Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Priscila Belota de Almeida

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente

Rio de Janeiro

2013

Priscila Belota de Almeida

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro

2013

de Almeida, Priscila

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente / Priscila de Almeida - 2013

39.p

1.Matemática 2. Matemática Financeira. I.Título.

CDU 536.21

Priscila Belota de Almeida

A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 05 de abril de 2013

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática - UFRJ

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Orlando dos Santos Pereira

Doutor em Matemática - UFRJ

Aos meus amados pais, Antônio e Zilma.

Ao meu querido e desejado irmão, Daniel.

Ao meu noivo, Wellington, grata surpresa da vida.

Aos meus alunos que me instigam a me reinventar a todo o tempo.

Agradecimentos

O agradecimento maior vai para meus pais, que sempre me incentivaram a estudar e não mediram esforços para me dar o suporte necessário a cada conquista.

Alguns professores tornaram-se especiais durante meu caminho e seguem comigo na memória e no coração: Joel, Lidia, Lucia, Monica, Walcy, Leonardo e Ronaldo. Muito obrigada pelos exemplos e inspirações.

Aos meus colegas de turma, e que turma! Estar no meio desse povo foi uma grande honra. Pessoas super inteligentes e com uma baita experiência só podem nos enriquecer. Espero ter absorvido bastante coisa.

Dessa trajetória, herdei duas amigas: Gisele e Carolina. Meninas, com vocês o percurso foi mais leve, menos difícil, mais alegre, até mais humano. Vocês foram fundamentais!

Ao Wellington que, no meio de tantas provas e material pra estudar, surgiu e tornou meus dias mais alegres. Obrigada pelo apoio e paciência.

"Se muito vale o já feito, mais vale o que será. E o que foi feito é preciso conhecer para melhor prosseguir."

Milton Nascimento e Wagner Tiso

"Foi o tempo que dedicaste à tua rosa que a fez tão importante."

O Pequeno Príncipe

Resumo

A Matemática Financeira é um ramo da matemática de fundamental importância para o uso cotidiano do cidadão. Neste trabalho, ressaltamos, sob a ótica da Lei de Diretrizes e Bases e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a importância do seu ensino na educação básica, destacando que, muitas das vezes, o conteúdo é negligenciado ou ensinado de forma superficial, apenas com aplicações de fórmulas simples. Discutimos a necessidade da Matemática Financeira para a formação do professor de Matemática e observamos que em muitos cursos de Licenciatura em Matemática essa não é uma disciplina obrigatória do seu currículo.

Propomos que a Matemática Financeira seja ensinada com problemas do dia-dia do aluno, fatos reais, vivenciados por seus parentes e amigos como, por exemplo, o financiamento de um carro, a compra de uma casa pelo Sistema de amortização, multa de condomínio e outros casos, utilizando a tecnologia como ferramenta facilitadora e tornando, assim, a aula mais enriquecedora.

Por fim, é importante destacar que esse trabalho foi desenvolvido em conjunto com a discente Gisele Valle de Farias.

Palavras-chaves: Educação Financeira, cidadão, tecnologia

Abstract

The Financial Mathematics is a branch of mathematics of fundamental importance to the everyday citizen. In this work, we emphasize the perspective of the Law of Guidelines and Bases of the National Curriculum, the importance of teaching in basic education, pointing out that, often, content is neglected or taught in a superficial way, only applications with simple formulas. We discussed the necessity of Financial Mathematics for teacher training in Mathematics and observed that in many courses in Mathematics this is not a mandatory subject of your resume.

We propose that the Financial Mathematics be taught with day by day problems of the student, real facts experienced by their relatives and friends for example, financing a car, buying a house in the leasing system, habitation penalties and other cases, by using the technology as a facilitator tool and this way, turning the class more rich.

Finally, it is important to note that this study was conducted in conjunction with the student Gisele Valle de Farias.

Keywords: Financial Education, citizen, technology

Sumário

1 Introdução

Uma das aplicações mais claras da Matemática ocorre no meio das finanças. No nosso cotidiano sempre nos deparamos com os termos: empréstimos, juros, parcelamento, inflação, etc. Entretanto, poucas pessoas realmente têm noção das consequências de cada um desses termos.

É de fundamental importância que tenhamos na sociedade cidadãos críticos e conscientes de todos os seus atos e uma boa administração financeira reflete em sua família e, consequentemente, na sociedade como um todo.

A população está sempre adquirindo novos bens e é necessário que esse consumo seja feito de maneira consciente, para que o indivíduo não seja enganado por fraudes ou propagandas que ludibriam e enganam o consumidor. Muitos compram a sua casa própria, ou o seu carro, parcelados, sem terem a noção do quanto de juros há embutido. Isso ocorre devido a grande parte da população, inclusive os graduados, não terem conhecimento sobre um ramo importantíssimo da Matemática: a Matemática Financeira.

A educação financeira é fundamental para a formação de um cidadão crítico e consciente de suas decisões. Entretanto, esse conteúdo é, muitas das vezes, negligenciado pelas escolas e, em particular, pelos professores. Quando lecionada no Ensino Médio, a disciplina é abordada com grau de relevância baixíssimo, com exemplos e exercícios que "fogem" do nosso cotidiano.

Acreditamos que a utilização de problemas reais na abordagem desses conteúdos "esbarre" na enorme quantidade de cálculos que tais problemas podem gerar. Nesse sentido, a tecnologia pode ser uma grande aliada, possibilitando a exploração de problemas mais contextualizados. Temos calculadoras avançadas e programas de computador que são pouquíssimos explorados, muitas vezes, devido ao despreparo do professor em lidar com essas ferramentas, principalmente no que tange à Matemática Financeira. Acreditamos que isso se dê, em parte, pela formação deficiente do licenciado nesse campo da Matemática.

O objetivo central deste trabalho é ressaltar a importância da utilização da Tecnologia para o ensino de Matemática Financeira na Educação Básica. No segundo capítulo, apresentamos a Matemática Financeira sob a ótica da Lei de Diretrizes e Bases e dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Analisamos, ainda, a abordagem desse assunto por alguns livros didáticos e fazemos um levantamento acerca da Matemática Financeira nos cursos de licenciatura em Matemática das principais universidades públicas do Rio de Janeiro. No terceiro capítulo apresentamos uma proposta de aula, baseada na utilização de problemas reais e no uso de tecnologia.

2 A Matemática Financeira no Ensino Médio e o uso das tecnologias

Neste capítulo, apresentamos uma discussão sobre a importância da Matemática Financeira, e da utilização das tecnologias para o seu ensino, à luz da Lei de Diretrizes e Bases e dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Fazemos, ainda, uma avaliação sucinta da apresentação do conteúdo por alguns livros didáticos e sugerimos a utilização de recursos alternativos.

2.1 A Educação Financeira sob a ótica da Lei de Diretrizes e Bases

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) define e regulariza o sistema de educação brasileiro com base nos princípios presentes na Constituição. A primeira LDB foi criada em 1961, seguida por uma versão em 1971. Com a promulgação da Constituição de 1988, tornou-se necessária a discussão acerca de uma nova LDB, que foi sancionada pelo então presidente Fernando Henrique Cardoso, em 20 de dezembro de 1996 (Lei n^o 9.394/96).

De acordo com o Art. 1^o da LDB, "*a educação deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social*". Deste modo, entendemos que a matemática financeira torna-se assunto de extrema relevância no currículo escolar, uma vez que o aluno, como cidadão, necessitará lidar com seus ganhos referentes ao seu trabalho e, estando inserido num contexto social, a maneira como este cidadão administra seus ganhos pode causar impactos na sua vida e na de sua família, além de impactar também a comunidade em que esteja inserido.

Uma prática financeira consciente e planejada pode mudar a realidade de uma comunidade inteira.

> *A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno de-*

senvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

Lei n^o 9394/96, Art. 2°

Ainda para firmar a importância da educação financeira nas escolas, o Art. 3^o da LDB define entre os princípios do ensino a "*valorização da experiência extraescolar*", onde o aluno pode (e deve) vincular a prática na sala de aula com sua realidade, aprendendo estratégias de ação e internalização de valores que servirão para melhora de sua vida como cidadão.

Segundo a LDB, os ensinos fundamental e médio têm como metas: "*o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores*" (Art.32^o), "*a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando*" (Art. 35^o).

O uso de tecnologia nos dias de hoje é de suma importância para a formação de um cidadão, sendo ela necessária e muita das vezes uma facilitadora do processo de aprendizado. Quando falamos de tecnologia nos referimos ao simples uso da calculadora e até algo mais avançado como programas de computadores com fortes recursos. O aluno ao fim do ensino médio deverá ter segundo a LDB "*a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina*" (Lei n^o 9394/96, Art 35).

Defendemos que a educação financeira deve ser parte integrante e obrigatória entre os conteúdos curriculares da educação básica, uma vez que tais conteúdos têm como uma de suas diretrizes "*a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática*" (Lei n^o 9394/96, Art. 27°).

Entendemos que o uso das tecnologias propicia a oferta de uma educação financeira de qualidade, permitindo ao aluno inserir-se na sociedade com seu poder aquisitivo de modo positivo, gerando riqueza para ele, sua família e a comunidade em que vive. Deste modo, a escola estará promovendo "*o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico*", como direciona o Art. 35^o da LDB.

2.1.1 A Matemática Financeira no currículo dos cursos de licenciatura em matemática do Rio de Janeiro

Tão importante quanto ressaltar a importância de se incluir a educação financeira na escola é preparar os professores para desempenhar o papel de educador financeiro. Entretanto, o professor é fruto de um sistema de ensino que não valorizava este campo da matemática e, portanto sua formação é, na maior parte dos casos, insatisfatória. Deste modo, o professor deve se apoiar em sua formação acadêmica superior ou nos livros didáticos, sobre os quais falaremos a frente..

Debruçando-nos sobre os currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática das principais universidades públicas do Rio de Janeiro (UFRJ, UFF, UNIRIO, UFRRJ e UERJ), podemos perceber que a Matemática Financeira não costa como cadeira obrigatória. Essa disciplina geralmente é oferecida como optativa, isto é, os licenciandos, que ainda não possuem uma vivência na escola, têm liberdade para cursá-la ou não. Os que optam por não cursar, normalmente, chegam às salas de aula com a formação financeira recebida na educação básica, tornando-se esse problema um ciclo vicioso. Somos da opinião, portanto, de que o professor de matemática em formação deve ter uma educação financeira consistente e seria importante que a Matemática Financeira se tornasse disciplina fixa e obrigatória no currículo dos cursos de licenciatura em matemática.

As Universidades, segundo a LDB, possuem autonomia para "*fixar os currículos dos seus cursos e programas, observadas as diretrizes gerais pertinentes*" (Lei n^o 9394/96, Art. 53°). Além disso, cabe aos colegiados de ensino e pesquisa a decisão de incluir a matemática financeira no currículo dos cursos de licenciatura em matemática.

> "Para garantir a autonomia didático-cientifica das universidades, caberá aos seus colegiados de ensino e pesquisa decidir, dentro dos recursos orçamentários disponíveis, sobre a elaboração da programação dos cursos."
>
> Lei n^o 9394/96, Art. 53°

Ainda de acordo com a LDB, "*os docentes ocuparão setenta por cento dos assentos em cada órgão colegiado e comissão, inclusive nos que tratarem da elaboração de modificações estatutárias e regimentais*" (Lei n^o 9394/96, Art. 56°).

Dessa forma, concluímos que a decisão de tal inclusão se dá efetivamente pelos docentes da Universidade. Estes docentes, por sua vez, não possuem obrigatoriamente em suas vidas profissionais a docência na educação básica, incorrendo numa discrepância entre as necessidades do professor da educação básica que está em formação e o que lhe é oferecido nos bancos da universidade.

Defendemos, portanto, que a educação financeira deve ser inserida no currículo básico das licenciaturas em matemática de modo a atender o primeiro dos fundamentos da formação dos profissionais da educação: o de proporcionar ao licenciando *"a presença de sólida formação básica, que propicie o conhecimento dos fundamentos científicos e sociais de suas competências de trabalho"* (Lei n^o 9394/96, Art. 61°).

2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais e Educação Financeira

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são sugeridos, para que todas as escolas possam seguir, com propostas de contextualização e interdisciplinaridade levando em consideração o aluno inserido em uma sociedade. São divididos em 10 volumes, mas nos ateremos aos volumes 1 (Introdução ao PCN) e 3 (Matemática), e à primeira seção do volume 10 (temas transversais).

Os PCNs se caracterizam por uma série de fatores, mas um em particular nos chama atenção, a saber:

> "...mostrar a importância da participação da comunidade na escola, de forma que o conhecimento aprendido gere maior compreensão, integração e inserção no mundo; a prática escolar comprometida com a interdependência escola-sociedade tem como objetivo situar as pessoas como participantes da sociedade - cidadãos - desde o primeiro dia de sua escolaridade".

Formar um cidadão consciente é importante para toda a sociedade e uma pessoa completamente formada possui a responsabilidade de administrar a sua vida financeira e, muita das vezes, a de toda família.

Um ramo da Matemática de fácil contextualização é a Matemática Financeira, afinal qualquer exemplo que tomemos dela é de adaptação imediata para a realidade do aluno. A interdisciplinaridade na Matemática Financeira também ocorre de maneira natural dentro da própria Matemática ou mesmo com outras áreas do conhecimento, como a História e as Ciências Sociais.

No volume 3 dos PCNs que trata da Matemática, temos:

> "O trabalho com a Álgebra também está presente em atividades e problemas envolvendo noções e conceitos referentes aos demais blocos, como ao generalizar os procedimentos para calcular o número de diagonais para qualquer polígono, ao indicar a expressão que relaciona duas grandezas, ao calcular medidas da tendência central de uma pesquisa. É importante que os alunos percebam essas conexões. A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais os contraexemplos".

É importante que o aluno aprenda a interpretar tabela, entenda que a proporcionalidade não é sempre a solução de todos os problemas, consiga relacionar as funções e seus gráficos com a sua vida financeira, conseguindo migrar o conhecimento que está no papel para a sua vida e consequentemente levando para a sociedade.

Sobre o uso das tecnologias encontramos um tópico inteiro em sua defesa, ressaltando a importância de ferramentas como calculadoras e computadores no ensino da matemática. O texto sugere que a utilização desses recursos permite que se repense o processo de ensino aprendizagem da matemática.

> "... relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
>
> ... evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
>
> ... possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela

> realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
>
> ... permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.”

Além disso, o uso de tecnologia vislumbra um novo professor, dotado de ferramentas mais atrativas e atuais e em constante formação.

> “As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional.”

Um dos requisitos dos temas transversais do PCN é favorecer a compreensão da realidade e a participação social, para que o aluno desenvolva a capacidade de se tornar consciente e saber se posicionar nas questões referentes à vida coletiva, intervindo no meio em que vive de forma crítica e responsável. A apresentação da Matemática Financeira sob essa ótica contribui significativamente para a formação preconizada pelos PCNs.

2.3 Recursos Didáticos para o Ensino Médio

2.3.1 Análise de Alguns Livros

Os livros didáticos constituem o principal instrumento de apoio para os professores e alunos em sala de aula sendo, muitas vezes, o único. Por isso, torna-se relevante observar como os livros didáticos tratam a Matemática Financeira. Vale lembrar que, por não ser disciplina obrigatória em grande parte dos cursos de Licenciatura em Matemática, tais livros tendem a direcionar a prática do professor. Dessa forma, destacamos a importância de se ter livros com bom conteúdo e bastante ferramentas, inclusive tecnológicas, para um aprendizado coeso.

Analisamos os seguintes livros:

- Matemática no Ensino Médio – Autor: Márcio Cintra Goulart
- Matemática (Volume Único) – Autor: Luiz Roberto Dante
- Matemática (Volume Único) – Autor: Manoel Paiva
- Matemática - Ensino Médio – Autoras: Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz
- Matemática Novo Ensino Médio – Autores: Marcondes, Gentil e Sérgio

Inicalmente, cabe ressaltar que, em todas as obras analisadas, o assunto não ultrapassa 10 páginas, ou seja, todo o conteúdo de Matemática Financeira é tratado no máximo nessas páginas, incluindo os exercícios que os alunos deverão desenvolver sozinhos. Em todos os livros a Matemática Financeira é subdividida em três assuntos: porcentagem (conteúdo que o aluno do ensino médio já deveria ter um bom conhecimento), juros simples e juros compostos.

Somente dois livros estimulam o uso da calculadora: o do autor Márcio Cintra Goulart e o das autoras Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz. O primeiro deles apenas apresenta uma foto da calculadora financeira, mostrando algumas teclas e ensinando alguns termos e símbolos do Inglês utilizados pela calculadora. Entretanto, nehum exemplo ou exercício é resolvido com o seu uso. Cabe ressaltar que poucos alunos do ensino médio possuem contato com uma calculadora financeira e não irão adquiri-la para realizar problemas de Matemática Financeira. No entanto, muitos deles possuem a Calculadora Científica, pois ela pode ser usada durante todo o curso de ensino médio, não somente na disciplina Matemática, mas em outras como Física e Química.

O livro Matemática - Ensino Médio, de Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, apresenta exercícios resolvidos utilizando a calculadora. No primeiro deles, as autoras apresentam o uso de uma calculadora simples e, em seguida utilizam, no mesmo exercício, uma calculadora científica, mostrando ao aluno as teclas que devem ser apertadas para que a solução seja feita de maneira correta, ensinando o aluno a utilizá-la. Além disso, o livro deixa bem claro que, caso o uso de calculadora não seja permitido, a informação deverá ser fornecida pelo problema, mostrando ao aluno que ele possui um recurso poderoso na mão. Notamos que o uso da tecnologia por parte dos livros didáticos se limita ao uso da calculadora, não se mencionando, em nenhum deles, o uso de planilhas eletrônicas para a solução de algum problema.

No livro Matemática, do autor Luiz Roberto Dante, temos uma excelente comparação entre Juros e Funções, sendo o único a fazê-lo assim tão diretamente. O autor constrói dois gráficos de Juros Simples e um gráfico de Juros compostos, fazendo assim a ligação dos assuntos com a Função Afim e a Exponencial.

2.3.2 Recursos Didáticos Alternativos

Uma valiosa ferramenta facilitadora dos cálculos é a calculadora científica. Defendemos que a calculadora científica deve ser utilizada em sala de aula por permitir explorar problemas mais realistas, além de ser um recurso didático de fácil aplicação em aula e no cotidiano do aluno.

Ainda visando facilitar a abordagem dos problemas contextualizados, sugerimos como recursos didáticos ao ensino da matemática financeira a utilização de softwares que resolvem equações. Existem vários disponíveis, alguns gratuitos e outros pagos. Podemos citar o Maple (pago), o Máxima (gratuito) e o Wolfram Alpha: http://www.wolframalpha.com (gratuito e on line) .

Outra alternativa de complementação aos livros didáticos são os recursos tecnológicos. Há alguns softwares que podem enriquecer as aulas de matemática financeira auxiliando na construção e comparação de gráficos e na resolução de equações como, por exemplo, o Maple e o Geobebra. Estes requerem alguma preparação do professor em manipular os softwares, mas vale o esforço. Há arquivos de áudio e vídeo, como os encontrados no Portal do Professor na plataforma do MEC (http://portaldoprofessor.mec.gov.br). Nesta plataforma podemos encontrar sugestões para enriquecer os planos de aula, áudios e vídeos que podem ser exibidos em sala de aula e diversas curiosidades de matemática. Com estes recursos é possível motivar os alunos através de uma aula mais dinâmica e contextualizada. Lá encontramos também materiais referentes à Matemática Financeira, explorada de maneira lúdica e contextualizada, além de apoio para os professores. É possível, por exemplo, exibir para os alunos um vídeo em que um casal precisa decidir entre comprar móveis e eletrodomésticos à vista ou à prazo, analisando prós e contras. A conclusão da decisão abre precedente para discussões em sala de aula, onde os alunos podem confrontar suas realidades e suas ações.

3 Uma proposta de aula, baseada em exemplos concretos, com o uso de tecnologias

Este capítulo traz uma proposta de aula de Matemática Financeira que pretende apresentar ao aluno situações-problema cotidianas e contextualizadas, que ele deve encontrar no dia a dia, e estimular o desenvolvimento de habilidades para solução desses problemas através do uso de tecnologias.

3.1 Preliminares

Indicamos, na nossa proposta, a abordagem de conteúdos que não são vistos comumente na Educação Básica e que não exigem conceitos matemáticos diferentes daqueles já vistos pelo aluno. De fato, o pré-requisito básico para o acompanhamento da aula é o conhecimento de Progressão Geométrica, como se segue:

Progressões Geométricas

São sequências de números com a característica de que cada número da sequência, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um valor fixo (chamado razão). Se uma PG tem n termos e razão q, e denotamos o primeiro de a_1, então :

$$PG : \{a_1, a_1q, a_1q^2, \dots \ , a_1q^{n-1}\}$$

Nesse caso, o termo geral da PG é dado por

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

e a soma dos seus n primeiros termos é:

$$S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Quando $|q| < 1$, podemos calcular a soma dos termos de uma PG infinita e obtemos

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

A seguir são apresentados os conteúdos de Matemática Financeira a serem abordados na nossa proposta de aula.

Juros Simples

No regime de juros simples, os juros, em cada época, são calculados sobre o capital inicial. Deste modo, a taxa incide sempre sobre o capital inicial e, portanto, o valor dos juros é constante. Assim, considerando que o capital inicial é C_0 e a taxa de juros simples é i, o capital após n meses será:

$$C_n = C_0 + niC_0.$$

Podemos observar que a sequência dos valores de C_n, quando n varia, formam uma Progressão Aritmética (pois iC_0 é uma constante).

Um exemplo de aplicação dos juros simples são os juros de mora. De acordo com Heraldo de Oliveira Silva, da Academia Paulista de Magistrados,

> "os juros moratórios constituem a pena imposta ao devedor pelo atraso no cumprimento da obrigação, ou no retardamento na devolução do capital alheio. Funciona como uma indenização pelo retardamento na execução do débito."

Normalmente os juros de mora são juros simples.

Juros Compostos

O regime de Juros compostos é o mais comum no dia-a-dia, no sistema financeiro e no cálculo econômico. Nesse regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

A fórmula que expressa o montante ao fim de n períodos é dada por:

$$C_n = C_0 \left(1 + i\right)^n.$$

O regime de juros composto é mais vantajoso para o setor financeiro, visto que o montante cresce exponencialmente, enquanto que no regime de juros simples esse crescimento é linear. Tal fato não ocorre apenas quando o prazo da transação é menor do que 1. Neste caso, o regime de juros simples é mais vantajoso.

Valor Presente

Na matemática financeira consideramos que o valor do dinheiro varia de acordo com o tempo, como se estivesse sempre investido. Deste modo, só podemos efetuar operações e comparar quantias se as mesmas forem referentes à mesma época. É desta forma que podemos decidir se um pagamento, por exemplo, é mais vantajoso à vista ou à prazo: equiparando os valores numa mesma data e considerando que o dinheiro possa estar rendendo a uma determinada taxa.

Sabemos dos Juros Compostos que quando um valor C_0 é investido a uma taxa i, após n períodos de tempo, temos um montante igual a

$$C_n = C_0\,(1+i)^n$$

Observando esta fórmula sob outra ótica, chamaremos C_0 de valor presente e C_n de valor futuro após n períodos de tempo. Com simples manipulação, podemos obter o valor presente em função do valor futuro:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}.$$

Resumindo: para obter o valor futuro basta multiplicar o valor presente por $(1+i)^n$ e, para obter o valor presente, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$.

A noção de valor presente será muito útil no estudo dos sistemas de amortização.

Exemplo: Um aparelho de som está anunciado em duas opções de pagamento: 3 prestações mensais de $R\$190,00$ cada, ou em 6 prestações mensais de $R\$100,00$, ambos com a primeira parcela paga no ato da compra. Qual é a opção mais vantajosa, se posso fazer render meu dinheiro a uma taxa de 5% ao mês?

Vamos ilustrar as duas situações:

- 1^a opção:

pagamento	190	190	190
	↑	↑	↑
data	0 (entrada)	1 mês depois	2 meses depois

- 2^a opção:

pagamento	100	100	100	100	100	100
	↑	↑	↑	↑	↑	↑
data	0	1	2	3	4	5

Para decidirmos a opção mais vantajosa, vamos determinar o valor do aparelho de som nas duas formas de pagamento trazendo as prestações para a mesma época, por exemplo, na data 2.

- 1^a opção

$$V = 190\,(1,05)^2 + 190\,(1,05) + 190 = 598,98$$

- 2^a opção

$$V = 100\,(1,05)^2 + 100\,(1,05) + 100 + \frac{100}{1,05} + \frac{100}{(1,05)^2} + \frac{100}{(1,05)^3} = 587,57.$$

Podemos verificar que o valor em 6 prestações é menor e, portanto, esta é a opção mais vantajosa.

Observação 3.1.1. Observe que quando temos muitos valores a serem transportados para uma determinada data e desejamos somar estes valores, é mais prático utilizar a fórmula da soma de uma PG. Por exemplo, poderíamos ter finalizado o cálculo da 2^a opção do exemplo acima da seguinte maneira:

- dados da PG: $a_1 = 100\,(1,05)^2$, $q = \dfrac{1}{1,05}$ e $n = 6$

$$V = 100\,(1,05)^2\,\frac{\left(\dfrac{1}{1,05}\right)^6 - 1}{\dfrac{1}{1,05} - 1} = 587,57.$$

Planos de Amortização

A amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga por meio de parcelas de modo que, ao término do prazo estipulado, o débito seja liquidado. Essas prestações são a soma de duas partes: a amortização e os juros correspondentes ao saldo devedor.

Os sistemas de amortização mais usados atualmente são o SAC (Sistema de amortização constante) e a tabela PRICE (Sistema de amortização Francês).

1. SAC

   Esse sistema se caracteriza por possuir as quotas de amortização de valores iguais. Dessa maneira, as suas prestações serão decrescentes pois os juros sobre o saldo devedor irá decaindo com o passar do tempo. Esse tipo de sistema é muito utilizado pelo sistema financeiro de habitação.

- Amortização – as quotas de amortização são constantes e calculadas dividindo o valor principal inicial pelo número de período de pagamentos, isto é,

$$A_k = \frac{D_0}{n},$$

onde D_0 é a dívida inicial, n é o número de parcelas e A_k é a amortização correspondente à parcela k.

- Saldo devedor – o saldo devedor D_k após k amortizações será de

$$D_k = D_0 - k\frac{D_0}{n} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) D_0.$$

- Juros- os juros, em uma determinada parcela k, serão determinados por

$$J_k = iD_{k-1} = i\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) D_0,$$

onde i representa a taxa de juros mensal do financiamento.

- Prestação – a prestação nesse sistema é a soma da amortização e os juros do período, ou seja,

$$P_k = A_k + J_k.$$

Exemplo: Um empréstimo de $R\$200.000,00$ será pago pelo Sistema SAC, em quatro prestações mensais, a juros efetivos de 10% a.m. Vamos construir a planilha de amortização:

mês (t)	saldo devedor $D_t = D_{t-1} - A_t$	Amortização $A_t = R_t - J_t$	Juros $J_t = iD_{t-1}$	Prestação P_t
0	200.000	–	–	–
1	150.000	50.000	20.000	70.000
2	100.000	50.000	15.000	65.000
3	50.000	50.000	10.000	60.000
4	–	50.000	5.000	55.000

2. Tabela Price

A Tabela Price é um sistema de amortização onde o valor das parcelas é constante e é muito utilizada em empréstimos bancários. Sendo n o número de parcelas, i a taxa de juros e D_0 o valor inicial da dívida, vamos calcular o valor P_k das parcelas, J_k dos juros e A_k da amortização da dívida em cada parcela, além do valor D_k da situação da dívida após o pagamento da parcela k.

- Parcelas $P_k = P$

  A equação que representa o financiamento é:

$$D_0 = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

  Aplicando a fórmula da soma de uma PG obtemos:

$$D_0 = \frac{P}{1+i} \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

  e, portanto,

$$P_k = P = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- Saldo Devedor D_k

  Queremos calcular o saldo devedor após o pagamento de k parcelas. Observe que o saldo devedor corresponde ao valor presente do montante após o pagamento da parcela k, isto é,

$$D_k = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^{n-k}}.$$

  Novamente, utilizando a fórmula de soma de PG obtemos:

$$D_k = P\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

  Substituindo o valor de P chegamos a:

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}.$$

- Juros J_k

  Calculamos o valor dos juros em cada parcela multiplicando a taxa pelo valor do saldo devedor anterior, ou seja,

$$J_k = iD_{k-1}.$$

- Amortização A_k

  Como cada parcela é dada pela soma dos juros e da amortização, temos que

$$A_k = P - J_k.$$

Exemplo: Um empréstimo de $R\$200.000,00$ será pago pela Tabela Price, em quatro prestações mensais postecipadas, a juros efetivos de 10% a.m. Vamos construir a planilha de amortização.

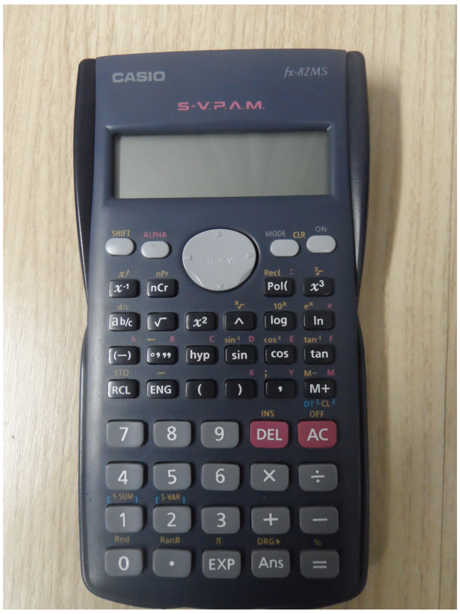
Para um determinado período, os juros são calculados sobre o saldo devedor do empréstimo ao início desse período; a amortização é a diferença entre o valor da prestação e o valor dos juros respectivos; e o saldo devedor é igual ao saldo devedor do período anterior menos a amortização do respectivo período. O quadro a seguir mostra os valores:

mês (t)	saldo devedor $D_t = D_{t-1} - A_t$	Amortização $A_t = R_t - J_t$	Juros $J_t = iD_{t-1}$	Prestação P_t
0	$200.000,00$	–	–	–
1	$156.906,00$	$43.094,00$	$20.000,00$	$63.094,00$
2	$109.502,60$	$47.403,40$	$15.690,60$	$63.094,00$
3	$57.358,86$	$52.143,74$	$10.950,26$	$63.094,00$
4	–	$57.358,86$	$5.735,89$	$63.094,00$

3.2 Plano de aula

Nesta seção apresentaremos uma proposta de aula que contempla as abordagens sobre matemática financeira que acreditamos serem essenciais. A aula sugerida deverá ser ministrada preferencialmente num laboratório de informática e a intenção é que os alunos adquiram ferramentas que possam ser utilizadas em casa, em sua prática cotidiana. Pretende-se com esta aula apresentar ao aluno situações-problema cotidianas que ele deve se deparar como cidadão e estimular o desenvolvimento de habilidades para solução desses problemas, utilizando calculadora científica e/ou planilha eletrônica (Microsoft Excel, no nosso caso) e resolução de equações (maple). O público alvo desta aula deve possuir como pré-requisitos conhecimentos sobre porcentagem, juros simples e compostos, progressões geométricas e sistemas de amortização, além de noções básicas de informática.

Nos primeiros minutos da aula o aluno deverá compreender os problemas, reconhecendo e relacionando os mesmos com situações particulares. Nos minutos seguintes o aluno deverá experimentar soluções livremente, podendo utilizar as ferramentas que desejar. Finalmente, haverá discussão de soluções e apresentação de um passo a passo para solução das questões utilizando a calculadora, a planilha eletrônica e os softwares para construção de gráficos e resolução de equações. Utilizaremos, na descrição do passo a passo, a calculadora científica da marca Casio, modelo fx-82MS, dada na figura abaixo:



Problema 1:

Você se esqueceu de pagar o condomínio do prédio onde mora e notou que já se passaram 20 dias do vencimento. A conta era de $R\$220,00$. Quanto você deverá pagar, se a taxa de juros de mora é de $0,04\%$ ao dia, mais multa de 2% sobre o valor da conta?

O objetivo desse problema é trabalhar o conceito de juros simples e porcentagem. Quando se ensina Juros Simples, normalmente o Professor e os livros didáticos frisam que este quase não é usado no cotidiano. Entretanto, temos aqui um exemplo que está presente na vida de muitos cidadãos que é o atraso de um pagamento. A multa é um percentual da taxa do condomínio não variando conforme o passar dos dias. Aqui o aluno deve compreender que os juros de mora são juros simples, pois os juros de cada período (dia) são calculados sempre sobre o mesmo principal que nesse caso é $R\$220,00$. Esta questão pode ser facilmente resolvida com calculadora científica. Vamos ao passo a passo:

Solução:

- Vamos inicialmente calcular o valor da multa. São 2% sobre o valor da conta, ou seja, 2% de $R\$220,00$. Para obter este valor na calculadora científica, digite:

2	2	0	×	2	SHIFT	%

Aparecerá na tela o valor da multa a ser acrescentada: $4,4$.

- Agora vamos calcular os juros de mora. São $0,04\%$ ao dia, por 20 dias. Digite:

2	2	0	×	2	0	×	0	·	0	4	SHIFT	%

Aparecerá na tela o valor dos juros de mora: $1,76$.

- Finalmente somamos os resultados digitando

2	2	0	+	4	·	4	+	1	·	7	6	=

e encontramos $R\$226,16$.

Problema 2

Você pretende comprar um automóvel no valor de $R\$25.017,76$. Você irá economizar durante 3 anos para adquirir esse carro e suas economias ficarão na poupança de um banco que você confia. Considerando que o carro mantenha o mesmo valor daqui a 3 anos e a taxa de juros da poupança é de $0,5\%$ ao mês, quanto você deve depositar por mês para que obtenha ao final de 3 anos o valor para a compra do carro?

a) Deverei depositar no mínimo $R\$695,00$ por mês.

b) Deverei depositar no mínimo $R\$691,46$ por mês.

c) Nenhuma das respostas acima. Deverei depositar no mínimo ( ) por mês.

O objetivo desse problema é trabalhar o conceito de porcentagem e juros compostos. Em sua resolução podemos usar a soma de uma P.G. finita e ao final da mesma apresentamos uma solução alternativa que visa simular os rendimentos da poupança. Esta situação problema é bastante comum na vida de um cidadão, assim como são comuns alguns erros na interpretação dos dados. Por esse motivo foi proposta uma questão de múltipla escolha, na qual as duas opções incorretas correspondiam a erros bastante usuais em problemas desse tipo. Os alunos que optaram pela letra (a) apenas dividiram o valor do carro pelos 36 meses que deveriam economizar; os que optaram pela letra (b) retiraram $0,5\%$ do total e depois efetuaram a divisão pelos 36 meses. Em ambos os casos, não são considerados os juros compostos da poupança.

Solução:

Chamando o valor fixo a ser depositado mensalmente de P, temos:

- 1° mês: P
- 2° mês: $P + (1,005)P$
- 3° mês: $P + (1,005)(P + (1,005)P) = P + (1,005)P + (1,005)^2P$
- 4° mês: $P + (1,005)(P + (1,005)P + (1,005)^2P) = P + (1,005)P + (1,005)^2P + (1,005)^3P$

Generalizando o processo podemos concluir a expressão do 36° mês:

- 36° mês: $P + (1,005)P + (1,005)^2P + (1,005)^3P + ... + (1,005)^{35}P$

Esperamos que no 36° mês o saldo da poupança seja de $25.017,76$. Ou seja, queremos que:

$$P + (1,005)P + (1,005)^2P + (1,005)^3P + ... + (1,005)^{35}P = 25.017,76$$

Aplicando a fórmula da soma dos 36 termos desta progressão geométrica com primeiro termo igual a P e razão igual a $1,005$, temos que

$$P\frac{1,005^{36}-1}{1,005-1} = 25.017,76,$$

ou seja,

$$P = 25.017,76\frac{1,005-1}{1,005^{36}-1}.$$

Aqui, a utilização de uma calculadora científica se torna essencial. Para calcular o valor de P, digite

2	5	0	1	7	·	7	6	×	0	·	0	0	5	÷
(	(	1	·	0	0	5	)	^	3	6	−	1	)	=

obtendo $P = 635,9999299$, ou seja, $P = R\$636,00$.

Observação 3.2.1. Uma solução pouco formal do ponto de vista teórico, mas muito interessante para a vida prática do cidadão, consiste na montagem de uma planilha que simulará os rendimentos das parcelas na poupança.

Apresentamos aqui de que forma podemos montar essa planilha, utilizando o programa Excel, com uma taxa de juros de $0,5\%$ ao mês (consideraremos o fator de correção $1,005$). É importante destacar que em cada mês a partir do segundo, o saldo da conta poupança será calculado do seguinte modo: (nova parcela) + (saldo anterior corrigido). Além disso, aqui se encaixa o sistema de juros compostos. Vamos ao passo a passo:

- Abra uma planilha eletrônica.
- Vamos deixar a célula $A1$ em branco para incluirmos o valor das parcelas em outro momento (se preferir pode-se colocar um valor aleatório que será alterado depois).
- Cálculo do saldo no primeiro mês: na célula $B1$, digite $= A1$ e tecle Enter.
- Cálculo do saldo no segundo mês: na célula $B2$, digite: $= \$A\$1 + (1,005) * B1$ e tecle Enter.

  Na fórmula digitada acima podemos perceber que somamos a célula $A1$, que representa a 2^a parcela, ao saldo anterior corrigido, ou seja, com o acréscimo de $0,5\%$ sobre o saldo anterior.

- Cálculo do saldo nos meses seguintes: posicione o cursor no quadradinho do canto inferior direito da célula $B2$, clique e arraste até a célula $B36$.

  Observe que a representação de $A1$ com o uso do \$ antes do A e do 1 é um artifício das planilhas eletrônicas que nos permite fixar esta célula na fórmula. Assim, quando "arrastamos" a fórmula para preencher as células seguintes podemos perceber que as fórmulas ao longo da coluna B variam em função da célula anterior, mas $A1$ se mantém fixo. Isto é desejável pois $A1$ representa o valor da parcela que será depositada mensalmente, e este valor será fixo ao longo do período.

- Agora basta digitar valores em $A1$, experimentando parcelas maiores ou menores até que o saldo apresentado na coluna $B36$ seja o mais próximo possível do valor desejado.

Apresentamos, a seguir, três simulações para valores diferentes de depósitos mensais.

	A	B	C	D	E	F
1	Valor suposto - R$ 620,00					
2	1º	1243,1	13º	8967,82	25º	16466,65
3	2º	1869,3155	14º	9632,659	26º	17168,98
4	3º	2498,662078	15º	10300,82	27º	17874,83
5	4º	3131,155388	16º	10972,33	28º	18584,2
6	5º	3766,811165	17º	11647,19	29º	19297,12
7	6º	4405,645221	18º	12325,42	30º	20013,61
8	7º	5047,673447	19º	13007,05	31º	20733,68
9	8º	5692,911814	20º	13692,09	32º	21457,35
10	9º	6341,376373	21º	14380,55	33º	22184,63
11	10º	6993,083255	22º	15072,45	34º	22915,56
12	11º	7648,048671	23º	15767,81	35º	23650,13
13	12º	8306,288915	24º	16466,65	36º	24388,39

Valor suposto - R$ 650,00					
1º	1303,25	13º	8708,206	25º	17263,42
2º	1959,76625	14º	9401,747	26º	17999,74
3º	2619,565081	15º	10098,76	27º	18739,74
4º	3282,662907	16º	10799,25	28º	19483,44
5º	3949,076221	17º	11503,25	29º	20230,86
6º	4618,821602	18º	12210,76	30º	20982,01
7º	5291,91571	19º	12921,82	31º	21736,92
8º	5968,375289	20º	13636,43	32º	22495,61
9º	6648,217165	21º	14354,61	33º	23258,08
10º	7331,458251	22º	15076,38	34º	24024,37
11º	8018,115542	23º	15801,76	35º	24794,5
12º	8306,288915	24º	16530,77	36º	25568,47

Valor suposto - R$ 636,00					
1º	1275,18	13º	8520,645	25º	16891,6
2º	1917,5559	14º	9199,248	26º	17612,06
3º	2563,14368	15º	9881,244	27º	18336,12
4º	3211,959398	16º	10566,65	28º	19063,8
5º	3864,019195	17º	11255,48	29º	19795,11
6º	4519,339291	18º	11947,76	30º	20530,09
7º	5177,935987	19º	12643,5	31º	21268,74
8º	5839,825667	20º	13342,72	32º	22011,08
9º	6505,024796	21º	14045,43	33º	22757,14
10º	7173,54992	22º	14751,66	34º	23506,93
11º	7845,417669	23º	15461,42	35º	24260,46
12º	8306,288915	24º	16174,72	36º	25017,76

Problema 3: O Estado do Rio de Janeiro oferece duas possibilidades para o pagamento anual do IPVA. O pagamento pode ser feito em 3 parcelas mensais iguais ou pela cota única, com desconto de 10% sobre a soma das parcelas. Quanto o estado cobra de Juros para financiar esse imposto?

O objetivo desse problema é trabalhar o conceito do valor presente. Este problema é retirado de uma situação real e demonstra ao aluno que há juros embutidos mesmo quando se fala em parcelamentos que aparentemente não possuem juros. Podemos observar que o problema recai numa equação do 2° grau, podendo facilmente ser resolvida algebricamente. Entretanto, em situações de parcelamentos maiores (como, por exemplo, para o pagamento de IPTU) cairíamos em equações de grau maior do que 2, necessitando de auxilio tecnológico para a resolução das mesmas.

Solução: Sendo P a parcela, o valor total será de $3P$. Portanto, o contribuinte que pagar a vista deverá pagar 90% de $3P$. Trazendo as prestações para o momento presente, obteremos a seguinte situação

$$0,9 \cdot 3P = P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2}.$$

Vamos resolver esse somatório de forma direte, utilizando o conceito de mínimo múltiplo comum (MMC).

$$\begin{aligned}
&2,7P(1+i)^2 = P(1+i)^2 + P(1+i) + P \\
&\Longrightarrow 2,7 + 5,4i + 2,7i^2 = 3 + 3i + i^2 \\
&\Longrightarrow 1,7i^2 + 2,4i - 0,3 = 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, o problema recai em uma equação do segundo grau e, mais uma vez, sugerimos a utilização de calculadora para a realização dos cálculos, chegando a $i = 0,115$, ou seja, $11,5\%$.

Observação 3.2.2. Observe que se tivéssemos mais uma parcela no somatório cairíamos numa equação do terceiro grau e, assim, a sua resolução, mesmo com a utilização de uma calculadora científica, se tornaria mais difícil. Uma alternativa para essa situação é a resolução da equação por intermédio do Maple - um software que permite resolver equações e desenhar seus gráficos, entre outras atribuições - como descrevemos a seguir:

- Abra uma janela do Maple e observe os seguintes símbolos que você precisa conhecer inicialmente:

  · [> indica que o Maple está pronto para receber um comando.

· Utilizamos:

  · := para relacionar a equação ao nome (no nosso caso, escolhemos "eq")

  · / para divisão

  · $*$ para multiplicação

  · ˆ para atribuir um expoente

  · ; para finalizar a linha digitada

· O Maple entende que % é o último resultado apresentado.

- Digite:

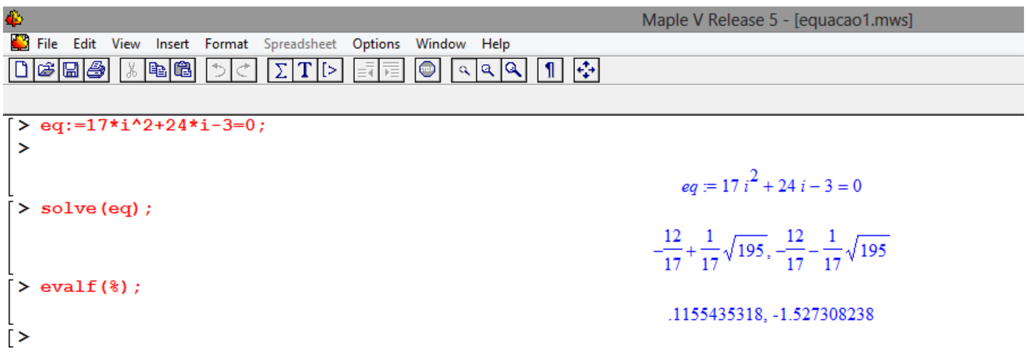
$$eq := 17 * i\hat{\ }2 + 24 * i - 3 = 0;$$

  e tecle Enter.

- Digite: $solve(eq)$; e tecle Enter.

- Observe que o Maple retornará as raízes com frações e radicais. Para obter o valor aproximado das raízes digite $evalf(\%)$; e tecle Enter.

- Após a execução dos comandos você deve encontrar os seguintes resultados:



Note que um deles é negativo e não faz sentido para ser a taxa de juros. Então, a taxa que procuramos é aproximadamente $0,115$ ou $i = 11,5\%$.

Problema 4: Uma pessoa comprou um carro de $R\$23.000,00$, a pagar em 24 prestações mensais fixas de $R\$1170,60$ cada, caracterizando uma amortização pelo sistema Price. Logo após ter pago a décima prestação, a pessoa propõe encurtar o prazo de financiamento. Para tanto deve pagar $R\$10.000,00$ e o saldo em 4 prestações mensais iguais com a mesma taxa de juros do financiamento inicial. Ela quer saber a taxa de juros do financiamento, quanto falta pagar ainda do principal logo após o pagamento da décima prestação, o valor de cada uma das quatros prestações finais, o total de juros e a amortização paga nas últimas 4 prestações.

Esse problema tem por objetivo trabalhar o sistema de amortização no ensino médio e o conceito de valor presente, muito comuns em problemas do dia a dia. Utilizamos nesse exemplo a Tabela Price perfeitamente integrado ao conteúdo do ensino médio, mostrando claramente a utilidade das ferramentas tecnológicas para a resolução de problemas de Matemática Financeira. A construção das planilhas eletrônicas representam um ganho significativo na analise dos dados, permitindo simular, por exemplo, o financiamento com outra taxa, sem precisar refazer toda a planilha.

Solução:

Inicialmente, desejamos descobrir a taxa mensal de juros do financiamento.

Trazendo todas as prestações para a data do pagamento da primeira prestação temos a seguinte equação:

$$23000 = \frac{1170,60}{1+i} + \frac{1170,60}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1170,60}{(1+i)^{24}}.$$

Colocando o valor da prestação em evidencia e aplicando a soma da PG do lado direito temos:

$$\frac{23000}{1170,60} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^{24} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

e, portanto,

$$1 - \frac{1}{(1+i)^{24}} - \frac{23000}{1170,60} i = 0$$

Para resolver esta equação do 25° grau, precisamos de um recurso tecnológico. Vamos utilizar o Maple, conforme descrição a seguir:

- Abra uma janela do Maple.

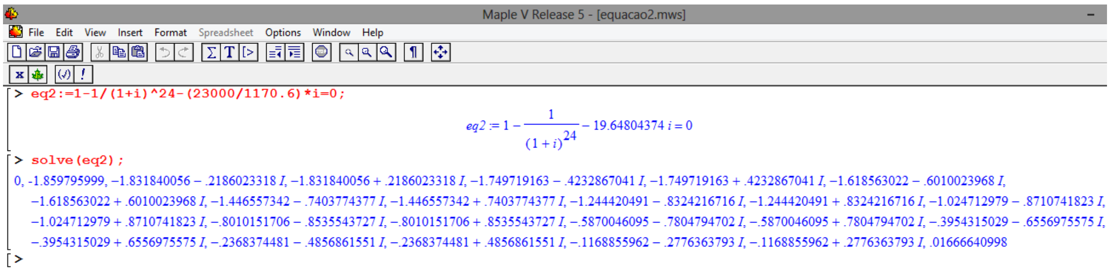
- Digite, após o símbolo de entrada,

$$eq2 := 1 - 1/(1+i)\hat{\ }24 - (23000/1170.6) * i = 0;$$

  e tecle Enter.

- Na linha de baixo, digite $solve(eq2)$; e tecle Enter.

- Você deve encontrar os seguintes resultados:



O Maple resolveu a equação e nos informou as 25 soluções, dentre as quais há uma nula, uma real negativa, 22 não reais e uma real positiva. A que nos interessa é a real positiva. Então a taxa de juros mensal do financiamento é $0,016667$ aproximadamente, ou seja: $i = 1,6667\%$.

Agora desejamos calcular o valor da dívida após pagar as 10 primeiras prestações. Para isto, vamos utilizar uma planilha eletrônica (utilizamos o Microsoft Excel), conforme os passos descritos a seguir:

- Abra uma planilha eletrônica.

- Para que nossa planilha fique organizada, digite: **Mês** em $A1$, **Prestação** em $B1$, **Juros** em $C1$, **Amortização** em $D1$ e **Dívida** em $E1$.

- Preencha a coluna A com os meses de 0 a 10, a partir de $A2$; Digite o valor da prestação $1170,60$ da célula $B3$ até $B12$ (lembre-se que as prestações são iguais). Preencha o valor da dívida no mês 0, digitando 23000 na célula $E2$.

- Vamos calcular os juros embutidos na prestação do primeiro mês. Na célula $C3$, digite $= 0,016667 * E2$ e tecle Enter.

- O valor da dívida a ser amortizado no primeiro mês é a diferença entre a prestação e os juros. Assim, digite na célula $D3 := B3 - C3$ e tecle Enter.

- Finalmente, a situação da dívida após o primeiro mês pode ser calculada, diminuindo da dívida original o valor amortizado. Digite na célula $E3 := E2 - D3$ e tecle Enter.

- A tabela está quase pronta. Posicione o cursor no quadradinho do canto inferior direito da célula $C3$, clique e arraste até a célula $C12$. Repita o processo e arraste a fórmula de $D3$ até $D12$ e, finalmente, a fórmula de $E3$ até $E12$.

- Sua planilha deverá ficar assim:

L22 fx

	A	B	C	D	E	F	G
1	Mês	Prestação	Juros	Amortização	Dívida		
2	0	-	-	-	23000		
3	1	1170,6	383,341	787,259	22212,741		
4	2	1170,6	370,2197542	800,3802458	21412,36075		
5	3	1170,6	356,8798167	813,7201833	20598,64057		
6	4	1170,6	343,3175424	827,2824576	19771,35811		
7	5	1170,6	329,5292257	841,0707743	18930,28734		
8	6	1170,6	315,5110991	855,0889009	18075,19844		
9	7	1170,6	301,2593324	869,3406676	17205,85777		
10	8	1170,6	286,7700315	883,8299685	16322,0278		
11	9	1170,6	272,0392374	898,5607626	15423,46704		
12	10	1170,6	257,0629251	913,5370749	14509,92996		
13							
14							

Concluímos, portanto, que após o $10°$ pagamento o valor da dívida é $R\$14509,92$.

A pessoa deseja encurtar o tempo do financiamento com um pagamento único de $R\$10000,00$ e o restante em 4 prestações iguais, com mesma taxa de juros. A equação que representa este novo financiamento é:

$$14509,93 = 10000 + \frac{P}{1,016667} + \frac{P}{(1,016667)^2} + \frac{P}{(1,016667)^3} + \frac{P}{(1,016667)^4}$$

Simplificando e aplicando a soma da PG obtemos:

$$4509,93 = \frac{P}{1,016667} \frac{\left(\frac{1}{1,016667}\right)^4 - 1}{\frac{1}{1,016667} - 1},$$

de onde concluímos que:

$$P = 4509,93\frac{-0,016667}{\frac{1}{1,016667^4}-1}.$$

Com uma calculadora científica podemos facilmente calcular o valor de P, digitando:

4	5	0	9	$\cdot$	9	3	$\times$	(	$-$	,	0	1	6	6	6	7	)	$\div$
(	1	$\div$	(	1	,	0	1	6	6	6	7	)	ˆ	4	$-$	1	)	$=$

e obtendo $R\$1174,85$.

Para encontrar o total pago em juros e o total amortizado da dívida podemos voltar à planilha eletrônica, inserindo os novos dados, de modo análogo ao da planilha anterior.

- Preencha as células $A14$ até $A18$ com os meses, de 0 a 4. Preencha a célula $E14$ com o valor da dívida: $4509,93$ (observe que já descontamos os $R\$10000,00$ utilizados para amortizar a dívida). Preencha as células $B15$ até $B18$ com o valor das parcelas: $1174,85$.
- Na célula $C15$, digite $= 0,016667 * E14$ e tecle Enter.
- Na célula $D15$ digite $= B15 - C15$ e tecle Enter.
- Na célula $E15$, digite $= E14 - D15$ e tecle Enter.
- Arraste a fórmula de $C15$ ao longo da coluna C até a célula $C18$. Repita o processo arrastando a fórmula de $D15$ ao longo da coluna D até a célula $D18$, e de $E15$ até $E18$.
- Para calcularmos o total de juros pagos, digite, na célula $C19$, $= soma(C15 : C18)$ e tecle Enter.
- Para calcularmos o total amortizado, digite, na célula $D19$, $= soma(D15 : D18)$ e tecle Enter.
- A planilha encontrada deverá ser a seguinte:

C27 f_x

	A	B	C	D	E	F	G
13							
14	0				4509,93		
15	1	1174,85	75,167003310000	1099,682996690000	3410,247003310000		
16	2	1174,85	56,838586804168	1118,011413195830	2292,235590114170		
17	3	1174,85	38,204690580433	1136,645309419570	1155,590280694600		
18	4	1174,85	19,260223208337	1155,589776791660	0,000503902938		
19							
20							
21							
22							

De onde verificamos que o total de juros pagos foi de $R\$189,47$ e o total amortizado foi $R\$4509,93$.

Os problemas apresentados aqui são perfeitamente adaptáveis a sala de aula, pois abrangem conteúdos do Ensino Médio. O aluno não simplesmente aplicará fórmulas, ele deverá ser estimulado a pensar e desenvolver melhores meios para obter a solução de cada problema.

Nesta proposta de aula apresentamos um problema para explorar cada conteúdo utilizando ferramentas tecnológicas. No entanto, a nossa proposta se constitui na apresentação de uma filosofia de aula e é bastante salutar que o professor busque novos exemplos, igualmente contextualizados e concretos, para que o aluno tenha uma maior fixação dos conteúdos apresentados.

4 Consideraçõs Finais

Este trabalho complementa o plano de aula apresentado por Gisele Valle de Farias em "*A Matemática Financeira na Educação Básica e usa importância para a formação de um cidadão consciente*" e se encerra com a esperança de ter contribuído com ideias e motivações para o ensino de matemática financeira através da utilização de tecnologias. Espera-se que os professores se inspirem nesta proposta para recriar ou buscar novas propostas, igualmente fundamentadas, atingindo assim o objetivo maior de formação do aluno como cidadão, ensinando-os a serem mais críticos com o uso do dinheiro.

Ao ensinar aos alunos a utilização das ferramentas tecnológicas estamos promovendo um acréscimo de habilidades, trazendo para a sala de aula a vida real sem máscaras, criando a desejada ponte entre o conhecimento adquirido na escola e a matemática necessária para o dia a dia. Desta forma, deixamos nossa contribuição para a redução de tantas desigualdades e injustiças.

Finalizamos com duas citações do grande filósofo e educador brasileiro Paulo Freire:

> "A teoria sem a prática vira 'verbalismo', assim como a prática sem teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade."
>
> "É fundamental diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, de tal forma que, num dado momento, a tua fala seja a tua prática".

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 9394/1996.

[2] BRASIL, Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[3] Dante, L.R., *Matemática - Volume Único*, 1^a Ed. São Paulo: Ática, 2005.

[4] GOULART, M.C. *Matemática no Ensino Médio*, São Paulo: Scipione, 1999.

[5] Lima, E., Carvalho, P.C., Morgado, A., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio, vol. 2*, 6^a Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] Nasser, L., *Matemática Financeira para a escola básica: uma abordagem prática e visual*, 2^a Ed. Projeto Fundão/UFRJ. Rio de Janeiro, 2012.

[7] PAIVA, M., *Matemática, Volume único* 1^a Ed. São Paulo: Moderna, 1999.

[8] Porta do Professor - Ministério da Educação 2008, disponível em http://portaldoprofessor.mec.gov.br (acessado em 23/03/2013)

[9] SAMANEZ, C.P. *Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos*, 3^a Ed. São Paulo: Prentice Hall, 2002

[10] dos SANTOS, C.A.M., GENTIL, N., GRECO, S.E. *Matemática. Novo Ensino Médio*, 7^a Ed. São Paulo: Ática ,2003.

[11] Silva, H.O., *Os Juros Moratórios sob a Égide do Novo Código Civil*, disponível em http://www.apmbr.com.br (acessado em 23/03/2013)

[12] SMOLE, K.C.S., DINIZ, M.I.S.V. *Matemática Ensino Médio, Volume 2* 6^a Ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

Softwares Utilizados

[13] Maple V Release 5. Versão 5, 27 de novembro 1997. Waterloo Maple Inc.

[14] Microsoft Excel 2010. Microsoft Corporation.