Universidade Estadual de Londrina

JULIO CEZAR RODRIGUES DE OLIVEIRA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

LONDRINA
2015

JULIO CEZAR RODRIGUES DE OLIVEIRA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profª. Drª. Pamela Emanueli Alves Ferreira.

LONDRINA
2015

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Oliveira, Julio Cezar Rodrigues de Oliveira.
UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS / Julio Cezar Rodrigues de Oliveira Oliveira. - Londrina, 2015.
127 f.

Orientador: Pamela Emanueli Alves Ferreira Ferreira.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática. Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Resolução de Problemas. Ensino de Logaritmos. - Teses. I. Ferreira, Pamela Emanueli Alves Ferreira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

JULIO CEZAR RODRIGUES DE OLIVEIRA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE LOGARITMOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profª Drª. Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina

____

Profª. Drª. Loreni Aparecida Ferreira Baldini
Secretaria de Estado da Educação – PR

____

Prof. Dr. Bruno Rodrigo Teixeira
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 27 de novembro de 2015.

A todos aqueles que em mim acreditaram
e me fizeram acreditar.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus pela fé e perseverança que nesses últimos anos me acompanharam na busca de meus ideais, que não me desamparou em nenhum momento e que, mesmo nos tempos mais difíceis, Ele não me deixou esmorecer, me dando sempre um motivo para seguir em frente.

Quero também agradecer à minha família, que esteve sempre ao meu lado e me apoiou em minhas escolhas e decisões. Agradeço ainda aos meus amigos, que não só nos momentos felizes, mas também nos mais difíceis, estiveram de alguma forma presentes, me dando conselhos e lembrando-me que em um futuro não muito distante todo o esforço será recompensado, que tudo isso valerá a pena – e com a concretização deste trabalho, posso dizer que já está valendo.

Ao meu melhor amigo, e muito mais que amigo, Emerson Tortola, que sempre me apoiou em todas as decisões que tomei, e que serve de inspiração enquanto professor e enquanto pessoa.

Aos meus amigos, que me ofereceram suporte e apoio nesse período de curso, compreendendo quando precisei me ausentar, Talita, Camila e Paulo Henrique, com suas valiosas contribuições nas discussões que tivemos sobre a dissertação.

À professora Loreni Aparecida Ferreira Baldini que, em 2010, fez com que eu acreditasse que um dia poderia chegar a um curso de mestrado, e é minha grande inspiração enquanto professora.

Aos amigos do PROFMAT, presentes nos momentos fáceis e difíceis nessa jornada, que não são apenas colegas de turma, mas grandes companheiros nessa jornada: Anna Barth, Camila Modesto, João Paulo Chiarotti, Frank Bortolotti, Matheus Mota, Mário Cesar, Tony, Silvio e principalmente a dois grandes amigos que conheci no PROFMAT, Danilo Auguto e Gil Leal.

Neste momento, não posso deixar de lembrar e agradecer aos meus professores da graduação, que fizeram e fazem parte da minha formação: Sérgio, Letícia, José Ricardo, André, Daniela, Fábio, Jairo, Giuliane, Edimar e Adriano.

Aos professores do PROFMAT, que com suas lições, contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho: Lucy, Neuza, Michele, Eliandro, Túlio, Mastine, Adeval, Ulysses, Ana Márcia, Neyva, e Pamela.

Aos membros do GEPEFOPEM, que me acolheram desde o primeiro dia no grupo e que, com suas contribuições nos cafezinhos, me deram sugestões norteadoras para essa pesquisa.

Aos professores Loreni Aparecida Ferreira Baldini e Bruno Rodrigo Teixeira, por aceitarem fazer parte da banca desse trabalho e pelas críticas e sugestões, que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

E, claro, não podia deixar de agradecer, de modo muito especial, à minha orientadora, a professora Pamela Emanueli Alves Ferreira, pela oportunidade que me ofereceu, por toda a paciência, cobranças, correções, produções, ensinamentos e várias lições que me proporcionou.

Enfim, quero agradecer a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a concretização deste trabalho.

“Comece fazendo o que é necessário, depois o que é possível, e de repente você estará fazendo o impossível.”

São Francisco de Assis

OLIVEIRA, Julio Cezar Rodrigues de. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o Ensino de Logaritmos na Perspectiva da Resolução de Problemas**. 2015. 127 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino de logaritmos, na perspectiva de Simon (1995), por meio da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2011). Para fundamentar o trabalho teoricamente, articulamos a perspectiva de Onuchic e Allevato (2011) com o modelo para a resolução de um problema proposto por Polya (1994) e as fases de uma lição apresentadas por Van de Walle (2009). Com esse trabalho pretendemos responder à seguinte questão de investigação: quais são as possíveis contribuições de uma THA para o ensino de logaritmos e suas propriedades operatórias? Nesse sentido, estabelecemos como objetivos apresentar uma THA na perspectiva da Resolução de Problemas e analisar suas possíveis contribuições. A partir da elaboração dessa THA são realizadas análises de cunho interpretativo acerca das suas possíveis contribuições para o ensino de logaritmos. Como resultado, acreditamos que a elaboração e exploração dessa THA por meio da Resolução de Problemas têm potencial para o ensino de logaritmos e suas propriedades, e para a formação de professores, pois fornece subsídios tanto teóricos como práticos para que o professor trabalhe com esse conteúdo nessa perspectiva.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem. Resolução de Problemas. Ensino de Logaritmos.

OLIVEIRA, Julio Cezar Rodrigues de. **A Hypothetical Learning Trajectory for the Teaching of Logarithms in the perspective of Problem Solving**. 2015. 127 f. Dissertation (Professional National Masters in Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

In this paper we present a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) for the teaching of logarithms, in Simon's perspective (1995), through the methodology of Math Teaching-Learning-Evaluation through Problem Solving proposed by Onuchic and Allevato (2011). In order to support the paper theoretically, we link Onuchic's and Allevato's (2011) perspective with the model for solving a problem proposed by Polya (1994) and the phases of a lesson presented by Van de Walle (2009). With this paper we intend to answer the following research question: which are the possible contributions of a HLT for the teaching of logarithms and their operatory properties? In this sense, we establish as objectives to present a HLT in the perspective of Problem Solving and to analyze its possible contributions. From the development of this HLT we perform interpretative analysis about their possible contributions to the teaching of logarithms. As a result, we believe that the development and exploitation of this HLT through Problem Solving has the potential for the teaching of logarithms and their properties, and for teaching education, because it provides theoretical and practical support for the teacher to work with this content in this perspective.

Key-words: Mathematcis Education. Hypothetical Learning Trajectories. Problem Solving. Logarithms Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

DELINEANDO OS CAMINHOS DA PESQUISA

APRESENTAÇÃO DO TEMA E JUSTIFICATIVA

Durante três séculos os logaritmos desempenharam um papel importante na matemática, o de simplificar o cálculo aritmético, possibilitando que se efetuasse com rapidez e precisão, operações como a multiplicação de dois números com muitos algarismos, ou uma potenciação com expoente fracionário (LIMA, 2010). No entanto, com o advento das calculadoras, o papel do logaritmo como "simplificador de cálculos" deixou de ser tão interessante para a matemática, mas ainda assim, os logaritmos continuam, por diferentes motivos, a merecer uma posição de destaque no ensino da Matemática, principalmente devido à posição central que ocupam em suas aplicações.

Segundo Lima (2010), essa posição é permanente uma vez que a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, constituem a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento ou decrescimento é proporcional à quantidade daquela grandeza existente em dado momento.

O ensino de logaritmos é discutido nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que propõem que o ensino de logaritmos é pertinente quando abordado por meio de alguns problemas de aplicação, tais como o crescimento populacional, o cálculo de juros e correção monetária, entre outros (BRASIL, 2002).

Nesse sentido, acreditamos que a presente pesquisa é pertinente, pois representa uma alternativa para o ensino de logaritmos, por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), que pode fornecer subsídios para a preparação de uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas (RP).

A opção pela elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) deu-se porque acreditamos que ela tem potencial para que o professor possa ir além da elaboração de um plano de aula e reflita a respeito de suas ações e das possíveis ações dos estudantes em sala de aula. Uma THA pode ser brevemente definida como um planejamento que o professor faz com base em suas experiências anteriores enquanto professor e enquanto estudante, ao considerar as possíveis dúvidas que os estudantes podem apresentar em uma aula de determinado conteúdo. Na THA o professor leva em conta três componentes: o objetivo que ele tem para a aprendizagem, o plano que ele elabora com as atividades de aprendizagem, e o processo hipotético de aprendizagem, que descreve como o pensamento e a compreensão dos estudantes evoluirão no contexto das atividades de aprendizagem (SIMON, 1995).

Ao optar pela Resolução de Problemas, acreditamos que essa perspectiva de ensino é potencial para ser articulada com uma THA, uma vez que ambas se complementam e trazem aspectos relevantes tanto para o papel dos estudantes quanto para o papel do professor em uma aula de matemática.

A fundamentação teórica desta pesquisa é representada pela Resolução de Problemas na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011), e pelas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) na perspectiva de Simon (1995). Pretendemos responder a seguinte questão: quais são as possíveis contribuições de uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos e suas propriedades operatórias?

Para responder a questão, traçamos como objetivos:

- apresentar uma alternativa para o ensino de logaritmos, por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) na perspectiva da Resolução de Problemas e analisar suas possíveis contribuições.

Estrutura do Texto

O texto deste trabalho está organizado em quatro capítulos e aborda aspectos teóricos e metodológicos que tomamos como base para realização da pesquisa e que nortearam o seu desenvolvimento, bem como as análises e considerações finais obtidas a partir dela.

No primeiro capítulo, apresentamos um panorama geral do ensino de matemática no século XX citando algumas das reformas no ensino dessa disciplina, para introduzir a perspectiva de Onuchic e Allevato (2011) da metodologia[1] de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através[2] da resolução de problemas e buscar uma articulação dessa metodologia com o modelo de Polya para a resolução de um problema e com as fases propostas por Van de Walle (2009).

No segundo capítulo, descrevemos as trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA) na perspectiva de Simon (1995), suas características e aspectos de como essas trajetórias podem representar um papel importante no planejamento do professor.

No terceiro capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos para a realização dessa pesquisa.

No quarto capítulo, propomos uma THA para o ensino de logaritmos e suas propriedades operatórias a partir de um problema. A THA foi elaborada na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011) da Resolução de Problemas, articulando-a com o modelo de Polya (1994) e as fases de uma lição propostas por Van de Walle (2009), de modo que essa THA possa ser utilizada para introduzir o conceito de logaritmo e de suas propriedades operatórias. Apresentamos também outros problemas que podem ser utilizados nessa perspectiva, destacando alguns conteúdos que podem ser abordados em cada um deles.

Nas considerações finais, tecemos alguns comentários e reflexões sobre a importância do ensino de logaritmos e das possíveis contribuições dessa trajetória hipotética de aprendizagem.

[1] Ao longo do texto respeitaremos o termo "metodologia" adotado pelas autoras. No entanto, ao nosso ver, acreditamos ser mais adequado considerar a Resolução de Problemas como uma "estratégia metodológica", uma vez que a palavra metodologia remete ao estudo do método.

[2] Utilizamos a palavra "através" no mesmo sentido defendido por Onuchic (2008), com o seguinte significado: "no decorrer de". Esse significado refere-se à tradução da palavra "through", que significa: completamente, totalmente, do princípio ao fim. Assim, quando nos referimos à metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, estamos atribuindo o mesmo sentido que a metodologia de ensino de Matemática "a longo de toda a" resolução de determinado problema.

CAPÍTULO 1

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

1.1 OS PROBLEMAS

Os currículos de matemática são compostos por problemas que ocupam sua parte central desde a Antiguidade, passando pelo Egito Antigo, China e Grécia, no entanto o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas passou a receber atenção de educadores matemáticos apenas nas últimas décadas (STANIC; KILPATRICK, 1989).

Segundo Onuchic (1999), a resolução de problemas ganhou relevância para a pesquisa em Educação Matemática, apenas nas últimas décadas do século XX, e a partir de então os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da habilidade de se resolver problemas merece mais atenção.

Para compreender a resolução de problemas como uma estratégia metodológica, vamos primeiramente apresentar algumas definições da literatura dadas à palavra "problema".

Van de Walle (2009) define problema como

> qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Onuchic e Allevato (2012, p. 240) definem problema como "tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer". Para Dante (1989, p.9), "problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la".

Para as autoras Vale e Pimentel (2004), é difícil definir "problema" porque, em um dado momento um estudante pode considerar que resolverá um problema, quando não sabe resolver ainda, mas em outro momento, quando já sabe como proceder para resolvê-lo, pode estar resolvendo apenas um exercício. Elas definem problema como "uma situação para a qual não se dispõe, à partida, de um procedimento que nos permita determinar a solução, sendo a resolução de problemas o conjunto de ações tomadas para resolver essa situação" (VALE; PIMENTEL, 2004, p.12).

Para Marincek (2001) é possível definir problema como uma situação na qual os estudantes precisam pôr em jogo o conhecimento que já possuem, mas que traz também algo novo, para o qual eles não possuem uma resposta imediata e é necessária uma busca pelas soluções. Nesse movimento de busca por soluções que os estudantes estabelecem novas relações e constroem novos conhecimentos que modificam os anteriores.

Com base nessas definições, consideramos que um problema é uma situação na qual, a princípio, os estudantes não sabem como proceder, mas que desperta neles o interesse, e a partir do conhecimento que eles possuem, eles podem constituir novos/outros conhecimentos para desenvolver uma ou mais resoluções para responder à situação inicial.

Uma vez apresentada nossa compreensão a respeito do que é um problema, na próxima seção apresentamos o modelo apresentado por George Polya (1994), que considera quatro fases para a resolução de um problema.

1.1.1 O Modelo de George Polya para a Resolução de um Problema

Em seu livro *A Arte de Resolver* Problemas, Polya (1994) sugere que podemos resolver um problema seguindo quatro fases: a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução desse plano e o retrospecto.

1.1.1.1 Compreensão do Problema

Ao ler um problema, os estudantes precisam dedicar sua atenção ao que está e ao que não está claro para eles. Quando não entendem o enunciado do problema, não faz sentido procurar uma solução e, nesse sentido, o papel do professor é garantir que os estudantes tenham compreendido o problema e também queiram resolver o problema.

Nesse sentido, o professor precisa escolher com cuidado os problemas para levar para a sala de aula, pode ser que precise fazer modificações de forma que os estudantes possam ter interesse em resolvê-lo e, além disso, é importante que o problema seja natural e interessante, nem muito simples ou muito complexo (POLYA, 1994).

Ao acreditar que compreendeu o problema, o estudante deve estar em condições de identificar as informações do enunciado, e qual é a questão do problema que precisa responder. Polya (1994) descreve algumas ações que possibilitam a compreensão do enunciado de um problema, nas quais o estudante

> deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá traçar uma figura e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, deverá adotar uma notação adequada, pois, dedicando alguma atenção à escolha dos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos (POLYA, 1994, p. 4).

A fase compreensão do problema pode ser subdivida em duas etapas: a *familiarização* e o *aperfeiçoamento da compreensão*. Nessas duas etapas, Polya (1994) responde às seguintes questões: *Por onde começar? Que posso fazer? Qual a vantagem de assim proceder?*

Na *familiarização*, o estudante compreende o problema de forma mais geral, considerando seus objetivos e dados mais relevantes. Na etapa do *aperfeiçoamento da compreensão*, o estudante consegue explicar o enunciado com suas próprias palavras e tem o problema claro em sua mente, em geral sabe distinguir se tem um problema de determinação[3] ou um problema de demonstração[4], e relaciona os detalhes que terão uma função a desempenhar na resolução do problema (POLYA, 1994).

1.1.1.2 Estabelecimento de um plano

Uma vez que o problema foi compreendido pelos estudantes, vem a segunda fase proposta por Polya (1994), na qual eles buscam elaborar um plano para tentar resolver o problema proposto. Para Polya (1994, p. 5), "o caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso".

Algumas indagações podem ser feitas pelo professor, tais como: *Vocês já viram esse problema antes? Resolveram algum semelhante a esse? É possível relacioná-los?* Ao serem questionados se já conhecem esse problema ou algum semelhante, os estudantes podem refletir a respeito dos que já resolveram e buscar relações com o recém apresentado.

É esperado que o objetivo dos estudantes seja elaborar um plano que possa resolver o problema, e para isso, pode ser que suas primeiras tentativas sejam infrutíferas, ou que tenham uma ideia de plano que surja gradualmente, conforme vão realizando suas tentativas, ou ainda pode ser que a ideia para a resolução do problema apareça repentinamente (POLYA, 1994). Quando os estudantes não conseguem chegar a uma ideia que permita a

[3] De acordo com Polya (1994, p.124) um problema de determinação tem como objetivo encontrar certo objeto, chamado incógnita do problema.
[4] De acordo com Polya (1994, p.124) o principal objetivo de um problema de demonstração é "mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou falsa. Para responder a pergunta "esta afirmativa é verdadeira ou falsa?", a provamos matematicamente utilizando uma demonstração ou a refutamos ao apresentar um contraexemplo.

elaboração de um plano, Polya (1994) sugere que o professor propicie discretamente aos estudantes uma ideia “luminosa” por meio de indagações e sugestões, sem deixar explícita qual ideia os estudantes podem utilizar.

> Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa ideia se pouco conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada soubermos. As boas ideias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa ideia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma ideia boa se não relembrarmos alguns fatos pertinentes. Não bastam os materiais para a construção de uma casa, mas não podemos construí-la sem lançar mão dos materiais necessários. Os materiais indispensáveis à resolução de um problema matemático são certos itens relevantes do conhecimento matemático já adquirido, tais como problemas anteriormente resolvidos e teoremas anteriormente demonstrados (POLYA, 1994, p. 6).

Nesse sentido, o professor deve valorizar o conhecimento que o estudante já possui para que ele tenha subsídios para elaborar planos para resolver problemas. Quando os estudantes consideram outros problemas que já sabem resolver, eles têm mais chances de elaborar um plano coerente para a resolução do problema proposto.

Essas sugestões podem contribuir para dar partida a uma resolução do problema, mas nem sempre ajudam. Se elas não funcionarem, outra estratégia possível é variar o problema, transformando-o em um problema mais simples, ao omitir ou acrescentar alguma informação, por exemplo. Segundo Polya (1994, p. 6), “a variação de um problema pode levar a um problema auxiliar adequado: *Se não conseguir resolver o problema, procure resolver algum problema correlato*”.

Para Polya (1994), é importante não perder o foco do problema ao modificá-lo por completo, de forma que a relação entre aquele apresentado e o problema modificado não seja mais relevante para a elaboração do plano, ou seja, ao modificar o problema não podemos perder de vista o problema apresentado inicialmente. Dessa forma, ao modificar o problema, tendo cuidado para não perder o foco daquele apresentado inicialmente, o professor possibilita que os estudantes façam relações entre ambos, de forma a criar condições para que eles consigam compreender primeiramente o problema “modificado” para que em seguida compreendam o problema proposto inicialmente.

1.1.1.3 Execução do Plano

Ao elaborar o plano, o estudante distingue o que fará em cada um dos passos desse plano, quais estratégias serão utilizadas e quais objetivos conseguirá atingir ao desenvolver essas estratégias. O plano é um roteiro geral que contém os detalhes inseridos em seus passos, e é importante que o estudante tenha examinado cada um desses detalhes, até que esteja claro para ele e não sobre detalhes que possam ocultar algum erro (POLYA, 1994).

> Se o estudante houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade. O maior risco é o de que o estudante se esqueça do seu plano, o que pode facilmente ocorrer se ele recebeu o plano de fora e o aceitou por influência do professor. Mas se ele próprio tiver preparado o plano, mesmo com alguma ajuda, e concebido com satisfação a ideia final, não perderá facilmente essa ideia. De qualquer maneira, o professor deve insistir para que o estudante verifique cada passo (POLYA, 1994, p. 9).

Em relação ao raciocínio do estudante na execução de cada passo do plano, ele precisa ter segurança a respeito daquilo que está fazendo. Para isso ele pode concentrar-se no passo em questão de modo que fique claro e que não haja dúvida que este passo está correto ou que pelo menos compreenda o porquê de estar fazendo aquilo, ou ainda, ele pode também deduzir algum passo por meio de regras formais (como as demonstrações, por exemplo).

1.1.1.4 Retrospecto

Nessa fase, os estudantes têm a oportunidade de analisar todo o problema, revisando cada um dos passos, desde a compreensão do problema até a resposta, verificando também se está de fato respondendo a questão central levantada no problema.

> Até mesmo estudantes razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo, eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho da resolução. Se fizerem uma reflexão da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus estudantes o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução (POLYA, 1994, p. 10).

Corroboramos com o autor sobre a importância dessa fase para a resolução de um problema, até mesmo para que os estudantes possam comparar suas resoluções e analisar quais são as semelhanças e diferenças nas estratégias que adotaram, de modo que possam avaliar qual é a forma mais simples para cada um deles e se fariam diferente ou não depois de saber como seus colegas resolveram o problema.

O professor pode também encorajar os estudantes a imaginar outros problemas semelhantes nos quais poderiam utilizar a mesma ideia ou estratégia para a sua resolução. Dessa forma, os estudantes podem começar a relacionar problemas semelhantes com o intuito de fazer uso dos recursos que utilizaram na resolução dos problemas que já resolveram.

Uma vez apresentadas algumas definições de problema e o modelo que Polya (1994) apresentou para a resolução de um problema, vamos discorrer na próxima seção algumas reformas que ocorreram no ensino de Matemática no século XX, partindo do movimento do ensino de Matemática por repetição, e chegando a Resolução de Problemas como uma estratégia para o Ensino de Matemática.

1.2 AS REFORMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA NO SÉCULO XX

O ensino de Matemática no século XX passou por algumas reformas, que tinham como objetivo melhorar o ensino da Matemática nas escolas. Essas reformas orientaram uma mudança das formas de trabalho dos professores, o papel dos estudantes e as relações entre professores, estudantes e o conteúdo matemático.

Onuchic (1999) resume as reformas no ensino de Matemática no século XX ao ressaltar que ao

> passar de uma sociedade rural, onde "poucos precisavam conhecer Matemática", para uma sociedade industrial onde mais gente "precisava aprender Matemática" em razão da necessidade de técnicos especializados, daí para uma sociedade da informação onde a maioria das pessoas "precisa saber Matemática" e, agora, caminhando para uma sociedade do conhecimento que exige de todos "saber muita Matemática", é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende Matemática (ONUCHIC, 1999, p. 200).

A autora aponta também que o ensino de Matemática ainda é marcado por altos índices de retenção, pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. Ela identifica alguns movimentos de reforma do ensino de Matemática que ocorrem no século XX: o ensino de Matemática por repetição, o ensino de Matemática com compreensão, a Matemática Moderna e a Resolução de Problemas.

1.2.1 O ensino de Matemática por repetição

No início do século XX, a repetição caracterizava o ensino de Matemática, e era importante que os estudantes memorizassem os conteúdos mais básicos como a tabuada.

O papel do professor consistia em passar as informações para os estudantes, que por sua vez, ouviam, escreviam, memorizavam e repetiam. A avaliação do desempenho dos estudantes era feita por meio da aplicação de testes nos quais eles deveriam repetir o que o professor havia feito. Os estudantes que conseguiam repetir as informações e os métodos apresentados pelo professor obtinham sucesso, e acreditava-se que esses estudantes haviam aprendido o conteúdo trabalhado (ONUCHIC, 1999).

Esse movimento trouxe forte influência para o ensino de Matemática. D'Ambrosio (1989) caracteriza uma aula de Matemática da seguinte forma

> sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. 0 estudante, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 1).

Ao descrever uma típica aula de Matemática, D'Ambrosio evidencia características apresentadas pelo movimento do ensino de Matemática por repetição. Ao estudar Matemática segundo esse modelo, pode ser que alguns estudantes tenham conseguido refletir sobre o que faziam, e quando isso acontecia, eles se tornavam "especiais", destacando-se em sala de aula, mas e quanto aos outros? A maioria dos estudantes esquecia com facilidade o que haviam memorizado em pouco tempo (ONUCHIC, 1999).

1.2.2 O ensino de Matemática com compreensão

Esse movimento surgiu nas primeiras décadas do século XX, descartando a reforma anterior e acreditando na ideia que os estudantes deveriam aprender Matemática com compreensão, ou seja, eles deveriam entender o que faziam.

Nesse período George Polya destacou-se ao argumentar que o principal objetivo da educação é o desenvolvimento da inteligência, ensinando os jovens a pensar. De seus trabalhos emergiu a visão da resolução de problemas como arte, que valoriza a "arte da descoberta" ao resolver um problema. A resolução de problemas passou a ser tratada como um tema de interesse para professores e estudantes a partir da publicação do livro "A Arte de Resolver Problemas", de Polya, no final da década de 1950 (ANDRADE, 1998).

Sobre a visão de Polya a respeito do papel do professor, Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que

> Polya assumia que nem a resolução de problemas por si só, sem uma orientação, conduz a um melhor comportamento, nem o estudo da Matemática pela sua natureza própria, nos eleva o nível geral de inteligência. Em vez disso, reconhecia que as técnicas de resolução de problemas precisam ser ilustradas pelo professor, discutidas com os estudantes e praticadas de uma maneira compreendida e não mecanizada. Além disso, ele observou que, embora os problemas de rotina pudessem ser usados para cumprir certas funções pedagógicas do ensino dos estudantes, para seguir um procedimento específico ou usar uma definição corretamente, só através de um uso judicioso de problemas não rotineiros podem os estudantes desenvolver a sua capacidade de "resolver problemas".
>
> Na formulação de Polya, o professor é a chave. Só um professor sensível pode estabelecer o tipo correto de problemas para uma dada aula e promover a quantidade de ajuda apropriada. Porque ensinar também é uma arte, ninguém pode programar ou mecanizar o ensino da resolução de problemas; ela permanece uma actividade humana que requer experiência, gosto e julgamento (STANIC; KILPATRICK, 1989 p. 7).

Nessa perspectiva, o professor deve estar atento ao seu papel e como ele pode influenciar a aprendizagem dos estudantes. Onuchic (1999, p. 201) aponta que

> o professor não havia sido preparado para seguir e trabalhar as ideias novas que queriam implementar. O trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas-padrão ou para aprender algum conteúdo novo (ONUCHIC, 1999, p. 201).

Consideramos que os professores podem ter reproduzido o mesmo modelo apresentado anteriormente, ao trabalhar com a repetição de técnicas operatórias para resolver problemas semelhantes, o que implica que quando os estudantes dominavam as técnicas apresentadas, seria possível concluir que eles aprenderam a resolver os problemas relacionados a determinado conteúdo. Porém, ao dominar uma técnica os estudantes podem não ter compreendido o conteúdo que estudaram, mas apenas memorizado os passos para resolver um problema padrão.

1.2.3 A Matemática Moderna

A reforma, conhecida como O Movimento da Matemática Moderna, surgiu nas décadas de sessenta e setenta, descartando as duas reformas anteriores, e assim como elas, não contou com a participação de professores de salas de aula, e o foco no ensino de Matemática era o excesso da formalização, o que distanciava a Matemática escolar das questões práticas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). Huanca (2006) descreve o movimento da Matemática Moderna da seguinte maneira

> [ela] apresentava uma Matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e utilizava uma linguagem universal, precisa e concisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado (HUANCA, 2006, p. 31).

Onuchic (1999) afirma que o ensino de símbolos e a terminologia complexa trazida pelo movimento da Matemática Moderna comprometia o aprendizado dos estudantes, porque o professor não tinha segurança com relação ao que dizia e os estudantes, por sua vez, não compreendiam a ligação entre as propriedades enunciadas, os problemas de Matemática e, principalmente, a Matemática usada fora das salas de aulas.

Para Onuchic e Allevato (2012), todas essas reformas não alcançaram o sucesso esperado, e as seguintes questões permaneceram:

- estas reformas tinham como objetivo a formação de um cidadão útil à sociedade na qual vivia?
- elas buscavam ensinar Matemática com o intuito de preparar os estudantes para o mercado de trabalho que exige conhecimento matemático?

Em resposta a essas questões, pretendemos apresentar a Resolução de Problemas como uma alternativa para o ensino de matemática.

1.2.4 A Resolução de Problemas

Na década de setenta, pesquisadores apresentaram investigações a respeito da Resolução de Problemas e suas implicações para os currículos, passando a considerar que o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas merecia mais atenção (STANIC; KILPATRICK, 1989). Onuchic aponta que a

> caracterização da Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade (ONUCHIC, 1999, p. 203).

As investigações sistemáticas a respeito da Resolução de Problemas e suas implicações curriculares iniciaram nos anos setenta, e tiveram influência dos trabalhos de

George Polya. A preocupação dos pesquisadores sobre a Resolução de Problemas deixou de ser apenas com os resultados apresentados pelos estudantes, e passaram a considerar o processo que levava aos resultados, com foco nas diferentes estratégias apresentadas (ANDRADE, 1998). Anteriormente, acreditava-se que os estudantes deveriam resolver grande quantidade de problemas do mesmo tipo, e a partir dessas pesquisas o ensino de resolução de problemas deixou de limitar-se apenas à busca pela solução.

Em 1980, foi publicado um documento do NTCM (*National Council of Teachers of Mathematics*[5]), chamado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of de 1980's*[6]. Para a elaboração desse documento, foram chamados todos que se interessavam em participar, para que juntos conseguissem buscar uma melhor Educação Matemática para todos.

Dentre as oito recomendações apresentadas no documento, a primeira delas afirmava que "resolver problemas deve ser o foco da matemática escolar para os anos 80", e recomendava também que é preciso preparar os estudantes para resolver os problemas que enfrentarão em suas próprias carreiras (ONUCHIC, 1999).

Durante a década de oitenta, muitos recursos em Resolução de Problemas foram desenvolvidos para apoiar o trabalho dos professores em sala de aula, tais como coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliação de desempenho. Devido à inserção desses recursos, os professores passaram a fazer da Resolução de Problemas o ponto central de seu trabalho (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012).

No entanto, não havia uma concordância acerca das concepções sobre a Resolução de Problemas e sobre o seu significado como foco da Matemática escolar. A expressão Resolução de Problemas havia se tornado um *slogan* que engloba diferentes visões do que é educação, escolaridade, Matemática, e as razões pelas quais devemos ensinar Matemática e Resolução de Problemas (STANIC; KILPATRICK, 1989).

A visão assumida por boa parte dos pesquisadores na década de 80 acerca da aprendizagem da Resolução de Problemas era uma visão era "muito estreita e limitada" (STANIC; KILPATRICK, 1989), pois se acreditava que ensinar a Resolução de Problemas significava apresentar problemas e as técnicas específicas para chegar à solução desses problemas.

> No último século, as discussões sobre o ensino da resolução de problemas moveu-se da defesa de que aos estudantes deve ser simplesmente apresentado com problemas

---

[5] Conselho Nacional de Professores de Matemática.
[6] Uma agenda para ação: Recomendações para a Matemática Escolar da década de 1980.

> ou com regras para a resolução de problemas particulares até ao desenvolvimento de aproximações mais gerais da resolução de problemas. Embora o ensino da resolução de problemas seja agora recebido com grande ênfase, os educadores de Matemática não examinaram totalmente a razão porque deveríamos ensinar a resolução de problemas. O papel da resolução de problemas nos currículos escolares de Matemática é o resultado do conflito entre forças presas às antigas e endurecidas ideias acerca dos lucros (vantagens) do estudo da Matemática e a variedade dos acontecimentos interativos que ocorrem próximo do princípio do séc. XX (STANIC; KILPATRICK, 1989, p. 2).

A expressão “Resolução de Problemas” era elegante, mas sua implementação nas salas de aula era superficial. Os editores de livros a adotaram em seus livros, mas a maior parte dos conteúdos dos livros era mantida da mesma forma, com exercícios similares para os estudantes praticarem e aprender por repetição. Os textos citavam Polya e as quatro fases que ele sugeriu para a resolução de um problema (compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer uma retrospectiva), do livro *A Arte de Resolver Problemas*. Na prática, a “Resolução de Problemas” era trabalhada como a resolução de um problema que demandava apenas um ou dois passos para a obtenção da solução (SCHOENFELD, 2007).

A partir do final da década de 80, o NTCM publicou os seguintes documentos:

1) *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Currículo e Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar, em 1989): esse documento foi elaborado como uma resposta ao pedido da comunidade de Educação Matemática por uma reforma no ensino e na aprendizagem de Matemática. Nesse sentido, foi criada a Comissão de Padrões para a Matemática Escolar (*Commission on Standards for School Mathematics*), que ao buscar descrever a Matemática que todos os estudantes devem saber e ser capazes de fazer, ficou responsável por duas tarefas:

(a) criar uma visão coerente do que significa ser matematicamente alfabetizado, tanto em um mundo que se baseia em calculadoras e computadores para realizar procedimentos matemáticos quanto em um mundo onde a matemática está crescendo rapidamente e está amplamente sendo aplicada em diversos campos.

(b) criar um conjunto de normas para orientar a revisão do currículo de matemática escolar e sua avaliação associados para essa visão.

2) *Professional Standards for Teaching Mathematics* (Normas Profissionais de Ensino da Matemática, 1991): apesar dos documentos previamente elaborados *An Agenda*

for Action: Recommendations for School Mathematics of de 1980's, em 1980, e do *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, em 1989, as pesquisas ainda mostravam que havia muitos obstáculos persistentes para realizar mudanças significativas no ensino e na aprendizagem de Matemática nas escolas.

Nesse sentido, o NTCM acreditou ser necessária uma orientação sobre como a matemática pode ser ensinada e aprendida para melhorar o desenvolvimento do "poder matemático" (*mathematical power*). Nesse sentido, elaboraram o documento *Professional Standards for Teaching Mathematics*[7], em 1991, baseados em duas suposições:

(a) os professores são peças-chave na mudança das formas em que a matemática é ensinada e aprendida nas escolas.

(b) tais mudanças exigem que os professores tenham apoio a longo prazo e recursos adequados.

Nesse sentido, o *Professional Standards for Teaching Mathematics* representa um conjunto de princípios acompanhados de ilustrações ou indicadores que podem ser usados para julgar o que é valioso e oportuno para os professores. Eles têm como objetivo fornecer orientação para todos os que estão interessados em repensar o ensino, incluindo professores, universidades, as secretarias estaduais de educação, os distritos escolares locais, as escolas particulares, as organizações de professores, entre outros.

3) *Assessment Standards for School Mathematics* (Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar, em 1995): esse documento foi produzido pelo NTCM baseado na necessidade do desenvolvimento de novas estratégias de avaliação, para que os professores pudessem avaliar o desempenho dos estudantes de modo a refletir a respeito da visão de reforma defendida pelo NTCM para a Matemática escolar. A visão do NTCM inclui a Matemática que se espera que os estudantes conheçam e sejam capazes de usá-la, a forma pela qual aprenderam, e como o seu progresso pode ser avaliado.

Este documento apresenta seis padrões que consistem em critérios que podem ser utilizados para avaliar as práticas de avaliação. Segundo o documento, a avaliação que incorpora a visão desses seis padrões representa um processo dinâmico que informa os professores e estudantes sobre o seu desempenho na disciplina, e também fortalece o crescimento do "poder matemático" de cada estudante. Os padrões apresentados no documento são:

---

[7] Padrões Profissionais para Ensinar Matemática.

(a) A avaliação deve refletir a matemática que todos os estudantes precisam saber e são capazes de fazer.

(b) A avaliação deveria ampliar a aprendizagem de matemática.

(c) A avaliação deve promover a equidade.

(d) A avaliação deveria ser um processo aberto.

(e) A avaliação deveria promover inferências válidas sobre a aprendizagem de matemática.

(f) A avaliação deve ser um processo coerente.

O NTCM sugeriu que os documentos elaborados previamente continuem a ser considerados, estudados e trabalhados, para que possam continuar a desenvolver novos sistemas de avaliação que sejam um suporte para as mudanças previstas no conteúdo e os documentos produzidos pelo NCTM.

> Esses *Standards* não pretendiam dizer, passo a passo, como trabalhar esses documentos. Ao contrário, queriam apresentar objetivos e princípios em defesa de que práticas curriculares, de ensino e de avaliação pudessem ser examinadas. Eles queriam estimular políticos educacionais, pais, professores, administradores, comunidades locais e conselhos escolares a melhorar os programas de Matemática em todos os níveis educacionais (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012, p. 236).

Nos Estados Unidos, esses documentos receberam duras críticas e deram início à mais "feroz" batalha sobre o currículo de Matemática, que ficou conhecida como *Math Wars* (Guerras Matemáticas). Um dos aspectos mais controversos dos *Standards* foi uma série de listas de tópicos que deveriam receber maior e menor atenção (SCHOENFELD, 2007).

O NTCM trabalhou sobre as críticas e sugestões recebidas e publicou em 2000 o documento *Principles and Standards for School Mathematics*[8], conhecido como *Standards 2000*. Este documento refina e elabora as mensagens originais dos documentos originais dos *Standards*, conservando intacta a sua visão básica (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012).

No Brasil, sob influência dos *Standards*, foram produzidos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), divididos em três documentos. Em 1997, foram elaborados os PCN de Matemática para o 1° e o 2° ciclos (1° ao 5° ano do Ensino Fundamental). Em 1998, foi produzido o PCN para o 3° e o 4° ciclos (6° ao 9° ano do Ensino Fundamental). E em 1999, foi publicado o PCN para o Ensino Médio, do qual destacamos

[8] Princípios e Padrões para a Matemática Escolar.

> [ao] se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de estudantes, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional. Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessária tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional (BRASIL, 1998, p. 40).

Onuchic e Allevato (2012, p. 238) apontam que "no que se refere ao ensino de Matemática, os PCN indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida das atividades Matemáticas". Essa afirmação é corroborada pelo recorte a seguir

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o estudante busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2002, p. 112).

Nesse sentido, no decorrer dos anos 90, a Resolução de Problemas começou a ser considerada como uma estratégia metodológica de ensino, e os pesquisadores passaram a discutir suas perspectivas didático-pedagógicas (ANDRADE, 1998). Os problemas passam a ser considerados como elementos que podem alavancar um processo de construção do conhecimento e nessa perspectiva, eles são formulados e propostos com o intuito de contribuir para a formação de conceitos antes da formalização do conteúdo matemático que subjaz a esses conceitos.

As pesquisas relacionadas à Resolução de Problemas como uma estratégia metodológica de ensino se expandiram e, para refletir as concepções a respeito da Resolução de Problemas, Shroeder e Lester (1989) apresentam três diferentes formas de abordar Resolução de Problemas:

Ensinar sobre a Resolução de Problemas: para os autores, quando um professor ensina sobre Resolução de Problemas, ele realça o modelo de Polya (1994), que apresenta quatro fases para a resolução de um problema. Nesse sentido, o professor ensina aos estudantes como passar por cada uma dessas fases, que segundo Polya (1994), possibilitam que os estudantes tornem-se conscientes de seu próprio progresso.

Ensinar para resolver problemas de Matemática: nesse caso, o professor trabalha os modos que a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas, que podem ser rotineiros ou não. Para Huanca (2006), ao ensinar Matemática para resolver problemas, o professor corre o risco de que os estudantes vejam a resolução de problemas apenas como uma atividade que só podem realizar depois da introdução de um novo conceito ou depois de praticar habilidades de cálculo.

Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas: nesse caso, os problemas são utilizados como um propósito para aprender Matemática e também como um meio importante de fazer isso. O ensino começa com um problema que traz aspectos essenciais do tópico matemático a ser introduzido, e a partir dessa situação as técnicas matemáticas são desenvolvidas para que o problema possa ser respondido.

> O ensino de Matemática através da resolução de problemas nos oferece uma experiência em profundidade, uma oportunidade de conhecer e delinear as dificuldades, de conhecer as capacidades e limitações do conhecimento matemático que os estudantes possuem. O ensino através da resolução de problemas coloca ênfase nos processos de pensamento, nos processos de aprendizagem e trabalha os conteúdos matemáticos, cujo valor não se deve deixar de lado. (HUANCA, 2006, p. 38)

Onuchic (1999) acredita que ao se ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, os problemas são importantes não somente para aprender novos conteúdos de Matemática, mas também são o primeiro passo para se fazer isso. Ao utilizar a metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, a autora afirma que o

> ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que começa com aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. Um objetivo de se aprender Matemática é o poder de transformar problemas não-rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica operatória) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos) (ONUCHIC, 1999, p. 207).

Acreditamos que é importante reconhecer que a Matemática pode e deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, o professor tem condições de partir de uma situação problema e também explorar novos conteúdos, revisitando conteúdos já estudados anteriormente. Dessa forma, o professor também reforçaria ideias importantes para o novo conteúdo, possibilitando que os estudantes notem as relações entre os tópicos matemáticos e também observem que muitas vezes existem diferentes soluções para um mesmo problema.

Neste trabalho, vamos considerar a perspectiva de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-

Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2011).

1.3 A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O termo “ensino-aprendizagem-avaliação”, que identifica a estratégia metodológica que adotaremos neste trabalho, foi proposto por Onuchic e Allevato (2011), com base nas pesquisas desenvolvidas pelo Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela professora Lourdes de La Rosa Onuchic. O GTERP é constituído por estudantes e ex-estudantes do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP - Rio Claro.

Para sustentar a utilização do termo ensino-aprendizagem-avaliação, as autoras admitem que é possível pensar em ensino, aprendizagem e avaliação como três elementos diferentes e que não ocorrem necessariamente ao mesmo tempo ou como decorrência um do outro. Segundo Onuchic e Allevato (2011), no século XX, os pesquisadores em Educação Matemática passaram a entender que ensino e aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente, e com esse objetivo o GTERP adotou primeiramente a palavra composta ensino-aprendizagem. As autoras explicam que as

> comunidades de pesquisa em Educação Matemática se interessaram em criar novos produtos com a intenção de melhorar o ensino e a aprendizagem. Esses produtos, que podem ser novos materiais educativos, envolvem um processo de engenharia, de inventar partes e colocá-las juntas para formar algo novo. Assim, qualquer produto novo criado requer avaliação (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 80).

Para complementar a justificativa do termo “ensino-aprendizagem-avaliação”, as autoras afirmam que recentemente o conceito de avaliação começou a ser repensado nos ambientes de ensino, e para adotar os princípios da avaliação contínua e formativa, que está mais relacionada ao desenvolvimento dos processos e não tanto ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos. Portanto a avaliação configura-se como um componente extremamente importante ao termo ensino-aprendizagem (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

> Envolvidos com o tema Resolução de Problemas, e assumindo a concepção de trabalhar Matemática através da Resolução de Problemas, o GTERP passou a empregar a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação, dentro de uma

> dinâmica de trabalho para a sala de aula, que passamos a entender como uma metodologia. Ao considerar o ensino-aprendizagem-avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que estes três elementos ocorrem simultaneamente, pretende-se que, enquanto o professor ensina, o estudante, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O estudante analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento. Essa forma de trabalho do estudante é consequência de seu pensar matemático, levando-o a elaborar justificativas e a dar sentido ao que faz. De outro lado, o professor avalia o que está ocorrendo e os resultados do processo, com vistas a reorientar as práticas de sala de aula, quando necessário (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012, p. 81).

A metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas assume o problema como ponto de partida para a introdução de novos conceitos e conteúdos, que surgem na sala de aula quando, através da Resolução de Problemas, os estudantes realizam conexões entre os diferentes ramos da Matemática.

Esta metodologia adotada pelo GTERP vai ao encontro das orientações dos documentos dos Padrões dos NCTM (1989), pois

> resolver problemas não é apenas uma meta da aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazê-la. A resolução de problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, não deve ser apenas uma parte importante do programa de matemática. [...] Os bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão a matemática significativa (NCTM, 1989, p. 52, tradução nossa).

Em consonância com os NCTM, Van de Walle (2009) afirma que os estudantes devem resolver problemas para aprender novos conteúdos de matemática, e não somente para aplicar o conteúdo que o professor apresentou a eles. Quando o problema é bem escolhido, os estudantes trabalham no sentido de descobrir novos métodos de resolução, o que possibilita novas compreensões da matemática envolvida no problema.

Com o objetivo de trabalhar com a estratégia metodológica apresentada, Van de Walle (2009) destaca duas dificuldades para a sua implementação:

(a) a dificuldade de abandonar o método de ensino tradicional[9], no qual as aulas são expositivas[10], e que considera que os estudantes possuem as ideias requeridas para dar significado à explicação do modo que o professor acredita ser o mais compreensível. Desse modo, está implícito

---

[9] Entendemos como método de ensino tradicional aquele descrito por Van de Walle (2009), no qual o professor ensinava a matemática e os estudantes a praticavam durante algum tempo e, então, era esperado que eles usassem as novas habilidades ou ideias na resolução de problemas.

[10] Para D'Ambrósio (1989), em uma aula expositiva, o professor passa o conteúdo no quadro negro, e o estudante copia para o seu caderno. Em seguida, o professor apresenta o conteúdo, explicando as técnicas envolvidas para a resolução de exercícios, com o objetivo de preparar os estudantes para resolverem mais exercícios semelhantes aplicando a técnica apresentada pelo professor.

que há apenas um modo ou técnica para resolver determinado problema, o modo apresentado pelo professor. No entanto, esta abordagem de mostrar e dizer pode ter sucesso com alguns estudantes, mas depende da absorção passiva das ideias, o que leva os estudantes a acreditarem que a Matemática pode estar além de sua compreensão.

(b) a dificuldade de compreender a Resolução de Problemas como o ponto de partida para aprender um novo conteúdo, ou seja, o paradigma de "*ensinar-então-praticar"*, no qual a resolução de problemas está separada do processo de aprendizagem. Van de Walle ressalta ser improvável que estudantes que ficam esperando o professor lhes apresentar as regras, resolvam problemas para os quais os métodos de resolução não foram fornecidos.

Trabalhar na perspectiva da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode não ser fácil, pois as tarefas precisam ser selecionadas, elaboradas ou modificadas constantemente e a compreensão atual dos estudantes deve ser levada em consideração (VAN DE WALLE, 2009). No entanto, Onuchic e Allevato (2011,2012) e Van de Walle (2009) afirmam que há boas razões para prosseguir com este trabalho:

(a) A Resolução de Problemas possibilita a concentração da atenção dos estudantes sobre as ideias e em como dar sentido a elas.

Ao resolver problemas, os estudantes refletem sobre as ideias que subjazem a esses problemas. Essas ideias que emergem serão provavelmente mais integradas àquelas já existentes, o que poderá resultar em uma melhor compreensão. Por outro lado, quando o professor tenta expor as ideias oralmente e depois as instruções para resolver o problema, tirando a chance dos estudantes esbarrarem nos obstáculos do problema, dificilmente eles prestam atenção, pois estão mais focados em instruções para resolver os problemas do que nas ideias matemáticas inerentes a essas instruções.

(b) A Resolução de Problemas desenvolve nos estudantes a crença de que eles podem fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido.

Quando o professor apresenta um problema utilizando a estratégia metodológica de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas, ele está dizendo aos estudantes "Eu acredito que você consegue fazer isso". E quando os estudantes resolvem o problema e apresentam suas resoluções, sua autoconfiança e autoestima se fortalecem.

(c) A Resolução de Problemas fornece dados contínuos para a avaliação que podem ser utilizados para tomar decisões educacionais, ajudar os estudantes a ter um melhor desempenho e manter os pais informados.

Ao debaterem suas ideias, defender seu ponto de vista, desenhar figuras e gráficos, escreverem relatórios, elaborar tabelas, e avaliar as soluções de seus colegas, os estudantes fornecem ao professor um fluxo permanente de informação valiosa para planejar as próximas aulas, para ajudá-los individual e coletivamente, avaliar o seu progresso e comunicar essas informações aos pais.

(d) A Resolução de Problemas possibilita um ponto de partida para o estudo de algum conteúdo para uma ampla gama de alunos.

Os problemas que são apresentados nessa perspectiva possuem vários caminhos para sua resolução, o que facilita a abordagem desses mesmos por diferentes estratégias de resolução. Dessa forma, os estudantes conseguem atribuir um significado ao problema utilizando suas próprias ideias e, além disso, expandem essas ideias e desenvolvem sua compreensão enquanto ouvem e refletem sobre as estratégias de resolução dos outros. Por outro lado, quando o professor direciona a abordagem da resolução e ignora a diversidade de ideias e soluções dos estudantes, eles geralmente frustram-se com suas ideias e deixam de acreditar em sua criatividade e autonomia.

(e) Uma abordagem de Resolução de Problemas pode envolver os estudantes de modo que ocorram menos problemas de disciplina.

As questões disciplinares em uma sala de aula surgem como resultado de os estudantes ficarem entediados por não compreenderem as instruções do professor, ou por acharem que seguir essas instruções é chato e cansativo. Van de Walle (2009, p. 59) ressalta que "a maioria dos estudantes que permitimos resolver problemas de modos que lhes faça sentido considera o processo intrinsecamente recompensador ou gratificante".

(f) A Resolução de Problemas desenvolve o "potencial matemático".

Ao se engajarem na resolução de problemas em sala de aula, os estudantes estão envolvidos em todos os cinco Padrões de Processos descritos pelo documento *Princípios e Padrões* do NTCM: Resolução de Problemas, raciocínio, comunicação, conexões e representações (ONUCHIC; ALLEVATO, 2012).

(g) Os professores que trabalham segundo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas se entusiasmam e não querem mais ensinar de forma tradicional.

Os professores sentem-se gratificados quando os alunos compreendem suas resoluções e aprendem Matemática utilizando seu próprio raciocínio, e os alunos sentem-se estimulados a desenvolver suas próprias estratégias para resolver problemas e notam que esse esforço vale a pena.

1.3.1 Um roteiro para uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas

Não existe um modelo pronto para que os professores trabalhem através da Resolução de Problemas em sala de aula. A atividade matemática escolar não pode ser resumida a coisas prontas e definitivas, mas deve atentar para a construção e a elaboração, por parte do estudante, de um conhecimento do qual utilizará para compreender e transformar sua realidade (ONUCHIC, 1999).

Nesse sentido, após receber alguns pedidos, a professora Lourdes de la Rosa Onuchic, juntamente com a participação de outros professores de matemática do GTERP, esquematizou o Primeiro Roteiro de uma aula que pautava-se na metodologia de ensino através da Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999). Nessa proposta básica o foco estava em sete características: a formação de grupos para a entrega de uma tarefa, a mudança no papel do professor, a exposição dos resultados na lousa, a plenária, a análise dos resultados, o consenso dos estudantes e, por fim, a formalização do conteúdo.

No entanto, Onuchic e Allevato (2011) constataram, em algumas pesquisas desenvolvidas e em sua experiência com a formação, que os professores que tentaram trabalhar nessa perspectiva

> têm enfrentado muitas dificuldades para trabalhar matemática com seus estudantes, não raras vezes por falta de conhecimentos prévios; em outras, porque se rebelam, demonstrando aversão aos conteúdos trabalhados ou à forma de ensinar.

> Consequentemente, esses estudantes sabem cada vez menos Matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011).

Com o objetivo de prover os estudantes de conhecimentos prévios necessários ao desenvolvimento mais produtivo da metodologia, Onuchic e Allevato (2011) mudaram o Primeiro Roteiro, incluindo novos elementos, constituindo assim um Segundo Roteiro, com as seguintes etapas:

(a) Preparação do problema: com o objetivo de construir um novo conceito, princípio ou procedimento, o professor seleciona um problema, de forma que o conteúdo matemático necessário para a resolução desse problema ainda não tenha sido trabalhado em sala de aula.

(b) Leitura individual: o professor entrega uma cópia do enunciado do problema a cada um dos estudantes, para que eles possam ler o problema individualmente.

(c) Leitura em conjunto: os estudantes formam grupos e o professor solicita novamente a leitura do enunciado do problema. Nessa etapa, caso os estudantes tenham dificuldades, o professor pode ler o problema com eles, e se os estudantes desconhecerem algum termo ou palavra, o professor busca uma forma de esclarecer as dúvidas, podendo inclusive pedir que os estudantes consultem em um dicionário.

(d) Resolução do problema: em grupos, os estudantes buscam resolver o problema, por meio de um trabalho de constante interação. O problema gerador conduz os estudantes a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

(e) Observar e incentivar: essas ações são do professor, que deixa de ser um transmissor do conhecimento e passa a analisar o comportamento dos estudantes e estimular o trabalho colaborativo, incentivando a troca de ideias entre os estudantes enquanto eles tentam resolver o problema.

> O professor incentiva os estudantes a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os estudantes em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011, p. 84) .

(f) **Registro das Resoluções na Lousa**: cada grupo é convidado a apresentar sua resolução no quadro.

(g) **Plenária**: professor e estudantes discutem as resoluções (certas ou erradas) apresentadas na lousa, com os objetivos de defender seu ponto de vista e de esclarecer dúvidas. O papel do professor na discussão é o de guia e mediador, de forma que incentive a participação ativa de todos os estudantes.

(h) **Busca do consenso**: professor e estudantes buscam um consenso para chegar à solução correta ou às soluções corretas.

(i) **Formalização do conteúdo**: nessa etapa, o professor apresenta na lousa a formalização do conteúdo, de forma organizada e estruturada e em linguagem matemática, padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos trabalhados através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações relacionadas ao conteúdo abordado.

Este Roteiro foi elaborado para ajudar os professores a trabalhar nas salas de aula através da Resolução de Problemas, porém, de acordo com Onuchic e Allevato (2011, p. 82), “não há formas rígidas de se trabalhar através da Resolução de Problemas”. Portanto, o professor tem liberdade ao trabalhar com esta metodologia e pode realizar as alterações que considerar convenientes, desde que sua essência seja preservada.

Na próxima seção, apresentaremos o modelo das fases de uma aula, na perspectiva de Van de Walle (2009), no qual ele destaca o papel do professor em uma aula na perspectiva da metodologia de ensino de Matemática através da Resolução de Problemas em três fases: antes, durante e depois da aula.

1.3.2 As Fases da aula de Van de Walle: Antes, Durante e Depois

Ao considerar uma lição construída em torno de um único problema, ou seja, uma abordagem típica da Resolução de Problemas, Van de Walle (2009) afirma ser útil considerarmos uma lição dividida em três fases: *antes*, *durante* e *depois*. Para o autor

> cada fase da lição tem uma agenda de trabalho ou objetivo específico. Como você atende a esses programas de trabalho em cada parte da lição pode variar e pode depender da turma, do próprio problema e do objetivo da lição (VAN DE WALLE, 2009, p. 61).

A fase *Antes da Lição* é aquele que antecede a resolução do problema, e Van de Walle (2009, p. 61-62) destaca três ações do professor nessa fase:

- verificar se os estudantes compreenderam o problema de modo que não seja necessário esclarecer ou explicar depois os detalhes relacionados ao enunciado. Para que o professor esteja certo que o estudante compreendeu o problema, ele pode solicitar que os estudantes expliquem com suas palavras o enunciado do problema, uma vez que a releitura do problema em suas próprias palavras lhes obriga a pensar exatamente sobre a questão central do problema.
- esclarecer para os estudantes quais são as expectativas do professor antes de eles começarem a trabalhar no problema. Esse esclarecimento inclui tanto a forma como eles trabalharão (individualmente, em duplas ou em grupos) quanto o que o professor espera dos estudantes em relação ao comprometimento com o problema e as estratégias que adotarão em sua resolução.
- certificar-se de que os estudantes estão preparados para trabalhar no problema, considerando os conhecimentos prévios que eles possuem e que serão úteis para a resolução do problema proposto.

Em relação a essa fase, podemos incluir também a escolha do problema, que para Van de Walle (2009) é uma ação importante do professor, pois deve possibilitar a abordagem do conteúdo que o professor pretende que os estudantes aprendam.

Na segunda fase, *durante a lição*, Van de Walle (2009, p. 64-66) destaca cinco ações do professor, apresentadas a seguir:

- **Deixar os estudantes caminharem por si mesmos**: depois de terem compreendido o enunciado do problema, os estudantes estão preparados para trabalhar. O professor deve incentivá-los de forma que eles notem que o professor acredita em sua capacidade para resolver o problema, e mesmo que haja erros, o professor deixa que eles mesmos observarão, ao contrastar suas resoluções, que há algo de errado. O professor pode questionar os estudantes em relação aos erros, sem identificar o erro, para que eles possam repensar em suas estratégias e encontrar em que reside seu engano.

- **Escutar ativamente os estudantes**: esta é uma oportunidade para que o professor descubra o quanto os estudantes sabem e como eles pensam enquanto estão abordando o problema. Quando eles apresentam maiores dificuldades, o professor pode questionar os estudantes e também retornar ao enunciado do problema para verificar se realmente entenderam o que está sendo perguntado.
- **Propor dicas e sugestões cuidadosamente**: se um grupo está procurando uma estratégia, o professor pode sugerir que eles tentem usar um modelo particular, ao desenhar uma figura ou fazer uma tabela, se uma dessas ideias parecer apropriada. O importante é que o professor não seja diretivo, mas que dê sugestões que sirvam como ponto de partida e que possibilitem o surgimento de mais ideias.
- **Encorajar a verificação e o teste das ideias**: o professor não deve ser a "fonte da verdade", e evitar responder os estudantes com um "está certo" ou um "está errado". Quando um estudante questiona se sua resolução está correta, o professor pode responder com outra pergunta, tal como: *Eu entendi o que você fez, mas como você pode conferir isto?*. É importante lembrar que respostas sem explicações não são interessantes.
- **Fornecer atividades aos estudantes que terminam depressa**: geralmente alguns estudantes terminam de resolver o problema bem antes que os demais. Para esses estudantes, o professor pode propor uma extensão do problema, para que eles não fiquem entediados e desanimem de estudar, podendo até atrapalhar que os colegas que ainda não terminaram.

A terceira fase, *depois da* lição, é destinada a uma discussão e a troca de ideias da turma, para que o professor possa formalizar o conteúdo. Nessa fase, Van de Walle (2009, p. 66-68) destaca três ações do professor:

- envolver a turma em uma discussão produtiva e ajudá-los a trabalhar juntos como uma comunidade de aprendizes. Para tanto, o professor precisa ser claro a respeito do propósito da discussão de grupo, ou seja, o objetivo da discussão é que os estudantes consigam compartilhar e explorar a variedade de estratégias, ideias e resoluções geradas pela turma e aprender a comunicar estas ideias com um discurso matemático.

- escutar ativamente os estudantes durante a discussão, apresentando uma atitude neutra em relação às diferentes resoluções e resistindo a ideia de julgar a correção de uma resposta. O professor pode formular questões de esclarecimento para avaliar as respostas corretas e errôneas.
- sintetizar as ideias principais verificando se todos os estudantes compreenderam, introduzir termos matemáticos, definições e simbolismos apropriados, pois uma vez que os estudantes compreenderam as ideias, fica mais fácil formalizar o conteúdo.

Ao descrever essas ações, Van de Walle (2009, p. 66) acredita que

> com o passar do tempo você fará sua turma se transformar em uma *comunidade de aprendizes de matemática*, onde os estudantes se sentem confortáveis em se arriscar e compartilhar ideias, onde estudantes e professor respeitam as ideias uns dos outros mesmo quando discordam, onde as hipóteses são defendidas e desafiadas respeitosamente, e onde o raciocínio lógico ou matemático é estimado acima de tudo (VAN DE WALLE, 2009, p. 66).

Na próxima seção, pretendemos apresentar uma articulação entre o roteiro apresentado por Onuchic e Allevato (2011), o modelo das três fases de Van de Walle (2009), e o modelo de Polya (1994), como uma proposta para se ensinar matemática através da Resolução de Problemas.

1.3.3 Articulando o Roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011) com as fases de uma lição de Resolução de Problemas de Van de Walle (2009), considerando o modelo de Polya (1994) para a Resolução de um Problema

Nesta seção, considerando o roteiro apresentado por Onuchic e Allevato (2011), chamamos a atenção para as etapas sugeridas para uma aula na perspectiva da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas e, destacamos em especial, a etapa da *Resolução do Problema*, na qual acreditamos que o modelo para a resolução de um problema, de Polya (1994), pode apresentar estratégias para professores e estudantes nessa etapa, considerando as quatro fases que Polya sugere.

Pretendemos também relacionar o Roteiro de Onuchic e Allevato (2011), com as fases da lição, de Van de Walle (2009), uma vez que Van de Walle enfatiza o papel do professor em uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas.

Para articular o modelo de Polya (1994), o roteiro apresentado por Onuchic e Allevato (2011), e as fases propostas por Van de Walle (2009), elaboramos o seguinte quadro resumo:

Quadro 1 – Articulando o Roteiro de Onuchic e Allevato (2011), o modelo de Polya (1994) e as fases de Van de Walle (2009)

<table>
<tr><th>Van de Walle (2009)</th><th>Onuchic e Allevato (2011)</th><th>Modelo de Polya (1994)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Antes da Lição</td><td>Preparação do Problema</td><td></td></tr>
<tr><td>Leitura Individual</td><td rowspan="3">Compreensão do Problema</td></tr>
<tr><td>Leitura em conjunto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Durante a Lição</td><td>Resolução do Problema</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Observar e Incentivar</td><td>Elaboração de um Plano</td></tr>
<tr><td>Execução do Plano</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Depois da Lição</td><td>Registro das Resoluções na Lousa</td><td rowspan="4">Retrospecto</td></tr>
<tr><td>Plenária</td></tr>
<tr><td>Busca do consenso</td></tr>
<tr><td>Formalização do Conteúdo</td></tr>
</table>

Fonte: do autor.

O objetivo da elaboração desse quadro é articular as três perspectivas, de modo a destacar aspectos relevantes de cada uma delas para a elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem. Van de Walle (2009) destaca as ações do professor, Onuchic e Allevato (2011) chamam a atenção para a estrutura de uma aula e algumas ações do professor e dos estudantes na perspectiva de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas, e Polya (1994) apresenta um modelo para a resolução de um problema.

É necessário chamar atenção para a linha pontilhada entre as fases *Resolução do problema* e *Observar e incentivar*, propostas por Onuchic e Allevato (2011), as quais inferimos que ocorrem simultaneamente, já que enquanto os estudantes resolvem ou tentam resolver o problema, o professor os observa e os incentiva em suas resoluções. Ao relacionar ambas as fases com o modelo proposto por Polya (1994), consideramos que a resolução do problema não finda em sua compreensão, mas passa por todas as etapas sugeridas pelo autor.

Dessa forma, o modelo proposto por Polya (1994) pode ser implementado a partir da fase *Leitura individual* até a fase *Formalização do conteúdo* de Onuchic e Allevato (2011), uma vez que independente se o estudante resolveu ou não conseguiu resolver o problema, ele pode fazer um retrospecto de sua resolução, de seus possíveis erros e das resoluções de outros estudantes nas fases que vem após a resolução do problema.

No próximo capítulo apresentamos as trajetórias hipotéticas de aprendizagem na perspectiva de Simon (1995).

CAPÍTULO 2

TRAJETÓRIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAGEM

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE AS TRAJETÓRIAS HIPOTÉTICAS DE APRENDIZAGEM

Algumas dissertações de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC-São Paulo apontam que as trajetórias hipotéticas de aprendizagem na perspectiva de Simon (1995) representam uma alternativa para o professor planejar sua atuação em sala de aula, tais como Angiolin (2009), Barbosa (2009), Lima (2009), Luna (2009), Menotti (2014), Mesquita (2009), e Rosenbaum (2010).

Para o presente trabalho, pesquisamos a expressão “trajetória hipotética de aprendizagem”, apresentada e discutida por Simon (1995), para elaborar uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre o ensino de logaritmos.

Nas próximas seções apresentamos o contexto no qual Simon (1995) considera as trajetórias hipotéticas de aprendizagem e o Ciclo de Ensino Matemático proposto por ele.

2.2 O CONSTRUTIVISMO SOCIAL

O construtivismo tem sido amplamente abordado em trabalhos teóricos por educadores matemáticos, pesquisadores e profissionais em educação, e devido a essas abordagens, a compreensão do significado de construtivismo tem apresentado diferentes perspectivas (SIMON, 1995). Para Simon

> O construtivismo deriva de uma posição filosófica na qual nós, enquanto seres humanos, não temos acesso a uma realidade objetiva, isto é, uma realidade independente de nossa maneira de conhecê-la. Pelo contrário, nós construímos nosso conhecimento do nosso mundo a partir de nossas percepções e experiências, que são mediadas através de nossos conhecimentos prévios [11] (SIMON, 1995, p. 115, *tradução nossa*).

[11] Construtivism derives from a philosophical position that we as human beings have no access to an objective reality, that is, a reality independent of our way of knowing it. Rather, we construct our knowledge of our world from our perceptions and experiences, which are themselves mediated through our previous knowledge. Learning is the process by which human beings adapt to their experiential world.

Em uma perspectiva construtivista, construímos nossos conhecimentos por meio das experiências que vivemos no mundo, e quando a experiência traz resultados diferentes daqueles que esperamos ou previmos, a experiência resulta em desequilíbrio, o que nos leva a ativar nosso "processo adaptativo". Nesse processo, a reflexão e as operações adaptativas conduzem a novos conceitos ou a conceitos modificados (SIMON, 1995).

Simon (1995) aponta que em debates epistemológicos há uma questão dividindo opiniões, na qual se discute se o desenvolvimento do conhecimento é fundamentalmente um processo social ou um processo cognitivo. Para o autor, a aprendizagem pode ser considerada como um processo individual e uma construção social, e a partir dessa afirmação, ele apresenta uma proposta que ele acredita poder contribuir para a reconstrução pedagógica da matemática[12].

Com relação à aprendizagem de matemática na sala de aula, Simon (1995) apresenta uma:

- **análise psicológica**: essa análise da aprendizagem de matemática em sala de aula foca no conhecimento dos indivíduos de e sobre a matemática, sua compreensão da matemática dos outros, e o seu senso de funcionamento de uma aula de matemática.
- **análise sociológica**: tem como foco o conhecimento compartilhado e as normas sociais das aulas de matemática. O autor usa o termo compartilhado para indicar que os membros da comunidade da sala de aula, não tendo acesso direto ao pensamento uns dos outros, compreendem um sentido em que alguns aspectos do conhecimento são compartilhados, mas não há como saber se as ideias são de fato compartilhadas. As normas sociais se referem ao que é compreendido pela comunidade enquanto participação constituinte efetiva na comunidade da sala de aula de matemática. As normas sociais incluem as expectativas que os membros da comunidade têm em relação ao professor, aos estudantes, a concepção do que é fazer matemática naquela comunidade, e as formas pelas quais a validade matemática é estabelecida.

[12] Simon (1995) busca apresentar sua concepção em relação às perspectivas construtivistas e as relações entre o construtivismo e a pedagogia da Matemática, e a partir de suas considerações ele apresenta o Ciclo de Ensino de Matemática.

A coordenação das análises psicológicas e sociológicas é o que Simon (1995) chama de construtivismo social, e o autor busca responder à questão: como o os professores de matemática podem promover a construção de ideias matemáticas que a comunidade de matemáticos levou milhares de anos para desenvolver?

Para responder a essa pergunta, Simon (1995) considera o planejamento do professor como um fator essencial, uma vez que dentre suas responsabilidades está o planejamento. Brousseau (1987) afirma que em seu planejamento, parte do papel do professor envolve tornar ideias matemáticas não contextualizadas que precisam ser ensinadas e embuti-las em um contexto para que os estudantes possam investigá-la. Tal contexto deve apresentar um significado para os estudantes, possibilitando que eles resolvam problemas nesse contexto, e a sua solução pode envolver uma ideia matemática nova a ser aprendida. A resolução para o problema pode não ser única.

A responsabilidade mais básica de professores na perspectiva construtivista é a de entender o conhecimento matemático de seus estudantes e como articular seu método de ensino com a natureza desse conhecimento matemático. Nesse sentido, Simon (1995) examina o papel de diferentes aspectos do conhecimento dos professores e explora o desafio contínuo e inerente de integrar os objetivos do professor e a aprendizagem dos estudantes por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem, que será apresentada na próxima seção.

2.3 Trajetória Hipotética de Aprendizagem na Perspectiva de Simon

Simon (1995) apresentou a trajetória hipotética de aprendizagem por meio do Ciclo de Ensino de Matemática, que ele desenvolveu como um modelo do inter-relacionamento cíclico de aspectos que envolvem o conhecimento do professor, seu pensamento e a tomada de decisões com relação ao seu planejamento.

Com base em três episódios de seu estudo[13] realizado sobre o ensino de área, Simon (1995) afirmou que dois fatores foram considerados para o objetivo e a estrutura da lição: a compreensão matemática do professor e as hipóteses do professor a respeito do conhecimento dos estudantes. O autor justifica que utiliza o termo "hipótese" porque o

[13] Na pesquisa desenvolvida por Simon, os dados foram coletados em uma sala de aula experimental com 25 alunos. O pesquisador acompanhou um professor de Matemática em tarefas que envolvem o conceito de área, e após a análise de dados coletados, ele trabalhou em uma fundamentação teórica com o intuito de formular uma pedagogia da Matemática.

professor não tem acesso direto ao conhecimento dos estudantes, mas pode inferir a natureza da compreensão dos estudantes a partir das interpretações dos comportamentos que eles apresentam. Para Oliveira et al. (2014), com base em Simon (1995)

> isso implica que o professor pode comparar a sua compreensão de um conceito particular a partir da *sua* construção de entendimentos dos estudantes hipoteticamente, mas não é possível que ele conheça de antemão os entendimentos *reais* dos estudantes (OLIVEIRA, 2014, p. 3).

A partir dessas considerações, Simon (1995) apresenta o objetivo de aprendizagem do professor como o ponto de partida para a elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem. De acordo com o autor, o uso da expressão "trajetória hipotética de aprendizagem" é para se referir à

> previsão do professor como um caminho pelo qual a aprendizagem pode ocorrer. É hipotético porque a trajetória real de aprendizagem não é conhecida previamente. Ela caracteriza uma tendência esperada. A aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora frequentemente em caminhos similares. É assumido que uma aprendizagem individual tem alguma regularidade, que a sala de aula limita a atividade matemática frequentemente de formas previsíveis, e que muitos estudantes na mesma sala podem se beneficiar da mesma tarefa matemática. Uma trajetória hipotética de aprendizagem fornece ao professor uma análise racional para escolher um projeto instrucional particular; assim, eu tomo as minhas decisões baseado nas minhas melhores suposições de como a aprendizagem pode acontecer[14] (SIMON, 1995, p. 135, tradução nossa).

A expressão "trajetória hipotética de aprendizagem" é utilizada com o objetivo de enfatizar aspectos do pensamento do professor que estão fundamentados em uma perspectiva construtivista e são comuns tanto ao planejamento antecipado e a tomada de decisões espontânea (SIMON, 1995).

O autor justifica sua escolha pela palavra "trajetória" para referir-se a um caminho, e faz uma analogia a uma viagem, considerando que se pretenda fazer uma viagem pelo mundo, e não se pretende viajar aleatoriamente, mas também não planejou um itinerário a ser seguido. Com esse objetivo, busca-se o máximo de informações a respeito de cada lugar que se pretende visitar, elaborando um plano.

A princípio, pode-se ter toda a viagem planejada ou apenas parte dela. No início da viagem, segue-se o plano, mas no decorrer do trajeto, devido às condições que se

[14] I use the term "hypothetical learning trajectory" to refer to the teacher's prediction as to the path by which learning might proceed. It is hypothetical because the actual learning trajectory is not knowable in advance. It characterizes an expected tendency. Individual students' learning proceeds along idiosyncratic, although often similar, paths. This assumes that an individual's learning has some regularity to it, that the classroom community constrains mathematical activity often in predictable ways, and that many of the students in the same class can benefit from the same mathematical task. A hypothetical learning trajectory provides the teacher with a rationale for choosing a particular instructional design; thus, I make my design decisions based on my best guess of how learning might proceed.

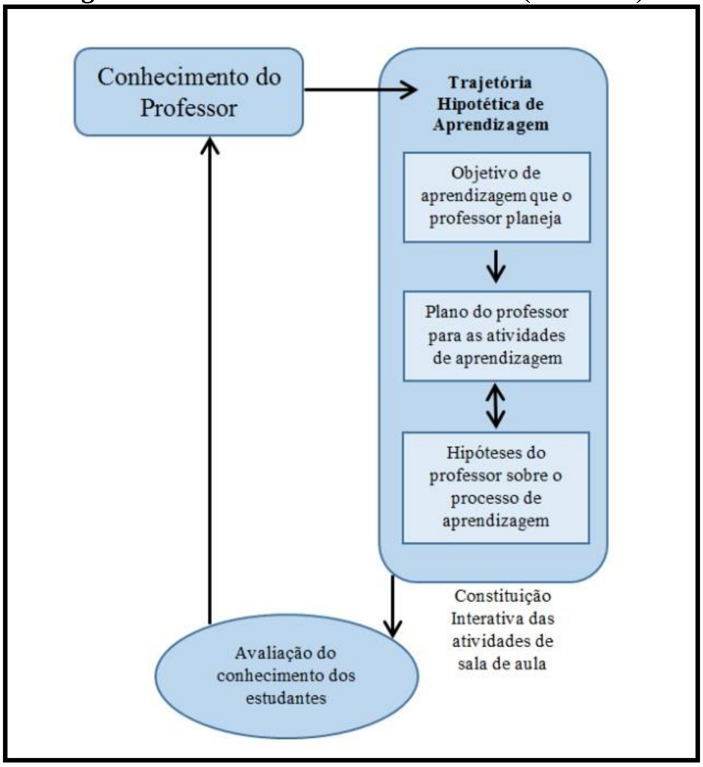
encontra, é necessário ajustar constantemente esse plano de viagem. Dessa forma pode ser que se mude a ordem pela qual os lugares serão visitados ou fique-se por mais tempo em determinados lugares e menos tempo em outros, podendo até deixar de visitar alguns lugares e visitar outros que não havia planejado. Enfim, o caminho pelo qual se viaja é a "trajetória", e o caminho que se havia planejado é a "trajetória hipotética" (SIMON, 1995).

> A noção de THA na perspectiva de Simon não impõe que o professor sempre busque um objetivo por vez, ou que apenas uma trajetória deve ser considerada, mas vale salientar a importância de se ter um objetivo, fazer uma análise racional para a tomada de decisões do professor, e a natureza hipotética de tal pensamento (OLIVEIRA, 2014, p. 4).

Simon (1995) considera que uma trajetória hipotética de aprendizagem é composta por três componentes:

- o objetivo de aprendizagem, que define uma direção para o planejamento do professor;
- o plano que o professor elabora com as atividades de aprendizagem;
- o processo hipotético de aprendizagem, que apresenta uma previsão de como o pensamento e a compreensão dos estudantes evoluirão no contexto das atividades de aprendizagem.

Figura 1 – Ciclo de Ensino de Matemática (abreviado)



Fonte: do autor. Adaptado de Simon (1995)

A partir de seu conhecimento, o professor considera os objetivos que planeja alcançar por meio de um plano de atividades, e nesse plano apresenta suas hipóteses sobre como será a aula que planejou. Gómez, González e Lupiáñez (2007) assumem que o professor pode escolher um objetivo de aprendizagem específico para o qual ele está planejando a aula. Esse objetivo constitui uma estrutura de referência que delimita as condições e os procedimentos que o professor espera desenvolver com o objetivo de formular suas hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes. A informação da qual o professor dispõe precisa ser organizada em um processo sistemático para tentar alcançar os objetivos que ele estabeleceu.

> Um objetivo de aprendizagem é uma noção complexa. Se o professor quer planejar tarefas para promover a realização desse objetivo por seus alunos, então é necessário caracterizá-lo de tal forma que ele pode conjecturar como e em que medida uma tarefa (ou uma sequência de tarefas) pode contribuir para sua realização[15] (GÓMEZ; GONZÁLEZ; LUPIÁÑEZ, 2007, p. 3, tradução nossa).

Uma vez definido o objetivo de aprendizagem, a elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem envolve a geração de um processo de aprendizagem hipotético de um conjunto particular de tarefas. Simon e Tzur (2004) apresentam algumas questões que o professor pode pensar para a criação desse processo: "qual tarefa, atualmente disponível para os estudantes, pode ser a base para que eles consigam alcançar os objetivos de aprendizagem?" A partir dessa questão, o professor pode buscar em seus materiais qual tarefa traz essas possibilidades para que ele alcance seus objetivos.

Enquanto os objetivos de aprendizagem fornecem uma direção para a elaboração da trajetória hipotética de aprendizagem, a seleção de tarefas e as hipóteses sobre o processo da aprendizagem dos estudantes são interdependentes. As tarefas são selecionadas com base nas hipóteses que o professor tem quanto ao processo de aprendizagem, e a hipótese do processo de aprendizagem está baseada nas tarefas que estarão envolvidas (SIMON, TZUR, 2004). Nesse sentido, algumas suposições subjazem a essas ideias

> 1. A elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem está baseada na compreensão do conhecimento atual dos estudantes envolvidos.
> 2. Uma trajetória hipotética de aprendizagem é um veículo para o planejamento da aprendizagem de determinados conceitos matemáticos.
> 3. As tarefas matemáticas fornecem ferramentas para promover a aprendizagem de um conceito matemático particular e são, portanto, um elemento chave do processo de ensino.

---

[15] A learning goal is a complex notion. If the teacher wants to design tasks for promoting his students' achievement of that goal, then it is necessary to characterize it in such a way that he can conjecture how and to which extent a task (or a sequence of tasks) can contribute to its attainment.

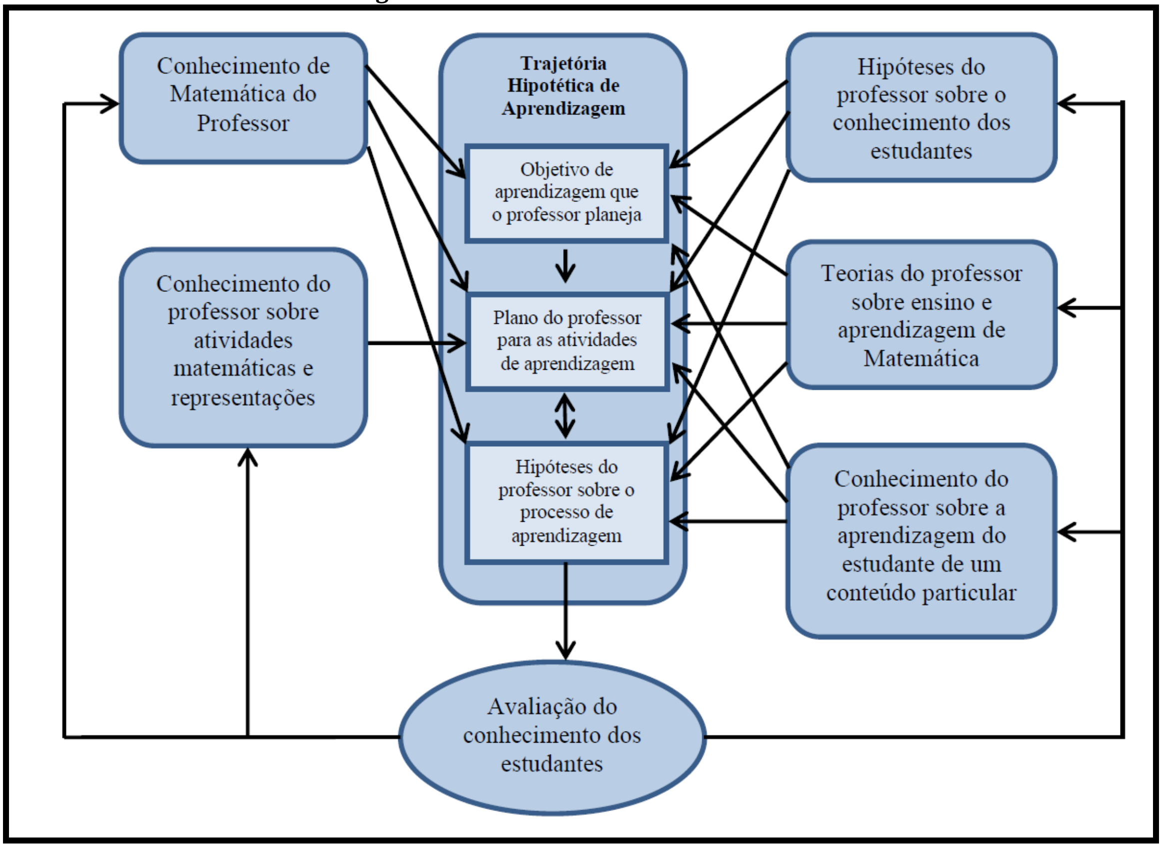
> 4. Devido à natureza hipotética e inerentemente incerta desse processo, o professor está regularmente envolvido em modificar cada aspecto da trajetória hipotética de aprendizagem (SIMON, TZUR, 2004, p. 93).

Uma vez selecionadas as tarefas para a trajetória hipotética de aprendizagem, o professor pode considerar suas hipóteses para o processo de aprendizagem mais detalhadamente. Para tanto, ele pode considerar as possíveis dúvidas que os estudantes apresentem enquanto tentam resolver as tarefas. Ao levantar essas dúvidas, o professor também antecipa as possíveis respostas para que os estudantes consigam compreender os detalhes que os deixaram confusos.

Depois de estabelecer o(s) objetivo(s) de aprendizagem e selecionar as tarefas, o professor avalia o trabalho que desenvolveu e tem a possibilidade de reformular sua trajetória hipotética de aprendizagem (SIMON, 1995). Na Figura 1, o diagrama indica que a avaliação dos estudantes é contínua e pode trazer adaptações para o conhecimento do professor, o que pode conduzir a uma trajetória hipotética de aprendizagem nova ou modificada.

A elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem antes do ensino na sala de aula é um processo pelo qual o professor desenvolve um plano de atividades para ser realizado em sala de aula por seus estudantes. Contudo, ao interagir com os estudantes e observá-los, o professor e os estudantes constituem uma experiência, que pela sua natureza social, é diferente daquela antecipada pelo professor. Nesse contexto, as ideias do professor sobre o conhecimento dos estudantes podem modificar-se e ele tem a possibilidade de modificar a trajetória hipotética de aprendizagem que havia elaborado anteriormente (SIMON, 1995).

Figura 2 – Ciclo de Ensino de Matemática



Fonte: do autor. Adaptado de Simon (1995)

A Figura 2 descreve as relações entre os domínios do conhecimento do professor, a trajetória hipotética de aprendizagem e as interações com os estudantes. Simon (1995) explica a figura

> Começando pelo topo do diagrama, o conhecimento de matemática do professor em interação com as hipóteses sobre o conhecimento matemático dos estudantes, contribuem para a identificação de um objetivo de aprendizagem. Esses domínios de conhecimento, o objetivo de aprendizagem, o conhecimento de atividades matemáticas e representações do professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem dos estudantes de um conteúdo particular, bem como as concepções do professor sobre ensino e aprendizagem [...] contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem e um processo de aprendizagem hipotético.
> A modificação da trajetória hipotética de aprendizagem não é algo que ocorre apenas durante o processo de planejamento entre as aulas. O professor está continuamente engajado para ajustar a trajetória de aprendizagem que ele conjecturou para melhor refletir seu conhecimento aprimorado. Às vezes, pequenos ajustes são necessários, embora algumas vezes toda a essência da lição deve ser descartada e substituída por outra mais apropriada. Independentemente da extensão da modificação, mudanças devem ser feitas em qualquer ou em todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: o objetivo, as atividades, ou o processo hipotético de aprendizagem[16] (SIMON, 1995, p. 138, tradução nossa).

[16] Beginning at the top of the diagram, the teacher's knowledge of mathematics in interaction with the teacher's hypotheses about the students' mathematical knowledge contribute to the identification of a learning goal. These domains of knowledge, the learning goal, and the teacher's knowledge of mathematical activities and representation, his knowledge of students' learning of particular content, as well as the teacher's conceptions of

De acordo com Gómez, González e Lupiáñez (2007), o conhecimento do professor, sua experiência e a literatura disponível são as fontes básicas para que ele possa elaborar uma trajetória hipotética de aprendizagem que apoie seu planejamento.

Ao elaborar uma trajetória hipotética de aprendizagem, o professor planeja possíveis situações e rotas pelas quais a aprendizagem pode ocorrer no contexto de tarefas particulares. Quando uma tarefa matemática não é suficiente para que o professor tenha indícios de que os estudantes aprenderam da forma como havia planejado, ele ajusta sua trajetória hipotética de aprendizagem, geralmente modificando a tarefa e às vezes alterando a interpretação que ele tinha dos conceitos dos estudantes nas quais sua trajetória está baseada (SIMON, TZUR, 2004), ou, também, propondo novas tarefas em diferentes contextos.

Nesse sentido, corroboramos com Pires (2009, p. 164) ao afirmar que "os jovens professores precisam de conhecimentos sobre os saberes dos alunos, para gerar trajetórias hipotéticas de aprendizagem e análises conceituais para que possam ensinar Matemática".

Segundo Steffe (2004)

> A construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem dos estudantes é um dos problemas mais difíceis, porém urgentes que a educação matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais empolgantes porque é nela que podemos construir uma compreensão da matemática dos estudantes e como nós professores podemos afetar de forma rentável essa matemática (STEFFE, 2004, p. 130, tradução nossa).[17]

Nesse sentido, apresentamos nessa dissertação a primeira versão de uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos na perspectiva da Resolução de Problemas, considerando algumas possibilidades para a abordagem desse conteúdo.

---

learning and teaching […] contribute to the development of learning activities and a hypothetical learning process.

The modification of the hypothetical learning trajectory is not something that only occurs during planning between classes. The teacher is continually engaging in adjusting the learning trajectory that he has hypothesized to better reflect his enhanced knowledge. Sometimes fine tuning is in order, while at other times the whole thrust of the lesson must be discarded in favor of a more appropriate one. Regardless of the extent of modification, changes may be made at any or all of the three components of the hypothetical learning trajectory: the goal, he activities, or the hypothetical learning process.

[17] The construction of learning trajectories of children is one of the most daunting but urgent problems facing mathematics education today. It is also one of the most exciting problems because it is here that we can construct an understanding of children's mathematics and how we as teachers can profitably affect that mathematics.

CAPÍTULO 3

ASPECTOS METODOLÓGICOS: O CAMINHAR DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos o encaminhamento metodológico assumido em nossa pesquisa, que configura-se como uma pesquisa qualitativa. Para Bogdan e Biklen (1994, p.11), a pesquisa qualitativa é aquela que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais. Os autores apresentam as seguintes características de uma pesquisa qualitativa: a investigação qualitativa é descritiva; os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; os pesquisadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; e o significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

As bases teóricas assumidas nessa pesquisa são a Resolução de Problemas como estratégia metodológica para o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011) e as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem de Simon (1995).

Na presente pesquisa, primeiramente realizamos uma revisão bibliográfica a respeito da perspectiva da resolução de problemas para o ensino de matemática. Nesse contexto, encontramos diferentes perspectivas e reformas no ensino de matemática no século XX. A partir dessas reformas, consideramos algumas das formas para o ensino de matemática relacionados à resolução de problemas, dentre elas vimos que é possível ensinar sobre a Resolução de Problemas, ensinar para resolver problemas e ensinar matemática através da Resolução de Problemas (SHROEDER; LESTER, 1989). Dentre essas formas, optamos pelo ensino de matemática através da Resolução de Problemas, mais especificamente pela metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas, proposta por Onuchic e Allevato (2011), uma vez que acreditamos ser potencial para relacioná-la com as trajetórias hipotéticas de aprendizagem. Para finalizar o capítulo sobre a Resolução de Problemas, elaboramos um quadro que articula a perspectiva de Onuchic e Allevato (2011), o modelo para a resolução de um problema proposto por Polya (1994) e as fases da aula apresentadas por Van de Walle (2009), com o intuito de relacionar aspectos destacados em cada uma dessas perspectivas que podem contribuir para a elaboração da THA.

Com o objetivo de propor uma alternativa para o ensino de logaritmos, estudamos também as trajetórias hipotéticas de aprendizagem (THA) na perspectiva de Simon (1995), para nos embasarmos teoricamente com o objetivo de elaborar uma THA que possibilite ao professor uma abordagem para o ensino de logaritmos e suas propriedades operatórias através da Resolução de Problemas.

Para a elaboração da THA, escolhemos o conteúdo logaritmos e suas propriedades operatórias por se tratar de um conteúdo do Ensino Médio, como parte do tópico funções, e em específico relacionado às funções exponenciais e logarítmicas. No entanto, o ensino de logaritmos ainda é, de forma geral, desenvolvido por meio da apresentação de definições, propriedades, e pela resolução de exercícios propostos em uma lista, para que na sequência sejam trabalhados problemas que envolvem esses conteúdos. Nossa intenção é trabalhar em um sentido inverso, ou seja, apresentar um problema que pode ser solucionado por meio dos logaritmos e suas propriedades operatórias, e dessa forma, os estudantes compreenderem a importância do estudo desse conteúdo ao resolver um problema que o aborda.

A versão da trajetória hipotética de aprendizagem que apresentamos nesse trabalho foi modificada a partir de outras versões que foram trabalhadas anteriormente nos dois últimos anos em um curso de licenciatura em matemática. Ao trabalhar com essa THA, observamos que embora alguns estudantes já tivessem estudado logaritmos anteriormente no Ensino Médio e na Licenciatura, eles mostraram-se surpresos com as possibilidades que as propriedades operatórias que os logaritmos apresentam. Eles afirmaram que a partir do estudo de alguns dos problemas da THA e da abordagem na perspectiva da Resolução de Problemas, o conceito de logaritmos e suas propriedades operatórias tornaram-se mais claros para eles.

Ao trabalhar com essa trajetória hipotética de aprendizagem nessas turmas, nos questionamos a respeito de como ela poderia ser implementada no Ensino Médio e, a partir das dúvidas e questionamentos que os estudantes levantaram, fomos modificando a trajetória, até chegar nessa versão final. Embora seja uma versão final para esse trabalho, a consideramos ainda inacabada, uma vez que ela pode ser reformulada de acordo com a necessidade de cada professor que a utilizar.

Para viabilizar reflexões a respeito do interesse dessa pesquisa, pretendemos responder a seguinte questão: quais são as possíveis contribuições de uma trajetória hipotética de aprendizagem para o ensino de logaritmos e suas propriedades operatórias?

Para responder a essa questão, propomos os seguintes objetivos:

- apresentar uma alternativa para o ensino de logaritmos, por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA).
- analisar possíveis contribuições dessa THA na perspectiva da Resolução de Problemas.

Para as análises, vamos descrever um possível encaminhamento de uma aula, por meio de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) na perspectiva da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato (2011), articulando-a ao modelo para a resolução de um problema proposto por Polya (1994) e as fases da aula apresentadas por Van de Walle (2009). A partir da elaboração THA, vamos descrever no capítulo 4 quais as dúvidas que os estudantes podem apresentar e alternativas para o professor lidar com essas dúvidas.

Nas considerações finais, apresentamos possíveis contribuições desta THA para o ensino de logaritmos e suas propriedades operatórias.

CAPÍTULO 4

UMA THA PARA O ESTUDO DOS LOGARITMOS: DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

4.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DOS LOGARITMOS

A compreensão de alguns fenômenos da química, da biologia, da geologia, da matemática financeira, entre outras áreas, requer o estudo dos logaritmos e das funções logarítmicas, pois devido à propriedade fundamental dos logaritmos de transformar produtos em somas, torna-se possível realizar cálculos com números de muitos dígitos.

Desde sua origem no século XVII, com John Napier (1550-1617), Henry Briggs (1561-1631) e Burgi (1552-1632), os logaritmos representaram uma poderosa ferramenta de cálculo utilizada para realizar e simplificar alguns cálculos aritméticos que promoveram a compreensão de fenômenos físicos estudados na época (MENDES, 2008).

A utilização dos logaritmos possibilitou o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, pelo fato de facilitar operações que envolviam números muito grandes e potências com expoentes fracionários com mais agilidade por meio das tábuas de logaritmos, que geralmente eram utilizadas na base decimal, possibilitando determinarmos o valor de $\log_{10} b$, com b > 0.

No entanto, devido à invenção dos computadores e das calculadoras, as famosas tábuas de logaritmos tornaram-se obsoletas, mas mesmo assim o estudo desse conceito é de grande relevância, pois podemos descrever vários fenômenos naturais por meio das funções exponenciais e logarítmicas (MENDES, 2008).

O estudo das funções exponenciais e logarítmicas abordam grandezas cuja taxa de variação a cada instante é proporcional ao seu valor naquele instante.

Vamos considerar um exemplo apresentado por Lima (2013, p. 172-174), no qual é considerada uma quantia C_0, aplicada a juros fixos capitalizados continuamente. Seja $c(t)$ o capital gerado a partir daquela quantia inicial depois de decorrido o tempo t, logo temos que $c(t)$ é uma função crescente de t.

Notamos ainda que se dados t_1 e t_2, com $t_1 < t_2$, então o acréscimo:

$$c(t_2 + h) - c(t_2)$$

experimentado pelo capital após o decurso do tempo *h*, a partir do tempo t_2, é maior que o rendimento:

$$c(t_1 + h) – c(t_1)$$

depois de ocorrido o mesmo tempo *h*, a partir do momento anterior t_1, pois o capital acumulado $c(t_2)$, sendo maior que $c(t_1)$ deve produzir maior renda.

Note que *c(t)* não é uma função afim, já que *c(t+h) – c(t)* não depende apenas de *h*, mas de *t* também. Logo, não podemos utilizar uma função afim para modelar essa situação.

Portanto, *c(t+h) – c(t)* deve ser proporcional à quantia aplicada *c(t)*, ou seja, $\mathrm{c(t+h) - c(t) = \alpha.c(t)}$, com $\alpha \in \mathrm{IR}$, em que o fator de proporcionalidade α depende evidentemente do prazo *h*. A afirmação de que *c* não depende de *t* é a expressão matemática do fato de que os juros são fixos. Definindo a razão φ(h) como $\varphi(h) = \dfrac{c(t+h) - c(t)}{c(t)} = \dfrac{c(t+h)}{c(t)} - 1$, temos que o quociente $\dfrac{c(t+h)}{c(t)}$ não depende de *t*.

Nesse sentido, quando os juros são fixos, se $\dfrac{c(t_1+h)}{c(t_1)} = 2$, por exemplo, então $\dfrac{c(t_2+h)}{c(t_2)} = 2$ para qualquer t_2 (e o mesmo *h*). Isto quer dizer que o tempo *h* necessário para que um capital seja dobrado é o mesmo em todas as ocasiões e para qualquer valor desse capital, seja ele pequeno ou grande.

Em resumo, vimos que o modelo matemático convincente para descrever a variação de um capital a juros fixos, em função do tempo, deve ser uma função crescente *c(t)* tal que o acréscimo relativo $\varphi(h) = \dfrac{c(t+h) - c(t)}{c(t)}$ dependa apenas de *h*, mas não de *t*.

Com relação a essas propriedades, as únicas funções que as descrevem são da forma: $c(t) = c_0 . a^t$, com $c_0 \in IR \ e \ a \in IR$, ou seja, as funções do tipo exponencial. A partir dessas funções, podemos utilizar as funções inversas às exponenciais, chamadas de funções logarítmicas, para reescrevê-las do seguinte modo: como $t = c^{-1}(t)$, temos que $c^{-1}(t) = log_a\left(\dfrac{c(t)}{c_0}\right)$, na qual a função é igual ao expoente *t* ao qual se deve elevar a base *a* para obtermos *c(t)*.

Funções do tipo $\left[c^{-1}(t)=\log_a\left(\frac{c(t)}{c_0}\right)\right]$, com $t>0$, $c_0\neq 0$, $a>0$ e $a\neq 1$, possuem a propriedade fundamental dos logaritmos, a de transformar produtos em somas, possibilitando compreender esses fenômenos que ocorrem nos mais diversos campos do conhecimento, e é sob esse viés que pretendemos apresentar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem, ou seja, vamos priorizar a importância do conceito de logaritmo, suas propriedades e algumas de suas aplicações.

Na próxima seção, apresentamos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (SIMON, 1995) para o ensino de logaritmos e suas propriedades operatórias, para a qual nos baseamos na articulação entre a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da Resolução de Problemas de Onuchic e Allevato (2011), o modelo de Polya (1994) e as fases da aula de Van de Walle (2009). Acreditamos que essa Trajetória Hipotética de Aprendizagem pode representar uma alternativa ao ensino tradicional.

4.2 O Estudo de Logaritmos - Trajetória Hipotética de Aprendizagem

Nessa THA apresentamos inicialmente os objetivos do professor com relação às aprendizagens dos estudantes. Os principais objetivos do planejamento do professor que pretende trabalhar com essa THA são:

- compreender a definição de logaritmo e suas condições de existência;
- relacionar as propriedades dos logaritmos com as propriedades das potências;
- reconhecer e resolver problemas que podem ser solucionados por meio de logaritmos e suas propriedades operatórias;
- interpretar os resultados obtidos na resolução desses problemas;
- compreender o conceito de função logarítmica e sua relação com a função exponencial;
- escrever leis de formação que representam funções exponenciais e logarítmicas e interpretar os valores de cada variável;

- solucionar equações exponenciais, analisando suas condições de existência, utilizando o conceito e as propriedades operatórias de logaritmos para realizar manipulações algébricas e simplificação de incógnitas nas equações;

A elaboração da THA começa com o esboço do plano de atividades para a aprendizagem dos estudantes e, nesse caso, optamos pela escolha de doze problemas em diferentes contextos, que envolvem o estudo de logaritmos, suas propriedades operatórias, funções exponenciais e logarítmicas e equações e inequações exponenciais e logarítmicas.

Dentre esses problemas, optamos por apresentar com detalhes as hipóteses do professor a respeito do processo de aprendizagem dos estudantes de um desses problemas. Os outros problemas são apresentados na seção 4.2.11, na qual fazemos uma breve descrição do problema, os objetivos específicos, os conteúdos específicos e as principais dúvidas que acreditamos que possam surgir no decorrer de sua resolução. A resolução de cada um desses onze problemas é apresentada com detalhes no Anexo A deste trabalho.

Dessa forma, essa THA é composta por doze problemas, no entanto não é necessário que todos esses problemas sejam utilizados para que os objetivos apresentados sejam alcançados, cabe ao professor decidir quais problemas pretende utilizar para introduzir o estudo de logaritmos e em qual ordem ele pretende trabalhar. É necessário ressaltar que um problema pode ou não abordar todas as propriedades operatórias dos logaritmos, por isso sugerimos que o professor escolha mais de um problema para que os estudantes explorarem todas as propriedades operatórias.

O problema que descrevemos a seguir envolve um dos recursos naturais do planeta para o sustento da população e a taxa de crescimento dessa população. Acreditamos que os estudantes tenham condições de resolver esse problema, mas não por meio dos logaritmos, considerando que eles ainda não estudaram esse conteúdo, mas sim por meio de aproximações que os levarão a solução. Nesse sentido, cabe ao professor sinalizar para a introdução do conceito de logaritmos, sua definição, suas consequências e suas aplicações. A preparação desse problema está prevista no roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011), e também retrata a etapa “Antes da Aula” descrita por Van de Walle (2009).

Na THA proposta a seguir, não delineamos uma divisão linear de todas as etapas de uma aula apresentadas no roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011). Destacamos a etapa da resolução do problema, na qual articulamos o modelo de Polya (1994) para descrever uma possível solução que acreditamos que os estudantes podem apresentar, incluindo possíveis dúvidas no decorrer da resolução, conforme sugerido por Simon (1995), como as hipóteses do professor sobre o processo de aprendizagem. Enfatizamos também a formalização do conteúdo no decorrer da aula, uma vez que a resolução do problema e a formalização representam aspectos essenciais da estratégia metodológica proposta. Justificamos essa escolha por estarmos apresentando uma proposta, e nesse caso, há algumas etapas que estão descritas de forma detalhada e outras nem tanto devido a dependência de como essa proposta pode ser implementada.

Para começar a trabalhar com esta THA, sugerimos que o professor contextualize a situação-problema que será apresentada, conversando sobre recursos naturais, sua escassez e o que tem sido feito para que eles sejam aproveitados da melhor forma possível, considerando os meios de produção de alimentos utilizados atualmente. Na sequência, é possível relacionar a discussão com a população mundial, questionando se os estudantes sabem em que proporção população mundial cresce a cada ano, qual o percentual médio de crescimento anual mundial, para então apresentarmos a seguinte situação-problema para a turma:

Figura 3 – Enunciado do Problema

Até quando o planeta pode nos sustentar?

Estima-se que 1350 m^2 de terra sejam necessários para fornecer alimento para uma pessoa. Admite-se, também, que há 28×1350 bilhões de m^2 de terra arável no mundo e que, portanto, uma população máxima de 28 bilhões de pessoas pode ser sustentada, se não forem exploradas outras fontes de alimento. A população mundial, no início de 2013, foi estimada em aproximadamente 7 bilhões de habitantes. Considerando que a população continua a crescer, a uma taxa de aproximadamente 2% ao ano, determine em quantos anos, a partir de 2013, a Terra teria a máxima população que poderia ser sustentada. (Adaptado de**: Unb – 1996**)[18]

FONTE: http://www.estadao.com.br/ - acesso em 09/03/2014

[18] Ao apresentar esse problema para os estudantes, o professor pode ou não apresentar os seguintes dados: (ln 1,02 = 0,02 e ln 2 = 0,70).

A leitura do enunciado pode ser feita individual e coletivamente, e o professor pode pedir que os estudantes expliquem o que entenderam a respeito do problema. Caso eles apresentem alguma dúvida com relação ao significado de alguma palavra, eles podem conferir em um dicionário para compreender esse significado.

O problema pode ser proposto aos estudantes para que eles resolvam individualmente ou em pequenos grupos, e o professor acompanha as resoluções desses grupos nas carteiras, verificando se os estudantes têm dúvidas ao resolvê-lo e levantando questionamentos para que eles consigam refletir a respeito de suas dúvidas e compreender como podem elaborar estratégias para a resolução desse problema. Na sequência, apresentamos uma resolução desse problema e dúvidas que os estudantes podem apresentar ao tentar resolvê-lo, considerando as quatro fases apresentadas no modelo de Polya (1994).

4.2.1 Compreendendo o Problema

Considerando o enunciado apresentado, esperamos que os estudantes sintam-se desafiados a buscar uma resolução que responda à pergunta do problema. Para tanto, o professor pode investigar com os estudantes quais são as informações relevantes que podem ser elencadas:

A população mundial em 2013 era de 7 bilhões de habitantes, ou, em notação científica, era de 7.10^9 bilhões de habitantes, que vamos considerar como população inicial (P(0)).

Possível Dúvida: os estudantes podem questionar com relação à notação utilizada. *Por que utilizar P(0) como população inicial?*

O professor pode justificar essa escolha ao afirmar que essa é a população considerada no tempo inicial, que nesse caso é o ano de 2013, ou também pode reelaborar a pergunta aos estudantes esperando que eles cheguem a essa conclusão. Outra possibilidade é deixar que os estudantes escolham como utilizar a notação para a população de 2013, ao que eles podem escolher a notação de P(2013). Na discussão que apresentaremos nessa THA, vamos considerar P(0), mas nada impede que os estudantes utilizem outra notação para representar a população inicial.

4.2.2 Estabelecendo um plano

Ao pensar sobre o crescimento populacional, o enunciado afirma que a população continua a crescer a uma taxa de 2% ao ano, logo sabemos que o fator pelo qual multiplicamos a população de cada ano é $102\% = 1{,}02$ para descobrir a população do ano seguinte.

Possível Dúvida: os estudantes podem apresentar dúvidas com relação a representação da porcentagem.

Mas podemos afirmar que 102% = 1,02? Por quê?

O professor pode retomar o significado da porcentagem ao questioná-los sobre as representações de 102%. Ao pensar em 102% de um valor qualquer, podemos utilizar a porcentagem na representação fracionária: $102\% = \frac{102}{100}$. E ao dividir 102 por 100, obtemos 1,02. Além disso, o professor pode aproveitar essa questão para discutir com os estudantes a respeito da população dos anos seguintes, sugerindo a elaboração de um quadro.

Nesse quadro, vamos usar a letra *t* para representar o tempo em anos, considerando que o ano de 2013 é o ano inicial, no qual *t = 0*. Então, para determinarmos a população dos anos seguintes, podemos calcular da seguinte forma:

Quadro 02: População em função do Tempo

Ano	t (em anos)	P (população no ano t)
2013	0	$P(0) = 7.10^9$
2014	1	$P(1) = 7.10^9.1{,}02^1$
2015	2	$P(2) = 7.10^9.1{,}02^2$
2016	3	$P(3) = 7.10^9.1{,}02^3$
...	...	...
?	t	$P(t) = 7.10^9.1{,}02^t$

Fonte: do autor.

Podemos modelar essa situação por meio de uma função do tipo exponencial definida por $P(t) = 7.10^9.1{,}02^t$, na qual P(t) representa a quantidade de habitantes no planeta em função de t anos (contados a partir de 2013), e o tempo t é dado em anos. Nesse caso, temos que o domínio dessa função é dado pelos números reais positivos, mas o domínio pode também ser estendido aos números reais negativos, conforme a possível dúvida a seguir.

Possível Dúvida: *Mas se 2013 é o ano inicial, como fazemos para saber a população do ano de 2012?*

No enunciado, não se afirma que a taxa de 2% valeria para antes de 2013, e nesse sentido, cabe ao professor deixar essa informação clara aos estudantes. No entanto, para responder a pergunta, é possível utilizar a mesma taxa, e dessa forma podemos apenas considerar a ordem do expoente *t*, considerando-o como $t = (-1)$, veja:

Ano	t (em anos)	P (população no ano t)
2012	-1	$P(0) = 7.10^9.1{,}02^{-1} = \dfrac{7.10^9}{1{,}02} \cong 6{,}86.10^9$

Note que, para determinarmos a população de qualquer ano *y*, basta considerar 2013 como ano zero (*t = 0*) e, a partir daí podemos considerar a seguinte igualdade: $P(y) = 7.10^9.1{,}02^{y-2013}$. Nesse caso, basta substituir o valor de *y* na fórmula: $P(y) = 7.10^9.1{,}02^{y-2013}$, e dessa forma podemos estimar a população de qualquer ano *y*, considerando que a taxa pudesse ser usada tanto para antes de 2013 quanto para depois.

Podemos também utilizar a ideia de porcentagem e por meio da regra de três obter a população de 2012. Seja: $\begin{cases} 7.10^9 = 102\% \\ x = 100\% \end{cases}$

Podemos reescrever essas informações como a igualdade de duas razões:

$$\frac{7.10^9}{x} = \frac{102\%}{100\%}$$

E como temos uma proporção, podemos multiplicar meios por extremos, obtendo:

$$7.10^9.100 = x.102$$

$$x = \frac{7.10^9.100}{102} \cong 6{,}86.10^9$$

Logo, a população em 2012 é de aproximadamente $6{,}86.10^9$ habitantes.

4.2.3 Executando o plano

Nosso objetivo é descobrir em quantos anos a população do planeta chegará a 28 bilhões de habitantes $\left(28.10^9\right)$, e para alcançá-lo basta substituir esse valor em P(t).

Possível Dúvida: *Por que substituir 28 no lugar de P(t)?*

Para responder a essa questão, voltaremos à ideia de como determinamos a igualdade, detalhando como construímos a tabela, e lembrando que a população está em função do tempo, e nesse caso, o valor desconhecido não é a população, mas sim o tempo. Portanto, é por isso que vamos substituir 28.10^9 em *P(t)*, com o objetivo de descobrir qual será o valor de *t*. Temos a seguinte equação:

$$P(t) = 7.10^9.1{,}02^t = 28.10^9$$
$$7.10^9.1{,}02^t = 28.10^9$$
$$7.1{,}02^t = 28$$
$$1{,}02^t = \frac{28}{7}$$
$$1{,}02^t = 4$$

Chegamos a uma equação exponencial, e para resolver esse tipo de equação, podemos utilizar aproximações para descobrir a qual expoente temos que elevar 1,02 para obter 4. Com o auxílio de uma calculadora científica, os alunos podem fazer alguns testes:

t	$1{,}02^t$
0	1
1	1,02
2	1,0404
3	1,061208
4	1,08243216
5	1,104080803

Para $t = 5$, temos um valor ainda menor do que *2* para $1{,}02^t$, então vamos substituir valores maiores para nos aproximarmos mais de 4:

t	$1{,}02^t$
10	1,21899442
20	1,485947396
30	1,811361584
40	2,208039664
50	2,691588029
60	3,281030788
70	3,999558223
71	4,079549387

Note que t está entre 70 e 71, mas para t = 70 temos uma aproximação mais precisa, logo temos $t = 70$ anos. Assim a população do planeta chegará a 28 bilhões em aproximadamente 70 anos. Portanto, em 2083, a Terra terá a máxima população que pode ser sustentada, considerando que não serão exploradas outras fontes de alimento.

4.2.4 Retrospecto

Acreditamos que a resolução apresentada pelos estudantes seja por meio de aproximações, e na sequência vamos retomar as fases na resolução desse problema.

1. Leitura e compreensão do problema, analisando os dados que são relevantes para que possamos elaborar um plano para solucioná-lo.
2. Análise da taxa de crescimento da população, primeiro ano a ano, e percepção que esse crescimento ocorre de forma exponencial, permitindo ser modelado por meio de uma fórmula.
3. Construção de uma fórmula que relaciona a taxa de crescimento da população mundial, nos dando sua quantidade em função do tempo em anos.
4. Por meio de tentativas, aproximamos o número de anos até descobrirmos aproximadamente em quanto tempo a população será aquela que estimamos, chegando a uma solução para o problema.

Substituindo 70 no valor de t da fórmula, temos:

$$P(70) = 7.10^9.1{,}02^{70} = 7.10^9.\ 3{,}999558223 = 10^9\ .27{,}996907559 \cong 28.10^9$$

Dessa forma, verificamos que em 70 anos, a população mundial será de 28 bilhões, o que significa no ano de 2083, a Terra terá a máxima população que pode ser sustentada, considerando que não serão exploradas outras fontes de alimento.

Uma vez terminada essa fase, os estudantes podem ser questionados a respeito da possibilidade de sempre realizar essas aproximações, e também sobre o fato de muitas vezes não ser tão simples de executar esses passos, afirmando que, para resolver esse problema, foi necessário um número considerável de tentativas, que podem tornar o cálculo trabalhoso e exaustivo.

Com o objetivo de simplificar o trabalho com essas operações, vamos apresentar novos conceitos para os estudantes, que poderão agilizar os cálculos e trazer uma nova abordagem para o problema.

4.2.5 Formalização do conteúdo: conhecendo os logaritmos

Retomando o contexto do problema, o professor pode considerar a equação exponencial: $1{,}02^t = 4$. Nessa equação, a incógnita aparece no expoente e uma alternativa para resolver equações exponenciais é igualar as bases em ambos os membros da equação, o que não parece ser viável nesse caso. Para resolver nessa equação, podemos introduzir o conceito de logaritmo e suas propriedades.

Definição: Sendo *a* e *b* números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de *b* na base *a* o expoente que se deve dar à base *a* de modo que a potência obtida seja igual a *b*, ou seja, se $a, b \in IR,\ 0 < a \neq 1\ \ e\ \ b > 0$, então:

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Dizemos que *a* é a **base do logaritmo**, *b* é o **logaritmando** e *x* é o **logaritmo**.

Fonte: Adaptado de Iezzi, Dolce e Murakami (2004)[19].

Possível Dúvida: os estudantes podem não compreender o conceito de logaritmos apenas com a definição, uma questão que pode surgir é: *Mas qual é a relação de logaritmo com o problema que estamos tentando resolver?*

[19] A definição de logaritmo que utilizamos é baseada na definição apresentada em Iezzi, Dolce, Murakami (2004). As demonstrações das consequências da definição e das propriedades dos logaritmos foram adaptadas de Iezzi, Dolce, Murakami (2004), Dante (2005).

Ao considerar essa questão, o professor pode aproveitar o contexto do problema e reescrever a equação exponencial: $1{,}02^t = 4$, na forma de um logaritmo. No caso do problema, a base é 1,02, t representa o expoente ao qual essa base é elevada para que o resultado seja 4. Nesse sentido, considerando a definição apresentada, temos:

$1{,}02^t = 4$ é o mesmo que $a^x = b$

Como *x* representa o expoente na segunda equação e *x* é o logaritmo, no caso da primeira equação o logaritmo é dado pela incógnita *t*, ou seja, podemos concluir que o logaritmo é a incógnita, que nada mais é do que o expoente da equação exponencial. Como na definição temos que $a^x = b$ é o mesmo que $\log_a b = x$, no caso do problema temos $1{,}02^t = 4$, que podemos reescrever como $\log_{1,02} 4 = t$. Nesse caso, temos que *1,02* é a base do logaritmo, *4* é o logaritmando e *t* é o logaritmo.

A equação exponencial apresentada no problema para os estudantes pode tornar a compreensão do conceito de logaritmo complexa, mas o professor pode utilizar alguns exemplos de logaritmos para que os estudantes tenham a oportunidade de trabalhar com casos nos quais o cálculo apenas com a definição seja possível ao igualar as bases em ambos os membros da igualdade.

Vamos enunciar alguns possíveis exemplos:

1) Vamos determinar o valor de $\log_3 81$:

Podemos utilizar a definição para determinar esse valor, temos:

$$\log_3 81 = x \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 81 \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Note que fatoramos 81, reescrevendo-o como uma potência de 3, chegando ao expoente que precisamos elevá-lo para obter 81. Observe que 4 é um número natural, mas será que os logaritmos podem ser apenas números naturais? Para responder a essa pergunta, considere o exemplo seguinte.

2) Qual é o valor de $\log_5 = 0{,}0016$?

Podemos reescrever 0,0016 como uma fração, veja:

$$\log_5 0{,}0016 = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 \frac{16}{10000} = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 \frac{1}{625} = x \quad \Leftrightarrow \quad \log_5 \frac{1}{5^4} = x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_5 5^{-4} = x \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 5^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad x = -4$$

Observe que simplificamos a fração e em seguida fatoramos 625 como uma potência de 5. Note que o logaritmo determinado é um número inteiro não natural.

3) Será que sempre obtemos um logaritmo pertencente ao conjunto dos inteiros? Vamos determinar o valor de $\log_{64} 4$. Pela definição de logaritmos, temos:

$$\log_{64} 4 = x \quad \Leftrightarrow \quad 64^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left(4^3\right)^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4^{3x} = 4^1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

Observe que reescrevemos 64 como uma potência de 4, e dessa forma foi possível igualar as bases, permitindo que trabalhemos apenas com seus expoentes. Assim chegamos à resposta, na qual o expoente representa um número racional não inteiro.

4) Será que sempre obtemos um logaritmo que pertence ao conjunto dos racionais? Vamos investigar o valor de $\log_{10} 2$.

Pela definição de logaritmos, temos: $\log_{10} 2 = y \quad \Leftrightarrow \quad 10^y = 2$.

Analisando a segunda igualdade, chegamos à questão: A qual expoente devemos elevar o número 10 para obter 2? Vejamos:

$$10^0 = 1$$
$$10^1 = 10$$
$$10^2 = 100$$

Temos que $10^0 = 1 < 2 < 10^2 = 100$, dessa forma o expoente procurado está entre 0 e 1. Vamos fazer algumas tentativas:

$$10^{0,1} = 1{,}258925411794\ldots$$
$$10^{0,2} = 1{,}584893192461\ldots$$
$$10^{0,3} = 1{,}995262314968\ldots$$
$$10^{0,4} = 2{,}511886431509\ldots$$

Observe que $10^{0,3}$ aproxima-se muito mais de 2 do que $10^{0,4}$, logo vamos usar uma aproximação: $\log_{10} 2 = 0{,}3$, embora saibamos que $\log_{10} 2$ é um número irracional, pois não conseguimos escrevê-lo como $\frac{a}{b}$, com $a, b \in Z$, $b \neq 0$.

Os exemplos apresentados até aqui possuem uma base do logaritmo maior que 1, Vejamos agora alguns exemplos com bases entre 0 e 1.

5) Qual é o valor de $\log_{\frac{1}{2}} 8$? Pela definição de logaritmos, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

Nessa etapa podemos aplicar algumas das propriedades das potências na segunda equação:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \;\Leftrightarrow\; 2^{-x} = 2^3 \;\Leftrightarrow\; x = (-3)$$

6) Determine o valor de $\log_{0,01} 0{,}001$. Pela definição de logaritmos e algumas das propriedades das potências, temos:

$$\log_{0,01} 0{,}001 = x \;\Leftrightarrow\; (0{,}01)^x = 0{,}001 \;\Leftrightarrow\; \left(10^{-2}\right)^x = 10^{-3} \;\Leftrightarrow\; 10^{-2.x} = 10^{-3} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -2.x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

Assim que trabalhar com esses exemplos de logaritmos, o professor pode retomar e discutir a definição de logaritmo. A seguir apresentamos duas possíveis dúvidas:

Possível Dúvida: *Por que na definição de logaritmo o valor da base* **a** *deve ser positivo e diferente de 1? Por que o valor de* **a** *não pode ser negativo?*

A base de um logaritmo representa a base de uma potência cujo expoente é o logaritmo, e o resultado obtido ao calcular essa potência é igual ao logaritmando. Quando definimos que a base é maior do que zero e diferente de 1, estamos considerando potências nos números reais, e a base precisa ser diferente de 1 uma vez que 1 elevado a qualquer expoente terá como resultado o próprio 1.

Vamos exibir um contraexemplo para esclarecer essa ideia. Suponha que tenhamos a seguinte equação: $\log_{-4} \mathrm{x} = 1/2$. Nessa equação pretendemos determinar o valor de x, ou seja, do logaritmando. Para tanto, reescrevemos a equação na seguinte forma:

$$-4^{\frac{1}{2}} = \mathrm{x} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{-4} = \mathrm{x} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(-1).4} = \mathrm{x} \;\Leftrightarrow\; 2.\sqrt{-1} = \mathrm{x} \;\Leftrightarrow\; 2\mathrm{i} = \mathrm{x}$$

Nesse caso, o logaritmando não pertence ao conjunto dos números reais, ou seja, não satisfaz a definição, na qual o logaritmando é um número real positivo. Portanto, para bases menores do que 1, nem sempre teremos que o logaritmando será um número real positivo. Outro contraexemplo que poderíamos ter utilizado seria tentar encontrar o valor de $\log_{-2} 8$, uma vez que não existe um expoente ao qual podemos elevar (-2) para obter 8 como resultado.

Possível Dúvida: *Por que o valor de* **b** *deve ser positivo?*

Sabemos que *b* representa o valor do resultado da potência a^x, logo podemos retomar o estudo de potências e considerar que, se $a \in IR_+^*$, então $a^x > 0$, ou seja, o resultado de uma potência quando sua base é positiva e diferente de zero é sempre positivo. Trazendo esses conceitos para o logaritmo, sabemos que o resultado de uma potência nada mais é do que o logaritmando, portanto o logaritmando não pode ser igual a zero e também não pode ser negativo.

4.2.6 Estudando As Consequências Da Definição

Depois de discutir a definição de logaritmo, é necessário considerar as consequências da definição, mas para que os estudantes tenham a oportunidade de compreender essas consequências sem que o professor apresente a eles uma por uma, o professor pode propor que os estudantes determinem alguns logaritmos. Apresentamos alguns a seguir:

$\log_3 1 = ?$	$\log_{\frac{2}{7}} 1 = ?$	$\log_{\sqrt{11}} 1 = ?$
$\log_5 1 = ?$	$\log_{0,12} 1 = ?$	$\log_a 1 = ?, \text{com } 0 < a \neq 1$

Nesses exemplos, esperamos que os estudantes observem que quando o logaritmando é igual a 1, o logaritmo sempre será igual à zero, uma vez que toda base elevada a zero é igual a 1, exceto quando temos 0^0, caso no qual temos uma indeterminação. Os estudantes podem estabelecer as relações entre logaritmos e potências, e caso não consigam, cabe ao professor criar condições para que eles o façam, por meio de questionamentos que possibilitem que eles reescrevam os logaritmos na forma de potência e observem o padrão.

A segunda consequência da definição pode ser obtida quando os estudantes determinarem os seguintes logaritmos:

$\log_3 3 = ?$	$\log_{\frac{2}{7}} \frac{2}{7} = ?$	$\log_{\sqrt{11}} \sqrt{11} = ?$
$\log_5 5 = ?$	$\log_{0,12} 0,12 = ?$	$\log_a a = ?, \text{com } 0 < a \neq 1$

Ao resolver esses exemplos com a definição de logaritmos, esperamos que os estudantes os relacionem com as potências, notando que toda base de potência elevada ao expoente um resulta na própria base, e quando falamos em logaritmos, quando o logaritmando é igual à base, o logaritmo será igual a 1, respeitando as condições de existência do logaritmo.

Para explorar a próxima propriedade, podemos utilizar os seguintes exemplos:

$5^{\log_5 125} = ?$	$5^{\log_5 3} = ?$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)} = ?$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = ?$	$a^{\log_a b} = ?$

Esperamos que os estudantes observem que quando temos uma base elevada a um logaritmo de mesma base, o resultado obtido será exatamente igual ao valor do logaritmando do expoente. Essa propriedade será sistematizada no último exemplo.

Na sequência, é interessante questionar os estudantes a respeito da última consequência da definição, fazendo uma pergunta semelhante a que apresentamos: *Quando temos* $log_a b = log_a c$ *, para quais valores de a, b e c essas igualdades são verdadeiras?*

Esperamos que primeiramente os estudantes atentem para as condições de existência de ambos os logaritmos, nas quais *a* é um número real positivo e diferente de 1, e *b* e *c* são números reais positivos. Em seguida, esperamos que eles possam tentar utilizar a definição para concluir que essa igualdade é válida apenas quando b = c. Em outras palavras, basta analisarmos que quando duas potências são iguais, e nesse caso as bases o são, logo os resultados (logaritmandos) também o serão.

É possível também demonstrar cada uma das consequências da definição, sistematizando matematicamente a validade de cada uma dessas consequências, assim como segue. Dados $a, b \in IR,\ 0 < a \neq 1,\ b > 0\ e\ c > 0$.:

1) $\log_a 1 = 0$

Demonstração: Pela própria definição de logaritmo, temos que:

$$\log_a 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = 1$$

2) $\log_a a = 1$

Demonstração: Pela definição de logaritmos, segue que:

$$\log_a a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = a$$

3) $\quad a^{\log_a b} = b$

Demonstração: vamos utilizar uma variável auxiliar. Seja $\log_a b = x$, assim substituindo em $a^{\log_a b}$, temos: $a^{\log_a b} = a^x$.

Mas como $\log_a b = x$, o que por definição é equivalente a: $a^x = b$.

Logo, por transitividade temos: $a^{\log_a b} = a^x = b$.

4) $\quad \log_a b = \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad b = c$

Demonstração: pela definição de logaritmo temos que $log_a b = log_a c \Leftrightarrow a^{log_a c} = b$, e pela proposição 3 já demonstrada temos que $a^{log_a c} = b \Leftrightarrow c = b$.

4.2.7 Explorando algumas propriedades dos Logaritmos

Com o objetivo de explorar as propriedades dos logaritmos, tendo em vista o cálculo do logaritmo obtido a partir da equação exponencial para resolver o problema ($1{,}02^t=4$), é possível fazer alguns questionamentos aos estudantes, tais como: *Respeitadas as condições de existência dos logaritmos, vocês acreditam que podemos afirmar que a igualdade a seguir é verdadeira ou falsa?*

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

Uma vez que os estudantes decidam se essa afirmação é verdadeira ou falsa, podemos questionar o porquê, para desencadear uma discussão que nos leve a justificar a veracidade dessa afirmação, por meio da definição de logaritmos e das consequências da definição. Caso os estudantes não consigam justificar, vamos sugerir que utilizem uma variável auxiliar, para reescreverem o logaritmo na forma de potência e assim, observarem que, de fato, a afirmação é verdadeira. Acreditamos que os estudantes farão uma justificativa semelhante a que apresentaremos a seguir.

1) *Logaritmo do Produto*

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores. Em símbolos:

$$\boxed{\begin{array}{c} Se\ 0 < a \neq 1,\ b > 0 \quad e \quad c > 0,\ então: \\ \log_a (b.c) = \log_a b \ + \ \log_a \ c \end{array}}$$

Demonstração: vamos utilizar três variáveis auxiliares *x*, *y* e *z,* e reescrever os logaritmos na forma de potência.

$$log_a b = x \iff a^x = b$$
$$log_a c = y \iff a^y = c$$

Multiplicando as duas primeiras equações, temos:

$$b.c = a^x.a^y$$

Pela propriedade do produto de potências com bases iguais, sabemos que podemos somar seus expoentes. Logo:

$$b.c = a^{x+y}$$

Utilizando a definição de logaritmos nessa última igualdade, obtemos:

$$b.c = a^{x+y} \quad \iff \quad \log_a (b.c) = x + y$$

Agora substituindo os valores de x e y na igualdade, chegamos a:

$$\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a \ c$$

Possível Dúvida: *Por que utilizar variáveis auxiliares?*

O professor pode responder a essa pergunta afirmando que para conseguir comparar a igualdade apresentada, é necessário que tenhamos alguma ideia sobre os valores de $log_a b \ \ e \ \ log_a c$, mas não sabemos esses valores, e é nesse ponto que a substituição de cada um desses logaritmos por uma letra pode facilitar os cálculos. Na verdade, como os logaritmos representam os expoentes de uma potência de mesma base, utilizamos as propriedades das potências para realizar essas demonstrações.

Outra alternativa é apresentar alguns exemplos numéricos para que os estudantes possam generalizar a partir desses exemplos, trocando os números por letras que representam todos os possíveis valores para os elementos considerados em um logaritmo.

Para as duas próximas propriedades (logaritmo do quociente e logaritmo da potência), o procedimento adotado pode ser o mesmo àquele da propriedade 1, no qual questionamos os estudantes a respeito da veracidade das igualdades a seguir (respeitando as condições de existência dos logaritmos):

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b \;-\; \log_a c \qquad\qquad \log_a b^{\alpha} = \alpha.\log_a b$$

Em seguida, vamos demonstrá-las seguindo orientações dos estudantes e utilizando a definição de logaritmos e as propriedades já vistas.

2) *Logaritmo do Quociente*

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor. Em símbolos:

$$\boxed{\begin{array}{c} Se\ 0 < a \neq 1,\ b > 0 \quad e \quad c > 0,\ então: \\ \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b \;-\; \log_a c \end{array}}$$

Demonstração: vamos utilizar três variáveis auxiliares *x*, *y* e *z*, e reescrever os logaritmos na forma de potência.

$$log_a b = x \;\Leftrightarrow\; a^x = b$$
$$log_a c = y \;\Leftrightarrow\; a^y = c$$

Dividindo as duas primeiras equações, obtemos:

$$\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y}$$

Pela propriedade do quociente de potências de mesma base, sabemos que podemos subtrair os expoentes, chegando a:

$$\frac{b}{c} = a^{x-y}$$

Utilizando a definição de logaritmos nessa última igualdade, temos que:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x - y$$

Agora substituindo os valores de x e y na igualdade, chegamos a:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

3) *Logaritmo de Potência*

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência. Em símbolos:

$$\boxed{\begin{array}{c} Se\ 0 < a \neq 1,\ b > 0 \ \ e\ \ \alpha \in IR,\ então: \\ \log_a b^{\alpha} = \alpha . \log_a b \end{array}}$$

Demonstração: vamos utilizar duas variáveis auxiliares *x* e *y*, e reescrever os logaritmos na forma de potência.

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

$$\log_a b^{\alpha} = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = b^{\alpha}$$

Como $a^x = b$, vamos substituir na segunda igualdade, obtendo:

$$a^y = b^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad a^y = \left(a^x\right)^{\alpha}$$

Pela propriedade do expoente de uma potência, sabemos que podemos multiplicar os expoentes, obtendo:

$$a^y = a^{x.\alpha}$$

Como as bases são iguais, temos:

$$y = x.\alpha$$

Substituindo os valores de *x* e *y* na igualdade, obtemos:

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha . \log_a b$$

As três propriedades apresentadas são válidas considerando as três restrições para *a*, *b* e *c*, e nos permitem obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência, conhecendo somente os logaritmos dos termos do produto, dos termos do quociente ou da base da potência.

Notemos a impossibilidade de obter o logaritmo de uma soma ou de uma diferença por meio de regras análogas às dadas. Assim, para determinarmos $\log_a (b+c)$ e $\log_a (b-c)$ devemos, respectivamente calcular inicialmente $b+c \ \ e \ \ b-c$.

As expressões algébricas que envolvem somente as operações de multiplicação, divisão e potenciação são chamadas de *expressões logarítmicas*, isto é, expressões que podem ser calculadas utilizando logaritmos, com as restrições já conhecidas

(IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004). Na sequência vamos apresentar um problema no qual podemos utilizar a propriedade de mudança de base e suas consequências.

O professor pode continuar fazendo o seguinte questionamento para os estudantes: *Será que podemos trocar a base de um logaritmo quando não conseguirmos utilizá-lo na base em que ele é dado?*

Esse questionamento remete ao problema proposto no início desta THA, e a partir dele o professor pode discutir com os estudantes a questão da mudança de base e como essa propriedade pode facilitar os cálculos que envolvem logaritmos quando temos a calculadora como uma ferramenta para resolver cálculos dessa natureza.

Para ilustrar essa questão proposta, apresentamos o seguinte desafio:

Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e que $\log_{20} 3 = b$, calcule $\log_6 5$.

Para resolver esse desafio, observamos que as bases dos logaritmos são diferentes, logo será necessário apresentar mais uma propriedade de logaritmos, a mudança de base:

4) *Mudança de Base*

Existem situações nas quais logaritmos em bases diferentes precisam ser convertidos para uma única base conveniente, para que possamos aplicar as propriedades operatórias (1, 2 e 3), pois para aplicá-las, todos os logaritmos devem estar na mesma base.

Vejamos o processo que permite converter o logaritmo de um número positivo, em certa base, para outro em base conveniente. Se *a*, *b* e *c* são números reais positivos e *a* e *c* diferentes de 1, então tem-se:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Demonstração: vamos utilizar três variáveis auxiliares *x*, *y* e *z*, e reescrever os logaritmos na forma de potência.

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$
$$\log_c b = y \quad \Leftrightarrow \quad c^y = b$$
$$\log_c a = z \quad \Leftrightarrow \quad c^z = a$$

Note que $z \neq 0$, pois $a \neq 1$. Queremos mostrar que $x = \dfrac{y}{z}$.

Como $c^z = a$, elevamos a *x* ambos os membros da igualdade e obtemos $(c^z)^x = a^x$, mas $a^x = b$, então $(c^z)^x = b$. E como $c^y = b$, temos também que $(c^z)^x = c^y$, ou seja, $c^{z.x} = c^y$, o que implica que $z.x = y \iff x = \dfrac{y}{z}$.

Substituindo os valores de x, y e z, temos:

$$x = \frac{y}{z} \iff \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Observação:

A propriedade de mudança de base também pode ser assim apresentada:

Se *a*, *b* e *c* são números reais positivos com *a* e *c* diferentes de 1, então tem-se:

$$\boxed{\log_a b = (\log_c b).(\log_a c)}$$

Demonstração: vamos partir do segundo membro da igualdade para chegar no primeiro, reescrevendo $\log_c b$ na base *a*, temos $\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$, e substituindo obtemos:

$$(\log_c b).(\log_a c) = \left(\frac{\log_a b}{\log_a c}\right).\log_a c = \log_a b$$

Voltando ao Desafio:

Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e que $\log_{20} 3 = b$, calcule $\log_6 5$.

Para resolvê-lo, vamos reescrever $\log_5 6$ na base 20, para em seguida reescrever 6 como 3.2, e 5 como 20/4, e a partir daí utilizar as propriedades que já conhecemos:

$$\log_6 5 = \frac{\log_{20} 5}{\log_{20} 6} = \frac{\log_{20}\left(\frac{20}{4}\right)}{\log_{20} 2.3} = \frac{\log_{20} 20 - \log_{20} 4}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} = \frac{1 - \log_{20} 2^2}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3}$$

$$\log_6 5 = \frac{1 - 2 . \log_{20} 2}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3}$$

Agora podemos substituir os valores dados no enunciado para determinar o valor procurado: $\log_6 5 = \dfrac{1 - 2.a}{a + b}$.

4.2.8 Consequências da Propriedade de Mudança de Base

Para aprofundar os estudos da propriedade de mudança de base, sugerimos que o professor pode deixar como tarefa para os estudantes que eles demonstrem a veracidade das seguintes igualdades:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad \text{e} \qquad \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}.\log_a b$$

Com esses dois últimos exemplos, esperamos que os estudantes utilizem novamente a definição de logaritmo para verificarem que as igualdades são verdadeiras. Em caso de dúvidas, o professor pode retomar as outras propriedades já estudadas e fazer questionamentos aos estudantes de modo que eles consigam realizar essas demonstrações.

a) Se *a* e *b* são números reais positivos e diferentes de 1, então tem-se:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Demonstração: vamos partir do membro esquerdo, reescrevendo na base b.

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

Mas como $\log_b b = 1$, temos:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

b) Se *a* e *b* são números reais positivos com *a* diferente de 1 e β é um real não nulo, então tem-se:

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}.\log_a b}$$

Demonstração: vamos partir de $\log_{a^\beta} b$, e reescrevê-lo na base *a*:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta}$$

Pela propriedade do expoente, e em seguida a consequência da definição $(\log_a a = 1)$ temos que:

$$\frac{\log_a b}{\log_a a^{\beta}} = \frac{\log_a b}{\beta.\log_a a} = \frac{\log_a b}{\beta} = \frac{1}{\beta}.\log_a b$$

O professor não precisa necessariamente sistematizar todas essas propriedades aos estudantes de uma vez, mas pode explorá-las conforme os estudantes precisem delas na resolução de um determinado problema proposto.

4.2.9 Sistemas de Logaritmos

Uma vez exploradas as propriedades que envolvem a mudança de base, o professor pode retomar a discussão a respeito da utilização da calculadora explicando para os estudantes que as calculadoras científicas em geral possibilitam o cálculo de logaritmos apenas em duas bases, *10* e *e*.

Ao estudar a definição de logaritmos, vimos que $\log_a b$ existe se a base *a* é maior do que zero e diferente de um, ou seja, $a > 0$ e $a \neq 1$, e também precisamos ter $b > 0$. Dada uma base *a*, chamamos de sistemas de logaritmos da base *a* o conjunto formado por todos os logaritmos dessa mesma base dos números reais e positivos (IEZZI; DOLCE; MURAKAMI, 2004; LIMA, 2010).

Com relação aos sistemas de logaritmos, existem dois que são particularmente importantes: o sistema de logaritmos decimais (com base 10), e o sistema de logaritmos neperianos (com base e).

Geralmente quando utilizamos o sistema de logaritmos decimais, costumamos omitir a base do logaritmo, por exemplo:

$$\boxed{\log_{10} b = \log b \quad , para\ b > 0}$$

O sistema de logaritmos neperianos utiliza como base o número irracional e $(e = 2{,}71828...)$, e também é chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome *neperiano* vem de John Napier, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos. O nome *natural* se deve ao fato de que no estudo dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial na base *e* (LIMA, 2010; LIMA et al., 2006). O logaritmo neperiano geralmente tem a seguinte notação:

$$\boxed{\log_e b = \ln b \quad , \; para\; b > 0}$$

Depois de apresentar os logaritmos e suas propriedades, vamos retornar ao problema proposto para simplificar a solução com o uso dessas novas ferramentas das quais dispomos agora.

4.2.10 Voltando ao problema

Ao retornar ao problema, vamos repensar suas fases de resolução, naturalmente já o compreendemos, e também elaboramos um plano para a sua resolução, vamos retornar à fase da execução do plano, na qual havíamos decidido anteriormente que a utilização das aproximações seria a melhor alternativa. Nessa nova abordagem, o problema será resolvido por meio do novo conteúdo, os logaritmos.

Lembrando que podemos modelar a situação por meio da função exponencial definida por $P(t) = 7.10^9.1{,}02^t$, na qual P(t) representa a quantidade de habitantes no planeta em função de t anos (contados a partir de 2013), e o tempo *t* é dado em anos.

$$P(t) = 7.10^9.1{,}02^t = 28.10^9$$

$$7.10^9.1{,}02^t = 28.10^9$$

$$7.1{,}02^t = 28$$

$$1{,}02^t = \frac{28}{7}$$

$$1{,}02^t = 4$$

Ao chegarmos nessa etapa, podemos utilizar a definição de logaritmos, em que t é o logaritmo procurado, ou seja, o expoente desconhecido ao qual devemos elevar 1,02 para obter 4. Ao reler o enunciado, note que ele fornece as seguintes informações:

$$\ln 1{,}02 = 0{,}02 \quad \text{e} \quad \ln 2 = 0{,}70$$

as quais nos ajudarão na escolha de uma base para utilizarmos os logaritmos. Utilizando a definição de logaritmos, podemos reescrever a equação $1{,}02^t = 4$ na forma:

$$1{,}02^t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{1,02} 4 = t$$

Note que a base do logaritmo é 1,02, e esse valor está de acordo com a definição de logaritmos, no qual a base deve ser positiva e diferente de 1. O logaritmando é positivo e igual a 4, e a incógnita nessa equação é o logaritmo, ou seja, o expoente t ao qual devemos elevar a base 1,02 para obter o resultado 4.

Considerando dados que podem ou não ser apresentados no enunciado ($\ln 1{,}02 = 0{,}02$ e $\ln 2 = 0{,}70$), podemos utilizar a propriedade da mudança de base, obtendo:

$$\log_{1,02} 4 = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln 4}{\ln 1{,}02} = t$$

Note que $4 = 2^2$, logo poderemos utilizar a propriedade do expoente:

$$\frac{\ln 4}{\ln 1{,}02} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln 2^2}{\ln 1{,}02} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2.\ln 2}{\ln 1{,}02} = t$$

Agora podemos substituir os dados do enunciado:

$$t = \frac{2.\ln 2}{\ln 1{,}02} = \frac{2.0{,}70}{0{,}02} = \frac{1{,}4}{0{,}02} = 70$$

Se o professor optou por não apresentar os dados ($\ln 1{,}02 = 0{,}02$ e $\ln 2 = 0{,}70$) no enunciado, ele pode utilizar uma calculadora com os alunos e utilizar as propriedades necessárias para resolver o problema, incluindo propriedade da mudança de base.

Assim, temos que em aproximadamente 70 anos, a Terra terá a máxima população que poderia ser sustentada. Nessa segunda resolução, não foram utilizadas aproximações, mas as informações apresentadas no enunciado, anteriormente desconhecidas por quem não havia estudado logaritmos. Com a utilização dos logaritmos, os estudantes possuem mais uma ferramenta para resolver tanto esse quanto outros problemas que possam envolver as mesmas ideias e conceitos matemáticos.

Na sequência, apresentamos outros problemas correlatos[20], de modo que o professor tenha diferentes alternativas para introduzir o ensino de logaritmos e suas propriedades por meio de um problema.

---

[20] Com o termo “problemas correlatos”, eu quero dizer que apresentaremos alguns problemas semelhantes, mas não do tipo que apenas os números são diferentes, mas sim problemas que envolvem o conceito de logaritmo e suas propriedades, que demandem que os estudantes reflitam sobre esses conceitos para resolver e interpretar esses problemas.

4.2.11 Para além de um problema...

Nessa seção, apresentamos onze problemas[21] que envolvem conceitos e propriedades estudados no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar”, além de outras propriedades dos logaritmos que podem não ter sido exploradas diretamente na resolução desse problema. O objetivo desses problemas é aprofundar os conceitos estudados, considerando outros contextos nos quais o estudo dos logaritmos podem possibilitar novas discussões e a aprendizagem de novos conceitos na perspectiva da Resolução de Problemas. Esses problemas também podem ser utilizados para introduzir o conceito de logaritmos e suas propriedades operatórias, o que configura uma questão de escolha para o professor. É importante ressaltar que o professor pode sistematizar as propriedades dos logaritmos conforme vá surgindo a necessidade de utilizá-las por meio de outros problemas.

1. (**UNIRIO – 1994**) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio varia de acordo com a fórmula $A = 40.(1{,}1)^t$, na qual A é a medida em centímetros e t representa o tempo em anos. Sabendo que $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e $\log_{10} 11 \cong 1{,}04$, determine:

a) A altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

b) A idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de 1,6 m.

Nesse problema, temos uma aplicação de uma função exponencial, da qual a lei de formação é dada no enunciado e as variáveis são identificadas nessa lei. O conteúdo envolvido é função exponencial. No item a), é pedido que seja calculada a altura da planta em função do tempo, basta que o estudante reconheça que é possível substituir o tempo na variável independente t. No item b), é dada a altura da planta e o estudante precisa resolver uma equação exponencial, na qual não é possível igualar as bases e, portanto é necessário que o estudante utilize o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos. Além disso, é preciso que o estudante esteja atento às unidades de medida, uma vez que a lei de formação da altura da planta é dada em centímetros e no item b) a pergunta apresenta uma informação

[21] As resoluções detalhadas de cada um desses problemas estão no Anexo A deste trabalho.

em metros, ou seja, o estudante precisa realizar uma conversão.

Objetivos específicos:

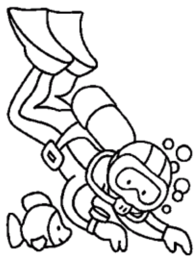
- calcular o valor de uma função exponencial para um valor determinado da variável independente;
- resolver uma equação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;
- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem quesitonar a lei de formação, qual é o significado de $1{,}1^t$, e como se obtém essa lei, e o professor pode explorar informações que estão subjacentes ao problema, tais como os 10% de crescimento a cada unidade de tempo, uma vez que $1{,}1 = 1 + 0{,}1$, e como esse valor está elevado ao tempo, podemos notar que a taxa de crescimento é de 10% por unidade de tempo. Ao discutir essa questão, possibilita-se que os estudantes tenham mais facilidade ao interpretar problemas nos quais a lei de formação não é apresentada. Além dessa questão, os estudantes podem apresentar dúvidas semelhantes àquelas apresentadas no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar?”, que demanda que a lei de formação seja elaborada pelos estudantes.

2. (**UERJ – 2008**) Admita que, em um determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação $I = I_0.(0{,}8)^{h/40}$, na qual I é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_0 é a intensidade na superfície. Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície. Determine um valor aproximado para a profundidade do ponto P. Considere $\log_{10} 2 = 0{,}3$.



Nesse problema, temos outra aplicação de uma função exponencial, na qual a lei de formação também é dada no enunciado e as variáveis são identificadas nessa lei e há uma explicação para a fórmula, ou seja, apresenta-se o porquê do valor da base ser de 0,8 (a questão da redução dos 20%), e além disso, está implícito o porquê de existir no expoente uma divisão, na qual a altura *h* é dividida por *40*. O conteúdo envolvido é função exponencial e, para resolver o problema, o estudante precisa resolver uma equação exponencial, , na qual não é possível igualar as bases e, portanto é necessário que o estudante utilize o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos. O estudante também precisa estar atento às diferentes representaçoes para porcenagens, como por exemplo as igualdades 80% = 80/100 = 0,8, principalmente no momento de substituir os valores na equação.

Objetivos específicos:

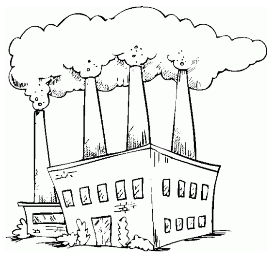
- trabalhar com manipulação algébrica e simplificação de incógnitas em uma equação;
- resolver uma equação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;
- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas com relação à porcentagem e suas representações e também relacionadas à lei de formação, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes na lei de formação do problema em questão, para que seja esclarecido o porquê de, por exemplo, no expoente da base *0,8* a altura *h* ser dividida por *40*. Além dessas dúvidas, os estudantes podem apresentar dúvidas semelhantes àquelas apresentadas no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar?”, que demanda que a lei de formação seja elaborada pelos estudantes.

3. (**PUC/SP – 2004**) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996? (Dados: $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$).



Nesse problema, é apresentada outra aplicação de uma função exponencial, na qual a lei de formação não é dada no enunciado e o estudante precisa escrever essa lei de formação. Para tanto, ele pode proceder assim como foi feito no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar”, elaborando uma tabela, ou também é possível escrever a lei de formação a partir das informações apresentadas no enunciado para, na sequência, o estudante resolver uma equação exponencial, na qual ele precisa considerar a lei de formação que relaciona a produção da indústria em função do tempo e descobrir em quanto tempo a produção será de determinado valor.

Objetivos específicos:

- escrever uma lei de formação que relaciona a produção da indústria com o tempo;
- resolver uma equação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;
- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas relacionadas a como escrever a lei de formação, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes nessa lei, e o professor pode explorar essas dúvidas assim como no problema "Até quando o planeta pode nos sustentar".

4. A massa de uma amostra radioativa é de 40g. Após quanto tempo de desintegração teremos 8g do material radioativo, sabendo que a meia-vida é de 3h? Dados: $\log_{10} 2 = 0{,}3$ e $\log_{10} 5 = 0{,}7$.

Esse problema apresenta um termo que pode ser desconhecido para os estudantes, a meia-vida, e o professor pode explorar esse termo ao citar situações nas quais é importante conhecer o significado do termo meia-vida, como por exemplo, quando tomamos algum medicamento e os efeitos desse remédio no nosso organismo e suas relações com a meia-vida. Para resolver esse problema, o estudante pode escrever uma lei de formação que relacione a massa de uma amostra radioativa com o tempo, e a partir dessa lei, resolve-se uma equação exponencial na qual é necessário utilizar os conceitos que envolvem os logaritmos e suas propriedades operatórias.

Objetivos específicos:

- escrever uma lei de formação que relaciona a massa da substância radioativa com o tempo;

- resolver uma equação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;
- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas relacionadas a como escrever a lei de formação, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes nessa lei, e o professor pode explorar essas dúvidas assim como no problema "Até quando o planeta pode nos sustentar".

5. O acidente do reator nuclear de Chernobyl, URSS, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90, cuja meia-vida é de 28 anos. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de estrôncio-90 se reduzir, por desintegração, a 1/16 da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente?

Adaptado de Lima (2010)

Nesse problema, não é necessário que os estudantes utilizem o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos, uma vez que é possível escrever uma equação exponencial e igualar as bases das potências nessa equação, o que posssibilita que a resolução seja encontrada dessa forma. Além disso, novamente é explorado o termo meia-vida, e é apresentada uma situação que denota a importância desse termo. Os estudantes também podem elaborar uma lei de formação e considerar uma função que relacione a isótopo radioativo estrôncio-90 e o tempo em anos.

Objetivos específicos:

- resolver uma equação exponencial por meio das propriedades de uma equação exponencial ou utilizando os logaritmos e suas propriedades operatórias.

Conteúdos específicos:

- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas relacionadas a como escrever a lei de formação de uma função que relacione a quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90 e o tempo em anos, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes nessa lei, e o professor pode explorar essas dúvidas assim como no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar”.

6. (**UCB – 2000**) “Esta mão sóbria, retinta de resina negra, com dedos rugosos e unhas amareladas pelo pó do deserto, tem 2000 anos. Não pertence a nenhum rei ou faraó. Serviu a um lavrador anônimo, em um instante quase perdido da história. Arqueólogos descobriram, no Egito, a maior população homogênea de múmias já encontradas. Elas revelam uma rica história plebeia, sem pompa e eloquência. O dia-a-dia da aldeia de Ain Labakha há dois milênios”.

Superinteressante, abril/98.

Na determinação da idade de múmias, recorre-se às propriedades radioativas do Carbono 14. Sabendo-se que o tempo de meia-vida do isótopo 14 do carbono é de 5730 anos e que a taxa de carbono 14 encontrada numa múmia é 2/3 da taxa inicial, calcule o ano em que a múmia foi preparada.

Dados: $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$; e o ano em que a múmia foi encontrada é 1997.

Nesse problema, para escrever a lei de formação que relaciona o tempo com a quantidade de Carbono 14 presente na múmia, os estudantes precisam considerar a meia-vida da múmia e que não é apresentada uma quantidade determinada de Carbono 14 presente na múmia inicialmente, ou seja, existem outra incógnita, assim como alguns dos problemas anteriores.

O conteúdo envolve uma lei de formação e a resolução de uma equação exponencial por meio de logaritmos e suas propriedades opertórias.

Objetivos específicos:

- escrever uma lei de formação que relaciona a quantidade de Carbono 14 com a idade da múmia;
- resolver uma equação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;

- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas relacionadas a como escrever a lei de formação, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes nessa lei, e o professor pode explorar essas dúvidas assim como no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar”.

7. Em algumas situações, para expressar certas grandezas, é mais conveniente empregar as chamadas *escalas logarítmicas* do que as escalas lineares convencionais. Este é o caso, por exemplo, da escala Richter de terremotos. Na escala Richter, a intensidade I de um terremoto, expressa em graus, é definida da seguinte forma:

$$I = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Na qual E representa a energia liberada pelo terremoto, medida em kWh, e $E_0 = 10^{-3}kWh$.

a) Qual é a energia liberada por um terremoto de 3 graus na escala Richter? E por um terremoto de 9 graus?

b) Qual é a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau k+1 na escala Richter?

(LIMA, 2010)

Nesse problema é apresentada uma função logarítmica, cuja lei de formação é apresentada no enunciado do problema e o valor de um dos elementos da lei de formação (E_0) é apresentado na sequência, sendo assim o estudante pode sustituir o valor de E_0 na função. Para responder ao item a), o estudante precisa resolver duas equações logarítmicas, que envolvem as propriedades dos logaritmos e das potências. Quando ao item b), o estudante precisa fazer uma comparação e, para tanto, é interessante que ele resolva a equação logartímica em ambos os casos e depois encontre uma razão entre elas, que permitirá descobrir a relação pedida, mas para que ele realize esses cálculos, é preciso que esteja muito atento com relação às propriedades das potências e dos logaritmos que utilizar, uma vez que estará trabalhando com uma manipulação quase que exclusivamente algébrica.

.**Objetivo específico:**

- resolver equações logarítmicas utilizando as propriedades operatórias dos logaritmos e das potências.

Conteúdos específicos:

- função logarítmica;
- equação logarítmica;
- potências, logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas relacionadas às manipulações algébricas presentes na resolução desse problema.

8. (**VUNESP-2000**) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22h. Às 22:30h o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5° C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de 36,5°C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por $D(t) = D_0.2^{-2at}$, em que *t* é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio no instante *t = 0, D(t)* é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante *t* qualquer e *a* é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

	**Hora**	**Temperatura do corpo (°C)**	**Temperatura do quarto (°C)**	**Diferença de Temperatura (°C)**
t = ?	Morte	36,5	16,5	D(t) = 20
t = 0	22h 30min	32,5	16,5	$D(0) = D_0 =$ 16
t = 1	23h 30min	31,5	16,5	D(1) = 15

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2{,}3$ e $\log_2 3 = 1{,}6$, determine:

a) A constante *a*.

b) A hora em que a pessoa morreu.

Nesse problema, temos outra aplicação de uma função exponencial, na qual a lei de formação também é dada no enunciado e as variáveis e os elementos da função são identificadas nessa lei. O contexto apresenta a lei de resfriamento de Newton e algumas informações a respeito do caso apresentado no problema. Essas informações são úteis para responder ao item a), uma vez que o valor de um dos elementos da lei de formação da função (o parâmetro *a*) não é dado no enunciado. Quanto ao item b), uma vez conhecida a resposta do item a), basta resolver uma equação exponencial utilizando a definição e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Objetivos específicos:

- trabalhar com manipulação algébrica e simplificação de incógnitas em uma equação;
- resolver uma equação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;
- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas com relação à lei de formação, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes na lei de formação do problema em questão. Além dessas dúvidas, os estudantes podem apresentar dúvidas semelhantes àquelas apresentadas no problema "Até quando o planeta pode nos sustentar?".

9. (**UERJ – 2004**) Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação: $T = T_0 + k.e^{-ct}$. Nesta relação, T é medida na escala Celsius, t é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e k e c são constantes a serem determinadas. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100°C, colocada numa sala de temperatura 20°C. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de 40ºC.

a) Calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b) Considerando $\ln 2 = 0,7$ e $\ln 3 = 1,1$, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu a metade.

Nesse problema, temos outra aplicação de uma função exponencial, na qual a lei de formação também é dada no enunciado e as variáveis e os elementos da função são identificadas nessa lei. O estudante precisa determinar o valor de cada elemento da lei de formação considerando os dados do enunciado, para que possa responder aos itens a) e b).

Objetivos específicos:

- trabalhar com manipulação algébrica e simplificação de incógnitas em uma equação;
- resolver uma equação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;
- equação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas com relação à lei de formação, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes na lei de formação do problema em questão. Além dessas dúvidas, os estudantes podem apresentar dúvidas semelhantes àquelas apresentadas no problema "Até quando o planeta pode nos sustentar?".

10. (**PUC – 2013**) Ao contrário de um imóvel, que fica mais valorizado comercialmente dia após dia, um veículo começa a perder o seu valor no instante em que sai da loja. Alguns modelos perdem menos, outros mais. Segundo um especialista, a média de depreciação de um carro de passeio nacional com até dois anos de vida é de 20% a 35%. Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se *P* representa o preço inicial (preço de fábrica) e *p(t)* o preço após *t* anos, determine o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se necessário, use $\log 3 \cong 0{,}477$ e $\log 5 \cong 0{,}699$.

Nesse problema apresenta-se outra aplicação na qual podemos trabalhar com função exponencial e é preciso escrever a lei de formação para que seja possível relacionar a desvalorização do veículo com o tempo.

Objetivos específicos:

- escrever uma lei de formação que relaciona a desvalorização do veículo com o tempo decorrido;

- resolver uma inequação exponencial utilizando o conceito e as propriedades operatórias dos logaritmos.

Conteúdos específicos:

- função exponencial;
- inequação exponencial;
- logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas com relação à lei de formação, o que possibilita uma discussão acerca do significado dos elementos presentes na lei de formação do problema em questão. Além dessas dúvidas, os estudantes podem apresentar dúvidas semelhantes àquelas apresentadas no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar?”.

11. (**PUC – 2013**) Considere a sequência:

$$\boxed{a_n = \log_{b_1}\sqrt{5} + \log_{b_2}\sqrt{5} + \dots + \log_{b_n}\sqrt{5}}$$

Na qual $b_1 = a,\ a > 1$ e $b_{k+1} = (b_k)^2,\ k = 1, \dots, n-1$.

Determine o valor de *a* para o qual $a_{10} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

O contexto desse problema é matemático e para resolvê-lo, o estudante precisa conhecer as propriedades operatórias dos logaritmos e das potências.

Objetivos específicos:

- trabalhar com manipulação algébrica e simplificação de incógnitas em expressões que envolvem logaritmos e potências;
- utilizar as propriedades operatórias dos logaritmos e das potências.

Conteúdos específicos:

- potências, logaritmos e propriedades operatórias.

Principais dúvidas que podem surgir: os estudantes podem apresentar dúvidas com relação aos procedimentos para resolver esse problema e cade ao professor questioná-los de forma que eles elaborem estratégias para chegar a resposta do problema.

Acreditamos que, com a resolução desses problemas, ou pelo menos de alguns deles, que o professor pode selecionar previamente, os estudantes podem aprofundar e revisitar os conceitos estudados no problema “Até quando o planeta pode nos sustentar”.

4.2.12 A perspectiva de avaliação para essa THA

Nossa perspectiva de avaliação nesse plano de aula tem como objetivo obter informações sobre o “estado” de conhecimento dos estudantes sobre os conteúdos estudados, para que possamos intervir e possibilitar que eles se avaliem enquanto aprendizes e tenham como objetivo compreender e utilizar os conteúdos estudados. Pretendemos analisar o quanto os estudantes poderão ter aprendido no decorrer do desenvolvimento dessa THA, por meio do diálogo e das discussões que surgirem no decorrer da aula a partir do problema que será proposto.

De acordo com Dante (1999), a avaliação deve ser entendida pelo professor como um processo de acompanhamento e compreensão dos avanços, dos limites e das dificuldades dos alunos para atingirem os objetivos das atividades que participarem. Pensamos que a avaliação não deve ser classificatória, e por isso precisamos considerar os erros e as dúvidas dos alunos, para descobrir as causas deles, e por meio delas podemos ajudá-los, trabalhando em cima desses erros e planejando novas atividades.

De acordo com Silva:

> [o] sentido da avaliação é compreender o que se passa na interação entre o ensino e a aprendizagem para uma intervenção consciente e melhorada do professor, fazendo seu planejamento e seu ensino e para que o aprendente tome consciência também de sua trajetória de aprendizagem e possa criar suas próprias estratégias de aprendizagem (SILVA, 2004 p. 60).

Dessa forma, acreditamos que podemos criar condições para os estudantes descobrirem suas próprias estratégias de avaliação, refletindo sobre sua aprendizagem dos conteúdos discutidos em sala de aula. Nesse sentido, eles podem analisar se estão ou não aprendendo o que estudam em sala de aula, atentando para os detalhes que aparentam ser mais confusos, questionando quando têm dúvidas, pensando em como podem utilizar conhecimentos constituídos na escola para intervir em suas realidades com a intenção de modificá-las, buscando as melhores soluções para os problemas que vierem a enfrentar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONCLUSÕES E REFLEXÕES A RESPEITO DA PESQUISA

Após percorrer toda essa jornada, faz-se necessário refletir a respeito de algumas questões que nos levaram à elaboração dessa Trajetória Hipotética de Aprendizagem e ao desenvolvimento desta pesquisa: por que o estudo de logaritmos é importante para a aprendizagem, dado que temos hoje calculadoras? Em que o ensino de logaritmos contribui para a formação do cidadão crítico reflexivo? O que dizem os PCN sobre o ensino de logaritmos? Em que momento ensinar logaritmos? Por que seu ensino é útil?

Por meio da elaboração dessa trajetória hipotética de aprendizagem, podemos observar que o ensino de logaritmos pode ser inserido por meio das funções e equações exponenciais, uma vez que as grandezas com crescimento exponencial são comuns em muitos fenômenos da natureza e também em diversas aplicações, tais como os juros compostos, crescimento populacional, entre outros.

A compreensão de como esses fenômenos ocorrem representa um fator que ressalta a importância para o estudo dos logaritmos, ainda que a utilização das calculadoras facilitou muito os cálculos, os estudantes precisam compreender as relações que subjazem a esses cálculos e em alguns momentos precisam conhecer essas propriedades até mesmo para que as calculadoras sejam úteis, por exemplo, para encontrar um logaritmo cuja base não seja decimal ou de base "*e*", os estudantes precisam conhecer a mudança de base para poder fazer esse cálculo na calculadora, uma vez que uma calculadora científica geralmente opera apenas nessas duas bases.

Nesse sentido, ao estudar os logaritmos, os estudantes podem estabelecer relações entre o crescimento exponencial e como eles podem ser úteis na resolução de problemas que envolvem esse tipo de crescimento. Um exemplo pode ser observado quando precisamos descobrir em quanto tempo seremos capazes de efetuar o pagamento de um empréstimo tomado a juros compostos, dados a taxa de juros, o valor da parcela e o valor emprestado. Nesse sentido, ao conhecer essa ferramenta (os logaritmos e suas propriedades operatórias), os estudantes têm a possibilidade de estudar o quanto é ou não viável realizar esse tipo de transação. Os PCN apresentam esse exemplo relacionando-o com as funções exponenciais

> Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados (BRASIL, 2006, p. 75).

Os PCN ressaltam a importância do ensino de matemática no Ensino Médio, enfatizando que nesse nível é necessário ir além de aspectos formativos (aqueles que favorecem a estruturação do raciocínio dedutivo) ou instrumentais (ferramentas que auxiliam nas atividades humanas), mas que a matemática também deve ser vista como uma ciência com suas características estruturais específicas. Nesse contexto, os PCN destacam a importância das definições, demonstrações, conceitos e encaminhamentos lógicos, ao apontar que esses elementos têm a função de construir novos conceitos e estruturas, partindo daqueles que os estudantes já conhecem e, ainda, que esses elementos servem para validar as intuições e dar sentido às técnicas utilizadas na resolução de problemas.

Uma vez que os estudantes conseguem relacionar o conceito de logaritmos com as potências, relacionando as funções exponenciais e logarítmicas como inversas, eles desenvolvem habilidades que os possibilitam refletir sobre outras situações nas quais esse conteúdo se faz presente e, dessa forma os estudantes têm em mãos mais ferramentas que favorecem a tomada de decisões nesses contextos, o que reflete em sua formação enquanto cidadão crítico e reflexivo. Os logaritmos e as propriedades operatórias podem ser explorados dando continuidade às funções exponenciais, na 1ª série do Ensino Médio.

Outra alternativa que o professor também tem é a de trabalhar com os logaritmos utilizando a calculadora científica e softwares que possibilitem a análise de gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, de modo que eles observem as relações entre ambas. Essas ferramentas são potenciais para que os estudantes investiguem características peculiares dos logaritmos por meio de gráficos, tabelas, construções dinâmicas que facilitem a visualização de algumas propriedades, entre outros fatores. No entanto, nessa trajetória hipotética de aprendizagem não enfatizamos a utilização de tecnologias para essa aula, o que em momento posterior seria interessante para que pudéssemos trabalhar com as propriedades do gráfico de uma função logarítmica. O dinamismo da trajetória hipotética de aprendizagem possibilita que o professor repense em sua aula e possa modificar aspectos que acredita que podem ser melhorados no sentido de favorecer a aprendizagem dos estudantes. A elaboração e implementação de THA podem representar uma alternativa ao ensino tradicional.

Ao articular o modelo para a resolução de um problema proposto por Polya (1994), a perspectiva de Onuchic e Allevato (2011) a respeito da Resolução de Problemas e as fases de uma lição propostas por Van de Walle (2009), destacamos que cada uma aponta aspectos relevantes para uma aula de matemática.

O modelo proposto por Polya (1994) traz subsídios para os estudantes trabalharem com um problema de matemática ao organizar sua resolução em quatro fases, e é relevante principalmente para estudantes que não estão acostumados a resolver problemas e geralmente aprendem primeiro o conteúdo formal para depois utilizá-lo em problemas.

A perspectiva de Onuchic e Allevato (2011) apresenta fases de uma aula que articulam o papel dos estudantes e o papel do professor, tanto individual quanto em conjunto, tais como a fase Observar e incentivar (papel do professor) e a fase Resolução do Problema (papel do aluno), e outras fases nas quais há participação de ambos, tais como a fase Plenária, na qual há uma discussão acerca das resoluções apresentadas.

As fases de uma lição propostas por Van de Walle (2009) destacam as ações do professor em sala de aula e podem contribuir para que os professores compreendam seu papel quando trabalham nessa perspectiva para o ensino de matemática por meio da Resolução de Problemas.

Além disso, o professor que trabalhar nessa perspectiva tem a oportunidade de ensinar sobre a Resolução de Problemas e através da Resolução de Problemas, no ponto de vista de Shroeder e Lester (1989).

Para a elaboração dessa trajetória hipotética de aprendizagem, foram considerados os elementos de cada uma dessas três perspectivas, uma vez que acreditamos que elas podem se complementar, já que destacam diferentes aspectos de uma aula na perspectiva da Resolução de Problemas, embora todos relevantes para a compreensão dessas perspectivas.

Ao elaborar e reelaborar essa trajetória hipotética de aprendizagem, em vários momentos a modificamos, trazendo novas questões, reescrevendo outras, formulando novas questões que a princípio não tínhamos levado em conta, até chegarmos nessa versão, que apresenta uma descrição detalhada de como pode ser explorado um dos doze problemas apresentados, dos quais o professor pode selecionar qual(is) seria(m) mais interessante(s) para trabalhar em suas aulas de matemática.

Nesse sentido, acreditamos que essa trajetória hipotética de aprendizagem apresenta uma alternativa para o ensino de logaritmos, uma vez que aborda esse conteúdo por meio de um problema no qual o conceito de logaritmo é trabalhado por meio de uma função exponencial. No contexto desse problema, que explora uma situação envolvendo o crescimento populacional e a utilização das terras aráveis como fonte de alimento, os estudantes têm a possibilidade de ter contato com um significado de o porquê estudar logaritmos e, nesse sentido, podem compreender a importância desse conteúdo.

Para os professores, a elaboração de trajetórias hipotéticas de aprendizagem proporcionam momentos de reflexão a respeito de como ensinar e quais possíveis questionamentos podem surgir quando um estudante se depara pela primeira vez com um problema. Em especial, quando o problema demanda determinado conteúdo matemático que o aluno desconhece, para o qual não dispõe de formas de lidar com esse problema. Ao professor cabe então realizar seu trabalho em sala de aula para criar condições para que esse estudante consiga construir ser próprio conhecimento a partir dos conhecimentos prévios que já constituiu anteriormente.

Outro aspecto merecedor de destaque a respeito da elaboração de uma trajetória hipotética de aprendizagem é que ela representa um processo contínuo e nunca se finda, uma vez que sempre é possível surgir uma dúvida ou questionamento não previsto pelo professor em sua THA para o qual ele precise encontrar maneiras de lidar com esse questionamento no momento da aula. Esse aspecto reflete que a formação do professor também representa um processo contínuo e ele sempre precisa estudar de modo a investir em sua própria formação.

Para os estudantes, o trabalho com a Resolução de Problemas que foi apresentado nessa THA e com a implementação de outras THA pode proporcionar mais autonomia, uma vez que o estudante é quem lida com um problema que para ele geralmente é inédito e diferente daqueles que ele já resolveu, e ele precisa buscar uma forma de resolvê-lo considerando seus conhecimentos prévios. Ao realizar esse trabalho, o estudante passa a compreender o seu papel em sala de aula enquanto construtor de seu próprio conhecimento e tende a tornar-se mais crítico porque pode se avaliar enquanto estudante ao perceber se ainda possui ou não dificuldades com outro determinado conteúdo que já estudou anteriormente.

Em futuros trabalhos, acreditamos que seja pertinente a elaboração de outras THAs que abordam diferentes conteúdos matemáticos com o objetivo de proporcionar alternativas para que os professores implementem em suas aulas, fazendo as devidas adaptações, já que elas não representam modelos a serem seguidos, mas sim uma possibilidade para aulas de matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, **Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Rio Claro, 1998. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista.

ANGIOLIN, A. G. **Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem sobre Funções Exponenciais**. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BARBOSA, A. A. **Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem relacionadas às razões e às funções trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista**. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Ed. Porto. 1994. Tradução de: Qualitative research for education.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais + para o Ensino Médio**, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC-SEMTEC, 2002.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. V. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília. MEC/SEB, 2006.

BROUSSEAU,G . **Les différents roles du maître** [The different roles of the teacher]. Colloquium of P.E.N. Angers, 1987.

D'AMBRÓSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. P. 15-19

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1989.

DANTE, L. R. **Avaliação em Matemática**. In: Matemática : Contexto e Aplicações. (Manual do Professor). São Paulo: Ática, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática:** Contexto e Aplicações. 2 ed. São Paulo: Ática, 2005.

GÓMEZ, P.; GONZÁLEZ, M. J.; LUPIÁÑEZ, J. L. **Adapting the Hypothetical Learning Trajectory Notion to Secondary Preservice Teacher Training**. Chipre: Universidade de Chipre, 2007.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da Sala de Aula.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Volume 2. 9 ed. São Paulo: Atual, 2004.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio:** Volume 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, P. O. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre Funções Logarítmicas**. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

LUNA, M. F. A. **Estudo das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem de Geometria Espacial para o Ensino Médio na perspectiva construtivista**. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

MARINCEK, V. Algumas contribuições da didática da Matemática: a resolução de problemas e o papel do professor. In: MARINCEK, V. (coord.) **Aprender Matemática resolvendo problemas**. Porto Alegre: Artmed, p.13 -17, 2001.

MENDES, I. A. **A Matemática no Século de Andrea Palladio**. Natal: EDUFRN, 2008.

MENOTTI, R. M. **Frações e suas operações**: Resolução de Problemas em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MESQUITA, M. A. N. **Ensinar e Aprender funções polinomiais do 2° grau no Ensino Médio**: construindo trajetórias. 2009. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

NCTM. **An Agenda for Action**: Recommendations for School Mathematics in the 1980's. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

NCTM. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

OLIVEIRA, J. C. R.; FRIAS, R. T.; OMODEI, L. B. C. Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o Ensino de Função Afim em um curso de Formação Continuada. In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. , 2014, Campo Mourão. **Anais...** Campo Mourão: Unespar, 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap. 12, p.199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. **Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas**. 11° Congresso Internacional de Educação Matemática. México, 2008.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S.G.; **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Boletim de Educação Matemática, vol. 25, núm. 41, dez, 2011, pp. 73-98, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Disponível em: < http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf> . Acesso em: 15 jan. 2015.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.) **Educação Matemática: Pesquisa em Movimento**. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 2009.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

ROSENBAUM, L. S. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SCHOENFELD, A. H. **Problem Solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics.** ZDM – The International Journal in Mathematics Education, 2007, v. 39, p. 537-551. Disponível em: <http://www2.fc.unesp.br/matematica/semana/arquivos/ZDM_Alan%20Schoenfeld.pdf> . Acesso em: 15 jan. 2015.

SCHROEDER, T.L.; LESTER Jr., F.K. **Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving**, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

SILVA, J. F. **Avaliação na perspectiva formativa-reguladora**: pressupostos teóricos e práticos. Porto Alegre: Ed. Mediação, 2004.

SIMON, M. A. "**Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective**. Journal for research in Mathematics Education", Vol. 26, n° 2. p. 114-145, 1995.

SIMON, M. A.; TZUR, R. **Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory**. Mathematical Thinking and Learning, vol. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. **Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática**. The teaching and assessment of mathematical problem solving, Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.

STEFFE, L. P. **On the Construction of Learning Trajectories of Children: The Case of Commensurate Fractions**. Livro: Mathematical Thinking and Learning, pg. 129-162, 2004. Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Pensilvania – EUA.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Resolução de problemas In: PALHARES, P. **Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico**. Lisboa: Lidel, p.6-51, 2004.

VAN DE WALLE, J. A. V. de. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ANEXOS

ANEXO A – Resolução dos Problemas

1. (**UNIRIO – 1994**) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio varia de acordo com a fórmula $A = 40.(1{,}1)^t$, na qual A é a medida em centímetros e t representa o tempo em anos. Sabendo que $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ e $\log_{10} 11 \cong 1{,}04$, determine:

- **a)** A altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;
- **b)** A idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de 1,6 m.

Uma possível solução:

a) *Para descobrir a altura média de uma planta aos 3 anos de vida, basta substituir o valor do tempo na função:*

$$A = 40.(1{,}1)^3 = 40.1{,}331 = 53{,}24cm$$

Logo, uma planta com 3 anos de vida tem aproximadamente 53,24cm de altura.

b) *Queremos saber quantos anos tem uma planta com altura 1,60m ou 160cm. Para isso basta igualar a função a 160. Temos:*

$$A(t) = 40.(1{,}1)^t = 160$$
$$40.(1{,}1)^t = 160$$
$$(1{,}1)^t = 160/40$$
$$(1{,}1)^t = 4$$

Agora temos uma equação na qual a incógnita é o expoente, e nessa etapa podemos utilizar a definição de logaritmo para reescrever essa equação como uma equação logarítmica.

$$(1{,}1)^t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{1{,}1} 4 = t$$

Nesse ponto, não conseguimos resolver diretamente a equação, mas podemos utilizar a propriedade de mudança de base dos logaritmos, reescrevendo essa equação:

$$\log_{1{,}1} 4 = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 1{,}1} = t$$

Podemos reescrever 4 como 2^2 e 1,1 como $10^{-1}.11$:

$$\frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 1{,}1} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_{10} 2^2}{\log_{10} (11.10^{-1})} = t$$

Agora, podemos utilizar duas propriedades dos logaritmos simultaneamente. No numerador é possível utilizar a propriedade do expoente, já no denominador podemos utilizar a propriedade do produto e separar os fatores.

$$\frac{\log_{10} 2^2}{\log_{10} (11.10^{-1})} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2.\log_{10} 2}{\log_{10} 11 + \log_{10} 10^{-1}} = t$$

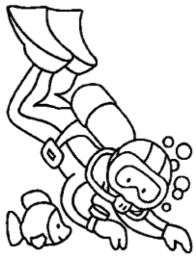
Ainda no denominador, é possível utilizar a propriedade do expoente:

$$\frac{2.\log_{10} 2}{\log_{10} 11 + (-1).\log_{10} 10} = t$$

Chegando nessa equação, utilizamos uma das consequências da definição, na qual $\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\,;\, 0 < a \neq 1$. *Podemos também utilizar os dados do enunciado, lembrando que foi sugerido utilizar:* $\log_{10} 2 \cong 0{,}30$ *e* $\log_{10} 11 \cong 1{,}04$. *Substituindo na equação, temos:*

$$\frac{2.(0{,}30)}{1{,}04 - 1} = t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0{,}6}{0{,}04} = t \quad \Leftrightarrow \quad 15 = t$$

Logo, uma planta com 160 cm tem 15 anos.



2. (**UERJ – 2008**) Admita que, em um determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação $I = I_0.(0{,}8)^{h/40}$, na qual I é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_0 é a intensidade na superfície. Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície. Determine um valor aproximado para a profundidade do ponto P. Considere $\log_{10} 2 = 0{,}3$.

Uma possível solução:

Como I_0 é a intensidade da luz na superfície, no ponto P a intensidade de luz é igual a $0{,}32.I_0$. Dessa forma podemos substituir esse valor na equação, obtendo:

$$0{,}32.I_0 = I_0.(0{,}8)^{h/40}$$

Dividindo ambos os lados da equação por I_0, já que a intensidade da luz na superfície é diferente de zero, obtemos a seguinte equação:

$$0{,}32 = (0{,}8)^{h/40}$$

Nessa etapa, notamos que a incógnita está no expoente, e podemos utilizar a definição de logaritmo para solucionar essa equação.

$$\log_{0,8} 0{,}32 = \frac{h}{40}$$

Podemos então utilizar a propriedade da mudança de base dos logaritmos:

$$\frac{\log_{10} 0{,}32}{\log_{10} 0{,}8} = \frac{h}{40}$$

Lembrando que $0{,}32 = 32.10^{-2}$ e $0{,}8 = 8.10^{-1}$, temos:

$$\frac{\log_{10} 32.10^{-2}}{\log_{10} 8.10^{-1}} = \frac{h}{40}$$

Agora podemos utilizar a propriedade do produto e transformá-lo em uma soma, tanto no numerador quanto no denominador:

$$\frac{\log_{10} 32 + \log_{10} 10^{-2}}{\log_{10} 8 + \log_{10} 10^{-1}} = \frac{h}{40}$$

Lembrando que $32 = 2^5$ e $8 = 2^3$, temos:

$$\frac{\log_{10} 2^5 + \log_{10} 10^{-2}}{\log_{10} 2^3 + \log_{10} 10^{-1}} = \frac{h}{40}$$

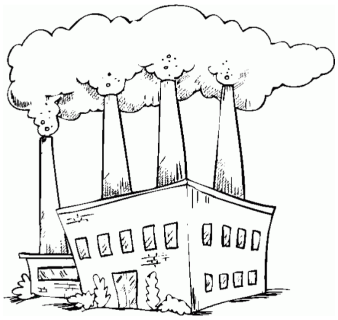
Pela propriedade do expoente, podemos simplificar a equação e na sequência utilizar a informação dada no enunciado ($\log_{10} 2 = 0{,}3$), junto com uma das consequências da definição ($\log_a a = 1,\ \forall a \in IR ; 0 < a \neq 1$)*:*

$$\frac{\log_{10} 2^5 + \log_{10} 10^{-2}}{\log_{10} 2^3 + \log_{10} 10^{-1}} = \frac{h}{40} \Leftrightarrow \frac{5.\log_{10} 2 - 2.\log_{10} 10}{3.\log_{10} 2 - 1.\log_{10} 10} = \frac{h}{40} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5.0{,}3 - 2.1}{3.0{,}3 - 1.1} = \frac{h}{40} \Leftrightarrow \frac{1{,}5 - 2}{0{,}9 - 1} = \frac{h}{40} \Leftrightarrow \frac{-0{,}5}{-0{,}1} = \frac{h}{40} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{h}{40} \Leftrightarrow 200 = h$$

O ponto P está a aproximadamente 200 metros de profundidade.



3. (**PUC/SP – 2004**) Em 1996, uma indústria iniciou a fabricação de 6000 unidades de certo produto e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 20% ao ano. Nessas condições, em que ano a produção foi igual ao triplo da de 1996? (Dados: $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$).

Uma possível solução:

Considerando 6000 como a quantidade produzida no tempo t = 0 (ano de 1996), e como a cada ano a produção aumenta em 20%, o fator pelo qual a quantidade de cada ano é multiplicada é 1,2 (120%), assim podemos modelar essa situação por meio da seguinte fórmula:

$$Q(t) = 6000 . 1{,}2^t$$

Na qual Q(t) representa a quantidade produzida em t anos a partir de 1996. Queremos saber em qual ano a produção será o triplo da produção de 1996, ou seja, 18000 unidades do produto. Para isso podemos equacionar essa situação da seguinte forma:

$$Q(t) = 6000 . 1{,}2^t = 18000$$
$$6000 . 1{,}2^t = 18000$$
$$1{,}2^t = 3$$

Temos uma equação na qual o expoente t é a incógnita, logo podemos aplicar $\log_{1,2}$ em ambos os membros da equação:

$$\log_{1,2} 1{,}2^t = \log_{1,2} 3$$

No membro esquerdo da equação, podemos utilizar a propriedade do expoente e a consequência da definição de logaritmo ($\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\ ;\ 0 < a \neq 1$ *):*

$$\log_{1,2} 1{,}2^t = \log_{1,2} 3$$
$$t . \log_{1,2} 1{,}2 = \log_{1,2} 3$$
$$t = \log_{1,2} 3$$

No membro direito da equação, podemos utilizar a propriedade da mudança de base, a igualdade $1{,}2 = 12.10^{-1} = 4.3.10^{-1} = 2^2.3.10^{-1}$:

$$t = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 1{,}2} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2.3.10^{-1}}$$

No denominador podemos utilizar a propriedade do produto:

$$t = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2.3.10^{-1}} = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 10^{-1}}$$

Ainda no denominador podemos utilizar novamente a propriedade do expoente e a consequência da definição de logaritmo ($\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\ ;\ 0 < a \neq 1$ *):*

$$t = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2^2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 10^{-1}} = \frac{\log_{10} 3}{2.\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1}$$

Nessa etapa, podemos substituir os dados fornecidos no enunciado ($\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$ *):*

$$t = \frac{\log_{10} 3}{2.\log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 1} = \frac{0{,}48}{2.0{,}30 + 0{,}48 - 1}$$

$$t = \frac{0{,}48}{0{,}60 + 0{,}48 - 1} = \frac{0{,}48}{0{,}08} = 6$$

$$t = 6$$

Logo, a produção desse produto será o triplo da produção de 1996 depois de 6 anos, ou seja, em 2002.

4. A massa de uma amostra radioativa é de 40g. Após quanto tempo de desintegração teremos 8g do material radioativo, sabendo que a meia-vida é de 3h? Dados: $\log_{10} 2 = 0{,}3$ e $\log_{10} 5 = 0{,}7$.

Uma possível solução (Por Aproximação):

Para resolver esse problema podemos utilizar uma equação exponencial, já que o problema trata de meia-vida de uma amostra radioativa. Chamando a massa inicial de M_0, sabemos que M_0 = 40 g, e vamos montar uma tabela para representar essa situação:

Tempo (t)	***Massa da amostra (g)***
0	40
1	$40.2^{-1} = 20$
2	$40.2^{-2} = 10$
3	$40.2^{-3} = 5$
* Ao determinar o valor do tempo, é necessário multiplicá-lo por 3, pois a meia-vida da substância é de 3 horas.	

Note que em 2 períodos de tempo, a massa será de 10g, e em 3 períodos de tempo, a massa será de 5g. O que queremos saber é quando essa massa é de 8g, e podemos observar que isso acontecerá em um período entre 2 e 3 períodos de tempo.

É possível tentar determinar esse valor por aproximação, vamos tentar com t = 2,5 para descobrir se chegamos a 8 g:

$$40.2^{-2,5} = \frac{40}{2^{2,5}} \cong \frac{40}{5{,}65685424} \cong 7{,}0716\ g$$

Vamos tentar com t = 2,4:

$$40.2^{-2,4} = \frac{40}{2^{2,4}} \cong \frac{40}{5{,}27803164} \cong 7{,}5786\ g$$

Tentemos então com t = 2,3:

$$40.2^{-2,3} = \frac{40}{2^{2,3}} \cong \frac{40}{4{,}92457765} \cong 8{,}1225\ g$$

Em 2,3 períodos de tempo, que equivalem a $2{,}3\,.\,3 = 6{,}9$ horas, ou ainda, 6 horas e 54 minutos, temos que a massa da amostra radioativa terá aproximadamente 8,12 g.

Obtemos um valor aproximado da solução, mas se quiséssemos determinar valores mais próximos de 8 g, deveríamos considerar a segunda casa depois da vírgula do tempo t, e *passaríamos pelo mesmo processo de aproximação, repetindo-o para chegar tão próximos quanto queiramos da resposta correta.*

Outra possível solução (Utilizando os conhecimentos de logaritmos)

Para resolver esse problema podemos utilizar uma equação exponencial, já que o problema trata de meia-vida de uma amostra radioativa. Chamando a massa inicial de M_0, sabemos que $M_0 = 40$ g, podemos compor a fórmula a seguir:

$$M(t) = \frac{M_0}{2^{t/3}}$$

Sabendo que t é o tempo em horas, e 3 horas representa a meia-vida da amostra, logo podemos dividir o expoente t por 3.

Como $M_0 = 40$, e queremos saber quantas horas são necessárias para que a amostra tenha massa de 8g, podemos substituir esses valores na fórmula:

$$8 = \frac{40}{2^{t/3}}$$

$$2^{t/3} = 5$$

Podemos aplicar $\log_{10}$ em ambos os membros da igualdade, devido à consequência da definição $\left(\log_a b = \log_a c \iff b = c\right)$:

$$\log_{10} 2^{t/3} = \log_{10} 5$$

Agora é possível utilizar a propriedade do expoente no membro esquerdo da equação:

$$\frac{t}{3}.\log_{10} 2 = \log_{10} 5$$

$$\frac{t}{3} = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$$

$$t = 3.\left[\frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}\right]$$

Podemos agora utilizar os dados do enunciado ($\log_{10} 2 = 0{,}3$ e $\log_{10} 5 = 0{,}7$) e substituí-los na equação:

$$t = 3.\left[\frac{0{,}7}{0{,}3}\right] = 10.0{,}7 = 7$$

Portanto, em aproximadamente 7 horas, temos que a massa da amostra radioativa terá aproximadamente 8g.

Questão importante: Por que obtemos 6,9 horas na primeira solução e na segunda obtemos 7 horas?

Na primeira solução, aproximamos em apenas uma casa após a vírgula o tempo, obtendo 8,12g, com um erro de 0,12g, embora poderíamos ter continuado com esse processo até chegar a um valor mais próximo de 8g dessa amostra.

Na segunda solução, o que utilizamos foram os dados do enunciado, que também eram aproximados, uma vez que $\log_{10} 2$ *e* $\log_{10} 5$ *são ambos números irracionais, ou seja, possuem uma representação decimal infinita e não-periódica.*

Ambas as soluções estão aproximadas, mas podemos observar que as propriedades operatórias dos logaritmos tornam os cálculos muito mais simples do que quando temos que aproximar potências por várias vezes para chegar próximos do resultado.

5. O acidente do reator nuclear de Chernobyl, URSS, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade do isótopo radioativo estrôncio-90, cuja meia-vida é de 28 anos. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de estrôncio-90 se reduzir, por desintegração, a 1/16 da quantidade inicialmente presente, em que ano o local poderá ser habitado novamente (**LIMA, 2010**)?

Uma possível solução:

Sabendo que a meia-vida do estrôncio é de 28 anos, podemos escrever a seguinte equação: $Q(t) = Q_0 . 2^{-t/28}$*, na qual* Q_0 *representa a quantidade de estrôncio lançada na atmosfera em 1986, considerando que nesse ano o tempo é zero, ou seja,* $t = 0$.

Queremos descobrir quando a quantidade de estrôncio será igual a $Q_0/16$*. Assim temos a seguinte igualdade:*

$$\frac{Q_0}{16} = Q_0 . 2^{-t/28}$$

Dividindo ambos os lados da equação por Q_0 *(lembrando que* $Q_0 > 0$*), obtemos:*

$$\frac{1}{16} = 2^{-t/28} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-4} = 2^{-t/28}$$

Agora podemos igualar os expoentes, uma vez que as bases são iguais:

$$-4 = \frac{-t}{28} \quad \Leftrightarrow \quad 112 = t$$

Logo, para que a quantidade de estrôncio seja igual a $Q_0/16$*, teremos que esperar 112 anos, ou seja, em 1986 + 112 = 2098.*

Observação: note que não foi necessário utilizar logaritmos nessa questão, devido ao fato de a base em ambos os membros da igualdade ser a mesma.

6. (**UCB – 2000**) “Esta mão sóbria, retinta de resina negra, com dedos rugosos e unhas amareladas pelo pó do deserto, tem 2000 anos. Não pertence a nenhum rei ou faraó. Serviu a um lavrador anônimo, em um instante quase perdido da história. Arqueólogos descobriram, no Egito, a maior população homogênea de múmias já encontradas. Elas revelam uma rica história plebeia, sem pompa e eloquência. O dia-a-dia da aldeia de Ain Labakha há dois milênios”.

Superinteressante, abril/98.

Na determinação da idade de múmias, recorre-se às propriedades radioativas do Carbono 14. Sabendo-se que o tempo de meia-vida do isótopo 14 do carbono é de 5730 anos e que a taxa de carbono 14 encontrada numa múmia é 2/3 da taxa inicial, calcule o ano em que a múmia foi preparada.

Dados: $\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$; e o ano em que a múmia foi encontrada é 1997.

Uma possível solução:

Vamos analisar os dados relevantes do enunciado do problema:

- *A meia-vida do isótopo do carbono 14 é de 5730 anos.*
- *A taxa de carbono encontrada na múmia é de 2/3 da taxa inicial.*

Ao falar sobre meia-vida, podemos utilizar uma função exponencial para modelar a situação. Se considerarmos Q_0 a quantidade inicial de isótopos de carbono 14 na múmia, sabemos que quando ela foi encontrada, essa quantidade era de $\frac{2.Q_0}{3}$. *Podemos equacionar a situação da seguinte forma:*

$$\frac{2.Q_0}{3} = Q_0 . 2^{-t/5730}$$

Dividindo a equação por Q_0 (lembrando que isso é possível pois $Q_0 \neq 0$), obtemos:

$$\frac{2}{3} = 2^{-t/5730}$$

Aplicando log_{10} em ambos os lados da equação, temos:

$$\log_{10} \frac{2}{3} = \log_{10} 2^{-t/5730}$$

No membro esquerdo da equação podemos utilizar a propriedade do quociente, e no membro direito podemos utilizar a propriedade do expoente:

$$\log_{10} \frac{2}{3} = \log_{10} 2^{-t/5730} \Leftrightarrow \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = \left(\frac{-t}{5730}\right). \log_{10} 2$$

Agora podemos substituir os dados do enunciado ($\log_{10} 2 = 0{,}301$ e $\log_{10} 3 = 0{,}477$ *) na equação acima:*

$$\log_{10} 2 - \log_{10} 3 = \left(\frac{-t}{5730}\right). \log_{10} 2$$

$$0{,}301 - 0{,}477 = \left(\frac{-t}{5730}\right).0{,}301$$

$$-0{,}176 = \left(\frac{-t}{5730}\right).0{,}301$$

$$\frac{-0{,}176}{0{,}301} = \left(\frac{-t}{5730}\right)$$

$$\frac{(-0{,}176).5730}{0{,}301} = -t$$

$$t \cong 3350{,}4319$$

Como a múmia foi encontrada em 1997, nesse ano a quantidade de isótopos de carbono 14 na múmia era de $\frac{2.Q_0}{3}$*, e essa data corresponde a aproximadamente 3350 anos depois de a múmia ter sido preparada, ou seja:* $1997 - 3350 = -1353$*. Logo a múmia foi preparada no ano de 1353 a.C.*

7. Em algumas situações, para expressar certas grandezas, é mais conveniente empregar as chamadas *escalas logarítmicas* do que as escalas lineares convencionais. Este é o caso, por exemplo, da escala Richter de terremotos. Na escala Richter, a intensidade *I* de um terremoto, expressa em graus, é definida da seguinte forma:

$$I = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Na qual *E* representa a energia liberada pelo terremoto, medida em *kWh*, e $E_0 = 10^{-3}kWh$.

a) Qual é a energia liberada por um terremoto de 3 graus na escala Richter? E por um terremoto de 9 graus?

b) Qual é a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau k+1 na escala Richter?

(**LIMA, 2010**)

Uma possível solução:

a) ***1° Caso****: Temos que 3 representa a intensidade I, logo basta substituir esse valor na equação, lembrando que* $E_0 = 10^{-3}kWh$*, temos:*

$$3 = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow \frac{3.3}{2} = \log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow \frac{9}{2} = \log_{10}\left(E.10^{3}\right)$$

Nesse ponto podemos utilizar a propriedade do produto, obtendo:

$$\frac{9}{2} = \log_{10}\left(E.10^{3}\right) \Leftrightarrow \frac{9}{2} = \log_{10} E + \log_{10} 10^{3}$$

Pela propriedade do expoente e um das consequências da definição
($\log_a a = 1, \ \forall a \in IR \,;\, 0 < a \neq 1$*), temos que:*

$$\frac{9}{2} = \log_{10} E + \log_{10} 10^{3} \Leftrightarrow \frac{9}{2} = \log_{10} E + 3.\log_{10} 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2} = \log_{10} E + 3.1 \Leftrightarrow \frac{9}{2} - 3 = \log_{10} E \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \log_{10} E$$

Reescrevendo a equação na forma exponencial, temos:

$$E = 10^{3/2} = \sqrt{1000} \cong 31{,}62277\ldots$$

A energia liberada E é de $E = 10^{3/2}$ *kWh.*

2° Caso*: Nesse caso, basta resolver a mesma equação no caso de I = 9. E podemos resolver de forma análoga à letra a), utilizando as mesmas propriedades de logaritmos. Temos:*

$$9 = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow \frac{9.3}{2} = \log_{10}\left(\frac{E}{10^{-3}}\right) \Leftrightarrow \frac{27}{2} = \log_{10}\left(E.10^{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{2} = \log_{10} E + \log_{10} 10^{3} \Leftrightarrow \frac{27}{2} = \log_{10} E + 3.\log_{10} 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{2} = \log_{10} E + 3.1 \Leftrightarrow \frac{27}{2} - 3 = \log_{10} E \Leftrightarrow \frac{21}{2} = \log_{10} E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = 10^{21/2}$$

A energia liberada E é de $E = 10^{21/2}$ *kWh.*

b) *Para descobrir a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau k+1 na escala Richter, vamos calcular os dois casos e compará-los.*

- *Para o caso de uma intensidade de I = k graus temos:*

$$I = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(\frac{E_k}{10^{-3}}\right) = k$$

$$k = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(E_k.10^{3}\right)$$

$$\frac{3k}{2} = \log_{10}\left(E_k.10^{3}\right)$$

Utilizando a propriedade do produto, e em seguida a propriedade do expoente, chegamos a:

$$\frac{3k}{2} = \log_{10}\left(E_k.10^{3}\right) \Leftrightarrow \frac{3k}{2} = \log_{10} E_k + \log_{10} 10^{3} \Leftrightarrow \frac{3k}{2} = \log_{10} E_k + 3.\log_{10} 10$$

Pela consequência da definição: $\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\ ;\ 0 < a \neq 1$, *temos que:*

$$\log_{10} 10 = 1$$

Logo:

$$\frac{3k}{2} = \log_{10} E_k + 3.\log_{10} 10 \Leftrightarrow \frac{3k}{2} = \log_{10} E_k + 3.1 \Leftrightarrow \frac{3k}{2} - 3 = \log_{10} E_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k - 6}{2} = \log_{10} E_k \Leftrightarrow \frac{3.(k-2)}{2} = \log_{10} E_k$$

Reescrevendo obtemos:

$$10^{\frac{3}{2}.(k-2)} = E_k$$

- *Para o caso de uma intensidade de I = k+1 graus temos:*

$$I = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(\frac{E_{k+1}}{10^{-3}}\right) = k+1$$

$$k+1 = \frac{2}{3}.\log_{10}\left(E_{k+1}.10^3\right)$$

$$\frac{3.(k+1)}{2} = \log_{10}\left(E_{k+1}.10^3\right)$$

Utilizando a propriedade do produto, e em seguida a propriedade do expoente, chegamos a:

$$\frac{3.(k+1)}{2} = \log_{10}\left(E_{k+1}.10^3\right) \Leftrightarrow \frac{3.(k+1)}{2} = \log_{10} E_{k+1} + \log_{10}10^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3.(k+1)}{2} = \log_{10} E_{k+1} + 3.\log_{10}10$$

Pela consequência da definição: $\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\ ; 0 < a \neq 1$, *temos que:*

$$\log_{10}10 = 1$$

Logo:

$$\frac{3.(k+1)}{2} = \log_{10} E_{k+1} + 3.\log_{10}10 \Leftrightarrow \frac{3.(k+1)}{2} = \log_{10} E_{k+1} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3.(k+1)}{2} - 3 = \log_{10} E_{k+1} \Leftrightarrow \frac{3.(k+1)}{2} - 3 = \log_{10} E_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3.(k+1) - 6}{2} = \log_{10} E_{k+1} \Leftrightarrow \frac{3k + 3 - 6}{2} = \log_{10} E_{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3k - 3}{2} = \log_{10} E_{k+1} \Leftrightarrow \frac{3.(k-1)}{2} = \log_{10} E_{k+1}$$

Reescrevendo obtemos:

$$10^{\frac{3}{2}.(k-1)} = E_{k+1}$$

Queremos descobrir a relação entre a energia liberada por um terremoto de grau k e a energia liberada por um terremoto de grau k+1 na escala Richter, para isso determinamos os seguintes valores de E_k *e* E_{k+1}*:*

$$E_k = 10^{\frac{3}{2}.(k-2)} \qquad \text{e} \qquad E_{k+1} = 10^{\frac{3}{2}.(k-1)}$$

Calculando a razão obtemos:

$$\frac{E_{k+1}}{E_k} = \frac{10^{\frac{3}{2}.(k-1)}}{10^{\frac{3}{2}.(k-2)}} = \frac{10^{\frac{3k}{2}-\frac{3}{2}}}{10^{\frac{3k}{2}-\frac{6}{2}}} = 10^{\left(\frac{3k}{2}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3k}{2}-\frac{6}{2}\right)} = 10^{\frac{-3}{2}+\frac{6}{2}} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1000} \cong 31{,}62277\ldots$$ *Nota*

mos que a cada grau de variação na intensidade do terremoto, a energia liberada aumenta em 31,62277... vezes, ou seja, variando de k para k+1 graus de intensidade do terremotos, sua energia liberada E é multiplicada por 31,62277.

8. (**VUNESP-2000**) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22h. Às 22:30h o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5°C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5° C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5°C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de 36,5°C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por $D(t) = D_0.2^{-2at}$, em que *t* é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio no instante *t = 0*, *D(t)* é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante *t* qualquer e *a* é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

	Hora	**Temperatura do corpo (°C)**	**Temperatura do quarto (°C)**	**Diferença de Temperatura (°C)**
t = ?	Morte	36,5	16,5	D(t) = 20
t = 0	22h 30min	32,5	16,5	D(0) = D_0 = 16
t = 1	23h 30min	31,5	16,5	D(1) = 15

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2{,}3$ e $\log_2 3 = 1{,}6$, determine:

a) A constante *a*.

b) A hora em que a pessoa morreu.

Uma possível solução:

a) Como a lei do resfriamento do corpo é dada por: $D(t) = D_0.2^{-2at}$*, e sabemos que* D_0 *é a diferença inicial da temperatura do cadáver com o meio ambiente, logo podemos substituir o valor de* D_0 *em D(t):* $D(t) = 16.2^{-2at} = 2^4.2^{-2at} = 2^{4-2at}$

Para calcular o valor da constante a, podemos utilizar os dados da terceira linha da tabela, na qual o tempo é 1 e D(1) = 15.

$$D(1) = 2^{4-2a.1} = 15$$
$$2^{4-2a} = 15$$

Podemos reescrever a equação exponencial na forma logarítmica:

$$\log_2 15 = 4 - 2a$$

Sabemos que 15 = 3.5, e podemos utilizar a propriedade do produto, obtendo:

$$\log_2 3.5 = 4 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 3 + \log_2 5 = 4 - 2a$$

No enunciado foram dados $\log_2 5 = 2{,}3$ *e* $\log_2 3 = 1{,}6$, *logo podemos substituir na equação acima:*

$$\log_2 3 + \log_2 5 = 4 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}6 + 2{,}3 = 4 - 2a \quad \Leftrightarrow \quad 3{,}9 = 4 - 2a \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a = 4 - 3{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{0{,}1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0{,}05$$

b) Como a constante a = 0,05, substituímos seu valor na fórmula do enunciado:

$$D(t) = D_0.2^{-2at} = 16.2^{-2\,.0{,}05t} = 16.2^{-2\,.0{,}05t} = 2^4.2^{-0{,}1t} = 2^{4-0{,}1t}$$

Pela tabela, sabemos que a diferença da temperatura do cadáver com o meio ambiente quando a pessoa está viva é de 20°C, considerando que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de 36,5° C e sabendo que a temperatura do ambiente é de 16,5°C. Logo podemos equacionar:

$$D(t) = 2^{4-0{,}1t} = 20$$
$$2^{4-0{,}1t} = 20$$

Aplicando $\log_2$ *nos dois membros da equação, obtemos:*

$$\log_2 2^{4-0{,}1t} = \log_2 20$$
$$\log_2 2^{4-0{,}1t} = \log_2 4.5$$

No membro esquerdo da equação podemos utilizar a propriedade do expoente e em seguida uma consequência da definição ($\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\,;\ 0 < a \neq 1$*). No membro direito da equação podemos utilizar a propriedade do produto, a propriedade do expoente e em seguida a consequência da definição (*$\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\,;\ 0 < a \neq 1$*), da seguinte forma:*

$$\log_2 2^{4-0{,}1t} = \log_2 4.5$$
$$(4 - 0{,}1t).\log_2 2 = \log_2 2^2 + \log_2 5$$
$$(4 - 0{,}1t).1 = 2.\log_2 2 + \log_2 5$$
$$4 - 0{,}1t = 2.1 + \log_2 5$$
$$2 - 0{,}1t = \log_2 5$$

No enunciado foi dado $\log_2 5 = 2{,}3$, *e podemos substituir na equação:*

$$2 - 0{,}1t = \log_2 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 0{,}1t = 2{,}3 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}1t = 0{,}3 \quad \Leftrightarrow \quad t = -3$$

Como o valor de t é -3, o que significa que a pessoa morreu três horas antes de tomarem a temperatura pela primeira vez, ou seja, a pessoa morreu às 19:30h.

9. (**UERJ – 2004**) Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação: $T = T_0 + k.e^{-ct}$. Nesta relação, T é medida na escala Celsius, t é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e k e c são constantes a serem determinadas. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100°C, colocada numa sala de temperatura 20°C. Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de 40ºC.

a) Calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

b) Considerando $\ln 2 = 0{,}7$ e $\ln 3 = 1{,}1$, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu a metade.

Uma possível solução:

Vamos primeiro analisar os dados relevantes do enunciado: T_0 representa a temperatura do ambiente; t é o tempo medido em horas; k e c são constantes; e T é a temperatura do corpo após t horas.

A temperatura do ambiente é de 20°C, logo T_0 = 20. No primeiro momento, no qual t = 0, temos que T = 100°C, e se substituirmos na equação, temos:

$$T = T_0 + k.e^{-ct} \quad \Leftrightarrow \quad 100 = 20 + k.e^{-c.0} \quad \Leftrightarrow \quad 80 = k$$

Agora que já temos o valor de k, podemos utilizar os outros dados do enunciado, nos quais $t = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}h$ *e T = 40°C, e substituirmos na equação:*

$$T = T_0 + 80.e^{-ct} \quad \Leftrightarrow \quad 40 = 20 + 80.e^{-c.\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad 20 = 80.e^{-c.\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = e^{-c.\frac{1}{3}}$$

Elevando ambos os membros da equação a terceira potência, obtemos:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(e^{-c.\frac{1}{3}}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{64} = e^{-c} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{64} = \frac{1}{e^c} \quad \Leftrightarrow \quad e^c = 64$$

Reescrevendo a equação inicial, obtemos:

$$T = T_0 + k.e^{-ct} \quad \Leftrightarrow \quad T = 20 + 80.\left(e^c\right)^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad T = 20 + 80.(64)^{-t}$$

Queremos determinar a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala, e como o tempo é dado em horas, utilizaremos t = 5/6.

$$T = 20 + 80.(64)^{-5/6} = 20 + 80.(2^6)^{-5/6} = 20 + 80.\frac{1}{(2^6)^{5/6}} = 20 + 80.\frac{1}{32}$$

$$T = \frac{20.32+80}{32} = \frac{720}{32} = 22{,}5°C$$

A temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala é de 22,5°C.

a) Buscamos agora descobrir em quanto tempo a temperatura do café será de metade de 100°C, ou seja, 50°C. Como a temperatura é dada por T, temos T = 50°C, logo basta substituirmos esse valor na equação obtida e descobrir o valor de t.

$$50 = 20 + 80.(64)^{-t} \Leftrightarrow 30 = 80.(64)^{-t} \Leftrightarrow \frac{3}{8} = 64^{-t} \Leftrightarrow \frac{3}{8} = \frac{1}{2^{6t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3.2^{6t} = 8 \Leftrightarrow 2^{6t} = \frac{8}{3}$$

A equação acima é equivalente a seguinte equação (aplicando ln em ambos os membros da equação, já que ambos são maiores que zero):

$$\ln 2^{6t} = \ln \frac{8}{3}$$

Utilizando a propriedade do expoente (membro direito) e do quociente (membro esquerdo), obtemos:

$$6t.\ln 2 = \ln 8 - \ln 3$$

É possível agora decompor 8 em fatores primos e utilizar novamente a propriedade do expoente.

$$6t.\ln 2 = \ln 2^3 - \ln 3 \Leftrightarrow 6t.\ln 2 = 3.\ln 2 - \ln 3$$

$$t = \frac{3.\ln 2 - \ln 3}{6.\ln 2}$$

Considerando os dados do enunciado, $\ln 2 = 0{,}7$ e $\ln 3 = 1{,}1$, *substituímos na equação:*

$$t = \frac{3.\ln 2 - \ln 3}{6.\ln 2} = \frac{3.0{,}7 - 1{,}1}{6.0{,}7} = \frac{1}{4{,}2} \cong 0{,}23809\ldots$$

Agora basta multiplicar o resultado por 60, para determinar quantos minutos equivalem a 0,23809 horas, chegando a conclusão que depois de aproximadamente 14 minutos, a temperatura será de 50°C.

10. (**PUC – 2013**) Ao contrário de um imóvel, que fica mais valorizado comercialmente dia após dia, um veículo começa a perder o seu valor no instante em que sai da loja. Alguns modelos perdem menos, outros mais. Segundo um especialista, a média de depreciação de um carro de passeio nacional com até dois anos de vida é de 20% a 35%. Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se *P* representa o preço inicial (preço de fábrica) e *p(t)* o preço após *t* anos, determine o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se necessário, use $\log 3 \cong 0{,}477$ e $\log 5 \cong 0{,}699$.

Uma possível solução:

Vamos primeiramente destacar os dados relevantes do enunciado:

- *P = preço inicial do veículo (no tempo zero).*
- *0,19 = desvalorização anual do veículo, ou seja, a cada ano o valor do veículo é multiplicado por 1 – 0,19 = 0,81.*
- *p(t) = preço do veículo após t anos.*
- *Queremos saber quando o veículo terá um valor menor do que 0,05.P.*

Podemos então escrever uma expressão que define p(t) da seguinte forma:

$$p(t) = P.0{,}81^t$$

Além disso, queremos saber em quanto tempo o valor do veículo será menor do que 0,05.P, ou seja, p(t) < 0,05.P. Dessa forma é possível traduzir essa situação por meio de uma inequação:

$$p(t) = P.0{,}81^t < 0{,}05.P$$

Como P representa o valor do veículo quando retirado da fábrica, é trivial que P > 0, logo podemos dividir ambos os lados da inequação por P, obtendo:

$$0{,}81^t < 0{,}05$$

Para facilitar a resolução, utilizaremos $\log_{0,81}$ em ambos os lados da equação, e como $0 < 0{,}81 < 1$, o sinal da inequação se inverte ao calcularmos log em ambos os lados.

$$\log_{0,81} 0{,}81^t > \log_{0,81} 0{,}05$$

Utilizando a propriedade do expoente no membro esquerdo da desigualdade, obtemos:

$$t\,.\,\log_{0,81} 0{,}81 > \log_{0,81}\, 0{,}05$$

E pela consequência da definição: $\log_a\, a = 1,\ \forall\, a \in IR\ ;\ 0 < a \neq 1$*, temos que:* $\log_{0,81} 0{,}81 = 1$

Logo: $t\ > \log_{0,81}\, 0{,}05$

Reescrevendo 0,81 e 0,05, e utilizando a propriedade de mudança de base, obtemos:

$$t\ > \frac{\log\, 5.10^{-2}}{\log\, 81.10^{-2}}$$

Nessa etapa, podemos utilizar a propriedade do produto, em seguida a propriedade do expoente, e por fim a consequência da definição ($\log_a\, a = 1,\ \forall\, a \in IR\ ;\ 0 < a \neq 1$*):*

$$t\ > \frac{\log\, 5 + \log 10^{-2}}{\log\, 81 + \log\, 10^{-2}}$$

$$t\ > \frac{\log\, 5 - 2.\,\log 10}{\log\, 81 - 2.\log\, 10}$$

$$t\ > \frac{\log\, 5 - 2}{\log\, 81 - 2}$$

Como 81 = 3^4*, podemos novamente utilizar a propriedade do expoente:*

$$t\ > \frac{\log\, 5 - 2}{\log\, 3^4\ - 2}$$

$$t\ > \frac{\log\, 5 - 2}{\log\, 3^4\ - 2}$$

$$t\ > \frac{\log\, 5 - 2}{4.\log\, 3 - 2}$$

Considerando os dados do enunciado ($\log\, 3 \cong 0{,}477$ *e* $\log\, 5 \cong 0{,}699$*), podemos substituir na inequação:*

$$t\ > \frac{0{,}699\ - 2}{4.0{,}477 - 2}$$

$$t\ > \frac{-1{,}301}{-0{,}092}$$

$$t\ > 14{,}141304\ldots$$

Como no enunciado pede-se o número inteiro de anos, ou seja, $t \in IN$*, temos que o valor do veículo passará a ser menos do que 5% do inicial em 15 anos.*

11. (**PUC – 2013**) Considere a sequência:

$$\boxed{a_n = \log_{b_1}\sqrt{5} + \log_{b_2}\sqrt{5} + ... + \log_{b_n}\sqrt{5}}$$

Na qual $b_1 = a,\ a > 1$ e $b_{k+1} = (b_k)^2,\ k = 1, ..., n-1$.

Determine o valor de *a* para o qual $a_{10} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

Uma possível solução:

Vamos escrever os termos da sequência b_n:

$$b_1 = a = a^{1.2^0}$$
$$b_2 = (b_1)^2 = a^2 = a^{1.2^1}$$
$$b_3 = (b_2)^2 = \left(a^2\right)^2 = a^4 = a^{1.2^2}$$
$$b_4 = (b_3)^2 = \left(a^4\right)^2 = a^8 = a^{1.2^3}$$
$$b_5 = (b_4)^2 = \left(a^8\right)^2 = a^{16} = a^{1.2^4}$$
$$...$$
$$b_n = (b_{n-1})^2 = a^{1.2^{n-1}}$$

Conhecendo o termo geral de b_n, podemos reescrever a sequência a_n do seguinte modo:

$$a_n = \log_{b_1}\sqrt{5} + \log_{b_2}\sqrt{5} + ... + \log_{b_n}\sqrt{5}$$
$$a_n = \log_a\sqrt{5} + \log_{a^2}\sqrt{5} + ... + \log_{a^{2^{n-1}}}\sqrt{5}$$
$$a_n = \log_a 5^{1/2} + \log_{a^2} 5^{1/2} + ... + \log_{a^{2^{n-1}}} 5^{1/2}$$

Podemos utilizar agora a propriedade do expoente, obtendo:

$$a_n = \frac{1}{2}.\log_a 5 + \frac{1}{2}.\log_{a^2} 5 + ... + \frac{1}{2}.\log_{a^{2^{n-1}}} 5$$
$$a_n = \frac{1}{2}.\left[\log_a 5 + \log_{a^2} 5 + ... + \log_{a^{2^{n-1}}} 5\right]$$

Agora podemos utilizar a propriedade de mudança de base:

$$a_n = \frac{1}{2}.\left[\log_a 5 + \frac{\log_a 5}{\log_a a^2} + ... + \frac{\log_a 5}{\log_a a^{2^{n-1}}}\right]$$

Colocando $\log_a 5$ em evidência, temos:

$$a_n = \frac{1}{2}.(\log_a 5).\left[1 + \frac{1}{\log_a a^2} + ... + \frac{1}{\log_a a^{2^{n-1}}}\right]$$

É possível utilizar a propriedade do expoente a partir da segunda parcela da soma entre colchetes:

$$a_n = \frac{1}{2}.(\log_a 5).\left[1 + \frac{1}{\log_a a^2} + ... + \frac{1}{\log_a a^{2^{n-1}}}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}.(\log_a 5).\left[1 + \frac{1}{2.\log_a a} + ... + \frac{1}{2^{n-1}.\log_a a}\right]$$

Pela consequência da definição ($\log_a a = 1,\ \forall a \in IR\ ;\ 0 < a \neq 1$*), temos que* $\log_a a = 1$*. Logo, podemos reescrever a equação da seguinte forma:*

$$a_n = \frac{1}{2}.(\log_a 5).\left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

Note que dentro dos colchetes temos uma soma que representa a soma de termos de uma Progressão Geométrica (P.G.) de n termos, sendo:

$$a_1 = 1\ ,\ q = \frac{1}{2}\ \ e\ \ a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Lembrando que a soma dos termos de uma P.G. finita é dada por:

$$S_n = \frac{a_1.(1 - q^n)}{1 - q}$$

Podemos então calcular essa soma substituindo $a_1 = 1\ ,\ q = \frac{1}{2}\ \ e\ \ a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ *na fórmula:*

$$S_n = \frac{1.\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[1 - \frac{1}{2^n}\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{\left[\frac{2^n - 1}{2^n}\right]}{2^{-1}} = 2.\left[\frac{2^n - 1}{2^n}\right]$$

$$S_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^n}$$

Voltando à sequência a_n*, temos que:*

$$a_n = \frac{1}{2}.(\log_a 5).\left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{2}.(\log_a 5).\left[\frac{2^{n+1} - 2}{2^n}\right]$$

$$a_n = (\log_a 5).\left[\frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1}}\right]$$

Queremos saber o valor de a quando $a_{10} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$*, dessa forma temos n = 10, portanto podemos substituir 10 em n e igualar* a_{10} *a* a_n*, obtendo:*

$$a_{10} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = a_n = (\log_a 5).\left[\frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1}}\right]$$

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = (\log_a 5).\left[\frac{2^{10+1} - 2}{2^{10+1}}\right]$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} = (\log_a 5).\left[\frac{2^{11} - 2}{2^{11}}\right]$$

$$\frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = (\log_a 5).\frac{2}{2}.\left[\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}\right]$$

$$\log_a 5 = \frac{(2^{10} - 1)}{2^{10}}.\frac{2^{10}}{(2^{10} - 1)}$$

$$\log_a 5 = 1$$

Como $\log_a a = 1$*, podemos substituir 1 na equação:*

$$\log_a 5 = \log_a a \quad \Leftrightarrow \quad 5 = a$$

Outra forma de pensar é escrever a equação na forma exponencial:

$\log_a 5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = 5^1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 5.$