UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FRANCISCO FAGNER PORTELA AGUIAR

UM BACKGROUND NA TEORIA DOS CONJUNTOS

FORTALEZA
2015

FRANCISCO FAGNER PORTELA AGUIAR

UM BACKGROUND NA TEORIA DOS CONJUNTOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

A229b Aguiar, Francisco Fagner Portela
Um background na teoria dos conjuntos / Francisco Fagner Portela Aguiar. – 2015.
50 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Teorema de Cantor. 3. Axioma da escolha. I. Título.

CDD 511.322

FRANCISCO FAGNER PORTELA AGUIAR

UM BACKGROUND NA TEORIA DOS CONJUNTOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 29 / 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

A Deus e à minha mãe (em memória), que não teve o prazer de ver o sucesso do filho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado saúde, força, coragem e persistência para que eu conseguisse chegar a esta conquista.

À minha família, que sempre esteve do meu lado, compreendendo os momentos em que tive que ficar ausente do convívio familiar para dedicar-me a este mestrado.

Ao Professor Dr. Marcelo Ferreira de Melo, que tão bem me orientou.

A todos os professores que me acompanharam nesta jornada, colaborando para o aumento da minha bagagem de conhecimentos.

“Ninguém nos poderá expulsar do Paraíso que Cantor criou.” (David Hilbert)

RESUMO

A teoria de conjuntos, por vezes deixada de lado em algumas escolas de ensino médio, constitui-se em um elemento primordial para o entendimento das funções, em especial. A não abordagem deste assunto, ou a sua abordagem superficial, deixa no estudante uma lacuna difícil de ser suprida em estudos posteriores. Aliás, a lacuna deixada pode dificultar o desempenho do estudante no ensino superior. Diante desta constatação, é objetivo principal desta dissertação fazer uma releitura dos principais tópicos ligados à Teoria de Conjuntos do ensino médio, ao mesmo tempo em que faz uma ponte entre estes e outros pontos não menos importantes, tratando conjuntos em uma linguagem mais acadêmica. Serão abordados desde as propriedades e teoremas relacionados a conjuntos finitos, até a sua generalização para conjuntos infinitos, culminando com o Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein, o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn. Para tanto, realizaram-se pesquisas bibliográficas em fontes variadas.

Palavras-chave: Conjuntos. Teorema de Cantor. Axioma da Escolha. Lema de Zorn.

ABSTRACT

The set theory sometimes left out in some high schools, is in a key element for understanding the functions in particular. Failure to address this issue or its superficial approach leaves the student a difficult gap to be filled in later studies. Incidentally, the left gap may hinder student performance in higher education. If this is so, is the main objective of this work to a reinterpretation of the main topics linked to the high school set theory, while making a bridge between these and other equally important points dealing with sets in a more academic language. Will be covered from the properties and theorems related to finite sets up its generalization to infinite sets, culminating in the Cantor-Schroeder-Bernstein theorem, the Axiom of Choice and Zorn's Lemma. To this end, there were literature searches in various sources.

Keywords: Sets. Cantor's Theorem. Axiom of Choice. Zorn's Lemma.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
2 UM POUCO DA TEORIA DE CONJUNTOS 10
3 RELAÇÃO DE ORDEM E LEMA DE ZORN 19
4 TEOREMA DE CANTOR E OS AXIOMAS DE ZFC 24
5 PRODUTO CARTESIANO E RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA 32
6 CARDINALIDADE DE CONJUNTOS INFINITOS E HIPÓTESE GENERALIZADA DO CONTÍNUO 38
7 TEOREMA DE CANTOR-SCHROEDER-BERNSTEIN E EQUIVALÊNCIA ENTRE AXIOMA DA ESCOLHA E LEMA DE ZORN 44
8 CONCLUSÃO 49
REFERÊNCIAS 50

1 INTRODUÇÃO

No estudo da Teoria de Conjuntos se encontra a base para o desenvolvimento de diversas áreas de estudo da Matemática, em especial o estudo das funções. Desta forma, é fundamental que tal assunto seja abordado de forma consistente e rigorosa, de modo que as pessoas que estudam ou ensinam Matemática tenham conhecimento do mesmo.

Ciente desta necessidade, o presente estudo tem por objetivo traçar e discutir os principais pontos relacionados à Teoria de Conjuntos, por meio de pesquisas bibliográficas.

Tal estudo se inicia por uma abordagem bem superficial, conceituando os conjuntos e seus elementos, bem como definindo as principais operações que podem ser realizadas com os mesmos. Também é feita uma apresentação das principais propriedades decorrentes das operações com conjuntos, demonstrando-as com o rigor necessário.

Em seguida, das relações que podem ser estabelecidas entre os elementos de um conjunto, foi definida a relação de ordem, a partir da qual pode ser enunciado o Lema de Zorn.

O capítulo seguinte adentra no campo dos conjuntos infinitos, questionando a existência dos mesmos e buscando uma forma consistente de defini-los e abordá-los. Tal questionamento vai culminar com a apresentação do Teorema de Cantor e os Axiomas de ZFC.

Ainda buscando relações entre os elementos de um conjunto, foi dedicado um capítulo à definição de produto cartesiano e à definição da relação de equivalência e, neste capítulo, foram abordados pontos como classe de equivalência e partição de um conjunto.

Da definição de cardinalidade de conjunto surge uma pergunta natural: qual a cardinalidade dos conjuntos infinitos? Todos os infinitos são do mesmo “tamanho” ou existe infinito maior que outro? Estes questionamentos inspiraram a elaboração de um capítulo sobre a cardinalidade dos conjuntos infinitos e a Hipótese Generalizada do Contínuo.

O presente trabalho chega ao fim relacionando funções e cardinalidades de conjuntos por meio do Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein e estudando a equivalência entre o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn.

2 UM POUCO DA TEORIA DE CONJUNTOS

Definição 2.1 Um conjunto pode ser definido intuitivamente como uma "coleção" de objetos, sendo cada um destes objetos denominados "membros" ou "elementos" do conjunto.

Por exemplo: já nas séries iniciais, quando se começa a estudar as letras, o primeiro grupo (coleção) que é estudado é o (conjunto) das vogais, formado por 5 elementos, que são $\{a, e, i, o, u\}$.

Matematicamente falando, o conceito de conjunto é um conceito primitivo, o qual é definido sem uma fundamentação rigorosa. A partir de então, desenvolve-se toda a teoria que se segue, a partir dos axiomas e definições derivados.

Definição 2.2 Define-se subconjuntos de um conjunto como sendo o conjunto das partes em que se pode dividir, agrupar, os elementos de um conjunto.

Definição 2.3 Denomina-se *conjunto vazio*, e representa-se por $\{\ \}$ ou $\emptyset$, ao conjunto que não possui elemento.

Desta forma, sendo A o conjunto dos números naturais pares menores que 10, tem-se que $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Assim, os seus subconjuntos são os agrupamentos possíveis com nenhum, um, dois, três, quatro ou cinco elementos de A. Portanto, $\{\ \}$, $\{1\}$, $\{6\}$, $\{2, 4\}$, $\{0, 4, 8\}$, $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ são alguns exemplos de subconjuntos de A.

Vale ressaltar que o conjunto vazio é, por vacuidade, subconjunto de todo conjunto. Além disso, qualquer conjunto é subconjunto de si mesmo.

No estudo da teoria de conjuntos, alguns símbolos lógicos são utilizados para facilitar a representação das relações entre conjuntos ou entre elementos de conjuntos. A seguir, estão elencados os mais comumente utilizados, com os seus respectivos significados.

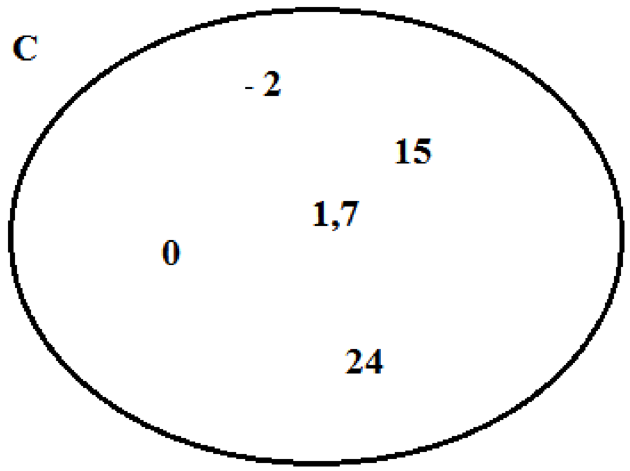
Tabela 1 – Principais símbolos lógicos.

Símbolo	Significado
$\in$	pertence
$\notin$	não pertence
$\subset$	está contido
$\not\subset$	não está contido
$\supset$	contém
$\not\supset$	não contém
$\exists$	existe
$\nexists$	não existe
$\exists\|$	existe um único
$\nexists\|$	não existe um único
$\forall$	para todos, qualquer que seja
$\ni$	tal como
$\|$	tal que
$\Rightarrow$	isso implica que
$\Leftarrow$	isso é implicado por
$\Leftrightarrow$	se, e somente se
$\therefore$	portanto

Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 2.4 Quando um elemento faz parte de um conjunto (quando ele é um dos elementos deste conjunto) diz-se que ele pertence ao conjunto e utiliza-se o símbolo $\in$. Caso contrário, diz-se que ele não pertence e se utiliza $\notin$.

Figura 1 – Pertinência e não pertinência de conjuntos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando o conjunto C no diagrama de Venn acima tem-se, por exemplo, que $0 \in C$, $12 \notin C$, $1{,}2 \notin C$ e $1{,}7 \in C$.

Os elementos de um conjunto podem ser representados por enumeração ou por compreensão. Na representação por enumeração, estes elementos são escritos um a um entre chaves, enquanto que na representação por compreensão se enuncia uma propriedade que defina estes elementos.

Por exemplo, consideremos o conjunto B dos inteiros múltiplos de 3 compreendidos entre 30 e 42, inclusive. Numa representação por enumeração, se escreve $B = \{30, 33, 36, 39, 42\}$. Já se tal conjunto for escrito por compreensão, a propriedade que ele possui é agrupar os números inteiros múltiplos de 3 começando em 30 e indo até 42. Então, escreve-se $B = \{x \in \mathbb{Z} |\ 30 \leq x \leq 42 \text{ e } 3|x\}$.

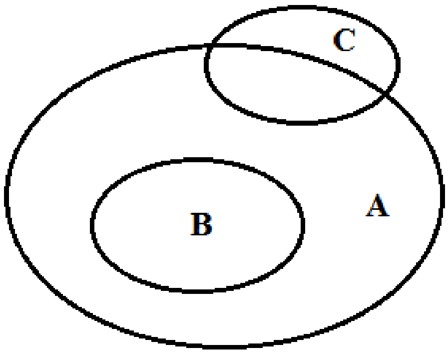
Definição 2.5 Um conjunto A está contido em um conjunto B (ou é subconjunto de B) quando qualquer elemento x de A é também elemento de B. Em símbolos, $A \subset B \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow\ x \in B]$.

De modo não rigoroso, diz-se que A está contido em B se A está completamente dentro do conjunto B.

Reciprocamente, se A está contido em B, então B contém A. Em símbolos, $B \supset A$.

De modo análogo, se existe pelo menos um elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$, então A não está contido em B (ou B não contém A). Em símbolos, $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$.

Figura 2 – Contenção e não contenção de conjuntos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo diagrama de Venn acima, tem-se que $B \subset A$ ($A \supset B$) e $C \not\subset A$ ($A \not\supset C$).

Proposição 2.1 O "conjunto vazio" está contido em qualquer outro conjunto. Deste modo, qualquer que seja o conjunto A, é sempre verdade que $\emptyset \subset A$.

Demonstração: Dados o conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto A, suponhamos por absurdo que $\emptyset \not\subset A$. Assim, existe $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$. Mas isto é um absurdo, já que o conjunto vazio não possui elementos. Logo, $\emptyset \subset A$.

■

Definição 2.6 Dados dois conjuntos A e B, a "união" destes é definida como o conjunto cujos elementos são de A ou de B, de modo que o "ou" é inclusivo, podendo pertencer aos dois conjuntos, portanto. O símbolo $\cup$ representa a união. Assim, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

A definição também é válida para quantidades finitas de conjuntos maiores que dois.

Considerando os conjuntos $A = \{2, 4, 5, 6\}$ e $B = \{0, 1, 5, 7\}$, segue que $A \cup B = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\}$.

Definição 2.7 Define-se "intersecção" de dois ou mais conjuntos como o conjunto dos elementos que pertencem simultaneamente a todos estes conjuntos. A intersecção é representada pelo símbolo $\cap$. Assim, dados dois conjuntos A e B, temos que $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Quando dois conjuntos A e B são tais que $A \cap B = \emptyset$ eles são ditos *conjuntos disjuntos*. Assim, são disjuntos os conjuntos dos números racionais ($\mathbb{Q}$) e dos números irracionais ($\mathbb{I}$), por exemplo.

Para mais de dois conjuntos, a definição de intersecção também é válida.

Deste modo, considerando $A = \{x \mid x$ é múltiplo de $2\}$ e $B = \{y \mid y$ é múltiplo de $3\}$ tem-se que $A \cap B = \{z \mid z$ é múltiplo de 2 e z é múltiplo de $3\} = \{z \mid z$ é múltiplo de $6\}$.

Definição 2.8 A "diferença" $A - B$ entre os conjuntos A e B é formada pelos elementos de A e que não são elementos de B. Assim, $A - B = \{x \mid x \in A$ e $x \notin B\}$.

Tomando como exemplo os conjuntos $M = \{x \mid x \leq 0\}$ e $N = \{x \mid x \geq 0\}$, tem-se que $M - N = \{x \mid x < 0\}$.

Quando dois conjuntos C e D são disjuntos, então $C - D = C$ e $D - C = D$.

Sendo A uma coleção de conjuntos, tem-se $\bigcup\{S \mid S \in A\} = \{x \mid \exists\ S \in A; x \in S\}$. De modo análogo, $\bigcap\{S \mid S \in A\} = \{x \mid \forall\ S \in A; x \in S\}$.

Se tomarmos uma família indexada de conjuntos $\{S_\alpha \mid \alpha \in A\}$, A conjunto de índices, a união e a intersecção são definidas das seguintes formas:

$$\bigcup S_\alpha = \{x \mid \exists\ \alpha \in A; x \in S_\alpha\} \text{ e } \bigcap S_\alpha = \{x \mid \forall\ \alpha \in A; x \in S_\alpha\}.$$

A seguir, estão elencadas algumas propriedades envolvendo uniões, intersecções ou diferenças de conjuntos, denominados R, S e T.

Propriedade 2.1 $R \cup S = S \cup R$;

Prova: Pela definição de união, tomando $x \in R \cup S$, tem-se que $x \in R \cup S \Rightarrow x \in R$ ou $x \in S$, donde segue que $x \in S$ ou $x \in R$, o que implica em $x \in S \cup R$.

Reciprocamente, tomando $x \in S \cup R \Rightarrow x \in S$ ou $x \in R$, donde segue que $x \in R$ ou $x \in S$, o que implica em $x \in R \cup S$.

Assim, $R \cup S = S \cup R$.

■

Propriedade 2.2 $R \cap S = S \cap R$;

Prova: Dado $x \in R \cap S$, segue que $x \in R$ e $x \in S$. Isto é o mesmo que $x \in S$ e $x \in R$, donde $x \in S \cap R$.

Equivalentemente, tomando $x \in S \cap R$ segue que $x \in S$ e $x \in R$, donde $x \in R$ e $x \in S$ acarreta em $x \in R \cap S$.

Logo, $R \cap S = S \cap R$. ■

Propriedade 2.3 $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$;

Prova: Seja x um elemento de $R \cup (S \cup T)$. Então $x \in R \cup (S \cup T) \Rightarrow x \in R$ ou $x \in (S \cup T)$. Disto vem que $x \in R$ ou $x \in S$ ou $x \in T$, donde $x \in (R \cup S)$ ou $x \in T$. Mas isto é o mesmo que $x \in (R \cup S) \cup T$.

Reciprocamente, considerando $x \in (R \cup S) \cup T$. Assim, $x \in (R \cup S)$ ou $x \in T \Rightarrow x \in R$ ou $x \in S$ ou $x \in T$, donde vem que $x \in R$ ou $x \in (S \cup T)$. Isto mostra que $x \in R \cup (S \cup T)$.

■

Propriedade 2.4 $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$;

Prova: Para $x \in R \cap (S \cap T)$, tem-se que $x \in R$ e $x \in (S \cap T) \Rightarrow x \in R$ e $x \in S$ e $x \in T$, donde $x \in R \cap S \cap T$. Isto equivale a dizer que $x \in R \cap S$ e $x \in T$, donde $x \in (R \cap S) \cap T$.

De modo análogo, se $x \in (R \cap S) \cap T$, então $x \in R \cap S$ e $x \in T$, donde $x \in R$ e $x \in S$ e $x \in T$. Isto implica que $x \in R \cap S \cap T$, donde $x \in R$ e $x \in (S \cap T)$ e, portanto, $x \in R \cap (S \cap T)$.

■

Propriedade 2.5 $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$;

Prova: Seja $x \in R \cup (S \cap T)$. Assim, $x \in R$ ou $x \in (S \cap T)$. Em particular, $x \in R$ ou ($x \in S$ e $x \in T$). Daí, pode-se escrever que ($x \in R$ ou $x \in S$) e ($x \in R$ ou $x \in T$), o que é o mesmo que escrever $x \in (R \cup S)$ e $x \in (R \cup T)$. Portanto, $x \in (R \cup S) \cap (R \cup T)$.

Reciprocamente, tomando $x \in (R \cup S) \cap (R \cup T)$. Isto equivale a dizer que $x \in (R \cup S)$ e $x \in (R \cup T)$, o que implica em ($x \in R$ ou $x \in S$) e ($x \in R$ ou $x \in T$). Deste modo, $x \in R$ ou ($x \in S$ e $x \in T$), donde $x \in R$ ou $x \in (S \cap T)$. Isto equivale a $x \in R \cup (S \cap T)$.

■

Propriedade 2.6 $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$;

Prova: Considerando um elemento x tal que $x \in R \cap (S \cup T)$. Então segue que $x \in R$ e $x \in (S \cup T)$, implicando em $x \in R$ e ($x \in S$ ou $x \in T$). Daí, $x \in R$ e $x \in S$, ou $x \in R$ e $x \in T$. Isto faz concluir que $x \in (R \cap S)$ ou $x \in (R \cap T)$, donde $x \in (R \cap S) \cup (R \cap T)$.

Reciprocamente, tomando $x \in (R \cap S) \cup (R \cap T)$, segue que $x \in (R \cap S)$ ou $x \in (R \cap T)$, donde $x \in R$ e $x \in S$, ou $x \in R$ e $x \in T$. Isto implica no fato de que $x \in R$ e ($x \in S$ ou $x \in T$), que, pela definição de união e intersecção, equivale a $x \in R$ e $x \in (S \cup T) \Rightarrow x \in R \cap (S \cup T)$.

■

Propriedade 2.7 $R \cup \bigcap S_\alpha = \bigcap(R \cup S_\alpha)$;

Prova: Para $x \in R \cup \bigcap S_\alpha$, $x \in R$ ou $x \in \bigcap S_\alpha$, donde $x \in R$ ou $x \in S_\alpha$, $\forall\ \alpha \in A$. Daí, tomando $i \neq j$, $i, j \in A$, temos que ($x \in R$ ou $x \in S_i$) e ($x \in R$ ou $x \in S_j$), o que é o mesmo que $x \in (R \cup S_i)$ e $x \in (R \cup S_j)$. Portanto, $x \in \bigcap(R \cup S_\alpha)$.

De modo completamente análogo, tomando $x \in \bigcap(R \cup S_\alpha)$, para $i \neq j$, $i, j \in A$, temos que $x \in (R \cup S_i)$ e $x \in (R \cup S_j)$. Mas isto equivale a ($x \in R$ ou $x \in S_i$) e ($x \in R$ ou $x \in S_j$), donde $x \in R$ ou $x \in \bigcap S_\alpha$, $\forall\ \alpha \in A$. Concluindo, $x \in R \cup \bigcap S_\alpha$.

■

Propriedade 2.8 $R \cap \bigcup S_\alpha = \bigcup(R \cap S_\alpha)$;

Prova: Considerando um elemento x tal que $x \in R \cap \bigcup S_\alpha$, então segue que $x \in R$ e $x \in \bigcup S_\alpha$, $\forall\ \alpha$ no conjunto de índices A. Isto implica que, tomando $i \neq j$, $i, j \in A$, $x \in R$ e ($x \in S_i$ ou $x \in S_j$). Daí, $x \in R$ e $x \in S_i$, ou $x \in R$ e $x \in S_j$. Isto faz concluir que $x \in (R \cap S_i)$ ou $x \in (R \cap S_j)$, donde $x \in \bigcup(R \cap S_\alpha)$.

Reciprocamente, tomando $x \in \bigcup(R \cap S_\alpha)$, segue que $x \in (R \cap S_i)$ ou $x \in (R \cap S_j)$, para $i \neq j$, $i, j \in A$, sendo A o conjunto de índices. Disso decorre que $x \in R$ e $x \in S_i$, ou $x \in R$ e $x \in S_j$. Isto implica no fato de que $x \in R$ e ($x \in S_i$ ou $x \in S_j$), que, pela definição de união e intersecção, equivale a $x \in R$ e $x \in (S_i \cup S_j)$, donde $x \in R \cap \bigcup S_\alpha$.

■

Propriedade 2.9 $(R - S) \cup (R - T) = R - (S \cap T)$;

Prova: Considerando x tal que $x \in (R - S) \cup (R - T)$. Deste modo, $x \in (R - S)$ ou $x \in (R - T)$. (Será feito o caso em que $x \in (R - S)$. O caso em que $x \in (R - T)$ é totalmente análogo.) Se $x \in (R - S)$, então se pode dizer que $x \in R$ e $x \notin S$. Daí, x não pertence a qualquer intersecção que envolva o conjunto S. Em particular, $x \notin (S \cap T)$. Mas $x \in R$, então $x \in R - (S \cap T)$.

Reciprocamente, se $x \in R - (S \cap T)$ então $x \in R$ e $x \notin (S \cap T)$. Então $x \notin S$ ou $x \notin T$, donde segue que $x \in (R - S)$ ou $x \in (R - T)$. Logo, $x \in (R - S) \cup (R - T)$.

■

Propriedade 2.10 $(R-S)\cap(R-T)=R-(S\cup T)$;

Prova: Tomando x de modo que $x\in(R-S)\cap(R-T)$. Assim, pode-se dizer que $x\in(R-S)$ e $x\in(R-T)$, donde segue que $x \in R$, $x \notin S$ e $x \notin T$. Mas se $x \notin S$ e $x \notin T$, então $x\notin(S\cup T)$. Esta afirmação, aliada ao fato de que $x \in R$, faz concluir que $x\in R-(S\cup T)$.

■

Propriedade 2.11 $\bigcup(R-S_\alpha)=R-\bigcap S_\alpha$;

Prova: Considerando x tal que $x\in\bigcup(R-S_\alpha)$. Deste modo, para $i \neq j$, i, $j \in A$, sendo A o conjunto de índices, tem-se $x\in(R-S_i)$ ou $x\in(R-S_j)$. (Será feito o caso em que $x\in(R-S_i)$, sendo o caso em que $x\in(R-S_j)$ totalmente análogo.) Se $x\in(R-S_i)$, então $x \in R$ e $x \notin S_i$. Daí, x não pertence a qualquer intersecção que envolva todos os elementos de S_α. Em particular, $x\notin(S_i\cap S_j)$. Logo, sabendo que $x \in R$ e $x\notin\bigcap S_\alpha$ então $x\in R-\bigcap S_\alpha$.

Reciprocamente, se $x\in R-\bigcap S_\alpha$ então $x \in R$ e $x\notin\bigcap S_\alpha$. Então $x \notin S_i$ ou $x \notin S_j$, para $i \neq j$, i, $j \in A$, sendo A o conjunto de índices. Disto segue que $x\in(R-S_i)$ ou $x\in(R-S_j)$ o que implica $x\in(R-S_i)\cup(R-S_j)$. Mas como i e j são índices quaisquer de A, temos que a relação acima vale para todos os elementos de A. Assim, Logo, $x\in\bigcup(R-S_\alpha)$.

■

Propriedade 2.12 $(\bigcup S_\alpha)\cap(\bigcup T_\beta)=\bigcup(S_\alpha\cap T_\beta)$;

Prova: Considerando $x\in(\bigcup S_\alpha)\cap(\bigcup T_\beta)$. Desta forma, $x\in(\bigcup S_\alpha)$ e $x\in(\bigcup T_\beta)$, garante que existe $\alpha \in A$ de modo que $x \in S_\alpha$ e existe $\beta \in B$ tal que $x \in T_\beta$. Assim, $x\in(S_\alpha\cap T_\beta)$**,** donde segue que $x\in\bigcup(S_\alpha\cap T_\beta)$.

Reciprocamente, se $x\in\bigcup(S_\alpha\cap T_\beta)$ então existe $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ tal que $x\in(S_\alpha\cap T_\beta)$. Isto implica em $x \in S_\alpha$ e $x \in T_\beta$. Do fato de $x \in S_\alpha$ vem que $x\in(\bigcup S_\alpha)$. Da mesma forma, de $x \in T_\beta$ vem que $x\in(\bigcup T_\beta)$. Daí, $x\in(\bigcup S_\alpha)$ e $x\in(\bigcup T_\beta)$, donde $x\in(\bigcup S_\alpha)\cap(\bigcup T_\beta)$.

■

Propriedade 2.13 $\left(\bigcap S_\alpha\right)\cup\left(\bigcap T_\beta\right)=\bigcap\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$.

Prova: Considerando $x\in\left(\bigcap S_\alpha\right)\cup\left(\bigcap T_\beta\right)$. Desta forma, $x\in\left(\bigcap S_\alpha\right)$ ou $x\in\left(\bigcap T_\beta\right)$, garante que, para todo $\alpha \in A$, $x \in S_\alpha$, ou para todo $\beta \in B$, $x \in T_\beta$.

Se $x \in S_\alpha$ e $x \in T_\beta$, claramente $x\in\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$ e, como a informação é válida para todo $\alpha \in A$ e todo $\beta \in B$, então $x\in\bigcap\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$.

Por outro lado, se x pertence a apenas uma das famílias de conjuntos (será considerado apenas o caso $x \in S_\alpha$, já que o caso em que $x \in T_\beta$ é totalmente análogo), ainda permanece verdade que $x\in\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$, e, como $x \in S_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, a intersecção $\bigcap\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$ será não vazia, de forma que $x\in\bigcap\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$.

Reciprocamente, se $x\in\bigcap\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$ então, para todo $\alpha \in A$ ou para todo $\beta \in B$, $x\in\left(S_\alpha \cup T_\beta\right)$. Isto implica em $x \in S_\alpha$ ou $x \in T_\beta$. Como este OU não é excludente, pode-se ter $x \in S_\alpha$ e $x \in T_\beta$. Assim, como este caso é óbvio, será considerado apenas o caso em que o x pertence a apenas uma das famílias S_α ou T_β.

Se $x \in S_\alpha$ (o caso de $x \in T_\beta$ é totalmente análogo), então para todo $\alpha \in A$ tem-se $x \in S_\alpha$, donde segue que $x\in\bigcap S_\alpha$. Assim, x pertence à união da $\bigcap S_\alpha$ com qualquer conjunto. Em particular, $x\in\left(\bigcap S_\alpha\right)\cup\left(\bigcap T_\beta\right)$.

■

3 RELAÇÃO DE ORDEM E LEMA DE ZORN

Definição 3.1 Dado um conjunto A e os elementos a, $b \in A$, definimos o par ordenado $(a; b)$ como o par formado por tais elementos, em que a ordem é importante, de modo que $(a; b) \neq (b; a)$.

Definição 3.2 Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Denomina-se *produto cartesiano* de A e B, e denotamos por $A \times B$, o conjunto de todos os pares ordenados $(x; y)$, com $x \in A$ e $y \in B$. Em símbolos, $A \times B = \{(x; y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$.

Por exemplo, se $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 3\}$, então $A \times B = \{(2; 0), (2; 1), (2; 3), (3; 0), (3; 1), (3; 3), (4; 0), (4; 1), (4; 3)\}$.

Definição 3.3 Uma relação R de A para B (ou de A em B) é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Pode-se, no exemplo acima, tomar a relação R definida da seguinte forma: $R = \{(x; y) \in A \times B \mid x \leq y\}$. Deste modo $R = \{(3; 3)\}$.

Quando dois elementos x e y se relacionam por meio da relação R, se escreve xRy. Portanto, $3R3$ no exemplo anterior.

Uma relação R será dita *reflexiva* quando, para todo x, xRx. Por outro lado, se para todos x e y, xRy e yRx implica em $x = y$, diz-se que ela é *antissimétrica*. Além disso, se para todos x, y e z for verdade que xRy e yRz implicam em xRz, a relação é dita *transitiva*.

Definição 3.4 Uma relação é chamada relação de ordem parcial (e seus elementos denominados *parcialmente ordenados*) quando for reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Considerando os conjuntos X, Y e Z, temos que a relação de inclusão $(\subset)$ é um exemplo de ordem parcial, pois

i) $X \subset X$, $Y \subset Y$, $Z \subset Z$ (*reflexividade*);

ii) $X \subset Y$ e $Y \subset X$, implica em $X = Y$ (*antissimetria*);

iii) $X \subset Y$ e $Y \subset Z$, então $X \subset Z$ (*transitividade*).

Definição 3.5 A relação R será dita de *ordem total* quando, dados quaisquer dois elementos x e y do conjunto, existe uma relação entre eles, ou seja, teremos xRy ou yRx. Tal propriedade é conhecida como *linearidade* e os elementos x e y são ditos *elementos comparáveis*. O conjunto que possui uma relação de ordem total é dito *totalmente ordenado* ou chamado de *cadeia*.

Um exemplo típico de relação de ordem total é a relação de ordem usual $(\leq)$ definida no conjunto dos números inteiros $(\mathbb{Z})$. Afinal,

i) $x \leq x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$ (*reflexividade*);

ii) $x \leq y$ e $y \leq x$ implica em $x = y$, para todos $x, y \in \mathbb{Z}$ (*antissimetria*);

iii) $x \leq y$ e $y \leq z$ implica em $x \leq z$, para todos x, y e $z \in \mathbb{Z}$ (*transitividade*);

iv) para todos $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que $x \leq y$ ou $y \leq x$ (*linearidade*).

A relação de inclusão $\subset$ é uma relação de ordem parcial. De fato, dados A, B e C conjuntos, é verdade que

i) $A \subset A$, para todo A (*reflexividade*);

ii) $A \subset B$ e $B \subset A$ implica em $A = B$, para todos A e B (*antissimetria*);

iii) $A \subset B$ e $B \subset C$ implica em $A \subset C$, para todos A, B e C (*transitividade*).

A relação de divisibilidade, definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, é uma relação de ordem parcial, pois

i) $x|x$, para todo $x \in \mathbb{N}$ (*reflexividade*);

ii) $x|y$ e $y|x$ implica em $x = y$, para todos $x, y \in \mathbb{N}$ (*antissimetria*);

iii) $x|y$ e $y|z$ implica em $x|z$, para todos x, y e $z \in \mathbb{N}$ (*transitividade*).

Tal relação não pode ser de ordem total, pois não é verdade que, para todos $x, y \in \mathbb{N}$, tenhamos que $x|y$ ou $y|x$ (*linearidade*).

Na relação $R = \{(a;\ a);\ (b;\ b);\ (c;\ c);\ (a;\ b);\ (a;\ c);\ (b;\ c)\}$ sobre $A = \{a;\ b;\ c\}$ temos

i) aRa, bRb e cRc (*reflexividade*);

ii) aRb, aRc e bRc não implicam, respectivamente, em bRa, cRa e cRb, já que a, b e c são diferentes (não há *antissimetria*);

iii) aRb e bRc implicam em aRc (*transitividade*);

iv) não temos bRa, cRa e cRb (nem todos os elementos são *comparáveis*, portanto não há *linearidade*).

Dado um subconjunto B de um conjunto ordenado A, podem ser definidos para este subconjunto os seguintes conceitos: cota superior (ou *limite superior*), cota inferior (ou *limite inferior*), elemento máximo, elemento mínimo, supremo e ínfimo. Além disso, pode ainda ser definido em A os conceitos de elemento maximal e elemento minimal.

Definição 3.6 Denominamos *cota superior* (ou *limite superior*) de um conjunto B qualquer elemento $a \in A$ tal que $x \leq a$, para todo $x \in B$. Analogamente, a *cota inferior* (ou *limite inferior*) de um conjunto B será qualquer elemento $a \in A$ tal que $x \geq a$, para todo $x \in B$.

Definição 3.7 Diz-se que $b \in B$ é *elemento máximo* de um conjunto B se ele for uma de suas cotas superiores. A definição de *elemento mínimo* é feita de modo semelhante. Diz-se que um elemento $b \in B$ é *elemento mínimo* de um conjunto B se ele for uma de suas cotas inferiores.

Definição 3.8 O supremo de B (representado por *sup B*), caso exista, é a menor de todas as cotas superiores, ao passo que o ínfimo de B (*inf B*) é a maior de todas as cotas inferiores do conjunto B.

Definição 3.9 Um elemento $a \in A$ é dito elemento maximal do conjunto A se não existe $x \in A$ tal que $a < x$. Equivalentemente, um elemento $a \in A$ é dito elemento minimal do conjunto A se não existe $x \in A$ tal que $x < a$.

Tomando como exemplo o conjunto $S = (0; 1]$, subconjunto dos reais, munido da operação de ordem usual. Tem-se que:

i) O conjunto dos limites superiores (ou cotas superiores) de S é $[1; +\infty)$;

ii) O conjunto dos limites inferiores (ou cotas inferiores) de S é $(-\infty; 0]$;

iii) O máximo de S é 1;

iv) Este conjunto S não tem elemento mínimo, já que não existe elemento deste conjunto que seja cota inferior dele mesmo;

v) 1 é o supremo de S, já que ele é a menor de todas as cotas superiores;

vi) O elemento 0 (zero) é o ínfimo de S, pois é a maior das cotas inferiores;

vii) Não existe um elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, $\mathbb{R}$ não admite elemento maximal;

viii) Também não existe um elemento $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Desta forma, $\mathbb{R}$ não possui elemento minimal.

Considerando agora os conjuntos $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 24; 36\}$ e $B = \{2; 4; 6\}$, com a relação de ordem sendo a divisibilidade nos inteiros, tem-se que:

i) $\{12; 24; 36\}$ é o conjunto das cotas superiores;

ii) $\{1; 2\}$ é o conjunto das cotas inferiores;

iii) B não tem elemento máximo, já que não há elemento de B que seja cota superior;

iv) O elemento mínimo de B é 2;

v) 12 é o supremo de B;

vi) 2 é o ínfimo de B;

vii) Os elementos maximais de A são 24 e 36;

viii) O elemento minimal de A é 1.

Teorema 3.1 (Lema de Zorn) Seja X um conjunto parcialmente ordenado não vazio tal que cada cadeia em X é limitada superiormente. Então X possui pelo menos um elemento maximal.

No capítulo 4 será apresentado o axioma 4.8 (da Escolha) e, no capítulo 7, o teorema 7.4 mostrará que o axioma da Escolha é equivalente ao Lema de Zorn. Desta forma, a demonstração do Teorema 3.1 será omitida aqui.

O Lema de Zorn pode ser utilizado em algumas demonstrações, como as elencadas a seguir.

Aplicação 3.1 Todo espaço vetorial não nulo tem base.

Demonstração: Seja V um espaço vetorial não nulo sobre um corpo K. Seja $X = \{A \subset V : A$ é linearmente independente$\}$. O conjunto X é não vazio e parcialmente ordenado pela relação de inclusão, $A \subset B$. Uma cadeia $\{A_i : i \in I\} \subset X$ é limitada superiormente por $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. O Lema de Zorn garante a existência de um conjunto maximal $A \in X$. Para qualquer elemento $v \in V$, ou $v \in A$, ou $A \cup \{v\}$ é linearmente independente. Em ambos os casos, o conjunto A gera V e, sendo linearmente independente, é base de V.

■

Aplicação 3.2 Seja X um conjunto parcialmente ordenado. Então existe um subconjunto totalmente ordenado de X o qual não é um subconjunto próprio para nenhum outro subconjunto totalmente ordenado de X. Ou seja, X possui um subconjunto ordenado maximal.

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ a classe de todos os subconjuntos totalmente ordenados de X. Então que $\mathcal{A}$ é parcialmente ordenado (pela relação de inclusão). Queremos mostrar, pelo Lema de Zorn, que $\mathcal{A}$ possui um elemento maximal.

Suponha $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$ uma subclasse totalmente ordenada de $\mathcal{A}$. (isto é, $\mathcal{B}$ é uma cadeia de elementos de $\mathcal{A}$.)

Seja $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Temos que $B_i \subset X$, $\forall B_i \in \mathcal{B}$, daí $A \subset X$. Agora mostremos que A é totalmente ordenado.

Sejam a, $b \in A$, então $\exists B_j$, $B_k \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B_j$, $b \in B_k$. Mas $\mathcal{B}$ é totalmente ordenado pela inclusão, ou seja, $B_j \subset B_k$ ou $B_k \subset B_j$. Vamos supor que $B_j \subset B_k$. Consequentemente, a, $b \in B_k$. Como B_k é totalmente ordenado temos que $a \leq b$ ou $b \leq a$. Assim, A é um subconjunto totalmente ordenado de X e dessa forma, $A \in \mathcal{A}$. Mas $B_i \subset A$, $\forall B_i \in \mathcal{B}$, assim A é um limite superior de $\mathcal{B}$.

Logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{A}$ tem um elemento maximal, isto é, um subconjunto totalmente ordenado de X o qual não é um subconjunto próprio para nenhum outro subconjunto totalmente ordenado de X.

■

Aplicação 3.3 Seja R uma relação de A para B, isto é, $R \subset A \times B$, e suponhamos que o domínio de R é A. Então existe um subconjunto f^* de R tal que f^* é uma função de A em B.

Demonstração: Seja $\mathcal{A}$ uma classe de subconjuntos de R tal que cada $f \in \mathcal{A}$ é uma função de um subconjunto de A em B.

Seja $\mathcal{A}$ parcialmente ordenado pela inclusão. Daí se f: $A_1 \to B$ é um subconjunto de g: $A_2 \to B$ então $A_1 \subset A_2$.

Agora suponhamos $\mathcal{B} = (\{f_i : A_i \to B\})_{i \in I}$ um subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{A}$ (isto é, $\mathcal{B}$ é uma cadeia de elementos de $\mathcal{A}$). Seja $f = \bigcup_{i \in I} f_i : \bigcup_{i \in I} A_i \to B$, definida por $f(a) = f_i(a)$ se $a \in A_i$. Temos que f está bem definida pois $\mathcal{B}$ é totalmente ordenado. Além disso, como $f_i \subset R$, $\forall f_i \in B$, segue que $f \subset R$. Assim, f é um limite superior de $\mathcal{B}$.

Logo, pelo Lema de Zorn, $\mathcal{A}$ possui um elemento maximal $f^* : A^* \to B$.

Resta provar que $A^* = A$.

Suponhamos que $A^* \neq A$. Então $\exists a \in A$ tal que $a \notin A^*$. Por hipótese, o domínio de R é A, então existe um par ordenado $(a; b) \in R$. Daí, $f^* \cup \{(a; b)\}$ é uma função de $A^* \cup \{a\}$ em B. Mas isto contradiz o fato de que f^* é um elemento maximal de $\mathcal{A}$.

Assim, $A = A^*$ e a aplicação fica completa.

$\blacksquare$

4 TEOREMA DE CANTOR E AXIOMAS DE ZFC

George Cantor (1845 – 1918) é o responsável por dar à teoria de conjuntos uma fundamentação dentro da Matemática. Seu estudo em relação aos conjuntos, em especial aos conjuntos infinitos, ao mesmo tempo em que lhes deram características de objetos matemáticos, foram de fundamental importância para a consolidação do que hoje sabemos sobre eles.

Intuitivamente, um conjunto pode ser considerado como uma coleção de objetos, chamados *elementos do conjunto*. Desta forma, ao considerarmos um conjunto, devemos aceitar a totalidade dos seus elementos, e não apenas cada um individualmente. A definição de conjuntos, assim, assume o papel de algo único e acabado.

Esta definição de conjuntos como uma coleção de elementos não apresenta nenhuma contradição quando se trata de conjuntos com uma quantidade finita de elementos. No entanto, quando tratamos de um conjunto com uma quantidade infinita de elementos, esta concepção de conjuntos infinitos como uma entidade acabada começa a apresentar alguns paradoxos, como o apresentado a seguir, transcrito do livro *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática*:

Suponha-se que, em cada segundo a partir de agora se acede e apaga alternadamente a luz desta sala, prosseguindo esta ação para todos os segundos 1, 2, ... Assumindo que é possível terminar este processo, como ficará a luz da sala depois, acesa ou apagada?

Percebemos, então, que é impossível responder a esta pergunta, uma vez que não poderemos chegar até o último segundo e observar como ficou a luz (se acesa ou apagada). Tal impossibilidade se justifica pelo fato de que não há como completar um processo infinito, visto que, se o fizéssemos, teríamos então um último elemento e, assim, não seria possível tomar um outro elemento após o último, o que contraria a definição de infinito.

Desta forma, visando à solução de alguns paradoxos envolvendo o infinito, começou-se a ver o infinito de outra forma. Para Karl Gauss, “O infinito é apenas uma maneira de falar, em que se fala propriamente de limites”. Foi assim que alguns problemas da matemática foram resolvidos. No entanto, tal solução não foi o bastante para que não surgissem outros paradoxos, como o apresentado a seguir, retirado do livro *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática* e apresentado em [Paik, 1983].

Com um número infinito (enumerável) de bolas numeradas por 1, 2, ..., realizam-

se duas experiências distintas, ambas consistindo em ir deitando para um (grande) saco algumas dessas bolas, numa certa sequência infinita.

Na primeira experiência, deitam-se para o saco as bolas numeradas de 1 até 10 e retira-se a décima; depois, deitam-se no saco as bolas numeradas de 11 até 20 e volta-se a retirar a vigésima; de seguida, entram as bolas de 21 até 30 e volta a sair a última; e assim sucessivamente.

Depois de completado todo o processo, quantas bolas estão no saco?

Na segunda experiência começa-se também por deitar no saco as bolas numeradas de 1 até 10, mas agora retira-se a primeira; no segundo passo, deitam-se as bolas 11 a 20 a retira-se a segunda; depois, faz-se o mesmo para as bolas 21 até 30 e retira-se a terceira; e continua-se assim por diante.

Depois de completado todo o processo, quantas bolas estão no saco?

Embora se tratem de experiências aparentemente idênticas (afinal, a cada passo, para cada 10 bolas colocadas no saco, 1 é retirada, restando 9), porém apresentam resultados bem distintos. Ao final, na primeira experiência restarão infinitas bolas no saco (todas as que não possuem números múltiplos de 10), ao passo que, na segunda experiência, o saco estará vazio (pois cada bola é, em algum momento, retirada).

Foi necessário a humanidade esperar até o trabalho de doutoramento de Cantor para que as questões relacionadas ao infinito pudessem ser mais bem esclarecidas.

Assumindo os conjuntos infinitos como objetos matemáticos, Cantor adotou a estratégia de comparar o tamanho dos conjuntos, o que corresponde ao seu número de elementos. Para tanto, definiu como *equipotência* entre conjuntos a existência de uma bijeção entre eles.

Desta forma, o conceito de *cardinalidade* entre conjuntos pode ser associado à equipotência, o que significa que dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade se for possível estabelecer uma equipotência, uma bijeção, entre tais conjuntos.

Com esta equivalência foi possível estabelecer relações entre conjuntos que chegam, por vezes, a desafiar a lógica comum. Por exemplo, o conjunto dos números naturais é equipotente ao conjunto dos números naturais pares (embora se creia que existam mais números naturais do que números pares). Tal equipolência pode ser estabelecida através da relação biunívoca $n \rightarrow 2n$.

Também foi possível provar que é sempre viável tomar um intervalo real que tenha a mesma cardinalidade que os reais bastando, para isso, conseguir uma função bijetiva entre este intervalo e o conjunto dos reais. Assim sendo, o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais quando definimos, por exemplo, a função tangente entre tais conjuntos.

Resultados como este obtido no parágrafo anterior, que são contra intuitivos, mostram que o todo nem sempre é maior do que a soma das partes, abrindo uma nova possibilidade de abordagem quando se trata de cardinalidade de conjuntos. Na verdade, a característica de que um conjunto tenha a mesma cardinalidade que sua parte própria é uma característica dos conjuntos infinitos.

Definida esta forma de conceituar cardinalidade de conjuntos, pode-se então conceituar o que seriam conjuntos *enumeráveis*. Assim, um conjunto A se diz *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f\colon \mathbb{N} \rightarrow A$. No segundo caso, tal conjunto se chama *infinito enumerável* e a bijeção $f\colon \mathbb{N} \rightarrow A$ chama-se uma *enumeração* dos elementos de A.

Isto implica dizer que qualquer conjunto equipotente ao conjunto dos números naturais é enumerável. Logo, são enumeráveis o conjunto dos números pares, por exemplo, e o conjunto dos múltiplos de 5, etc.

Saindo dos subconjuntos dos naturais, e utilizando o critério da enumerabilidade por meio do estabelecimento de uma bijeção, foi possível estender este conceito, de forma a verificar a existência de outros conjuntos enumeráveis, como o conjunto dos racionais positivos.

Pode-se concluir que os conjuntos infinitos enumeráveis, em relação ao seu tamanho, são os menores conjuntos infinitos possíveis, uma vez que qualquer destes conjuntos possui um subconjunto numerável. Tal fato pode ser justificado de forma bem simples como ilustrado a seguir: tomemos um conjunto A infinito. Daí, como A é não-vazio, podemos tomar $a_1 \in A$; o conjunto $A - \{a_1\}$ continua não-vazio, donde selecionamos a_2; depois escolhemos a_3 de $A - \{a_1, a_2\}$, e assim sucessivamente. Como os subconjuntos $A - \{a_1, a_2,..., a_i\}$ são sempre não-vazios, o processo não para em nenhum passo finito. Assim, obtemos uma sequência numerável $a_1, a_2, a_3, ..., a_i, ...$ de elementos de A.

Considerando os números naturais finitos como aqueles que expressam a cardinalidade de conjuntos finitos, Cantor definiu os números que estão além dos finitos como *cardinais transfinitos*, utilizando-os para representar a cardinalidade dos conjuntos infinitos, de forma a estabelecer operações aritméticas entre eles.

A cardinalidade do conjunto dos números naturais $|\mathbb{N}|$ e de qualquer outro conjunto enumerável Cantor representou por $\aleph_0$ (álefe zero), sendo a menor cardinalidade dos conjuntos infinitos.

Cantor foi o responsável pela definição de uma aritmética simples para o álefe zero ($\aleph_0$), de forma a ser possível provar, por exemplo, que $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 + n = \aleph_0$, $2\aleph_0 = \aleph_0$, $n\aleph_0 = \aleph_0$ e $\aleph_0.\aleph_0 = \aleph_0$.

Uma pergunta natural que surge é se existem outros cardinais infinitos além do $\aleph_0$? Seriam todos os conjuntos infinitos equipotentes a $\aleph_0$ ou há cardinalidades infinitas maiores que $\aleph_0$? Segundo Cantor, há infinitos maiores que outros, de forma que, dados dois conjuntos infinitos, podemos ter cardinalidades diferentes, bastando para isso que eles não sejam equipotentes.

A Diagonal de Cantor foi o mais importante trabalho relacionado a esta temática. Por meio de um mecanismo simples, porém prático, Cantor mostrou que existem mais números reais no intervalo $[0, 1[$ do que números naturais.

Desta forma, o intervalo real $[0, 1[$ é não-enumerável, donde segue que o conjunto dos números reais também é não enumerável. Desta forma, a cardinalidade $|\mathbb{R}|$ dos números reais não é igual a $\aleph_0$. Esta cardinalidade recebeu o nome de *contínuo* e qualquer conjunto equipotente a $\mathbb{R}$ se chama *potência do contínuo* $|\mathbb{R}|$.

Surgiu então um outro questionamento: existem subconjuntos reais infinitos que não são enumeráveis e nem têm a potência do contínuo? Existe algum subconjunto conforme descrito anteriormente e que tenha cardinalidade entre $\aleph_0$ e $|\mathbb{R}|$?

A resposta a essa pergunta, conhecida *Hipótese do Contínuo*, será melhor detalhada posteriormente, embora se possa adiantar que será negativa.

Havendo conjuntos infinitos que não são equipotentes entre si, o que podemos afirmar sobre sua cardinalidade?

Teorema 4.1 (Cantor) A cardinalidade de um conjunto A é menor ou igual à de um conjunto B se, e somente se, existe uma função injetiva de A em B. Desta forma, se $A \subseteq B$ então $|A| \leq |B|$.

Desta forma, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, então segue que $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ é estritamente menor que a potência do contínuo $|\mathbb{R}|$.

Pelo que foi apresentado até aqui, temos que os álefes servem para representar a cardinalidade dos conjuntos infinitos, da mesma forma que os números naturais representam a cardinalidade dos conjuntos finitos.

Ao desenvolver sua obra, Cantor abordou dois conceitos separadamente: os *ordinais* representam os *tipos de ordem* que é possível estabelecer nos conjuntos, ao passo que os *cardinais* representam o tamanho dos subconjuntos, o seu número de elementos. A cada conjunto está associado um único cardinal, mas diferentes ordenações deste conjunto podem corresponder a diferentes cardinais.

O ordinal correspondente ao conjunto dos números naturais, em sua ordenação habitual, é denominado w. Se ordenarmos este conjunto de modo a colocar todos os números pares primeiros e todos os ímpares depois obtemos uma ordenação representada por $w + w$.

A obra de Cantor causou discórdias entre muitos matemáticos, filósofos e teólogos, mas também recebeu adesões fervorosas, como as de Frege e Hilbert. Por meio dela os conjuntos infinitos ocuparam um lugar de destaque e não seriam o mesmo sem a sua contribuição.

Com as contribuições trazidas por Cantor ao estudo da teoria de conjuntos, surgiu a necessidade de uma melhor formalização do assunto. Cantor continuava a tratá-lo de forma muito intuitiva, onde um dado conjunto era identificado escrevendo seus elementos um a um (por extensão) ou escrevendo uma propriedade que os caracterizasse (por compreensão).

Coube então a Ernest Zermelo (1871 – 1953) e a Abraham Fraenkel (1891 – 1965) o estabelecimento de uma teoria axiomática que, associada ao denominado *Axioma da Escolha*, formaram o que se chama axiomas ZFC (Z da inicial de Zermelo, F da inicial de Fraenkel e C da inicial de Choice, “escolha” em inglês).

Estes axiomas incorporam o conceito intuitivo de conjunto que os matemáticos usam para, por meio do desenvolvimento de uma teoria axiomática, chegar a conclusões que, por vezes, ainda geram controvérsias entre os matemáticos.

Os axiomas de ZFC mais elementares são os que se encontram elencados a seguir.

Axioma 4.1 (da Extensão)

Também conhecido como axioma da unicidade, ele afirma que dois conjuntos são iguais se, e somente se, todos os seus elementos forem iguais.

Axioma 4.2 (da Existência)

Há um conjunto que não possui elemento. Tal conjunto é denominado *conjunto vazio* e representado por $\emptyset$.

Axioma 4.3 (da Especificação)

Podemos construir subconjuntos de conjuntos por compreensão, ou seja, podemos construí-los a partir de propriedades que os caracterizem entre os elementos de um conjunto maior.

Desta forma, podemos entender este axioma não apenas como um único axioma, mas como um conjunto deles (um para cada propriedade que podemos enunciar).

É com base neste axioma, por exemplo, que definimos o conjunto P dos números pares da seguinte forma $P = \{2x : x \in \mathbb{N}\}$.

Axioma 4.4 (da Potência)

Para qualquer conjunto A existe o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Tal conjunto é chamado conjunto das partes de A e geralmente representado por $\wp(A)$.

Axioma 4.5 (da União)

Afirma que, dado um conjunto A, cujos elementos também são vistos como conjuntos, existe um conjunto chamado união de A cujos elementos são todos os elementos de A. Tal conjunto é representado por $\bigcup A$.

Axioma 4.6 (da Intersecção)

Afirma que, dado um conjunto A, cujos elementos também são vistos como conjuntos, existe um conjunto chamado intersecção de A formado pelos elementos comuns a todos os conjuntos de A. Tal conjunto é representado por $\bigcap A$.

Axioma 4.7 (dos Pares)

A partir de quaisquer conjunto A e B podemos formar conjuntos cujos elementos são precisamente os elementos de A e B, o qual representamos pela extensão $\{A, B\}$.

A partir destes axiomas pode-se definir diversos conceitos em Matemática, como par ordenado, produto cartesiano, funções, etc. Pode-se também definir o conceito geral de número natural (que inclui o zero), no sentido das ideias de Cantor, onde cada número é visto como o conjunto com aquela quantidade de elementos (ou cada número é visto como o conjunto com aquela cardinalidade). Assim temos

$$0 = \emptyset,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\},\ 3 = \{0, 1, 2\},\ ...$$

Desta forma, pode ser observado que cada número natural é o conjunto dos que o precedem. Isto, além de identificar cada número natural com o seu cardinal, tem a vantagem de estabelecer de forma natural a relação de ordem usual entre estes números por meio da inclusão de conjuntos. Assim, $n \leq m \Leftrightarrow n \subseteq m$.

Isto nos prova, por exemplo, que $2 < 3$ já que $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$.

Tais axiomas acima enumerados não garantem a existência da totalidade dos números naturais. Para tanto, há a necessidade do *Axioma da Infinitude*.

Axioma 4.8 (da Infinitude)

Existe um conjunto indutivo que contém todos os números naturais.

Completa a teoria axiomática de ZFC o *Axioma da Escolha*.

Axioma 4.9 (da Escolha)

Dado um conjunto (de conjuntos) não-vazio A, podemos considerar um conjunto C formado por um e apenas um elemento de cada elemento não vazio de A.

Ou outras palavras, se tivermos um conjunto A formado pelos conjuntos não-vazios A_1, A_2, ..., A_n, ... podemos escolher um (e apenas um) elemento de cada A_i, de modo que o conjunto C seja formado por estes elementos escolhidos.

Este axioma é tão evidente que costuma ser usado na Matemática sem ser notado. No entanto, mostra-se bastante controverso por não apresentar um caráter construtivo. Afinal, como aceitar que o processo de escolha seja completado, de forma infinita, sem que haja uma lei de formação?

No caso de o conjunto A ser finito, é trivial que podemos completar o processo de escolha de um elemento de cada elemento de A, de modo a formar o conjunto escolha C. Por outro lado, mesmo que o conjunto A seja infinito, havendo uma propriedade que especifique qual elemento dentre os elementos de A podemos tomar, é possível completar o processo de escolha.

O problema reside em acreditar na completude da escolha em um conjunto infinito sem que haja uma propriedade a seguir. Como acreditar que uma escolha aleatória de elementos de um conjunto infinito possa ser completada?

Questões como estas causam controvérsias até hoje. No entanto, a aceitação do Axioma da Escolha tem sido produtiva em todas as áreas da Matemática e, talvez, sem ele esta ciência não tivesse conseguido alcançar os patamares a que chegou, fato que ganha respaldo na equivalência entre o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn, conforme veremos no teorema 7.4.

Gödel e Cohen, em 1938 e 1963, respectivamente, provaram que o Axioma da Escolha é independente dos demais axiomas de ZFC. Desta forma, pode ser feita uma construção de uma teoria de conjuntos consistente com ou sem o Axioma da Escolha.

Além disso, estabelecida a teoria ZFC, toda a teoria de conjuntos pode ser construída com base nestes axiomas, de forma a dar uma sistematização consistente a este assunto.

5 PRODUTO CARTESIANO E RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Na definição 3.1 já estabelecemos o que é um par ordenado. Assim, tomando como base o conjunto dos números inteiros, temos como pares ordenados (0; 1), (– 2; – 1), (– 2; 4), (0; 0), por exemplo, ao passo que (0,5; 2) não é um par ordenado no conjunto dos inteiros.

Considerando os conjuntos A e B e o *produto cartesiano* ou simplesmente *produto* entre eles (conforme definição 3.1), se tomarmos os conjuntos $A = \{1, 2, 6, 8\}$ e $B = \{0, 2\}$ temos que $A \times B = \{(1; 0), (1; 2), (2; 0), (2; 2), (6; 0), (6; 2), (8; 0), (8; 2)\}$.

É interessante notar que se $A \neq B$ então $A \times B \neq B \times A$. Afinal, sabemos que $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$ e que $B \times A = \{(b; a) \mid b \in B \text{ e } a \in A\}$ e, assim, se $A \times B = B \times A$, então $(a; b) = (b; a)$ implica em $a = b$, donde $A = B$.

Além disso, se o conjunto A tem m elementos ($|A| = m$) e o conjunto B tem n elementos ($|B| = n$), então $A \times B$ tem $m.n$ elementos ($|A \times B| = m.n$). Isto pode ser verificado no exemplo acima, em que $|A| = 4$ e $|B| = 2$, donde $|A \times B| = 4.2 = 8$ elementos.

Tomando os conjuntos $A = \emptyset$ e B um conjunto qualquer, temos que $A \times B = \emptyset$.

Tomemos, por exemplo, o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de todos os pares ordenados de números inteiros. Consideremos a relação $R = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = -y\}$ (conforme definição 3.2.). Assim, segue que

$$R = \{..., (-n; n), ..., (-2; 2), (-1; 1), (0; 0), (1; -1), (2; -2), ..., (n; -n), ...\}.$$

Definição 5.2 O *domínio* de uma relação $R \subset A \times B$, denotado por $D(R)$, é tal que $D(R) = \{a \mid \exists b \in B : aRb\}$. De modo equivalente, dizemos que a *imagem* desta relação, denotada por $Im(R)$, é dada por $Im(R) = \{b \mid \exists a \in A : aRb\}$.

Se considerarmos a relação R dada por $R = \{(0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 6), ...\}$ teremos que $D(R) = \mathbb{N}$ e $Im(R) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$.

Definição 5.3 Dizemos que uma relação R definida em A é uma relação de equivalência neste conjunto se forem verificadas as seguintes propriedades:

i) reflexiva: aRa para todo $a \in A$;

ii) simétrica: se $a, b \in A$ e aRb, então bRa;

iii) transitiva: para $a, b, c \in A$, se aRb e bRc, então aRc.

Consideremos, por exemplo, uma relação R entre as retas do plano de modo que $R = \{(r;\ s) \mid r$ e s são paralelas$\}$. Aqui consideramos ser coincidente como ser paralela e coincidente. Verifiquemos que esta relação é de equivalência.

i) reflexividade: rRr, para qualquer reta r do plano, já que toda reta coincidente é paralela a si mesma;

ii) simetria: se r e s são duas retas do plano tais que rRs, então sRr, já que de rRs segue que $r//s$, donde $s//r$ e, portanto, sRr.

iii) transitividade: se r, s e t são retas do plano tais que rRs e sRt, então rRt. De fato, se $r//s$ e $s//t$, então $r//t$.

Desta forma, a relação de paralelismo entre as retas de um plano é uma relação de equivalência.

Se formos considerar, em vez de retas paralelas, as retas perpendiculares de um plano, verificaríamos que a relação de perpendicularidade não é uma relação de equivalência, afinal, nenhuma reta é perpendicular a si mesma, o que mostra que esta relação não é reflexiva. Também podemos mostrar que a transitividade não é verdadeira.

A relação $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que, dados $x, y \in \mathbb{N}$, temos que xRy se, e somente se, $x \leq y$, não é uma relação de equivalência. De fato, tal relação não tem a propriedade simétrica, uma vez que $x \leq y$ não implica em $y \leq x$.

Consideremos, então, o conjunto $E = \{a, b, c, d, e\}$ das iniciais dos nomes de cinco irmãos, de forma que, dados $x, y \in E$, temos xRy se, e somente se, x é irmão de y.

Podemos verificar que esta relação possui as propriedades simétrica (já que se x é irmão de y, então y é irmão de x) e transitiva (pois se x é irmão de y, e se y é irmão de z, então x é irmão de z), mas não apresenta a propriedade reflexiva (uma vez que ninguém é irmão de si mesmo). Portanto, tal relação não é de equivalência.

Por outro lado, a relação R de congruência módulo m, definida no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, é uma relação de equivalência. Verifiquemos as propriedades:

i) reflexiva: sabemos que, dado $x \in \mathbb{Z}$, é verdade que $x \equiv x \bmod m$, de modo que xRx;

ii) simétrica: dados $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que xRy implica em yRx.

De fato, se xRy então $x \equiv y \bmod m$, donde segue que $m \mid (x - y)$. Mas isto equivale que $m \mid y - x$, donde $y \equiv x \bmod m$ e, portanto, yRx.

iii) transitiva: se x, y e z são números inteiros, então xRy e yRz implicam em xRz.

De fato, de xRy e yRz seguem que $x \equiv y \mod m$ e $y \equiv z \mod m$, donde podemos somar membro a membro e obtemos que $x + y \equiv y + z \mod m$. Mas isto é equivalente a $m \mid (x + y) - (y + z)$, donde segue que $m \mid x + y - y - z$ e, portanto, $m \mid x - z$. Isto equivale a dizer que $x \equiv z \mod m$.

Desta forma, apresentando as três propriedades acima demonstradas, temos que a relação de congruência módulo m é uma relação de equivalência.

Definição 5.4 Seja R é uma relação de equivalência em um conjunto A. Dado $a \in A$, chamamos *classe de equivalência determinada por a*, e representamos por $[a]$, ao subconjunto constituído pelos elementos $x \in A$ tais que xRa. Assim, $[a] = \{x \in A \mid xRa\}$.

Definição 5.5 Denominamos de $\mathbb{Z}_m$ ao conjunto das classes de equivalência, módulo m.

Deste modo, se tomarmos a relação de congruência módulo 3, por exemplo, teremos que:

$[0] = \{0, 3, 6, 9, ...\}$ (que são os números que deixam resto 0 na divisão por 3);

$[1] = \{1, 4, 7, 10, ...\}$ (que são os números que deixam resto 1 na divisão por 3);

$[2] = \{2, 5, 8, 11, ...\}$ (que são os números que deixam resto 2 na divisão por 3).

Deste modo, $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$.

Alguns autores denominam $[a]$ por $\bar{a}$.

Proposição 5.1 Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e sejam a, b elementos de A. As seguintes proposições são equivalentes:

i) aRb; *ii)* $a \in [b]$; *iii)* $b \in [a]$; *iv)* $[a] = [b]$.

Vamos demonstrar cada uma delas.

i) ⟹ ii)

Decorre da definição de classe de equivalência temos que se aRb então $a \in [b]$.

■

ii) ⟹ iii)

Se $a \in [b]$, então aRb. No entanto, sendo R uma relação de equivalência, R possui a propriedade simétrica e, portanto, bRa, donde segue que $b \in [a]$.

■

iii) ⟹ iv)

Se $b \in [a]$, então bRa e, por simetria, aRb. Devemos, então, provar que $[a] \subset [b]$ e que $[b] \subset [a]$.

Tomemos $x \in [a]$. Assim, xRa e, como por hipótese temos que aRb, a transitividade nos garante que xRb, donde $x \in [b]$ e, portanto, $[a] \subset [b]$.

Reciprocamente, tomemos $x \in [b]$. Assim, xRb e, como por hipótese temos que bRa, a transitividade nos garante que xRa, donde $x \in [a]$ e, portanto, $[b] \subset [a]$.

Isto nos mostra que $[a] = [b]$.

■

iv) ⟹ i)

Observemos inicialmente que $[a]$ e $[b]$ são não vazios. Afinal, $a \in [a]$ e $b \in [b]$.

Tomemos, então, $x \in [a] = [b]$. Assim, de $x \in [a]$ vem que xRa e, portanto, aRx. Por outro lado, de $x \in [b]$ segue que xRb. Assim, aRx e xRb implicam, por transitividade, que aRb.

■

Proposição 5.2 Seja R uma relação de equivalência em um conjunto A e sejam a, b elementos de A. Temos que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ se, e somente se, $[a] = [b]$.

Demonstração:

$\Longrightarrow$ Consideremos $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Assim, existe $y \in A$ de modo que $y \in [a] \cap [b]$. Assim, $y \in [a]$ e $y \in [b]$.

De $y \in [a]$ vem que yRa, o que implica por simetria que aRy. Por outro lado, de $y \in [b]$ vem que yRb. Assim, por transitividade, segue que aRb e, pelo que foi demonstrado anteriormente, $[a] = [b]$.

$\Longleftarrow$ Pela propriedade reflexiva é verdade que $a \in [a]$ e $b \in [b]$. Desta forma, $[a] \neq \emptyset$ e $[b] \neq \emptyset$. Daí, se $[a] = [b]$ é imediato que $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

■

Definição 5.3 A equivalência de classes particionam o conjunto *A*.

Demonstração:

Já mostramos na proposição 5.2. que as classes de equivalência são disjuntas e não vazias. Resta então mostrar que a união de todos elas forma o conjunto *A*. Ou seja, provemos que $\bigcup_{a \in A}[a] = A$.

Temos que, para cada $a \in A$, $[a] \subset A$ e, portanto, $\bigcup_{a \in A}[a] \subset A$.

Por outro lado, sendo x um elemento qualquer de *A*, temos que $x \in A \Rightarrow xRx \Rightarrow x \in [x]$, donde segue que $x \in \bigcup_{a \in A}[a]$. Assim, $A \subset \bigcup_{a \in A}[a]$.

Isto prova que $\bigcup_{a \in A}[a] = A$ e, portanto, temos uma partição em *A*.

■

Proposição 5.4 Reciprocamente ao que foi provado na proposição 5.3., se tivermos uma partição $\mathcal{F}$ de um conjunto *A*, então existe uma relação *R* de equivalência sobre *A* de modo que $A/R = \mathcal{F}$, onde A/R é o conjunto das classes de equivalência módulo *R*, também chamado de *conjunto quociente de A por R*.

Demonstração:

Seja *R* uma relação sobre *A* assim definida:

$$xRy \Leftrightarrow \exists\ B \in \mathcal{F};\ x \in B \text{ e } y \in B$$

isto é, *x* está na relação com *y* quando existe um conjunto *B* da partição $\mathcal{F}$ que contém *x* e *y*. Temos:

i) Reflexividade: Para todo $x \in A$, existe uma classe *B* em $\mathcal{F}$ tal que $x \in B$, portanto, xRx.

ii) Simetria: Sendo $x \in A$ e $y \in A$, vem:

$$xRy \Rightarrow \exists\ B \in \mathcal{F}: x, y \in B \Rightarrow y, x \in B \Rightarrow yRx.$$

iii) Transitividade: Sendo $x, y, z \in A$, vem:

$$xRy \Rightarrow \exists\ B_1 \in \mathcal{F}: x, y \in B_1$$

$$yRz \Rightarrow \exists\ B_2 \in \mathcal{F}: y, z \in B_2$$

Como $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, então $B_1 = B_2$. Portanto, $x, z \in B_1 = B_2 \in \mathcal{F}$ e, assim, xRz.

$\blacksquare$

6 CARDINALIDADE DE CONJUNTOS INFINITOS E HIPÓTESE GENERALIZADA DO CONTÍNUO

Definição 6.1 Dois conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se é possível estabelecer entre eles uma correspondência biunívoca, ou seja, uma bijeção. A cardinalidade de um conjunto A é representada por $\#A$ ou por $|A|$, ou ainda por *card* (A).

Considerando a existência de uma bijeção entre A e B, temos que *card* (A) = *card* (B). Caso exista apenas uma injeção de A para B, podemos dizer que *card* (A) $\leq$ *card* (B).

Quando um conjunto tem uma quantidade finita de elementos, dizemos que se trata de um conjunto finito e a sua quantidade de elementos corresponde à sua cardinalidade, seguindo a definição do Teorema de Cantor (teorema 4.1.).

Por outro lado, quando um conjunto tem uma quantidade infinita de elementos, dizemos que ele tem cardinalidade infinita e, então, chamamos de conjunto infinito.

Uma pergunta natural que surge é: todos os conjuntos infinitos têm "tamanhos" iguais, ou existem infinitos maiores que outros? Os exemplos a seguir mostrarão que há conjuntos infinitos com mesma cardinalidade, mas também há conjuntos infinitos com cardinalidades diferentes.

Exemplo 6.1 Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Então $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade, ou seja, o conjunto dos naturais e o conjunto dos naturais pares têm a mesma cardinalidade.

Demonstração: Basta tomar a função f: $\mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, dada por $f(n) = 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tal função é bijetora, o que prova que $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$ têm a mesma cardinalidade.

■

De maneira análoga podemos mostrar que o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números naturais ímpares têm a mesma cardinalidade, bastando para isso, tomar a função $f(n) = 2n + 1$.

Este resultado é contraditório em relação ao senso comum, visto que é esperado que existam mais números naturais do que números pares ou ímpares.

Conforme relatado no capítulo 4, o conjunto dos números naturais tem cardinalidade infinita denominada $\aleph_0$, e todos os conjuntos que são equipotentes a ele são ditos *enumeráveis*. Deste modo, o conjunto $2\mathbb{N}$ é enumerável e tem cardinalidade $\aleph_0$.

Exemplo 6.2 O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável.

Demonstração: Dizer que o conjunto dos números inteiros é enumerável equivale a dizer que ele é equipotente aos naturais. Para isto, basta definir a função f: $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n \geq 0 \\ -(2n+1), & \text{se } n < 0 \end{cases}$. Tal função é bijetora, o que prova a enumerabilidade de $\mathbb{Z}$.

■

Exemplo 6.3 O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável.

Demonstração: Vamos construir uma enumeração para o conjunto dos números racionais. Para tanto, como já sabemos que $\mathbb{Z}$ é enumerável, então também $\mathbb{Z}^*$ é enumerável. Então definimos a função f: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ dada por $f(m,n) = \frac{m}{n}$. Tal função é sobrejetiva, o que prova a enumerabilidade de $\mathbb{Q}$.

■

Exemplo 6.4 Os intervalos reais fechados $[a; b]$ e $[c; d]$, onde $a < b$ e $c < d$ são equipotentes.

Demonstração: Tomando a função h: $[a; b] \to [c; d]$, definida por $h(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a)+c$, como $a < b$, segue que $a \neq b$ e, desta forma, pode-se provar que a função definida acima é uma bijeção entre $[a; b]$ e $[c; d]$, provando que tais intervalos têm a mesma cardinalidade.

■

Por meio de argumento análogo, pode ser provada a equipolência dos seguintes intervalos: $(a; b]$ e $(c; d]$, $(a; b)$ e $(c; d)$ e $[a; b)$ e $[c; d)$.

Exemplo 6.5 O intervalo $(-1, 1)$ tem a mesma cardinalidade que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Demonstração: Considerando a função g: $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{x}{1-|x|}$. Para todo $x \in (-1, 1)$ segue que g é uma bijeção, o que prova a equipolência.

■

Exemplo 6.6 A cardinalidade dos números naturais é menor que a cardinalidade dos números reais, ou seja, *card* $(\mathbb{N})$ < *card* $(\mathbb{R})$.

Demonstração: Vamos tomar o intervalo real [0; 1[. Daí, provaremos que tal intervalo tem cardinalidade maior que a dos naturais (não sendo, portanto, enumerável). Desta forma, sendo [0; 1[$\subset \mathbb{R}$, fica provado que *card* ($\mathbb{N}$) < *card* ($\mathbb{R}$) e, portanto, $\mathbb{R}$ é não enumerável).

Utilizaremos a Diagonal de Cantor. Para tanto, considere uma sequência enumerável x_1, x_2, ... de números reais no intervalo [0; 1[. Qualquer número deste intervalo se escreve de maneira única como uma dízima infinita da forma $0{,}a_1a_2a_3...$, em que os a_i são algarismos entre 0 e 9 e a dízima não termina numa sequência infinita constante igual a 9. Representa-se cada um dos números x_i nessa forma

$$x_1 = 0,\ \boxed{a_{11}}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ ...$$

$$x_2 = 0,\ a_{21}\ \boxed{a_{22}}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ ...$$

$$x_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ \boxed{a_{33}}\ a_{34}\ a_{35}\ ...$$

$$x_4 = 0,\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ \boxed{a_{44}}\ a_{45}\ ...$$

$$x_5 = 0,\ a_{51}\ a_{52}\ a_{53}\ a_{54}\ \boxed{a_{55}}\ ...$$

Tomando as casas decimais destacadas acima, pode-se definir através da expressão decimal um número $x = 0{,}a_1a_2a_3...$ escolhendo para cada a_i um algarismo diferente de a_{ii} (e de 9). Este número x é garantidamente distinto de qualquer elemento x_i da lista inicial, por que diferente deste pelo menos na i-ésima casa decimal (e não termina numa sequência constante igual a 9). Isto prova que existe mais números no intervalo [0; 1[do que no conjunto $\mathbb{N}$. Portanto, $\mathbb{R}$ é não enumerável e *card* ($\mathbb{N}$) < *card* ($\mathbb{R}$).

■

A constatação do último exemplo é bem aceita pelo senso comum. Afinal, é de se esperar que existam mais números reais do que naturais. Mas mais do que isto, como a cardinalidade dos números naturais (bem como a dos números reais) é infinita, tal constatação vem confirmar que existem infinitos maiores que outros.

A partir desta constatação, Cantor definiu o que chamou de *cardinais transfinitos* para os números cardinais maiores que $\aleph_0$. Desta forma, ele estabeleceu uma "sequência" bem-ordenada de *alefes* (que não é enumerável e nem sequer forma um conjunto) para designar os cardinais transfinitos, de forma que $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$.

Desta sequência de cardinais infinitos surge um questionamento: onde fica localizado a cardinalidade dos números reais dentre os *alefes*? Existe alguma cardinalidade intermediária a esses *alefes*?

Tais indagações ainda continuam sem resposta na Matemática. Não há como se provar a existência ou a não existência de tais cardinalidades, baseado na *Teoria dos Conjuntos de ZFC*.

A suposição de que não existe um número transfinito entre os *alefes* é conhecida como *Hipótese Generalizada do Contínuo*. Em 1962, o Paul Cohen, aluno de Kurt Gödel (1906 – 1978), demonstrou que a hipótese do contínuo é indecidível, de forma que não é contraditória com os axiomas de ZFC, o que quer dizer que se pode usar indiferentemente como axioma tanto a hipótese do contínuo como sua negação.

Estudando cardinalidades, Cantor estabeleceu uma aritmética que, por vezes, se mostra bem diferente da que é utilizada no dia-a-dia, de forma a estabelecer as operações fundamentais de adição e multiplicação.

Teorema 6.1 Seja A um conjunto e $\wp(A)$ o conjunto de suas partes. Então $card\ (A) < card\ (\wp(A))$.

Demonstração: Para conjuntos finitos, se $card\ (A) = n$, pode ser provado por combinatória, por exemplo, que $card\ (\wp(A)) = 2^n$, donde por indução finita temos que $n < 2^n$, e $card\ (A) < card\ (\wp(A))$.

Para conjuntos infinitos, deve ser mostrado que existe uma injeção de A em $\wp(A)$ e que não há sobrejeção.

Seja f: $A \to \wp(A)$ dada por $f(m) = \{m\}$. Fazendo $f(m) = f(n)$, temos que $\{m\} = \{n\}$ e, consequentemente, $m = n$. Deste modo, pode-se afirmar que a função f é injetora, e mais, há equipotência entre o domínio de f e sua imagem, isto é, $card\ (A) = card\ (f(A))$, e como $f(A) \subset \wp(A)$, temos que $card\ (A) \leq card\ (\wp(A))$.

Para garantir que a desigualdade é estrita, falta mostrar que não há sobrejeção de A em $\wp(A)$, ou seja, que toda função g de A em $\wp(A)$, nunca será sobrejetora.

Para tanto, seja g: $A \to \wp(A)$ de modo que para cada $a \in A$, $g(x)$ é um subconjunto de A, já que $g(x) \in \wp(A)$. Seja B o subconjunto de A definido por $B = \{a \in A \mid a \in A - g(a)\}$. Então B não pertence à imagem de g.

Pois suponhamos por absurdo que exista $a_0 \in A$ tal que $g(a_0) = B$. Daí temos que

$$a_0 \in B \Leftrightarrow a_0 \in A - g(a_0)$$

Mas $g(a_0) = B$, donde segue que $a_0 \in B \Leftrightarrow a_0 \in A - B$, o que implica que $a_0 \notin B$, donde segue a contradição.

Portanto, $g: A \to \wp(A)$ não é sobrejetiva e temos que $card\ (A) < card\ (\wp(A))$.

■

O que foi mostrado com o teorema acima não é tão relevante para conjuntos finitos. Afinal, para um conjunto A tal que $card\ (A) = n$, tem-se $card\ (\wp(A)) = 2^n$ e, prova-se facilmente que $n < 2^n$, para todo n natural.

Desta forma, a grande contribuição dada pelo citado teorema é para o estudo de cardinalidades de conjuntos infinitos, mostrando, por exemplo, que $card\ (\mathbb{N}) < card\ (\wp(\mathbb{N}))$.

Definição 6.2 Considerando os conjuntos A e B disjuntos ($A \cap B = \varnothing$), de modo que $card\ (A) = a$ e $card\ (B) = b$, é definida a adição ou soma de a com b ao cardinal $a + b$ da reunião $A \cup B$, ou seja, $a + b = card\ (A \cup B)$.

A adição de cardinais goza das seguintes propriedades:

a) comutativa;

Demonstração: Sendo A e B disjuntos, é verdade que $a + b = card\ (A \cup B) = card\ (B \cup A) = b + a$.

■

b) associativa;

Demonstração: Dados os conjuntos A, B e C disjuntos dois a dois e considerando $card\ (A) = a$, $card\ (B) = b$ e $card\ (C) = c$, segue que $a + (b + c) = card\ ([A \cup (B \cup C)]) = card\ ([(A \cup B) \cup C]) = (a + b) + c$.

■

c) elemento neutro.

Demonstração: Seja A um conjunto de cardinalidade não-nula (não vazio) tal que $card\ (A) = n$. Seja também o conjunto vazio $\varnothing$ tal que $card\ (\varnothing) = 0$. Como $A \cup \varnothing = A$, segue que:

$n + 0 = card\ (A \cup \varnothing) = card\ (A) = n = card\ (\varnothing \cup A) = 0 + n$.

■

Além das propriedades acima, para os cardinais transfinitos $\aleph_0$ e $\aleph$, cardinais do conjunto dos números naturais e do conjunto dos números reais, respectivamente, são válidas:

a) $n + \aleph_0 = \aleph_0$, $\forall\ n$ cardinal finito;

b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

c) $\aleph + \aleph = \aleph$;

d) $n + \aleph = \aleph$, $\forall$ n cardinal finito;

e) não vale a lei do cancelamento para os cardinais transfinitos.

Definição 6.3 Dados os conjuntos A e B com *card* $(A) = a$ e *card* $(B) = b$, chamamos de multiplicação de a por b ao número cardinal $a.b$ dado por $a.b =$ *card* $(A \times B)$.

Para multiplicação de números cardinais valem as seguintes propriedades:

a) comutativa;

Demonstração: Tomando A e B conjuntos tais *card* $(A) = a$ e *card* $(B) = b$, e lembrando que *card* $(A \times B) =$ *card* (A).*card* $(B) = a.b$, segue que $a.b =$ *card* $(A \times B) =$ *card* $(B \times A) = b.a$.

■

b) associativa;

Demonstração: Sejam A, B e C conjuntos tais que *card* $(A) = a$, *card* $(B) = b$ e *card* $(C) = c$, segue que $a.(b.c) =$ *card* $(A \times (B \times C)) =$ *card* (A) . *card* $(B \times C) =$ *card* (A).*card* (B).*card* $(C) =$ *card* $(A \times B)$. *card* $(C) =$ *card* $((A \times B) \times C) = (a.b).c$.

■

c) distributiva;

Demonstração: De fato, sejam A, B e C conjuntos tais que *card* $(A) = a$, *card* $(B) = b$, *card* $(C) = c$ e que $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$. Então $a.(b + c) =$ *card* $([A \times (B \cup C)] =$ *card* $((A \times B) \cup (A \times C)] =$ *card* $(A \times B) +$ *card* $(A \times C) = a.b + a.c$.

■

d) $0.a = 0$, $\forall$ a;

Demonstração: Tomando A um conjunto tal que *card* $(A) = a$ e sabendo que o conjunto vazio é tal que *card* $(\emptyset) = 0$ e $\emptyset \times A = \emptyset$, tem-se que $0.a =$ *card* $(\emptyset \times A) =$ *card* $(\emptyset) = 0$.

■

e) $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$;

Demonstração: Sendo $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais tal que *card* $(\mathbb{N}) = \aleph_0$, e sabendo que *card* $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) =$ *card* $(\mathbb{N})$, segue que $\aleph_0 . \aleph_0 =$ *card* $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) =$ *card* $(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

■

Também valem as seguintes propriedades:

a) $n. \aleph_0 = \aleph_0$, $\forall n$ finito;

b) Não vale a lei do cancelamento para multiplicação de cardinais.

7 TEOREMA DE CANTOR- SCHROEDER-BERNSTEIN E EQUIVALÊNCIA ENTRE AXIOMA DA ESCOLHA E LEMA DE ZORN

Este último capítulo é dedicado ao estudo do Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein. Embora com esta denominação, este teorema tinha sido demonstrado por Richard Dedekind (1781 – 1848) em 1887, fato descoberto quando seus papéis foram estudados após seu falecimento.

Definição 7.1 Seja A um conjunto com uma relação de ordem parcial (conforme definição 3.3), munido de uma função f: $A \to A$. Tal função se diz *isotônica* se, para todos $x, y \in A$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Definição 7.2 Um conjunto parcialmente ordenado A é uma lattice completa se todo subconjunto não vazio de A tiver um supremo (*sup*) e ínfimo (*inf*).

Proposição 7.1 Se A é uma conjunto, então $\wp(A)$ é parcialmente ordenado por inclusão (isto é, por $\subset$) e é uma *lattice* completa.

Demonstração: Sejam $X, Y, Z \subset \wp(A)$. Daí, tem-se que:

i) $X \subset X$, $Y \subset Y$, $Z \subset Z$ (*reflexividade*);

ii) $X \subset Y$ e $Y \subset X$, implica em $X = Y$ (*antissimetria*);

iii) $X \subset Y$ e $Y \subset Z$, então $X \subset Z$ (*transitividade*).

Disto fica demonstrado que $\wp(A)$ é parcialmente ordenado pela inclusão.

Para mostrar que é uma *lattice* completa, devemos mostrar que qualquer subconjunto de $\wp(A)$ tem *supremo* e *ínfimo*.

Para tanto, sejam $A_{\alpha's}$ subconjuntos do conjunto das partes $\wp(A)$. Consideremos $\bigcup A_\alpha$ e $\bigcap A_\alpha$. Temos que, para todo A_α, é verdade que $\bigcap A_\alpha \subset A_\alpha$ e $A_\alpha \subset \bigcup A_\alpha$.

Desta forma, $inf\ A_\alpha = \bigcap A_\alpha$ e $sup\ A_\alpha = \bigcup A_\alpha$. Logo, A é uma *lattice* completa.

■

Proposição 7.2 Se A é uma lattice completa e f: $A \to A$ é isotônica, então f tem um ponto fixo, isto é, $\exists\ a \in A$, $f(a) = a$.

Demonstração: Considere $B = \{a \in A \mid f(a) \geq a\}$ e coloque $b_0 = sup\ (B)$. Perceba que $b \in B \Rightarrow f(b) \geq b \Rightarrow f(f(b)) \geq f(b) \Rightarrow f(b) \in B$.

Também temos que $b \in B \Rightarrow b \leq b_0$ (já que $b_0 = sup\ (B)$). Daí, $f(b) \leq f(b_0)$, pois f é isotônica.

Desta forma, $b \leq f(b) \leq f(b_0)$, o que implica que $f(b_0)$ é um último limite para B, donde segue que $f(b_0) \geq b_0 \Rightarrow b_0 \in B \Rightarrow f(b_0) \in B \Rightarrow f(b_0) \leq b_0$.

De $f(b_0) \geq b_0$ e $f(b_0) \leq b_0$ segue que $f(b_0) = b_0$, o que termina a prova. ■

Proposição 7.3 Considere f: $A \to B$ e g: $B \to A$ funções. Então existem conjuntos $C \subset A$ e $D \subset B$ tais que $f(C) = D$ e $g(B - D) = A - C$.

Demonstração: Considerando o conjunto das partes $\wp(A)$ ordenado por inclusão, pela proposição 7.1. temos que ele é uma *lattice* completa.

Tomando $S \subset A$, considere h: $\wp(A) \to \wp(A)$ tal que $h(S) = A - g(B - f(S))$. Se $S \subset T$ então como $h(S) \subset h(T)$.

De fato, se $S \subset T \Rightarrow f(S) \subset f(T) \Rightarrow B - f(S) \supset B - f(T) \Rightarrow g(B - f(S)) \supset g(B - f(T))$. Disto segue que $A - g(B - f(S)) \subset A - g(B - f(T))$, donde $h(S) \subset h(T)$ e, portanto, h é isotônica.

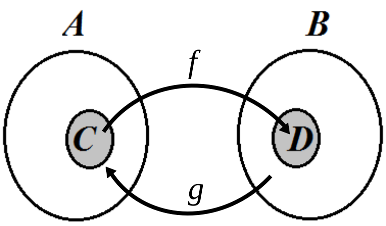
Assim, pela proposição 7.2. existe um subconjunto $C \subset A$ tal que $h(C) = C$. Considere que $D = f(C)$. Então $g(B - D) = g(B - f(C)) = A - h(C) = A - C$.

■

Teorema 7.1 (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein). Dados dois conjuntos A e B, se card $(A) \leq$ card (B) e card $(B) \leq$ card (A), então card (A) = card (B).

Demonstração: De card $(A) \leq$ card (B) e card $(B) \leq$ card (A), segue que existem injeções f: $A \to B$ e g: $B \to A$. Assim, pela proposição 7.3. existem $C \subset A$ e $D \subset B$ tais que $f(C) = D$ e $g(B - D) = A - C$. Desta forma, temos que $f|_C$: $C \leftrightarrow D$ e $g|_{B - D}$: $B - D \leftrightarrow A - C$ são correspondências biunívocas.

Figura 3 – Funções f e g.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Disto podemos definir uma função h: $A \to B$ dada por $h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in C \\ (g(x))^{-1}, & \text{se } x \in A - C \end{cases}$. Desta forma, h: $A \to B$ é uma bijeção, de modo que card (A) = card (B).

■

Teorema 7.2 (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein – Outra forma). Se A e B são conjuntos tais que A é equipotente a um subconjunto de B e B é equipotente a um subconjunto de A, então A e B são equipotentes.

Demonstração: Sejam A_1 e B_1 subconjuntos de A e B, respectivamente, tais que card (A) = card (B_1) e card (B) = card (A_1). Como $B_1 \subset B$ e $A_1 \subset A$, temos card (A) = card (B_1) $\leq$ card (B) = card (A_1) $\leq$ card (A), de onde resulta card (A) $\leq$ card (B) e card (B) $\leq$ card (A), donde segue que card (A) = card (B) e, assim, A e B são equipotentes. ■

Teorema 7.3 Dados dois conjuntos A e B, se card (A) = card ($A \times B$) então card ($\wp_0(A)$) = card (($\wp_0(A) \times (\wp_0(B)$).

Demonstração: Assumindo que exista uma correspondência de f: $A \times B \rightarrow A$. Isso induz uma correspondência biunívoca F: $\wp(A \times B) \rightarrow \wp(A)$ por $F(S) = \{f(x,y) \mid (x,y) \in S\}$, isto é, $F(S) = f(S)$. Mas g: $\wp_0(A) \times \wp_0(B) \rightarrow \wp_0(A \times B)$ dado por $g(S, T) = S \times T$ é uma injeção, e então $F \circ g$: $\wp_0(A) \times \wp_0(B) \rightarrow \wp_0(A)$ é também uma injeção. Há também uma injeção $\wp_0(A) \rightarrow \wp_0(A) \times \wp_0(B)$ (a menos que B = Ø e neste caso o resultado é trivial) e assim a demonstração segue do Teorema de Schroeder-Bernstein. ■

Os resultados apresentados a seguir relacionam os cardinais finitos e os cardinais infinitos $\aleph_0$ e $\aleph$ de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente.

Proposição 7.4 Para qualquer que seja o número cardinal finito n, temos que $n < \aleph_0$.

Demonstração: Seja A um conjunto finito tal que card (A) = n. Se A é finito, então $A \subset \mathbb{N}$, donde segue que card (A) $\leq$ card ($\mathbb{N}$). Isto implica que $n \leq \aleph_0$. Mas A não é equipotente a $\mathbb{N}$, senão A seria também infinito. Deste modo, card (A) $\neq$ card ($\mathbb{N}$), donde $n \neq \aleph_0$ e, portanto, $n < \aleph_0$.

■

Proposição 7.5 Para $\aleph_0$ e $\aleph$ vale a relação $\aleph_0 < \aleph$.

Demonstração: Sendo card ($\mathbb{N}$) = $\aleph_0$, card ($\mathbb{R}$) = $\aleph$ e como $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, temos $\aleph_0 \leq \aleph$. Mas é conhecido que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ não são equipotentes. Assim, $\aleph_0 \neq \aleph$ implica em $\aleph_0 < \aleph$.

■

Proposição 7.6 Para todo número cardinal infinito x temos $\aleph_0 \leq x$.

Demonstração: Seja A um conjunto infinito tal que card (A) = x. Então, podemos afirmar que A tem um subconjunto enumerável B, ou seja, que $\mathbb{N}$ é equipotente a um conjunto $B \subset A$.

Logo, card ($\mathbb{N}$) = card (B) $\leq$ card (A). Portanto, $\aleph_0 \leq x$.

■

Ao longo deste material, foi estudado em momentos separados o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn. Desta modo, para finalizar o trabalho ora em questão, será demonstrada a equivalência entre ambos.

Teorema 7.4 O Axioma da Escolha e o Lema de Zorn são equivalentes.

Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que o Axioma da Escolha implica no Lema de Zorn.

Consideremos um conjunto parcialmente ordenado P e uma cadeia C tal que $C \subset P$.

Pelo axioma da escolha, podemos obter uma boa ordem em P e, portanto, podemos enumerar $P = \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$, para algum ordinal γ. Se $y_0 = x_0$ for elemento maximal, o resultado está provado. Senão, seja $\alpha_1 = \min \{\alpha < \gamma : x_0 < x_{\alpha 1}\}$. Suponhamos escolhidos y_α, $\alpha \leq \beta$ estritamente crescente. Se y_β for maximal, terminamos a demonstração aqui. Senão, seja $\alpha_{\beta+1} = \min \{\alpha < \gamma : x_\beta < x_\alpha\}$ e $y_{\beta+1} = x_{\alpha\beta}$. Suponhamos que λ seja um ordinal limite e que tenhamos obtido uma sequencia estritamente crescente y_α, $\alpha < \lambda$. Pela hipótese sobre P, existe elemento $z \in P$ que é limitante superior de $C = \{y_\alpha : \alpha < \lambda\}$. Seja $\alpha_\lambda = \min \{\alpha < \lambda : x_\alpha$ é limitante superior de $C\}$ e façamos $y_\lambda = x_{\alpha\lambda}$.

Como P é um conjunto, existe α, tal que y_α é maximal e, portanto, chegamos ao Lema de Zorn.

Vamos agora provar que o Lema de Zorn implica no Axioma da Escolha.

Dado um conjunto X seja $F = \{f : D \to X : D \in \wp(X); f(A) \in A, \forall A \in \mathrm{D}\}$, então F é um conjunto de funções de subconjuntos de $\wp(X)$ em X, onde todos os elementos da imagem pertencem ao conjunto do domínio. Vamos ordenar este conjunto parcialmente por (<), sejam f_1 e $f_2 \in F$ tal que D_1 é o domínio de f_1 e D_2 é o domínio de f_2, diremos que $f_1 < f_2$ se $D_1 \subset D_2$ e $f_2|_{D1} = f_1$.

Sendo assim, f_2 é uma extensão de f_1, e (<) é uma ordem parcial. Porque é reflexiva, $f_1 < f_1$, porque $D_1 \subset D_1$ e claramente $f_1|_{D1} = f_1$. Também é antissimétrica se $f_1 < f_2$ e $f_2 < f_1$, então $D_1 \subset D_2$ e $D_2 \subset D_1$ implica em $D_1 = D_2$ e assim $f_1 = f_2$. E transitiva, se $f_1 < f_2$ e $f_2 < f_3$ então $D_1 \subset D_2$ e $D_2 \subset D_3$, logo $D_1 \subset D_3$, e como $f_2|_{D1} = f_1$ e $f_3|_{D2} = f_2$, e portanto $f_3|_{D1} = f_2|_{D1} = f_1$, e assim $f_1 < f_3$. E está provado que a ordem é parcial.

Seja C uma cadeia de F, temos $C = \{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$, como $f_\alpha : D_\alpha \to X$, onde $D_\alpha \in \wp(X)$ e $f(A) \in A$, $\forall\, A \in D_\alpha$, temos que tomando $D_\beta = \bigcup_{\alpha \in J} D_\alpha$ podemos definir $f_\beta : D_\beta \to X$ onde $D_\alpha \subset D_\beta$ para todo α, como $A \subset D_\beta = \bigcup_{\alpha \in J} D_\alpha$, existe algum $\alpha_0 \in J$ em que $A \subset D_{\alpha 0}$ e $f_\beta(A) = f_{\alpha 0}(A) \in A$ e pela ordem temos que $f_\alpha < f_\beta$, $\forall\, \alpha \in J$. Assim, f_β é uma cota superior.

Sendo assim temos que pelo Lema de Zorn existe um f_δ que é maximal e onde $D_\delta \subset \wp(X)$. Suponha por absurdo que $D_\delta \neq \wp(X) - \{\varnothing\}$, então existe um $A_\delta \in \wp(X)$ tal que $A_\delta \notin D_\delta$. Definimos $D_\gamma = D_\delta \cup \{A_\delta\}$. E como $D_\delta \subset D_\gamma$,

$$f_\gamma(A) = \begin{cases} f_\delta, & \text{se } \ A \in D_\delta \\ a, & \text{com } \ a \in A_\delta \ \text{ se } \ A \in A_\delta - D_\delta \end{cases}.$$

E assim teríamos $f_\delta < f_\gamma$, o que é absurdo porque o lema de Zorn nos garantiu que f_δ é o elemento maximal. E portanto $D_\delta = \wp(X) - \{\varnothing\}$, e temos um conjunto de funções $f : \wp(X) - \{\varnothing\} \to X$; $f(A) \in A$ para todo $A \in \wp(X) - \{\varnothing\}$, e esta é a função escolha, e assim temos que o Lema de Zorn implica no Axioma da Escolha.

■

8 CONCLUSÃO

Diante do que foi apresentado nas páginas anteriores, se pode verificar que é possível uma sistematização dos aspectos relacionados à teoria de conjuntos, de forma que a noção intuitiva de conjuntos seja substituída por uma abordagem mais consistente e rigorosa, dando um aspecto matemático aos tópicos tratados.

Por meio da relação de ordem, conceitos como limite superior, limite inferior, elemento máximo, elemento mínimo, etc. puderam ser agregados ao estudo da teoria de conjuntos, de modo que foi possível estabelecer, pelo Lema de Zorn, que todo conjunto não vazio que possui subconjuntos totalmente ordenados, possui pelo menos um elemento maximal.

Através dos estudos de Cantor, cardinalidade de conjuntos pode ser relacionada com função, de modo a relacionar entre si dois conceitos até então aparentemente desconexos: conjuntos e funções. Disto se pode concluir que, dados dois conjuntos A e B, temos que $|A| \leq |B|$ se, e somente se, existir uma injeção de A em B.

Os estudos de Cantor trouxeram à teoria de conjuntos diversas contribuições, de modo que, para sua melhor formalização, surgiu a necessidade de uma melhor sistematização, por meio da qual fosse possível fugir da abordagem intuitiva que era dada por Cantor. Assim é que foram desenvolvidos os axiomas de ZFC, tão bem tratados no presente trabalho acadêmico.

Dos estudos de Cantor referentes aos conjuntos infinitos, bem como da definição de cardinalidade e enumerabilidade, ficou demonstrado que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma quantidade de elementos. Ou seja, há infinitos maiores que outros.

Além disso, foi visto que a Hipótese Generalizada do Contínuo é indecidível na Matemática, de modo que a mesma não pode ser aceita como uma verdade infalível, mas também que não pode ser refutada. No entanto, trabalhos de Paul Cohen provaram que a sua aceitação ou a sua negação não causam contradição em relação aos axiomas de ZFC.

Finalizando, o Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein vem afirmar que, dados dois conjuntos A e B, se pudermos estabelecer injeções entre A e um subconjunto de B, e entre B e um subconjunto de A, então A e B têm a mesma cardinalidade.

REFERÊNCIAS

BASTOS, G.G. **Notas de Álgebra.** Fortaleza: Premius, 2002, 160 p.

BREDON, Glen E. **Topology and Geometry.** Springer, 1993.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. **Um Curso de Álgebra Linear.** 2. ed. São Paulo: Ed. USP, 2010.

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013, 133 p.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008, 431 p. (v. 1.)

SÁ, Carlos Correia de; ROCHA, Jorge. **Treze Viagens pelo Mundo da Matemática.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012, 607 p.