



Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



PROFMAT

Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio

Daniel Klug Nogueira

Brasília

2015

**Termo de Autorização para Publicação de Teses e Dissertações Eletrônicas
(TDE) na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e na
Biblioteca Digital do PROFMAT (BIT)**

Na qualidade de titular dos direitos de autor da presente publicação, autorizo a Universidade de Brasília — UnB, o Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia — IBICT e a Sociedade Brasileira de Matemática — SBM a disponibilizar, de forma gratuita, sem ressarcimento de direitos autorais, de acordo com a Lei n.º 9.610/1988, o texto integral desta obra, em meio eletrônico na rede mundial de computadores, para fins de leitura, impressão ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

Brasília, 15 de agosto de 2015.

Daniel Klug Nogueira

Daniel Klug Nogueira

Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Adail de Castro Cavalleiro

Brasília

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N778i Nogueira, Daniel Klug
Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o
Ensino Médio / Daniel Klug Nogueira; orientador
Adail de Castro Cavalheiro. -- Brasília, 2015.
119 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2015.

1. Matemática Discreta. 2. Grafos. 3. Poliedros
planos. 4. Otimização em fluxos. I. Cavalheiro, Adail
de Castro, orient. II. Título.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio

por

Daniel Klug Nogueira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília,
como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional — PROFMAT, para obtenção do grau de

MESTRE

Brasília, 7 de julho de 2015

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Adail de Castro Cavalheiro — MAT/UnB (orientador)

Prof. Dr. Edson Alves da Costa Jr. — FUG/UnB (membro)

Prof. Dr. Ricardo Ruviaro — MAT/UnB (membro)

Dedicatória

A minha esposa Ana e a meu filho Lucas.

Agradecimentos

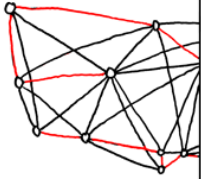
Sempre há o risco (ou melhor, a certeza) de que deixaremos alguém de fora ao escrever os agradecimentos na conclusão de um trabalho. Ainda assim, não é possível encerrar esta fase sem expressar a gratidão àqueles que tornaram todo o processo possível.

Assim, agradeço a Deus por ter-me dado força e inteligência para levar a cabo este mestrado. Agradeço à minha esposa pelo apoio e pela compreensão nos momentos ausentes. Agradeço ao Marcus Vinícius, Marcelo, Priscila e Pádua, gestores que me deram, na medida de suas possibilidades e de minhas necessidades, o suporte necessário no trabalho para que o curso pudesse ser concluído a contento. Agradeço também aos colegas do mestrado, verdadeiras amizades que serão levadas até o fim de nossas vidas. Em particular, agradeço aos colegas professores Karina, Halysson, Frederico, Marcos e Maryna, pelo suporte dado especialmente na fase de campo desta pesquisa. Agradeço a cada um dos professores que passaram por esses dois semestres, cujos conhecimentos

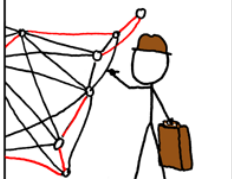
acumulados e experiências em sala me servirão (e já têm servido) de exemplo nas minhas aulas: Lineu, Raquel, Lucas, Carlos Alberto, Diego, Aline e Daniele. Agradeço, por fim, ao prof. Adail, pela paciência, pelos conselhos e pelos eventuais “puxões de orelha”, tudo parte do processo de orientação deste trabalho de conclusão.

Cada um que houver participado desses últimos trinta meses acadêmicos e que não tenha sido citado nominalmente, sinta-se abraçado e receba: muito obrigado pela sua ajuda! Ela com certeza foi parte importante nesse meu crescimento e amadurecimento intelectual.

BRUTE-FORCE
SOLUTION:
 $O(n!)$



DYNAMIC
PROGRAMMING
ALGORITHMS:
 $O(n^2 2^n)$



SELLING ON EBAY:
 $O(1)$

STILL WORKING
ON YOUR ROUTE?



SHUT THE
HELL UP.

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução à Teoria dos Grafos, propondo sua aplicação em aulas do Ensino Médio, em especial no segundo ou no terceiro ano. A Teoria dos Grafos teve seu pontapé inicial com o estudo de Euler sobre o problema das pontes de Königsberg. Outros trabalhos se seguiram, particularmente tratando de problemas como determinar trilhas eulerianas, caminhos hamiltonianos, minimização de custos de fluxos em redes. Após uma apresentação teórica incluindo, além desses itens, anotações importantes sobre planaridade e poliedros (ou seja, o tratamento dos poliedros tradicionalmente estudados na Geometria Espacial Euclidiana por meio de seus equivalentes planos em forma de grafos), elabora-se um caderno de atividade a ser aplicadas às turmas de Ensino Médio. Uma experimentação de campo com aproximadamente noventa alunos mostrou-se bem-sucedida, refletindo a adequação do nível da matéria a ser-lhes passada, bem como o interesse nas aplicações cotidianas da Teoria dos Grafos.

Palavras-chave: Grafos, ensino médio, experimento.

Abstract

This work makes an introduction to Graph Theory, and suggests its inclusion in high school programs, especially on second and third grades. Graph Theory had its start with Euler's study on the Königsberg bridges' problem. Other works followed, particularly concerning the determination of Eulerian tracks, Hamiltonian paths, minimization of network flows costs, and so on. After presenting some theory on these items, including furthermore important notes on planarity and polyhedra (that is, the treatment of polyhedra traditionally studied on Euclidian space geometry through their equivalent plane graphs), an activity workbook is prepared for high school classes. A field experiment with about ninety students resulted successful, reflecting the level adequacy of the subject to be taught, as well as the interest on Graph Theory applications to day-to-day problems.

Keywords: Graphs, high school, experiment.

Lista de Figuras

1.1	Cidade de Königsberg, com suas sete pontes destacadas	15
1.2	Diagrama do grafo das pontes de Königsberg.	17
1.3	Problema do icosiano e uma solução	18
1.4	Problema do caixeiro viajante nas capitais continentais dos EUA	19
1.5	Isômeros butano e isobutano	20
1.6	Grafos que garantem não planaridade	21
2.1	Dois grafos G e H	24
2.2	Multigrafo e seu grafo ponderado	26
2.3	Um grafo direcionado	28
2.4	Grafo conexo (a) e desconexo (b)	32
2.5	Grafo G e alguns subgrafos	32
2.6	Algumas árvores	33
2.7	Grafo completo K_5 rotulado	35

2.8	Grafo H para marcar caminhos	44
2.9	Alguns ciclos de até 6 vértices	46
2.10	Grafo, árvore geradora mínima e ciclo hamiltoniano	53
2.11	Dois grafos bipartidos	54
2.12	Grafo de serviços públicos	55
2.13	Grafos isomorfos a K_3	56
2.14	Grafo K_4	56
2.15	Grafo K_4	56
2.16	Grafo bipartido e uma representação planar	57
2.17	Poliedro plano	59
2.18	Grafo K_4 e subdivisões	66

Sumário

Introdução	12
1 Notas Históricas	14
1.1 Euler, as pontes de Königsberg e o traçado de diagramas	14
1.2 Caminhos hamiltonianos e o problema do caixeiro viajante	17
1.3 Árvores	19
1.4 Planaridade	20
1.5 Avanços recentes — a coloração de grafos	21
2 Introdução à Teoria dos Grafos	23
2.1 Conceitos iniciais	23
2.2 Árvores	31
2.2.1 Noções sobre complexidade de algoritmos	41
2.3 Caminhos	43

2.3.1	O caixeiro viajante	52
2.4	Planaridade	54
2.4.1	Poliedros planos	57
3	Proposta para o Ensino Médio	69
3.1	Alguns aspectos nos PCN	69
3.2	Proposta de aulas e atividades	72
3.3	Plano de aulas	72
4	Aplicação das Atividades	75
4.1	Descrição do grupo	75
4.2	Resultados obtidos	77
	Considerações Finais	81
	Referências Bibliográficas	85
	Apêndice	88

Introdução

Este trabalho pretende apresentar os primeiros passos da Teoria dos Grafos, objetivando sua aplicação em salas de aula de Ensino Médio.

É de conhecimento geral na comunidade matemática que os grafos constituem ferramenta simples, mas útil em diversas situações. Seja pelo seu uso como instrumento de modelagem de conexões físicas, seja pela sua utilidade na representação de relações entre elementos quaisquer, não importando quão abstratos sejam, os grafos têm sido objeto de estudo desde o século XVIII e têm sido parte importante na solução de problemas famosos, como o teorema das quatro cores. Assim, pela sua utilidade e simplicidade, é nossa convicção que esse tópico não pode ser deixado de fora das salas de aula do Ensino Básico de Matemática, em particular do Ensino Médio.

A proposta aqui está apresentada em quatro capítulos. No primeiro capítulo, expõe-se uma linha histórica seguida pela Teoria dos Grafos, desde as pontes de Königsberg até os problemas mais recentes, resolvidos com auxílio de computadores. Longe de

esgotar o histórico do assunto, o capítulo pretende apenas localizar o tema no tempo a fim de exibir seus méritos desde sua origem.

No segundo capítulo, expõem-se os primeiros tópicos estudados em um curso de Introdução à Teoria dos Grafos. Aqui surge a necessidade de selecionar os tópicos que melhor atendem à meta de trazer o tema para o Ensino Médio, de modo que alguns itens que os colegas podem julgar importantes acabaram ficando de fora. Claro, não há como esgotar num trabalho como este todo o tema da Teoria dos Grafos, mas cremos que os tópicos escolhidos e aqui tratados são os que devem compor o cerne da apresentação da matéria ao aluno de Ensino Médio.

No terceiro capítulo, seguem algumas considerações sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino da Matemática (que acompanha as Ciências da Natureza), argumentando-se como as metas, competências e habilidades buscadas pelos Parâmetros fornecem uma boa oportunidade para se trabalhar a Teoria dos Grafos. Finaliza o capítulo um esboço de plano de aulas, com sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas a respeito do tema.

No quarto capítulo, tratamos dos dados obtidos quando da aplicação da proposta em uma escola real. Turmas de 2.º ano do Ensino Médio da rede pública de ensino do Distrito Federal nos foram gentilmente cedidas por uma semana para que pudessemos testar o que defendemos aqui. Os resultados poderão ser vistos no decorrer do capítulo. Acompanha anexo a este trabalho o caderno de atividades desenvolvidas com os alunos no decorrer dessa semana.

Esperamos que este trabalho cumpra seu objetivo: trazer um tópico ao mesmo tempo profundo e simples (e, por isso mesmo, belo!) para os programas de Ensino Médio de Matemática do Brasil.

Capítulo 1

Notas Históricas

Inicialmente, trataremos de alguns marcos importantes no surgimento da Teoria dos Grafos, que servirão, inclusive, de referência para a inclusão deste tópico nos programas de Matemática do Ensino Básico, em particular do Ensino Médio.

1.1 Euler, as pontes de Königsberg e o traçado de diagramas

Historicamente, a cidade de Kaliningrado (Federação Russa) é tida como o local que inspirou o primeiro trabalho sobre a teoria dos grafos propriamente dita, em 1736. À época, era conhecida como Königsberg, a capital da Província da Prússia. A cidade, cortada pelo rio Pregel, tinha quatro regiões distintas por ele determinadas: uma ilha

central, Kneiphof; uma grande ilha a leste de Kneiphof, Lomse; e as duas regiões que ficam ao norte e ao sul de Kneiphof, chamadas, respectivamente, Altstadt e Vorstadt (Goldbarg & Goldbarg, 2012, p. 27). A figura 1.1 mostra como essas quatro regiões eram conectadas por sete pontes.

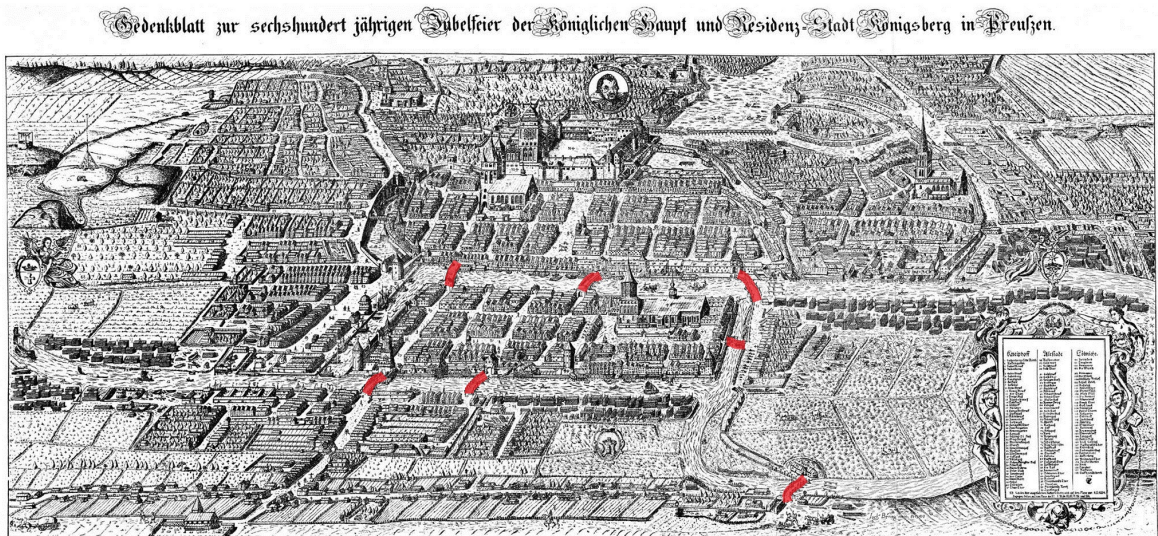


Figura 1.1: Cidade de Königsberg, com suas sete pontes destacadas

Seus habitantes tinham um passatempo popular que consistia em fazer uma caminhada passando pelas sete pontes, mas passando apenas uma vez em cada ponte. Leonhard Euler resolveu esse problema em 1736, dando uma solução não só para o caso particular de Königsberg, mas para todos os problemas semelhantes (Biggs *et al.*, 1998, p. 2 *et seq.*). Euler provou que não é possível fazer esse trajeto da maneira proposta e, em sua generalização, provou que somente mapas com determinadas estruturas (duas, na verdade) podem ter essa condição cumprida.

A rigor, Euler não estabeleceu a Teoria dos Grafos como ela é tratada hoje, pelo menos em termos de nomenclatura. Todavia, o grande passo que se deu foi a representação da situação de uma maneira mais simplificada, tratando as regiões e as conexões entre elas como uma sequência de letras. Na nomenclatura atual da Teoria dos Grafos,

ele usou **vértices** e **arestas** para representar simplificadaamente o mapa de Königsberg (ver os teoremas 2.41 e 2.43 no capítulo 2 deste trabalho). Esse estudo deu o pontapé inicial aos estudos dos grafos como entidades matemáticas e, em homenagem à primazia de Euler, trajetos de um grafo que passam por todas as arestas uma única vez, quando existem, são chamados **trajetos eulerianos**.

Percebe-se, na mesma época, que a Teoria dos Grafos permitiu um tratamento matemático de problemas antigos, como o traçado de diagramas. Biggs *et al.* (1998) citam Poinot (1809)¹, que propôs, entre outros, um problema conhecido por crianças quando estão aprendendo a manejar instrumentos de escrita:

Dados alguns pontos localizados aleatoriamente no espaço, use um fio flexível para ligá-los dois a dois de todas as maneiras possíveis, de modo que as duas pontas do fio se juntem e que o comprimento total seja igual à soma das distâncias. [Tradução nossa.]

Poinot mostra que isso só é possível para grafos com quantidade ímpar de vértices. No fim, o que se vê é uma aplicação do resultado obtido por Euler no problema das pontes de Königsberg ao caso de grafos completos (ver definição 2.11). É interessante ver que ainda não se haviam conectado os resultados, ou seja, ainda não se fizera a associação entre o germen da Teoria dos Grafos e o traçado de diagramas.

Em 1892, W. W. Rouse Ball é o pioneiro nesta ação, quando, em seu *Mathematical Recreations and Problems*, ele traçou o diagrama da figura 1.2 para resolver o problema das pontes (Gross & Yelles, 2003, p. 31).

¹POINSOT, L.. Sur les polygones et les polyèdres. *J. École Polytech*, v. 4, cah. 10, 1810, p. 16-48.

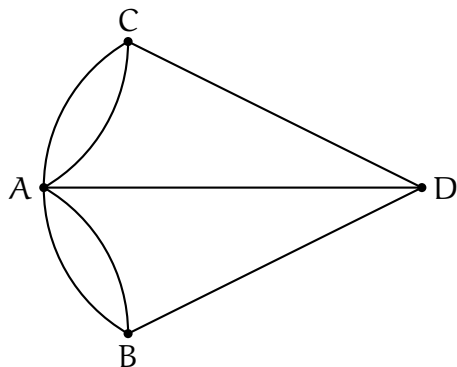


Figura 1.2: Diagrama do grafo das pontes de Königsberg.

1.2 Caminhos hamiltonianos e o problema do caixeiro viajante

Em paralelo ao conceito de trajeto euleriano, havia um processo semelhante, o de traçar um trajeto que passasse por todos os vértices de um grafo sem repetir nenhum. Sir William R. Hamilton tratou esse problema paralelamente (e independentemente) a Thomas P. Kirkman (Biggs *et al.*, 1998, p. 28 *et seq.*). Enquanto Kirkman estudou as representações planas de um poliedro, Hamilton concentrou-se na solução do problema do trajeto em um joguinho conhecido como **icosiano**. O icosiano é a representação plana do dodecaedro, e era objeto de diversos problemas semelhantes. Esse estudo rendeu a Hamilton a homenagem de ter trajetos em grafos que cumpram a condição destacada acima (passar por todos os vértices apenas uma vez) batizados de **caminhos hamiltonianos**. Uma representação do icosiano, com uma solução possível para o problema de Hamilton, pode ser vista na figura 1.4.

Situações mais pragmáticas também acabam envolvendo grafos. Um problema que interessou empresas e comerciantes no fim do século XIX e início do XX, em especial àqueles que se envolviam com o transporte de suas mercadorias a grandes distâncias

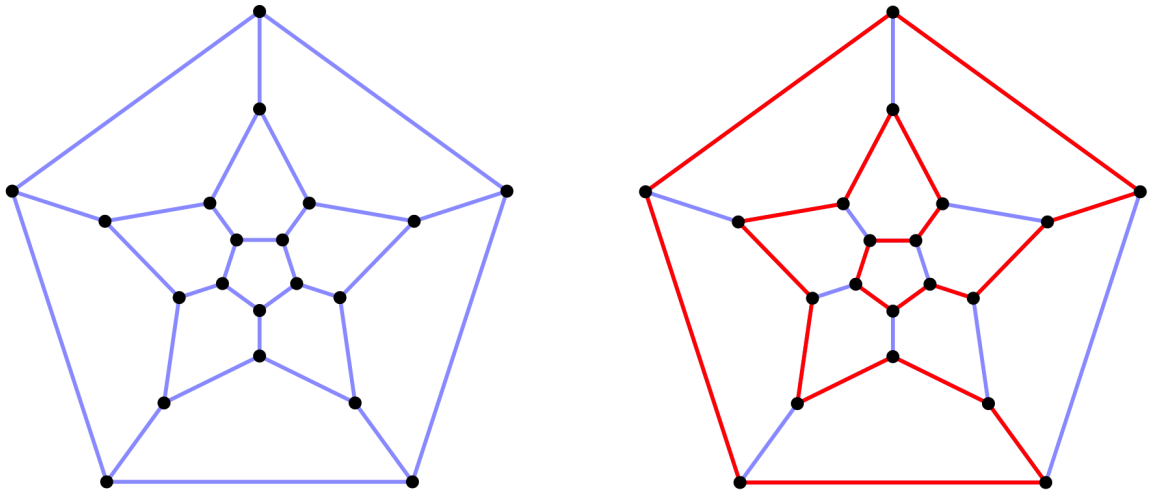


Figura 1.3: Problema do icosiano e uma solução

(entre províncias ou mesmo países) é o chamado **problema do caixeiro viajante** (PCV).

O problema consiste no seguinte: “*Dadas algumas localidades, conectadas por estradas, como se pode fazer um trajeto que passe por todas as cidades apenas uma vez, no menor tempo possível?*”

Alternativamente, pode-se procurar a menor distância percorrida. De qualquer forma, percebe-se que a situação usa o conceito de caminho hamiltoniano: pretende-se passar em cada **cidade** (ou vértice) uma única vez. O problema não é achar esse trajeto, já que, quando possível, é relativamente fácil de ser feito. A questão é encontrar um trajeto que minimize o tempo de viagem (ou a distância percorrida).

O PCV tem envolvido pesquisadores desde há mais de um século, e até hoje não se descobriu uma fórmula ou algoritmo que determine diretamente o trajeto minimizante para qualquer conjunto de localidades e de conexões. Consegue-se, porém, por meio de iterações em um computador, um procedimento que se aproxime da solução ótima (o que se chama **aproximações heurísticas**). Obviamente, a inspeção direta de todas as permutações possíveis é um procedimento que resultaria na solução desejada. Porém,

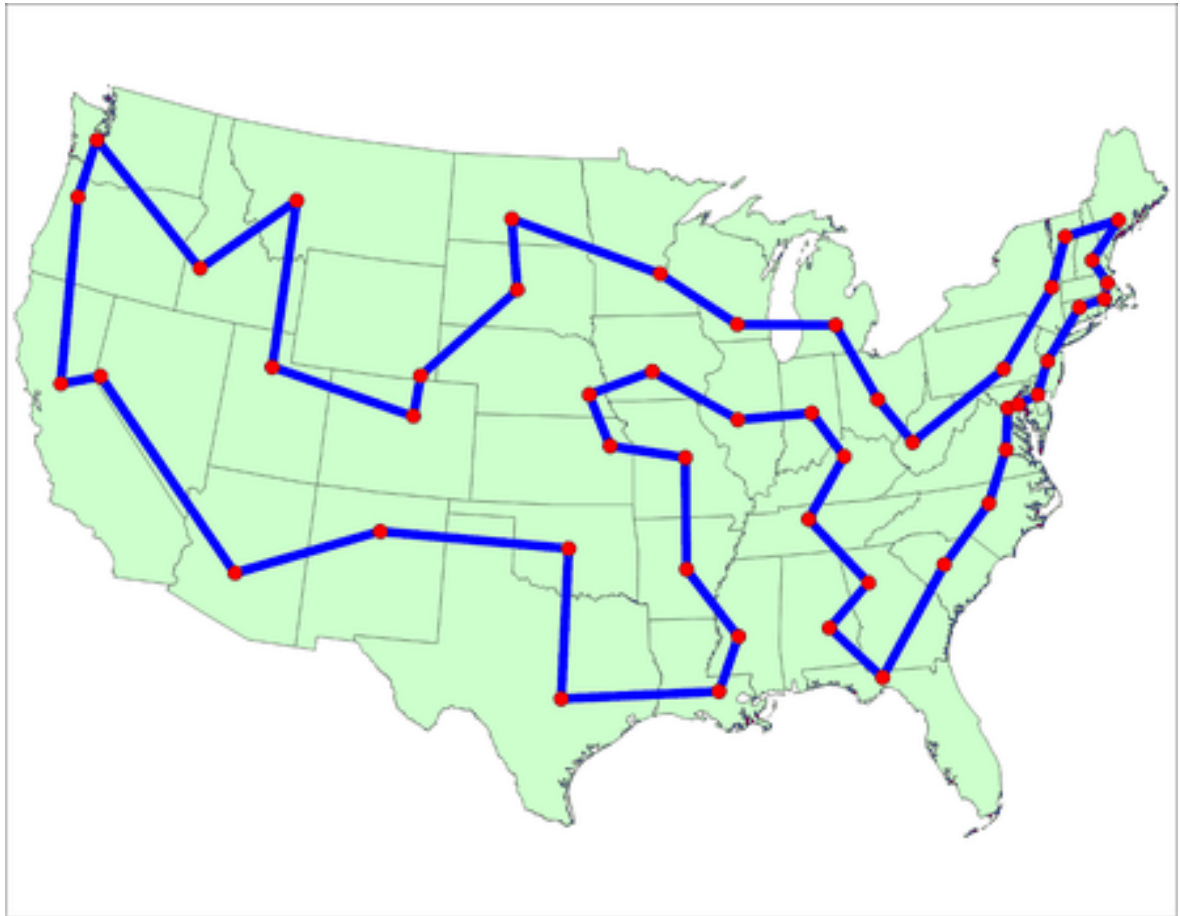


Figura 1.4: Problema do caixeiro viajante nas capitais continentais dos EUA

não é exequível conforme o número de pontos vá crescendo. Medindo-se a complexidade do problema pelo número máximo de permutações que se devem testar até chegar ao mínimo, a inspeção direta tem complexidade máxima, indicada por $O(n!)$, ou seja, é proporcional ao fatorial do número de localidades n (Goldbarg & Goldbarg, 2012).

1.3 Árvores

Outro uso para os grafos, historicamente, era permitir contagens de possibilidades. Arthur Cayley² foi pioneiro nesse estudo (Biggs *et al.*, 1998, p. 49 *et seq.*).

²CAYLEY, A.. On the Analytical Forms Called Trees. *American Journal of Mathematics*, v. 4, 1881, p. 266-268.

De modo interdisciplinar, seus resultados foram amplamente usados no estudo de estruturas químicas moleculares, especialmente cadeias orgânicas. Essas estruturas possibilitaram, inclusive, o estudo do que chamamos hoje de **isômeros** (moléculas que têm a mesma fórmula — ou seja, a proporção entre os elementos que as constituem —, mas estrutura diferente). Um exemplo está na figura 1.5, com o butano e o isobutano (ou metil-propano, na nomenclatura oficial).

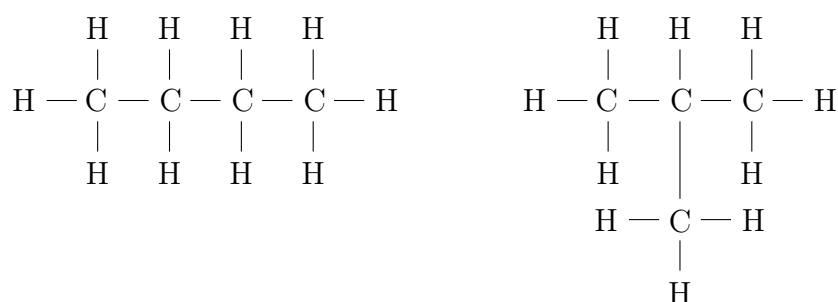


Figura 1.5: Isômeros butano e isobutano

Curiosamente, foi num artigo na revista *Nature*³ sobre essas cadeias químicas que J. J. Sylvester usou, pela primeira vez, a palavra “grafo” (em inglês *graph*) no sentido que usamos hoje. A junção desses estudos possibilitou, em 1937, que G. Pólya⁴ estabelecesse um método para contagem dessas cadeias por meio das árvores de Cayley (Biggs *et al.*, 1998, p. 70-71).

1.4 Planaridade

Outra questão que ocupou os matemáticos na Teoria dos Grafos, inclusive com grandes contribuições à Topologia no século XIX, foi a planaridade. Grafos planares têm origem em passatempos do tipo “ligar os pontos desta figura sem cruzar as linhas”.

³SYLVESTER, J. J.. Chemistry and Algebra. *Nature*, v. 17, 1877-8, p. 284.

⁴PÓLYA, G.. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. *Acta Mathematica*, 68, 1937, p. 145-254.

Esse tipo de problema tem aplicação, por exemplo, em circuitos elétricos, como as Leis de Kirchhoff mostram (Biggs *et al.*, 1998, p. 131 *et seq.*).

Vários quebra-cabeças foram propostos e resolvidos usando conceitos de Teoria dos Grafos, e, em 1930, Kuratowski provou que, para que um grafo não fosse planar, bastaria que contivesse, como subgrafo, um de dois grafos bem simples e usuais.

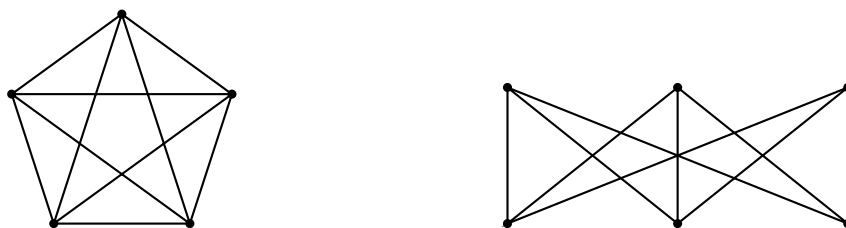


Figura 1.6: Grafos que garantem não planaridade

1.5 Avanços recentes — a coloração de grafos

Vários outros problemas poderiam ser mencionados aqui, que tratam especificamente de grafos, ou que podem ser por meio deles resolvidos. Porém, dada a limitação do escopo deste trabalho, não serão expostos aqui.

Importante considerar que a verificação de várias conjecturas tem sido feita, hoje em dia, por métodos computacionais. Os avanços na informática das últimas décadas permitiram a verificação de propriedades intuitivamente óbvias, mas cuja demonstração ainda esteja por ser encontrada. Um problema típico é a solução do problema do caixeiro viajante, para a qual ainda não existe algoritmo, mas cuja busca direta por soluções cada vez mais próximas da ótima é muito mais fácil hoje por meio de computadores.

Outro problema clássico da Teoria dos Grafos é o da coloração de mapas. O famoso **teorema das quatro cores** estabelece que toda figura plana dividida em regiões pode ter essas regiões coloridas, de modo que regiões que compartilhem uma li-

nha comum não tenham cores iguais, com apenas quatro cores. A prova desse teorema para cinco cores é deveras simples, considerando a fórmula de Euler para poliedros, mas com quatro cores se mostrou algo impossível até há pouco tempo. Em 1989, K. Appel e W. Haken publicaram um livro com o resultado de sua demonstração, que fez uso, em determinada fase, de computadores para verificar um a um casos modelares estabelecidos pelo seu desenvolvimento teórico. Embora a verificação um a um não seja um “ideal estético” na Matemática, não deixa de ser um método válido, e o teorema das quatro cores se considera provado desde então.

Para mais detalhes sobre o problema da coloração, sugere-se a leitura do capítulo 7 do excelente livro de Goldbarg & Goldbarg (2012).

Introdução à Teoria dos Grafos

Iniciaremos nosso trabalho com os conceitos básicos. A primeira seção será a maior do capítulo, mas isso se faz essencial para que se desenvolva o trabalho com maior clareza nas próximas seções. A segunda seção tratará sobre árvores, com aplicações importantes, especialmente em problemas de contagem. A terceira seção tratará sobre os diversos tipos de passeios, trilhas e caminhos. Por fim, a quarta seção tratará da planaridade de grafos, com importantes aplicações na Topologia.

2.1 Conceitos iniciais

A definição de grafo pode ser feita de duas maneiras. Uma maneira mais completa, de modo a permitir o estudo de multigrafos, é proposta por Bondy & Murty (2008)

e adotada por Goldbarg & Goldbarg (2012), e será usada aqui. Para a compreensão desta definição, considere que $\mathcal{P}_2(A)$ indica o conjunto de todos os subconjuntos de um ou dois elementos de um conjunto A determinado.

Definição 2.1. Grafo é um trio (V, E, ψ) formado por um conjunto V de elementos chamados **vértices**, um conjunto E de elementos chamados **arestas** e uma função de incidência $\psi : E \rightarrow \mathcal{P}_2(V)$ que associa cada aresta a um par de elementos (distintos ou não) de V . Se chamarmos o grafo de G , indicamos $G = (V, E, \psi)$.

Caso haja necessidade de distinção, podemos indicar os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo G por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente, e a função de incidência por ψ_G . Quando se dão nomes aos vértices ou arestas, temos um grafo rotulado. Veja, na figura 2.1, um exemplo de grafo, retirado de Bondy & Murty (2008).

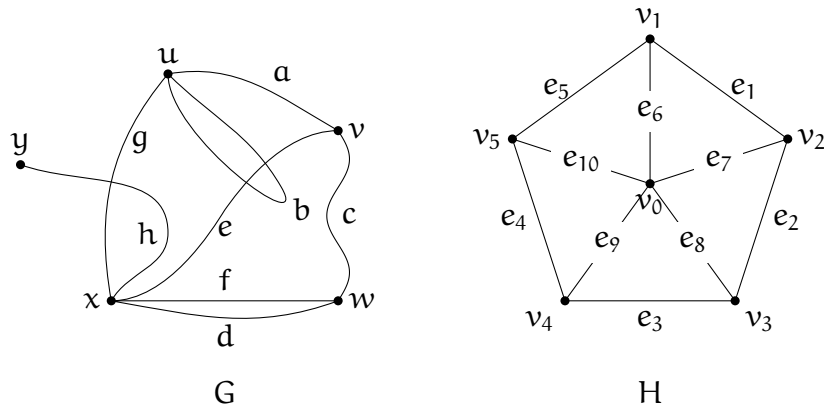


Figura 2.1: Dois grafos G e H

No grafo G, temos:

$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

A função de incidência é definida por:

$$\begin{aligned}\psi_G(\mathbf{a}) &= \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} & \psi_G(\mathbf{b}) &= \{\mathbf{u}\} & \psi_G(\mathbf{c}) &= \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} & \psi_G(\mathbf{d}) &= \{\mathbf{w}, \mathbf{x}\} \\ \psi_G(\mathbf{e}) &= \{\mathbf{v}, \mathbf{x}\} & \psi_G(\mathbf{f}) &= \{\mathbf{w}, \mathbf{x}\} & \psi_G(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{u}, \mathbf{x}\} & \psi_G(\mathbf{h}) &= \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}\end{aligned}$$

Já no grafo H, temos:

$$\begin{aligned}V(\mathbf{H}) &= \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} \\ E(\mathbf{H}) &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_8, \mathbf{e}_9, \mathbf{e}_{10}\}\end{aligned}$$

A função de incidência é definida por:

$$\begin{aligned}\psi_H(\mathbf{e}_1) &= \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} & \psi_H(\mathbf{e}_2) &= \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} & \psi_H(\mathbf{e}_3) &= \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} & \psi_H(\mathbf{e}_4) &= \{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\} \\ \psi_H(\mathbf{e}_5) &= \{\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_1\} & \psi_H(\mathbf{e}_6) &= \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\} & \psi_H(\mathbf{e}_7) &= \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2\} & \psi_H(\mathbf{e}_8) &= \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3\} \\ \psi(\mathbf{e}_9) &= \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_4\} & \psi(\mathbf{e}_{10}) &= \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_5\}\end{aligned}$$

Dizemos que uma aresta incidente num par de vértices **conecta** esses dois vértices. Assim, o grafo G tem uma particularidade: uma aresta (b) que conecta um vértice a si mesmo. Uma aresta assim é chamada **laço**. Um grafo que possua um laço é, às vezes, denominado **pseudografo**.

Perceba ainda que o grafo G possui um par de vértices com duas arestas que lhe correspondem. Isso motiva a próxima definição.

Definição 2.2. Multigrafo é um grafo em que pelo menos um par de vértices tem mais de uma aresta que os conecta.

O grafo que representa o problema das pontes de Königsberg (figura 1.2) é um exemplo de multigrafo: os vértices A e C têm duas arestas que os conectam, bem como os vértices A e B.

Pela própria definição de grafo, percebemos que é, teoricamente, possível tratar tudo que se refere a essas entidades sem o uso de diagramas. Ou seja, conseguimos estudar e usar grafos apenas analiticamente, sem estar presos a suas representações

geométricas. O que é importante num grafo não é a posição que os vértices ocupam, tampouco a distância que os separa em cada representação. A essência do grafo é: “existem tais elementos (vértices), e alguns deles mantêm determinada relação que os conecta (arestas)”.

Todavia, não podemos negar que os diagramas têm grande utilidade na visualização de muitas propriedades. Assim, se pudermos usar diagramas os mais simples possíveis, isso ajudará sobremaneira o estudo dos grafos. Isso se torna importante no estudo de multigrafos. Imagine o seguinte multigrafo M , da figura 2.2:

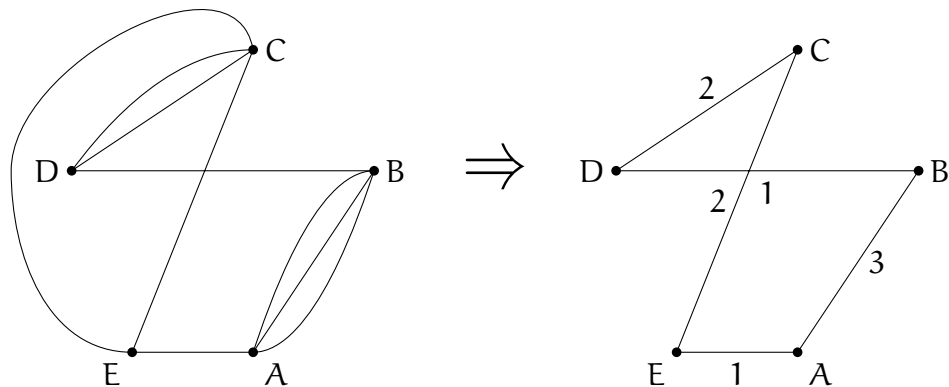


Figura 2.2: Multigrafo e seu grafo ponderado

Observe que o multigrafo não tem rótulos em suas arestas, apenas em seus vértices. Já o grafo da direita mantém os mesmos vértices, mas apenas uma aresta para cada par conectado no multigrafo M original. Nesse segundo grafo, cada aresta está marcada com a quantidade de arestas que conecta o par de vértices correspondente no grafo M original. Essas marcações não serão chamadas de “rótulos” porque há marcações iguais para arestas diferentes (por ex., a aresta AE e a aresta BD têm marca 1). Assim, chamaremos essas marcas de **pesos**. Isso motiva a próxima definição.

Definição 2.3. Grafo ponderado é um grafo derivado de um multigrafo, sendo que cada uma de suas arestas tem peso igual à quantidade de arestas do multigrafo que conectam cada par de vértices que se encontram conectados.

Obviamente, ganha-se muito em simplicidade no momento da representação dos multigrafos por diagramas.

Outro conceito útil na Teoria dos Grafos tem a ver com a aplicação de um sentido nas arestas. Imagine, por exemplo, um grafo que represente ruas que conectam pontos de intersecção dessas ruas numa cidade. Para realizar o planejamento do trânsito nessa malha viária, é interessante que o grafo informe o sentido em que o trânsito ocorrerá. Assim, temos a definição 2.4:

Definição 2.4. Grafo direcionado ou **digrafo** é um trio (V, A, Φ) formado por um conjunto V de elementos chamados **vértices**, um conjunto A de elementos chamados **arcos** e uma função $\Phi : A \rightarrow V \times V$ que associa cada arco a um par ordenado de vértices que são conectados por esse arco.

Apesar de sua importância no estudo dos grafos, especialmente por suas aplicações, não trataremos com detalhes aqui dos grafos direcionados. Fica apenas um exemplo, o grafo da figura 2.3, onde se percebe, inclusive, que pode haver duas arestas conectando os mesmos dois vértices, mas em sentidos opostos (de modo que elas conectam pares ordenados diferentes, portanto).

Vamos, agora, estabelecer alguns conceitos de grandeza dos grafos. O primeiro foca nos vértices:

Definição 2.5. Ordem de um grafo é a quantidade de vértices que ele possui. Em outras palavras, é a quantidade de elementos do conjunto V .

Assim, indicaremos a ordem de um grafo G pela notação $|V(G)|$. Caso não haja dúvidas quanto ao grafo a que se refere, pode-se indicar a ordem do grafo por v .

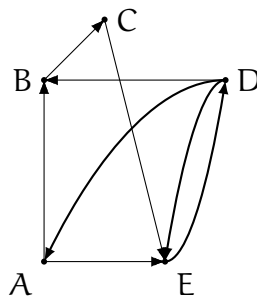


Figura 2.3: Um grafo direcionado

Definição 2.6. Tamanho de um grafo é a quantidade de suas arestas, ou seja, é a quantidade de elementos do conjunto E .

Da mesma forma, indicaremos o tamanho de um grafo pela notação $|E(G)|$ ou, quando não houver dúvida, pela notação mais simples e .

Podem-se conceituar um grafo **nulo** como sendo aquele que tem ordem e tamanho iguais a zero, e um grafo **vazio** aquele que tem vértices, mas não tem arestas.

Vários teoremas se baseiam na quantidade de arestas que incidem em cada vértice de um grafo. Assim, tem-se o conceito de grau.

Definição 2.7. Grau de um vértice é a quantidade de arestas que incidem no vértice em questão.

Indicamos o grau de um vértice $x \in V$ por $\deg(x)$. Num grafo simples (ou seja, que não seja multigrafo nem tenha laços) com v vértices, o maior grau possível de um vértice é $v - 1$ (caso em que o vértice se conecta a todos os outros vértices do grafo).

Definição 2.8. Grau máximo de um grafo é o grau do vértice de maior grau em V . **Grau mínimo** de um grafo é o grau do vértice de menor grau em V .

Indicamos o grau máximo de um grafo G por $\Delta(G)$, e o grau mínimo por $\delta(G)$. Esses conceitos nos permitem estabelecer um teorema importante na Teoria dos Grafos, razão pela qual se seguirá a nomenclatura de Benjamin *et al.* (2015).

Teorema 2.9 (Primeiro Teorema da Teoria dos Grafos). *A soma dos graus dos vértices de um grafo simples é igual ao dobro do tamanho do grafo. Ou seja:*

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2e \quad (2.1)$$

Demonstração. A demonstração é um tanto simples. Considerando que o grafo é simples, cada aresta incide em dois vértices diferentes. Ou seja, na contagem do grau de cada vértice, uma aresta será contada em duas ocasiões. Assim, ao somar os graus dos vértices, teremos cada aresta será contada duas vezes, de modo que o teorema fica verificado. \square

Corolário 2.10. *Num grafo simples, a quantidade de vértices de grau ímpar é um número par.*

Demonstração. Se particionarmos o conjunto V em dois conjuntos V_p e V_i , de vértices de grau par e de grau ímpar, respectivamente, teremos que a soma dos graus dos vértices de V_p é, necessariamente, par. Suponha, por absurdo, que o conjunto V_i tenha uma quantidade ímpar de vértices. Ora, neste caso, a soma dos graus (todos ímpares) será um número ímpar. Mas isso contraria o teorema 2.9, pois a soma dos graus de todo o grafo deve ser um número par. Assim, por absurdo, concluímos que quantidade de vértices em V_i deve ser par. \square

Nosso próximo resultado se baseia num grafo com uma característica importante.

Definição 2.11. Grafo completo é um grafo simples em que cada vértice se conecta a todos os demais, ou seja:

$$G \text{ é completo} \iff (\forall x \in V(G)) \deg(x) = v - 1 \quad (2.2)$$

Indicamos um grafo completo de v vértices por K_v . Um resultado importante para grafos completos é o seu número de arestas.

Proposição 2.12. *Um grafo completo com v vértices tem $e = v(v - 1)/2$ arestas.*

Demonstração. A demonstração se faz por meio do teorema 2.9. Se o grafo é completo, a definição 2.11 garante que cada vértice tem grau igual a $v - 1$. Ora, como temos v vértices, a soma dos graus será dada por $v(v - 1)$. Mas o referido teorema afirma que essa soma é igual a $2e$. Logo:

$$2e = v(v - 1) \Rightarrow e = \frac{v(v - 1)}{2} \quad (2.3)$$

□

Exemplo 2.13. Numa festa, cada convidado que chega cumprimenta todos os demais já presentes. Qual a quantidade de cumprimentos que haverá, se foram convidadas 10 pessoas?

É fácil perceber que esta situação pode ser representada por um grafo. Basta tratar cada pessoa como um vértice e cada cumprimento como uma aresta. Bem, se cada pessoa que chega cumprimenta todas as demais já presentes, quando o último (10.º) convidado chegar, todos terão cumprimentado todos. Ou seja, nosso grafo será um grafo **completo**. Dessa maneira, podemos determinar a quantidade de cumprimentos pelo número de arestas do grafo completo de 10 vértices:

$$e = \frac{v(v - 1)}{2} \Rightarrow e = \frac{10 \cdot 9}{2} \therefore e = 45$$

Logo, haverá 45 cumprimentos quando todos os convidados chegarem. ■

Vamos finalizar esta seção com mais três conceitos, relativos à incidência entre vértices e arestas.

Definição 2.14. Vértices adjacentes são dois vértices que incidem numa mesma aresta.

Isso motiva a próxima definição:

Definição 2.15. Vizinhança de um vértice é o conjunto de todos os vértices que lhe são adjacentes. Indicando por $N(x)$ a vizinhança do vértice x , temos:

$$N(x) = \{y \in V : (\exists \varepsilon \in E)\psi(\varepsilon) = \{x, y\}\} \quad (2.4)$$

Obviamente, vale a relação $\deg(x) = |N(x)|$. Também podemos definir adjacência entre arestas:

Definição 2.16. Arestas adjacentes são duas arestas que compartilham um vértice em comum, ou seja, que incidem sobre um mesmo vértice.

2.2 Árvores

As árvores estão entre os primeiros problemas que a Teoria dos Grafos ajudou a resolver. Assim, vamos iniciar seu estudo agora. Primeiramente, vamos definir a ideia de conectividade.

Definição 2.17. Grafo conexo é um grafo em que, para qualquer par de vértices x e y , é possível encontrar uma sequência de vértices do grafo $(x, x_1, x_2 \dots x_n, y)$ tal que os pares $\{x, x_1\}$, $\{x_1, x_2\} \dots \{x_{n-1}, x_n\}$ e $\{x_n, y\}$ sejam de vértices adjacentes.

O conceito intuitivo de conectividade talvez seja mais fácil de compreender: é aquele grafo que “não está separado em várias partes desligadas”. A figura 2.4, retirada de Bondy & Murty (2008), vai ajudar a visualizar.

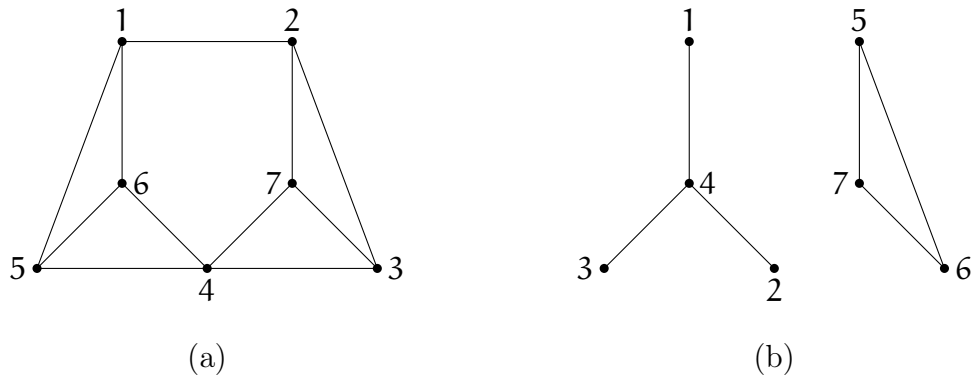


Figura 2.4: Grafo conexo (a) e desconexo (b)

Definição 2.18. **Subgrafo** de um grafo $G = (V, E, \psi)$ é um grafo $G' = (V', E', \psi')$ tal que $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ e $x \in V' \Rightarrow \psi'(x) = \psi(x)$ (ou seja, ψ' é a restrição de ψ ao domínio E').

Usamos a notação $G' \subseteq G$ para indicar que G' é um subgrafo de G . Obviamente, um grafo é subgrafo de si mesmo. Caso G' seja diferente de G , dizemos que é um subgrafo **próprio** de G , e indicamos por $G' \subset G$. O grafo G , em qualquer caso, é chamado de **supergrafo** de G' . A figura 2.5 mostra exemplos de um grafo G com alguns subgrafos.

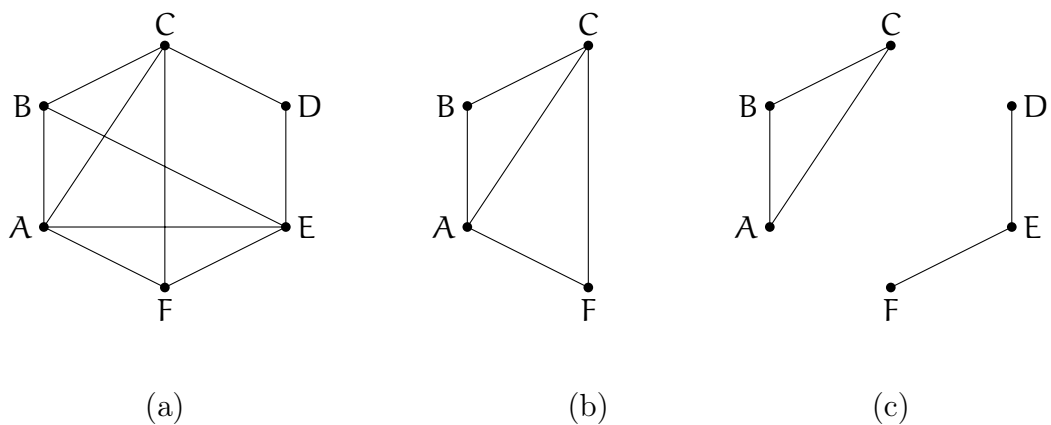


Figura 2.5: Grafo G e alguns subgrafos

Perceba que o subgrafo na figura 2.5 (b) é conexo, enquanto o subgrafo na figura 2.5 (c) é desconexo. De qualquer forma, eles ilustram dois processos de obtenção de subgrafos. O subgrafo em (b) é obtido por **deleção de vértices**, ou seja, eliminam-se alguns vértices e **todas as arestas incidentes** nesses vértices. O subgrafo em (c) é obtido por **deleção de arestas**, onde simplesmente se eliminam algumas arestas. É possível que se deletem todas as arestas de um vértice sem deletá-lo; o vértice resultante é um **vértice isolado**, e o subgrafo resultante também é desconexo.

Agora, estamos aptos a definir uma árvore. Usaremos uma definição derivada de Lovász *et al.* (2005).

Definição 2.19. **Árvore** é um grafo simples conexo em que a deleção de qualquer aresta resulta num subgrafo desconexo.

A figura 2.6 traz alguns exemplos de árvores.

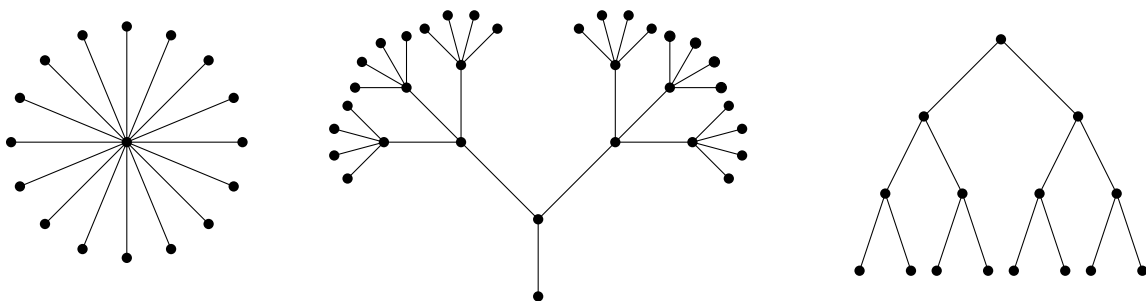


Figura 2.6: Algumas árvores

Outro exemplo de árvore já dado neste trabalho são as representações do butano e do isobutano na figura 1.5. Um resultado imediato para as árvores é a seguinte proposição:

Proposição 2.20. *Numa árvore, $e = v - 1$.*

Demonstração. A própria definição 2.19 já indica que uma árvore tem o mínimo de arestas necessárias para que o grafo não seja desconexo. Assim, pensemos na construção

de uma árvore vértice a vértice. Começando com um vértice único, a árvore é o próprio vértice, uma vez que não se pode traçar uma aresta (não há laços em árvores). Neste caso trivial, verifica-se a proposição, pois $v = 1$ e $e = 0$.

Adicionando um vértice, ligamo-lo ao primeiro por uma aresta. Neste caso, também vale a proposição, pois $v = 2$ e $e = 1$. Vamos pensar, então, indutivamente sobre v e sobre e . Seja, então, uma árvore com v vértices e $e = v - 1$ arestas. Ao acrescentar um vértice, a definição 2.19 exige que ele se conecte a um vértice já presente, para que não haja desconexão. Assim, acrescentamos uma nova aresta, o que faz com que tenhamos, para a nova árvore, $e + 1 = (v + 1) - 1$, o que é verdadeiro, pela hipótese de indução. Por outro lado, acrescentar uma aresta exige que se acrescente um novo vértice, pois, caso não haja um novo vértice, essa nova aresta será uma aresta que, retirada da “nova árvore”, resultará num grafo **conexo**, contrariando a definição dada de árvore. Logo, para que se acrescente uma nova aresta, é necessário um novo vértice e, portanto, $e + 1 = (v + 1) - 1$, também verdadeiro, pela hipótese de indução. Portanto, fica provada a proposição. \square

Problemas de otimização e rotas usam o conceito de árvore na sua essência. Vamos, então, definir o que vem a ser um gerador.

Definição 2.21. Subgrafo gerador de um grafo $G = (V, E, \psi)$ é um subgrafo G' tal que $V(G') = V$.

A ideia de gerador sugere o seguinte raciocínio: tomando-se os vértices do subgrafo, se traçarmos todas as arestas de E que conectam os vértices do subgrafo, chegaremos ao supergrafo G . Voltando à figura 2.5, o subgrafo de (b) já tem todas as arestas de $E(G)$ conectando os vértices, mas não possui todos os vértices de G . Logo, ele não é subgrafo gerador de G . Já o subgrafo de (c), por conter todos os vértices do supergrafo

G , é um gerador de G : se traçarmos todas as arestas que estão em $E(G)$ conectando os vértices desse subgrafo, conseguiremos exatamente o grafo G .

O conceito de gerador tem importância quando se trata de uma árvore. É claro que conseguimos destacar uma árvore, subgrafo de qualquer grafo não vazio. No limite, temos a árvore trivial de um vértice. De qualquer forma, quando partimos de um grafo conexo, a proposta é destacar uma árvore que contenha todos os vértices do grafo, de modo que ela seja uma árvore geradora.

Para partir de uma aplicação, suponha que o grafo G tenha rótulos, e que se pretenda conseguir uma árvore geradora com a menor soma de rótulos possível. Esse é o conceito que damos na definição 2.22.

Definição 2.22. **Árvore geradora mínima** de um grafo rotulado G é uma árvore, subgrafo de G , cujos vértices sejam todos os elementos de $V(G)$ e cujas arestas tenham a menor soma de rótulos possível dentre todas as árvores geradoras de G .

Vamos basear nosso raciocínio, doravante, no grafo completo K_5 rotulado conforme a figura 2.7.

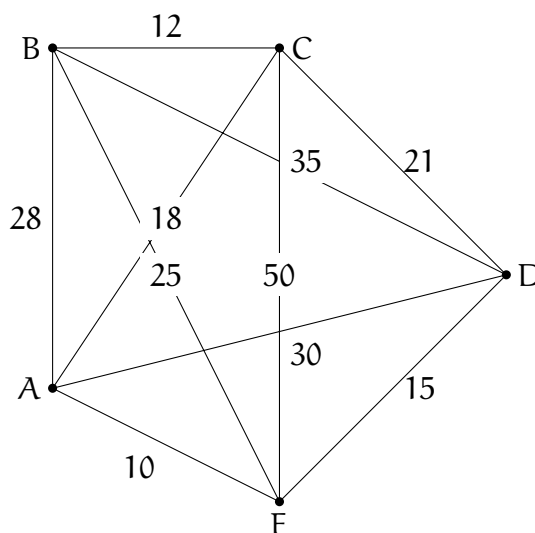


Figura 2.7: Grafo completo K_5 rotulado

Há dois algoritmos para encontrar a árvore geradora mínima. O primeiro será descrito a seguir.

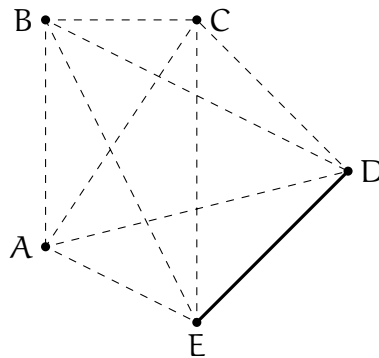
Algoritmo 2.23 (Algoritmo de Prim). (1) Escolha um vértice qualquer e inclua no conjunto V' de vértices da árvore.

(2) Selecione a aresta que incide nesse vértice que tem o menor rótulo e inclua o outro vértice dessa aresta no conjunto de vértices V' da árvore.

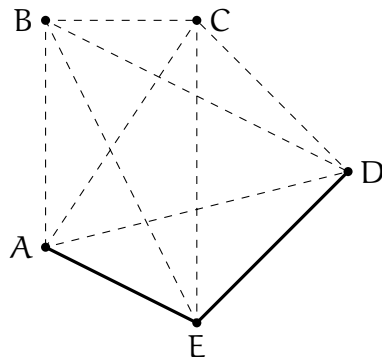
(3) Selecione a aresta que incide em **apenas** um dos vértices já incluídos em V' e que tem o menor rótulo, e inclua o outro vértice dessa aresta no conjunto V' .

(4) Prossiga até $V' = V(G)$.

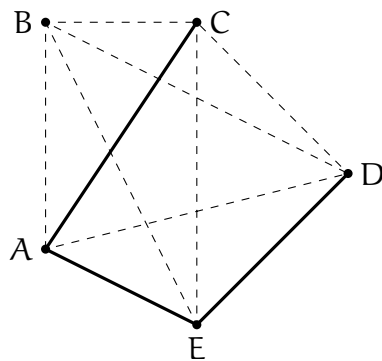
Exemplo 2.24. Vamos aplicar o algoritmo de Prim ao grafo da figura 2.7 e encontrar a árvore geradora mínima. Vamos partir do vértice D. Nesse caso, a aresta com menor rótulo é DE, com valor 15. Inclua-se essa aresta, então. Temos o seguinte:



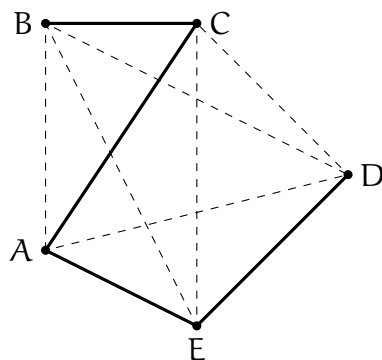
Agora, olhando **os dois vértices** D e E, buscamos a aresta com menor rótulo. É a aresta EA, com rótulo 10. Marquemo-la:



Agora, buscamos a aresta incidente em A, D ou E com menor rótulo possível, tomando cuidado de não selecionar nenhuma aresta que incida em dois desses vértices. A aresta procurada é AC, com rótulo 18. Daí, nossa figura fica:



Como queremos uma árvore geradora, a aresta que tomarmos agora deve chegar a B. A que tem menor rótulo é CB, com rótulo 12. Pronto, encontramos nossa árvore!



Essa árvore é geradora, pois tem todos os vértices do grafo K_5 inicial, e é mínima por ter a menor soma possível de rótulos dentre todas as árvores geradoras. ■

Um problema solucionado assim poderia ser uma adaptação do problema do caixeiro viajante que pretende passar por cinco cidades com as distâncias marcadas nos rótulos. Veja que o problema se resolve de maneira direta. Surge a pergunta: “Então por que não se usa o algoritmo de Prim para resolver o problema do caixeiro viajante?”. Na próxima seção, sobre caminhos, trataremos do assunto novamente.

Vejamos agora um segundo algoritmo, considerado mais “ambicioso”. Diferente do algoritmo de Prim, em que se escolhem vértices, escolheremos arestas.

Algoritmo 2.25 (Algoritmo de Kruskal). (1) *Ordene as arestas de $E(G)$ em ordem crescente de rótulo. Seja a sequência de tais arestas assim ordenadas dada por $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n)$.*

(2) *Selecione a aresta ε_1 , que tem o menor rótulo, e inclua-a no conjunto E' das arestas da árvore.*

(3) *Selecione a aresta ε_2 , a segunda menor, incluindo-a em E' .*

(4) *Repita o passo (3), tomando o cuidado de não tomar uma aresta que feche uma sequência $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\} \dots \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, x_1\}$ com as arestas que já estejam em E' .*

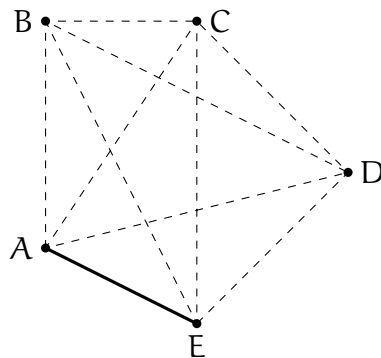
(5) *Prossiga até $V' = V(G)$.*

O cuidado no passo (4) é essencial. Perceba que, caso fechemos uma sequência como a descrita com arestas de E' , estaremos fugindo da definição 2.19, já que a deleção dessa aresta produzirá um grafo ainda conexo. Caso a aresta do passo (4) seja uma dessas, deve-se deixá-la de lado e passar à próxima. Vejamos a resolução do mesmo problema do exemplo 2.24, por meio do algoritmo de Kruskal.

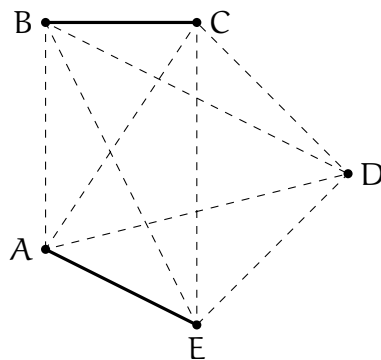
Exemplo 2.26. Vamos encontrar a árvore geradora mínima a partir do grafo da figura 2.7. As arestas, em ordem crescente, estão tabeladas a seguir, como pares de vértices com os respectivos rótulos à direita:

Aresta	Rótulo
AE	10
BC	12
DE	15
AC	18
CD	21
BE	25
AB	28
AD	30
BD	35
CE	50

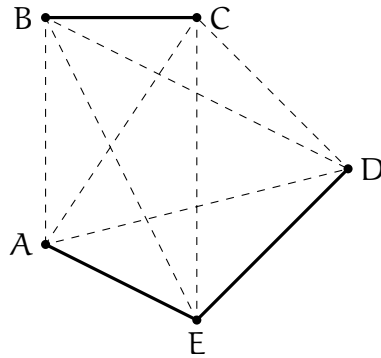
A aresta com menor rótulo é AE. Ficamos com:



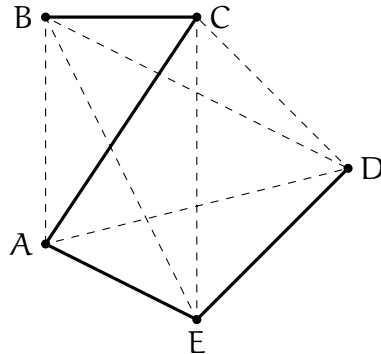
A próxima aresta mínima é BC, com rótulo 12. Perceba que não nos preocupamos com tomar arestas incidentes em vértices que já estejam na árvore:



Em seguida, a menor aresta é DE. Perceba que não estamos fechando nenhuma sequência proibida. Logo, o subgrafo selecionado, por enquanto, está assim:



Já temos um subgrafo gerador, mas não é uma árvore: este subgrafo é desconexo. Assim, a próxima aresta deverá concluir o processo. A menor aresta das que ainda não foram selecionadas é AC, com rótulo 18. Assim, concluímos nossa árvore geradora mínima:



Perceba que a árvore obtida pelos dois algoritmos é a mesma. Isso ocorre sempre? A resposta é **não!** Uma vez que podem ocorrer arestas com rótulos iguais, o algoritmo de Kruskal pode resultar numa árvore geradora mínima com a mesma soma de rótulos, mas com uma seleção diferente de arestas. Porém, os dois algoritmos **têm sempre a possibilidade** de chegar à mesma solução.

2.2.1 Noções sobre complexidade de algoritmos

Introduzimos nesta seção dois algoritmos para tratar de árvores geradoras mínimas. Um conceito essencial no tratamento com algoritmos é sua **complexidade**. A complexidade pode ser tratada em duas dimensões: o espaço requerido para sua execução, que é medido em função da quantidade de dados tratados pelo algoritmo em suas operações (refletindo-se, por exemplo, na memória utilizada por um computador quando da execução do algoritmo), e o tempo requerido pela sua execução, que é medido pela quantidade de operações realizadas e pelo tempo de duração de cada operação. Nesta subseção, trataremos do tempo de execução.

É claro que o tempo de execução de um algoritmo depende da velocidade de processamento do instrumento que está operando. Todavia, a menos da tecnologia envolvida (que pode ser representada por um fator de proporcionalidade, a fim de se obter uma medida mais geral do tempo), é possível concluir que o tempo de execução do algoritmo está relacionado ao número N de entradas do algoritmo. Por isso, o tempo de execução é normalmente representado por $T(N)$.

Uma sentença para $T(N)$ pode ser obtida por meio de experimentos estatísticos. Com o uso de modelos de regressão, é possível determinar a forma funcional de $T(N)$ que melhor se ajuste aos dados observados. Por exemplo, se um algoritmo é tal que os logaritmos de $T(N)$ e de N se ajustam linearmente, temos:

$$\log T(N) = a + b \cdot \log N \quad \Rightarrow \quad T(N) = A \cdot N^b \text{ com } A = e^a$$

Outra maneira de obter uma aproximação para o tempo de execução é considerar que cada operação envolvida no algoritmo toma o mesmo tempo e contar a quantidade de operações. Para a determinação da fórmula, é necessário determinar o tempo (médio) de execução de uma operação.

Exemplo 2.27. Seja um algoritmo que some uma sequência de N números inseridos no sistema. Supondo que a adição seja feita de dois em dois números, a primeira soma (digamos $x_1 + x_2$) envolve uma operação. O resultado dessa soma será adicionado ao terceiro número, e teremos a segunda operação. Seguindo em frente, concluímos que serão realizadas $N-1$ operações de adição. Assim, podemos dizer que $T(N) = \alpha(N-1)$, sendo α o tempo de cada adição. ■

Quando usamos um grande número de dados, algumas parcelas de $T(N)$ podem ser ignoradas para fins de medida da complexidade, por terem efeito desprezível sobre o resultado final. Por exemplo, assumindo que α no exemplo 2.27 seja pequeno, um número grande de valores a ser somados faz com que a parcela -1 se torne desprezível (se $N = 1\,000\,000$, subtrair 1 no fator que multiplica α não terá efeitos consideráveis no tempo de execução do algoritmo). Isso motiva a definição seguinte, retirada de Sedgewick & Wayne (2011).

Definição 2.28. “Escrevemos $\sim f(N)$ para representar qualquer função que, dividida por $f(N)$, tende a 1 conforme N cresça, e escrevemos $g(N) \sim f(N)$ para indicar que $\frac{g(N)}{f(N)}$ tende a 1 quando N cresce.” (Sedgewick & Wayne, 2011, p. 179)

$$g(N) \sim f(N) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{g(N)}{f(N)} = 1 \quad (2.5)$$

A função $g(N)$, em geral, é dada por uma expressão do tipo $g(N) = b \cdot N^\alpha \cdot (\log N)^\beta$, sendo o valor de b determinado para que o limite da definição 2.28 seja efetivamente igual a 1. Chamamos a função $g(N)$ uma **til-aproximação** de $f(N)$.

Exemplo 2.29. Retomemos o algoritmo do exemplo 2.27. Dado o tempo de execução determinado ali, podemos definir a til-aproximação de $T(N)$ como sendo a função

$g(N) = aN$, uma vez que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a(N-1)}{aN} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(1-1/N)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1(1-1/N)}{1} = 1$$

■

A til-aproximação conduz naturalmente ao conceito de ordem de complexidade. A ordem de complexidade é uma expressão que permite saber a operação dominante na determinação do tempo de execução do algoritmo. Usamos a notação $O(f(n))$ para indicar que a ordem de complexidade é $f(n)$. Em geral, pode-se dizer que a ordem de complexidade é a til-aproximação do tempo de execução, sem a constante de proporcionalidade que faz o limite da definição 2.28 ser 1.

Estabelecidos esses conceitos, podemos avaliar os algoritmos de Prim e de Kruskal do ponto de vista do tempo de execução. Goldberg & Goldberg (2012) mostram que o algoritmo de Prim, num grafo com v vértices e e arestas, tem complexidade $O(v \log v + e)$. O logaritmo aparece sem base específica porque a conversão para qualquer base é feita por meio de um fator, e fatores não alteram a ordem de complexidade.

Já o algoritmo de Kruskal tem ordem de complexidade $O(e \log e)$. Considerando que, em geral, num grafo, o número de arestas tende a ser maior que o de vértices, o algoritmo de Kruskal tende a ser mais eficiente, em relação ao tempo de execução.

2.3 Caminhos

Nesta seção, trataremos de subgrafos úteis que marcam trajetos, ou seja, uma conexão entre vértices do grafo. Vamos às definições.

Definição 2.30. **Passeio** ou **percurso** em um grafo $G = (V, E, \psi)$ é uma sequência formada por elementos de V e de E alternadamente $(x_1, e_1, x_2, e_2 \dots x_{n-1}, e_{n-1}, x_n)$, de modo que $\psi(e_i) = \{x_i, x_{i+1}\}$, para cada $i = 1, 2 \dots n - 1$.

Vamos retomar o grafo H da figura 2.1.

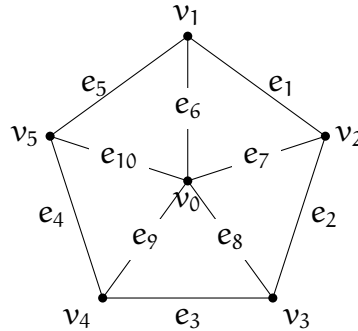


Figura 2.8: Grafo H para marcar caminhos

Um passeio possível seria $\pi_1 = (v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_0, e_{10}, v_5, e_4, v_4, e_3, v_3, e_8, v_0, e_6, v_1)$.

Perceba que é possível passar pelo mesmo vértice ou pela mesma aresta várias vezes.

Caso tomemos o passeio $\pi_2 = (v_4, e_3, v_3, e_2, v_2, e_7, v_0, e_{10}, v_5, e_4, v_4)$, será um **passeio fechado** (seu início e seu fim são o mesmo vértice).

Agora, vamos começar a impor restrições.

Definição 2.31. **Trilha** ou **cadeia** é um passeio que não passa pela mesma aresta mais de uma vez.

O passeio π_2 dado acima é um exemplo de trilha. Outra trilha seria a sequência $\tau = (v_3, e_8, v_0, e_7, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_9, v_0)$. Perceba que não se usa a nenhuma aresta mais de uma vez, apesar de vértices poderem ser repetidos quantas vezes forem necessárias.

Se estendermos o conceito para multigrafos, o problema das pontes de Königsberg busca uma trilha que passe por **todas as arestas** do grafo da figura 1.2.

Vejamos agora um subgrafo que é de nosso interesse imediato.

Definição 2.32. **Caminho** é uma trilha que não repete vértices.

O passeio π_2 acima não é um caminho, de acordo com a definição 2.32. Basta verificar que o primeiro e o último vértice coincidem. Um exemplo de caminho é dado por $\chi = (v_5, e_{10}, v_0, e_8, v_3, e_2, v_2)$.

Os caminhos têm interesse especial em problemas que envolvam transporte e fluxos, uma vez que, em geral, quando se busca minimizar custos de um trajeto a ser realizado, evitar repetir “visitas” é uma obrigação. O problema do caixeiro viajante, por ex., busca um caminho dentro do grafo de conexões entre os vértices que são as cidades.

Vamos introduzir uma medida para caminhos e, conseqüentemente, uma medida para grafos. Primeiramente, vamos definir o comprimento de um caminho, para grafos ponderados e não ponderados¹. Em seguida, definiremos a distância entre dois vértices quaisquer.

Definição 2.33. Comprimento de um caminho num grafo não ponderado é a quantidade de arestas que fazem parte do caminho.

Comprimento de um caminho num grafo ponderado é a soma dos pesos (rótulos) das arestas que fazem parte do caminho.

Exemplo 2.34. Resgatando a figura 2.7 e a solução apresentada no exemplo 2.24, temos um caminho. Se ignorarmos os rótulos do grafo K_5 , o comprimento do caminho ali determinado será 4. Já considerando os rótulos, o comprimento do caminho será $15 + 10 + 18 + 12 = 55$. ■

Definição 2.35. Distância entre vértices de um grafo conexo é o comprimento do menor caminho que conecta esses vértices.

¹Ver definição 2.3.

Como todo caminho é uma árvore, vemos que o algoritmo 2.23, de Prim, pode ser usado para determinar o caminho de menor comprimento e, portanto, a distância entre dois vértices.

Também têm interesse especial os trajetos que iniciam e terminam no mesmo vértice. Mesmo no caso do caixeiro viajante, pode ser interessante ele partir e chegar ao mesmo lugar (p. ex., por causa de um aeroporto que foi usado na chegada à região e será usado na saída). Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.36. **Ciclo** é um subgrafo resultante do acréscimo a um caminho da aresta (se houver) que conecta o primeiro e o último vértice do referido caminho.

Observação 2.37. *Simões Pereira (2009) destaca que ciclos podem ser chamados **caminhos fechados**, estendendo o conceito de caminhos para permitir a repetição de vértices, desde que sejam apenas o primeiro e o último.*

Vejamos alguns exemplos de ciclos. Um ciclo é determinado pelo seu número de vértices, de modo que um ciclo de v vértices é indicado por C_v .

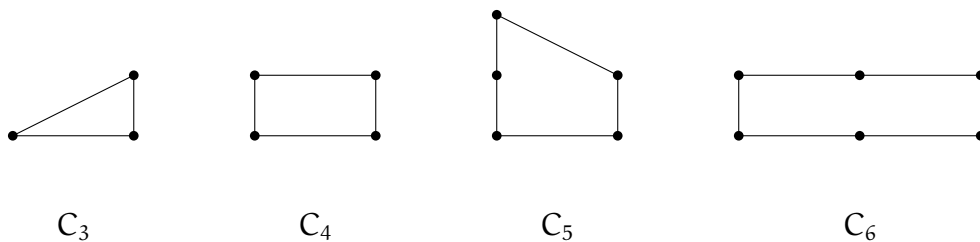


Figura 2.9: Alguns ciclos de até 6 vértices

Com a definição de ciclo, podemos redefinir árvore em termos mais simples:

Definição 2.38 (Alternativa à definição 2.19). **Árvore** é um grafo simples conexo que não tenha nenhum ciclo como subgrafo.

Vamos, agora, apresentar a solução, em termos modernos, do problema das pontes de Königsberg. Primeiramente, vamos definir uma cadeia euleriana.

Definição 2.39. Cadeia euleriana é uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo, passando por cada uma apenas uma vez.

Observação 2.40. Esta definição usa “grafo” em sentido amplo, ou seja, inclui multigrafos e grafos com laços.

Agora, determinemos uma condição necessária e suficiente para que um grafo possua uma cadeia euleriana fechada (começa e termina no mesmo vértice) ou aberta. Primeiramente, vejamos a cadeia fechada.

Teorema 2.41 (Teorema de Euler — 1.^a parte). *Uma condição necessária e suficiente para que haja uma cadeia euleriana fechada num grafo conexo é que todos os vértices do grafo tenham grau par.*

Demonstração. (\Rightarrow) A primeira parte da prova é imediata. Se um grafo tem cadeia euleriana fechada, significa que, para passar por todas as arestas, a trilha “entrou” e “saiu” de cada um dos vértices pelo menos uma vez. E, como a cadeia é fechada, o primeiro vértice, que só tinha uma saída (ou uma saída a mais em relação às entradas), fechará a condição com a chegada final. Logo, todos os vértices têm grau par.

(\Leftarrow) A segunda parte da prova pode ser feita construtivamente. Considerando que o grafo é conexo e que todos os vértices tenham grau par, conseguimos encontrar uma trilha fechada de modo simples. Se essa trilha já passar por todas as arestas, concluímos a busca, não há mais o que fazer. Mas suponha que não passe. Isso significa que há arestas não usadas, inclusive arestas que se conectam a vértices já usados (dada a conectividade). Essas arestas não usadas ocorrem em número par em cada vértice que foi usado, e também nos que eventualmente não foram usados (dada a paridade do grau de cada vértice). Assim, é possível sair de um vértice que foi usado e conectar outra trilha fechada, a qual, junto com a inicial, formará uma grande trilha. Caso se tomem todas as arestas, conclui-se o processo. Caso não, prossegue-se até esgotar as

arestas. A paridade dos graus dos vértices garante que é possível proceder assim até que não sobre nenhuma aresta. Logo, temos uma cadeia euleriana fechada. \square

O caminho descrito na segunda parte da demonstração do teorema 2.41 compõe um algoritmo para encontrar cadeias eulerianas, descrito a seguir passo a passo.

Algoritmo 2.42 (Algoritmo de Hierholzer). (1) Escolha um vértice x qualquer do grafo G .

(2) Trace uma cadeia τ_1 qualquer com arestas de G .

(3) Delete as arestas percorridas pela cadeia τ_1 , obtendo o grafo $G \setminus \tau_1 = G_1$.

(4) Caso G_1 ainda tenha o mesmo vértice x , trace outra cadeia partindo de x com arestas de G_1 . Repita este passo até que o vértice x seja retirado (ou seja, até que $\deg(x) = 0$).

(5) Caso ainda restem vértices em algum G_i , pela conectividade, com certeza algum desses vértices já foi usado nos passos (2)—(4). Parta desse vértice e retome o passo (4).

(6) O algoritmo segue até que $V(G_n) = \emptyset$. A cadeia euleriana é resultado da união das cadeias traçadas.

Vejamos agora o caso em que se queira uma cadeia euleriana aberta.

Teorema 2.43 (Teorema de Euler — 2.^a parte). Uma condição necessária e suficiente para que haja uma cadeia euleriana aberta num grafo conexo é que somente dois vértices do grafo tenham grau ímpar.

Demonstração. Usando a 1.^a parte, vamos supor que os vértices que têm grau ímpar sejam os vértices x e y . Assim, vamos acrescentar uma aresta α tal que $\psi(\alpha) = \{x, y\}$. Veja que, como multigrafos são aceitáveis neste teorema, mesmo que uma aresta assim já exista, criaremos outra. Com isso, todas as arestas do novo grafo terão grau par, e caímos no caso da 1.^a parte. Assim, com o algoritmo de Hierholzer (2.42), encontramos

uma cadeia euleriana fechada. Retirando a aresta α acrescentada há pouco, teremos a cadeia aberta procurada. \square

Corolário 2.44 (Solução das pontes de Königsberg). *O problema das pontes de Königsberg não tem solução.*

Demonstração. Observando a figura 1.2, vemos que todos os vértices têm grau ímpar, já que $\deg(A) = 5$, $\deg(B) = \deg(C) = \deg(D) = 3$. Logo, não há como formar uma trilha euleriana sobre esse grafo, e o problema das pontes de Königsberg resta sem solução. \square

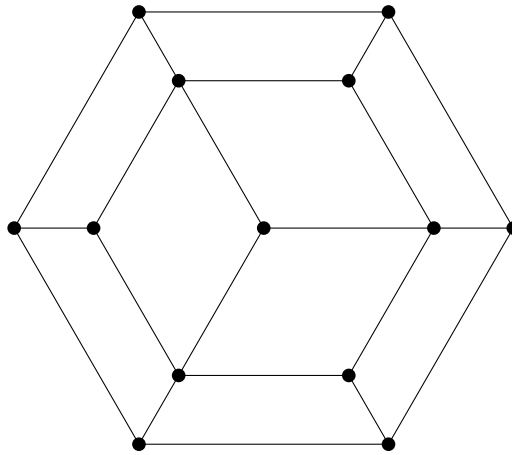
Agora vamos definir um tipo de caminho que corresponde à definição de trilha euleriana, mas considerando vértices em vez de arestas.

Definição 2.45. Caminho hamiltoniano é um caminho que passa por todos os vértices do grafo apenas uma vez.

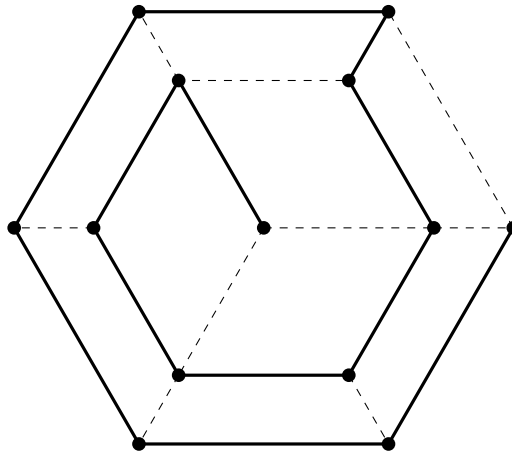
Observação 2.46. *Da mesma forma que podemos estender o conceito de caminhos para considerar entre eles os ciclos, podemos definir um ciclo hamiltoniano como sendo um ciclo que passe por todos os vértices de um grafo, coincidindo apenas o primeiro e o último.*

Thomas Kirkman iniciou o estudo dos caminhos hamiltonianos num grafo que imitava a representação plana de células de abelha. Vamos ver, no exemplo 2.47, um caminho hamiltoniano nesse grafo de células de abelha.

Exemplo 2.47. Observe o grafo seguinte:



Um caminho hamiltoniano nesse grafo é o seguinte:



■

Da mesma forma que o teorema de Euler (teoremas 2.41 e 2.43) dá uma condição necessária e suficiente para a existência de uma trilha euleriana, existe uma condição necessária e suficiente para a existência de um caminho hamiltoniano num grafo. Goldbarg & Goldbarg (2012) cita vários teoremas que fornecem condições suficientes para a existência de um caminho hamiltoniano. J. A. Bondy e V. Chvátal demonstraram, em artigo de 1976 (Bondy & Chvátal, 1976), uma condição necessária e suficiente, que apresentaremos a seguir. Antes, vamos definir um grafo hamiltoniano.

Definição 2.48. Grafo hamiltoniano é um grafo que contém um ciclo hamiltoniano. Caso contenha um caminho hamiltoniano, mas não um ciclo, é um **grafo semi-hamiltoniano**.

Definição 2.49. Seja um grafo $G(V, E, \psi)$, não completo, e sejam x e y vértices não adjacentes. A **adição de xy a G** é o grafo $G + xy$ obtido pelo acréscimo da aresta xy ao conjunto E , ou seja:

$$G + xy = G'(V, E \cup \{xy\}, \tilde{\psi}) \quad (2.6)$$

Teorema 2.50 (Teorema de Bondy–Chvátal). *Seja G um grafo de ordem $n \geq 3$, e sejam dois vértices não adjacentes x e y tais que $\deg(x) + \deg(y) \geq n$. O grafo $G + xy$ é hamiltoniano se, e somente se, o grafo G for hamiltoniano.*

Demonstração. (\Leftarrow) Se o grafo G é hamiltoniano, significa que contém um ciclo hamiltoniano. O acréscimo de uma aresta não mudará essa condição, de modo que essa parte da demonstração é imediata.

(\Rightarrow) Vamos provar esta parte por redução ao absurdo. Vamos supor que $G + xy$ seja hamiltoniano, mas G , não. Logo, $G + xy$ tem um ciclo hamiltoniano contendo a aresta xy . Ou seja, existe um caminho $\pi = (x_1 \dots x_n)$ em G partindo de $x_1 = x$ até $x_n = y$, passando por todos os vértices de G .

Agora, tomemos um vértice x_i qualquer. Se x_i for adjacente a x_1 ($2 \leq i \leq n$), então x_{i-1} não poderá ser adjacente a x_n , pois, se assim fosse, $(x_1, x_i, x_{i+1} \dots x_n, x_{i-1}, x_{i-2} \dots x_1)$ seria um ciclo hamiltoniano em G . Mas, com isso, os vértices conectados a $x_n = y$ podem ser todos os outros (num total máximo de $n - 1$), exceto aqueles conectados a $x_1 = x$. Ou seja, expressando em termos de graus: $\deg(x_n) \leq (n - 1) - \deg(x_1)$.

Mas isso significa que $\deg(x) + \deg(y) \leq n - 1$, contrariando uma das hipóteses do teorema. Logo, por absurdo, concluímos que G deve ter um ciclo hamiltoniano, e G é um grafo hamiltoniano. \square

A importância deste último teorema é que ele se baseia numa condição que não envolve a verificação dos graus de todos os vértices. Da mesma forma, permite a busca de ciclos hamiltonianos deletando arestas, desde que continue valendo a condição $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ para algum par $\{x, y\}$ (que pode mudar a cada deleção), e desde que não se produza algum vértice com grau 1 (esse vértice não permitiria o fechamento de um ciclo).

Vamos agora passar a um problema prático intimamente ligado aos conceitos vistos agora: o problema do caixeiro viajante.

2.3.1 O caixeiro viajante

De posse do conceito de ciclo hamiltoniano, podemos estabelecer o problema do caixeiro viajante de maneira adequada: “*Dado um grafo rotulado, determine um ciclo hamiltoniano com o menor custo possível*”. Perceba que a característica a ser minimizada, apesar de ser denominada “custo”, não se limita a valores financeiros. Podemos medir o “custo” de um caminho pela distância a ser percorrida, ou mesmo pelo tempo que se leva para percorrer o caminho.

A escolha do conceito de ciclo hamiltoniano se deve à conveniência buscada pelo problema em questão: pretende-se passar por todas as “cidades” (vértices do grafo), mas sem repetir nenhuma delas (uma vez que seria um gasto desnecessário). Note que isso envolve duas exigências: encontrar um ciclo hamiltoniano, e, dentre todos os ciclos, aquele de menor custo.

A primeira pergunta que surge é por que não usar os algoritmos 2.23 ou 2.25 para encontrar a resposta. Pensemos: uma árvore geradora mínima possui todos os vértices

do grafo. Para fechar o ciclo, bastaria tomar uma aresta que conectasse o último ao primeiro vértice. Seria uma abordagem heurística² razoável.

O problema se encontra em dois pontos. Primeiro, pode não ser possível fechar o ciclo a partir da árvore encontrada. Um exemplo relativamente simples é o do grafo das células de abelha de Kirkman (exemplo 2.47).

Outro ponto é que, mesmo que um ciclo hamiltoniano possa ser obtido, ele pode não ter a árvore geradora mínima como subgrafo. Na figura 2.10, vemos um grafo (a), a árvore geradora mínima (b) e o ciclo hamiltoniano possível (c).

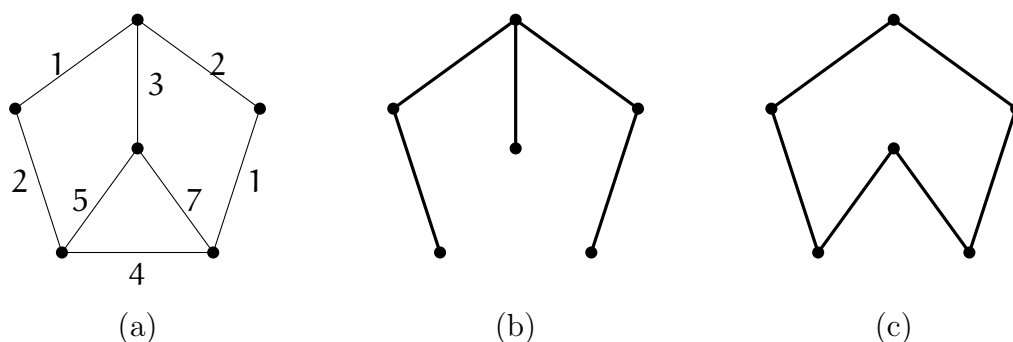


Figura 2.10: Grafo, árvore geradora mínima e ciclo hamiltoniano

Esses problemas podem ser vistos em escala pequena, em um grafo com apenas cinco vértices. Pode-se ter uma ideia da proporção que ele toma quando se têm mais vértices. Um PCV para, digamos, vinte cidades num grafo completo, poderia levar milhões de anos para ser resolvido por “força bruta”³. Obviamente, partindo de uma árvore mínima, podem-se reduzir esses passos. O problema passa a ser a busca de soluções melhores do que a obtida.

Cook (2012) descreve a história do PCV e apresenta a evolução da busca de um algoritmo eficiente (no sentido de considerar um número exequível de operações). O

²Heurística é um método de busca subótima, em que não se procura necessariamente a solução ótima de imediato, mas um ponto de partida de onde se possa avançar por passos iterativos.

³Chamamos “força bruta” o método de verificação de cada trajetória possível, uma a uma. Essa contagem de anos supõe um tempo de um segundo para a verificação do comprimento de cada caminho.

melhor que se conseguiu, até a presente data, foi a solução, por meio de computadores, de um problema com 85 900 cidades por D. Applegate, B. Bixby, V. Chvátal e W. J. Cook. O procedimento levou quatorze meses (de fev. 2005 até abr. 2006), num tempo de computação equivalente a 136 anos (Cook, 2012, p. 161-163). Obviamente, apesar de não ser uma solução universal, é patente a importância de um feito dessa magnitude. Também mostra que a Teoria dos Grafos ainda tem bastante a ganhar com avanços tecnológicos na área da computação.

2.4 Planaridade

Antes de discutir a planaridade, vamos definir um grafo bipartido.

Definição 2.51. Um grafo é **bipartido** quando podemos separar seus vértices em dois conjuntos disjuntos de modo que nenhum vértice seja adjacente aos vértices de seu conjunto. Em outras palavras, todas as arestas do grafo conectam um vértice de um conjunto a um vértice do outro conjunto.

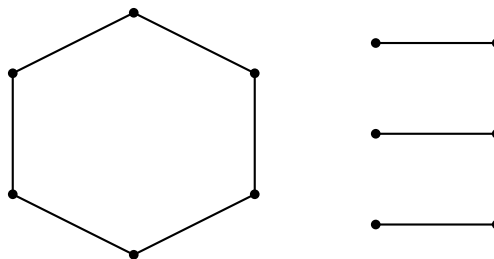


Figura 2.11: Dois grafos bipartidos

A ideia de planaridade de um grafo também surge de um jogo. Imagine três casas (I, II e III) e três serviços públicos (digamos água, luz e gás) que devem ser conectados às três casas. Mas há um porém: as conexões não se devem cruzar. Como fazer isso?

Se tratarmos as casas e os serviços públicos como vértices e as conexões como arestas, temos um exemplo de grafo. Isso motiva a definição seguinte.

Definição 2.52. Grafo de serviços públicos é um grafo bipartido em que os dois conjuntos disjuntos têm três vértices cada um, e cada vértice de um conjunto se liga a todos os vértices do outro conjunto.

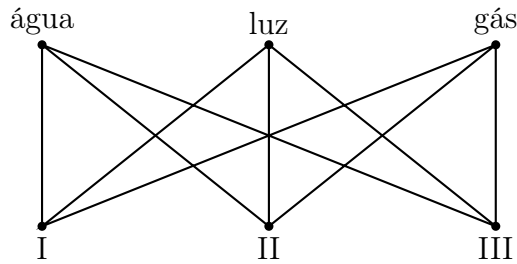


Figura 2.12: Grafo de serviços públicos

A solução da figura 2.12 **não** é uma solução para o jogo proposto, uma vez que há vários cruzamentos. Como saber se a solução existe? E, existindo, como obtê-la? Antes de apresentar o conceito da Teoria dos Grafos aplicável à situação, vamos à última definição prévia necessária para nossos propósitos: o isomorfismo. Para esta definição, se uma aresta de um grafo conecta os vértices x e y , ela será indicada por xy .

Definição 2.53. Sejam dois grafos $G(V(G), E(G), \psi_G)$ e $H(V(H), E(H), \psi_H)$. Um **isomorfismo** é uma bijeção $\Phi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que, dados $v_i, v_j \in V(G)$:

$$v_i v_j \in E(G) \iff \Phi(v_i) \Phi(v_j) \in E(H) \tag{2.7}$$

Os grafos G e H na situação descrita são chamados **isomorfos**, e indicaremos o isomorfismo por $G \cong H$. O isomorfismo é essencial para a Teoria dos Grafos, e já vem sendo utilizado neste trabalho subliminarmente. Por exemplo, quando dizemos que só existe um grafo completo K_3 , é uma mentira *stricto sensu*. Qualquer conjunto de três vértices conectados dois a dois por três arestas é um K_3 . Porém, se eliminarmos os isomorfismos, existe apenas um “tipo” de grafo K_3 ; os demais são todos isomorfos.

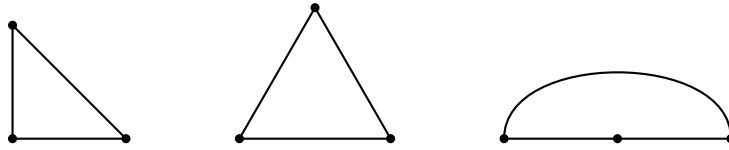


Figura 2.13: Grafos isomorfos a K_3

Definição 2.54. Grafo planar é um grafo que possui um isomorfo cujas arestas não se cruzam.

O grafo K_3 é um grafo planar, conforme vemos na figura 2.13. Perceba que, pela definição 2.54, para o grafo G ser planar, não é necessário que o **grafo G** tenha somente arestas que não se cruzem, mas que haja algum grafo isomorfo a G com essa característica. Tome, por exemplo, o grafo K_4 . Uma representação simples dele é a da figura 2.14.

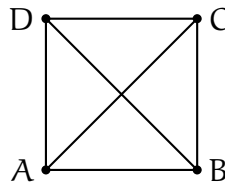


Figura 2.14: Grafo K_4

Apesar de essa representação ter arestas que se cruzam, é possível encontrar um grafo isomorfo a ele que não tenha cruzamentos nas arestas. A figura 2.15 dá um exemplo dessa representação.

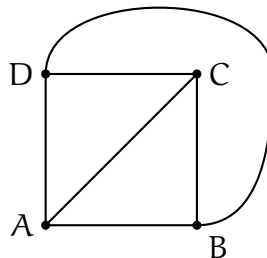


Figura 2.15: Grafo K_4

Outro exemplo de grafo que tem muitos cruzamentos mas é planar é o da figura 2.16. Perceba que ele é bipartido, e lembra o grafo de serviços públicos.



Figura 2.16: Grafo bipartido e uma representação planar

Na figura 2.16, o isomorfismo é dado por:

$$\Phi(A) = M \quad \Phi(B) = N$$

$$\Phi(C) = P \quad \Phi(D) = Q$$

$$\Phi(E) = R \quad \Phi(F) = S$$

E o grafo de serviços públicos? Ele é bem semelhante a este último que analisamos. O problema de conectar todas as casas a todos os serviços sem cruzar as conexões se resume a responder se existe um grafo planar que conecte cada vértice do conjunto de casas a cada vértice do conjunto de serviços.

É possível provar que o grafo de serviços públicos não é planar. Há duas maneiras de provar esse fato. A primeira é topológica, e se baseia no teorema das curvas de Jordan. Não faremos esse desenvolvimento aqui, devido ao escopo pretendido por nossa análise, mas uma apresentação simples pode ser encontrada em Trudeau (1993), no capítulo 3.

2.4.1 Poliedros planos

Nosso foco será pelo tratamento de poliedros planos. A palavra “poliedro” vem da composição grega de $\pi\omicron\lambda\upsilon\sigma$ (“muitos”) com $\epsilon\delta\rho\nu$ (“base” ou “face”, quando referindo-se a figuras geométricas). O estudo de poliedros se concentra, usualmente, na Geometria Espacial, especialmente no Ensino Médio, mas podemos tratar de poliedros no

plano a partir do conceito de grafos planares. Para tanto, vamos definir um poliedro plano como segue.

Definição 2.55. Poliedro plano é uma figura geométrica plana isomorfa a um grafo planar conexo, sendo cada vértice do grafo correspondente a um ponto do plano e cada aresta do grafo correspondente a uma linha contínua que conecta os pontos correspondentes aos vértices da aresta referida, de modo que as nenhum par de linhas tenha pontos comuns que não sejam os vértices do grafo.

Ao estudar os poliedros, surgem naturalmente os conceitos de vértices, arestas e faces. Pela definição 2.55, os **vértices** e **arestas** do poliedro plano são os mesmos do grafo representado por ele⁴. Já para definir a face de um poliedro, vamos seguir as notas de Harju (2011).

Primeiramente, vamos relembrar alguns conceitos básicos da geometria do plano, ao mesmo tempo em que outros serão considerados já definidos pela sua definição mais usual. Seja, então, Π o plano em que se representa o poliedro plano.

Um subconjunto $\mathcal{F} \subset \Pi$ será um **conjunto aberto** se cada ponto $X \in \mathcal{F}$ tiver um círculo centrado em X e totalmente contido em \mathcal{F} . Se quaisquer dois pontos $X, Y \in \mathcal{F}$ puderem ser conectados por uma linha contínua totalmente contida em \mathcal{F} , então \mathcal{F} será chamado de **região**. A região \mathcal{F} é **limitada** se é possível traçar um círculo contido em Π que contenha a região completamente. Chamaremos de **fronteira** de \mathcal{F} ao conjunto $\partial(\mathcal{F})$ formado por cada ponto $P \in \Pi$ tal que qualquer círculo centrado em P possua pontos em \mathcal{F} e em $\Pi \setminus \mathcal{F}$.

⁴Inclusive, por abuso de linguagem, desde já usaremos os termos e notações definidos para grafos para referir-nos aos elementos correspondentes no poliedro plano isomorfo ao grafo. Assim, por exemplo, sendo \mathcal{P} um poliedro, seu conjunto de vértices será indicado por $V(\mathcal{P})$. O mesmo se aplica a outras notações definidas neste trabalho.

Definição 2.56. Uma **face** de um poliedro plano \mathcal{P} é cada uma das regiões disjuntas em que o conjunto $\Pi \setminus E(\mathcal{P})$ está dividido. A face será chamada de **interior** se for limitada. A única face ilimitada é chamada de **face exterior** do poliedro.

Dada uma face φ , as arestas que a circundam formam a fronteira $\partial(\varphi)$ de φ . É fácil provar que cada aresta está contida na fronteira de no máximo duas faces. Veja o poliedro da figura 2.17.

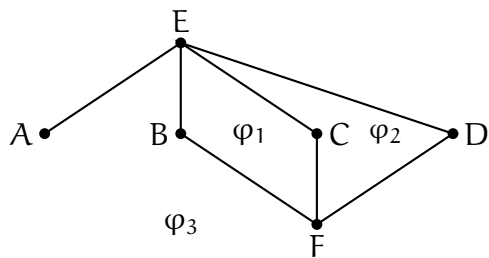


Figura 2.17: Poliedro plano

A definição de poliedro plano que adotamos permite algumas liberalidades que os poliedros convexos convencionais da Geometria Espacial estudada no Ensino Médio não permitem. A primeira é a face ilimitada. A segunda é a possibilidade de uma aresta que não seja comum a duas faces. Na figura 2.17, a aresta AE está inteiramente contida na face φ_3 , de modo que ela não haja duas faces que a tenham em comum. Esse tipo de aresta justifica a próxima definição.

Definição 2.57. **Ponte** é uma aresta de um grafo conexo que, se deletada, resulta em um grafo desconexo.

Ou seja, a aresta AE do poliedro da figura 2.17 é uma ponte. Perceba que sua deleção gera dois grafos desconexos (um deles é um grafo vazio de ordem 1 formado pelo vértice A).

Lema 2.58. *Se um poliedro plano tem apenas uma face, então o grafo isomorfo é acíclico, ou seja, não há subgrafo cíclico.*

Demonstração. Pela definição 2.38, o lema afirma que o grafo isomorfo a qualquer poliedro plano de uma face é uma árvore. Primeiramente, perceba que todo poliedro plano tem a face ilimitada. Isso se justifica usando o fato de que a união finita de regiões limitadas é uma região limitada (ou seja, a união das faces interiores do poliedro plano é uma região limitada) e o fato de que $\Pi \setminus \mathcal{R}$, onde \mathcal{R} é a união de todas as faces interiores do poliedro plano, é uma região ilimitada.

Se tomarmos um poliedro plano de apenas dois vértices e uma aresta que os liga, ele terá apenas uma face (a exterior) e o grafo que lhe é isomorfo é uma árvore. Agora, para formar outros poliedros com apenas uma face, devemos tomar o cuidado de não formar ciclos. Isso porque, caso se forme um ciclo, haverá uma região no plano Π circundada por uma fronteira fechada, e essa região será limitada. Assim, o fechamento de um ciclo formará uma segunda face, contrariando a hipótese do lema. Logo, qualquer grafo isomorfo a um poliedro plano de apenas uma face deverá ser acíclico, e o lema está provado. \square

Teorema 2.59 (Fórmula de Euler). *Seja um poliedro plano com v vértices, e arestas e f faces. Então:*

$$v - e + f = 2 \tag{2.8}$$

Demonstração. Fazemos a prova por indução em f . Seja, primeiramente, um poliedro com $f = 1$. O lema 2.58 afirma que esse poliedro plano é isomorfo a uma árvore, de modo que podemos concluir que $e = v - 1$ (proposição 2.20). Ora, então:

$$v - e + f = v - (v - 1) + 1 = 2$$

Estabelecido o resultado para $f = 1$, suponhamos que seja válido para um poliedro com f faces. Provemos a validade para $f + 1$ faces. O argumento usado na prova da proposição 2.20 mostra que acrescentar uma aresta a uma árvore gera um grafo

que não é uma árvore, o que significa que faz surgir um ciclo. Já argumentamos na demonstração do lema 2.58 que um ciclo determina a existência de uma face interior, o que significa que podemos fazer surgir uma face nova simplesmente acrescentando uma aresta que conecte vértices que já estão no poliedro plano. Assim, passaremos a ter $f + 1$ faces e, também, $e + 1$ arestas. Logo, pela hipótese de indução:

$$v - (e + 1) + (f + 1) = v - e + f = 2$$

Se, porém, optarmos por criar uma face adicional acrescentando um vértice, a conexidade necessária a um grafo isomorfo a um poliedro plano exige que esse vértice seja ligado a um dos vértices que já existiam. Por outro lado, o acréscimo de uma única aresta conectando o vértice a outro já presente não cria uma face nova (como visto na demonstração da proposição 2.20), de modo que se torna necessário acrescentar mais uma aresta conectando o novo vértice a outro vértice já anteriormente presente, e caímos novamente no argumento anterior para mostrar que isso resulta numa face interior. A relação passará a ser (com o acréscimo de uma face, duas arestas e um vértice):

$$(v + 1) - (e + 2) + (f + 1) = v - e + f = 2$$

Ou seja, o acréscimo de uma face mantém a veracidade da relação proposta, de modo que provamos o teorema por indução sobre f . □

Para prosseguir no estudo da planaridade, vamos ainda provar mais um resultado que deriva diretamente da fórmula de Euler. Antes, vejamos uma definição e um lema.

Definição 2.60. Grau de uma face de um poliedro plano é a quantidade de arestas que compõem sua fronteira. Incluem-se aí as eventuais pontes que haja no poliedro.

É importante ressaltar, neste ponto, que uma ponte é uma aresta que compõe a fronteira de uma única face, ao passo que cada uma das demais arestas compõe a fronteira de duas faces. Partindo disso, o próximo lema é análogo ao primeiro teorema da teoria dos grafos (teorema 2.9), referindo-se, porém, ao grau das faces. Vejamos.

Lema 2.61. *A soma dos graus das faces de um poliedro plano com v vértices, f faces e e arestas, das quais b são pontes, é dada por $2e - b$. Indicando cada face por φ_i , isso significa que:*

$$\sum_{i=1}^f \deg(\varphi_i) = 2e - b \quad (2.9)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, seja φ_1 sempre a referência à face ilimitada, que todo poliedro plano contém. Façamos indução sobre f .

Se $f = 1$, recaímos no caso do lema 2.58, em que **todas as arestas** são pontes (vide definições 2.57 e 2.19). Logo, o grau da face única é $\deg(\varphi_1) = e$, além de termos $e = b$. Assim, temos:

$$\sum_{i=1}^1 \deg(\varphi_i) = \deg(\varphi_1) = e = 2e - e = 2e - b$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que o lema seja verdadeiro para um poliedro \mathcal{P}_1 de $f - 1$ faces. Vamos acrescentar uma face ao poliedro sem aumentar o número de vértices. Conseguimos isso adicionando uma aresta ε a \mathcal{P}_1 conectando dois vértices que ainda não estejam conectados. Seja $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 + \varepsilon$. A aresta ε não pode ser uma ponte, pois, caso contrário, sua ausência tornaria \mathcal{P}_1 isomorfo a um grafo desconexo, descaracterizando-o como poliedro plano.

Temos duas possibilidades para ε : ou ela está totalmente contida numa face interior φ_j (i), ou ela está contida na face exterior φ_1 (ii). Analisemos caso a caso.

Caso (i). Neste caso, a nova aresta ε transforma a face φ_j em duas faces adjacentes e disjuntas, φ_j' e φ_j'' . Ao calcular a soma dos graus de todas as faces, as arestas das

novas faces somarão $\deg(\varphi_j) + 2$, tendo em vista que elas incluem todas as arestas de φ_j , mais a aresta ε , que será contada duas vezes (uma para cada nova face). Assim, em \mathcal{P}_2 , podemos escrever $\sum_i \deg(\varphi_i) = 2e + 2 - \mathbf{b}$ (uma vez que o número de pontes não se alterou), ou seja, a soma dos graus resultará em $2(e + 1) - \mathbf{b}$, o que mantém a validade da fórmula para f faces, uma vez que o novo poliedro tem $e + 1$ arestas.

Caso (ii). Supondo, agora, que a nova aresta ε esteja contida na face exterior de \mathcal{P}_1 , consideremos que ela conecta os vértices x_m e x_n , não adjacentes. Isso significa que existe, em \mathcal{P}_1 , uma sequência de vértices $(x_m, x_{m+1} \dots x_n)$ formada de tal modo que cada vértice é conectado por uma aresta ao seguinte, sendo que essas arestas são parte da fronteira da face exterior. Ora, ao conectar x_m a x_n por ε , teremos uma região fechada que é a nova face introduzida em \mathcal{P}_2 . Assim, ao somar os graus das faces de \mathcal{P}_2 , as arestas que conectam os vértices da sequência $(x_m \dots x_n)$ passarão a ser contadas na nova face, ao passo que a nova aresta será contada duas vezes: uma para face exterior, e outra para a nova face. Assim, podemos escrever que $\sum_i \deg(\varphi_i) = 2e + 2 - \mathbf{b}$, o que mantém a validade da fórmula.

Dessa maneira, por indução finita, provamos que a soma dos graus das faces do poliedro plano será dada por $2e - \mathbf{b}$ □

Agora, estamos aptos a provar o seguinte teorema.

Teorema 2.62. *Se um poliedro plano tem e arestas e v vértices, com $v > 2$, então vale a relação:*

$$e \leq 3v - 6 \tag{2.10}$$

Ainda, se as faces tiverem grau ≥ 4 (ou seja, se não há “triângulos” no grafo isomorfo ao poliedro), então vale a relação:

$$e \leq 2v - 4 \tag{2.11}$$

Demonstração. Pela fórmula de Euler (teorema 2.59), temos:

$$v - e + f = 2 \quad \Rightarrow \quad f = e - v + 2 \quad (\text{I})$$

A primeira parte do teorema se baseia na hipótese de que cada face tem grau ≥ 3 . Isso implica que, se somarmos os graus de todas as faces, devemos obter um número igual ou superior a $3f$. Mas o lema 2.61 prova que a soma dos graus das faces é igual a $2e - b$. Assim, podemos escrever:

$$2e \geq \sum_{i=1}^f \deg(\varphi_i) = 2e - b \geq 3f \quad \Rightarrow \quad 3f \leq 2e \quad (\text{II})$$

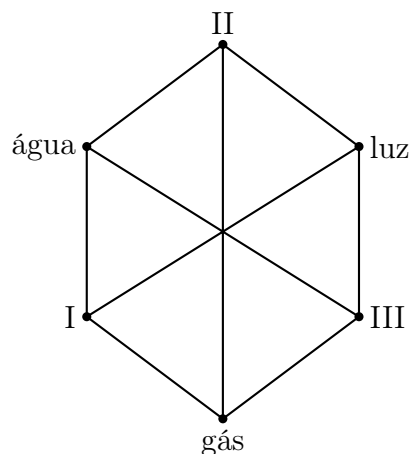
$$(\text{I}) \text{ e } (\text{II}) \quad \Rightarrow \quad 3(e - v + 2) \leq 2e \quad \Rightarrow \quad e \leq 3v - 6$$

Isso prova a primeira parte do teorema. A segunda parte se faz de maneira análoga, apenas substituindo (II) por $4f \leq 2e$, uma vez que todas as faces terão quatro arestas ou mais em sua fronteira. \square

Agora, estamos aptos a voltar a trabalhar com os grafos, fazendo uso da associação entre os poliedros planos e os grafos planares. Basicamente, para provar que um grafo não é planar, vamos mostrar que o seu poliedro não pode ser plano, de acordo com a definição 2.55. Primeiramente, a partir do teorema 2.62, podemos provar que o grafo de serviços públicos não é planar.

Proposição 2.63. *O grafo de serviços públicos não é planar.*

Demonstração. Vamos considerar o grafo de serviços públicos em uma representação diferente, como a que segue. Usaremos os mesmos rótulos usados na figura 2.12 para os vértices.



A primeira coisa a perceber é que não há triângulo no grafo, ou seja, nenhum trio de vértices está totalmente conectado dois a dois. Em outras palavras, K_3 não é subgrafo do grafo de serviços públicos. Assim, caso ele seja planar (ou seja, caso haja uma representação sua em poliedro plano), seus vértices e arestas obedecerão à segunda parte do teorema 2.62. Temos $v = 6$ e $e = 9$. Para esses valores, o teorema referido nos dá:

$$e \leq 2v - 4 \quad \Rightarrow \quad 9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \quad \Rightarrow \quad 9 \leq 8$$

Isso evidentemente é falso, o que nos leva à conclusão de que o grafo de serviços públicos não tem poliedro plano que lhe seja isomorfo, e, portanto, não é planar. \square

Na figura 2.15, mostramos que o grafo completo de quatro vértices é planar. Os grafos completos com menos vértices também são, como é trivial mostrar. O que ocorre, porém, com o grafo K_5 ? Será que ele é planar, também? Na verdade, não. É o que mostraremos a seguir.

Proposição 2.64. *O grafo K_5 não é planar.*

Demonstração. O grafo K_5 possui cinco vértices, ou seja, $v = 5$. Pela proposição 2.12, seu número de arestas é $e = 5 \cdot 4/2 = 10$. Como o grafo é completo, quaisquer

três vértices escolhidos têm um “triângulo” correspondente, de modo que, caso ele seja planar, haverá faces triangulares. Assim, usando o teorema 2.62, podemos afirmar que:

$$e \leq 3v - 6 \Rightarrow 10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \Rightarrow 10 \leq 9$$

Isso é um evidente absurdo, de modo que o grafo K_5 não é planar. \square

Na definição 2.18, vimos que subgrafo é um grafo formado por vértices e arestas que pertencem a um grafo dado. A próxima definição é ligada à de subgrafo, mas não deve ser confundida com ela. Será apresentada com base em Harju (2011).

Definição 2.65. Dado um grafo $G = (V, E, \Psi)$, um grafo $H = (V', E', \Psi')$ é uma **subdivisão** de G se:

(i) houver pelo menos uma aresta $xy \in E$, com $x, y \in V$, tal que:

$$(\exists z \in V') z \notin V \text{ e } \{xz, zy\} \subset E' \text{ e } xy \notin E'; \text{ ou}$$

(ii) for subdivisão de uma subdivisão anterior de G .

A figura 2.18 mostra o grafo K_4 e duas subdivisões, sendo que G_2 é subdivisão de G_1 .

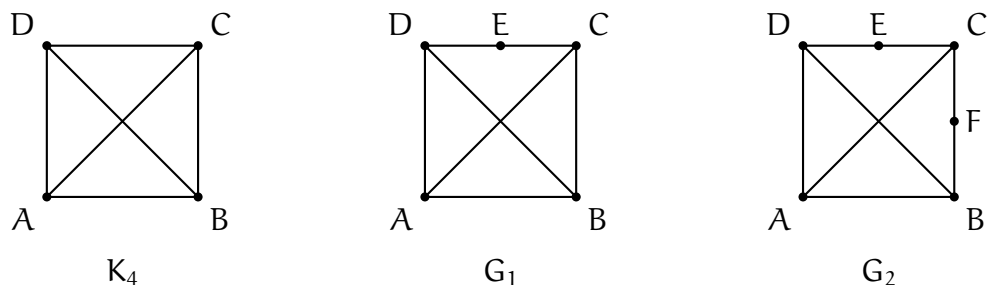


Figura 2.18: Grafo K_4 e subdivisões

Destacamos que uma subdivisão de G **não é um subgrafo** de G , uma vez que seu conjunto de vértices não está contido no conjunto de vértices de G , tampouco seu conjunto de arestas. O procedimento descrito na definição 2.65 pode ser intuitivamente entendido como “quebrar arestas”, criando vértices novos e arestas novas a partir das “quebradas”. Baseados nisso, vamos provar o lema seguinte sobre subdivisões.

Lema 2.66. *Um grafo é planar se, e somente se suas subdivisões são planares.*

Demonstração. (\Rightarrow) Esta parte da demonstração é direta. Se um grafo é planar, pelo teorema 2.62, suas quantidades de arestas e de vértices obedecem à condição $e \leq 3v - 6$. Uma subdivisão aumenta a quantidade de arestas em 1 unidade, e também a quantidade de vértices em 1 unidade. Assim, se o novo grafo tiver e' arestas e v' vértices, teremos:

$$\begin{aligned} e' &= e + 1 \\ v' = v + 1 &\Rightarrow 3v' - 6 = 3(v + 1) - 6 = 3v - 3 \end{aligned}$$

Como, pelo teorema 2.62, $e \leq 3v - 6$, então $e + 1 \leq 3v - 5 < 3v - 3$, e concluímos que $e' \leq 3v' - 6$, e a subdivisão é planar. Caso o grafo se encaixe na segunda situação (ou seja, se não tiver triângulos entre suas faces), a relação a ser tratada é $e \leq 2v - 4$, e também se verifica, de maneira análoga.

(\Leftarrow) Aqui, usaremos a fórmula de Euler (teorema 2.59). Se um grafo G é planar, vale para ele a relação $v - e + f = 2$. Por outro lado, se ele for subdivisão de outro grafo G° , podemos retornar ao grafo G° eliminando um vértice de grau 2 e ligando seus vértices adjacentes por uma nova aresta. Assim, o grafo G° terá $e^\circ = e - 1$ arestas e $v^\circ = v - 1$ vértices, e a fórmula de Euler continua valendo. Assim, o grafo G° , de que G é subdivisão, é planar, e o lema está verificado. \square

Agora, estamos aptos a demonstrar o teorema mais importante desta seção, o **teorema de Kuratowski**.

Teorema 2.67 (Kuratowski). *Um grafo é planar se, e somente se, não contém como subgrafos subdivisões do grafo K_5 ou do grafo de serviços públicos.*

Demonstração. (\Leftarrow) As proposições 2.63, 2.64 e o lema 2.66 em conjunção levam diretamente a essa conclusão.

(\Rightarrow) Esta parte da demonstração, a mais importante do teorema de Kuratowski, é um tanto complexa para o escopo deste trabalho. Ela pode ser vista em detalhes em Bondy & Murty (2008). \square

Este teorema chama a atenção dentro da Teoria dos Grafos. Ele é um exemplo de uma proposição simples em seus termos, mas ampla nos problemas que resolve. Publicado pela primeira vez pelo topologista polonês Kazimierz Kuratowski, em 1930, no artigo “Sur le problème des courbes gauches en topologie” (Biggs *et al.*, 1998, p. 141 *et seq.*), o teorema de Kuratowski permite que se identifique a não planaridade de qualquer grafo apenas buscando, dentre seus subgrafos, duas espécies: as subdivisões de K_5 e as subdivisões do gráfico de serviços públicos. O uso prático dos grafos, desde circuitos elétricos até o projeto de vias de transporte terrestre (rodoviário, ferroviário), torna importante a identificação de grafos não planares, uma vez que a presença de cruzamentos entre as arestas implicam a necessidade de projetar pelo menos uma delas fora do plano em que se trabalha (por ex., no caso de rodovias, cria-se a necessidade de um viaduto).

Com esta seção, encerramos a apresentação teórica básica sobre a Teoria dos Grafos. Sua aplicabilidade prática a torna um assunto interessante para aqueles que estão sendo iniciados na ciência matemática. Passaremos, no próximo capítulo, à proposta de um plano de aulas sobre Teoria dos Grafos a ser ministradas para o Ensino Médio, buscando despertar esse interesse nos estudantes.

Proposta para o Ensino Médio

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta para a introdução à Teoria dos Grafos a ser dada no Ensino Médio. Inicialmente, porém, vale a pena ver como tal introdução se encaixa nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, elaborados pela Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação (MEC). A referência usada, aqui, é Brasil (1998).

3.1 Alguns aspectos nos PCN

Ao estabelecer parâmetros nacionais para o ensino da Matemática no Ensino Médio, o Ministério da Educação deixa bem clara a necessidade de tal ensino não se concentrar apenas no tratamento formal da ciência. Para o estudante do Ensino Médio:

[A Matemática] deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno. (Brasil, 1998, p. 40)

Ou seja, a aplicação do que se estuda e aprende nesta disciplina é essencial. Saber aplicar os conhecimentos adquiridos em Álgebra (relações entre elementos abstratos), Geometria (posição e medição), Estatística (tratamento de dados e consideração de incertezas) é o que vai medir o sucesso do aluno no processo de ensino-aprendizagem.

Ao mesmo tempo, o uso da tecnologia como recurso pede que o tratamento das informações recebidas seja eficiente. O volume de novidades a que o cidadão tem acesso hoje torna fundamental o conhecimento de como tratar esses saberes. Em outras palavras:

O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (Brasil, 1998, p. 41)

Nesse sentido, a Teoria dos Grafos vem ao encontro de muitas das finalidades expressas nas diretrizes para o ensino da Matemática no Ensino Médio. Dentre elas, destacam-se:

- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;

- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; e
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações.

Nesse sentido, a exemplificação que os PCN trazem sobre as competências desejáveis não é exaustiva (Brasil, 1998, p. 43 *et seq.*). E quase todas permitem a inclusão da Teoria dos Grafos, se não como tema independente, como ferramenta acessória no estudo das demais partes da Matemática. Destaque-se aqui a inegável importância de temas como a otimização de processos, buscando valores máximos ou mínimos em situações as mais diversas, bem como a representação diagramática de relações, usando as ferramentas de visualização fornecidas pela Geometria, mas com o adicional de não restringir-se às suas limitações de forma e dimensão.

Também o tratamento de informações oriundas das ciências humanas e sociais fica simplificado com o uso de grafos, o qual permite um tratamento visual da contagem de possibilidades, das probabilidades, e das próprias relações interpessoais e intersociais observadas nessas áreas do conhecimento.

Por fim, podemos argumentar em termos de competências e habilidades a ser desenvolvidas, de acordo com os mesmos PCN. A Teoria dos Grafos, em particular, presta apoio no desenvolvimento das competências e habilidades de (Brasil, 1998, p. 46):

- ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões);
- procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema;
- formular hipóteses e prever resultados;
- interpretar e criticar resultados numa situação concreta;
- desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; e

- aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Assim, desenvolveu-se a seguinte proposta para inclusão da Teoria dos Grafos como tópico na Matemática do Ensino Médio. No capítulo 4 a seguir, apresenta-se uma aplicação das atividades aqui proposta a um grupo de alunos.

3.2 Proposta de aulas e atividades

Para o ensino da Teoria dos Grafos, preparou-se programa a ser desenvolvido no 2.º ou no 3.º ano do Ensino Médio. O plano de aulas a seguir propõe uma introdução conceitual aos grafos, sendo fornecidos exemplos variados e já introduzindo os termos usuais da matéria (vértices, arestas, conectividade, multigrafos *etc.*).

A seguir, as aulas se desenvolvem com a aplicação de atividades. As atividades propostas estão no Apêndice a este trabalho, e estão divididas em duas grandes atividades: uma focando o conhecimento sobre árvores e outra focando a busca de resultados ótimos em redes (no caso particular, minimização de custos em fluxos de transporte aéreo).

Apresentamos, agora, simplificada, o plano de aulas proposto.

3.3 Plano de aulas

Tópico: Introdução à Teoria dos Grafos

Objetivo Geral: Apresentar a Teoria dos Grafos ao estudante de Ensino Médio como ferramenta para modelagem de situações diversas e solução de problemas.

Objetivos específicos:

- Definir grafo.
- Definir grafo direcionado.

- Definir multigrafo.
- Modelar o problema dos apertos de mão.
- Definir grafo completo.
- Definir árvore.
- Identificar a árvore como ferramenta para contagem de possibilidades.
- Usar os princípios fundamentais de contagem.
- Resolver problemas de contagem simples por meio de árvores.
- Definir caminho.
- Definir distância em grafos.
- Identificar custo como uma medida de distância em grafos representando fluxos em rede.
- Calcular custos de diversos caminhos num gráfico.
- Escolher o caminho de menor custo.

Metodologia: Apresentação de situações-problema a ser modeladas com grafos e resolvidas por meio deles.

Atividades: Estão no Apêndice a este trabalho.

Avaliação: Inclui a correção dos “Treinos” apresentados nas atividades, bem como a criação de novas situações-problema para que o aluno modele e busque uma solução.

Programa resumido: A seguir, proporemos um programa resumido de cinco aulas. As três primeiras aulas compõem o programa que foi seguido na aplicação detalhada no capítulo 4. As duas restantes são um corpo independente, de modo que a exposição menor não fica prejudicada. Cada aula terá exposição da teoria, exemplos e exercícios de aplicação imediata.

Aula 1: Definição de grafo. Classificações. Exemplos de modelos de grafos (mapa de ruas de uma cidade, as pontes de Königsberg, o grafo de serviços públicos).

Aula 2: Grafo completo. Problemas de contagem: apertos de mão. Definição de árvore. Contagem de eventos por meio da árvore de possibilidades. Abrir as possibilidades do jogo da velha.

Aula 3: Definição de caminho. Distâncias em grafos. Fluxos em rede. Problemas simples de otimização em redes (caminho mais curto, de menor custo, de menor tempo). Exemplos: construção de aquedutos romanos, viagem por várias cidades europeias, conhecer os estádios da Copa de 2014.

Aula 4: Poliedros. Conceitos, elementos, exemplos. Poliedros convexos. Fórmula de Euler para poliedros convexos. Versão plana dos poliedros. Representações possíveis exclusivamente nos poliedros planos. Associação entre um grafo e um poliedro plano. Verificação da fórmula de Euler em poliedros planos.

Aula 5: Grafos planares. Isomorfismo entre grafos planares e poliedros planos. Verificação de planaridade. Apresentação do teorema de Kuratowski, com motivação. Exemplos (grafo de serviços públicos retomado, ligação entre cinco capitais sem cruzamentos das vias).

Aplicação das Atividades

Neste capítulo, descreveremos o resultado obtido da aplicação a um grupo de alunos das atividades descritas no capítulo 3 e que estão disponíveis no Anexo. Primeiramente, descreveremos o grupo com o máximo de detalhes possível. Em seguida, apresentaremos os resultados, com uma análise deles.

4.1 Descrição do grupo

As atividades propostas foram aplicadas a quatro turmas de 2.º ano do Ensino Médio de uma escola pública da Secretaria de Educação do Distrito Federal (SEDF), doravante referida como a “Escola”. As quatro turmas serão aqui denominadas pelas letras A, B, C, D, conforme a denominação que recebem na Escola.

São turmas com uma média de trinta alunos cada uma. Todavia, na semana em que se aplicaram as aulas, a frequência não foi total.

Cada aluno recebeu uma cópia do caderno de atividades do Apêndice, com o compromisso verbal de resolverem as atividades propostas (ali denominadas “Treinos”) e devolverem ao fim da última aula da semana, com as incorreções que porventura houvessem cometido. Foi pedido a eles que tomassem nota do que fosse exposto, para referência futura, bem como que a correção dos Treinos fosse feita no caderno de cada um. Dessa maneira, os equívocos cometidos por eles poderiam ser avaliados aqui neste trabalho.

Ao todo, foram distribuídos 88 cadernos de atividades, dos quais 66 foram devolvidos. A tabela 4.1 mostra quantos cadernos cada turma devolveu.

Turma	Cadernos
A	17
B	16
C	15
D	18

Tabela 4.1: Cadernos devolvidos por turma

A proposta foi aplicada em três aulas de 45 minutos cada uma, que é a carga horária cedida de uma semana na Escola. Essas três aulas distribuem-se, para as quatro turmas, em uma aula dupla e uma simples. Para a turma A e a turma C, a aula simples ocorreu em primeiro lugar. Já para as turmas B e D, a aula dupla ocorreu em primeiro lugar. Isso afetou a distribuição das tarefas.

Como a primeira aula foi eminentemente expositiva, não havendo atividade desenvolvida, os alunos cuja aula simples veio primeiro não levaram tarefa a ser entregue na aula seguinte. Assim sendo, todas as atividades desses alunos se desenvolveram em sala, na aula dupla. Já os alunos que tiveram antes a aula dupla conseguiram ver

atividades desenvolvidas como exemplo, e isso possibilitou a realização de tarefa em casa, corrigida no encontro seguinte.

A primeira aula concentrou a apresentação dos conceitos básicos, do funcionamento dos grafos, de problemas clássicos que motivaram o surgimento da Teoria dos Grafos (o problema das pontes de Königsberg, o problema do grafo de serviços públicos e o problema dos cumprimentos ou apertos de mão).

Já a segunda aula apresentou a atividade referente às árvores. Não foi possível desenvolver toda a atividade ali proposta devido a uma peculiaridade do plano de ensino de Matemática nas escolas da SEDF: a Análise Combinatória é tópico tratado apenas no terceiro ano do Ensino Médio. Com isso, as atividades referentes ao uso das árvores para contagem implicariam a introdução de tema totalmente novo aos alunos, e despenderia todo o tempo disponível das três aulas.

Buscando precisamente uma maior variedade nas aplicações dos grafos, optou-se por tratar apenas a primeira parte das atividades sobre árvores (encerradas no Treino 1), e passou-se, na terceira aula, à atividade sobre minimização de custos em fluxos de redes. O objetivo ali foi a construção de um caminho hamiltoniano de menor custo dentro de um grafo formado pelas opções de viagens oferecidas. Nesta atividade, o último Treino (em que o aluno planejava uma viagem pelos estádios da Copa na região Centro-sul do Brasil) ficou como atividade a ser feita em casa por eles, sem o compromisso de entrega na próxima aula.

4.2 Resultados obtidos

Num primeiro diagnóstico, mais geral, observa-se que o interesse das turmas foi razoável. A introdução de um tema novo, desligado do corriqueiro das aulas, com certeza foi fator que afetou esse item. Claro, a composição diferenciada das turmas,

observável tanto por desempenho quanto por padrões de comportamento em sala, afeta a mensuração desse interesse, mas foi visível a recepção positiva de um tópico novo.

É de destacar que houve um estudante¹ na turma B e um na turma C que se dispuseram a realizar as atividades antecipadamente, em casa, ainda que não comandados para tanto.

Devido à restrição pedagógica mencionada na seção anterior, a decisão de não tratar problemas de Análise Combinatória fez com que os exercícios desenvolvidos junto às turmas fossem os seguintes:

- Treino 1 da primeira atividade (sobre árvores);
- Treinos 2, 3 e 5 da segunda atividade (sobre minimização em fluxos).

Esses Treinos foram corrigidos e considerou-se a quantidade de alunos que acertou completamente o exercício proposto. A contagem ficou como segue na tabela 4.2:

Treinos	Turmas							
	A		B		C		D	
	Acertos	%	Acertos	%	Acertos	%	Acertos	%
1	7	41%	3	19%	10	67%	3	17%
2	15	88%	14	88%	11	73%	16	89%
3	7	41%	11	69%	13	87%	18	100%
5	15	88%	13	81%	13	87%	14	78%

Tabela 4.2: Desempenho por turma

Observa-se que o primeiro Treino teve desempenho relativamente pior para as turmas que o resolveram em casa (B e D). De certa forma, isso é interessante, já que

¹Usa-se aqui “um” estudante, gênero masculino, por ser o gênero padrão da língua portuguesa, não implicando isso que fosse aluno do sexo masculino. Está-se preservando, na medida do possível, o anonimato dos alunos, das turmas e da Escola, conforme combinado com o docente e a Coordenação Pedagógica da Escola por ocasião da execução das atividades.

reflete a dificuldade do primeiro contato com a matéria e com um problema relativo a ela. A partir daí, observa-se uma evolução desses acertos, com algumas peculiaridades.

A turma A apresentou excelente desempenho nos Treinos 2 e 5, que eram os Treinos em que se pedia para selecionar o caminho de menor distância e menor custo, respectivamente, nos grafos a que se referem. Porém, no treino 3, que envolvia traçar o grafo rotulado conforme dados fornecidos em tabela, os alunos aparentemente apresentaram dificuldade. Na verdade, o traçado do grafo não teve problemas maiores, mas a instrução de incluir os rótulos não foi seguida, mesmo tendo sido reforçada oralmente por nós no momento da execução da atividade.

A turma B teve boa evolução, saindo-se muito bem também nos Treinos de seleção do caminho ótimo.

A turma C, que no decorrer das aulas apresentou maior facilidade de absorção do conteúdo, teve um desempenho relativamente estável, mas com viés de melhora, conforme se observa da evolução do percentual de acerto dos Treinos.

A melhor evolução foi apresentada pela turma D, a qual, apesar da dificuldade do desenvolvimento do Treino 1, apresentou excelentes resultados na execução dos demais, inclusive com acerto de 100% (dentre os alunos que devolveram o caderno de atividades) no Treino 3.

O desempenho médio geral (contando total de acertos da turma dentre os possíveis, somando todos os alunos) foi o seguinte:

Turma	Desempenho
A	65%
B	64%
C	78%
D	71%

Tabela 4.3: Desempenho geral por turma

Mais uma vez, a notável evolução da turma D se consolida com a segunda melhor média, mesmo tendo obtido uma das menores notas no Treino 1.

A seguir, apresentamos algumas considerações finais à guisa de conclusão deste trabalho.

Considerações Finais

A Teoria dos Grafos tem a peculiaridade de ser, a um tempo, bela, simples e profunda. Mesmo como mera curiosidade matemática (vale sempre lembrar o problema das pontes de Königsberg, “onde tudo começou”), os grafos sempre chamam a atenção, inclusive do leigo. Explorar essa característica de uma ferramenta matemática tão importante acaba tornando-se dever do professor do ensino básico.

Ainda que a proposta aqui apresentada seja dirigida ao Ensino Médio, sempre é possível fazer adaptações e inserções sobre grafos em tópicos do ensino fundamental. Desde mostrar ao estudante que uma simples árvore genealógica de sua casa já gera uma árvore até fazê-lo refletir sobre a importância de planejar o tráfego num sistema de trânsito muito movimentado, com ruas de sentido único ou não, os grafos acabam sendo uma ferramenta de acesso ao raciocínio matemático que não precisa nem mesmo ser exposta como “Teoria”. A experiência aqui relatada no capítulo 4 reflete a maturidade

que o aluno na faixa etária dos 15 aos 18 anos já possui de pensar no nível de abstração trazido pelos grafos mais simples.

Uma vez convencido da utilidade do ensino da Teoria dos Grafos no Ensino Médio, o professor pode optar por uma de duas frentes de ação. Numa primeira opção, pode alocar algumas aulas especificamente para tratar do tema. A experiência com três aulas, apesar de bem-sucedida, mostrou-se um tanto limitada, talvez a inclusão de mais duas aulas seja o ideal, pelo menos para tratar o básico da Teoria e avaliar bem o aprendizado.

Mas uma segunda opção, mais acessível, e provavelmente mais produtiva, seria introduzir pequenas “cápsulas” de Teoria dos Grafos em pontos onde ela se aplique. Começar a ensinar os problemas de contagem com árvores já é procedimento corriqueiro nas salas de aula do Brasil. Podem-se trabalhar problemas de entrada e saída de vias públicas usando sistemas lineares, esquematizando com grafos cada situação. A visualização com certeza ajuda na compreensão das equações a ser trabalhadas.

Problemas de Geometria Plana podem ser enriquecidos com perguntas sobre “qual é o menor caminho?”, ou “qual trajetória leva ao menor tempo?”. A Geometria Espacial também ganha com a introdução de poliedros planos. A verificação da fórmula de Euler no plano tanto quanto no espaço é um dos resultados mais importantes no estudo da Topologia, e é simples o suficiente para ser passado ao aluno do Ensino Médio. Logo se podem emendar problemas sobre planaridade e a impossibilidade de se traçarem certos grafos sem que algumas arestas se cruzem no plano, ou numa superfície esférica.

Por fim, foi admirável a coincidência de, nas semanas em que este trabalho estava sendo concluído, a Sociedade Brasileira de Matemática ter publicado, em seu *site*, relatório de sua contribuição para a reformulação do currículo de ensino de Matemática para o Ensino Médio. Neste relatório (Sociedade, 2015A, p. 3), está explicitamente proposto o tratamento da Teoria dos Grafos como tema suplementar na área de Mate-

mática Discreta, como se vê na tabela da página seguinte. Ao mesmo tempo, em sua contribuição para a reformulação do currículo de Licenciatura, a SBM propõe que os grafos sejam tratados preliminarmente na disciplina de Matemática Discreta e, posteriormente, em nível mais profundo, na disciplina de Combinatória (Sociedade, 2015B, p. 31, 65).

Isso reflete quanto nosso trabalho se mostra oportuno neste momento do ensino da Matemática. Ao mesmo tempo em que a SBM propõe a inclusão dos grafos como tópico a ser tratado no Ensino Médio, também coloca a preparação do futuro professor para tanto. Foi nesse sentido que este trabalho procurou trazer uma compilação simples dos primeiros tópicos que se estudam na Teoria dos Grafos, e que podem se tornar temas de estudo em salas de aula do Ensino Médio.

Esperamos que a proposta apresentada seja útil aos colegas professores, e que seja aprimorada, aumentada. Já nos trará grande alegria saber que o ensino da Matemática no Brasil se enriqueceu ainda que um infinitésimo com essa contribuição.

TABELA DESCRITIVA DE ÁREAS POR SÉRIE

Séries	Números e Funções	Geometria	Matemática Discreta	Tratamento da Informação
1º	<ul style="list-style-type: none"> Conjuntos e noções de lógica. Conjuntos Numéricos. Proporcionalidade. Funções: aspectos gerais. Funções A e Quadrática. 	<ul style="list-style-type: none"> Geometria Plana: congruência, semelhança e áreas. Trigonometria do triângulo. 	<ul style="list-style-type: none"> Conjuntos e Contagem. Aritmética. 	<ul style="list-style-type: none"> Noções de amostragem. Organização de dados: distribuições de frequências e gráficos.
2º	<ul style="list-style-type: none"> Sequências. Outras funções reais. Funções Exponenciais e Logarítmicas. Equações e Sistemas Lineares. 	<ul style="list-style-type: none"> Perímetro e área de figuras semelhantes. Círculo. Geometria Espacial de Posição. 	<ul style="list-style-type: none"> Matemática Financeira. Técnicas de Contagem. 	<ul style="list-style-type: none"> Medidas resumo e distribuição de dados.
3º	<ul style="list-style-type: none"> Funções Trigonométricas. Desigualdades e médias. 	<ul style="list-style-type: none"> Poliedros. Áreas e Volumes. Geometria Analítica. 	<ul style="list-style-type: none"> Probabilidade. 	<ul style="list-style-type: none"> Noções de Estatística bivariada.
Temas Suplementares	<ul style="list-style-type: none"> Taxas de variação. Outras funções trigonométricas. Números Complexos. Noções sobre matrizes e transformações elementares no plano e no espaço. 	<ul style="list-style-type: none"> Áreas de figuras planas: outras abordagens. Vetores no plano. Transformações geométricas e simetria. 	<ul style="list-style-type: none"> Grafos. Aritmética. Outros métodos de contagem. 	

Referências Bibliográficas

- BENJAMIN, A.; CHARTRAND, G; ZHANG, P.. *The Fascinating World of Graph Theory*. Princeton: Princeton University Press, 2015.
- BIGGS, N. L.; LLOYD, E. K.; WILSON, R. J.. *Graph Theory: 1736-1936*. Oxford: Clarendon Press, 1998.
- BOLLOBÁS, B.. *Graph Theory: An Introductory Course*. Nova Iorque: Springer, 1979.
- BONDY, J. A.; CHVÁTAL, V.. A Method in Graph Theory. *Discrete Mathematics*, v. 15, n. 2, 1976, p. 111-135.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R.. *Graph Theory*. Nova Iorque: Springer, 2008.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias. Brasília: MEC, 1998.

- COOK, W. J.. *In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation*. Princeton: Princeton University Press, 2012.
- GOLDBARG, M.; GOLDBARG, E.. *Grafos: Conceitos, Algoritmos e Aplicações*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.
- GROSS, J. L.; YELLEN, J.. *Handbook of Graph Theory*. Nova Iorque: CRC, 2003.
- HARJU, T.. *Lecture Notes on Graph Theory*. 2011. 100 f.. Notas de aula.
- LOVÁSZ, L.; PELIKÁN, J.; VESZTERGOMBI, K.. *Matemática Discreta*. Traduzido por: Ruy José Guerra Barretto de Queiroz. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Tradução de: *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*.
- SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C.. *Introdução à Análise Combinatória*. 4. ed.. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
- SCHEINERMAN, E. R.. *Mathematics: A Discrete Introduction*. 3. ed.. Boston: Cengage Learning, 2013.
- SEDGEWICK, R.; WAYNE, K.. *Algorithms*. 4. ed.. Boston: Addison-Wesley, 2011.
- SIMÕES PEREIRA, J. M. S.. *Matemática Discreta: Grafos, Redes e Aplicações*. Lisboa: Luz da Vida, 2009.
- SOCIEDADE Brasileira de Matemática. *Contribuição da SBM Para a Discussão Sobre Currículo de Matemática: Ensino Médio*. Disponível em: http://www.sbm.org.br/images/Contribuio_da_SBM_Ensino_Meio.pdf. Acessado em: 5 jul. 2015.
- _____. *Contribuição da SBM Para a Discussão Sobre Currículo de Matemática: Licenciatura*. Disponível em:

http://www.sbm.org.br/images/Contribuio_da_SBM_Licenciatura.pdf. Acesso em: 15 ago. 2015.

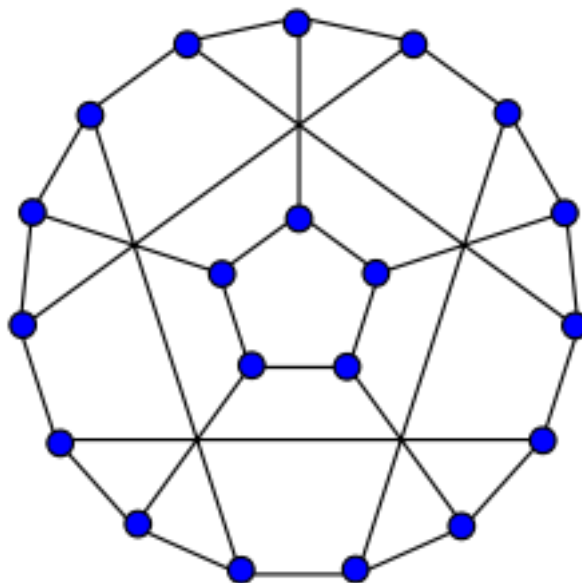
TRUDEAU, R. J.. *Introduction to Graph Theory*. Nova Iorque: Dover, 1993.

Apêndice

Introdução à Teoria dos Grafos

Atividades

maio de 2015



Árvores: contando de um jeito diferente!

Notas de aula e exercícios

maio de 2015

1 Introdução

Problemas de contagem são parte de nossa vida. Em vários momentos precisamos determinar a quantidade de possibilidades que existem de algo ocorrer. Normalmente, essa contagem precede uma tomada de decisão: qual é a melhor dentre essas tantas opções? No decorrer desse nosso minicurso, vamos travar contato com uma ferramenta muito simples e, ao mesmo tempo, muito poderosa: os **grafos**.

Você pode não saber, mas, com certeza, já mexeu com grafos na sua vida. Dentre os vários tipos de grafos, as chamadas **árvores** são normalmente os primeiros com que travamos contato. Vamos a algumas definições, então.

Definição 1. *Grafo* é um conjunto de pontos (*vértices*) e linhas (*arestas*) que ligam esses pontos (*todos ou alguns*).

Um conceito bem amplo, né? Na verdade, sim. O conceito de grafo é amplo exatamente para poder representar as mais diversas situações. Ele permite, por exemplo, um grafo como o que vai abaixo.

Você deve ter percebido algumas peculiaridades. Primeiro, nem sempre são segmentos de reta que conectam os vértices de um grafo. Na verdade, pode ser qualquer linha contínua, até porque não interessa o formato dessa conexão, mas apenas indicar que a conexão ocorre. Além disso, perceba que pode haver vértices sem arestas que cheguem a ele, como é o caso de F na figura 1.

Vamos ignorar o vértice F, por enquanto. Se retirarmos F, o grafo restante é o que chamamos **grafo conexo**, indicando que podemos ir de qualquer vértice a qualquer vértice usando as arestas disponíveis. Em termos concretos,

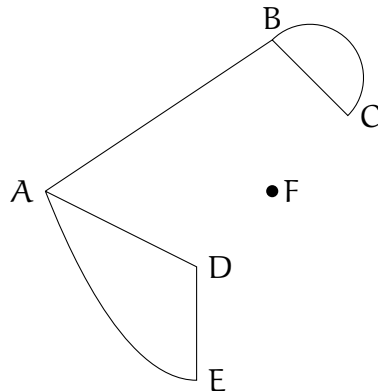


Figura 1: Um grafo... estranho!

você consegue riscar um caminho de um ponto qualquer a outro qualquer sem tirar a caneta do papel. Verifique isso!

Outra peculiaridade do nosso grafo da figura 1 é que há duas arestas conectando os vértices B e C. Isso faz com que o grafo seja chamado de **multigrafo**. Nossas atividades não abordarão multigrafos, mas é importante você saber que eles existem. vejamos agora a definição de um grafo muito útil: a árvore.

Definição 2. *Uma **árvore** é um grafo conexo em que cada par de vértices tem apenas um caminho de arestas que os conecta.*

Na figura 2, temos um exemplo de árvore. Veja que árvores não podem ter ciclos (como é o caso de ADE na figura 1).

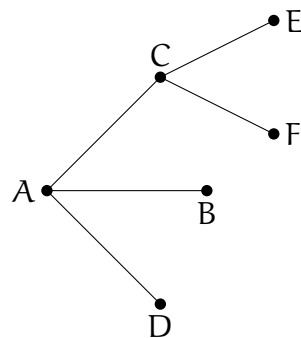


Figura 2: Árvore

As árvores são interessantes como ferramentas para abrir graficamente as possibilidades de determinadas situações. Vamos ver um jogo conhecido

como *8-puzzle*, ou **jogo do 8**. Você tem um tabuleiro quadrado de nove casas, numa disposição 3×3 , preenchido com oito quadrados numerados de 1 a 8, tendo sempre uma casa vazia. o objetivo é chegar a uma das configurações da figura 3:

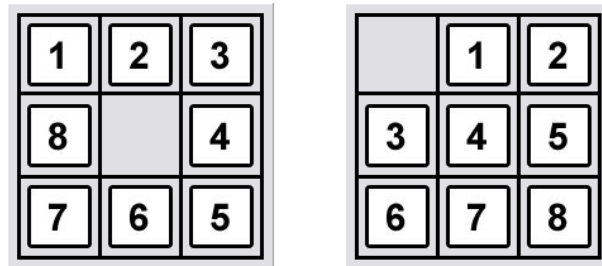


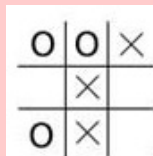
Figura 3: Objetivos do jogo de 8

Partindo de uma situação inicial com as pedras embaralhadas, você arrasta uma pedra para a casa vazia até chegar a um dos objetivos. Todas as opções de movimento podem compor um grafo em forma de árvore, como na figura 4.

Perceba que foi destacado um caminho que chega ao objetivo. Na verdade, todos os outros “ramos” da árvore podem chegar ao objetivo, mas vão precisar de mais passos. O caminho marcado é o mais curto.

Outro jogo interessante para montar uma árvore é o **jogo da velha**. As opções, neste caso, são muitas. Assim, colocaremos apenas os dois passos iniciais, com o cuidado de eliminar posições “equivalentes” (ou seja, que podem ser obtidas de outra por meio de rotação). Veja a figura 5.

Treino 1. Considere que você esteja na seguinte fase de um jogo da velha. É a vez de X jogar. Descreva todas as possibilidades de prosseguimento do jogo numa árvore, indicando quem ganha em cada ponto final.



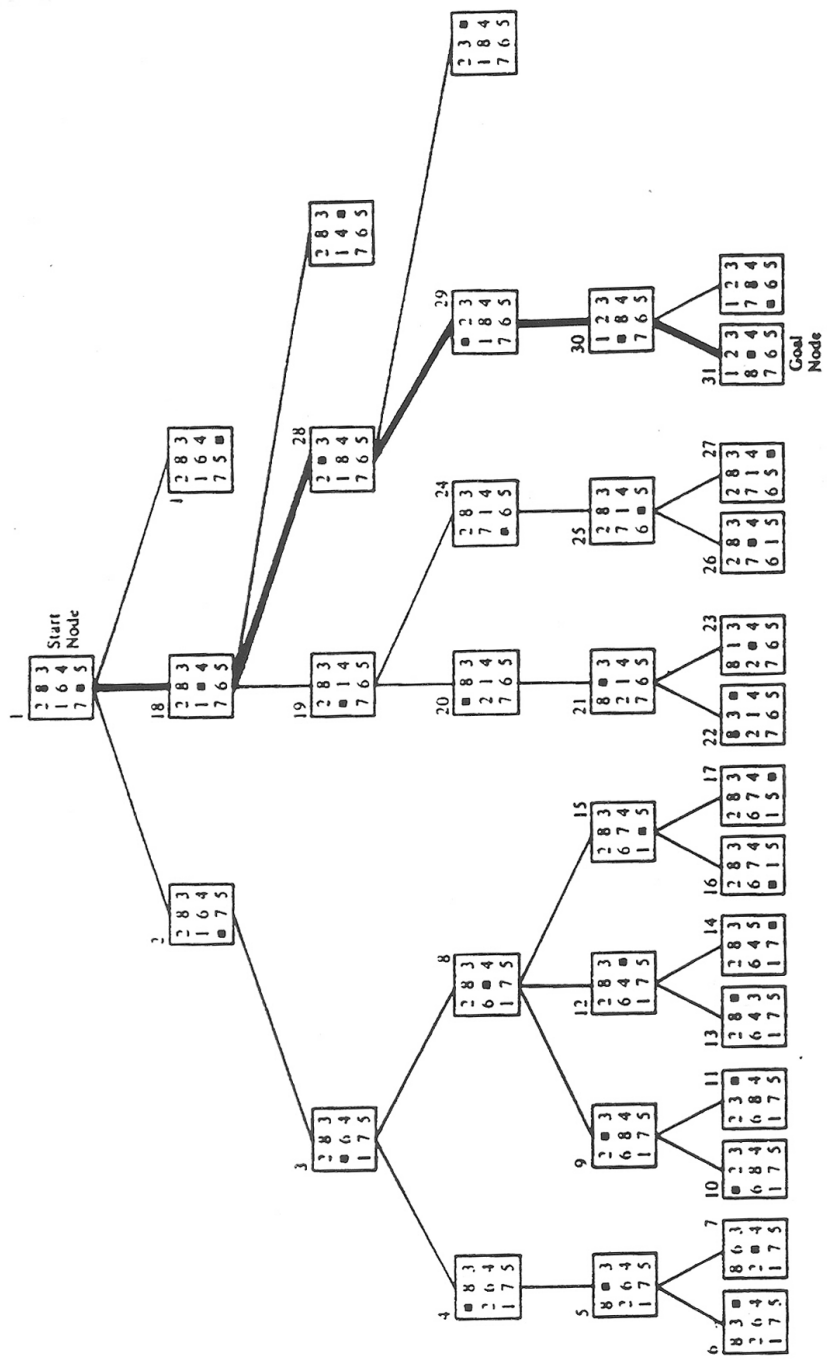


Fig. 2.6 A search tree produced by a depth-first search.

Figura 4: Exemplo de árvore do jogo de 8

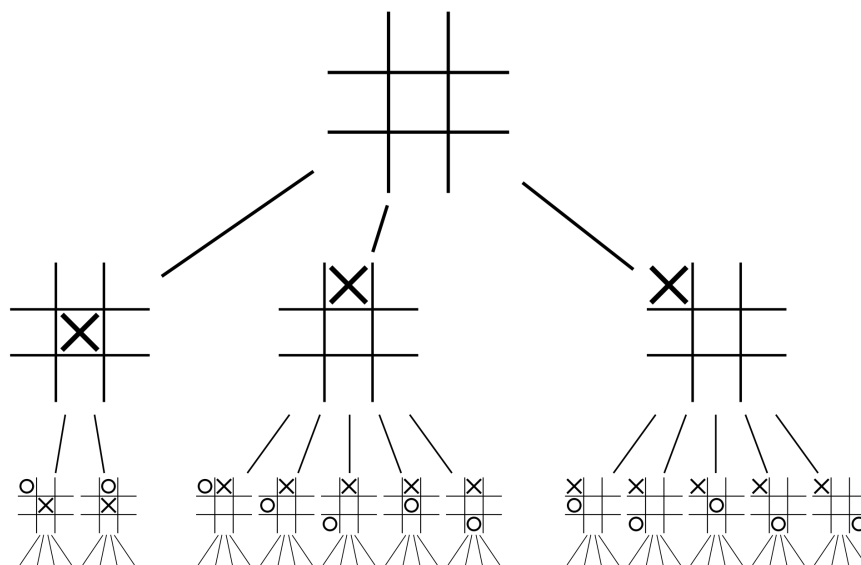


Figura 5: Começo da árvore do jogo da velha

2 Recordando os princípios fundamentais da contagem

Quando você estuda análise combinatória, logo de cara se encontra com o **princípio fundamental da contagem**, também chamado princípio multiplicativo. Na verdade, existem dois princípios, sendo que o primeiro você já usa sem saber! Vamos dar uma olhada neles?

Treino 2. Considere que você tenha uma semana para descansar, e vai fazer uma viagem. Você tem dois destinos: ou vai fazer uma trilha, ou vai a uma praia. Para fazer a trilha, você tem 3 opções; já para a praia, você tem 4 opções. Qual é o total de opções que você tem de passeios no fim de semana?

Você deve estar pensando: “esse cara tá de brincadeira!”. Na verdade, não estou. O problema anterior é bem simples, mesmo, mas tem um objetivo: ilustrar o **primeiro princípio fundamental da contagem**, ou **princípio aditivo**, que diz:

Teorema 1. *Se existem possibilidades alternativas de fazer uma escolha, o número de opções existentes é a **soma** das quantidades de opções de cada possibilidade.*

Ou seja, toda vez que você tiver duas alternativas A_1 e A_2 para realizar uma escolha, o número total de opções é dado por:

$$N = n(A_1) + n(A_2) \quad (1)$$

Vamos ver, agora, um problema mais elaborado.

Treino 3. João vai sair, e precisa escolher uma camisa e uma calça. Seu guarda-roupas tem 4 calças e 5 camisas. De quantas maneiras ele pode se vestir, supondo que qualquer par calça-camisa pode ser usado?

Bom, agora, já está mais dentro do que você esperava, né? É o famoso **princípio multiplicativo**, ou **segundo princípio fundamental da contagem**, cujo enunciado é:

Teorema 2. *Se um evento se divide em fases sucessivas de escolhas, o número de opções de ocorrência do evento é o **produto** das quantidades de opções de cada fase.*

Ou seja, quando um evento tem duas fases sucessivas de ocorrência F_1 e F_2 , o número de possibilidades de ocorrência do evento é dado por:

$$N = n(F_1) \cdot n(F_2) \quad (2)$$

2.1 Contando com árvores

Uma maneira de ilustrar os problemas resolvidos nos treinos anteriores é usando um grafo chamado “árvore”. Uma **árvore** é um grafo em que cada par de pontos só é conectado por um único caminho. Vamos ver?

No caso do treino 2, podemos representar as trilhas por pontos T_1 , T_2 e T_3 , e as praias por pontos $P_1 \dots P_4$. Usando um vértice O como “origem” da árvore, as arestas do grafo serão como “ramos” da árvore. Veja:

Observe que a contagem das pontas finais dos ramos dá exatamente a resposta à pergunta do treino (7 opções de viagem). Será que funciona sempre?

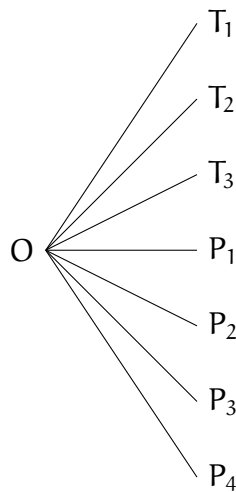


Figura 6: Árvore do treino 2

A resposta é sim! Vamos ver o treino 3? Nesse caso, como temos fases sucessivas (primeiro escolhe uma calça, depois uma camisa), essas fases serão representadas da seguinte maneira:

Fase 1: os ramos referentes às calças ($C_1 \dots$) sairão da origem, representando 4 arestas;

Fase 2: os ramos referentes às camisas ($S_1 \dots$) sairão **da ponta de cada ramo** das calças, representando 5 arestas saindo de cada vértice referente à calça.

Vamos ver a figura, para deixar mais claro:

Conte as pontas dos ramos finais. Quantos você encontrou? Isso mesmo, 20! É exatamente a quantidade encontrada na resolução do treino 3.

Veja que a árvore facilita a visualização da resposta. Mas aí surge um problema: e se tivermos muitas opções? Mas muitas, mesmo, tipo, umas 70 opções na primeira fase, 45 na segunda... A árvore ficaria meio trabalhosa de fazer, né? Podemos simplificar, porém, usando **rótulos** para quantificar as arestas (ramos). Rótulos são como “etiquetas”, de modo que, em vez de desenhar, digamos, 70 arestas, você desenharia apenas uma aresta com o rótulo “70”, indicando que aquele ramo representa, na verdade, toda uma fase com 70 opções.

Podemos redesenhar as árvores anteriores usando esse artifício. Os grafos, porém, serão muito simples. Veja:

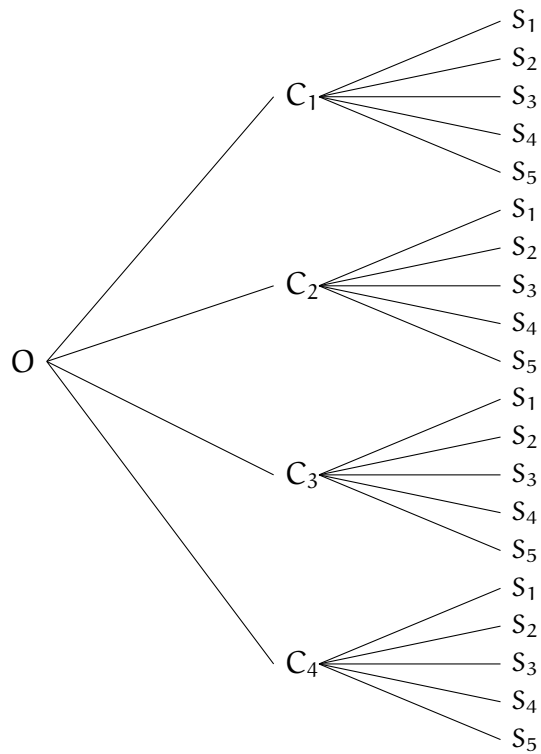


Figura 7: Árvore do treino 3

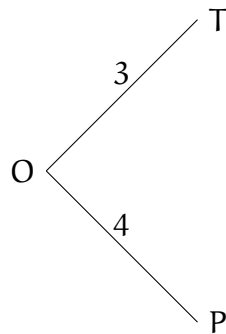


Figura 8: Árvore rotulada do treino 2

Já a árvore simplificada do treino 3 nem parece uma árvore: é uma linha reta com dois segmentos:

Vamos ver um outro exemplo, um pouco mais complexo, e verificar como a árvore nos ajuda a resolvê-lo.

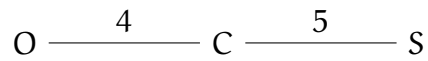


Figura 9: Árvore rotulada do treino 3


Treino 4. Quero dar um presente à minha esposa. Tenho duas opções: ou dou um par de brincos e um anel, ou dou uma corrente de ouro com um pingente. A joalheria tem 6 opções de brincos, 8 anéis, 3 correntes de ouro e 9 pingentes. Supondo que as combinações podem ser feitas de qualquer forma (apenas limitadas pelas opções dadas acima):

- (a) trace a árvore de possibilidades;
- (b) trace a árvore rotulada (resumida) de possibilidades;
- (c) calcule quantas possibilidades de presentes tenho para dar à minha esposa.

Observe que podemos deduzir uma regra para usar as árvores rotuladas:

Regra 1: Sempre se deve seguir o caminho das pontas finais dos ramos em direção à origem.

Regra 2: Quando passamos de um ramo a outro $X \text{---} Y \text{---} Z$, multiplicam-se os rótulos dos ramos.

Regra 3: Quando chegamos a um mesmo vértice por vários ramos , somam-se os rótulos dos ramos que chegam (ou os produtos eventualmente realizados até chegar ao vértice X).

Treino 5. Maria tem, em seu guarda-roupa, cinco vestidos, quatro sapatos de salto, seis camisetas, três calças jeans e quatro pares de tênis. Para sair, ela pode usar um par de sapatos com um vestido, ou camiseta, jeans e tênis. De quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?

Quer viajar pagando menos?

Notas de aula e exercícios

maio de 2015

1 Introdução

Vão chegar as férias. Quem não gostaria de fazer **aquela** viagem no fim do ano, né? Conhecer lugares novos, pessoas diferentes. Mas isso custa dinheiro, ninguém ignora. Não seria interessante achar um meio de gastar o mínimo possível nos deslocamentos entre as cidades que você vai conhecer? Nesta atividade, você vai entrar em contato com um método inteligente e visual para atingir esse objetivo, e o melhor: sempre é possível chegar a uma resposta! Vamos lá?

1.1 Situação inicial

Vamos supor, inicialmente, que estejamos em Roma, no século III a.C.. Um problema que nós temos de resolver é como levar água de um lugar mais elevado a outros, em altitude menor. Vamos supor que tenhamos cinco pontos para ser conectados por aquedutos. As regras são:

- (i) todos os pontos devem estar conectados ao sistema;
- (ii) somente um canal deve ligar dois pontos que estejam conectados entre si (ou seja, não precisamos de mais de um canal ligando dois pontos do sistema); e
- (iii) o comprimento total dos canais deve ser o menor possível, minimizando o custo de construção.

Suponha que, na figura 1, estejam representados os cinco pontos que devem ser ligados pelos aquedutos. A distância coberta por um aqueduto conectando cada par de pontos está na tabela 1.

Treino 1. Represente, na figura 1, cada trecho que será conctado por um aqueduto, escrevendo a distância representada no trecho ao lado da linha desenhada. Isso que você acabou de fazer é um **grafo rotulado**.

Fonte •

• Thermæ

• Ædes

Forum •

Circus •

Figura 1: Pontos conectados pelos aquedutos

Tabela 1: Distância coberta pelos aquedutos

Canais	Distância (km)
Ædes – Circus	15
Ædes – Forum	30
Ædes – Fonte	35
Ædes – Thermæ	21
Circus – Forum	10
Circus – Fonte	25
Circus – Thermæ	50
Forum – Fonte	28
Forum – Thermæ	18
Fonte – Thermæ	12

Voltando ao nosso problema, qual seria sua atitude, diante da necessidade de construir os aquedutos com a menor distância total possível? Alguém aí pensou “pegar os menores trechos”? Parabéns, essa é a resposta!

Perceba que priorizar os aquedutos com as menores distâncias é a solução mais óbvia intuitivamente. Vamos lá?

Treino 2. Trace, na figura 2, um grafo que represente apenas os aquedutos efetivamente construídos. Calcule a distância total percorrida por esse sistema de aquedutos.

Fonte •

• *Thermæ*

• *Ædes*

Forum •

Circus •

Figura 2: Solução do problema dos aquedutos

2 E então, vamos viajar?

André e Beto fizeram, separadamente, um *tour* pela Europa. Eles conheceram exatamente as mesmas cidades, não necessariamente na mesma ordem: Atenas, Berlim, Coimbra, Londres, Paris e Roma. Vamos considerar que a chegada do Brasil à Europa, bem como a volta, seja por um preço promocional que ambos conseguiram pela companhia de viagens, OK? Dentro da Europa, o custo de cada trajeto (não importa o sentido) está na tabela 2.

Tabela 2: Viagens pela Europa

Trechos	Custos (R\$)
Atenas – Berlim	320,00
Atenas – Coimbra	540,00
Atenas – Londres	500,00
Atenas – Paris	400,00
Berlim – Londres	250,00
Berlim – Paris	300,00
Berlim – Roma	320,00
Coimbra – Londres	400,00
Coimbra – Paris	300,00
Coimbra – Roma	300,00
Londres – Paris	280,00
Londres – Roma	450,00
Paris – Roma	250,00

Vamos considerar que esse custo seja do meio de transporte de menor custo disponível (ou seja, entre trem, avião, carro *etc.*). André fez o seguinte trajeto (indicando as cidades pelas iniciais): A – C – L – P – B – R. Pela tabela, o custo desse trajeto foi de R\$ 1.840,00. Já

Beto preferiu a seguinte sequência: B – L – R – P – A – C. Seu gasto somou R\$ 1.890,00. Bem, André saiu ganhando. Daí vêm duas perguntas essenciais:

- (i) É possível obter um trajeto mais barato que o de André?
- (ii) É possível encontrar o trajeto de menor custo por um método simples e direto?

A essas perguntas daremos respostas no decorrer desta atividade. Vamos lá?



Figura 3: Cidades pela Europa

2.1 Representação em grafos

Vejam os um mapa da Europa com as cidades dos nossos amigos destacadas (figura 3).

Podemos traçar um esquema simplificado das viagens dos nossos amigos, usando pontos para representar as cidades e linhas para indicar os trajetos. Esta é a representação em grafo. Veja a figura 4:

Treino 3. Trace linhas ligando as cidades de acordo com os trechos listados na tabela 2. Não há necessidade de serem linhas retas! Aproveite e coloque, junto de cada linha, o custo de percorrer o trecho por ela representado.

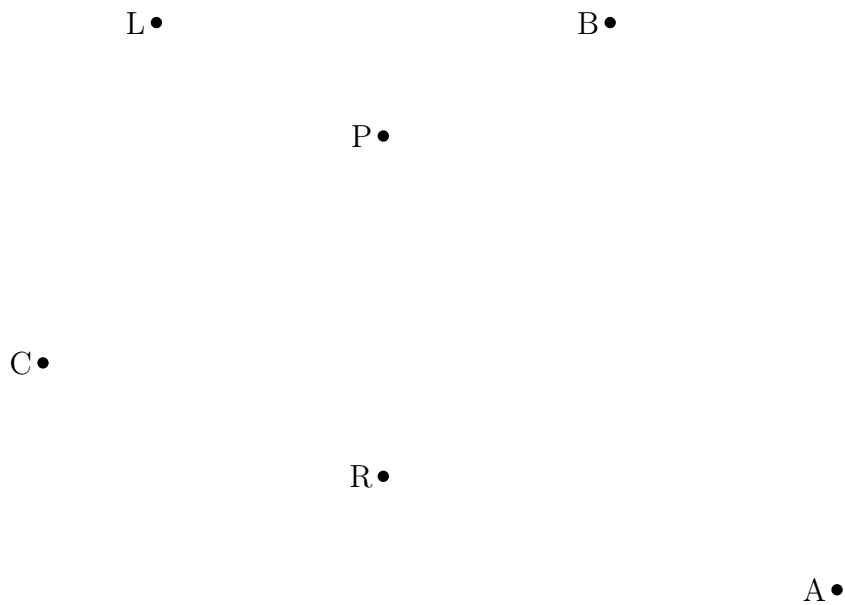


Figura 4: Cidades e trechos pela Europa — grafo

Treino 4 (Relembrando contagem). Se fôssemos traçar todas as possibilidades de trechos entre cada duas cidades, quantos haveria?

2.2 Minimizando os custos

Bom, agora, vamos calcular a rota de menor custo. Para tanto, vamos supor que estejamos em Atenas. Só para começar, certo? Qual seria a escolha a fazer, dado o objetivo de obter o trajeto menos custoso?

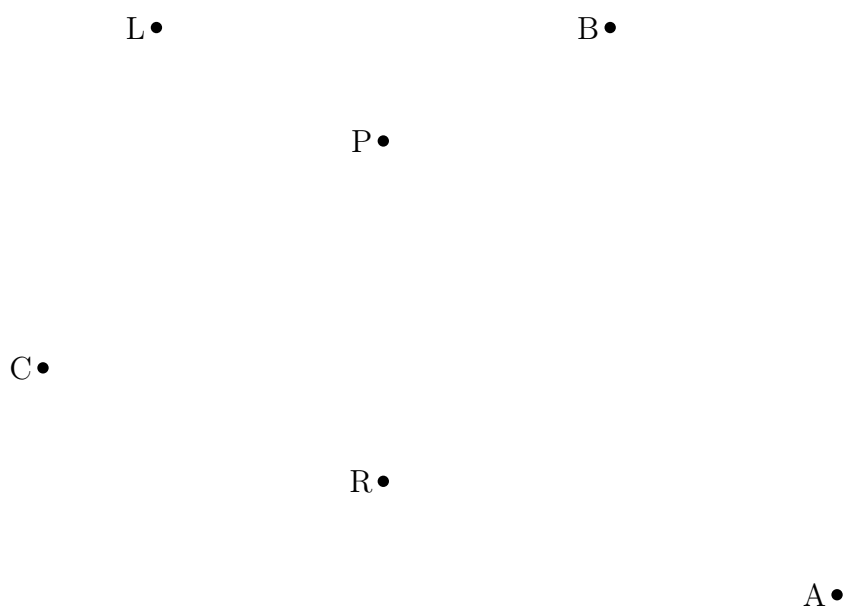


Figura 5: Trajeto mais barato, partindo de Atenas

Se você pensou “pegar o trecho mais barato”, acertou na mosca! Voltando à tabela 2, qual é o trecho mais barato que você consegue enxergar? Claramente, é o trecho A – B, de Atenas a Berlim. Assim, na figura 5, desenhe com destaque esse trecho. Você já gastou R\$ 320,00.

Agora, você está em Berlim. Qual é seu próximo passo? Como você já deve estar pensando, é pegar o trecho mais barato que saia de Berlim, correto? Dos três tabelados, vemos que o mais barato vai para Londres, e temos o trecho B – L a ser desenhado na figura 5. Somando os custos, já acumulamos um gasto de R\$ 570,00.

Uma vez em Londres, lembrando que você não quer voltar nem para Atenas nem para Berlim (para que voltar a uma cidade que já conheceu, certo?), qual o trecho mais barato? Pela tabela, vai ser o trecho até Paris. Marque, na figura 5, o trecho L – P. E, ao todo, já gastamos R\$ 850,00.

Pelos nossos planos, podemos ir de Paris a Coimbra ou a Roma. Qual é o mais barato? Uma consulta rápida permite ver que é o último trecho tabelado, e vamos a Roma. Marque no seu desenho o trecho P – R. E o total gasto até agora? Fica para você calcular.

Finalizamos nossa viagem indo a Coimbra no único trecho que não permitirá repetição de cidades. Qual foi o custo total de nossa viagem? Se você calculou o último valor corretamente, tem trinta segundos para calcular o valor final!

Você deve ter achado R\$ 1.400,00, certo? Muito bem, essa deve ser a viagem mais barata que conseguimos partindo de Atenas! Agora... será que é mesmo? Vamos testar. Busque outros trajetos, partindo de Atenas, e some os custos dos trechos. Lembre-se de **não repetir cidades!**

Treino 5. Tome, agora, os mesmos procedimentos, mas iniciando sua viagem de Coimbra. Qual foi o menor custo encontrado?

2.3 Uma abordagem gananciosa

Vamos fazer, agora, o trajeto mais barato de uma maneira mais gananciosa, mais “gulosa”. Vamos montar o caminho tomando sempre os trajetos mais baratos disponíveis, não importando se estão conectados no momento em que os tomo, mas sempre nos preocupando com **não repetir cidades já visitadas**. Marcando os trechos que citamos na figura 6, você vai ver o que ocorre.

Os trechos mais baratos são os trechos Berlim – Londres e Paris – Roma. Logo, devemos pegá-los primeiramente. Perceba que, nesta abordagem, não nos preocupamos, num primeiro momento, com conexões. A ideia é que, ao fim tenhamos um grafo conexo que mostre o caminho a ser seguido.

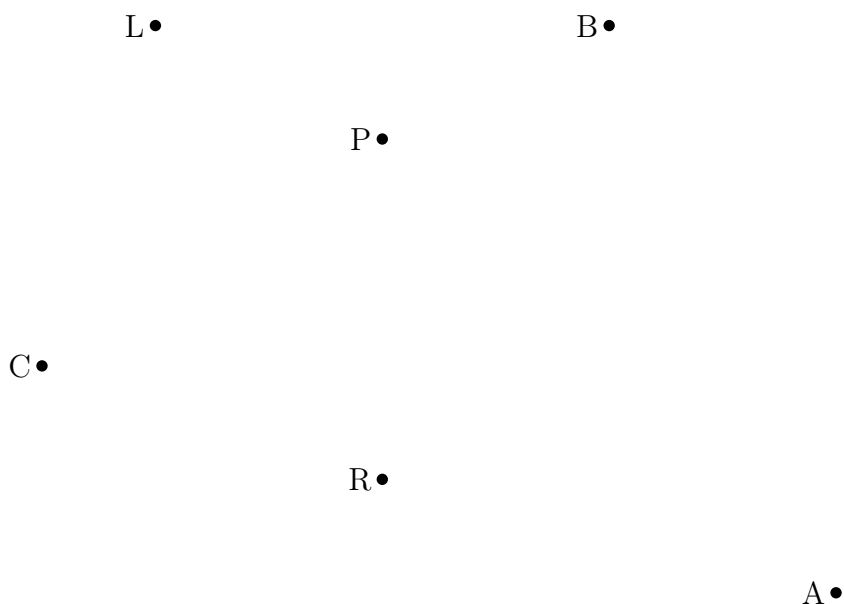


Figura 6: Trajeto com os trechos mais baratos

O terceiro trecho mais barato é Londres – Paris. Se você não se esqueceu de marcar os trechos na figura 6, deve ter percebido que acabou de conectar as duas arestas anteriormente desconexas. No momento, somamos R\$ 780,00 de gastos.

O próximo passo pode parecer um tanto melindroso. Temos três trechos com o mesmo valor (R\$ 300,00). Deles, não podemos pegar Berlim – Paris, já que isso fecharia um ciclo e nos faria passar por uma cidade duas vezes. Agora, das duas que sobraram, podemos pegar apenas uma. Se tomarmos as duas, teremos novamente um ciclo. Do ponto de vista analítico, qualquer trecho que pegarmos montará um grafo minimizante de gastos. Todavia, dado o contexto (traçar o roteiro de uma viagem), preferiremos o trecho Coimbra – Roma, que não cria uma ramificação, permitindo um caminho direto da primeira à última cidade. Com isso, temos um total de R\$ 1.080,00 de gastos.

Os próximos trechos mais baratos são Berlim – Roma (que fecha ciclo, e será excluído) e Atenas – Berlim. Com isso, fechamos um trajeto que passa por todos os vértices. O gasto obtido assim foi de R\$ 1.400,00, o mesmo valor obtido pelo método anterior. E o trajeto obtido? O que você tem a dizer sobre ele?

Sim, a sua conclusão está correta: obtivemos o mesmo caminho. Coincidência? Na verdade, não. Se prestar atenção a como montamos cada caminho, você verá que nosso objetivo no primeiro método (denominado **algoritmo de Prim**) foi pegar o trecho mais barato que saísse de um dos vértices que já fizesse parte do grafo. Essa é a razão por que escolhemos um vértice para iniciar o processo. Já no segundo método (**algoritmo de Kruskal**), pegamos sempre os trechos mais baratos disponíveis. Como evitamos fechar ciclos e passar por uma mesma cidade mais de uma vez, os trechos escolhidos deverão ser os mesmos nos dois algoritmos. Isso é um teorema importante na teoria dos grafos:

Teorema 1. *Todo caminho minimizante obtido pelo algoritmo de Prim pode ser obtido pelo algoritmo de Kruskal.*

Treino 6. O mapa da figura 7 abaixo mostra os estádios da Copa localizados no Centro-sul do País. Você quer fazer um passeio passando por essas cidades uma única vez. Usando os preços dos trechos disponíveis na tabela 3:

- (a) Desenhe um grafo representando os trechos da tabela com seus respectivos preços.
- (b) Determine o trajeto de menor custo. Use o algoritmo de Prim partindo de Brasília. Depois, use o algoritmo de Kruskal e compare os resultados.



Figura 7: Estádios da Copa — região Centro-sul

Tabela 3: Trechos entre estádios da Copa

Trechos	Abreviaturas	Custos (R\$)
Belo Horizonte – Brasília	H – B	220,00
Belo Horizonte – Curitiba	H – C	340,00
Belo Horizonte – Rio de Janeiro	H – R	200,00
Belo Horizonte – São Paulo	H – S	230,00
Brasília – Curitiba	B – C	250,00
Brasília – Porto Alegre	B – P	380,00
Brasília – Rio de Janeiro	B – R	180,00
Brasília – São Paulo	B – S	200,00
Curitiba – Porto Alegre	C – P	200,00
Curitiba – Rio de Janeiro	C – R	220,00
Curitiba – São Paulo	C – S	180,00
Porto Alegre – Rio de Janeiro	P – R	350,00
Rio de Janeiro – São Paulo	R – S	180,00