Mais de 20 até 50	1,80	5,00	8,20	9,30	12,50
Mais de 50 até 100	2,45	5,65	8,85	9,95	13,15
Mais de 100 até 150	3,00	6,20	9,40	10,50	13,70
Mais de 150 até 200	3,60	6,80	10,00	11,10	14,30
Mais de 200 até 250	4,15	7,35	10,55	11,65	14,85
Mais de 250 até 300	4,70	7,90	11,10	12,20	15,40
Mais de 300 até 350	5,25	8,45	11,65	12,75	15,95
Mais de 350 até 400	5,80	9,00	12,20	13,30	16,50
Mais de 400 até 450	6,35	9,55	12,75	13,85	17,05
Mais de 450 até 500	6,90	10,10	13,30	14,40	17,60

Figura 2.3: Tabela dos Correios com valores de envio de cartas comerciais.

Desta forma, para cartas que não exigem serviços adicionais, teríamos, por exemplo: para enviar uma carta cujo peso é 15 gramas, o valor a ser pago é R$ 1,30; para outra cujo peso é 23 gramas, o valor é R$ 1,80; uma cujo peso é 78 gramas, o *valor a ser pago é R$ 2,45; uma cujo peso é 130 gramas, o valor a ser pago é R$ 3,00. Já para objetos que ultrapassam 500 gramas, o valor tomado como base é o da prestação do SEDEX.*

Vemos, pelos exemplos acima, que existem várias formas de associar grandezas, (quantidade de combustível com o preço pago, dias em atraso com juros pagos, etc). Em todas essas associações sempre existem dois conjuntos envolvidos, geralmente, um que contém as informações que você fornece, e outro, que contém as respostas que estão associadas às informações dadas. No Exemplo 2.0.1 da gasolina, se você deseja abastecer 20 litros, você informa isso para o frentista e, ao final do abastecimento, teremos em um visor 20, e no outro visor, o valor a ser pago por aquela quantidade de combustível. No Exemplo 2.0.7 dos correios, você entrega sua correspondência a qual é pesada, esse peso é a informação fornecida, e a seguir, a atendente te dará o preço a ser pago de acordo com a tabela vigente. Podemos imaginar que as associações que vimos sempre pegam uma informação em um conjunto (quantidade de combustível, peso da carta, etc) e os transformam em outra informação, só que em outro conjunto (preço da quantidade de combustível abastecida, preço para enviar a carta com o peso fornecido, etc).

Assim, podemos representar a ligação entre dois conjuntos por meio de um diagrama, como mostra a Figura 2.4.

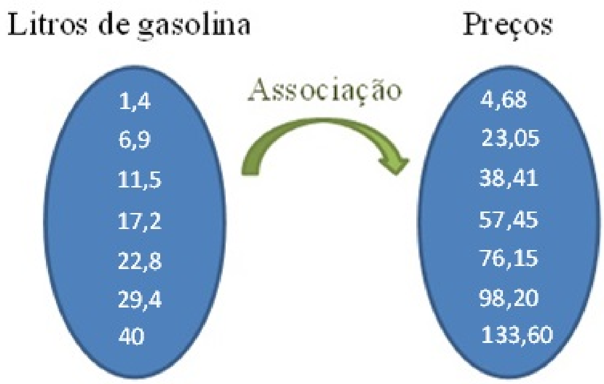

Figura 2.4: Representação de uma associação em forma de diagrama.

Para diferenciar tais conjuntos, poderíamos chamar o primeiro de conjunto de partida (aquele que fornece a informação inicial), e o segundo, de conjunto de chegada (aquele que fornece a informação associada à informação inicial dada).

Note que as associações dos exemplos anteriores possuem outra propriedade muito importante, a saber: A cada informação dada, obtemos apenas uma única informação associada. Por exemplo, a cada quantidade de combustível abastecida, existe apenas um único valor a ser pago; a cada quantidade de dias em atraso no cartão existe apenas um valor de juros a ser pago, etc.

Por que isso é importante? Imagina que você vai abastecer 20 litros de combustível e aparecesse no visor de preços R$ 10,00 e R$ 20,00. Qual dos dois você pagaria? Qual dos dois o dono do posto cobraria? Isso geraria uma dubiedade, ou seja, geraria uma confusão que não nos permitiria saber exatamente o valor correto.

Observação 2.0.1 *Olhemos novamente a Figura 2.1. Algumas relações daquelas podem não cumprir essa exigência, isto é, a que cada informação dada, se obtém uma única informação associada. Por exemplo, numa escola pode ter crianças, cujos pais são separados, e que eles optaram pela guarda compartilhada da criança, de modo que alguns dias por semana o filho fica com o pai, e nos outros dias, ele fica com a mãe. Nesta situação vemos que o nome da criança pode estar associada com dois endereços distintos. Um outro exemplo é a associação entre o nome de uma pessoa* *e o número de seu celular, pois hoje em dia quase todo mundo tem chips de mais de uma operadora instalados em seus telefones celulares, de modo que associado ao nome de uma pessoa, podemos ter vários números de telefones celular.*

Em Matemática, tais situações não ocorrem, a mesma preza pela precisão. De uma forma mais elegante, FILHO [3] nos afirma sobre a linguagem Matemática: "Na linguagem matemática não há lugar para ambiguidades, para figuras de linguagem ou para metáforas, que são tão comuns e até mesmo apreciadas na Linguagem Coloquial ou Literária"(FILHO, 2006, [3]).

Dessa forma, se fizermos uma associação que nos leve a dubiedade, tal associação não servirá para o que se destina, pois causará mais confusão do que ajuda. Por exemplo, imagina que você informa ao seu gerente que está 5 dias em atraso do pagamento do seu cartão de crédito e ele diz que a multa é R$ 50,00 ou R$ 100,00. Primeiro, você vai achar que ele está brincando, e vendo que ele espera uma resposta sua, você diz que vai pagar os R$ 50,00. Dessa forma, ele diz que gostaria que você pagasse os R$ 100,00. Já imaginou a confusão?

E o que podemos falar sobre os conjuntos de partida e chegada?

Esses conjuntos são muito importantes e são determinados pelo problema que estamos descrevendo. No caso do carro que vamos abastecer, se o tanque tem capacidade de 55 litros, então a quantidade de combustível a ser informada é de 0 a 55 litros e, como qualquer quantidade entre esses valores pode ser abastecida, o conjunto que representa tal conjunto de saída é [0,55].

E o conjunto de chegada?

Neste caso temos que ver quais os preços associados a estes valores extremos, sabendo que para qualquer quantidade abastecida, o valor cobrado está entre os valores cobrados pela quantidade mínima e máxima a serem abastecidas. Neste caso, para abastecer 0 litro ele pagará $3,34 \times 0 = 0$, e para abastecer 55 litros, ele pagará $3,34 \times 55 = 183,70$ e, portanto, o conjunto de chegada será $[0, 183.70]$.

Entretanto, é muito comum utilizarmos para estes conjuntos, conjuntos que sirvam não apenas para situações particulares, como a do carro citado, mas que sirva para qualquer carro, assim utiliza-se para o conjunto de partida, conjuntos do tipo $[0, \infty)$ (pois não podemos abastecer uma quantidade negativa de combustível), e para o conjunto de chegada, conjuntos $[0, \infty)$ (pois nunca nos cobrariam em um posto um valor negativo por uma quantidade de combustível abastecida).

Vejamos como ficariam os conjuntos de partida e de chegada para os outros exemplos, e como geralmente são representados.

Pense no Exemplo 2.0.2 da academia, se você todo mês usa a balança para se pesar, as informações que você fornece são os meses e anos em que você se pesou. Por exemplo, no caso em que o aluno se pesou nos meses de outubro de 2014 até fevereiro de 2015, podemos representar estas informações num conjunto do tipo {(outubro, 2014), (novembro, 2014), (dezembro, 2014), (janeiro, 2015), (fevereiro, 2015)}, que é o conjunto de partida. Supondo que cada mês a balança mostrou 88 kg, 90 kg, 85 kg, 85 kg e 80 kg, então esses pesos são as respostas para as informações fornecidas (meses e anos) e fazem parte do conjunto de chegada {88 kg, 90 kg, 85 kg, 80 kg}.

Da mesma forma, você pode imaginar dois conjuntos no Exemplo 2.0.3 da corrida de táxi, um conjunto com as quantidades de quilômetros rodados, e outro conjunto, com os valores a pagar, onde a cada quantidade de quilômetros rodados, associamos um único valor a pagar. Pois, se você entra no táxi e anda 0 km, você paga um valor, se você anda 1 km, você paga outro valor, se anda 2 kms, você paga outro valor, e assim por diante. Perceba que formamos um conjunto {0 km, 1 km, 2 kms, ...}, com os dados iniciais que serão usados para encontrar os valores a pagar, e que fazem parte do conjunto de partida. Este é um conjunto formado por valores que não são negativos (pois você não percorre distância negativa), e nem de valores decimais, como 0,5 km ou 3,66 kms.

E como conjunto de chegada?

A resposta está nos valores que aparecem no taxímetro depois do táxi andar aquela quantidade de quilômetros. Por exemplo, se o taxímetro mostrar os números 4.55, 6.90, 9.25, 11.60, etc, então o conjunto de chegada será {R$ 4,55, R$ 6,90, R$ 9,25,...} composto por valores a pagar não-negativos (pois o passageiro não recebe dinheiro do taxista).

E no caso do empréstimo (Exemplo 2.0.5) que você pede ao banco?

Você já sabe dizer qual informação é dada? Para ficar mais fácil entender, imagine que você vai ao banco e pede um empréstimo de 1000 reais. O gerente verifica a taxa de juros vigente e pergunta quanto tempo você levará para pagar. Assim, se você diz que pagará daqui a quatro meses, o gerente diz que o montante é R$ 1159,99. Perceba, neste exemplo, que a informação dada é a quantidade de meses (quatro meses), e a informação gerada dessa informação, é o montante a ser pago (R$ 1159,99). De maneira mais geral, se a informação fornecida for qualquer quantidade inteira de meses, a resposta dessa informação é o montante associado a essa quantidade dada, então nosso conjunto de saída é {1, 2, 3, 4,...}, e o conjunto de chegada é {1037.80, 1077.03, 1117.74, 1159.99,...}.

Vemos que uma associação para servir aos propósitos a que comentamos precisa ser coerente, ou seja, um elemento não pode estar associado a dois ou mais elementos. Além disso, só consideramos os elementos do conjunto de partida que estejam, de fato, associados a alguém no conjunto de chegada. No Exemplo 2.0.2 da academia, se uma dada pessoa não fez as medidas num determinado mês e ano, então mesmo ela estando no conjunto de partida, como aluno da academia, ela não terá nenhum elemento associado àquele aluno naquele mês e ano, ou seja, somos incapazes de dizer qualquer coisa sobre seu peso, pois não está associado a nenhum valor.

2.1 Domínio de uma Associação

No caso dos correios (Exemplo 2.0.7), não existe nenhum valor associado a valores negativos nem associado ao peso de 0 grama (neste exemplo, pesos negativos não existem), logo os números que comporão o conjunto de partida são apenas os números maiores que zero. A este subconjunto do conjunto de partida, aqueles que realmente possuem algum (e único) elemento no conjunto de chegada associado a ele, chamamos de **DOMÍNIO** da associação. Note que os elementos do domínio são, de fato, elementos do conjunto de partida que estão associados a alguém.

Portanto, a partir deste momento, toda associação que montarmos terá como conjunto de partida o conjunto domínio da associação. Vemos que, no Exemplo 2.0.1 da gasolina, o domínio será $R^+ = [0, \infty)$, pois a cada quantidade maior ou igual a zero, podemos associar um número que representa a quantia a ser paga por aquela quantidade de combustível.

No Exemplo 2.0.6 do terreno, as informações que você fornece são as quantidades de metros que acrescentamos a um dos lados, e as informações geradas são os preços do terreno com o acréscimo informado. Por exemplo, se você diz ao seu corretor que quer um terreno com acréscimo de 3 metros, então o valor que ele vai te dar é 78000 reais, e o tamanho do seu terreno será $13m \times 15m$ (lê-se: 13 metros de largura por 15 metros de comprimento). Assim, se você considerar todos os acréscimos possíveis, o **DOMÍNIO** da associação A é o conjunto dos números inteiros não-negativos (os acréscimos aos 10 metros), ou seja, A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}, e o contradomínio B pode ser o conjunto dos números $\mathbb{R}$ (contém todos os possíveis preços de terreno). Observe que o conjunto dos números reais positivos também pode ser considerado como contradomínio da f. Perceba também que os números reais negativos não podem fazer parte do **DOMÍNIO**, pois o menor terreno que está sendo vendido é de $10m \times 15m$ e,d se você der um número negativo, isso vai gerar um terreno menor que esse ou até terrenos com metragem negativa. Note também que números reais positivos não-inteiros também não são permitidos, pois a construtora só admite acréscimos múltiplos de 1 metro. Dessa forma, os únicos possíveis acréscimos são aqueles apresentados em A. Por exemplo, -3 (número negativo) e 0,5 (número fracionado) não estão no **DOMÍNIO**.

Se olharmos o Exemplo 2.0.7 dos correios, o **DOMÍNIO** da associação que associa o peso da carta à tarifa cobrada para envio é o intervalo (0,500], e o contradomínio pode ser visto como o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números reais positivos (pois tais conjuntos conterão todos os possíveis preços). Dessa forma, se você perceber, os valores negativos e o zero não podem aparecer no **DOMÍNIO**, pois as cartas não podem ter peso negativo nem pesar zero grama e, por conta disso, estes valores não estão associados a nenhum preço do contradomínio. Já as cartas que pesam mais de 500 gramas, não podem ser enviadas como cartas comerciais e, portanto, tais pesos não estão associados a nenhum preço, não podendo fazer parte do **DOMÍNIO**.

Então, nesta seção, discutimos o conceito de domínio de uma associação que resumimos na seguinte definição.

Definição 2.1.1 (Domínio de uma associação) *Dada uma associação entre um conjunto de saída A e um conjunto de chegada B, o subconjunto do conjunto de partida A formado por aqueles elementos que realmente possuem algum (e único) elemento no conjunto de chegada associado a ele, é chamado de* **DOMÍNIO** *da associação.*

2.2 Lei de Formação

Note que, para algumas associações, podemos até formalizar como a associação acontece. No Exemplo 2.0.1 da gasolina, como o preço do litro é R$ 3,34, então, se abastecemos 1 litro pagamos R$ $3,34 = 3,34 \times 1$, se abastecemos 2 litros pagamos

R\$ $6,68 = 3,34 \times 2$, se abastecemos x litros pagamos R\$ $3,34x$, ou seja, se x é a quantidade de combustível abastecida e se chamamos $p(x)$ o preço pago para abastecermos x litros, obtemos que $p(x) = 3,34x$. Essa fórmula diz a quem (a qual valor) x está ligado no conjunto de chegada $(3,34x)$. Neste exemplo, somos capazes de mostrar explicitamente (através de uma fórmula) como se dá a associação dos pontos do conjunto domínio com os pontos do conjunto de chegada. Se usarmos o esquema da Figura 2.4, a cada quantidade x do começo da flecha, associa $p(x) = 3,34x$ na ponta da flecha, ou simplesmente $x \longmapsto 3,34x$. Nem sempre conseguimos uma expressão que modele tal associação. Por exemplo, no caso da academia (Exemplo 2.0.2) não existe uma expressão para associar o nome, mês e ano ao peso de uma pessoa. A associação se deu através da pesagem da pessoa que nada tem a ver com uma fórmula ligando o nome, mês e ano ao peso dela. Já no exemplo do IMC, dado o nome, o peso e a altura da pessoa, é possível estabelecer o IMC através da expressão:

$$IMC(nome, peso, altura) = \frac{peso}{altura^2}$$

Quando é possível estabelecer esta expressão, que modele tal associação, dizemos que a associação possui uma **LEI DE FORMAÇÃO**. Isto é, existe uma expressão que explicita a associação.

Observação 2.2.1 *Nem sempre existe tal lei de formação, embora exista a associação. É só lembrar da Figura 2.1, que mostra, por exemplo, que cada nome está associado ao CPF, sem a necessidade de existir uma lei de formação.*

Às vezes, a lei de formação pode parecer estranha, como no caso dos correios (Exemplo 2.0.7). Considere P o domínio da associação, ou seja, o conjunto dos pesos, e V o conjunto dos valores à pagar pelo envio da carta. Assim, temos uma associação de P em V que, a cada peso, associa o valor a ser pago pelo envio, e que pode ser expressa assim:

$$p(x) = \begin{cases} 1,30 & \text{se } 0 < x \leq 20 \\ 1,80 & \text{se } 20 < x \leq 50 \\ 2,45 & \text{se } 50 < x \leq 100 \\ 3,00 & \text{se } 100 < x \leq 150 \\ 3,60 & \text{se } 150 < x \leq 200 \\ 4,15 & \text{se } 200 < x \leq 250 \\ 4,70 & \text{se } 250 < x \leq 300 \\ 5,25 & \text{se } 300 < x \leq 350 \\ 5,80 & \text{se } 350 < x \leq 400 \\ 6,35 & \text{se } 400 < x \leq 450 \\ 6,90 & \text{se } 450 < x \leq 500 \end{cases}$$

O que esta associação está dizendo é que, se o peso x é maior que 0 grama e menor ou igual a 20 gramas, então o valor a ser pago é R$ 1,30. Se $20 < x \leq 50$ o valor será R$ 1,80, e assim sucessivamente. Neste caso, a lei de formação não é como aquela descrita no caso da gasolina (Exemplo 2.0.1). Mas de qualquer maneira, é uma forma de representar a associação através de uma expressão.

No caso dos juros (Exemplo 2.0.4), para se chegar a uma lei de formação, a gente deve somar os encargos, os juros de mora e a multa. Por exemplo, para 1 dia em atraso na fatura, os encargos são $\frac{1 \times 0{,}099 \times 476{,}56}{30} = 1,57$, onde 1 é o dia em atraso, 0,099 é o percentual dos encargos, 476,56 é o valor da fatura e 30 é quantidade de dias do mês. Já os juros de mora são $\frac{1 \times 0{,}01 \times 476{,}56}{30} = 0,16$, onde só trocamos o percentual para 0,01, que é o percentual dos juros de mora. Depois vem a multa, que é um valor fixo de $0,02 \times 476,56 = 9,53$ calculada independente da quantidade de dias em atraso e com o percentual de 0,02. Dessa maneira, os juros para 1 dia em atraso são a soma desses valores encontrados $1,57 + 0,16 + 9,53 = 11,26$. Se a fatura atrasa 2 dias, então os encargos são $\frac{2 \times 0{,}099 \times 476{,}56}{30} = 3,14$, os juros de mora são $\frac{2\times 0{,}01\times 476{,}56}{30} = 0,32$ e a multa é $0,02 \times 476,56 = 9,53$ e, portanto, os juros são R$ 12,99. Se atrasa 3 dias, os encargos são $\frac{3\times 0{,}099\times 476{,}56}{30} = 4,71$, os juros de mora são $\frac{3\times 0{,}01\times 476{,}56}{30} = 0,47$ e a multa é $0,02 \times 476,56 = 9,53$.

Como foi dito antes, o valor da multa é a mesma quando alteramos os dias em atraso. Perceba que os encargos e os juros de mora aumentam quando a pessoa passa mais tempo sem pagar após o vencimento da fatura. Pensando dessa forma, se uma pessoa tem n dias em atraso (n de 1 a 30 dias), os valores dos encargos são dados por $\frac{n.0{,}099.476{,}56}{30}$, os juros de mora por $\frac{n.0{,}01.476{,}56}{30}$ e a multa continua sendo 9,53. Veja que os juros $j(n)$ será a soma dessas três expressões $\frac{n.0{,}099.476{,}56}{30} + \frac{n.0{,}01.476{,}56}{30} + 9,53$, que quando desenvolvemos

$$
\begin{aligned}
j(n) = \frac{n.0,099.476,56}{30} + \frac{n.0,01.476,56}{30} + 9,53 = \\
\frac{n.47,18}{30} + \frac{n.4,77}{30} + 9,53 = \\
\frac{n.47,18 + n.4,77}{30} + 9,53 = \\
\frac{n.51,95}{30} + 9,53
\end{aligned}
$$

obtemos

$$
j(n) = n.1,73 + 9,53,
$$

que é uma forma simplificada de saber a quantia (aproximada) de juros a ser paga no caso de atraso em n dias.

E no Exemplo 2.0.6 do terreno ? Você já sabe dizer qual é expressão que dá o valor do terreno? Lembre-se que o valor do metro quadrado de terreno é 400 reais. Assim, se queremos achar o valor do terreno, devemos multiplicar 400 pela quantidade de metros quadrados. Mas você pode estar se perguntando: Como encontrar a quantidade de metros quadrados do terreno? Veja que o exemplo diz que os terrenos são retangulares, então a quantidade de metros quadrados do terreno são obtidos multiplicando comprimento pela largura. Neste caso, um dos lados se mantém fixo igual a 15 metros, e o outro lado pode sofrer acréscimos a partir da medida mínima de 10 metros, temos que, se não acrescentarmos nenhum metro adicional, a medida em metros quadrados do terreno será igual a $15.(10 + 0)$, e o valor do terreno: $400.15.(10 + 0) = 66000$. Se acrescentamos 1 metro, o valor do terreno será $400.15.(10 + 1) = 66000$. Se acrescentamos 2 metros, o valor será $400.15.(10+2) = 72000$. Dessa forma, para os terrenos que acrescentamos x metros, a expressão que dará o valor do terreno é $v(x) = 400.15.(10+x)$, ou de outra forma, $v(x) = 6000.(10 + x)$, ou $x \longmapsto 6000(10 + x)$.

Até o momento, falamos de como as associações são comuns no nosso dia a dia, e vimos que para serem úteis, precisamos que elas não deem margem a dúvidas. Surgiu, desta forma, o conceito de **DOMÍNIO** da associação, o qual é formado por aqueles elementos que estão associados a um único elemento do conjunto de chegada. Vimos que algumas associações possuem **LEIS DE FORMAÇÃO**, e que outras não possuem, mas nem por isso deixamos de ter uma associação.

2.3 Funções

Gostaríamos agora de comentar o uso de uma palavra na língua portuguesa. Analisemos as frases a seguir e verifiquemos o que elas querem dizer:

- João mudou seu comportamento em *função* do comportamento de Pedro;
- O salário dos operários muda em *função* das medidas econômicas do Governo;
- A saúde de Maria muda em *função* de seu humor.

Na primeira frase, vemos que o comportamento de João está associado de alguma forma ao comportamento de Pedro, pois pelo que entendemos da frase, se o comportamento de Pedro muda, o de João também se altera. Na segunda frase, vemos que existe alguma associação das medidas econômicas com os salários dos operários, uma vez que os mesmos mudam se houver mudança nas medidas econômicas. Na terceira frase, vemos que existe uma associação entre o humor de Maria e sua saúde, uma vez que sua saúde sofre alterações, caso seu humor se altere. Pelas frases acima, vemos que podemos usar a palavra "função" para chamar a atenção da existência de alguma associação entre dois objetos.

Em matemática, a palavra função é usada no lugar da palavra associação que usamos em nossa discussão. Assim, matematicamente, definimos a seguir função de A em B.

Definição 2.3.1 (Função) *Uma função de um conjunto A em um conjunto B é uma associação entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B. Essa associação que estamos nos referindo, é aquela que a cada elemento de A, associa um único elemento de B, e que todos os elementos de A têm seus elementos associados a elementos pertencentes a B, onde A é o domínio da função, e B o conjunto de chegada (que chamaremos a partir de agora de* **CONTRADOMÍNIO** *da função).*

Observação 2.3.1 *Denotamos as funções por letras minúsculas, e $f : A \longrightarrow B$ será usada no lugar da frase: f é uma função de A em B.*

De posse desta definição, vemos que podemos expressar a função do Exemplo 2.0.1, como $p : [0, \infty) \to [0, \infty)$, e do Exemplo 2.5, como $j : \{1, 2, ..., 30\} \to [0, \infty)$.

2.3.1 Relacionando Domínio e Lei de Formação

Em muitas situações, temos a lei de formação e o contradomínio de uma função, e precisamos identificar seu domínio. Por exemplo, você tem uma função cuja lei de formação é $f(x) = \sqrt{x - 6}$, com o contradomínio sendo $\mathbb{R}$, e gostaria de saber quais são os valores de x, para os quais $\sqrt{x - 6}$ é um número real (pertença ao contradomínio de f). Para isso, você deve lembrar que a raiz quadrada de um número só é real, se este número for maior ou igual que zero. E, como

$$x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6,$$

isso quer dizer que, só é possível encontrar $f(x) = \sqrt{x-6}$, se você tomar o domínio como sendo o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$, tais que $x \geq 6$, ou seja, domínio da função é $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 6\} = [6, \infty)$.

Exemplo 2.3.1 *Caso a lei de formação da função fosse* $\frac{1}{x^2-1}$, *e o contradomínio fosse* $\mathbb{R}$, *a informação* x *que fornecerá outra informação* $f(x) \in \mathbb{R}$ *é aquela em que esse quociente existe para o valor de* x *dado. Lembre-se, não pode existir divisão, se o valor do denominador for zero. Dessa maneira, devemos achar os valores de* x *que zeram o denominador, e não colocar tais valores no domínio da função. Isso é feito da seguinte forma:*

$$x^2 - 1 = 0,$$

implicando que

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} = 1 \text{ ou } x = -\sqrt{1} = -1.$$

Então, o domínio da função são todos os números reais, a menos de 1 e -1, ou seja, $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$.

Exemplo 2.3.2 *Se a função tem lei de formação* $f(x) = \log(x+4)$, *e o contradomínio é* $\mathbb{R}$, *a informação que fornecerá outra* $f(x) \in \mathbb{R}$, *é aquela em que o* $log(x+4)$ *existe para o valor de* x *dado. Neste caso, para que exista o logaritmo, o valor* $x+4$ *deve ser maior que zero, ou seja,*

$$x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4.$$

Dessa forma, o domínio da função são todos $x \in \mathbb{R}$, *tais que* $x > -4$, *isto é,*

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > -4\} = (-4, \infty).$$

2.3.2 Igualdade de Funções

Para ter ideia de como os domínios e os conjuntos de chegada são importantes no conceito de funções, introduzimos a seguir o conceito de igualdade de funções.

Definição 2.3.2 (Igualdade de funções) *Dizemos que duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$ são iguais, se seus domínios forem iguais, isto é, $A = C$, e se os contradomínios forem iguais, ou seja, $B = D$, e os elementos de A são associados ao mesmo elemento de B, tanto pela função f quanto pela função g.*

Observação 2.3.2 *Se duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$, de modo que A tenha um ponto a mais ou a menos que C, ou B tenha um ponto a mais ou a menos que D, as funções não são consideradas iguais. Na prática, só depois de constatar as igualdadades $A = C$ e $B = D$, é que verificamos a terceira propriedade, a saber: se cada ponto de A (que é igual a C) é associado ao mesmo ponto, tanto pela f quanto pela g.*

Exemplo 2.3.3 *Considere $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, com as seguintes leis de formação:*

$$f(n) = (-1)^n \text{ e } g(n) = \cos(n\pi), \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

Note que os domínios e contradomínios de f e g são iguais. Assim, para saber se f e g são iguais, basta verificar se cada ponto do domínio é associado ao mesmo ponto do contradomínio.

Uma vez que,

$$f(1) = (-1)^1 = -1$$

$$f(2) = (-1)^2 = 1$$

$$f(3) = (-1)^3 = -1$$

$$f(4) = (-1)^4 = 1$$

$$\vdots$$

ou seja, se n é par, $f(n) = 1$ e, se n é ímpar, $f(n) = -1$.

Por outro lado,

$$g(1) = \cos(\pi) = -1$$

$$g(2) = \cos(2\pi) = 1$$

$$g(3) = \cos(3\pi) = -1$$

$$g(4) = \cos(4\pi) = 1$$

$$\vdots$$

Assim, se n é par, $g(n) = 1$ e, se n é ímpar, $g(n) = -1$. Desta forma, $f = g$.

Quando a função tem uma lei de formação, a função $f : A \longrightarrow B$ é dita estar definida por uma lei de formação.

No Exemplo 2.0.1 da gasolina, a lei de formação para a função $p : Q \longrightarrow V$ é dada por

$$p(x) = 3,34x, \; x \in Q.$$

Às vezes, é comum juntarmos essas informações na seguinte notação:

$$\begin{aligned} p: \; Q &\to \quad\quad V \\ x &\longmapsto \; p(x) = 3,34x \end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$\begin{aligned} p: \; Q &\to \quad V \\ x &\longmapsto \; 3,34x \end{aligned}$$

No caso dos juros (Exemplo 2.0.4), $j : D \longrightarrow V$ (onde D = {1, 2, 3, ..., 30} são os dias em atraso, e V os valores do juros), se n representa os dias em atraso, então a lei de formação da função juros é $j(n) = n.1,73 + 9,53$, ou ainda,

$$\begin{aligned} j: \ D \to & \quad V \\ n \longmapsto & \quad j(n) = n.1,73 + 9,53 \end{aligned}$$

ou, de forma mais simples,

$$\begin{aligned} j: \ D \to & \quad V \\ n \longmapsto & \quad n.1,73 + 9,53 \end{aligned}$$

Em relação ao terreno (Exemplo 2.0.6), temos uma função $v : A \longrightarrow B$, que tem como lei de formação $v(x) = 6000.(10 + x)$, onde x é a quantidade de metros acrescida a um dos lados, ou ainda,

$$\begin{aligned} v: \ A \to & \quad B \\ x \longmapsto & \quad v(x) = 6000.(10 + x) \end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$\begin{aligned} v: \ A \to & \quad B \\ x \longmapsto & \quad 6000.(10 + x) \end{aligned}$$

2.4 Imagem de uma Função

Note que, dada uma função $f : A \longrightarrow B$, sabemos que qualquer elemento A está associado a um único elemento de B e essa associação $f$estabelece que o elemento associado a $a \in A$ é $f(a) \in B$. Lembre-se, isso é verdade independente se f tem uma lei de formação ou não. Dessa forma, temos que todo elemento de A está associado a algum elemento de B. Entretanto, podemos fazer outra pergunta: Será que todo elemento de B tem elemento em A que é associado a ele? Em outras palavras,

se $b \in B$, será que existe $a \in A$, tal que $b = f(a)$?

No Exemplo 2.0.7 dos correios, se considerarmos o contradomínio igual a $(0, 6.90]$, então vemos que a quantia R$ 4,50 pertence ao contradomínio, pois $0 < 4,50 < 6,90$, entretanto não existe nenhum peso de carta para o qual se pagará este preço para enviar, ou seja, não existe elemento do domínio associado a 4,50.

Os pontos de B, que tem alguém de A associado a ele, é um conjunto importante que chamamos **IMAGEM DA FUNÇÃO** f, e escreve-se $Im(f)$, em outras palavras

$$\begin{aligned} Im(f) = & \ \{y \in B| \ existe \ algum \ x \in A \ associado \ a \ y\} \\ = & \ \{y \in B| f(x) = y \ para \ algum \ x \in A\}. \end{aligned}$$

Note que, no Exemplo 2.0.1 da gasolina, para todo ponto de $B = [0, \infty)$, existe um elemento em $A = [0, \infty)$, tal que $f(a) = b$. Para mostrarmos isso, considere $b \in B$, e note que existe um ponto do domínio $[0, \infty)$ associado a ele, a saber: $a = \frac{b}{3{,}34}$. De fato, como $f(x) = 3,34x$, então

$$f(a) = f\left(\frac{b}{3,34}\right) = 3,34 \times \frac{b}{3,34} = b.$$

Portanto, f associa a do domínio com o elemento b dado no contradomínio. Como b foi um ponto qualquer de B, não demos nenhum valor específico para ele, então qualquer que seja $b \in B$, existe $\frac{b}{3{,}34} \in A$, tal que $f(a) = b$ e, portanto,

$$Im(f) = B = \ Contradomnio.$$

No caso dos juros (Exemplo 2.0.4), que são pagos ao final do mês, podemos pensar no contradomínio como sendo o intervalo $B = [0, \infty)$ (pois não se paga juros negativos). E o domínio como sendo o conjunto A de valores inteiros de 1 a 30, onde 1 significa o atraso em 1 dia após o vencimento da fatura, e 30 significa que a pessoa pode atrasar até trinta dias para pagar a fatura. Veja que este caso é diferente do que vimos no Exemplo 2.0.1 da gasolina. Ou seja, se tomarmos um ponto qualquer b, nem sempre é possível achar um ponto $a \in A$, de tal forma que b esteja associado a a. Para que fique mais fácil de você entender, voltemos à Tabela 2.5. Lá você vai encontrar que associado ao juros de R$ 11,26, você tem 1 dia em atraso e, associado ao juros de R$ 12,99, você tem 2 dias em atraso. E se os juros fosse um valor de

B entre R\$ 11,26 e R\$ 12,99, por exemplo, R\$ 12,00 $\in$ B, a qual ponto de A você imagina que este valor está associado? Se você observar a Tabela 2.1 com atenção, vai perceber que não existe um ponto $a \in A$, que esteja entre 1 e 2 dias em atraso, de modo que você possa associar a $b =$R\$ 12,00, isso porque para o cálculo de juros não fracionamos os dias.

Vejamos através de alguns exemplos como encontrar o conjunto imagem de uma função $f : A \longrightarrow B$.

No Exemplo 2.0.6 do terreno, função $f : \{0, 1, 2, 3, ...\} \longrightarrow \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = 6000.(10 + x)$, a imagem é

$$Im(f) = \{f(x)|x \in \mathcal{D}(f)\} = \{f(0), f(1), f(2), f(3), ...\} = \{60000, 66000, 72000, 78000, ...\}.$$

Já no Exemplo 2.0.7 dos correios, $Im(f) = \{f(x)|x \in \mathcal{D}(f)\}$, cujo domínio é $\mathcal{D}(f) = (0, 500]$, ou seja, para todo $x \in (0, 500]$, temos:

$$Para\ todo\ x \in (0, 20],\ temos\ f(x) = 1,30$$

$$Para\ todo\ x \in (20, 50],\ temos\ f(x) = 1,80$$

$$\vdots$$

$$Para\ todo\ x \in (450, 500],\ temos\ f(x) = 6,90$$

De modo que o conjunto imagem é

$$Im(f) = \{f(x)|x \in \mathcal{D}(f)\} = \{1.30,\ 1.80,\ 2.45,\ 3.00,\ 3.60,\ 4.15,\ 4.70,\ 5.25,\ 5.80,\ 6.35,\ 6.90\}.$$

Vejamos outro exemplo, apresentado a seguir.

Exemplo 2.4.1 *Seja a função* $f : [-2, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$*, onde* $f(x) = x^2 + 3$.

O valor de $f(x)$ *associado a -2 é*

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

Repare que $7 \in Im(f)$ *(pois é a imagem de* $-2 \in [-2,1)$*). Podemos calcular* $f(-1,9) = 6,61$, $f(-1,8) = 6,24$, *e assim sucessivamente. Entretanto, teríamos que fazer isso pondo todos os pontos entre -1,9 e -1,8, que são infinitos. Ou seja, seria impossível listar um a um todos os pontos da* $Im(f)$.

A pergunta é: Nem sempre é possível encontrar o conjunto $Im(f)$*? Dependendo da função estudada, não, entretanto para uma grande quantidade de funções, podemos obter tal conjunto. Note que, neste exemplo, para um ponto* $y \in Im(f)$, *temos que* $y = f(x)$, *para algum* $x \in [-2,1)$, *ou seja,*

$$y = f(x), \text{ para algum } x \in [-2,1),$$

logo

$$y = x^2 + 3 \Leftrightarrow y - 3 = x^2,$$

o que implica

$$x = \sqrt{y-3} \text{ ou } x = -\sqrt{y-3}.$$

Dessa forma, se y *for tal que possamos encontrar* x, *e esse* x *encontrado esteja em [-2, 1), então poderemos dizer que* $y \in Im(f)$. *Note que, para* $y < 3$, *não será possível calcular a raiz* $\sqrt{y-3}$ *(pois teremos raiz quadrada de um número negativo) e, portanto, não existirá* x, *logo tais* y *não pertencem a* $Im(f)$. *Se* $y \geq 3$, *existirá raiz, e concentraremos em encontrar para quais valores de tais* y *implicará em que o* x *encontrado esteja em [-2, 1). Note que, para os valores de* $y \in [3,4)$, *tanto* $x = \sqrt{y-3}$ *quanto* $x = -\sqrt{y-3}$ *pertencem a [-2, 1), logo todos os pontos de [3, 4)* ***pertencem*** *à imagem de* f. *Para* $y = 4$, *note que apenas o* $x = -\sqrt{y-3}$ *está em [-2, 1), mas como estamos procurando* x *que satisfaça alguma das equações e que pertença a [-2, 1), então* $y = 4$ ***também pertence*** *a* $Im(f)$. *Note também que, se* $\boldsymbol{4} \leq y \leq \boldsymbol{7}$, *teremos*

$$\sqrt{\boldsymbol{4}-3} \leq \sqrt{y-3} \leq \sqrt{\boldsymbol{7}-3},$$

que é equivalente a

$$1 \leq \sqrt{y-3} \leq 2$$

e, que após multiplicarmos essa última desigualdade por -1, obtemos a desigualdade

$$-2 \leq -\sqrt{y-3} \leq -1,$$

o que implica

$$-2 \leq -\sqrt{y-3} < 1$$

e, portanto, tais valores de x estão em [-2, 1), e os $4 \leq y \leq 7$ ***estarão*** *na $Im(f)$. Por fim, note que, para os valores $y > 7$, teremos que $\sqrt{y-3} > 2$ ou $-\sqrt{y-3} < -2$, e tais valores de x não pertencem a [-2, 1), o que nos garante que tais y não pertencem a $Im(f)$.*

Dessa forma, o conjunto imagem é

$$\begin{aligned} Im(f) = & \ \{y \in [-2, 1) |\ 3 \leq y \leq 7\} \\ = & \ [3, 7] \end{aligned}$$

Observação 2.4.1 *Se $f(x)$ tiver uma expressão muito complicada, não será fácil, às vezes impossível, resolver a equação $y = f(x)$.*

Finalizamos este capítulo relembrando algumas informações.

A associação $f : A \longrightarrow B$ é chamada função, se todo elemento de A está associado a um único elemento de B, e se não existe nenhum elemento de A sem um elemento de B associado a ele. O conjunto de partida é chamado domínio de f, que denotamos por $\mathcal{D}(f)$.

O conjunto de chegada B é chamado de contradomínio e, ao contrário do A, pode ter elementos para os quais não existam elementos em A que estejam associados com eles. O subconjunto dos pontos de B, para os quais existem elementos de A associados a eles, é chamado de imagem da associação f, e denotamos por $Im(f)$. Do que foi dito, temos que $Im(f) \subseteq B$.

Quando existe uma lei de formação para a função, então a associação pode ser explicitada por uma expressão. Sabemos também que ***nem sempre*** existe tal lei de formação, como no Exemplo 2.0.2 (quando o peso do aluno é acompanhado mês a mês), que mesmo assim, ainda é uma função.

Capítulo 3

Algumas Propriedades de Funções

Neste capítulo, observamos que algumas funções apresentadas no capítulo anterior obedecem a algumas regras. Nas seções seguintes, estudamos e definimos formalmente estas regras.

3.1 Funções Injetoras

Olhando para o Exemplo 2.0.4, para os juros mostrados na Tabela 2.5, vemos que quantidades diferentes de dias em atraso correspondem a quantias diferentes de juros a serem pagos, ou seja, você não vê quantidade de dias em atraso diferentes associados a um mesmo valor de juros a ser pago. Já no Exemplo 2.0.7 dos correios, existem pesos diferentes de cartas que associamos ao mesmo preço de envio. É o caso, por exemplo, de cartas que têm os pesos 10 e 20 gramas, que associamos ao mesmo preço de R$ 1,30, como também, as cartas que pesam 210, 230 e 240 gramas, que associamos ao preço de R$ 4,15.

Observação 3.1.1 *Uma confusão comum é pensar que ter mais de um valor do domínio associado a um mesmo valor no contradomínio, "fere" o conceito de função. Note, entretanto, que ainda temos cada elemento do domínio associado a um único* *elemento do contradomínio, por exemplo, a carta que pesa 10 gramas está ligada a um único preço de R$ 1,30, assim como a carta que pesa 20 gramas está ligada a um único preço, que neste caso também coincide com R$ 1,30.*

As funções que têm a propriedade que elementos diferentes do domínio associam elementos diferentes do contradomínio são chamadas de **FUNÇÕES INJETORAS**.

A maioria das funções possuem infinitos pontos em seu domínio (como no caso dos correios (Exemplo 2.0.7), do posto de gasolina (Exemplo 2.0.1), do táxi (Exemplo 2.0.3), etc. Nesses casos, não conseguimos testar todas as possibilidades de tomarmos dois pontos distintos do domínio e verificarmos se os valores associados a eles são também diferentes. Não conseguimos fazer uma verificação visual (como a que fizemos na Tabela 2.5 de juros). Entretanto, é possível verificar a injetividade de uma função usando uma das duas maneiras (na verdade, são equivalentes) a seguir.

Pelo que dissemos, a função ser injetora significa que pontos diferentes do domínio são associados a pontos distintos no contradomínio. Já sabemos também que o valor associado a x é $f(x)$, portanto, podemos expressar a propriedade acima de maneira mais formal pela definição a seguir.

Definição 3.1.1 (Função Injetora) *Dada a função$f : A \longrightarrow B$, que a cada $x \in A$, associa $f(x) \in B$, dizemos que f é uma função injetora se:*

$$\text{dados } x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y). \tag{3.1}$$

Que significa: dados x e y pertencentes a A (domínio da f), com x diferente de y, isso implicará que os pontos do contradomínio associados a eles, ou seja, $f(x)$ e $f(y)$, respectivamente, são diferentes.

A equação (3.1) é equivalente a

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y. \tag{3.2}$$

Que significa: se os valores do contradomínio associados a x e a y forem iguais, ou seja, $f(x) = f(y)$, então obrigatoriamente os pontos do domínio são iguais, ou seja, x tem que ser igual a y.

Você deve estar se perguntando: Mas ainda não precisamos testar os infinitos pontos? Aí é que entra a beleza da matemática, se você não estipular valores numéricos para os pontos que você está testando, ou seja, apenas chamar os pontos de x e y, e conseguir mostrar o que é necessário, então o que você provou será verdade para quaisquer valores numéricos que você substituir nestes pontos, isto é, você terá provado que para quaisquer pontos do domínio a propriedade é verdadeira e, portanto, a função é injetora.

Exemplo 3.1.1 *Mostremos que o Exemplo 2.0.1 da gasolina é um exemplo de uma função injetora.*

Foi visto anteriormente que o preço da gasolina (no Exemplo 2.0.1) é dado por uma função $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, cuja lei de formação é $f(x) = 3,34x$.

Dados dois valores x e y quaisquer (não são valores específicos) para quantidade de gasolina, com $x \neq y$, temos que, se multiplicarmos ambos os lados desta desigualdade por 3,34, a desigualdade se mantém, ou seja,

$$3,34x \neq 3,34y.$$

Ora, mas $3,34x = f(x)$ e $3,34y = f(y)$, logo a desigualdade anterior na verdade é a desigualdade

$$f(x) \neq f(y).$$

Como x e y foram quaisquer, o que fizemos vale para qualquer valor de x e qualquer valor de y que seja diferente de x. Portanto, a desigualdade acima vale para todos os pontos do domínio, o que mostra a propriedade da função f ser injetora.

E como faríamos para mostrar utilizando a equação (3.2)?

Suponhamos que

$$f(x) = f(y).$$

Como $f(x) = 3,34x$ *e* $f(y) = 3,34y$*, temos*

$$3,34.x = 3,34y.$$

e, após dividir os dois lados da igualdade por 3,34, chegamos ao resultado

$$x = y.$$

Note, no que fizemos acima, não explicitamos o valor de x *e* y*, ou seja, sempre que* $f(x) = f(y)$*, conseguimos mostrar que* $x = y$*. Logo, a propriedade de injetividade vale e, portanto, a função é injetora.*

O que mostramos no Exemplo 3.1.1 foi que, se você pegar um elemento da imagem (elemento do contradomínio que tem alguém no domínio associado a ele), você terá apenas um elemento do domínio que está ligado a ele, isto é, pontos diferentes têm imagens diferentes e, portanto, essa função f é uma função injetora.

3.2 Funções Sobrejetoras

Vimos, nas considerações finais do capítulo anterior, que o conjunto $Im(f)$ está contido no contradomínio de f. Uma propriedade importante acontece quando estes dois conjuntos são iguais.

Vimos, anteriormente, que o contradomínio da função, dada pelo Exemplo 2.0.6 do terreno, pode ser o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números reais positivos. Dessa forma, vão ter números do contradomínio que não estão associados a "ninguém" do domínio. Um exemplo é quando tomamos 65000, o qual pertence ao contradomínio $\mathbb{R}$, mas que não está associado a nenhum possível acréscimo dado no terreno base ($10m \times 15m$). Da mesma forma que 65000, existem vários outros (infinitos) números do contradomínio que não estão ligados a ninguém do domínio. Já no Exemplo 2.0.1 da gasolina, mostramos na Seção 2.4 que, se tomarmos qualquer elemento b do contradomínio $[0, \infty)$, sempre será possível achar um elemento a do domínio $[0, \infty)$, que está ligado a b. Por exemplo, se $b = 3$, você encontra a fazendo

$$a = \frac{b}{3,34} = \frac{3}{3,34}.$$

Lembre-se que, qualquer mudança que façamos no domínio, contradomínio ou lei de formação da função, faz com que a função alterada seja diferente da antiga.

No Exemplo 2.0.6 do terreno, se o contradomínio for $\mathbb{R}$, temos uma função

$$f : \{0, 1, 2, 3, ...\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

com lei de formação $f(x) = 600.(10 + x)$ e, se o contradomínio for $\mathbb{R}^+$, temos uma função

$$g : \{0, 1, 2, 3, ...\} \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

com lei de formação $g(x) = 600.(10 + x)$.

Observe que a imagem da função precisa estar contida no contradomínio (Seção 2.4), pois só assim o conceito de função é garantido (Seção 2.3). Logo, o menor contradomínio que podemos utilizar é exatamente a imagem da função cuja lei de formação é $f(x) = 600.(10+x)$, com $x = 0, 1, 2, 3, ...$, ou seja, $C = \{60000, 66000, 72000, ...\}$.

Definição 3.2.1 (Função Sobrejetora) *Dizemos que uma função $f : A \to B$ é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio é imagem de algum elemento do domínio, o que é o mesmo que dizer que o contradomínio da função é igual ao conjunto imagem. De uma forma mais formal, f é sobrejetora se $Im(f) = B$.*

Assim, tanto a função do terreno

$$h : \{0, 1, 2, 3, ...\} \longrightarrow \{60000, 66000, 72000, 78000, ...\},$$

quanto a função que dá o preço da gasolina

$$f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty),$$

são exemplos de funções sobrejetoras.

Pelo que acabamos de mostrar e pelo que mostramos no Exemplo 3.1.1, a função que dá o preço da gasolina $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, cuja lei de formação é $f(x) = 3,34x$, é uma função injetora e também sobrejetora. Funções desse tipo são importantes, pois se você sabe informações sobre um dos conjuntos (domínio ou contradomínio), isso permite obter as informações a ele relacionadas no outro conjunto. No caso do Exemplo 2.0.1 da gasolina, se x é a informação sobre a quantidade de litros abastecida, achamos a informação do preço fazendo $f(x) = 3,34x$ e, da mesma forma, se você sabe a informação $f(x)$, você pode encontrar x através da expressão $x = \frac{f(x)}{3{,}34}$.

Por exemplo, se uma pessoa tem R$ 10,00, quanto de combustível ela pode comprar?

Note que, $10 \in Im(f) = [0, \infty) = \textit{Contradomínio de } f$, ou seja, existe $x \in \mathcal{D}(f)$, tal que $f(x) = 10$ e, como $f(x) = 3,34x$, temos

$$3,34x = 10$$

que dividindo por 3,34, obtemos

$$x = \frac{10}{3,34} \approx 2,99.$$

Dessa forma, com a quantia de 10 reais, a pessoa pode comprar 2,99 litros de gasolina.

Definição 3.2.2 *Quando a função tem as propriedades que as classificam como injetora e sobrejetora, dizemos que ela é uma função bijetora (ou bijetiva). Mais formalmente, uma função $f : A \to B$ é bijetora (ou bijetiva) se f é injetora e sobrejetora.*

3.3 Funções Crescentes, Decrescentes, Não-Crescentes e Não-Decrescentes - Funções Monótonas

Algumas funções apresentam características interessantes no seu comportamento. No Exemplo 2.0.1 dos combustíveis, se x_1 e x_2 representam quantidades de combustível, então $f(x_1)$ e $f(x_2)$ representam as quantias pagas por tais quantidades de combustível. Sabemos que quanto mais combustível abastecermos, maior será o preço a pagar, ou seja, se $x_1 < x_2$, é de se esperar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Já no Exemplo 2.0.7 dos correios, aumentos nos valores dos pontos do domínio (pesos das cartas) podem resultar em aumentos dos valores das imagens (preços a pagar), ou terem a mesma imagem. Por exemplo, se aumentamos o peso da carta de 20 gramas para 50 gramas, o preço de envio aumenta de R$ 1,30 para R$ 1,80, ou seja, $20 < 50$ nos dá $f(20) < f(50)$, mas se aumentarmos de 10 gramas para 20 gramas, o preço continuará igual a R$ 1,30, ou seja, $10 < 20$ fornece $f(10) = f(20)$. Neste exemplo, se x_1 e x_2 são os pesos das cartas e, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são os preços para enviar essas cartas, então se $x_1 < x_2$ garantimos que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Pode acontecer também dos aumentos nos valores do domínio estarem associados à diminuição dos valores associados no contradomínio. Um exemplo disso é a depreciação de veículos, que é a desvalorização do veículo com o passar do tempo. É o que acontece quando você compra um carro e depois o vende (anos depois) por um valor mais baixo.

Exemplo 3.3.1 *Uma pessoa comprou um carro por 50 mil reais e foi informada pelo seu vendedor que o valor do veículo cai para 90% do seu valor a cada ano. A Tabela 3.1 mostra quais seriam os valores do carro ao passar alguns anos.*

Tempo de uso (anos)	Valor (reais)
0	50000
1	45000
2	40500
3	36450
4	32805
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 3.1: Tempo de uso $\times$ valores do carro.

Observe que, conforme o tempo passa, o valor do carro diminui, ou seja, os tempos $0 < 1 < 2 < 3 < 4$ *geram os valores* $50000 > 45000 > 40500 > 36450 > 32805$.

Conhecendo essas informações, podemos usá-las para encontrar a lei de formação do valor do veículo em função do tempo de uso, como mostramos a seguir.

Observe que depois de 1 ano de uso, o valor do veículo é $0,9^1.50000 = 45000$*, onde 1 é o tempo de uso, 0,9 é o percentual de 90% e 50000 é o valor do carro no ano anterior. Depois de 2 anos, o valor é* $0,9.45000 = 40500$*, que também pode ser escrito como* $0,9.(0,9.50000) = 0,9^2.50000 = 40500$ *(note que 45000 foi substituído por* $0,9.50000$*). Passados 3 anos, o valor cai para* $0,9.40500 = 36450$*, ou de forma equivalente,* $0,9.(0,9.0,9.50000) = 0,9^3.50000 = 36450$*. Assim, se passarem* x *anos de uso, a expressão que fornece os valores do veículo é* $0,9^x.50000$.

De acordo com o que vimos sobre funções, a função que dá a depreciação do veículo no tempo x *anos de uso é* $f : A \longrightarrow B$*, cujo domínio* A *é formado pelos conjuntos dos números inteiros não-negativos (pois o tempo de uso não pode ser negativo), e um possível contradomínio* B *é o conjunto que contenha os valores depreciados do carro (por exemplo,* $\mathbb{R}$*). Além disso, a lei de formação que fornece o valor do carro com* x *anos de uso é* $f(x) = 0,9^x.50000$.

Pode acontecer ainda de aumentos nos valores do domínio estarem associados à diminuição dos valores da imagem ou terem a mesma imagem. É o que acontece no próximo exemplo.

Exemplo 3.3.2 *Uma pessoa de quarenta anos recebe um salário de 3000,00 reais e resolve contratar um plano de saúde. Conhecendo os valores do plano para cada faixa etária, ela monta uma Tabela 4.4, que mostra o que restará do seu salário após o pagamento do plano de saúde conforme a sua idade aumenta.*

Idade da pessoa (anos)	Salário após pagar o plano de saúde (reais)
40 a 43	2736,06
44 a 48	2632,57
49 a 53	2532,09
54 a 58	2431,35
59 ou mais	2164,76

Tabela 3.2: Idade × Salário.

Note que, se x_1 *e* x_2 *são idades quaisquer que a pessoa pode ter depois dos 40 anos e, se* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *representam quanto sobraria dos R$ 3000,00 caso ela tivesse* x_1 *anos ou* x_2 *anos, respectivamente. Temos, por exemplo, que*

$$40 < 41 \Rightarrow f(40) = f(41) = 2736,06,$$

mas temos também que,

$$40 < 44 \Rightarrow f(40) > f(44),$$

isto é,

$$40 < 44 \Rightarrow 2736,06 > 2632,57.$$

Vemos então que, quando $x_1 < x_2$*, acontece* $f(x_1) = f(x_2)$ *ou* $f(x_1) > f(x_2)$*. Então, em qualquer caso, se* $x_1 < x_2$*, isso implica que* $f(x_1) \geq f(x_2)$*.*

Formalizamos a seguir o conceito de funções crescentes, decrescentes, não-crescentes e não-decrescentes, as quais vimos nos exemplos, que surgem na prática de maneira natural.

Definição 3.3.1 (Função Crescente) *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é crescente quando, para todos $x_1, x_2 \in A$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Definição 3.3.2 (Função Não-Decrescente) *Se para todos $x_1, x_2 \in A$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

diremos que $f : A \longrightarrow B$ é não-decrescente.

Definição 3.3.3 (Função Decrescente) *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é decrescente quando, para todos $x_1, x_2 \in A$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Definição 3.3.4 (Função Não-crescente) *Se para todos $x_1, x_2 \in A$,*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

diremos que $f : A \longrightarrow B$ é não-crescente.

Na discussão anterior, no Exemplo 2.0.1 da gasolina, vimos que é natural que, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$. Mas, a partir da lei de formação, como mostrar que a função $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, definida por $f(x) = 3,34x$, é crescente?

Para verificarmos que a f é crescente, devemos mostrar que ela satisfaz a Definição 3.3.1 da seguinte forma:

Dados dois pontos quaisquer $x_1 < x_2 \in [0, \infty)$, se multiplicarmos por 3,34, temos que a desigualdade se preserva, ou seja,

$$3,34x_1 < 3,34x_2.$$

Mas, note que $3,34x_1 = f(x_1)$ e $3,34x_2 = f(x_2)$ e, então, a desigualdade anterior é

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Como x_1 e x_2 foram quaisquer (não demos valor nenhum para eles), com $x_1 < x_2$, essa última desigualdade mostra que $f(x_1) < f(x_2)$ para todos os pontos do domínio e, portanto, f (função preço da gasolina) é uma função crescente.

Também podemos verificar que são crescentes as funções dos juros (Exemplo 2.0.4), do montante (Exemplo 2.0.5), do terreno (Exemplo 2.0.6) e do táxi (Exemplo 2.0.3).

Antes de prosseguirmos, observemos que, se $0 < a < 1$, então $a^{n+1} < a^n \; \forall n \in \mathbb{N}$. De fato, se $0 < a < 1$, multiplicando a desigualdade por a, obtemos $0 < a^2 < a$ e, como $a < 1$, então $0 < a^2 < a < 1$. Repetindo o procedimento mais uma vez, obtemos $0 < a^3 < a^2 < a < 1$ e, continuando, temos $0 < a^{n+1} < a^n < a^{n-1} < ... < a < 1$, ou seja, quanto maior for o expoente n, menor será a pontência a^n, quando $0 < a < 1$.

Podemos assim provar que a função da depreciação (Exemplo 3.3.1) $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0,9^x.50000$, é uma função decrescente. Para verificar isso, consideremos dois pontos $x_1 < x_2 \in A$. Como $0,9 < 1$, temos a desigualdade

$$0,9^{x_1} > 0,9^{x_2}$$

que, multiplicando por 50000, temos

$$0,9^{x_1}.50000 > 0,9^{x_2}.50000.$$

Como $0,9^{x_1}.50000 = f(x_1)$ e $0,9^{x_2}.50000 = f(x_2)$, a desigualdade passa a ser

$$f(x_1) > f(x_2). \tag{3.3}$$

Como, no desenvolvimento acima, x_1 e x_2 foram quaisquer, com $x_1 < x_2$, a desigualdade (3.3) mostra que a função f é decrescente para todos os pontos do domínio.

3.4 Restrição e Extensão de Funções

Quando estamos estudando funções, pode acontecer de algumas propriedades importantes estarem limitadas a uma parte (subconjunto) do domínio, fazendo com que nosso interesse se volte em obter tal subconjunto. Um exemplo de uma situação dessas é quando você tem R\$ 20,00 e gostaria de saber quanto de gasolina você pode colocar em seu carro, ou seja, se x representa a quantidade de gasolina, você está interessado nos valores de x, tais que $f(x) \leq 20$, isto é, nas quantidades x cujo valor a ser pago não ultrapasse R\$ 20,00.

Como $f(x) = 3,34x$,

$$f(x) \leq 20 \Leftrightarrow 3,34x \leq 20 \Leftrightarrow x \leq \frac{20}{3,34} \approx 5,988.$$

Dessa forma, de todos os pontos $[0, \infty)$ do domínio, aqueles que fazem $f(x) \leq 20$ são aqueles que estão no subconjunto $[0, 5.988]$.

E como seria a função da gasolina? Observe que seu dinheiro agora é R\$ 20,00 e, que o máximo de combustível que pode ser colocado no tanque é 5,988 litros, então a função que dá o preço do combustível não pode ser $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, mas sim

$$f_1 : [0, 5.988] \longrightarrow [0, \infty).$$

Por outro lado, no Exemplo 2.0.6 dos terrenos, se o dono da imobiliária percebe que nesta crise não está conseguindo vender os terrenos com aumentos de 1 metro em um dos lados, ele pode optar por oferecer terrenos com acréscimos de 0,5 metro em um dos lados. Entretanto, note que a função preço dos terrenos é $f : \{0, 1, 2, 3, ...\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ e, agora, os valores dos acréscimos são $\{0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2, ...\}$ e, assim, ele precisa de uma nova função

$$g : \{0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2, ...\} \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

com lei de formação $g(x) = 6000.(10 + x)$, ou seja, com a mesma lei de formação de f.

Nas situações que acabamos de descrever, vemos que, no primeiro exemplo, o domínio "diminuiu", e no segundo exemplo, o domínio "aumentou", e em ambos os casos, a lei de formação continuou a mesma.

Quando temos uma função $f : A \longrightarrow B$ e "reduzimos" o seu domínio obtendo uma outra função $g : C \longrightarrow B$, com $C \subset A$, com a mesma lei de formação, isto é, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in C$, chamamos esta nova função de uma restrição da primeira e a denotamos por $g = f|_C$ (lê-se que g é a restrição de f ao subconjunto C de A).

Existem vários exemplos onde a função inicial não possui uma propriedade desejada, mas a restrição desta função a um dado subconjunto possui tal propriedade.

Exemplo 3.4.1 *Seja $f : [-2, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = x^2 + 3$. Essa função não é injetora, pois -0,5 e 0,5 são distintos, pertencem ao domínio [-2,1), mas estão associados ao mesmo elemento $f(-0,5) = f(0,5) = 3,25$. Neste caso, se quisermos obter uma função injetora h a partir de f, podemos tomar o domínio de h como o subconjunto $[0, 1) \subset [-2, 1)$, ou seja, formamos uma função injetora $h : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ de lei de formação $h(x) = x^2 + 3$. Dizemos, dessa maneira, que a função $h : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma restrição da função $f : [-2, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, ou simplesmente $h = f|_{[0,1)}$.*

Da mesma forma, poderíamos usar qualquer uma das funções, seja da gasolina, do terreno, dos juros, de outra função, para retirar um subconjunto do domínio a fim de formar uma outra função com domínio restrito. Embora estes já sejam exemplos de funções injetoras, nada impede que tenhamos interesse em alguma outra propriedade.

Com base nessas restrições do domínio de funções, apresentamos a seguinte definição.

Definição 3.4.1 (Restrição de uma função) *A restrição de uma função $f : A \longrightarrow B$ a um subconjunto $X \subset A$ é a função $h : X \longrightarrow B$, definida como $h(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Vimos no exemplo em que expandimos o domínio, que a lei de formação da função se preservou, entretanto, isso não necessariamente precisa acontecer. Na realidade, as imobiliárias sempre querem vender mais e, quando decidem vender terrenos menores, elas fazem de tal maneira que o terreno maior seja mais "vantajoso" para o cliente. Por exemplo, ao abrirem a oportunidade de comprar terrenos com acréscimos de 0,5 em 0,5 metro, a tabela com os novos preços do terreno ($g(x) = 6000.\,(10 + [x] + 1,6.\,(x - [x]))$) pode ficar assim (Tabela 3.3).

Acréscimos de 0,5 metro → x	Preços do terreno → g(x)
0	60000
0,5	64800
1	66000
1,5	70800
2	72000
⋮	⋮

Tabela 3.3: Acréscimos de 0,5 metro.

$[x]$ é a parte inteira de x, ou seja, se

$$\begin{aligned}
x = 10,5 &\quad\Rightarrow\quad [x] = [10,5] = 10 \\
x = 10 &\quad\Rightarrow\quad [x] = [10] = 10 \\
x = 11,5 &\quad\Rightarrow\quad [x] = [11,5] = 11 \\
x = 11 &\quad\Rightarrow\quad [x] = [11] = 11,
\end{aligned}$$

ou seja, para comprar um acréscimo de 0,5 metro, ele pagará 4800 reais a mais, enquanto que comprando mais meio metro, ele pagará 1200 reais a mais. É como se valesse mais a pena comprar 1 metro do que 0,5 metro, e isso se repete para 1,5 e 2, para 2,5 e 3, etc.

Note também que a lei de formação mudou para

$$g(x) = 6000.\left(10 + [x] + 1,6.\left(x - [x]\right)\right),$$

mas não mudaram os preços do terreno para os acréscimos de 1 metro.

Neste segundo caso, dizemos que $g : C \longrightarrow D$ é uma extensão de $f : A \longrightarrow D$, com $A \subset C$, se $g|_A = f$.

Definição 3.4.2 (Extensão de uma função) *De maneira geral, chamamos extensão de uma função $f : A \longrightarrow B$ a um conjunto $X \supset A$, qualquer função $h : X \longrightarrow B$, tal que $h(x) = f(x)$, para todo $x \in A$.*

Observação 3.4.1 *Quando desejamos estender o domínio de uma função para obter uma outra função, devemos ter cuidado para que o contradomínio dessa nova função contenha as imagens dos pontos do domínio estendido.*

Um exemplo é quando temos a função

$$f : \{0, 1, 2, 3, ...\} \longrightarrow \{60000, 66000, 72000, 78000, ...\},$$

com lei de formação $f(x) = 6000.(10+x)$, e queremos estender o domínio para obter

$$g : \{0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, ...\} \longrightarrow \{60000, 66000, 72000, 78000, ...\},$$

com $g(x) = 6000.(10 + x)$. Note que, dessa forma, g não é uma função (não possui as propriedades para ser função), pois temos pontos (0.5, 1.5, 2.5, etc) do domínio de g que não estão associados a nenhum ponto do seu contradomínio.

Muitos exemplos de extensão existem, e exemplificaremos alguns deles depois de falarmos de paridade de funções.

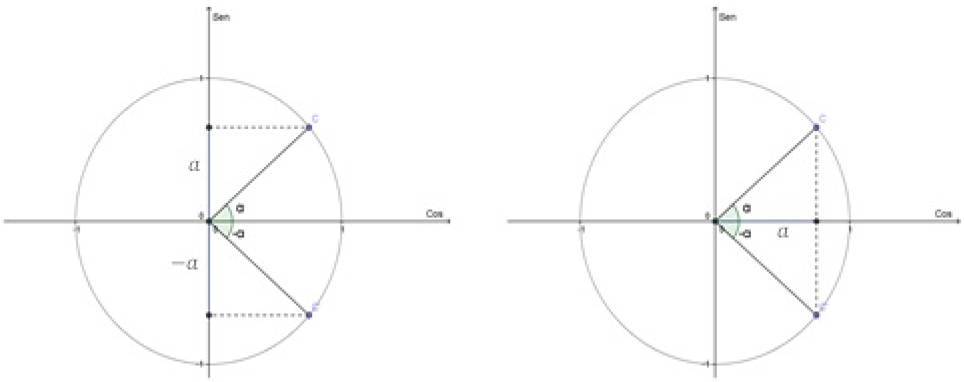

Figura 3.1: No círculo à esquerda, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha) = -a$, e no círculo à direita, $cos(-\alpha) = cos(\alpha) = a$

3.5 Funções Pares e Funções Ímpares

Quando estudamos o círculo trigonométrico, uma das primeiras coisas que é estudada é que $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, e que $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ (Figura 3.1).

Em outras palavras, se $f(x) = sen(x)$, temos

$$f(-x) = -f(x).$$

Se $g(x) = cos(x)$, então

$$g(-x) = g(x).$$

Muitas funções possuem essa propriedade conforme os exemplos a seguir.

Exemplo 3.5.1

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+3 \end{array}$$

Note que $-1, 1 \in \mathcal{D}(f)$, *logo*

$$f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$$

$$e$$

$$f(1) = 1^2 + 3 = 4,$$

ou seja, $f(-1) = f(1) = 4$ *(-1 e 1 têm a mesma imagem).*

Para $-2, 2 \in \mathcal{D}(f)$,

$$f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$$

$$e$$

$$f(2) = 2^2 + 3 = 7,$$

logo, $f(-2) = f(2) = 7$.

Repare que essa propriedade vale também para outros números do domínio. De maneira geral, se tivermos um valor qualquer $x \in \mathbb{R}$, *temos* $-x \in \mathbb{R}$, *com*

$$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$$

ou seja,

$$f(-x) = f(x)$$

Exemplo 3.5.2

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 + x \end{array}$$

Neste exemplo, dados $-1, 1 \in \mathcal{D}(g)$, *temos*

$$g(-1) = (-1)^3 + (-1) = -1 - 1 = -2$$

$$e$$

$$g(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

ou seja, $g(-1) = -g(1) = -2$.

Para $-2, 2 \in \mathcal{D}(g)$,

$$g(-2) = (-2)^3 + (-2) = -8 - 2 = -10$$

$$e$$

$$g(2) = 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10,$$

logo, $g(-2) = -g(2) = -10$.

De maneira geral, se $x \in \mathbb{R}$ *é um valor qualquer, temos* $-x \in \mathbb{R}$, *tal que*

$$g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x).$$

Exemplo 3.5.3

$$\begin{aligned} h: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

Define-se $|x|$ *(módulo de* x*) como sendo*

$$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0; \\ -x & se\ x < 0. \end{cases}$$

Por exemplo,

$$x = 3 \Rightarrow |x| = |3| = 3$$

$$x = -3 \Rightarrow |x| = |-3| = -(-3) = 3.$$

Pelas propriedades de módulo, temos

$$|-x| = |-1.x| = |-1|.|x| = |x| \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, se $h(x) = |x|$, *a expressão anterior diz que*

$$h(-x) = h(x).$$

Definimos então essas propriedades da seguinte maneira.

Definição 3.5.1 (Função Par) *Uma função* $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ *é par quando, para qualquer* $x \in \mathcal{D}(f)$, *implicar que* $-x \in \mathcal{D}(f)$ *e* $f(-x) = f(x)$.

Definição 3.5.2 (Função Ímpar) *Uma função $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ é ímpar quando, para qualquer $x \in \mathcal{D}(f)$, implicar que $-x \in \mathcal{D}(f)$ e $f(-x) = -f(x)$.*

Pelas definições acima, podemos dizer que são pares as funções cosseno $(cos(x))$,f $(f(x) = x^2 + 3)$ e h $(h(x) = |x|)$, e que são ímpares as funções seno $(sen(x))$ e g $(g(x) = x^3 + x)$.

Observação 3.5.1 *É importante que, quando é dado x do domínio da função, também tenhamos $-x$ no domínio, pois se isso não ocorre, a função não será par nem ímpar. Por exemplo, a função $f : [-2, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2 + 3$, não é par nem ímpar. Perceba que $-2 \in [-2, 1)$, mas o seu oposto $2 \notin [-2, 1)$, logo não tem como verificar se $f(-2) = -f(2)$ ou $f(-2) = f(2)$.*

As funções pares e as ímpares são muito importantes no estudo das equações diferenciais parciais, mais precisamente, no caso das séries de Fourier para resolução de tais equações. Neste estudo é dada uma função $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$, e pede-se para estender essa função de forma que ela seja uma função ímpar (ou par) no intervalo $[-L, L]$.

Exemplo 3.5.4 *Dada a função $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$, estenda f obtendo $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que g seja par.*

Sabemos o que significa ser par e sabemos o que significa estender, então juntemos estes dois conceitos para fazer o que se pede.

Para g ser par, temos que ter

$$g(-x) = g(x).$$

Como g é a extensão de f, se $0 \leq x \leq 1$

$$g(-x) = g(x) = f(x) = x + 3.$$

Logo, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$, *e*

$$g(-x) = x + 3 = -(-x) + 3.$$

Então, se $-1 \leq y \leq 0$, *temos*

$$g(y) = -y + 3.$$

Portanto,

$$g(x) = \begin{cases} -x + 3 & se \ -1 \leq x \leq 0 \\ x + 3 & se \ \ \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Note que $g(-x) = g(x)$ *para todo* $x \in [-1, 1]$. *De fato,*

a. *se* $x < 0$, *então* $g(x) = -x + 3$ *pela definição da função* g. *Como* $-x > 0$, *temos pela definição da* g *que* $g(-x) = -x + 3$ *e, portanto,*

$$g(x) = g(-x), x < 0$$

.

Da mesma forma,

b. *se* $x > 0$, $g(x) = x + 3$ *pela definição da função* g. *Como* $-x < 0$, *temos pela definição da* g *que* $g(-x) = -(-x) + 3 = x + 3$ *e, portanto,*

$$g(x) = x + 3 = -(-x) + 3 = g(-x).$$

Finalmente, como $x = 0$ *temos* $g(-0) = g(0)$ *e, de* **a.** *e* **b.**, *segue que* $g(x) = g(-x), \forall x \in [-1, 1]$ *e, portanto,* g *é par.*

Exemplo 3.5.5 *Estenda* $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = x^2$, *de maneira que a extensão* $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *seja ímpar.*

Se g *é ímpar, temos*

$$g(-x) = -g(x).$$

Como g é uma extensão de f, temos

$$g(x) = f(x),\ x \in [0,1] \Rightarrow g(x) = x^2,\ x \in [0,1].$$

Logo, para $x \in [0,1]$, então $-1 \leq -x \leq 0$, e

$$g(-x) = -g(x) = -x^2 = -(-x)^2.$$

Logo, para $-1 \leq y \leq 0$,

$$g(y) = -y^2.$$

Portanto,

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 & se\ x < 0 \\ x^2 & se\ x > 0 \end{cases}$$

.

Note que $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in [-1,1]$. De fato,

a. *se $x < 0$, $g(x) = -x^2$ pela definição da função g. Como $-x > 0$, temos pela definição da g que $g(-x) = (-x)^2 = x^2$, e portanto,*

$$g(-x) = -g(x), x < 0$$

.

Da mesma forma,

b. *se $x > 0$, $g(x) = x^2$ pela definição da função g. Como $-x < 0$, temos pela definição da g que $g(-x) = -(-x)^2 = -x^2$ e portanto*

$$g(-x) = -g(-x).$$

*Finalmente, como $x = 0$, temos $g(-0) = 0 = -g(0)$ e, de **a.** e **b.**, segue que $g(-x) = -g(x), \forall x \in [-1,1]$ e, portanto, g é ímpar.*

3.6 Funções Compostas

Muitos processos de montagem em fábricas acontecem de forma sequencial, ou seja, por etapas. Geralmente cada etapa é realizada por uma equipe diferente. Após passar por todas as etapas, temos o produto pronto para ser comercializado. Se cada etapa deste processo tem sua função custo associada a ele, será que poderíamos ter uma função custo total no final do processo? De maneira mais geral, se temos um processo dividido em etapas, onde em cada etapa temos uma função de interesse, será que ao final do processo podemos obter através destas várias funções uma única função que represente todo o processo? Essa é a pergunta que queremos responder nesta seção.

Exemplo 3.6.1 *Imagine que uma fábrica de peças de automóveis produza 10 peças por hora. Então, pelo que estudamos de funções até aqui, podemos dizer que a quantidade de peças que ela produz é função do tempo que ela trabalha, ou seja, se ela trabalha 200 horas e, a cada hora, ela produz 10 peças, então o total de peças produzidas nestas 200 horas é* $10 \times 200 = 2000$*. Logo, se* t *é a quantidade de horas que a fábrica trabalhou, temos que a quantidade de peças que ela produziu foi* $10t$*. Podemos definir uma função* $f : A \longrightarrow B$*, onde o domínio* A *é o conjunto com as quantidades de horas que a fábrica trabalha, ou seja,* $A = \mathbb{Z}^+$*, e* B *como o conjunto dos números* $\mathbb{Z}^+$*, de tal forma que a lei de formação é dada por* $f(t) = 10t$ *(*t *é a quantidade de horas trabalhadas).*

Se, além da informação que a fábrica produz 10 peças por hora, tivéssemos a informação de que o valor de cada peça é 150 reais, como definiríamos uma função que nos desse o valor do estoque (das peças produzidas)? Observe que, se a fábrica fez 500 peças, o valor das peças produzidas é $150 \times 500 = 75000$ *reais, ou seja, se* x *é a quantidade de peças que a fábrica produziu, podemos definir uma função* g*, que dá os preços das peças produzidas (valor do estoque destas peças) da forma* $g : C \longrightarrow D$*, com lei de formação* $g(x) = 150x$*, com* $\mathcal{D}(g) = \mathbb{Z}^+$*, e um possível contradomínio*

$D = \mathbb{R}^+$.

Como faríamos para definir uma função que ligasse o tempo de trabalho da máquina com o valor do estoque destas peças?

Se a fábrica trabalhou $t = 30$ *horas, a quantidade de peças é* $f(30) = 10.30 = 300$, *logo o preço é* $g(300) = 150.300 = 45000$ *reais. Vemos que precisamos ter a informação de quantas peças foram produzidas* $(f(30))$, *e com esse valor em mãos, calcular o valor desta quantidade de peças, ou seja,* $g(f(30))$. *Note que é imprescindível que tenhamos imagem de* f *(quantidade de peças produzidas) contida no domínio de* g *para que possamos calcular* $g(f(30))$, *ou qualquer outra quantidade que tenha sido produzida em* T *horas, no caso* $g(f(T))$.

No nosso exemplo, se dissermos que a fábrica trabalhou t *horas, a quantidade de peças será* $f(t) = 10t$, *e o preço* $g(f(t)) = 150.f(t) = 150.(10t) = 1500t$. *Com isso conseguimos obter uma função* $g(f(t)) = 1500t$, *que nos dá o preço das peças produzidas (valor do estoque) em* t *horas, ou seja, obtemos* $h : A \longrightarrow C$, *tal que* $h(t) = g(f(t)) = 1500t$, *que nos expressa o final do processo. Poderíamos pensar em algo como mostra a Figura 3.2.*

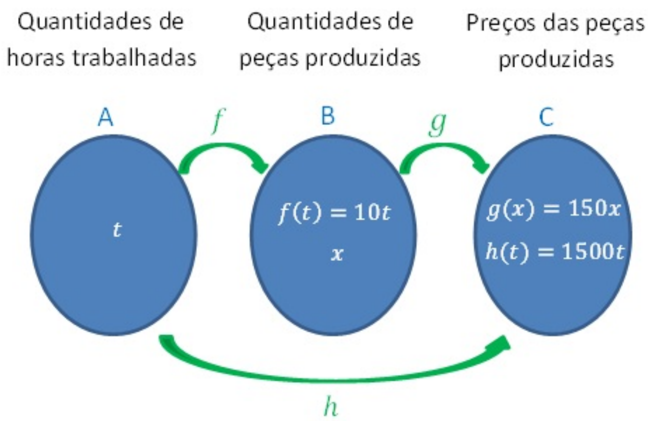

Figura 3.2: Diagrama de Produção de Peças de Automóveis.

Exemplo 3.6.2 *Uma grande empresa, depois de negociar com o sindicato, acordou* *em dar um reajuste no salário de seus empregados da seguinte forma: um aumento de 5 % no próximo mês e 4 % no mês seguinte. Quanto um funcionário que ganha x reais receberá ao final dos reajustes?*

Digamos que o salário de um trabalhador é R$ 2000,00 por mês. Depois do reajuste de 5%, passou a ser $2000+2000\times 0,05 = 2000(1+0,05) = 2100$ *reais, onde 0,05 é o percentual de 5 %. Desta forma, podemos construir uma função que expresse esse primeiro aumento,* $f_1 : [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$, *definida por* $f_1(x) = x(1+0,05)$.

Da mesma forma, se fizermos a função do segundo aumento, que será de 4%, teremos $f_2 : [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ *definida por* $f_2(x) = x(1+0,04)$.

Construindo a forma de como os aumentos são dados, temos que, se o funcionário recebe R$ 2000,00, depois do primeiro aumento, ele receberá $2000(1+0,05)$, *e o segundo aumento é em cima deste novo salário, ou seja, ele receberá* $2000(1+0,05)(1+0,04)$. *Logo um funcionário que ganha x reais receberá, após os aumentos,* $x(1+0,05)(1+0,04)$, *e isso nos dá a lei de formação de uma função que associa o salário dos funcionários antes do aumento e depois do aumento. Note que para chegar na expressão fizemos os seguinte passos, primeiro aplicamos o primeiro aumento ao salário, que passou de x para* $f_1(x) = x(1+0,05)$ *e, depois, tomamos esse valor e aplicamos o segundo aumento, ou seja,*

$$f_2(f_1(x)) = f_1(x)(1+0,04) = x(1+0,05)(1+0,04).$$

Novamente chamamos atenção para o fato de ser imprescindível que $Im(f_1) \subseteq \mathcal{D}(f_2)$, *para que seja possível construirmos a função* $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, *onde para x reais do salário inicial, temos* $h(x) = f_2(f_1(x)) = x(1+0,05)(1+0,04) = 1,092x$ *reais de salário, após os aumentos de 5 % e 4 % (veja diagrama 3.3).*

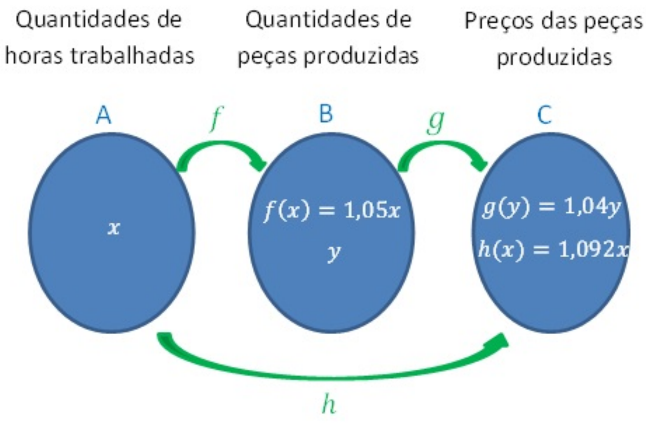

Figura 3.3: Diagrama de Reajuste Salarial.

Este processo de utilizar o resultado de uma função como o ponto inicial de outra e, assim por diante, é chamado de composição de funções, e podemos formalizar isso na seguinte definição.

Definição 3.6.1 (Função composta) *Sejam* $f : A \longrightarrow B$ *e* $g : C \longrightarrow D$*, com* $Im(f) \subseteq C$*, definimos função composta* $g \circ f : A \longrightarrow D$ *a função dada por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ para todo } x \in A.$$

3.7 Funções Inversas

Na Seção 3.2, falamos das funções bijetoras, que são funções que são injetoras e sobrejetoras. Isto quer dizer que pontos diferentes do domínio são levados em pontos distintos no contradomínio, e sua imagem é igual ao contradomínio (todos os pontos do contradomínio estão associados a alguém do domínio).

Teorema 3.7.1 *Se* $f : A \longrightarrow B$ *é uma função bijetora, podemos definir* $g : B \longrightarrow A$*, de maneira que* $g(b) = a$*, onde* $a \in A$ *é o ponto, tal que* $f(a) = b$*.*

Demonstração: Verificaremos agora que g é uma função.

Note que todo ponto de B está associado a algum ponto de A.

De fato, $f : A \longrightarrow B$ é sobrejetora, logo qualquer que seja $b \in B$, existe $a \in A$, tal que $f(a) = b$. Portanto, pela definição de g, $g(b) = a$.

Mas será que este a é único? Não podemos ter outro $c \in A$, tal que $g(b) = c$?

Como $f : A \longrightarrow B$ é injetora, implica que, para cada ponto de $y \in B$, só existe um elemento $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Se existisse $x_1 \in A$, tal que também satisfizesse $f(x_1) = y$, f não seria injetora. Portanto, existe apenas um $x \in A$, tal que $f(x) = y$, logo só existe um $x \in A$, tal que $g(y) = x$ e, portanto, cada ponto $y \in B$ está associado com um único ponto $x \in A$. Logo $g : B \longrightarrow A$ definida desta forma é uma função. $\square$.

Teorema 3.7.2 *A g definida no Teorema 3.7.1 é bijetora.*

Demonstração De fato, mostremos que $g : B \longrightarrow A$ é injetora e sobrejetora.

I - g é sobrejetora.

De fato, dado $x \in A$, $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow \exists\ y \in B$, tal que$f(x) = y$ e, pela definição de g, temos que $g(y) = x$. Como $x \in A$ foi qualquer, temos que $A \subseteq Im(g)$ e, portanto, $A = Im(g)$, ou seja, g é sobrejetora.

II - g também é injetora.

De fato, dados $y_1 \neq y_2$, com $y_1, y_2 \in B$, pela sobrejetividade da f, existem $x_1, x_2 \in A$, tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Concluímos que $x_1 \neq x_2$, pois se $x_1 = x_2$ implicaria $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$, ou seja, teríamos um ponto $x_1 = x_2$ com duas imagens diferentes, ou seja, f não seria função.

$$\therefore\ g(y_1) = x_1 \neq x_2 = g(y_2)$$

$$\therefore\ g\ \ injetora.$$

Sendo g sobrejetora e injetora, então g é bijetora. $\square$.

No Exemplo 2.0.1 da gasolina, vimos que a função preço da gasolina $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, definida por $f(x) = 3,34x$, é bijetora. Isso significa que podemos obter uma função $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, onde o domínio é o preço pago, e o conjunto de chegada (que é igual a imagem, pois g é bijetora) é a quantidade de combustível abastecida, ou seja, uma função em que fornecemos o preço que queremos abastecer e obtemos como resposta a quantidade de combustível que será abastecida com aquele valor.

E como obtemos esta função g?

Como foi explicado anteriormente, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, de modo geral, se $f(x) = y$, então $g(y) = x$. Assim,

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3,34x = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{3,34} = g(y),$$

logo

$$g(y) = \frac{y}{3,34}.$$

Note que, quando a função não é bijetora, não conseguimos tal função.

No Exemplo 2.0.7 dos correios, não conseguimos definir tal função, pois existem vários valores distintos com imagens iguais, por exemplo,

$$f(10) = f(20) = 1,30$$

e, quando fossemos definir a g, teríamos

$$g(1,30) = 10 \ e \ g(1,30) = 20,$$

ou seja, a primeira condição para g ser função não seria satisfeita.

Da mesma forma, se $f : A \longrightarrow B$ não for sobrejetora, existirá pelo menos um $y \in B$, tal que $f(a) = y \; \forall \; a \in A$, logo $g(y)$ não tem valor associado a ele e, portanto, g não pode ser função.

No Exemplo 2.0.4 dos juros, a função $f : \{1, 2, 3, ..., 30\} \longrightarrow Im(f)$, cuja lei de formação é $f(n) = n.1,73 + 9,53$, é bijetora. É só verificar que o $Contradomínio =$

$Im(f)$ (f é sobrejetora) e, para $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

ou seja, f é injetora. Portanto, f é bijetora.

Então, podemos definir a função $h : Im(f) \longrightarrow \{1, 2, 3, ..., 30\}$, tal que

$$h(11,26) = 1$$

$$h(12,99) = 2$$

$$h(14,72) = 3$$

$$\vdots$$

Para encontrar a lei de formação de h, devemos encontrar primeiramente n na lei de formação de f, então desenvolvendo

$$f(n) = n.1,73 + 9,53$$

$$f(n) - 9,53 = n.1,73,$$

chegamos a

$$\frac{f(n) - 9,53}{1,73} = n$$

Dessa forma, encontramos a lei de formação

$$h(y) = \frac{y - 9,53}{1,73},$$

para todo $y \in Im(f)$.

Definição 3.7.1 (Função inversa) *Se $f : A \longrightarrow B$ é uma função bijetora, podemos definir função inversa como $g : B \longrightarrow A$, tal que $g(b) = a$, onde $a \in A$ é o ponto tal que $f(a) = b$.*

A função g do exemplo da gasolina e função h do exemplo dos juros, vistas nesta Seção, são exemplos de funções inversas.

Observação 3.7.1 *Em alguns livros didáticos é comum se usar f^{-1} como função inversa.*

Finalizamos este capítulo relembrando que funções podem apresentar naturalmente comportamentos que possuem certas características, e que para dar um nome a tais comportamentos precisamos definí-los com alguns nomes, surgindo as funções crescentes, decrescentes, injetoras, sobrejetoras, pares, etc. Outras vezes, precisamos expandir o domínio de uma função obtendo uma extensão da função original, como acontece no estudo de equações diferenciais parciais (Seção 3.5), onde precisamos de extensões pares ou ímpares. Também no caso de composição de funções (Seção 3.6), mostramos exemplos em que processos sequenciais, que tem funções associadas a cada etapa, pode ser modelado por uma única função (essa função depende das funções de cada etapa). Além disso, vimos o caso das funções bijetoras, que são funções injetoras e sobrejetoras, para as quais existe a função inversa (também bijetora), cuja lei de formação fornece as informações dadas a partir das funções geradas.

Capítulo 4

O Gráfico de uma Função

4.1 Construindo Alguns Gráficos de Funções

Ao abrirmos o jornal do dia nos deparamos com inúmeros desenhos que ilustram situações específicas. Por exemplo, o preço do dólar na semana (Figura 4.1), o número de homicídios nas capitais do Brasil em cada ano (Figura 4.2), a pesquisa de satisfação do governo (Figura 4.3), etc.

Figura 4.1: Cotação do dólar.

Figura 4.2: Número de homicídios nas capitais brasileiras.

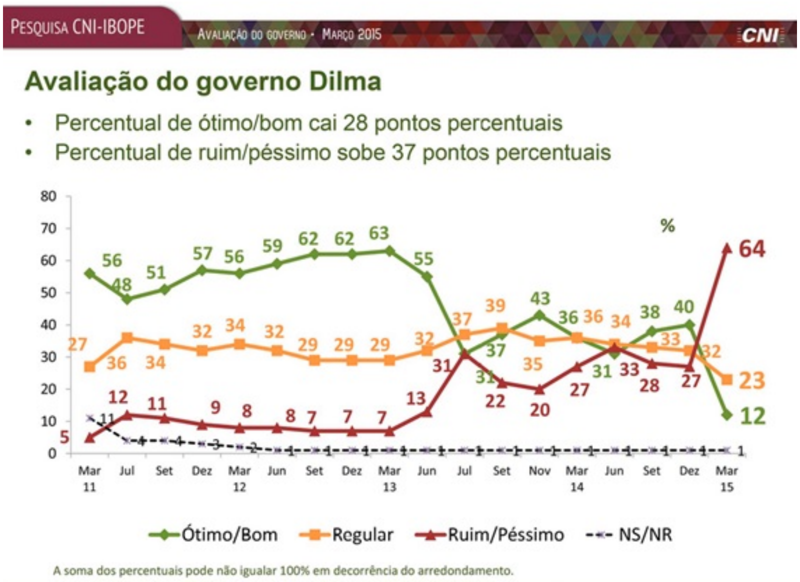

Figura 4.3: Pesquisa de satisfação do governo Dilma.

Vemos que tais representações ajudam muito a ter uma ideia do comportamento geral do que estamos estudando. Será que poderíamos fazer também desenhos que representassem as funções que estamos estudando? Será que conseguimos expressar uma função através de um gráfico?

Olhando os desenhos do jornal, vemos dois eixos ortogonais (eixos com um ângulo de 90° entre si). No desenho do dólar, por exemplo, temos um eixo horizontal, onde estão os dias da semana, e um eixo vertical, onde estão os preços do dólar para cada dia. Relacionando isso com o que aprendemos no Capítulo 2, podemos dizer que no eixo horizontal estão as informações dadas, e no eixo vertical, as informações obtidas a partir das informações dadas. Note também que este sistema de eixos ortogonais nos lembra o plano cartesiano (estudado no ensino básico), onde geralmente chamamos de eixos x e y.

Em se tratando de plano cartesiano, talvez alguns alunos já tiveram a curiosidade de perguntar: Por que no plano cartesiano os eixos são ortogonais? Tais eixos não poderiam se interceptar formando outro ângulo (veja o exemplo da Figura 4.4)?

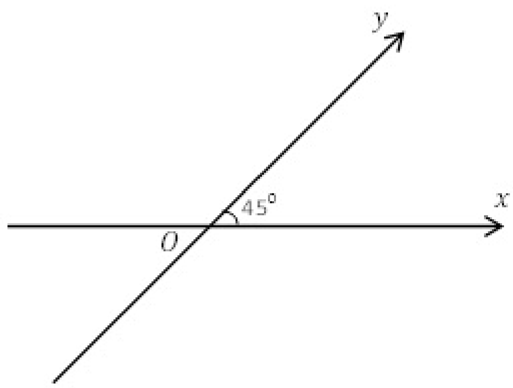

Figura 4.4: Plano com eixos não-ortogonais.

A resposta é sim, e para isso é preciso desenvolver uma teoria que dê sustentação a esse novo sistema de eixos não-ortogonais. Entretanto, um plano cartesiano com eixos ortogonais proporciona uma forma mais simples e simétrica, que nos ajuda a dar uma melhor compreensão dos gráficos de funções e de outros desenhos. Vejamos, por exemplo, o desenho do quadrado de lado 2 (centro na origem) no plano ortogonal (Figura 4.5), e o seu desenho em um plano, cujo ângulo de interseção entre os eixos é 45° (Figura 4.6).

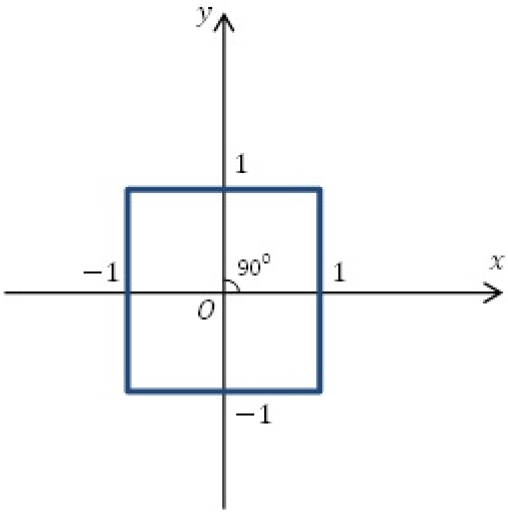

Figura 4.5: Desenho do quadrado de lado 2 num plano com eixos ortogonais.

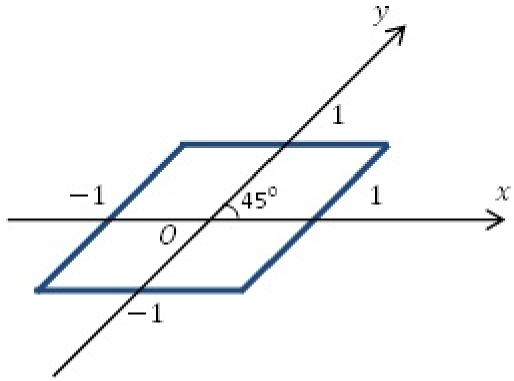

Figura 4.6: Desenho que mostra como ficaria o quadrado de lado 2 em um plano, cujo ângulo de interseção entre os eixos é 45°.

Vendo a Figura 4.6, perceba que o desenho do quadrado neste novo plano mudou. Assim, por questão de conveniência, usaremos o plano com eixos ortogonais para fazer os próximos desenhos.

Por exemplo, no caso do terreno (Exemplo 2.0.6), se registramos as informações dadas no eixo x do plano cartesiano, obtemos a Figura 4.7.

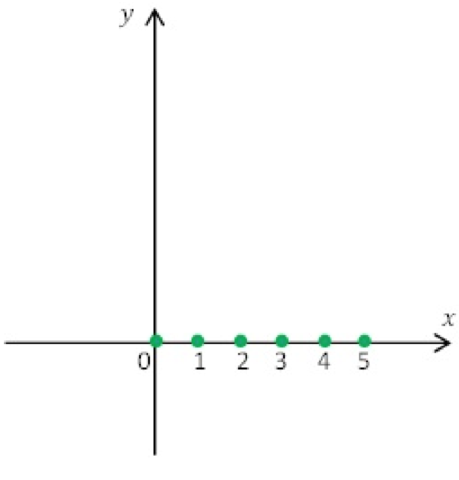

Figura 4.7: Algumas informações dadas do terreno no eixo x do plano cartesiano.

Se registramos as informações obtidas no eixo y, obtemos a Figura 4.8.

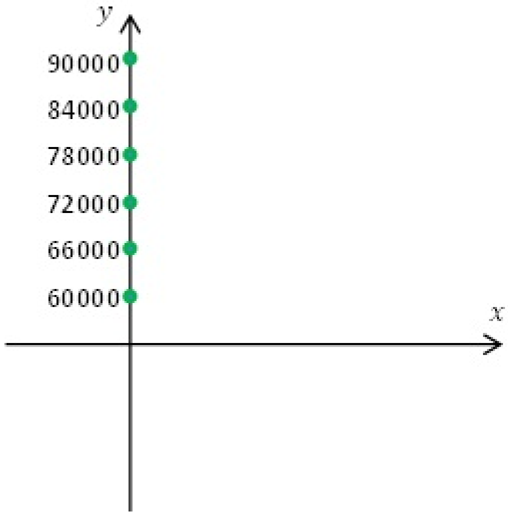

Figura 4.8: Infomações geradas do terreno no eixo y do plano cartesiano.

E agora para saber qual informação está sendo obtida a partir de cada informação dada, precisamos ligar tais valores associados. Para isso, traçam-se perpendiculares aos eixos passando pelos pontos associados e a interseção de tais perpendiculares será o ponto que representa a associação. Assim, para encontrar o ponto da associação $x = 1 \leftrightarrow 60000$, procedemos como na Figura 4.9, e ao fazermos isso para alguns pontos do domínio, obtemos a Figura 4.10.

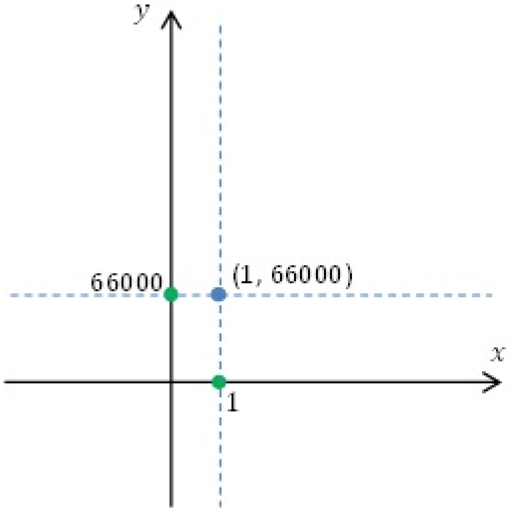

Figura 4.9: Figura que mostra o ponto (1,66000) obtido pela interseção das perpendiculares traçadas por 1 e 66000.

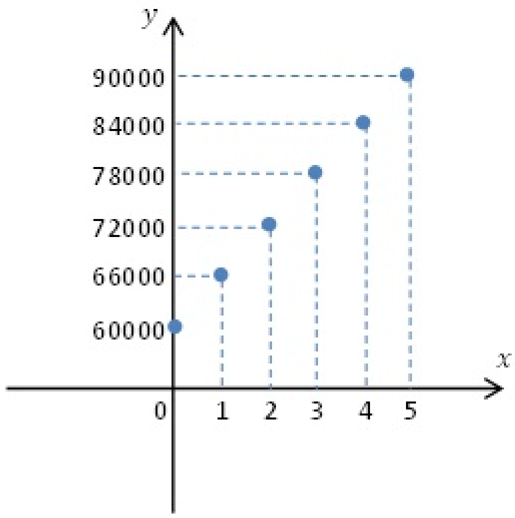

Figura 4.10: Figura que mostra um conjunto de pontos obtidos pela interseção de perpendiculares.

Entretanto, existem funções para as quais não conseguimos expressar exatamente o gráfico apenas marcando os pontos da mesma maneira como fizemos com o Exemplo 2.0.6 do terreno (Figura 4.10). É o caso, por exemplo, das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que têm lei de formação $f(x) = ax + b$. Como f tem infinitos pontos no $\mathcal{D}(f)$ (não podemos testar todos os pontos), precisamos tentar expressar os pontos por meio das propriedades que eles possuem.

Usamos $f(x) = ax + b$ para montar a Tabela 4.1 com os pontos x e $f(x)$.

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
-2	$-2a+b$
-1	$-a+b$
0	b
1	$a+b$
2	$2a+b$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 4.1: Tabela para x variando de 1 em 1.

Note que, cada vez que x muda de 1, $f(x)$ muda de a. Por exemplo, quando x foi de 0 para 1, $f(x)$ foi de b para $a+b$, cuja diferença $(a+b-b)$ é a. Quando x foi de -1 para 0, $f(x)$ foi de $-a+b$ para b, cuja diferença $(b-(-a+b))$ é a. De modo geral, se x varia de x_0 para x_0+1, temos que $f(x)$ varia de ax_0+b para $a(x_0+1)+b = ax_0+a+b$, cuja diferença é a. Como $x_0 \in \mathbb{R}$ foi qualquer, se acrescentamos 1 ao valor $x_0 \in \mathbb{R}$, então o valor de $f(x)$ muda de a. Assim, conseguimos marcar todos os pontos com distância 1.

Com a distância entre os x de 0,5, montamos a Tabela 4.2.

x	$f(x)$
$\vdots$	$\vdots$
-1	$-a+b$
$-0,5$	$-0,5a+b$
0	b
$0,5$	$0,5a+b$
1	$a+b$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 4.2: Tabela para x variando de 0,5 em 0,5.

Notemos agora que, quando x muda de 0,5 em 0,5, $f(x)$ muda de $0,5a$. De fato, quando x foi de -1 para -0,5, $f(x)$ foi de $-a+b$ para $-0,5a+b$, cuja diferença $(-0,5a+b-(-a+b))$ é $0,5a$. De modo geral, se x varia de x_0 para $x_0+0,5$, temos que $f(x)$ varia de ax_0+b para $a(x_0+0,5)+b = ax_0+0,5a+b$, cuja diferença é $0,5a$. Como $x_0 \in \mathbb{R}$ foi qualquer, temos que qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$, se mudarmos de 0,5, então o valor de $f(x)$ muda de $0,5a$. Assim, marcamos todos os pontos com distância 0,5.

Da mesma forma, se k é um número real qualquer, quando x muda de k em k, $f(x)$ muda de $k.a$. Basta verificar que, se x varia de x_0 para x_0+k, temos que a diferença $a(x_0+k)+b-(a(x_0)+b)$ é igual a $k.a$.

Essas propriedades mostram que podemos marcar qualquer ponto do gráfico de f. Vejamos como aplicá-las para marcar alguns pontos do gráfico de funções da forma $f(x) = ax+b$.

No Exemplo 2.0.1 da gasolina, a função $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ tem a lei de formação $f(x) = 3,34x$, isto é, $f(x) = ax+b$, com $a = 3,34$ e $b = 0$. Além disso, o domínio $[0,\infty)$ tem infinitos pontos da mesma forma que $\mathbb{R}$ tem infinitos pontos. Logo, somos capazes de marcar os pontos do gráfico usando as propriedades acima.

Começamos marcando um ponto qualquer no eixo x, por exemplo, $x = 0$, o que implica em $f(0) = 0$ e, assim, você marca o ponto (0,0). Depois você sabe que, se a coordenada x mudar de 0,5, a coordenada y mudará de $0,5.a = 0,5.3,34 = 1,67$, ou seja, se x mudar de 0 para 0,5, o valor de y mudará de 0 para $0+1,67 = 1,67$. Assim, você marca o ponto do gráfico (0,5, 1,67). Se x mudar de 0,5 para 1 (aumentou 0,5), então y muda de 1,67 para $1,67 + 1,67 = 3,34$ e, desta forma, marcamos o ponto (1, 3,34). E assim sucessivamente, obtendo os pontos da Figura 4.11.

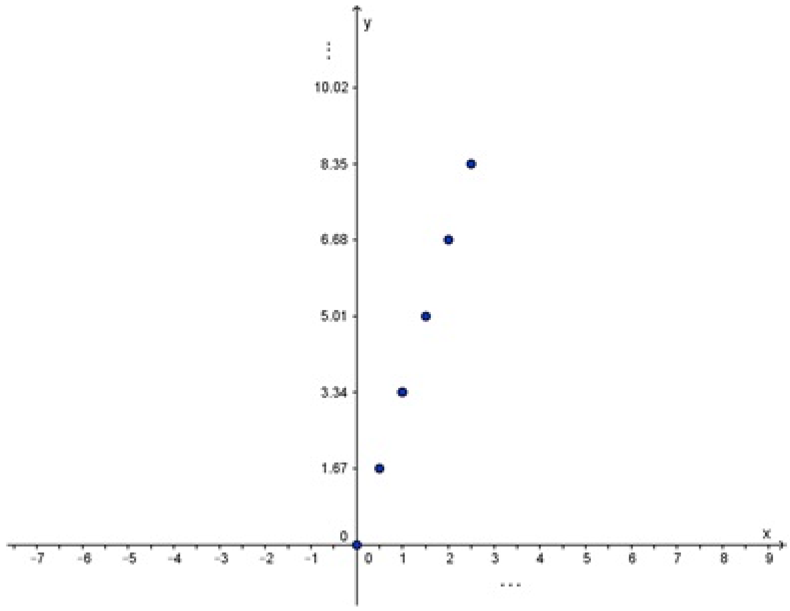

Figura 4.11: Conjunto de pontos com variação de x de 0,5 em 0,5.

Repare que as variações que fizemos em x foram de 0,5 em 0,5. Note também que você pode preencher os espaços entre 0 e 0,5, dando uma outra variação para x, variando de 0,1 em 0,1, por exemplo. Essa variação também preencherá com pontos os outros espaços (de 0,5 a 1, de 1 a 1,5, de 1,5 a 2, etc), como mostra a Figura 4.12.

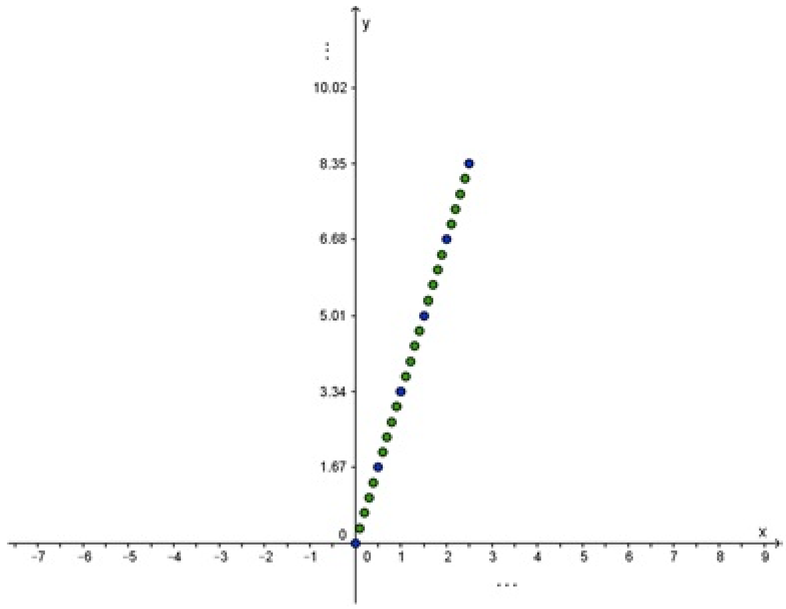

Figura 4.12: Conjunto de pontos em que inserimos a variação de x de 0,1 em 0,1.

Vemos que cada vez mais o gráfico (Figura 4.12) se parece com uma *semirreta* (pois o gráfico possui uma extremidade em (0,0)), mas infelizmente não podemos afirmar que é, pois ainda faltam infinitos pontos, e não conseguiremos traçar todos (pois existem infinitos). Entretanto, se conseguirmos mostrar que o conjunto de pontos que formam o gráfico de f satisfazem a condição para ser uma *semirreta*, qual seja: A proporção

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \text{constante}, \tag{4.1}$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, o que nos garante que ao colocar todos os pontos teremos uma *semirreta*.

Sabemos que a primeira coordenada dos pontos do gráfico está variando na semireta toda, ou seja, se $(x, f(x))$ é um ponto do gráfico de f, então $x \in [0, \infty)$. Assim, dados quaisquer dois pontos $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, e sabendo que $f(x) = 3,34x$, temos

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{3,34x_1 - 3,34x_2}{x_1 - x_2} = \frac{3,34(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 3,34.$$

Perceba que o resultado não depende dos valores de $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ que tomamos, e que foram quaisquer. Desta forma, temos que, ao marcar todos os pontos $(x, f(x))$, o gráfico da função $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, do Exemplo 2.0.1 da gasolina, é uma *semirreta*, como mostra a Figura 4.13.

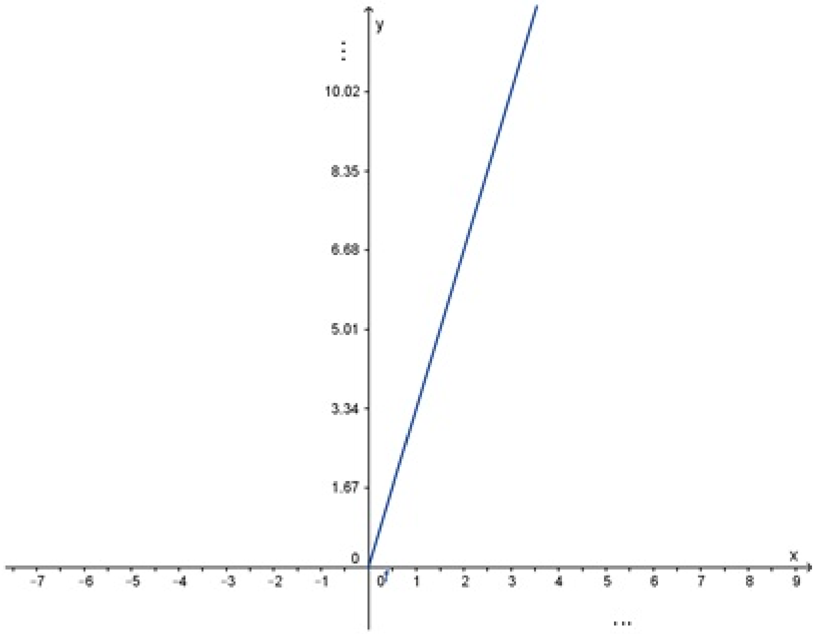

Figura 4.13: Gráfico da gasolina: Semirreta com origem no ponto (0,0).

No caso dos correios (Exemplo 2.0.7), função $f : (0, 500] \longrightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de formação está expressa no Capítulo 2 (lei de formação dos correios 2.2), para desenhar o gráfico de f, usamos os subintervalos de (0, 500] (veja Seção 2.4 no Capítulo 2), procedendo da seguinte maneira.

Considerando o intervalo (0, 20], marcamos no plano cartesiano o ponto (20, 1.30) do gráfico, onde a primeira coordenada $x = 20$ é um extremo do intervalo, e a segunda $y = 1.30$, corresponde ao preço para enviar uma carta que pesa 20 gramas. Também marcamos o ponto (0, 1.30), que ***não pertece*** ao gráfico de f. Mostrados na Figura 4.14.

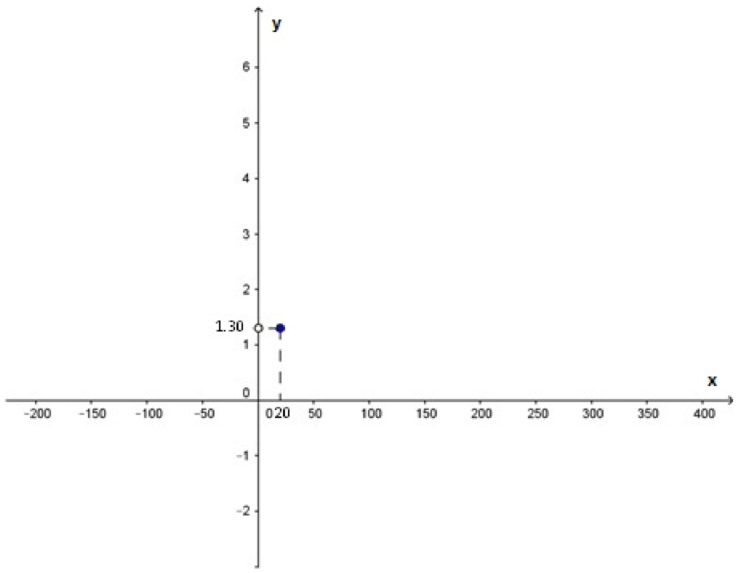

Figura 4.14: Pontos (0, 1.30) e (20, 1.30).

Usando o intervalo (20, 50], marcamos o ponto (50, 1.80) do gráfico, onde $x = 50$ é um extremo do intervalo, e $y = 1.80$, é o preço para enviar uma carta que pesa 50 gramas. Também usamos o outro extremo para marcar o ponto (20, 1.80), que ***não pertence*** ao gráfico. Veja Figura 4.15.

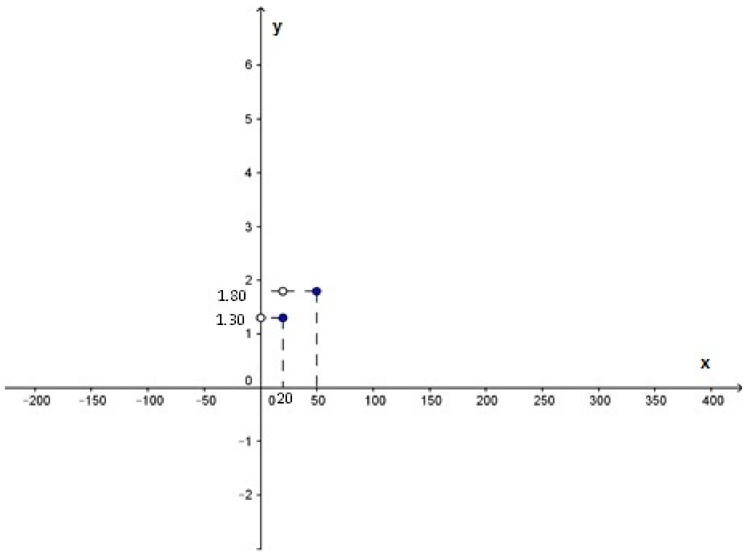

Figura 4.15: Pontos (0, 1.30), (20, 1.30), (20, 1.80) e (50, 1.80).

Procedendo da mesma maneira para os outros intervalos (Seção 2.4) de (0, 500], preenchemos outros pontos, como mostra a Figura 4.16.

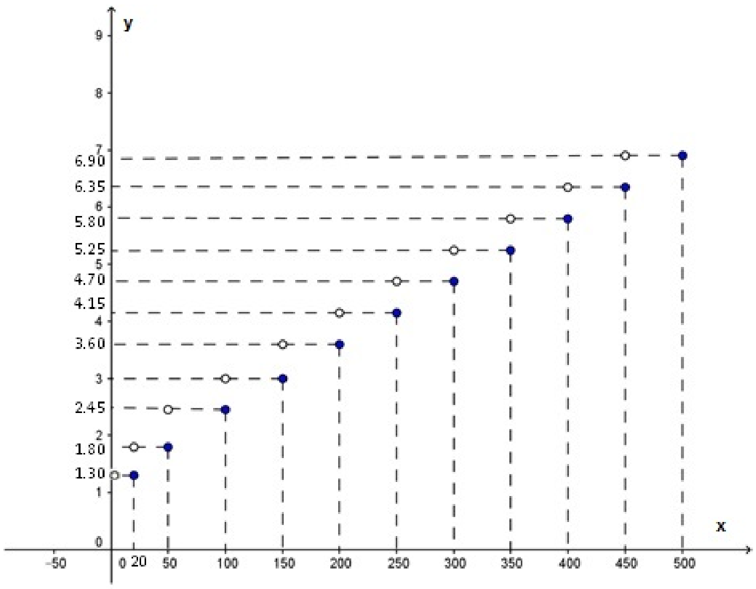

Figura 4.16: vários pontos, uns pertencem ao gráfico de f (pontos azuis), e outros não pertencem (pontos brancos).

Perceba que, até agora, marcamos alguns pontos. Entretanto, como cada intervalo possui infinitos pontos, torna-se impossível marcar todos eles. Dessa forma, usaremos a mesma propriedade (4.1) que tornou possível desenhar o gráfico da gasolina (Figura 4.13).

Note que, dados quaisquer $x_1, x_2 \in (0, 20]$, os preços (em reais) para enviar uma carta com tal peso é $f(x_1) = f(x_2) = 1,30$. Logo,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1,30 - 1,30}{x_1 - x_2} = 0 \ (constante).$$

Da mesma forma, dados quaisquer $x_1, x_2 \in (20, 50]$, o preço é $f(x_1) = f(x_2) = 1,80$. Logo,

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{1,80 - 1,80}{x_1 - x_2} = 0 \ (constante).$$

Usando o mesmo raciocínio para o restante dos intervalos, chegamos a conclusão que o gráfico dos correios (Figura 4.17) é formado por segmentos de retas paralelos ao eixo x, ligando os pontos (0, 20) a (20, 1.30), (20, 1.80) a (50, 1.80), e assim sucessivamente.

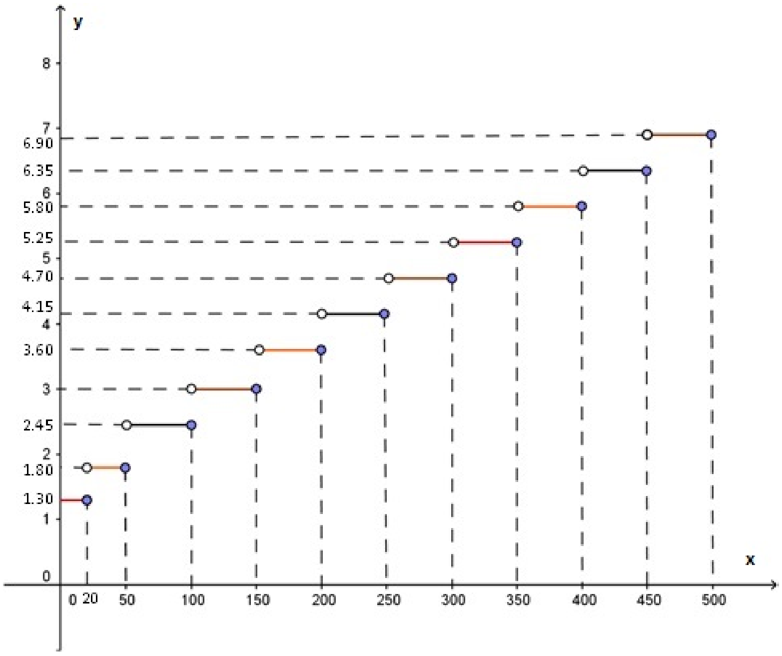

Figura 4.17: Gráfico dos correios: vários segmentos de retas em forma de escada.

Definição 4.1.1 (Gráfico de uma função) *De maneira mais formal, dada uma função* $f : A \longrightarrow B$ *(*A *e* B *são conjuntos numéricos), que a cada* x *pertencente a* A *associa* $f(x)$ *pertencente a* B*, o gráfico de* f *é definido como o conjunto formado pelos pares ordenados* (x, y) *do plano cartesiano, onde* $y = f(x)$*. Da mesma forma, podemos dizer que o gráfico de* f *é o conjunto*

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in A\}.$$

A Figura 4.18 mostra o gráfico (linha azul) de uma função $f : A \longrightarrow B$ no plano cartesiano, onde marcamos na reta horizontal os pontos $x \in A$ e, na reta vertical, os pontos $f(x) \in B$.

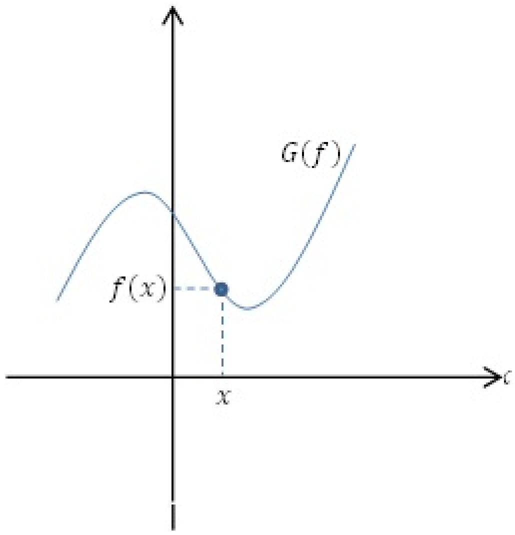

Figura 4.18: Figura que mostra o gráfico de f (linha azul).

Vimos que, dada uma função $f : A \longrightarrow B$, podemos montar seu gráfico que é um subconjunto do plano cartesiano. E se fizermos a pergunta ao contrário, ou seja, dado um conjunto de pontos no plano cartesiano, o que podemos dizer sobre este conjunto ser ou não gráfico de uma função?

Dependendo do conjunto de pontos, isso pode ser complicado (por exemplo, o conjunto de pontos da Figura 4.2), entretanto usando as regras que uma associação precisa satisfazer a fim de ser função, podemos em alguns casos responder positivamente ou negativamente tal pergunta como veremos a diante.

Para saber se um conjunto de pontos dados no plano cartesiano pode ser o gráfico de uma função $f : A \longrightarrow B$, devemos marcar os pontos $x \in A$ no eixo x e, traçar paralelamente ao eixo y, retas passando por cada ponto $x \in A$. Também não pode haver ponto do conjunto dado que não seja tocado por uma dessas retas. Logo, se tiver pontos que não estão em A que possuem pontos associados a ele, é porque A não é o domínio apropriado e deveríamos procurar outra função (com domínio diferente), cujo conjunto de pontos possa ser a representação de seu gráfico.

A última verificação é saber, se a cada $x \in A$, o ponto que intercepta a reta paralela que passa por $x \in A$ tem a 2ªcoordenada y igual a $f(x)$. E isso deve acontecer em todos os pontos $x \in A$.

Se isso tudo ocorrer, então podemos dizer que aquele conjunto de pontos é de fato o gráfico da função $f : A \longrightarrow B$.

A Figura 4.19 mostra dois conjuntos de pontos (em azul), um no lado esquerdo e outro no lado direito. O conjunto de pontos à esquerda pode ser o gráfico de uma função, enquanto que, o conjunto de pontos à direita não é o gráfico de uma função.

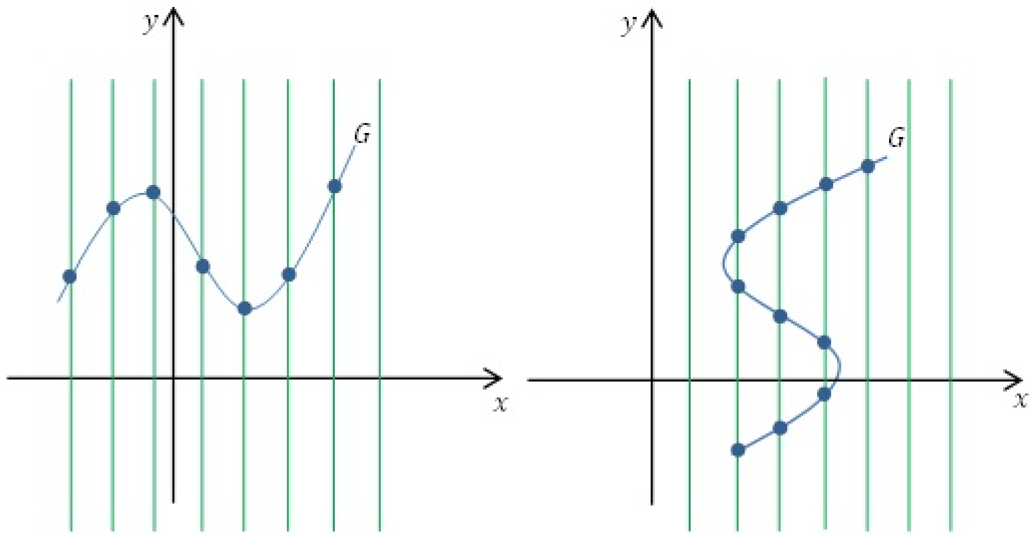

Figura 4.19: O conjunto de pontos do lado esquerdo pode ser o gráfico de uma função e o conjunto de pontos do lado direito não é o gráfico de uma função.

Um exemplo de conjunto de pontos que não é gráfico de uma função, é a circunferência de raio 1, como mostra a Figura 4.20 (obtida por meio do software GeoGebra).

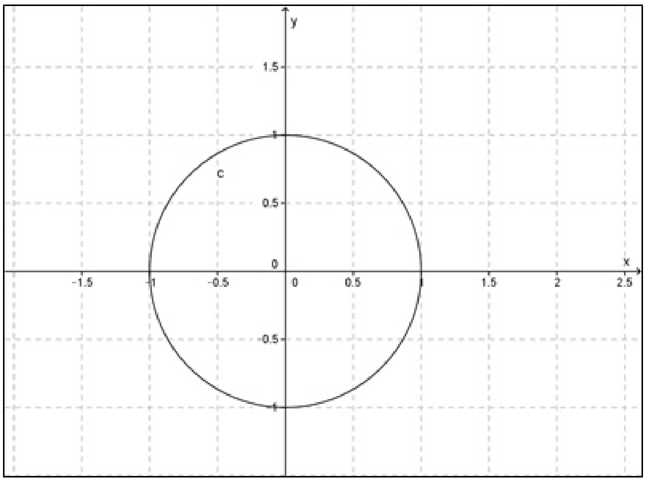

Figura 4.20: Circunferência de raio 1.

Note que é possível traçar uma reta paralela ao eixo y, passando por um ponto do intervalo $(-1, 1)$, e tocando em dois pontos da circunferência, ou seja, podemos obter um ponto do eixo x associado a dois pontos distintos do eixo y, contrariando o conceito de função (Seção 2.3).

Observação 4.1.1 *Note que, se existe alguma reta paralela ao eixo y que passa por um ponto $x \in A$, mas não intercepta o conjunto de pontos, isso significa que este ponto x não está associado a ninguém, logo $f : A \longrightarrow B$ não pode ser função.*

Mais uma vez, se uma reta paralela ao eixo y intercepta o conjunto de pontos, mas ao tocar o eixo x, tal ponto não pertence a A, logo está existindo um ponto fora de A associado a algum ponto pertencente a B, logo deveria fazer parte do domínio de $f : A \longrightarrow B$, o que não está ocorrendo.

4.2 Domínio de uma Função Através do Gráfico

Dado um conjunto de pontos do plano cartesiano, se tal conjunto é o gráfico de uma função, podemos encontrar o domínio desta função sem precisar saber sua lei de formação. Para você achar o domínio, neste caso, você pode imaginar que todos os pontos do gráfico são projetados na direção do eixo x . O conjunto de todas essas projeções no eixo x é o domínio da função. A Figura 4.21 mostra o domínio de uma função f (linha verde) a partir do gráfico de f (linha azul).

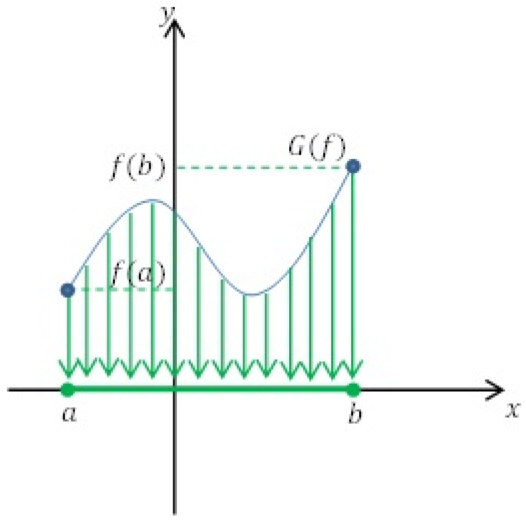

Figura 4.21: Figura que mostra o domínio de uma função (linha verde).

4.3 Imagem de uma Função Através do Gráfico

Se ao invés do domínio, você precisasse encontrar o conjunto imagem usando o gráfico da função, você teria que pensar em todos os pontos do gráfico sendo projetados na direção do eixo y. Daí, o conjunto de todas essas projeções no eixo y forma o conjunto imagem da função. Na Figura 4.22, você tem o conjunto imagem de uma função f (linha verde) e o gráfico dessa função f (linha azul). Assim, qualquer ponto y que tomemos no conjunto imagem da função (entre $f(a)$ e $f(b)$), terá pelo menos um x do domínio tal que $f(x) = y$.

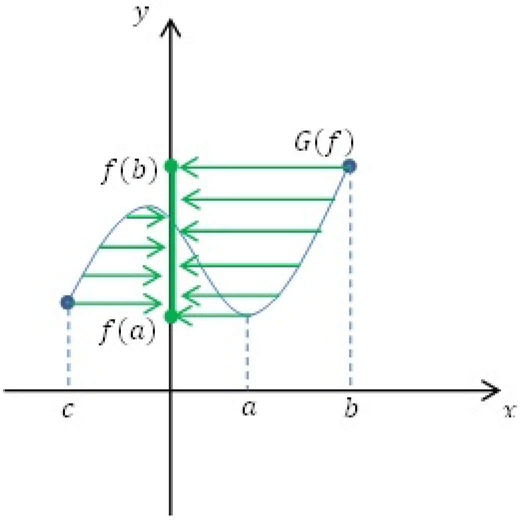

Figura 4.22: Figura que mostra a imagem de uma função (linha verde).

Usando o software GeoGebra construímos uma aproximação do gráfico de uma função $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, apresentado na Figura 4.23, que tem lei de formação $f(x) = x^2 - 1$.

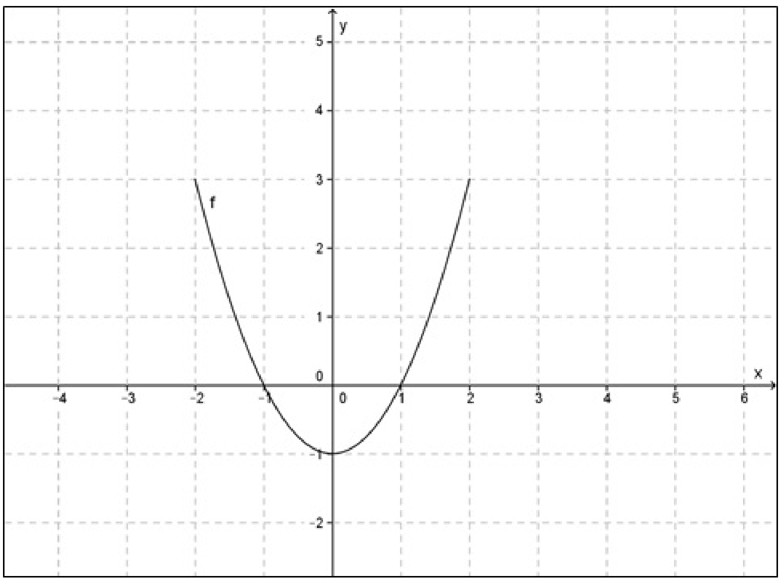

Figura 4.23: Figura que mostra uma aproximação do gráfico da função $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ com lei de formação $f(x) = x^2 - 1$.

Perceba que as projeções dos pontos do gráfico em direção ao eixo x fornece o domínio da função dado pelo intervalo da reta [-2,2], como mostra a Figura 4.24.

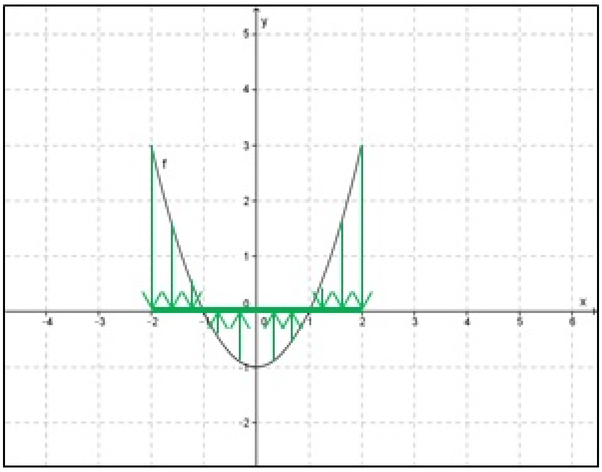

Figura 4.24: Figura mostrando o domínio de f.

Já para saber o conjunto imagem da função fazemos as projeções dos pontos do gráfico em direção ao eixo y, Figura 4.25. Assim, obtemos o conjunto imagem como sendo $Im(f) = [-1, 3]$.

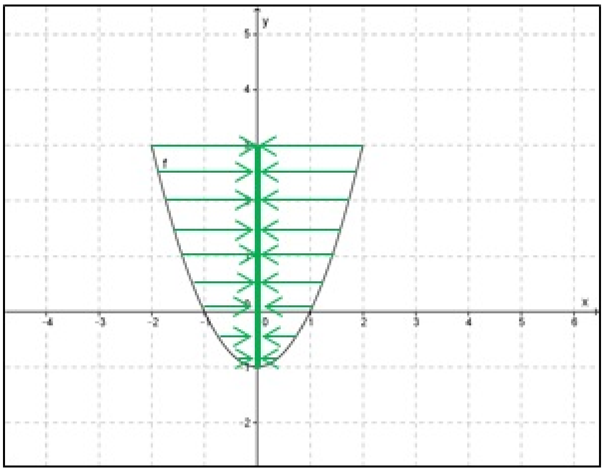

Figura 4.25: Figura mostrando a imagem de f.

4.4 Funções Injetoras Através do Gráfico

Também podemos identificar se uma função $f : A \longrightarrow B$ é injetora através do gráfico. Para saber se uma função é injetora graficamente, cada reta paralela ao eixo x que traçarmos passando pelos pontos do conjunto imagem, essa reta só toca o gráfico em um único ponto como mostra o gráfico apresentado na Figura 4.26.

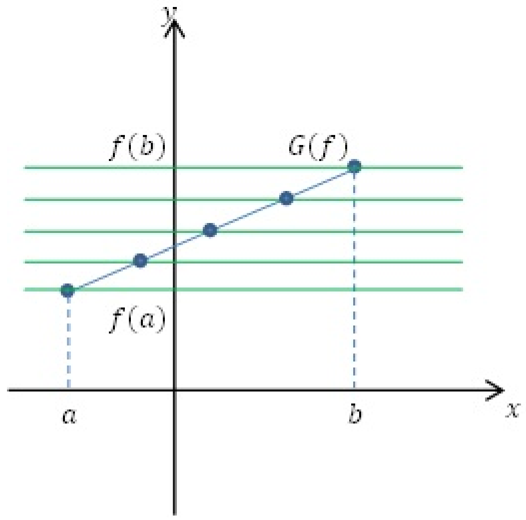

Figura 4.26: Figura com o gráfico (linha azul) de uma função injetora.

Nesta Figura 4.26, qualquer ponto $y \in Im(f) = [f(a), f(b)]$, com $a, b \in A$, está associado a um único ponto $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Note também que o gráfico da função da gasolina (Figura 4.13) é o gráfico de uma função injetora (Seção 3.1).

Já o exemplo da Figura 4.23, vista anteriormente, mostra o gráfico de uma função não-injetora $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, com lei de formação $f(x) = x^2 - 1$. Note, por exemplo, que $3 \in Im(f) = [-1, 3]$, e está associado a dois pontos distintos $-2, 2 \in \mathcal{D}(f) = [-2, 2]$, de tal maneira que

$$f(-2) = f(2) = 3.$$

Além disso, temos o gráfico dos correios (Figura 4.17), que é gráfico de uma função não-injetora (Seção 3.1).

4.5 Gráficos de Funções Crescentes, Decrescentes, Não-Decrescentes e Não-Crescentes

Na Figura 4.27, vemos o gráfico de uma função $f : [0,125] \longrightarrow [0,500]$, que modela uma situação de uma caixa d'água de 500 litros esvaziando à medida que o tempo passa.

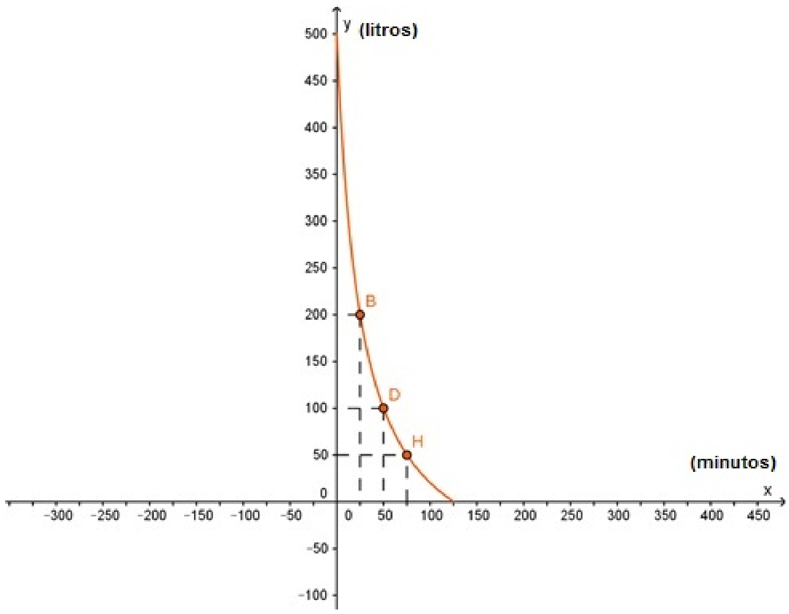

Figura 4.27: Gráfico que mostra a quantidade de litros de uma caixa d'água em função do tempo.

Olhando para o gráfico (Figura 4.27), no eixo x, temos os tempos em minutos, e no eixo y, as quantidades de litros. Note, por exemplo, que no tempo $x = 0$ minuto, a caixa está cheia, ou seja, a quatidade de litros é $f(x) = 500$; no tempo de $x = 25$ minutos, a quantidade de litros diminui para $f(x) = 200$; no tempo de $x = 50$ minutos, a quantidade de litros reduz para $f(x) = 100$; até o tempo máximo $x = 125$ minutos (2 horas e 5 minutos), quando a caixa se esvazia completamente $(f(x) = 0)$.

Repare que quando o tempo aumenta, a quantidade de litros na caixa diminui, isso acontece de forma que, dados quaisquer tempos $x_1, x_2 \in [0,125]$, temos a quantidade de litros $f(x_1) > f(x_2)$. Portanto, o gráfico da função $f : [0, 125] \longrightarrow [0, 500]$ é o gráfico de uma função decrescente (veja funções decrescentes 3.3.3).

Já o gráfico da gasolina (Figura 4.13) mostra o gráfico de uma função $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ crescente (veja funções crescentes 3.3.1).

E no gráfico dos correios (Figura 4.17), temos o gráfico de uma função $f : (0, 500] \longrightarrow \mathbb{R}$ não-decrescente (veja funções não-decrescentes 3.3.2).

Dessa forma, finalizamos este capítulo relembrando que mostramos como verificar se um conjunto de pontos do plano cartesiano pode representar o gráfico de uma função. Também vimos que é possível construir gráficos de algumas funções e mostramos como identificar o conjunto $\mathcal{D}(f)$ e conjunto $Im(f)$ através do gráfico de uma função, além de ilustrar alguns gráficos de funções injetoras e funções crescentes/decrescentes.

Conclusão

No ensino superior nos deparamos com muitos alunos que terminam o ensino médio sem entender o conceito de função e com isso o início da graduação para aqueles que ingressam nos cursos das Ciências Exatas ou Engenharia geralmente fica bem difícil. Se o aluno não entende o conceito quando introduzido, ele fica muito fragilizado uma vez que depois do conceito inicial, ele estuda funções o resto do ensino médio, a saber: as funções do 1^0 e 2^0 graus, funções exponenciais, logaritmicas, etc. Acreditamos que a forma em que os conceitos são apresentados podem dificultar o entendimento do assunto. As vezes os alunos não estão preparados para entender uma definição abstrata, e por isso uma abordagem partindo de situações do dia-a-dia pode ser uma alternativa para o professor. Tentamos neste trabalho propor uma abordagem do assunto partindo de situações do dia-a-dia e evoluindo na construção dos conceitos. A ideia que procuramos seguir foi que os conceitos já existem, precisamos apenas dar nomes a eles. Com esse intuito escrevemos este material que, além dos conceitos de função, introduz a definição de muitas propriedades, como injetividade, crescimento, paridade, inclusive a ideia de bijeção e função inversa. Finalizamos com a apresentação de gráficos e de como identificar nos gráficos alguns conceitos introduzidos nos capítulos anteriores. Esperamos que este material ajude aos alunos assim como nos ajudou a entender como oferecer abordagens alternativas para assuntos tão importantes na Matemática.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages; *Números e Funções Reais*, 1 e.d. SBM, Coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2013.

[2] LIMA, Elon Lages; *Análise Real volume 1*, 8 e.d. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[3] FILHO, Daniel Cordeiro de Morais; *Um Convite à Matemática*, 2 e.d. EDUFCG, Campina Grande, 2006.