



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

RODRIGO RICARDO CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE

O JOGO DOS DISCOS: O USO DA EXPERIMENTAÇÃO COMO SUPORTE
PARA O ENSINO DA PROBABILIDADE

orientador:

Professora Débora Borges Ferreira

Natal/RN - 2015

RODRIGO RICARO CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE

O JOGO DOS DISCOS: O USO DA EXPERIMENTAÇÃO COMO
SUPORTE PARA O ENSINO DA PROBABILIDADE

Dissertação apresentada ao Corpo
Docente do Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional -
PROFMAT -CCET - UFRN, como re-
quisito parcial para obtenção do título
de Mestre em Matemática.

Orientador

Profa. Dra. Débora Borges Ferreira.

Natal/RN - 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

RODRIGO RICARDO CAVALCANTI DE ALBUQUERQUE

**O JOGO DOS DISCOS: O USO DA
EXPERIMENTAÇÃO COMO SUPORTE PARA O
ENSINO DA PROBABILIDADE**

Comissão Examinadora:

Prof^a Dr^a. Débora Borges Ferreira (PROFMAT/UFRN - Orientador)

Prof^o

Prof^a.

Natal/RN - 2015

Catálogo da Publicação na Fonte. UFRN / SISBI / Biblioteca Setorial
Centro de Ciências Exatas e da Terra – CCET.

Albuquerque, Rodrigo Ricardo Cavalcanti de.

O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade / Rodrigo Ricardo Cavalcanti de Albuquerque. - Natal, 2015.
50 f.: il.

Orientadora: Profa. Dra. Débora Borges Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Probabilidade geométrica – Dissertação. 2. Jogos matemáticos – Dissertação.
3. Experimentação – Dissertação. I. Ferreira, Débora Borges. II. Título.

RN/UF/BSE-CCET

CDU: 519.212.3

Agradecimentos

A Deus, que está sempre presente em todos os momentos de minha vida, dando saúde, força, sabedoria, sem os quais nada teria feito.

Aos meus pais Ricardo Luiz Cavalcanti de Albuquerque (in memoriam) e Rívelsa Medeiros Cavalcanti, que possibilitaram meu crescimento pessoal e profissional, apoiando-me e ensinando-me em todos os momentos.

Aos meus irmãos, em especial a Ricardo Luiz Cavalcanti de Albuquerque Júnior, que, muito mais que irmão, é um verdadeiro pai para mim. Um exemplo de homem e profissional brilhante que deve ser seguido e no qual me espelho diariamente.

A minha esposa e minha filha, que nos momentos difíceis são o meu porto seguro no qual encontro carinho e forças para continuar a caminhada.

A minha orientadora Débora Borges Ferreira, que sempre esteve disponível para me ajudar, demonstrando empenho, dedicação e apoio total na elaboração desta dissertação.

Dedicatória

Dedico esta dissertação à minha esposa e a minha filha, que ajudaram a tornar esse sonho realidade, proporcionando-me forças para que eu não desistisse de ir atrás do que eu buscava para minha vida. Muitos obstáculos foram impostos para mim durante esses últimos anos, mas, graças a vocês, eu não fraquejei. Obrigado por tudo.

Resumo

No presente trabalho, apresentamos uma proposta de aula para a introdução do ensino de probabilidade por meio do Jogo dos Discos, que é baseado no conceito de probabilidade geométrica e consiste em determinar a probabilidade de um disco não interceptar as linhas de uma superfície quadriculada, quando lançado aleatoriamente. O problema foi proposto a uma turma de 3^a série do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, *campus* João Câmara, cujos alunos deveriam construir um tabuleiro quadriculado de forma que o percentual de êxito do jogador fosse previamente definido por eles. Uma vez o tabuleiro construído, os alunos deveriam verificar se aquele percentual teoricamente predeterminado correspondia com a realidade obtida por meio de experimentação. Os resultados obtidos e a postura dos alunos em aulas posteriores sugerem um maior envolvimento desse aluno com a disciplina, tornando o ambiente propício para a aprendizagem.

Palavras chaves: probabilidade geométrica, jogos matemáticos, experimentação.

Abstract

In this paper we propose a class for introducing the probability teaching using the game discs which is based on the concept of geometric probability and which is supposed to determine the probability of a disc randomly thrown does not intercept the lines of a gridded surface. The problem was posed to a group of 3rd year of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Norte - João Câmara. Therefore, the students were supposed to build a grid board in which the success percentage of the players had been previously defined for them. Once the grid board was built, the students should check whether that theoretically predetermined percentage corresponded to reality obtained through experimentation. The results and attitude of the students in further classes suggested greater involvement of them with discipline, making the environment conducive for learning.

Key-words: geometric probability; mathematical games; experimentation.

Lista de Figuras

2.1	Região B contida em região A.	24
2.2	Exemplo de moedas lançadas em ladrilhos.	28
2.3	Lançamentos favoráveis à MESA (esquerda) e lançamentos favoráveis ao desafiante (direita).	29
2.4	lançamentos favoráveis de discos de raio $d/2$ em um ladrilho de lado L	30
3.1	Figura para orientação nos cálculos dos alunos.	40
3.2	Figura para orientação nos cálculos dos alunos.	40
3.3	Moedas que podem ser lançadas e seus diâmetros.	41
3.4	Ilustração da folha de cartolina fixada por fita adesiva.	42
3.5	Modelo de tabela para registro dos lançamentos das moedas	43
3.6	Cálculos para a determinação dos lados do quadriculado do tabuleiro para o lançamento de moedas de R\$ 0,10 com probabilidade de ganho de 40%.	44
3.7	Alunos trabalhando nos cálculos e na confecção dos tabuleiros quadriculados.	44
3.8	Modelo de tabuleiro já pronto.	45
3.9	Resultados obtidos nos experimentos.	45

Sumário

Introdução	11
1 Jogos e o ensino de matemática	14
2 Probabilidade e o jogo dos discos	20
2.1 Probabilidade: limite e possibilidades	20
2.1.1 A probabilidade clássica	21
2.1.2 A probabilidade frequentista ou frequencista	21
2.1.3 A probabilidade axiomática	22
2.1.4 A probabilidade geométrica	23
2.2 A probabilidade no ensino básico	24
2.3 O jogo dos discos	27
2.3.1 Maneira 01	28
2.3.2 Maneira 02	28
3 Proposta de aula e resultados	32
3.1 AULAS 01 e 02	33
3.1.1 Teoria dos Erros Experimentais	35
3.1.2 Probabilidades na Física Estatística	35
3.1.3 Probabilidades na Física Quântica	36
3.1.4 A inferência estatística	37
3.1.5 O delineamento dos experimentos científicos	37
3.1.6 A correlação entre variáveis	37
3.1.7 Teoria das Filas	38
3.1.8 Teoria da Informação	38

3.1.9 Teoria do Risco	39
3.2 AULAS 03, 04, 05 e 06	39
3.3 AULA 07	42
3.4 AULA 08	46
Considerações finais	47
Referências Bibliográficas	49

Introdução

Ao observar nosso dia-a-dia, percebemos que o jogo tem presença marcante. Quando criança, temos as brincadeiras inocentes, como bola de gude, bambolê, pique-esconde, amarelinha, pular elástico e, à medida que vamos crescendo, o jogo não nos abandona. Passamos a ter as palavras cruzadas, War, Imagem & Ação, Banco Imobiliário, Jogo da Vida, entre outros.

De acordo com essa perspectiva, Grandó (2000) coloca que

[...] os jogos, as brincadeiras, enfim, as atividades lúdicas exercem um papel fundamental para o desenvolvimento cognitivo, afetivo, social e moral das crianças, representando um momento que necessita ser valorizado nas atividades infantis. (GRANDÓ, 2000, p.3)

Se o jogo desperta tanta curiosidade e se coloca num papel importante auxiliando as crianças a desenvolverem habilidades e competências que podem e deverão ser usadas no futuro, por que não adaptá-lo e levá-lo para a sala de aula, com o objetivo de melhorar o processo de ensino-aprendizagem, em especial o de matemática?

É claro que, se a intenção é utilizar os jogos com um fim pedagógico, uma adaptação se faz necessária. O jogo pelo jogo, destacando-se apenas o lado lúdico e de forma descontextualizada, não trará benefícios para o aprendizado do aluno. É necessário que o professor tenha em mente, de forma clara e criteriosa, quais os objetivos que se deseja alcançar e elaborar um bom planejamento para ter êxito.

Ao utilizar jogos como recursos pedagógicos, o professor deve ter como objetivo não apenas o despertar do aluno para a matemática, mas também deve incentivar a descoberta de conceitos, o estímulo à investigação e o estímulo ao raciocínio lógico-dedutivo. Esses elementos, ao serem lançados em sala de aula através de um jogo escolhido pelo professor, devem servir como facilitadores no processo de ensino e aprendizagem.

A probabilidade é um, entre os mais variados tópicos da matemática, que podem ser abordados através do uso de jogos. Este relevante tema do ensino médio merece uma atenção especial principalmente por estarmos inseridos em um mundo no qual somos literalmente bombardeados por informações, gráficos, tabelas cujas análises permitem e norteiam tomadas de decisões importantes. Nesse contexto a probabilidade se torna um elemento forte e essencial à formação do jovem.

Nessa ótica, Bernardes (1987) destaca

“E o ensino de Matemática se deve ocupar mais de uma forma de pensar do que de uma forma de escrever fórmulas ou numerais, se o ensino da Matemática se deve ocupar mais da tomada consciente de decisões do que do estrito cálculo, então a teoria das probabilidades é fundamental”. (BERNARDES, 1987, p.13)

Observando os vários temas que permeiam a matemática no ensino básico, a probabilidade tem se mostrado sistematicamente um dos temas que gera maior aflição no aluno e algo precisa ser feito para tentar mudar essa realidade. O ensino tradicional de probabilidade, baseado na resolução de atividades que priorizam a simples memorização de fórmulas, pode não ser uma ferramenta eficaz nesse combate, pois o aluno tende a criar certa resistência ao conteúdo.

O trabalho como tutor em certa disciplina de uma especialização no ensino de matemática para o ensino médio me proporcionou o primeiro contato com os jogos dos discos. Ele se apresenta como um jogo baseado na matemática experimental o qual tem como elemento central o conteúdo de probabilidade. Nessa ocasião, percebemos uma boa oportunidade para tentar mudar essa relação de insegurança existente entre os alunos e a probabilidade, o que culminou nesta dissertação que tem por objetivo apresentar uma proposta didática para a introdução desse tema de uma maneira lúdica e mais leve.

No que diz respeito a esta dissertação, temos a sua divisão em três capítulos. No primeiro, tratamos da importância dos jogos para o ensino da matemática. Trazemos à discussão o que os Parâmetros Curriculares Nacionais dizem sobre o ensino de matemática e o que a literatura nos oferece sobre a união do ensino de matemática e jogos.

No segundo capítulo, falamos um pouco sobre probabilidade e suas diferentes abordagens (clássica, frequentista, axiomática e geométrica), dando um tratamento especial à chamada

probabilidade geométrica. As dificuldades que, às vezes, alguns professores e alunos encontram a respeito do processo de ensino e aprendizagem de probabilidade e a importância que a probabilidade tem para diversas áreas do conhecimento também são tratados nesse capítulo. No fim do capítulo, apresentamos o Jogo dos Discos como uma alternativa viável para se introduzir o tema probabilidade em sala de aula.

No terceiro e último capítulo, tratamos especificamente do Jogo dos Discos e apresentamos uma proposta de aula a ser aplicada, cujo objetivo é fazer com que os conceitos que permeiam a probabilidade apareçam de forma natural. Neste capítulo relatamos ainda a experiência obtida com a aplicação da referida proposta na turma do 3^a série de Administração do Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Rio Grande do Norte, *campus* João Câmara, cuja ideia era introduzir o conteúdo de probabilidade de uma forma lúdica, buscando levar o aluno a ter uma relação positiva com o tema.

Capítulo 1

Jogos e o ensino de matemática

O professor de matemática precisa estar ciente de que, tão importante quanto ensinar matemática, é fazer com que o aluno se torne um cidadão crítico que seja capaz de interpretar e manipular informações matemáticas de acordo com as necessidades do seu dia-a-dia. Para que essa “transformação” ocorra, é necessária a participação ativa de um professor bem preparado e que utilize todos os recursos disponíveis ao seu alcance, criando um ambiente que possibilite ao aluno prazer em aprender através da investigação, dedução, criação e participação.

A utilização de jogos como um recurso pedagógico no ensino de conceitos matemáticos se apresenta como uma boa maneira para a criação desse ambiente favorável à aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) ressaltam a importância do uso dos jogos como suporte pedagógico.

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propicia a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas o que estimula o planejamento das ações, possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural no decorrer da ação sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46).

Ainda sobre os olhos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), não existe uma única forma para o ensino da matemática. Porém, é fundamental para o professor conhecer os vários caminhos existentes, para que ele possa construir a sua prática de forma segura e consistente. Nesse contexto, o uso dos jogos podem surgir como um dos recursos disponíveis para o professor.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) destacam ainda “o jogo como uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos” e ainda aponta que “um aspecto relevante no uso dos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gere interesse e prazer”.

Já em Grandó (2004), a autora afirma que:

Ao analisarmos os atributos e/ou características do jogo que pudessem justificar sua inserção em situações de ensino, evidencia-se que este representa uma atividade lúdica, que envolve o desejo e o interesse do jogador pela própria ação do jogo, e mais, envolve a competição e o desafio que motivam o jogador a conhecer seus limites e suas possibilidades de superação de tais limites, na busca da vitória, adquirindo confiança e coragem para se arriscar. (GRANDO, 2004,p.26)

Nesta perspectiva, os jogos matemáticos, por trabalharem com raciocínio lógico-dedutivo, se apresentam como uma interessante forma de se introduzir conceitos, pois levam os alunos a pensar, refletir e testar situações sobre o jogo, ajudando assim a produzir conhecimento.

Mas o que seria um jogo matemático? Uma definição interessante foi dada por Agranionih e Smaniotto (2002):

[...] uma atividade lúdica e educativa, intencionalmente planejada, com objetivos claros, sujeita a regras construídas coletivamente, que oportuniza a interação com os conhecimentos e os conceitos matemáticos, social e culturalmente produzidos, o estabelecimento de relações lógicas e numéricas e a habilidade de construir estratégias para a resolução de problemas. (Agranionih e Smaniotto, 2002, p16)

Assim, os jogos matemáticos, além de deixarem as aulas de matemática mais interessantes e dinâmicas, podem servir de ferramenta para o professor perceber as principais dificuldades dos seus alunos e ainda servirem de diagnóstico de aprendizagem.

Partindo das visões de Grando, Agranionih e Smaniotto, notamos que usar jogos/jogos matemáticos em sala de aula com finalidades pedagógicas permite aos discentes obter e desenvolver competências e habilidades, principalmente na disciplina de matemática. A utilização desses jogos tem por objetivo não apenas motivar e, sim, auxiliar esses alunos a transporem obstáculos nos mais variados campos da matemática. Através do uso de jogos, estimulamos nossos alunos a utilizarem o raciocínio lógico-dedutivo, a criatividade, a investigação, a reflexão e a concentração na busca pela solução de um problema, estabelecendo uma relação entre os elementos que compõem o jogo e os conceitos matemáticos estudados.

Ainda lançando um olhar sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais, percebemos que o ensino da matemática no nível médio tem objetivos bem definidos, tais como:

- *compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;*
- *aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;*
- *analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;*

- *desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;*
- *utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;*
- *estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;*
- *promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (PCN, 1998, p.42)*

Vários alunos têm apresentado dificuldades em alcançar alguns desses objetivos definidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Desse modo, acredito que, para esses alunos, seria interessante e motivador explorar alguns conteúdos através de jogos matemáticos. A introdução desses jogos no ensino da matemática visa a auxiliar o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas, levando esses alunos a terem um melhor entendimento do conteúdo abordado e fazendo com que consigam atingir os objetivos propostos.

Alguns autores como Josefa Fernandes Sucasa e Angel Alsina defendem a integração dos jogos matemáticos dentro dos conteúdos programáticos da matemática, pois os consideram um recurso extremamente importante. É óbvio que a utilização de jogos matemáticos precisa estar em consonância com o planejamento anual do professor e que seu uso não deve ser trabalhado de forma solta ou descontextualizada com os conteúdos que se deseja ensinar. Assim, um criterioso processo de seleção deve ser feito, a fim de escolher o jogo a ser aplicado, bem como definir claramente quais os objetivos que se deseja alcançar com a aplicação do jogo e como avaliá-lo de uma forma correta.

Existe uma grande quantidade de jogos que o professor poderá aplicar nos mais variados campos da matemática. Trabalhando de forma correta, além da motivação gerada nos alunos, os jogos terão um potencial para descobrir conceitos, solidificar conhecimentos e estimular a

capacidade crítica do aluno através das relações criadas durante a sua realização.

De acordo com BORIN,

“Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem”.
(BORIN,2004,p.10).

Muitos pesquisadores têm produzido estudos sobre as possibilidades que os jogos matemáticos podem oferecer no processo de ensino-aprendizagem da disciplina de matemática e ressaltam ainda a importância deste recurso em sala de aula. Atividades propostas através de jogos surgem como uma importante ferramenta, pois se trata de uma maneira interessante de apresentar problemas para o aluno.

Grando (2004) coloca que o jogo pode ser usado como ferramenta para facilitar a aprendizagem de determinados conteúdos, muitas vezes de difícil compreensão por parte do aluno. Para ela, a utilização de jogos matemáticos pode ser um recurso adequado aos vários níveis de ensino, desde que tenham objetivos bem definidos, proporcionem a sensação de desafio e estejam adequados ao nível cognitivo do aluno.

A junção entre o aspecto recreativo dos jogos matemáticos e a sua função como recurso pedagógico pode gerar benefícios para a aprendizagem do aluno. Porém, o professor deverá ter cuidado na escolha do jogo, pois um jogo considerado muito fácil fará com que o aluno perca o interesse rapidamente, visto que o “esforço” empregado para resolvê-lo não será grande. Já um jogo considerado muito difícil também pode gerar desinteresse, uma vez que, sem as condições necessárias para resolvê-lo, o aluno pode se sentir desestimulado.

Uma vez escolhido o jogo matemático a ser aplicado na aula, faz-se necessário que o professor determine uma metodologia a ser desenvolvida durante essas aulas, para que os objetivos

traçados sejam alcançados de maneira satisfatória. Muitos autores citam a Resolução de Problemas como a metodologia mais adequada para essa situação.

Para Grandó (2004), o jogo, quando relacionado com a resolução de problemas, traz vantagens para o processo de ensino-aprendizagem, pois ele pode ser abordado como um problema em que conceitos são construídos de forma motivadora e estimulante.

Defendemos a inserção dos jogos no contexto educacional numa perspectiva de resolução de problemas, garantindo ao processo educativo os aspectos que envolvem a exploração, explicitação, aplicação e transposição para novas situações-problema do conceito vivenciado.
(GRANDÓ, 2004, p. 29)

De acordo com a autora, devido ao aspecto competitivo do jogo, ele se mostra como uma ferramenta capaz de criar situações e problemas instigantes para o aluno, ajudando-o a superar possíveis dificuldades dentro disciplina de matemática.

Uma vez exposto o papel importante que o jogo possui quando envolvido de maneira correta no processo de ensino-aprendizagem na disciplina de matemática, destacaremos, no próximo capítulo, um jogo (Jogo do Disco) como uma maneira alternativa de se introduzir o conteúdo de probabilidade no ensino médio.

Capítulo 2

Probabilidade e o jogo dos discos

2.1 Probabilidade: limite e possibilidades

O tema “PROBABILIDADE” é, paradoxalmente, de extrema simplicidade, porém, não raramente, é classificado, por alunos, como difícil de ser aprendido e, por docentes, complexo de ser ensinado. Para resolver problemas que envolvem a probabilidade é necessário que o aluno pense, reflita e investigue caminhos, para que consiga chegar à solução, por mais simples que eles sejam. Isso não ocorre em muitos conteúdos do ensino básico. Há alguns assuntos da matemática do ensino médio, como por exemplo o cálculo de áreas e progressões, que são pautados na aplicação de fórmulas e/ou na mecanização de soluções, através da repetição de modelos. Talvez por esse motivo é que alguns alunos e professores sintam-se desconfortáveis ao se deparar com esses assuntos, seja para aprendê-lo ou ensiná-lo.

Em conversas com colegas professores de matemática, frequentemente escuto que ensinar e aprender probabilidade não tem sido uma tarefa simples e que grandes são os medos e desafios encontrados durante esse processo. Acreditamos que esses desafios e/ou barreiras a serem ultrapassadas não são gerados apenas pela suposta complexidade do conteúdo ou pela falta de bagagem cognitiva do aluno, mas que existe um forte componente a ser considerado, que é a forma como esse conteúdo é apresentado. A vantagem que a probabilidade apresenta em relação a outros assuntos da matemática ensinados no ensino médio é que, por fazer parte do nosso cotidiano, ele pode ser contextualizado e trazido para a realidade do aluno, seja ela qual for, de modo fácil. Porém, muitas vezes, ele é apresentado de uma forma desconectada dessa realidade, como algo que não está presente no dia-a-dia do aluno e isso pode dificultar ainda

mais a compreensão desse assunto por parte do discente.

Probabilidade é o estudo de fenômenos que envolvem a incerteza e que possibilita a análise racional de situações que envolvem o acaso. O conceito de probabilidade foi aprimorado ao longo dos anos e o que, inicialmente, era utilizado basicamente para se prever as possibilidades de vitória em alguns jogos de azar ou jogos de cartas ganhou novas dimensões. Atualmente, percebemos que aquela visão inicial mudou quase que completamente e encontramos aplicações para a teoria de probabilidade nos mais variados campos, como Medicina, Economia e Política, permitindo diferentes tipos de abordagens. *A clássica, a frequentista, axiomática e a geométrica* são alguns exemplos. Para uma melhor compreensão da probabilidade e dessas abordagens, definiremos alguns conceitos básicos.

- **EXPERIMENTO ALEATÓRIO:** É todo experimento, que repetido várias vezes sob as mesmas condições, produz resultados imprevisíveis.
- **ESPAÇO AMOSTRAL:** É o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.
- **EVENTO:** São todos os subconjuntos de um espaço amostral enumerável.

2.1.1 A probabilidade clássica

De acordo com Bernstein (1997), o primeiro a publicar sobre probabilidade usando uma abordagem clássica foi Girolamo Cardano, no livro “Liber de ludo alea”, no ano de 1525. De acordo com essa abordagem, seja $P(A)$ a probabilidade de ocorrer um evento A , $n(A)$ o número de resultados favoráveis à ocorrência de A e $n(S)$ o número total de resultados em S , então

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} .$$

Note que essa é uma abordagem simples, porém só é válida em espaços amostrais finitos e equiprováveis, ou seja, espaços amostrais nos quais se pode listar todos os possíveis resultados e que cada um desses possíveis resultados tem a mesma chance de ocorrer.

2.1.2 A probabilidade frequentista ou frequencista

Há várias situações nas quais não se pode calcular a probabilidade através da forma clássica. A probabilidade de um jovem ser assaltado na rua ou mesmo a probabilidade de um avião cair

são exemplos em que não podemos usar o caso clássico, pois uma maneira de aproximar essa probabilidade é obter um grande número de observações e estar atento à frequência com que essas situações acontecem. Essa abordagem é chamada de frequentista ou frequencista e destaca que o cálculo de probabilidades pode ser realizado através de observações de experimentos aleatórios que são repetidos n vezes com n tendendo ao infinito. Por essa abordagem, se um experimento aleatório é repetido n vezes e sendo $n(A)$ o número de resultados favoráveis ao evento A , podemos calcular a probabilidade do evento A ocorrer como sendo o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Segundo Coutinho (1996), uma abordagem frequentista aproxima a probabilidade do cotidiano do aluno.

[...] o ensino do conceito de probabilidade pela visão frequentista proporciona ao aluno uma ligação mais estreita com o mundo real, o mundo do cotidiano, uma vez que este ensino é fundamentado na definição de probabilidade como sendo a frequência limite de um evento, quando repetimos uma experiência um grande número de vezes. (COUTINHO, 1996, p. 79)

2.1.3 A probabilidade axiomática

A abordagem clássica e a abordagem frequentista têm suas limitações e por muito tempo existiu uma incansável procura por uma definição que pudesse ser usada e aceita amplamente pela comunidade matemática. Na primeira metade do século XX, o matemático russo Kolmogorov pôs um fim nessa busca, colocando o estudo da probabilidade sob bases axiomáticas. A abordagem axiomática diz que a probabilidade é uma função P que associa a cada evento A do espaço amostral S um número real chamado de $P(A)$ pertencente ao intervalo $[0, 1]$ e que satisfaz três axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$

3. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos podemos afirmar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Como consequência do terceiro axioma, temos que, se A e A^c são eventos complementares, então podemos afirmar que $P(A) + P(A^c) = 1$.

2.1.4 A probabilidade geométrica

O estudo da probabilidade no ensino médio muitas vezes é feito de uma maneira um pouco restrita. Basicamente esse estudo se dá através da contagem de casos favoráveis e dos casos possíveis em situações equiprováveis, porém há outras situações que se mostram extremamente interessantes e que podem ser exploradas pelo professor em sua sala de aula.

O portal TERRA de notícias, em abril de 2015, trazia uma reportagem cujo título era “Asteroide de 40 metros pode atingir a Terra em 2017”. A reportagem tratava sobre um asteroide do tamanho da Estátua da Liberdade que, segundo a astrônoma Judit Györgyey-Ries do Observatório McDonald da Universidade do Texas, poderia causar janelas quebradas e certo caos, dependendo de onde ele caísse.

Exemplos como o da reportagem citada acima podem ser explorados em sala de aula, com o objetivo de motivar os alunos para a probabilidade. Perguntas como “Admitindo que o asteroide atinja a Terra, qual a probabilidade de ele não cair no oceano?” poderiam ser usadas como ponto de partida para uma investigação. Para isso, é preciso estender o conceito de probabilidade a situações que envolvam experiências aleatórias, nas quais os possíveis resultados sejam constituídos por conjuntos que possuem medidas de comprimento, áreas ou volumes.

Ora, se chamarmos a superfície total do planeta Terra de S e sabendo que $\frac{3}{4}$ dessa superfície é composta pelos oceanos, podemos admitir que probabilidade do asteroide não cair no oceano é:

$$\frac{\text{Superfície do planeta formada por solo firme}}{\text{Superfície total do planeta}} = \frac{S}{\frac{4}{S}} = \frac{S}{4} \cdot \frac{1}{S} = \frac{1}{4}.$$

Tunala (1995), em um artigo que trata do tema probabilidade geométrica, diz que

Alguns problemas de probabilidade são equivalentes à seleção aleatória de pontos em espaços amostrais representados por figuras geométricas. Nos modelos em questão, a probabilidade de um determinado evento se reduz à relação - ou ao seu limite, caso exista - entre medidas geométricas homogêneas, tais como: comprimento, área ou volume (TUNALA, 1995, p.16)

Wagner (1997) usa a seguinte definição para a probabilidade geométrica: dada uma figura plana B contida em outra figura plana A, a probabilidade de um ponto qualquer da região A pertencer também à região B é diretamente proporcional à área da região B, não importando a posição que a figura B ocupa na figura A. Assim, temos que $P(B) = \frac{\text{área região B}}{\text{área região A}}$, como mostra a figura 2.1.

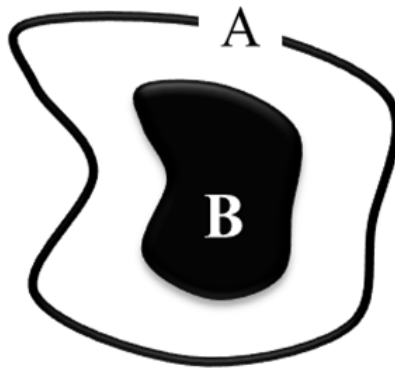


Figura 2.1: Região B contida em região A.

Podemos concluir, então, que a probabilidade geométrica é uma parte da probabilidade que aborda elementos da geometria em seus cálculos.

2.2 A probabilidade no ensino básico

Hoje, estamos imersos num mundo de informações onde o jovem, cada vez mais cedo, depara-se com índices, tabelas e gráficos que justificam e/ou embasam posicionamentos na defesa de ideias. Assim, é preciso que a escola ofereça ao estudante, logo nas primeiras séries do ensino básico, elementos que ajudem esse jovem a fazer uma análise crítica dessas informações.

Outro ponto importante do ensino da probabilidade é fazer com que o aluno consiga compreender que uma parte dos acontecimentos de sua vida está sujeita às incertezas do acaso, mas que, mesmo assim, é possível encontrar prováveis resultados para eles. Além disso, espera-se que esse aluno saiba ler e interpretar as informações que são despejadas diariamente pela mídia, fazendo uma reflexão crítica sobre o que essas informações significam realmente.

Mario Jorge Dias Carneiro, em uma proposta curricular apresentada pela Secretaria de Educação de Minas Gerais, diz que:

Provavelmente é no tratamento de dados que a matemática manifesta mais claramente a sua utilidade no cotidiano. Hoje em dia a Estatística Descritiva e a Probabilidade fazem parte do discurso jornalístico e científico cotidiano quando se trata, por exemplo, de pesquisas de intenção de voto, perfil socioeconômico da população brasileira, as chances da cura de determinada doença ou riscos de contraí-la. Espera-se, portanto, que numa formação básica do cidadão, não apenas se adquira a capacidade de ler e analisar dados expostos em diversas formas, mas que se possa refletir criticamente sobre os seus significados e emitir juízos próprios. Por essa razão, a análise de dados é escolhida como um dos temas estruturadores da Matemática, pois proporciona uma adequada contextualização sociocultural, aproximando o conhecimento adquirido na Escola da realidade do aluno. Este tema é importante também por ser utilizado em quase todas as demais áreas do conhecimento, como, por exemplo, demografia, saúde, linguística, possibilitando o desenvolvimento de várias atividades integradas dentro da escola. (CBC Proposta Curricular, 2005. p.35)

O ensino de probabilidade é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) desde o Ensino Fundamental. Ele surge no bloco de conteúdos chamado de “Tratamento de

Informação” trazendo à tona uma parte da matemática bem próxima à vivência diária do aluno.

Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau de possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis) (BRASIL, 1998, p.52).

Também encontramos recomendações para o ensino de probabilidade no Ensino Médio. Estas recomendações estão nos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio (PCNEM) que dizem

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da matemática e as demais ciências. (BRASIL, 2000, p.44)

Notamos através destes documentos citados acima a importância que a probabilidade tem para as diversas áreas do conhecimento. Percebe-se, então, que a probabilidade deve ser enca-

rada como um grupo de procedimentos e ideias que nos possibilitam “ver” a matemática ser aplicada em situações do nosso dia-a-dia.

Diante desse quadro, os professores precisam criar meios pedagógicos que ajudem o processo de ensino e aprendizagem. Estudos apontam alternativas que podem auxiliar o professor em sua prática diária e dessa forma melhorar ou pelo menos tornar mais significativo e prazeroso o ensino de Probabilidade. Carzola e Santana (2010) destacam a importância de se ensinar Probabilidade de forma conjunta com a Estatística. Van de Walle (2009) sugere que, através do método de resolução de problemas, os conceitos matemáticos podem ser melhor compreendidos, destacando ainda a importância de se confrontar a probabilidade teórica com a probabilidade experimental. Já para Corbalán (2012), como a probabilidade é um conteúdo considerado difícil para o aluno do Ensino Médio, deveria haver um esforço por parte do professor no sentido de que esse tópico seja apresentado a esse aluno de uma maneira lúdica. Ainda nessa linha, Grandó (2004) evidencia que, quando se relaciona algum jogo (aspecto lúdico) com a metodologia de resolução de problemas, os ganhos para o processo de ensino e aprendizagem são enormes.

Apoiado por essas ideias, acreditamos que uma boa maneira de introduzir o tema probabilidade seja através do uso de jogos, em especial o “Jogo dos Discos”. A ideia é fazer com que o aluno tenha o primeiro contato com a probabilidade de uma forma lúdica e dessa maneira despertá-lo para a investigação das propriedades e conceitos matemáticos que possam estar envolvidos nesses jogos.

Segundo Borin (2004), o ato de jogar exerce um papel de destaque no desenvolvimento de certas habilidades que são fundamentais para o aprendizado em Matemática, tais como o raciocínio lógico, a criatividade e a concentração. Nota-se que, durante o desenrolar do jogo, o aluno torna-se o ator principal do seu processo de aprendizagem, saindo do posto de um simples ouvinte.

A seguir, temos uma descrição do funcionamento do “Jogo dos Discos” e como ele pode ser um fator de motivação para o ensino da Probabilidade.

2.3 O jogo dos discos

De acordo com Paterlini e Caetano (2010), O Jogo dos Discos teve sua origem na França do século XVIII. Nesse período era comum ladrilhar jardins e os pisos dos castelos dando a sensação

de se formar grandes tabuleiros. As crianças da época, aproveitando esses tabuleiros que eram criados, acabaram por inventar o Jogo dos Discos, no qual elas jogavam moedas aleatoriamente e apostavam se essas moedas caíam inteiramente dentro dos ladrilhos, sem tocar os seus lados como mostra a figura 2.2.



Figura 2.2: Exemplo de moedas lançadas em ladrilhos.

A regra que norteia o Jogo dos Discos é básica. Neste trabalho, escolhemos duas maneiras nas quais o jogo pode se apresentar.

2.3.1 Maneira 01

Dois ou mais jogadores arremessam uma moeda/disco por vez, aleatoriamente em uma região ladrilhada (são usados de maneira geral ladrilhos quadrados e de mesmo tamanho). Será declarado vencedor, ficando com todas as moedas lançadas até o momento, aquele que lançar a moeda/disco e esta cair inteiramente no interior de um dos ladrilhos. Caso não se tenha facilmente um piso ladrilhado, podemos adaptar o Jogo dos Discos para ser aplicado sobre uma cartolina quadriculada.

Note que os únicos elementos que podem aumentar ou diminuir as chances de se encontrar mais facilmente um vencedor são o diâmetro da moeda/disco e o comprimento do lado de cada ladrilho.

2.3.2 Maneira 02

Uma outra maneira bem interessante de se aplicar o Jogo dos Discos seria através de um desafio proposto entre um grupo de alunos denominado MESA, que vão montar os la-

drilhos/quadrado e os discos/moedas que serão utilizados no jogo, e o restante da turma. A ideia é que cada desafiante “compraria” da MESA uma ficha que dá o direito de fazer o lançamento de uma moeda/disco. Caso a moeda caia inteiramente dentro de um ladrilho, a MESA devolve, em dobro, o “dinheiro” da ficha comprada pelo desafiante. Caso a moeda toque algum dos lados de pelo menos um dos ladrilhos, o desafiante perde a jogada e a MESA fica com o dinheiro, como mostra a figura 2.3.

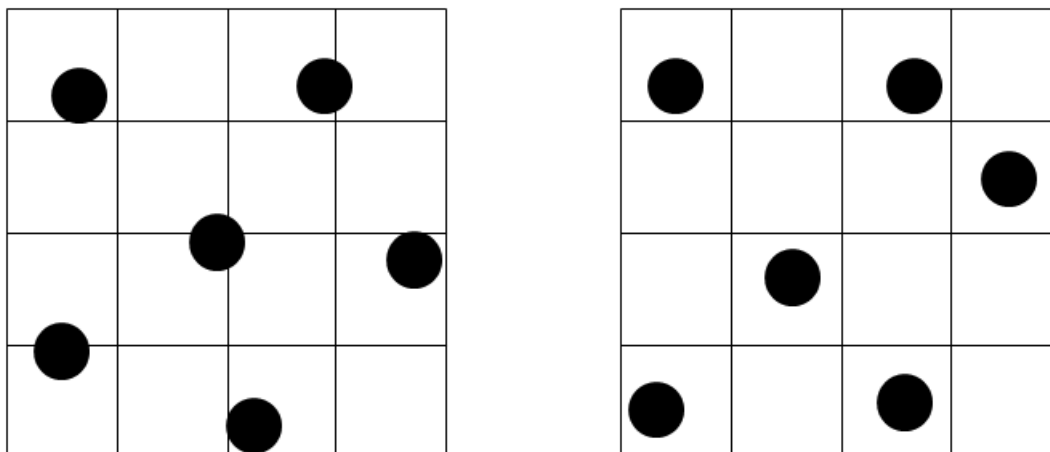


Figura 2.3: Lançamentos favoráveis à MESA (esquerda) e lançamentos favoráveis ao desafiante (direita).

Nessa segunda maneira em que o jogo se apresenta, é fundamental que os participantes do grupo que irão compor a MESA percebam que a relação entre o diâmetro da moeda/disco e do lado do ladrilho deve ser decidida com cuidado. Se o diâmetro da moeda/disco for grande em relação ao lado do ladrilho isso favorecerá a MESA, tornando o jogo muito difícil para o desafiante ganhar, desestimulando assim a sua participação no jogo. Já se o diâmetro da moeda/disco for pequeno em relação ao lado do ladrilho, também não é uma situação interessante, pois, quanto menor o diâmetro da moeda/disco, maior será a chance do desafiante vencer, trazendo assim “prejuízo” ao grupo que compõe a MESA. A situação ideal é que a MESA ache a medida exata entre o diâmetro da moeda/disco e o lado do ladrilho para que se tenha o ganho desejado.

Perceba que, ao aplicar o “Jogo dos Discos” em sala de aula, trabalhamos com o conceito de probabilidade geométrica. Suponha ser L o lado de um dos ladrilhos quadrados que formam o piso sobre o qual o jogo será aplicado e o diâmetro do disco que será arremessado

sobre este piso, com $0 < d < L$. Fazendo uma analogia entre o “Jogo dos Discos” e a definição de Probabilidade Geométrica descrita por Wagner (1997), percebe-se que a região do ladrilho quadriculado funcionará como a região A da definição. Note ainda que a posição que o disco ocupa no ladrilho após ser arremessado está associada com a posição que o centro desse disco ocupa nesse mesmo ladrilho. Se fizermos um grande número de lançamentos e levarmos em consideração apenas os lançamentos favoráveis (aqueles cujo disco não intercepta a borda do ladrilho), os centros dos discos arremessados formarão o contorno de uma figura quadrada de lado $L - d$ (destacado em vermelho na figura 2.4) cuja região interior funcionará como a região B da definição.

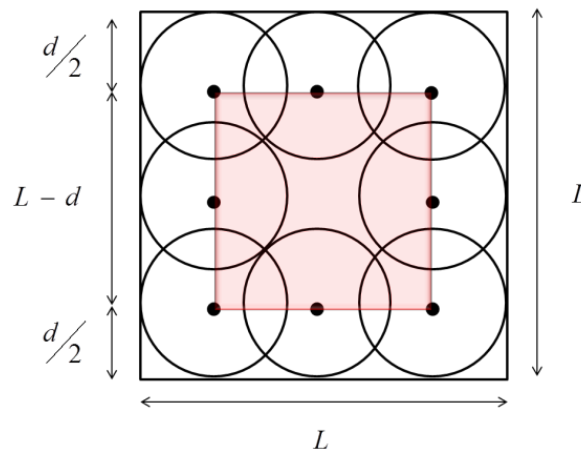


Figura 2.4: lançamentos favoráveis de discos de raio $d/2$ em um ladrilho de lado L

Assim, chamando $P(d)$ a probabilidade do lançamento de um disco ser favorável, temos que essa probabilidade pode ser calculada por:

$$P(d) = \frac{\text{área do quadrado menor de lado } (L - d)}{\text{área do ladrilho de lado } L} = \frac{(L - d)^2}{L^2}.$$

Desenvolvendo a expressão, temos:

$$P(d) = \frac{L^2 - 2Ld + d^2}{L^2}.$$

Podemos ainda reescrever a expressão da seguinte forma:

$$P(d) = \frac{L^2}{L^2} - \frac{2Ld}{L^2} + \frac{d^2}{L^2} = 1 - \frac{2d}{L} + \frac{d^2}{L^2}.$$

Ou ainda:

$$P(d) = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1 .$$

Note que $d \rightarrow L \Rightarrow P(d) \rightarrow 0$.

Neste momento, vale ressaltar que a probabilidade de um lançamento considerado favorável é interpretada como sendo uma função polinomial do 2º grau e tal fato pode também ser explorado pelo professor.

No próximo capítulo, apresentaremos uma proposta de atividade a ser desenvolvida, preferencialmente em turmas do 3ª série do Ensino Médio, sobre a temática Probabilidade, a qual envolve o Jogo dos Discos, seguindo como modelo de jogo a segunda maneira apresentada neste capítulo.

Capítulo 3

Proposta de aula e resultados

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de aula para introduzir o tema probabilidade através do Jogo dos Discos, a qual foi elaborada com base na turma de 27 alunos do turno matutino da 3ª série do curso técnico/integrado de Administração do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, *campus* João Câmara.

Os alunos que formam a comunidade discente do *campus* de João Câmara são oriundos, além da própria cidade de João Câmara, de 13 municípios vizinhos (Bento Fernandes, Caiçara do Norte, Ceará-Mirim, Jandaíra, Jardim de Angicos, Parazinho, Pedra Grande, Poço Branco, Pureza, São Bento do Norte, São Miguel do Gostoso, Taipu e Touros) e, devido a esse fato, existe uma enorme dificuldade dos alunos deste *campus* desenvolverem atividades em grupo fora do ambiente escolar. Pensando em superar esse tipo de dificuldade, planejamos a atividade para ser desenvolvida em sala, com duração de 8 encontros de 45 minutos cada um.

Basicamente, para a confecção do Jogo dos Discos, serão necessários moedas/discos de diâmetros diferentes e um tabuleiro quadriculado, que poderá ser confeccionado em cartolina com os alunos, conforme a proposta que será apresentada a seguir. Caso o piso da sala de aula seja quadriculado, ele poderá também ser usado como tabuleiro no lugar da cartolina. A quantidade de moedas/discos de tamanhos distintos é que definirá quantos grupos precisaremos para desenvolver a atividade. Quanto maior o número de moedas/discos com diâmetros diferentes, maior será a quantidade de grupos necessários para o desenvolvimento da atividade. Sugerimos que cada grupo não contenha mais do que seis alunos.

A seguir, descrevemos de forma detalhada os oito encontros sugeridos para o desenvolvimento da atividade planejada.

3.1 AULAS 01 e 02

A sugestão que damos é que o professor reserve os dois primeiros encontros para falar um pouco sobre a história da probabilidade, expor o Jogo dos Discos para os alunos e deixar claras as regras que devem ser seguidas durante a aplicação do jogo. O professor deverá iniciar a aula abordando a origem da probabilidade e sua evolução com o passar dos anos. Explicar, por exemplo, que, no período que vai dos primeiros estudos sobre probabilidades até meados do século XX, surgiram muitas aplicações para a Teoria das Probabilidades, tais como: os cálculos atuariais (especialmente os associados aos seguros de vida), os estudos demográficos (aqui podemos destacar os estudos de incidência de doenças infecciosas e o efeito da vacinação, como, por exemplo, a varíola) e a construção das loterias nacionais. O professor pode destacar também algumas aplicações que são chamadas de Aplicações Modernas para a Teoria das Probabilidades. Algumas dessas aplicações estão relacionadas com a Física, Estatística e Engenharia e deverão ter o poder de mostrar ao aluno a grande importância prática e teórica que o estudo de probabilidades possui no mundo moderno.

A ideia de citar esses exemplos, é passar para o aluno uma noção sobre a Teoria da Probabilidade e suas aplicações sem entrar em detalhes nos conceitos e definições formais visto que, teoricamente, eles ainda não conhecem o tema.

Após a fala inicial sobre a história de Teoria da Probabilidade, o professor deverá expor para os alunos o que é o Jogo dos Discos e suas regras, descrição essa que foi feita no Capítulo 2. Ele precisará dividir a turma em grupos para dar sequência à atividade. Para a nossa proposta (a turma na qual a proposta de aula foi baseada tinha 32 alunos), pensamos em dividir a turma em seis grupos sendo quatro deles com 5 alunos e os outros dois restantes com 6 alunos, pois sugerimos o uso de moedas com seis diâmetros diferentes. O professor deve ainda solicitar aos alunos para que, no próximo encontro, cada grupo se responsabilize por trazer um tipo de moeda dentre as de $R\$ 0,01$, $R\$ 0,05$, $R\$ 0,10$, $R\$ 0,25$, $R\$ 0,50$ e $R\$ 1,00$ (máximo que puderem trazer) e uma folha de cartolina padrão de 50 cm por 66 cm .

Ao expor as regras do Jogo dos Discos, o professor deve junto com a turma definir qual a chance percentual que o jogador desafiante deve ter para ganhar a partida e, dessa forma, tornar o jogo atrativo. Uma vez definido esse percentual, deverá questionar se todos os grupos terão tabuleiros quadriculados com mesma medida para os lados de cada quadrado, quais

medidas/fatores influenciariam para a obtenção do percentual desejado e discutir as respostas com eles (lembrar-se de que cada grupo será responsável por um tipo de moeda e elas possuem diâmetros diferentes). É esperado que os alunos cheguem à conclusão de que cada tabuleiro terá medidas diferentes para os quadrados e que os lados do quadriculado e o diâmetro da moeda serão as medidas que, basicamente, definirão o percentual de chance de ganho do jogo. O professor deverá aproveitar esse momento e propor que, no próximo encontro, cada grupo, baseado nas medidas da moeda pelo qual ficou responsável, calcule algebricamente o valor que o lado de cada quadrado do tabuleiro quadriculado deve ter para se obter o percentual de êxito desejado. É necessário deixar claro que, por meio da atividade, eles irão comprovar experimentalmente, através do Jogo dos Discos, se o percentual de ganho calculado algebricamente por eles estará correto.

É importante deixar claro ainda que, se o professor desejar, poderá trocar as moedas por outros objetos circulares, tipo argolas, botões, cds ou anéis de borracha, bem como poderá trocar o quadriculado feito na cartolina pelo quadriculado do piso da sala de aula, por exemplo.

Durante a explicação do jogo, é natural que algumas dúvidas apareçam, tais como:

- A que distância o lançamento deve ser feito?
- Quantos lançamentos precisarão ser feitos para se ter a comprovação experimental do percentual de ganho fixado pela turma?
- As moedas/discos deverão ser lançadas uma por uma ou podemos “apressar” o experimento lançando mais de uma moeda por vez?
- Se uma moeda cair sobre outra o lançamento será contabilizado ou repetiremos o lançamento?

Perguntas como essas podem surgir durante a fase de explicação do jogo e o professor deverá estar preparado para respondê-las. Daremos algumas sugestões de resposta que o professor poderá complementar se desejar.

Em resposta à primeira possível dúvida, podemos dizer que não há uma distância predefinida. O jogador deve ficar a uma distância tal que não permita a ele mirar para fazer o lançamento nem apenas “soltar” a moeda verticalmente sobre o tabuleiro. Sugerimos que o jogador desafiante fique a uma distância de $1,20\text{ m}$ do tabuleiro quadriculado, caso seja usado como tabuleiro uma cartolina de 50 cm por 66 cm .

Em resposta à segunda possível dúvida, alguns pesquisadores, como o professor Roberto Ribeiro Paterlini, sugerem que, com 200 lançamentos, já dá para ter um resultado satisfatório, mas, como quanto maior o número de lançamentos mais confiável será o resultado, sugerimos 300 lançamentos.

A resposta da terceira possível pergunta é sim. Podemos lançar mais de uma moeda por vez. Aliás, é interessante que se essa dúvida não surgir, o professor faça uma provocação sobre essa questão. Como serão efetuados 300 lançamentos, a ideia é a de que de um grupo de seis alunos, cada aluno faça 10 lançamentos com 5 moedas por vez.

Com relação à quarta possível dúvida, esclarecemos que se, por acaso, uma moeda cair sobre a outra, devemos retirar a moeda que ficou por cima e efetuar o lançamento novamente.

Nas subseções abaixo, citamos algumas aplicações modernas para a teoria da probabilidade que podem ser exploradas pelo professor em sala e que foram retirados na íntegra do site da UFRGS. Neles, o professor José Francisco Porto da Silveira trata de forma resumida sobre essas aplicações. Os três exemplos a seguir são aplicações de probabilidade na Física.

3.1.1 Teoria dos Erros Experimentais

A partir do século XVIII, o desenvolvimento e barateamento dos instrumentos de medida em muito multiplicou as observações quantitativas em laboratório e em campo. Logo os físicos deixaram de se contentar em ter conseguido medir, eles passaram a buscar a melhor medida possível. Em termos mais precisos, queriam a resposta do Problema Fundamental da Teoria dos Erros. Esse problema foi exaustivamente estudado por Legendre, Laplace e Gauss, no final do século XVIII e início de século XX.

3.1.2 Probabilidades na Física Estatística

Até a metade do século XIX, os físicos viam a Teoria dos Erros como a única utilidade das probabilidades. Para isso era usado o seguinte argumento: é perfeitamente concebível que usemos probabilidades e estatística no estudo de fenômenos biológicos e sociais, afinal as pessoas de uma população têm altura, peso, inteligência diferentes; contudo, não há possibilidade de esse tipo de variações no mundo físico: as propriedades de duas gotas de água ou dois litros de ar são absolutamente as mesmas.

Foi preciso um gênio do calibre de Maxwell para derrubar esse preconceito. Maxwell implicava com o Princípio de Carnot, que diz que o calor não pode fluir espontaneamente (= sem gasto de energia) de um corpo frio para um quente. Usando que a temperatura é um efeito médio das moléculas dos corpos, Maxwell acabou mostrando que era perfeitamente possível que uma inteligência, a qual hoje chamamos de demônio de Maxwell, conseguisse fazer o calor passar de um corpo frio para um quente, sem gasto de energia. Como um segundo estágio de suas ideias, passou a defender que as leis termodinâmicas deveriam ter uma formulação probabilística. Em 1860 deu ao mundo a primeira lei física de natureza probabilística: *a lei de Maxwell* .

As ideias de Maxwell foram tornadas ao mesmo tempo práticas e mais gerais (pois que aplicáveis a fenômenos físicos outros que os de calor) com Josiah Willard Gibbs, com seu *Principles of Statistical Mechanics*, de 1902, uma das obras mais importantes já escritas em toda a história da Humanidade e que verdadeiramente deu maturidade à abordagem probabilística dos fenômenos físicos.

3.1.3 Probabilidades na Física Quântica

A Mecânica Quântica, ao explicar os fenômenos de radiação em termos de probabilidades, destruiu o ponto de vista clássico que pregava que todos os fenômenos eram deterministas. Sob um ponto de vista mais prático, permitiu uma muito fértil aproximação entre o ponto de vista dos físicos e o dos químicos no estudo da matéria, disso resultando uma enorme massa de resultados fundamentais tanto nos estudos teóricos (como uma adequada descrição molecular da química, e a interpretação e previsão de fenômenos de radiação em uma enorme faixa de energias) como na criação de importantes tecnologias (como a eletrônica e a engenharia nuclear).

O objetivo inicial da Mecânica Quântica era explicar as interações entre matéria e energia mas acabou tendo o papel de retificar e completar a Física e Química clássicas. No que toca aos fenômenos macroscópicos, passou-se a pensar em termos de efeitos macroscópicos consequência do comportamento de uma enorme quantidade de microssistemas cujas leis são probabilistas. Esses microssistemas não são totalmente independentes (por exemplo, os átomos de um sólido obedecem relações espaciais), mas não podem ser individualizados e os cálculos probabilísticos envolvidos precisam levar isso em conta. Assim foi necessário um ponto de vista revolucionário

para descrever o comportamento dos microssistemas: as grandezas observáveis têm natureza verdadeiramente probabilista.

A seguir, o professor José Francisco Porto da Silveira nos apresenta mais três aplicações da probabilidade agora no campo da estatística.

3.1.4 A inferência estatística

Estuda técnicas que permitem quantificar probabilisticamente as incertezas envolvidas ao induzirmos para um universo observações feitas numa amostra do mesmo. Por exemplo: uma companhia de aviação deseja saber o tempo médio que seus passageiros gastam ao desembarcarem no aeroporto X. Numa amostra de 320 passageiros, o tempo médio foi de 23 minutos. Com 95% de chances de certeza, o que poderá a companhia dizer sobre o erro cometido ao afirmar que o tempo médio de desembarque de seus passageiros é de 23 minutos, no aeroporto X?

Os pais da Inferência Estatística são J. Neyman e Karl Pearson, os quais a criaram em vários artigos escritos em 1930. Embora os estudos de Neyman e Pearson estivessem associados à questões de hereditariedade, os métodos e até as expressões que criaram, tais como “hipótese nula” e “nível de significância”, fazem hoje parte da rotina diária de todo estatístico e cientista.

3.1.5 O delineamento dos experimentos científicos

Trata das precauções que o cientista deve tomar, antes de iniciar suas observações ou medidas, de modo que se possa dar uma boa probabilidade de que os objetivos pretendidos sejam atingidos. O pai dessas técnicas é R. A. Fisher. Esse, ao trabalhar na seleção genética de plantas agrícolas, desenvolveu imensa quantidade de resultados básicos sobre delineamento de experimentos e os divulgou, com grande sucesso, em dois livros históricos: *Statistical Methods for Research Workers*, 1925, e *The Design of Experiments*, publicado em 1935.

3.1.6 A correlação entre variáveis

É o que, em Estatística, corresponde - não perfeitamente, desde já alertamos - à ideia de causalção. Suponhamos que um cientista faça, simultaneamente, a medida de duas ou mais variáveis: uma poderia ser a altura e a outra o peso de pessoas de uma população. Se ocorrer que elas tendam a crescer ou decrescer simultaneamente, dizemos que elas são *positivamente*

correlacionadas; se, por outro lado, a tendência é uma delas crescer e a outra decrescer, dizemos que elas são *negativamente correlacionadas*. No instante que o estatístico ou cientista possa afirmar que duas ou mais variáveis são correlacionadas, ele pode usar uma série de técnicas (chamadas *análise de regressão*) para achar fórmulas expressando os valores de uma dessas variáveis em termos da outra, ou das outras. Tudo dentro de uma margem de erro que ele poderá estimar probabilisticamente.

O pai da ideia de correlação foi o inglês Francis Galton, o qual, no final do século passado usou-a numa série de estudos de hereditariedade motivados pela Teoria da Evolução de Darwin e com objetivos decididamente eugênicos.

A base matemática do trabalho de Galton era precária. Coube a Karl Pearson dar uma fundamentação mais matemática para a correlação e introduzir técnicas hoje básicas: coeficiente de correlação, medida da qualidade da regressão via à distribuição probabilista chi-quadrado, etc.

Finalizando essa série de exemplos que mostram o uso da probabilidade nas mais diversas áreas, José Francisco Porto da Silveira relata aplicações na área da engenharia.

3.1.7 Teoria das Filas

Busca calcular a quantidade de recursos e a maneira de disponibilizá-los para que uma fila de solicitação de serviços seja atendida, com investimento mínimo de recursos e tempo mínimo de espera por parte dos clientes da fila. Entre os exemplos de problemas de filas, temos: determinar o número de caixas num supermercado, determinar o número de pistas num aeroporto, determinar a quantidade de equipamento telefônico necessário para atender uma área geográfica, determinar a quantidade de mecânicos e boxes para atender os serviços de uma grande concessionária de automóveis, tudo isso a partir de projeções probabilistas da demanda. A origem da Teoria das Filas ocorreu em Telefonia.

3.1.8 Teoria da Informação

Partindo de considerações probabilistas, essa teoria desenvolveu uma medida da quantidade de informação em mensagens. Usando essa medida, a teoria estuda maneiras de codificar, transmitir e decodificar as mensagens que são transmitidas pelos sistemas de comunicação:

TV, rádio, telefonia, satélites, etc. Os principais obstáculos a vencer são a existência de ruídos aleatórios, produzidos pelas componentes dos sistemas de comunicação e por interferências e a existência de uma capacidade limite de todo canal de comunicação. As bases dessa teoria foram estabelecidas por Claude Shannon, em 1950.

3.1.9 Teoria do Risco

Trata de problemas envolvendo decisões alternativas e cujas consequências só podem ser avaliadas probabilisticamente. Uma situação importante sendo o estudo das panes em sistemas de engenharia complexos, como redes de distribuição de energia elétrica, redes telefônicas, redes de computadores, etc. Tipicamente, deseja-se maximizar a duração do funcionamento normal do sistema a um custo mínimo de investimento em equipamento. (PORTO DA SILVEIRA, 2001)

A seguir, daremos a sugestão para as próximas quatro aulas.

3.2 AULAS 03, 04, 05 e 06

Esses encontros estão reservados para que os alunos comecem a colocar a “mão na massa”. Primeiro, cada grupo calculará o lado que cada quadrado do seu tabuleiro deverá possuir, baseado no diâmetro da moeda pelo qual seu grupo ficou responsável, para que o jogador desafiante consiga ter a chance de êxito desejada. É bastante provável que inicialmente eles tenham dificuldades em encontrar a relação entre as medidas do diâmetro da moeda e a do lado do quadriculado, mesmo sabendo que são essas medidas que influenciam no resultado do jogo. Possivelmente a Figura 3.1 e, caso não haja evolução, a Figura 3.2 desenhadas pelo professor darão um norte e ajudarão os alunos a evoluírem nos cálculos.

Uma vez que os alunos determinem corretamente a relação entre os lados do quadrado do tabuleiro e o diâmetro da moeda, é chegada a hora de eles efetivamente calcularem as medidas dos lados do quadriculado do seu tabuleiro. Para definição do lado do quadrado de cada tabuleiro, suponha que a turma definiu que o jogador desafiante deverá ter uma chance de êxito de 40% e que seu grupo ficou responsável pela moeda de R\$0,25, que tem um diâmetro de 2,5 cm. Como os alunos agora já sabem que o percentual de êxito em um lançamento está relacionado com o lado do quadrado que se encontra em cada tabuleiro e com o diâmetro da

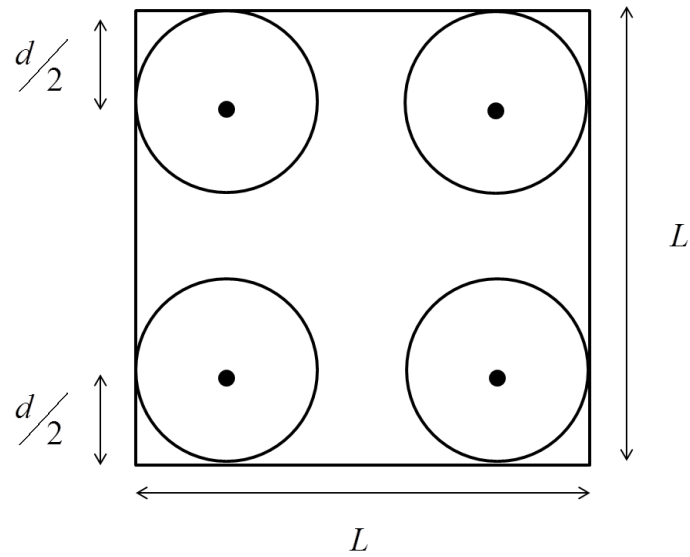


Figura 3.1: Figura para orientação nos cálculos dos alunos.

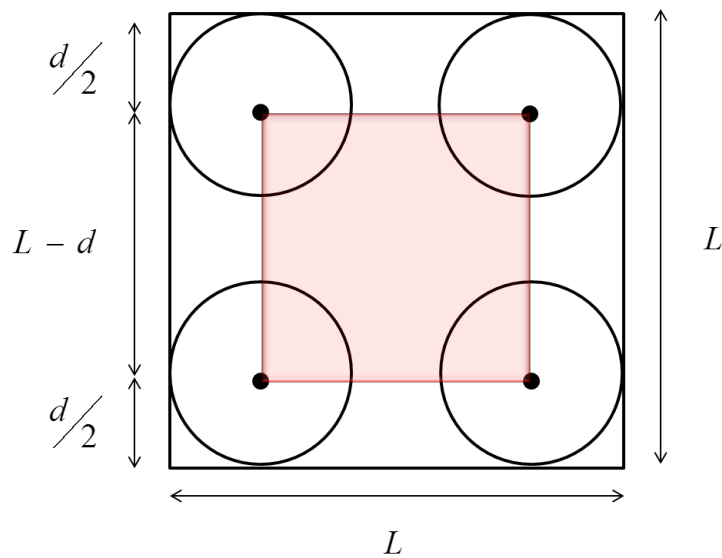


Figura 3.2: Figura para orientação nos cálculos dos alunos.

moeda/disco que será lançada, através da expressão:

$$P(d) = \frac{(L - d)^2}{L^2} = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1$$

em que $P(d)$ representa a chance, ou probabilidade, de o jogador desafiante sair vencedor, L representa o lado de cada quadrado do tabuleiro e d o diâmetro da moeda/disco lançado no tabuleiro, eles podem calcular sem muitas dificuldades o valor do lado de cada quadrado.

Dessa forma, como o ganho desejado é 40% e o diâmetro da moeda lançada é 2,5 cm, temos que:

$$40\% = \frac{1}{L^2}(2,5)^2 - \frac{2}{L}(2,5) + 1$$

$$0,4 = \frac{6,25}{L^2} - \frac{5}{L} + 1$$

$$\frac{6,25}{L^2} - \frac{5}{L} + 0,6 = 0$$

$$0,6L^2 - 5L + 6,25 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, encontraremos como raízes os seguintes valores: $L_1 = 6,80 \text{ cm}$ e $L_2 = 1,53 \text{ cm}$.

Perceba que o diâmetro da moeda, na situação descrita como exemplo, possui $2,5 \text{ cm}$. Com isso, a resposta L_2 deverá ser descartada, pois, se o quadrado tivesse lado $1,53 \text{ cm}$, a chance de ganho para o jogador desafiante seria zero (o diâmetro da moeda seria maior que o lado do quadrado). Assim, para esse exemplo, o tabuleiro deverá ser confeccionado com quadrados de lado $6,80 \text{ cm}$ aproximadamente.

Se possível, o professor deverá disponibilizar um paquímetro para os alunos medirem os diâmetros das moedas que usarão no experimento. Caso não seja possível o uso do paquímetro, o professor poderá usar a tabela, conforme Figura 3.3 abaixo, como referência para as medidas dos diâmetros das moedas.

		Moeda	Diâmetro (cm)
		R\$ 0,01	1,7 cm
		R\$ 0,05	2,2cm
		R\$ 0,10	2,0 cm
		R\$ 0,25	2,5 cm
		R\$ 0,50	2,3 cm
		R\$ 1,00	2,7 cm

Figura 3.3: Moedas que podem ser lançadas e seus diâmetros.

Passado esse momento, cada grupo deverá construir seu tabuleiro quadriculado com as medidas dos lados dos quadrados que foram calculadas por eles. Como cada folha de cartolina que será usada como tabuleiro possui 50 cm por 66 cm , sugerimos que o aluno desconte 2 cm

de cada lado na largura e 2 *cm* de cada lado na altura. A ideia é usarmos esses espaços para fixarmos a cartolina no chão com fita adesiva (A ilustração da folha de cartolina está representada na figura 3.4).

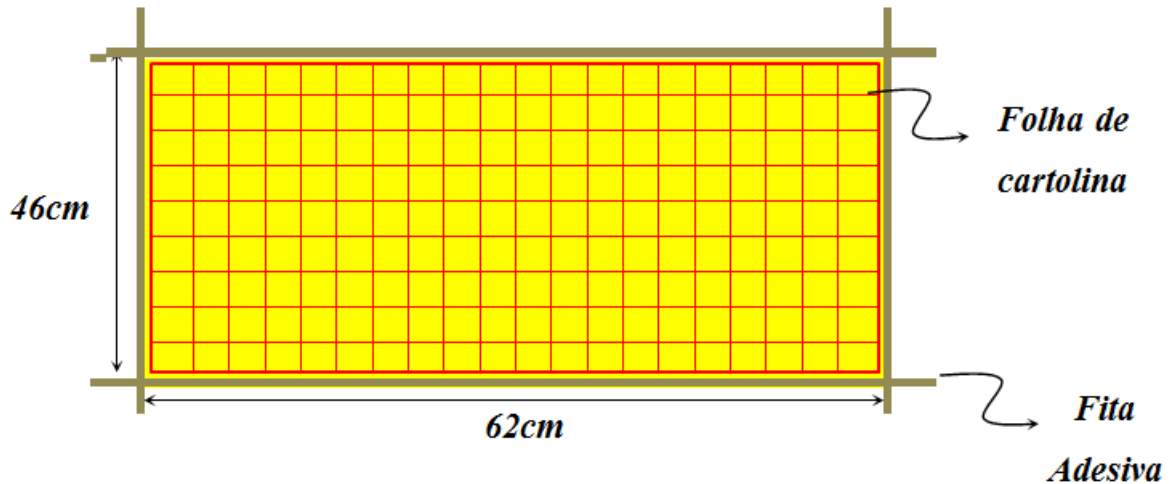


Figura 3.4: Ilustração da folha de cartolina fixada por fita adesiva.

Após construírem o tabuleiro, os alunos poderão fazer os lançamentos das moedas. Para a nossa proposta, foi pensado em dividir os 300 lançamentos entre os membros do grupo. Assim, cada um dos alunos ficaria responsável por realizar 10 lançamentos com cinco moedas cada. É importante que os resultados dos lançamentos sejam registrados, por isso sugerimos a seguinte tabela, como mostra a Figura 3.5.

3.3 AULA 07

Essa aula foi destinada para que o professor e a turma discutam os resultados experimentais obtidos, verificar se os resultados experimentais obtidos foram satisfatórios e, caso algum grupo não tenha chegado a um resultado próximo do que foi calculado algebricamente, investigar o porquê de os seus cálculos não terem sido confirmados pelo experimento. No nosso caso, em particular, usamos como instrumento para a coleta destes dados os registros das atividades realizadas pelos alunos e a observação.

Dos seis grupos em que a sala foi dividida, todos relataram que sentiram inicialmente dificuldade com relação à distância na qual os lançamentos eram realizados e que por isso precisaram encurtar a distância para 1 metro em relação ao tabuleiro quadriculado.

Aluno(a):		Tipo de Moeda Lançada:	
Lado do quadrado (em cm):		Diâmetro da Moeda (em cm):	
Número do Lançamento	Moedas Lançadas em Grupos de	Lançamentos Favoráveis	Lançamentos Não Favoráveis
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
Total de Lançamentos realizados:		Total dos Lançamentos Favoráveis:	

Figura 3.5: Modelo de tabela para registro dos lançamentos das moedas

Outra dificuldade relatada pelos grupos foi o fato de, ao escolherem a probabilidade de ganho do jogador desafiante, depararem-se com valores “quebrados” para a confecção dos lados do quadriculado do tabuleiro. Segundo o que os grupos relataram, isso dificultou muito a confecção do jogo. Um dos grupos, o responsável pelos lançamentos de moedas de R\$0,10, apesar de conseguir resolver algebricamente de forma fácil os valores do lado do quadriculado do tabuleiro, a dúvida veio em determinar qual dos valores encontrados usar, pois os dois eram positivos. Segundo o grupo, eles demoraram certo tempo para perceber que um dos valores encontrados era menor que o diâmetro da moeda utilizada no lançamento e, conseqüentemente, deveria ser descartado como opção.

Ainda discorrendo sobre as dificuldades encontradas pelos grupos, existiu também uma relacionada à quantidade de moedas lançadas em cada jogada. Um dos grupos (o responsável pelo lançamento das moedas de R\$0,10) escolheu, visando encurtar o tempo do experimento, lançar 10 moedas a cada jogada. Segundo os alunos desse grupo, essa decisão, ao invés de ajudar, atrapalhou, pois uma grande quantidade de moedas caíam ou rolavam para fora do tabuleiro, fazendo que essas fossem relançadas.

Com relação aos percentuais de ganho que foram propostos pelos seis grupos, os resultados obtidos estão distribuídos na tabela, conforme Figura 3.9.

$$P(d) = 40\%$$

$$P(d) = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

$$0,40 = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

$$0,40L^2 = L^2 - 2Ld + d^2$$

$$0,40L^2 - L^2 + 2Ld - d^2 = 0$$

$$-0,6L^2 + 4L - 4 = 0$$

$$0,6L^2 - 4L + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 0,6 \cdot 4$$

$$\Delta = 16 - 9,6$$

$$\Delta = 6,4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{6,4}}{2 \cdot 0,6} \rightarrow x = \frac{4 \pm 2,53}{1,2} \rightarrow x = \frac{4 \pm 2,53}{1,2}$$

$$x' = \frac{4 + 2,53}{1,2} \rightarrow x' = \frac{6,53}{1,2} \rightarrow x' = 5,44$$

$$x'' = \frac{4 - 2,53}{1,2} \rightarrow x'' = \frac{1,47}{1,2} \rightarrow x'' = 1,22$$

Figura 3.6: Cálculos para a determinação dos lados do quadriculado do tabuleiro para o lançamento de moedas de R\$ 0,10 com probabilidade de ganho de 40%.



Figura 3.7: Alunos trabalhando nos cálculos e na confecção dos tabuleiros quadriculados.

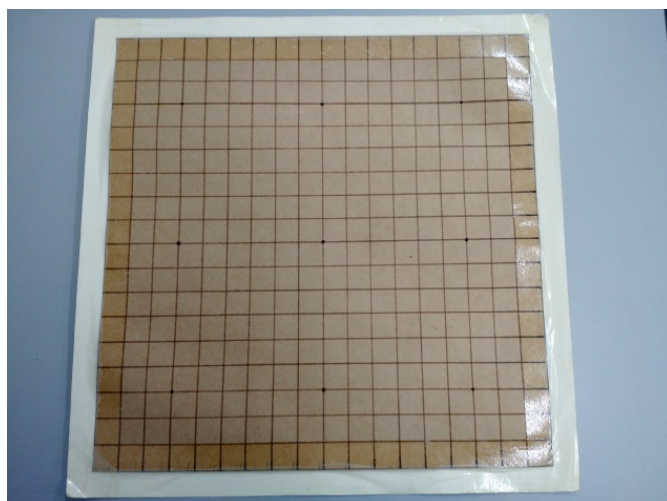


Figura 3.8: Modelo de tabuleiro já pronto.

Grupo	Percentual Proposto	Lançamentos Favoráveis	Total de Lançamentos	Percentual Obtido
Moeda de R\$ 0,05	35%	72	300	24%
Moeda de R\$ 0,10	40%	122	300	40,67%
Moeda de R\$ 0,25	30%	88	300	29,34%
Moeda de R\$ 0,50	35%	71	300	23,67%
Moeda de R\$ 0,50	30%	74	300	24,64%
Moeda de R\$ 1,00	30%	64	300	21,34%

Figura 3.9: Resultados obtidos nos experimentos.

Apenas dois grupos tiveram resultados compatíveis com os obtidos teoricamente. Podemos apontar como possíveis explicações, baseado nos relatos dos grupos, para esses resultados dois pontos: o primeiro é o fato de os outros quatro grupos relatarem ter feito aproximações nos cálculos (trabalharam apenas com uma casa decimal) dos lados do quadriculado e o segundo fato foi a distância em que os lançamentos estavam sendo feitos. Esses quatro grupos, ao perceberem que a distância inicialmente sugerida para os lançamentos das moedas (1,20 m do tabuleiro) não estava adequada, resolveram ir até o final do experimento sem fazer o ajuste.

3.4 AULA 08

O último encontro da proposta de aula que estamos sugerindo foi destinado para que o professor formalizasse o conceito de probabilidade, reforçando a relação entre o Jogo dos Discos e o tema probabilidade. Esse é o momento para o professor formalizar os conceitos e definições e começar a introduzir de forma mais direta a Teoria das Probabilidades. Com o conhecimento sobre a história da probabilidade fornecido nos primeiros encontros, com o destaque dado à importância da probabilidade em áreas ditas modernas e com a resolução, confecção e experimentação envolvendo o Jogo dos Discos, os alunos se mostraram mais motivados e envolvidos com tema de tal forma que o desenvolvimento do assunto transcorreu de forma mais harmônica. Houve um grande interesse por parte dos alunos, inclusive, em dar continuidade ao trabalho, apresentando-o como uma sala temática na SEMADEC (Semana de Arte, Desporto e Cultura) do IFRN.

Fazendo intervenções como essa, imaginamos que a aprendizagem se dê de uma forma significativa para o aluno.

Considerações finais

Ao longo desta dissertação, mostramos a importância que o ensino de Probabilidade possui para o ensino básico e como a abordagem desse tema através de jogos matemáticos pode ser proveitosa para o processo de aprendizagem do aluno.

É importante que o professor procure trabalhar estratégias que ajudem o discente a desenvolver habilidades e a interagir com a disciplina. Percebemos que, através de atividades realizadas por meio de jogos, os alunos que apresentam alguma dificuldade no conteúdo tendem a ter outra percepção sobre o tema pois, ao jogar, esse aluno se depara com situações que envolvem investigação, resolução de problemas, análise de jogadas e tomada de decisão. Essas situações o ajudarão a assimilar os conceitos matemáticos envolvidos na atividade desenvolvida além de motivá-lo a estudar matemática.

Não existe uma forma única de se ensinar matemática, e o uso de jogos matemáticos como ferramenta pedagógica é uma realidade que não pode ser ignorada pelo professor. Eles devem ser apresentados como uma alternativa que favorece a aprendizagem do aluno, podendo gerar motivação e interesse desse aluno pela matemática.

Foi sob essa perspectiva que elaboramos e aplicamos a atividade envolvendo o Jogo dos Discos na turma da 3ª série do curso técnico/integrado de Administração do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN campus João Câmara. Basicamente a ideia do trabalho foi pautada em introduzir o conteúdo de Probabilidade, considerado “traumático” pela maioria dos alunos do ensino médio, de uma forma diferente da que habitualmente trabalhamos e que os alunos estão acostumados.

Ressaltamos que a atividade envolvendo o jogo escolhido, no caso o Jogo dos Discos, deve ser bem planejada para que não recaia na situação do “jogar por jogar” e sim possa promover o desenvolvimento de habilidades nos jogadores.

Apesar de todos os cuidados tomados durante a elaboração e aplicação da atividade algumas

dificuldades foram encontradas principalmente no que se refere à matemática básica. O uso de números decimais no cálculo dos lados do quadriculado do tabuleiro e a interpretação/cálculo dos percentuais de ganho dos jogadores foram algumas das dificuldades destacadas pelos alunos.

Para os professores que por ventura desejarem aplicar essa atividade ou outra atividade semelhante sugiro um reforço em operações com números decimais, transformações de unidades, cálculos de porcentagens e resolução de equações do 2º grau. Acredito que um enfoque nesses tópicos antes da aplicação do jogo ajudará de forma significativa no desenvolvimento da atividade proposta.

Outra constatação feita é que, para efeito de acelerar o processo dos lançamentos das moedas, seja evitado o lançamento com mais de cinco moedas simultâneas. Esse artifício ao invés de facilitar o processo acabou dificultando pois acabou fazendo com que uma série de lançamentos precisassem ser refeitos.

De maneira geral podemos dizer que os conceitos que estavam relacionados com o tema probabilidade e que foram abordados em momentos posteriores a aplicação da atividade acabaram sendo “encarados” com mais naturalidade pela turma levando a uma compreensão do conteúdo maior do que o habitual (vale registrar que mesmo havendo uma melhora no rendimento da turma, ele ainda não foi satisfatório devido a existência de outras variáveis tais como dificuldades em operações básicas com números racionais (decimais exatos e frações).

Por fim acreditamos que o trabalho foi de grande relevância para o autor pois levando-o a ter contato com uma metodologia de ensino com a qual não estava acostumado o que fez com que saísse de sua zona de conforto em busca de uma alternativa que melhorasse o aprendizado em Probabilidade. Esperamos que essa atividade também traga frutos para a prática de outros colegas professores.

Referências Bibliográficas

- [1] AGRANIONI, N. T.; SMANIOTTO, M. Jogos e aprendizagem matemática: uma interação possível. Erechim: EdiFAPES, 2002.
- [2] BERNARDES, O. Para uma abordagem do conceito de probabilidade. Educação & Matemática, Lisboa, n. 3, 1987.
- [3] BERNSTEIN, P. L. Desafios aos Deuses. 6ª edição. Rio de Janeiro: Campus, 1997.
- [4] BORIN, J. Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 2004.
- [5] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEF, 1998.
- [6] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília MEC/SEF, 2000.
- [7] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: SEMTEC, 2002.
- [8] CARBALÁN, F. Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato. Madrid: editorial Síntesis, 2012.
- [9] CARNEIRO, Mário Jorge Dias. Et al. CBC: matemática, proposta curricular, ensino fundamental e médio. Minas Gerais. 2005
- [10] CAZORLA, I & Santana, E. (org). Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico. Itabuna: Via Litterarum, 2010.

- [11] COUTINHO, C. Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista: estudo epistemológico e didático. São Paulo: EDUC, 1996.
- [12] D'AMBRÓSIO, U. “Como ensinar matemática hoje” In: Temas & Debates. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Ano II, nº 2, 1989.
- [13] GRANDO, R. C. O jogo e a matemática no contexto da sala de aula. São Paulo: Paulus, 2004
- [14] MOURA, M. O. O jogo e a construção do conhecimento matemático. São Paulo: FDE, 1992. (Série Ideias, 10).
- [15] PARTELINI, R. R. , CAETANO, P. A. S. matemática na prática: Jogo dos Discos. Cuiabá: UFMT, 2010.
- [16] PORTAL TERRA. São Paulo. Disponível em <http://noticias.terra.com.br/ciencia/espaco/asteroide-de-40-metros-pode-atingir-a-terra-em-2017,0f92cf1d5a7bc410VgnVCM4000009bcceb0aRCRD.html>. Acesso em 21/05/2015.
- [17] PORTO DA SILVEIRA, J. F. O desenvolvimento das aplicações das probabilidades. Rio Grande do Sul: UFRGS. Disponível em :www.mat.ufrgs.br/portosil/histo2c.html. Acesso em:10/05/2015.
- [18] TUNALA, N. Determinação de Probabilidade por Métodos Geométricos. Revista de Professor de Matemática, V. 20 p. 16-22. 1995.
- [19] VAN DE WALLE, John, A. Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese.6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- [20] WAGNER, E. Probabilidade Geométrica. Revista do Professor de Matemática. V.34 p. 28 - 35. 1997.