



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA - IM  
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA - SBM  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

## GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: PROPOSTA DE ABORDAGEM APLICÁVEL AO ENSINO BÁSICO

ROGÉRIO BATISTA DA ROCHA

Salvador - Bahia  
Março de 2013

# GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: PROPOSTA DE ABORDAGEM APLICÁVEL AO ENSINO BÁSICO

ROGÉRIO BATISTA DA ROCHA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro.

**Co-orientador:** Prof. Me. Robério Batista da Rocha.

Salvador - Bahia

Março de 2013

# GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS: PROPOSTA DE ABORDAGEM APLICÁVEL AO ENSINO BÁSICO

ROGÉRIO BATISTA DA ROCHA

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 12 de março de 2013.

## **Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro (Orientador)  
UFBA

---

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes  
UFBA

---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva  
UFAL

*À minha família*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela saúde, força e determinação para conduzir os estudos e efetivar esta conquista.

Agradeço a minha família, a quem dedico este trabalho. A meus pais Zequinha e Delvani, pelo apoio, preocupação, pelas orações e pelo amor incondicional. Aos meus irmãos, Emanuel, Robério e Maura pelo carinho, pela amizade. Ao meu irmão Robério agradeço pela co-orientação deste trabalho e pelo apoio ao longo do meu percurso no mestrado. À minha filha Rosa Bianca, razão dos meus estudos, do meu trabalho, das minhas conquistas... À minha esposa Graziela, pelo amor, atenção, generosidade, cuidado, preocupação, enfim, agradeço por estar sempre ao meu lado!

Ao professor Isaac Lázaro, obrigado pela orientação deste trabalho, pela confiança e por todo o apoio nesta produção.

Agradeço aos professores do programa de mestrado PROFMAT que contribuíram, ao longo desses dois anos, com os seus valiosos conhecimentos para a minha formação, qualificação e crescimento profissional.

A todos os colegas de mestrado, agradeço pela convivência que fizeram com que os sábados destes dois anos difíceis se tornassem mais alegres e menos cansativos.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a concretização desta conquista.

*"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela".*

*Albert Einstein*

# Resumo

Na presente dissertação é feita uma análise do surgimento das Geometrias Não-Euclidianas, bem como o estudo de algumas das suas propriedades características, objetivando uma aplicabilidade no ensino básico. Para isto, é apresentado o sistema lógico axiomático do Livro 1 de Euclides, bem como a polêmica que orbitava em torno do Quinto Postulado. É mostrado a importância das tentativas de demonstração deste postulado, dando uma ênfase maior ao trabalho de Saccheri, como um dos principais motivadores na aceitação de uma nova Geometria e desconstrução da ideia da Geometria Euclidiana como única. Por fim, é feita uma abordagem das novas Geometrias, principalmente no que se refere a Geometria Hiperbólica, apresentando seus fundadores, e, estudando as suas principais propriedades.

**Palavras-chave:** Geometria Euclidiana; Quinto Postulado; Paralelas; Geometria não-Euclidiana; Geometria Hiperbólica.

# Abstract

On this dissertation is an analysis of the emergence of non-Euclidean geometries, and the study of some of its characteristic properties, aiming at applicability in basic education. For this, we present the axiomatic logical system of Book 1 of Euclid, and the controversy that circled the Fifth Postulate. It is shown the importance of attempts to demonstrate this postulate, giving greater emphasis to the work of Saccheri, as a key factor in the acceptance of a new Geometry and deconstruction of the idea of Euclidean Geometry as a single. Finally, it made an approach to new geometries, particularly with regard to Hyperbolic Geometry, with its founders, and by studying their main properties.

**Keywords:** Euclidean Geometry; Fifth Postulate; Non-Euclidean Geometries; Hyperbolic Geometry.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Os Elementos de Euclides . . . . .	4
1.2 A Geometria Absoluta . . . . .	9
<b>2 Tentativas de Prova do Quinto Postulado</b>	<b>23</b>
2.1 As Tentativas Fracassadas . . . . .	24
2.1.1 Ptolomeu . . . . .	24
2.1.2 Proclus . . . . .	26
2.1.3 Nasiredin . . . . .	27
2.1.4 Jonh Wallis . . . . .	28
2.2 O Legado de Saccheri . . . . .	29
<b>3 As Novas Geometrias</b>	<b>49</b>
3.1 Fundadores da Geometria Não-Euclidiana . . . . .	49
3.1.1 Karl-Friedrich Gauss (1777-1855) . . . . .	49
3.1.2 Janos Bolyai (1802-1860) . . . . .	52
3.1.3 Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856) . . . . .	54
3.2 Geometria Hiperbólica . . . . .	55
3.2.1 Modelos da Geometria Hiperbólica . . . . .	67
3.3 Geometria Elíptica . . . . .	68
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Introdução

Cerca de 300 anos a.C., Euclides de Alexandria sistematizou em uma coletânea de 13 livros, chamada *Elementos*, todo o conhecimento matemático daquela época. No Livro 1, Euclides, usando o raciocínio dedutivo, fez a primeira fundamentação axiomática da Geometria. Partindo das noções iniciais de ponto, reta, plano, entre outros, ele fez 23 definições, 9 noções comuns, e 5 postulados, e a partir daí conseguiu provar diversos teoremas e proposições dentro do que hoje é chamado de *Geometria Euclidiana Plana*. No entanto, o modelo axiomático de Euclides suscitou questionamentos no que se refere ao quinto postulado:

**Postulado V:** *É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.*

A forma como Euclides enuncia o Postulado V, com uma redação complexa e pouco intuitiva, motivou uma desconfiança de que ele não se trataria de um postulado e que poderia ser provado a partir dos 4 primeiros postulados.

Outros enunciados equivalentes e mais simples foram sugeridos para substituir o V postulado de Euclides. Dentre estes, o mais famoso é devido a John Playfair: *Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada.* Por isso, o Quinto Postulado é também conhecido como postulado das paralelas.

Por mais de 20 séculos, matemáticos do mundo inteiro trabalham na busca por uma prova para o quinto postulado. Um dos principais trabalhos nesse sentido é o do padre Girolamo Saccheri (1667 – 1733), que publicou um opúsculo no qual pretendia ter demonstrado o quinto postulado pelo método de redução ao absurdo. Negando o postulado, desenvolve uma série de propriedades e conclusões surpreendentes, que eram válidas, mas que contrariavam a intuição de Saccheri. Sem se dar conta, ele acabava de descobrir uma nova geometria diferente da Euclidiana. Seu trabalho só foi descoberto após o nascimento oficial dessas novas geometrias.

Os primeiros a perceberem a impossibilidade de provar o quinto postulado de Euclides, e que este independia dos demais postulados, foram o alemão Gauss (1777-1855),

que não publicou o seu trabalho, o húngaro Bolyai (1802-1860) e o russo Lobachsvsky (1793-1856). Em 1829, Lobachevsky, a partir dos quatro primeiros postulados (e a consequente *Geometria Absoluta*, a parte da geometria formulada sem o Quinto Postulado) e utilizando a afirmação de que *por um ponto qualquer fora de uma reta é possível traçar pelo menos duas retas paralelas à reta dada* (que contraria o quinto postulado de Euclides), foi possível construir um sistema lógico-geométrico satisfatório, sem qualquer contradição. Em 1832, Bolyai, com um trabalho completamente independente, consegue os mesmos resultados. Nascia aqui o que mais tarde viria a se chamar de *Geometria Hiperbólica*. Estava descoberta a primeira *Geometria não-Euclidiana*.

Entre os principais resultados da geometria Hiperbólica, destacam-se a inexistência de figuras semelhantes, a soma dos ângulos internos de um triângulo que é menor que  $180^\circ$ , a inexistência dos retângulos, entre outros.

Após a Geometria Hiperbólica, com o alemão Bernhard Riemann (1826-1866) surge a Geometria Elíptica. Essa geometria supõe que *por um ponto qualquer fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada* (que é outra maneira de contrariar o V Postulado de Euclides).

Neste trabalho de conclusão de curso é feita uma abordagem para as geometrias não-Euclidianas visando uma aplicabilidade no ensino básico, preferencialmente no ensino médio, a partir de uma descrição das discussões acerca do Quinto Postulado de Euclides ao longo da história, desde o seu princípio com Euclides até o desencadeamento na Geometria Hiperbólica.

A metodologia utilizada para a elaboração deste trabalho, foi a pesquisa bibliográfica, estudo e aprofundamento do conteúdo.

O Capítulo 1 é dividido em duas seções: na primeira é feita uma breve apresentação do trabalho de Euclides, no que se refere à obra *Elementos*, em particular o Livro 1, o primeiro dos 13 livros que compõem a obra, enfatizando a polêmica instaurada acerca do seu quinto postulado; a segunda seção é apresentada a *Geometria Absoluta*, formulada sem o postulado das paralelas, e que servirá de pre-requisito para o entendimento das tentativas de prova do postulado em questão, bem como para a formalização mais completa da Geometria Hiperbólica.

O segundo capítulo é dedicado as tentativas de prova do Quinto Postulado de Euclides. Foram escolhidas e apresentadas algumas das principais tentativas fracassadas de demonstração desse postulado. Neste capítulo é dada uma ênfase maior ao trabalho de Saccheri, tendo em vista que este foi o primeiro a encontrar os resultados intrínsecos da Geometria Hiperbólica.

No último capítulo é feita uma breve apresentação dos fundadores da Geometria não-Euclidiana, em particular, da Geometria Hiperbólica. Posteriormente, faz-se o es-

tudo da Geometria Hiperbólica, descrevendo seus principais resultados e fazendo uma associação com o trabalho de Saccheri. Por fim, este trabalho finaliza com uma apresentação sucinta da Geometria Elíptica.

Atualmente no currículo de matemática do ensino básico, encontram-se os conteúdos de Geometria Euclidiana Plana, Espacial e Geometria Analítica, sendo que a primeira tem um enfoque grande desde o ensino fundamental. Desde cedo todos estudam as noções iniciais da geometria (ponto, reta, etc), estudam as principais figuras geométricas, em se tratando de triângulo por exemplo, se aprende congruência de triângulos, pontos notáveis, semelhança de triângulos, relações métricas e até trigonométricas dos triângulos.

O problema é que todos os conceitos geométricos são construídos sob a compreensão da Geometria Euclidiana Plana, sem imaginar que podem existir outras geometrias. A consequência disto é que, sendo a única trabalhada, é natural que ela seja inconscientemente rotulada como única e universal. Isto acaba influenciando na construção equivocada de alguns conceitos. Por exemplo, desde o ensino fundamental se aprende que duas retas são paralelas quando elas estão em um mesmo plano e não se intersectam, no entanto se constrói uma ideia de retas paralelas que é a Euclidiana, tomando estas retas como sendo equidistantes. Como aceitar que, em outros ambientes, retas paralelas possuem no máximo dois pares de pontos equidistantes? Quebrar certos paradigmas talvez seja uma tarefa muito árdua. Esse inclusive foi um dos principais problemas no surgimento das Geometrias não-Euclidianas. Foram mais de dois milênios para aceitar ideias que contrariassem a noção intuitiva de Geometria. Saccheri constrói toda uma teoria, desenvolve diversas propriedades relativas à Geometria Hiperbólica, porém não consegue admitir conceitos que desconstruísse a sua noção euclidiana da geometria. Para ele, essas propriedades eram "repugnantes à natureza da linha reta".

Uma importância da aplicação de outras geometrias no ensino básico está relacionado com a desconstrução da ideia de que a Geometria Euclidiana Plana é a única possível. É preciso que fique claro para os alunos que existem outras geometrias, como e de onde elas vieram, e que uma outra geometria pode ser mais adaptável a determinada situação ou realidade. É importante incentivar a abstração dentro de uma outra geometria que não seja a Euclidiana.

Entendendo a necessidade de se conhecer outras geometrias, esse trabalho apresenta de uma maneira compreensível à maturidade e experiência dos alunos do ensino médio, as Geometrias Não-Euclidianas, fazendo um apanhado histórico para mostrar em que contexto as novas geometrias surgiram, mostrando algumas das tentativas de demonstração do quinto postulado de Euclides, descrevendo o surgimento das novas geometrias, e, por fim, apresentando alguns de seus principais resultados.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste primeiro capítulo será feita uma breve apresentação do trabalho de Euclides, no que se refere ao Livro 1, dos *Elementos*, bem como um estudo da *Geometria Absoluta*, formulada sem o uso do Quinto Postulado, de modo que esta compõe tanto a *Geometria Euclidiana* como a *Geometria Hiperbólica*.

### 1.1 Os Elementos de Euclides

Euclides de Alexandria, provavelmente discípulo de Platão, foi mestre e escritor. Pouco se sabe sobre sua trajetória de vida e acredita-se que ele seja de origem grega. Parte das informações sobre Euclides e a geometria grega encontra-se em *Comentários sobre o Livro I dos Elementos de Euclides* de Proclus (410 - 485), um autor que viveu mais de 700 anos depois de Euclides. Cerca de 300 anos antes da era cristã, Euclides fora convidado por Ptolomeu I (sucessor de Alexandre, o Grande) a lecionar Matemática no Museu <sup>1</sup> instituído na cidade de Alexandria, no Egito.

Euclides de Alexandria é conhecido como o Pai da Geometria. Embora conhecimentos geométricos não triviais já fossem dominados no Egito e na Mesopotâmia mais de 2 mil anos antes de Cristo, na forma como se conhece hoje, seu ponto inicial pode ser estabelecido com Euclides.

Em Alexandria, Euclides sistematizou o conhecimento matemático da época, na obra chamada *Elementos*. Segundo ÁVILA ([1], p. 2) "não se sabe se Euclides escreveu os *Elementos* para uso no ensino, ou apenas para reunir o conhecimento matemático da época". Todavia, sua obra serviu de manual para o estudo de Geometria durante dois mil anos e exerce influência, até hoje, no âmbito escolar.

A obra de Euclides é composta de treze livros ou capítulos que, além de incluir toda a matemática da época, traz, como uma das suas principais características, a sua

---

<sup>1</sup>Lugar destinado para o estudo das ciências e da arte, equivalente às universidades de hoje.

estrutura axiomática. Euclides e seus predecessores já reconheciam que nem toda teoria era passível de demonstração. As afirmações aceitas sem a necessidade de demonstração são os *postulados* ou *axiomas*. Euclides apresentou a matemática como ciência dedutiva, onde cada afirmação deve ser provada a partir de outras afirmações mais simples e assim sucessivamente, de modo que essa cadeia se origina nos conceitos iniciais e nos postulados.

A tabela a seguir descreve os conteúdos abordados em cada um dos livros:

Livro I	Geometria Plana - Propriedades dos triângulos, teoria das paralelas e figuras equivalentes
Livro II	Álgebra Geométrica
Livro III	Geometria do Círculo
Livro IV	Polígonos Regulares
Livro V	Teoria das Proporções
Livro VI	Tales e figuras semelhantes
Livro VII	Teoria dos Números
Livro VIII	Teoria dos Números
Livro IX	Teoria dos Números
Livro X	Números Incomensuráveis
Livro XI	Geometria Espacial de Posição
Livro XII	Áreas e volumes
Livro XIII	Poliedros regulares

Tabela 1.1: Conteúdos de cada Livro

Quando se fala nos *Elementos* de Euclides pensa-se logo em geometria, mas há muito de aritmética e álgebra em grande parte dos livros da obra. Porém, o foco deste trabalho refere-se à parte dedicada à geometria plana, mais precisamente o conteúdo do Livro I.

No Livro I dos *Elementos* de Euclides, inicia-se o estudo da geometria plana, hoje conhecida como *Geometria Euclidiana Plana* em sua homenagem. O caráter lógico e formal de Euclides, organizou e sistematizou a geometria, estabelecendo os termos primitivos, postulados e teoremas.

Inicialmente são feitas 23 definições dos objetos geométricos cujas propriedades deseja-se estudar. Dentre elas, encontram-se as definições de ponto, reta, círculo, triângulo, retas paralelas, entre outras. A maior parte dessas definições é suficientemente satisfatória, porém uma atenção especial deve ser dada para a vigésima terceira definição, por que vai desempenhar um papel importante em toda a discussão proposta a partir daqui, trata-se da definição de retas paralelas:

*Retas paralelas são retas que estão no mesmo plano e prolongadas indefinidamente em ambas as direções, não se encontram.*

Segundo BARBOSA ([2], p. 1) "os axiomas de Euclides foram apresentados em dois grupos: as noções comuns <sup>2</sup> e os postulados.

Das noções comuns pode-se destacar as seguintes:

- (a) Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais;
- (b) Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais;
- (c) Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;
- (d) Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra;
- (e) O todo é maior que a parte.

Os postulados eram:

- (I) Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos;
- (II) Pode-se continuar qualquer reta finita continuamente em uma reta;
- (III) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e qualquer raio;
- (IV) Todos os ângulos retos são iguais;
- (V) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos. (Ver Figura 1.1)

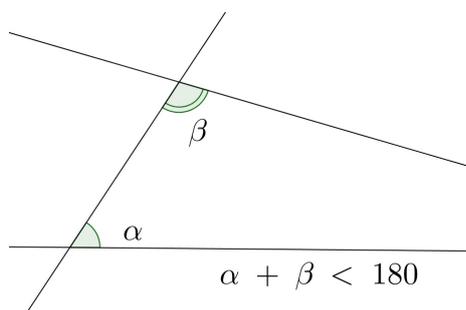


Figura 1.1

A forma como Euclides enunciou o V postulado foi motivo de muita polêmica durante séculos. Para muitos estudiosos neste enunciado faltava simplicidade e clareza,

---

<sup>2</sup>Euclides chamou as noções comuns de Axiomas. Os *Elementos* faz uma distinção sutil entre os termos Axioma e Postulado. No livro I, por exemplo, os axiomas referem-se às noções gerais, enquanto os postulados dizem respeito ao que é peculiar à geometria

o que acabava descaracterizando-o como postulado. A partir dessa avaliação surge a suspeita de que esta afirmação poderia não se tratar necessariamente de um postulado, mas sim de uma proposição que deveria ser provada a partir dos postulados anteriores.

Inicia-se uma empreitada que duraria por volta de 2 milênios na busca da demonstração do V Postulado. Algumas destas tentativas de demonstração serão tratadas no próximo capítulo.

A impossibilidade de demonstração do último postulado de Euclides juntamente com sua redação complexa levaram alguns matemáticos a substituí-lo por outros enunciados de caráter mais simples e evidentes. Tal prática mostrou que existem outras proposições equivalentes, ou seja, que colocadas no lugar do quinto postulado, não alteram o caráter formal da Geometria de Euclides.

Dentre os enunciados equivalentes a esse postulado, o mais famoso é formulado pelo matemático e físico escocês John Playfair (1748 – 1819), chamado atualmente de postulado das paralelas:

**Axioma de Playfair:** *Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.*

Para MANFREDO ([3], p. 26), "o próprio Euclides deve ter considerado o Postulado V como pouco evidente". Ainda segundo o professor Manfredo, isso é confirmado pelo fato de ele ter retardado o quanto possível o uso deste postulado.

No Livro I encontram-se 48 proposições demonstráveis, divididas em três partes distintas: a primeira, composta pelas 26 primeiras proposições trata quase exclusivamente da teoria elementar dos triângulos; a segunda, da proposição 27 à 34, trata da teoria das paralelas; a partir daí até a proposição 48 estuda das relações entre áreas de triângulos e quadriláteros até o teorema de Pitágoras. Conforme a Tabela 1.2 <sup>3</sup> as 28 primeiras proposições, bem como a proposição 31 do Livro I não dependem do V Postulado.

A geometria formulada a partir apenas dos quatro primeiros postulados constituiu a base de fundamentos utilizada na busca pela demonstração do último postulado de Euclides. Porém, essa demonstração jamais fora alcançada. Além disto, a Geometria Euclidiana não seria completamente formulada sem o uso do quinto postulado, tendo em vista que boa parte dessa geometria se sustenta a partir do postulado em questão.

No entanto, foi durante as várias tentativas de demonstração do quinto postulado, em particular aquelas sob o método de redução ao absurdo, que se descobriu que a substituição deste postulado por um outro não equivalente a ele, deveria acarretar na construção de uma Geometria diferente da de Euclides, bem formuladas e com carac-

---

<sup>3</sup>Dados extraídos de tabela similar do artigo *De Euclides às Geometrias não euclidianas* [4]

Proposição	Pré-requisitos		
	Definição	Postulados	Proposição
1	15, 20	1, 3	
2	15, 20	1, 2, 3	1
3	15	3	2
4			
5		1, 2	3, 4
6		1	3, 4
7		1	5
8			7
9	20	1	1, 3, 8
10	20		1, 4, 9
11	10, 20	1	1, 2, 3, 8
12	10, 15	1, 3	8, 10
13	10		11
14		2, 4	13
15		4	13
16		1, 2	2, 3, 4, 10, 15
17		2	13, 16
18		1	3, 5, 16
19			5, 18
20		1, 2	2, 5, 19
21		2	16, 20
22	15	1, 3	2, 3, 20
23		1	8, 22
24		1	2, 4, 5, 19, 23

Proposição	Pré-requisitos		
	Definição	Postulados	Proposição
25			4, 24
26		1	3, 4, 16
27	23	2	16
28		4	13, 15, 27
29	23	2, 5	13, 15
30			27, 29
31		1, 2	23, 24
32		2	13, 29, 31
33		1	4, 27, 29
34		1	4, 26, 29
35			4, 29, 34
36		1	33, 34, 35
37		2	31, 34, 35
38		2	31, 34, 36
39		1	31, 37
40		1	31, 38
41		1	34, 37
42		1	10, 23, 31, 38, 41
43		1	34
44		1, 2, 5	15, 29, 30, 31, 42, 43
45		1	14, 29, 30, 33, 34, 42, 44
46	22	4	2, 3, 11, 29, 31, 34
47		1, 4	4, 14, 30, 31, 41, 46
48		1	2, 3, 8, 11, 47

Tabela 1.2: Pré-requisitos para cada Proposição do Livro I

terísticas próprias. Dentro deste raciocínio, surgiu inicialmente a geometria que hoje é conhecida como *Geometria Hiperbólica*, a primeira das *Geometrias Não-Euclidianas*.

Assim, os quatro primeiros postulados e a Geometria derivada deles, que aqui será chamada de *Geometria Absoluta*, é comum tanto na Geometria Euclidiana como na Geometria Hiperbólica. O que diferenciam essas Geometrias é a forma como se enuncia um quinto postulado.

Um sistema axiomático deve ser bem escolhido, a fim de que todas as afirmações a respeito de uma teoria possa ser provada. Mesmo os postulados de Euclides não são suficientes para demonstrar todos os resultados da geometria plana. Nos Elementos de Euclides existem lacunas que não são possíveis preenchê-las somente com o conteúdo dos Elementos. Isso talvez acontecera porque Euclides utilizava-se de fatos que eram considerados na época inteiramente óbvios e que ele não se preocupou em expor. Segundo Manfredo ([3], p. 28) "foi precisamente a análise do Postulado das paralelas, e o fracasso de todas as tentativas de demonstrá-lo, que forçou lentamente uma nova concepção da Matemática em que os elementos de uma teoria devem ser cuidadosamente explicitados".

A primeira axiomatização completa da Geometria Euclidiana Plana foi apresentada pelo alemão David Hilbert (1862 - 1943) em 1898. Os resultados obtidos por Euclides permaneciam válidos, porém, dentro de um sistema axiomático bem definido.

## 1.2 A Geometria Absoluta

No sistema axiomático de Euclides, chama-se de *Geometria Absoluta* ao estudo das propriedades que utilizam apenas os quatro primeiros postulados de Euclides, isto é, que não dependem do Postulado V.

Nesta seção será estudada a parte da geometria que não depende do Postulado das Paralelas, mas que será de fundamental importância nas conclusões abordadas neste trabalho. No entanto, será abordada a Geometria Absoluta, dentro de um sistema axiomático mais completo (como o de Hilbert) tendo como principal referência o livro *Geometria Euclidiana Plana* de João Marques Lucas Barbosa [5].

Dentre as proposições trabalhadas aqui, incluem algumas que coincidem com as proposições de Euclides provadas por ele sem o uso do V postulado. As deduções do próximo capítulo utilizar-se-ão dessas, bem como de outras nas mesmas condições e que não tivera sido abordado por Euclides.

Serão feitas algumas definições importantes. Porém, inicialmente, deve ser considerado os termos como ponto, reta, pertencer a, está entre, sem precisar defini-los, chamados de primitivos ou elementares.

Os axiomas que substituem os quatro primeiros postulados de Euclides estão divididos em 4 grupos: Axiomas de Incidência; de Ordem; de Medição; e de Congruência <sup>4</sup>. Inicialmente será apresentado os axiomas de incidência.

**Axioma de Incidência 1.** Qualquer que seja a reta existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à reta.

**Axioma de Incidência 2.** Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

A seguir os axiomas de ordem serão explicitados. Aqui a noção de que um ponto localiza-se entre dois outros deve ser entendida como uma relação entre pontos de uma mesma reta.

**Axioma de Ordem 1.** Dados três pontos de uma reta, um, e apenas um deles, localiza-se entre os outros dois.

**Axioma de Ordem 2.** Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$ , sempre existem: um ponto  $C$  entre  $A$  e  $B$  e o ponto  $D$  tal que  $B$  está entre  $A$  e  $D$ .

---

<sup>4</sup>Estes, juntamente com o Postulado das Paralelas, formam o sistema axiomático da Geometria Euclidiana Plana

**Definição 1.2.1.** O conjunto constituído por dois pontos  $A$  e  $B$  e por todos os pontos que se encontram entre eles é chamado de segmento de reta. Os pontos  $A$  e  $B$  são os extremos ou extremidades do segmento. Esse segmento será representado por  $AB$  ou  $BA$ .

**Definição 1.2.2.** Se  $A$  e  $B$  são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos de  $AB$  e por todos os pontos  $C$  tais que  $B$  encontra-se entre  $A$  e  $C$  é chamado de semi-reta de origem em  $A$  contendo o ponto  $B$  e é representado por  $S_{AB}$ . O ponto  $A$  é a origem da semi-reta  $S_{AB}$ .

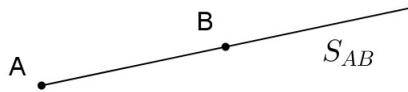


Figura 1.2: Semi-reta  $S_{AB}$

Dois pontos  $A$  e  $B$  estão em um mesmo lado de uma reta  $m$  quando o segmento  $AB$  não a intersecta. O conjunto constituído por uma reta  $m$  e por todos os pontos de um mesmo lado de  $m$  que um ponto  $A$  fora de  $m$  dado é chamado de *semiplano determinado por  $m$  e contendo  $A$*  e será representado por  $P_{mA}$ .

**Axioma de Ordem 3.** Uma reta  $m$  determina exatamente dois semiplanos distintos cuja interseção é a própria reta  $m$ .

**Axioma de Ordem 4.** (Axioma de Pasch) Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos não colineares e seja  $m$  uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se  $m$  corta o segmento  $AB$ , então ela também corta um dos segmentos:  $AC$  ou  $CB$ .

Os axiomas de medição podem ser divididos em dois subgrupos: medição de segmentos e medição de ângulos. Estes axiomas regem como se mede os segmentos e os ângulos.

**Axioma de Medição 1.** A todo segmento corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, as extremidades coincidem.

Este número quantifica a distância entre as extremidades do segmento, ou pode ser visto também como o comprimento do segmento  $AB$ , que será representado por  $\overline{AB}$ .

**Axioma de Medição 2.** Os pontos de uma reta podem ser sempre colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre estes números meça a distância entre os pontos correspondentes.

Fixada uma correspondência, o número que corresponde a um ponto da reta é denominado coordenada daquele ponto. Portanto, se  $a$  e  $b$  são as coordenadas dos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, então  $\overline{AB} = |b - a|$ .

**Axioma de Medição 3.** Se o ponto  $C$  está entre os pontos  $A$  e  $B$  então  $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$

**Definição 1.2.3.** Chama-se de ponto médio do segmento  $AB$  um ponto  $M$  deste segmento de modo que  $\overline{AM} = \overline{MB}$ .

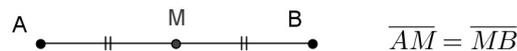


Figura 1.3:  $M$  é ponto médio de  $AB$

**Definição 1.2.4.** Seja  $A$  um ponto e  $r$  um número real positivo. O círculo de centro  $A$  e raio  $r$  é o conjunto constituído por todos os pontos  $B$  do plano tais que  $\overline{AB} = r$

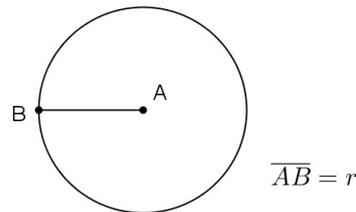


Figura 1.4: Círculo de centro  $A$  e raio  $r$

**Definição 1.2.5.** Ângulo é a figura formada por duas semi-retas com a mesma origem. As semi-retas são chamadas de lados do ângulo e a origem comum, é chamada de vértice do ângulo.

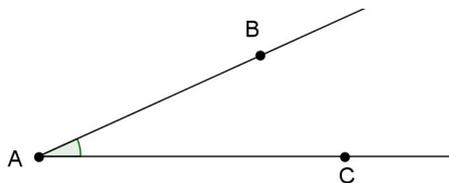


Figura 1.5: Ângulo  $B\hat{A}C$

O ângulo cujos lados são as semi-retas  $S_{AB}$  e  $S_{AC}$  é representado por  $B\hat{A}C$  ou  $C\hat{A}B$  ou, quando não houver dúvida de que ângulo se trata, simplesmente por  $\hat{A}$

Um ângulo formado por duas semi-retas distintas de uma mesma reta é chamado de ângulo raso.

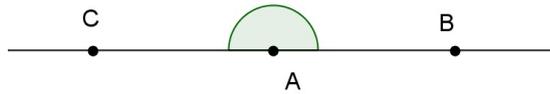


Figura 1.6:  $\widehat{BAC}$  é um ângulo raso

**Axioma de Medição 4.** A todo ângulo corresponde um único número real maior ou igual a zero. Este número é zero se, e somente se, os lados do ângulo coincidem.

Uma semi-reta divide um semiplano se ela estiver contida no semiplano e a sua origem for um ponto da reta que o determina.

**Axioma de Medição 5.** Existe uma bijeção entre as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano e os números entre zero e 180, de modo que a diferença entre os números é a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes.

Este enunciado quantifica o ângulo utilizando a unidade de medida *graus*, de modo que um quando os lados do ângulo coincidem o ângulo mede zero, e o ângulo raso mede  $180^\circ$ .

Sejam  $S_{OA}$ ,  $S_{OB}$  e  $S_{OC}$  semi-retas de mesma origem.  $S_{OC}$  divide o ângulo  $\widehat{AOB}$  se o segmento  $AB$  intersectar  $S_{OC}$ .

**Axioma de Medição 6.** Se uma semi-reta  $S_{OC}$  divide um ângulo  $\widehat{AOB}$ , então  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$ .

Se uma semi-reta  $S_{OC}$  divide o ângulo  $\widehat{AOB}$  de tal modo que  $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$ , então  $S_{OC}$  é dito ser a *bissetriz* do ângulo  $\widehat{AOB}$ .

**Definição 1.2.6.** Dois ângulos são ditos *suplementares* se a soma de suas medidas é  $180^\circ$ . O *suplemento* de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

Quando duas retas distintas se intersectam, formam quatro ângulos, como indicado na figura abaixo.

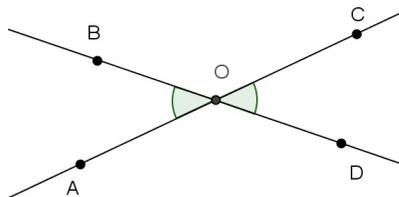


Figura 1.7:  $\widehat{AOB}$  e  $\widehat{COD}$  são ângulos opostos pelo vértice

Os ângulos  $A\hat{O}B$  e  $C\hat{O}D$  (bem como  $A\hat{O}D$  e  $B\hat{O}C$ ) são ditos *opostos pelo vértice*. Note que, como ângulos opostos pelo vértice possuem o mesmo suplemento, então eles devem ter mesma medida.

**Definição 1.2.7.** Um ângulo cuja medida é  $90^\circ$  é chamado de ângulo reto. Se duas retas se intersectam formando um ângulo reto, então elas são chamadas de retas perpendiculares. Se a soma das medidas de dois ângulos é  $90^\circ$ , estes ângulos são ditos complementares. Um ângulo é agudo se mede menos de  $90^\circ$  e é obtusos se mede mais de  $90^\circ$ .

**Teorema 1.2.1.** Por qualquer ponto de uma reta passa uma única perpendicular a esta reta.

*Demonstração.* Considere uma reta  $r$  e um ponto  $P$  sobre esta reta. Deve ser mostrado que passa uma única reta perpendicular à  $r$  passando por  $P$ .

(*Existência*) A existência desta reta é garantida pelo Axioma de Medição 5.

(*Unicidade*) Resta agora mostrar que esta reta é única. Seja então as retas  $s$  e  $t$  perpendiculares à  $r$  passando por  $P$ . Assim em um mesmo semiplano as retas  $s$  e  $t$  formam um ângulo  $\alpha$  ao mesmo tempo que são perpendiculares à reta  $r$ .

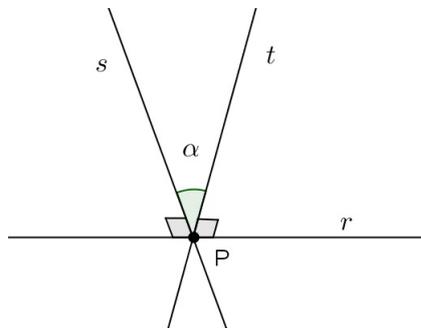


Figura 1.8

Como os três ângulos devem formar um ângulo raso,  $\alpha = 0$  e, portanto, as retas  $s$  e  $t$  coincidem.

□

O próximo axioma será referente à congruência de triângulos. Antes de enuncia-lo deve ser definido congruência de segmentos, de ângulos e de triângulos.

**Definição 1.2.8.** Dois segmentos são ditos congruentes quando possuem a mesma medida. Dois ângulos são congruentes quando eles possuem mesma medida.

Quando dois segmentos  $AB$  e  $CD$  tiverem mesma medida, será representado por  $AB = CD$ . Do mesmo modo, será escrito  $\hat{A} = \hat{B}$  quando os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  forem congruentes.

**Definição 1.2.9.** *Dois triângulos são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seu vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Assim, se os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  são congruentes, e se a seguinte correspondência

$$A \longleftrightarrow E$$

$$B \longleftrightarrow F$$

$$C \longleftrightarrow G$$

defina a congruência, então valem as seguintes relações:

- Entre os lados:  $AB = EF$ ,  $BC = FG$  e  $CA = GE$
- Entre os ângulos:  $\hat{A} = \hat{E}$ ,  $\hat{B} = \hat{F}$  e  $\hat{C} = \hat{G}$

Aqui será utilizada a notação  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$  para representar a congruência entre os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  com a correspondência acima.

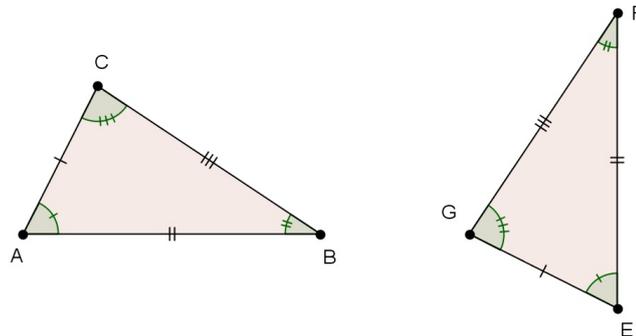


Figura 1.9:  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$

Dêvem ser estudadas agora, as hipóteses mínimas que se deve considerar para garantir que dois triângulos sejam congruentes. Para isto, serão enunciados os chamados *casos de congruência*.

Para provar o 1º caso de congruência entre dois triângulos, Euclides movimentava um dos triângulos de forma a fazê-lo coincidir com o outro. A grande questão é que as demonstrações por superposição não eram rigorosas e Euclides acabava usando deslocamentos não definidos. Nenhum dos postulados permitia tal movimento.

Segundo BONGIOVANNI ([4], p.43) "Faltava, portanto um postulado que garantisse que as propriedades das figuras (comprimentos e ângulos) permanecessem inalteradas durante seu deslocamento". Em 1898, Hilbert incluiu o primeiro caso de congruência na sua lista de axiomas.

**Axioma de Congruência 1. (1º caso de congruência de triângulos)** *Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$ , se  $AB = EF$ ,  $AC = EG$  e  $\hat{A} = \hat{E}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$ .*

Esse é o caso de congruência de triângulos L-A-L (LADO-ÂNGULO-LADO).

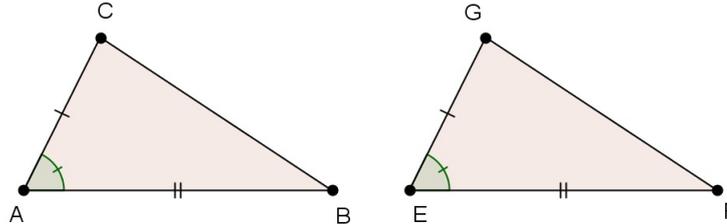


Figura 1.10: 1º caso de congruência de triângulos / L-A-L

Os demais casos de congruência triângulo são decorrentes deste 1º caso.

**Teorema 1.2.2 (2º caso de congruência de triângulos).** *Dados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$ , se  $AB = EF$ ,  $\hat{A} = \hat{E}$  e  $\hat{B} = \hat{F}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$ . Esse é o caso de congruência de triângulos A-L-A (ÂNGULO-LADO-ÂNGULO)*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  dois triângulos, tais que  $AB = EF$ ,  $\hat{A} = \hat{E}$  e  $\hat{B} = \hat{F}$ . Considere o ponto  $D$  sobre a semi-reta  $S_{AC}$  de modo que  $AD = EG$ .

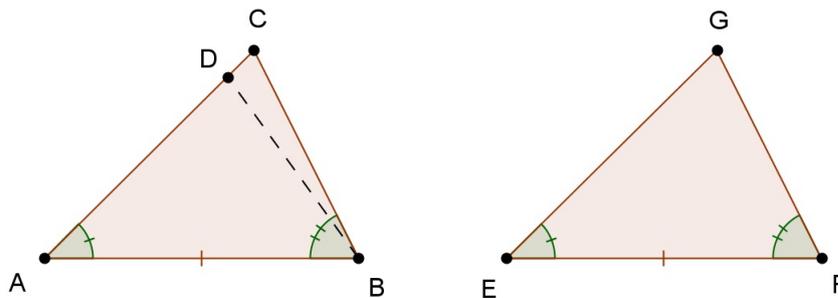


Figura 1.11

Como  $D\hat{A}B = G\hat{E}F$  e  $AB = EF$ , segue pelo 1º caso de congruência que  $\triangle ABD \equiv \triangle EFG$ . Logo,  $A\hat{B}D = E\hat{F}G = A\hat{B}C$ . Portanto os pontos  $C$  e  $D$  coincidem. □

**Definição 1.2.10.** *Um triângulo é dito isósceles, se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais e o terceiro lado é a base.*

**Proposição 1.2.1.** *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  um triângulo em que  $AB = AC$ . Basta comparar o triângulo dado com ele mesmo, estabelecendo a seguinte correspondência:  $A \longleftrightarrow A$ ,  $B \longleftrightarrow C$  e  $C \longleftrightarrow B$ .

Como  $AC = AB$ ,  $\hat{A} = \hat{A}$  e  $AB = AC$ , segue, pelo 1º caso de congruência que essa correspondência define uma congruência. Consequentemente,  $\hat{B} = \hat{C}$

□

**Proposição 1.2.2.** *Se um triângulo  $\triangle ABC$  tem dois ângulos congruentes, então o triângulo é isósceles.*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  um triângulo em que  $\hat{B} = \hat{C}$ . Basta estabelecer a correspondência da prova da proposição anterior e usar o 2º caso de congruência.

□

**Teorema 1.2.3 (3º caso de congruência de triângulos).** *Se dois triângulos têm os três lados correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes. Esse é o caso de congruência de triângulos L-L-L (LADO-LADO-LADO)*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  dois triângulos, tais que  $AB = EF$ ,  $BC = FG$  e  $CA = GE$ . Inicialmente, construa, a partir da semi-reta  $S_{AB}$  e no semiplano oposto ao que contém o ponto  $C$ , um ângulo congruente com o ângulo  $\hat{E}$ . No lado deste ângulo que não contém o ponto  $B$ , marque o ponto  $D$  tal que  $AD = EG$  e ligue  $D$  a  $B$ .

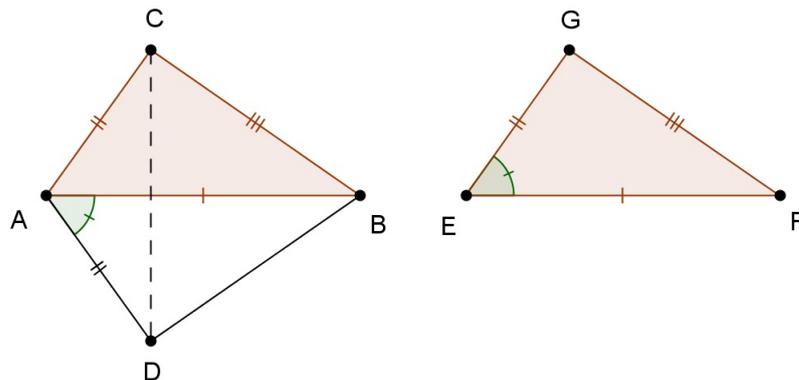


Figura 1.12

Como  $AB = EF$ , pelo 1º caso de congruência,  $\triangle ABD \equiv \triangle EFG$ . Resta mostrar agora que  $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$ . Para isso, trace  $CD$ . Como  $AD = EG = AC$  e  $BD = FG = BC$ , segue que os triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle BDC$  são isósceles, ambos com base  $CD$ . Assim  $\hat{ADC} = \hat{ACD}$  e  $\hat{BDC} = \hat{BCD}$ . Daí, tem-se que  $\hat{ADB} = \hat{ACB}$  e, como  $AD = AC$  e  $BD = BC$ , pelo 1º caso de congruência,  $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$ . Portanto,  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$

□

**Definição 1.2.11.** Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado de triângulo retângulo. O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa e os outros dois são os catetos.

**Teorema 1.2.4** (Congruência de Triângulos Retângulos). *Sejam  $\Delta ABC$  e  $\Delta A'B'C'$  dois triângulos retângulos cujos ângulos retos são  $\hat{C}$  e  $\hat{C}'$ . Se alguma das condições abaixo acontecer então os dois triângulos são congruentes:*

1.  $BC = B'C'$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,
2.  $AB = A'B'$  e  $BC = B'C'$ , e
3.  $AB = A'B'$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,

**Definição 1.2.12.** Dado o triângulo  $\Delta ABC$ , os ângulos  $\hat{ABC}$ ,  $\hat{BCA}$  e  $\hat{CAB}$  são os ângulos internos ou simplesmente os ângulos do triângulo. Seus suplementares são os ângulos externos do triângulo  $\Delta ABC$ .

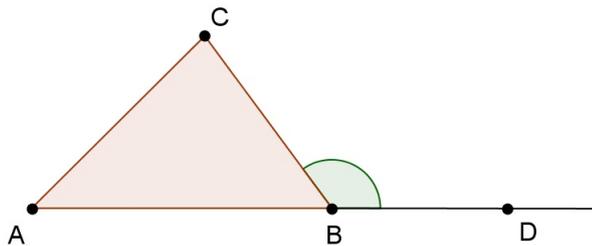


Figura 1.13:  $D\hat{B}C$  é ângulo um externo de  $\Delta ABC$

**Teorema 1.2.5** (Teorema do Ângulo Externo). *Todo ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

*Demonstração.* Seja o triângulo  $\Delta ABC$  e o ponto  $D$  sobre a semi-reta  $S_{AB}$  de modo que  $B$  está entre  $A$  e  $D$ . Deve ser mostrado que  $D\hat{B}C > \hat{A}$  e  $D\hat{B}C > \hat{C}$ .

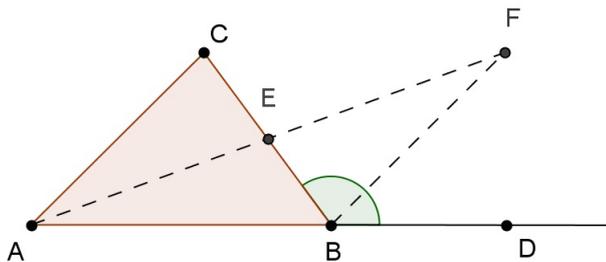


Figura 1.14

Inicialmente será provada esta última desigualdade. Para isto, marque o ponto médio  $E$  do lado  $BC$ . Na semi-reta  $S_{AE}$ , marque um ponto  $F$  tal que  $AE = EF$  e ligue  $BF$ .

Como  $BE = CE$  e  $B\hat{E}F = C\hat{E}A$  (por serem opostos pelo vértice), segue-se que  $\triangle BEF \equiv \triangle CEA$ . Consequentemente,  $\hat{C} = E\hat{B}F$ . Como a semi-reta  $S_{BF}$  divide o ângulo  $D\hat{B}C$ , então  $E\hat{B}F < D\hat{B}C$ . Portanto  $\hat{C} < D\hat{B}C$ .

Analogamente pode-se tomar o ponto  $D$  sobre a semi-reta  $S_{CB}$  de modo que  $B$  está entre  $C$  e  $D$  e mostrar que  $\hat{A} < D\hat{B}C$ .

□

**Corolário 1.2.1.** *Por um ponto  $A$  fora de uma reta  $r$  passa uma única reta perpendicular à reta dada.*

Neste corolário, considerando um ponto  $A$  fora de uma reta  $r$ , a perpendicular à  $r$  passando por  $A$  intersecta esta mesma reta  $r$  num ponto chamado de *pé da perpendicular* baixada de  $A$  sobre  $r$ .

Considere duas retas  $r$  e  $s$  cortadas por uma reta transversal  $t$ , respectivamente nos pontos  $B$  e  $F$ . Considere ainda os pontos  $A$  e  $C$  em  $r$  e os pontos  $E$  e  $G$  em  $s$  de modo que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , e  $F$  está entre  $E$  e  $G$ . Os ângulos  $A\hat{B}F$ ,  $C\hat{B}F$ ,  $E\hat{F}B$  e  $G\hat{F}B$  são chamados *ângulos interiores*. Os pares de ângulos  $(A\hat{B}F; G\hat{F}B)$  e  $(C\hat{B}F; E\hat{F}B)$  são chamados de *ângulos interiores alternados*.

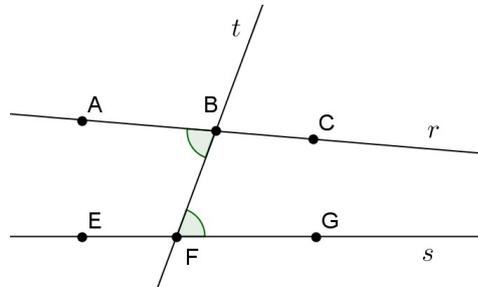


Figura 1.15:  $A\hat{B}F$  e  $G\hat{F}B$  são ângulos interiores alternados

**Definição 1.2.13.** *Duas retas que não se intersectam são ditas paralelas.*

**Teorema 1.2.6** (Teorema do ângulo interior alternado). *Se duas retas  $r$  e  $s$  são cortadas por uma reta transversal  $t$  formando um par de ângulos interiores alternados congruentes, então as duas retas são paralelas.*

*Demonstração.* Sejam  $r$  e  $s$  duas retas cortadas por uma reta transversal  $t$ , respectivamente nos pontos  $B$  e  $F$  de modo que os ângulos interiores alternados sejam congruentes. Desse modo, tomando os pontos  $A$  e  $C$  em  $r$  e os pontos  $E$  e  $G$  em  $s$  tais que  $B$  está entre  $A$  e  $C$ , e  $F$  está entre  $E$  e  $G$ , tem-se que  $A\hat{B}F = G\hat{F}B$  (e  $C\hat{B}F = E\hat{F}B$ ).

Suponha por absurdo que as retas  $r$  e  $s$  não sejam paralelas e se interceptem em um ponto  $D$  no mesmo semiplano que  $C$  e  $G$  em relação à reta  $t$ .

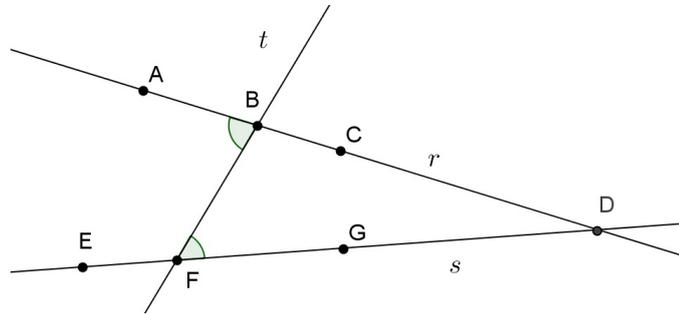


Figura 1.16

Assim será formado o triângulo  $\triangle BFD$  de modo que  $\widehat{ABF}$  é um ângulo externo não adjacente ao ângulo interno  $\widehat{BFD}$ . Pelo teorema do ângulo externo (Teorema 1.2.5),  $\widehat{ABF} > \widehat{BFD} = \widehat{BFG}$ , contrariando a hipótese. Portanto  $r$  e  $s$  são paralelas.  $\square$

**Corolário 1.2.2.** *Se duas retas  $r$  e  $s$  distintas são perpendiculares a uma terceira, então  $r$  e  $s$  são paralelas.*

**Corolário 1.2.3.** *Por um ponto  $P$  fora de uma reta  $r$  passa pelo menos uma reta paralela à reta  $r$  dada.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 1.2.1 existe uma única perpendicular  $t$  a  $r$  passando por  $P$ . Da mesma forma, pelo Teorema 1.2.1 existe uma única perpendicular  $s$  a  $t$ , passando por  $P$ . Portanto, pelo Corolário 1.2.2, segue que  $s$  é uma reta paralela a  $r$  passando por  $P$ .  $\square$

**Proposição 1.2.3 (4º Caso de Congruência de Triângulos).** *Sejam os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$ . Se  $AC = DF$ ,  $\hat{A} = \hat{D}$  e  $\hat{B} = \hat{E}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ . Este é o caso L-A-Ao (LADO - ÂNGULO - ÂNGULO OPOSTO)*

**Proposição 1.2.4.** *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então seus ângulos opostos também não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

*Demonstração.* A primeira parte da proposição é consequência imediata das proposições 1.2.1 e 1.2.2. Para provar que o maior ângulo é oposto ao maior lado, considere um triângulo  $\triangle ABC$  onde  $AC < CB$ . Deve-se mostrar então que  $\hat{A} > \hat{B}$ .

Marque, sobre o segmento  $BC$  o ponto  $D$  tal que  $CD = AC$ . Note que a semi-reta  $S_{AD}$  divide o ângulo  $\widehat{BAC}$ . Isto implica que

$$C\hat{A}B > C\hat{A}D.$$

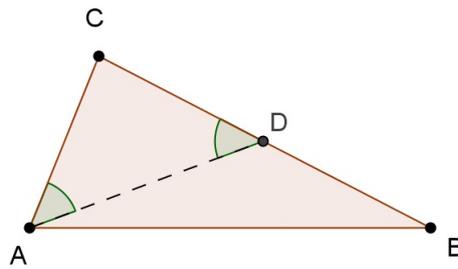


Figura 1.17

Como  $CD = AC$ , o triângulo  $\triangle ADC$  é isósceles e

$$\hat{C}AD = \hat{C}DA.$$

Além disto, o ângulo  $\hat{C}DA$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle ABD$  não adjacente ao ângulo  $\hat{A}$ . Daí

$$\hat{C}DA > \hat{D}BA = \hat{C}BA.$$

Portanto

$$\hat{C}AB > \hat{C}BA.$$

□

**Proposição 1.2.5.** *Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então seus lados opostos a esses ângulos também não são congruentes e o maior lado é oposto ao maior ângulo.*

*Demonstração.* Assim como na demonstração anterior, a primeira parte decorre imediatamente das proposições 1.2.1 e 1.2.2. Para provar a segunda parte, considere um triângulo  $\triangle ABC$  em que  $\hat{A} > \hat{B}$ . Deve-se mostrar que  $AC < BC$ .

Se  $AC = BC$ , o triângulo  $\triangle ABC$  seria isósceles e  $\hat{A} = \hat{B}$ , o que é falso.

Se  $AC > BC$ , da proposição anterior implicaria que  $\hat{A} < \hat{B}$ , contrariando ainda a hipótese.

Assim, resta apenas uma possibilidade:  $AC < BC$ .

□

**Proposição 1.2.6.** *Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  dois triângulos, onde  $AB = EF$  e  $AC = EG$ . Se os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{E}$  não são congruentes, então*

$$\hat{A} > \hat{E} \Rightarrow BC > FG.$$

*Demonstração.* Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  dois triângulos, onde  $AB = EF$  e  $AC = EG$  de modo que  $\hat{A} > \hat{E}$ . Deve ser mostrado que  $BC > FG$ . Para isto, suponha sem perda de generalidade que  $EG > EF$  ( $AC > AB$ ) e considere a semi-reta  $S_{ED}$  no mesmo semiplano

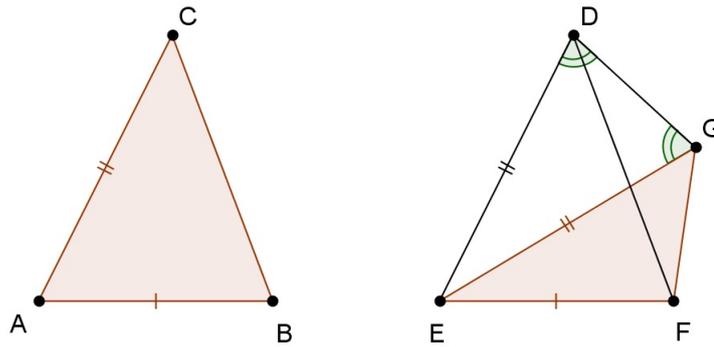


Figura 1.18

que o ponto  $G$ , determinado pela reta sobre  $EF$ , de modo que  $\widehat{F\hat{E}D} = \hat{A}$  e  $ED = EG = AC$ . Segue imediatamente pelo 1º caso de congruência que  $\triangle ABC \equiv \triangle EFD$ .

Inicialmente, deve ser visto que a semi-reta  $S_{DF}$  divide o ângulo  $\widehat{EDG}$ . Com efeito, se ocorre o contrário, ou seja, se  $S_{DG}$  divide  $\widehat{EDF}$ , considere o ponto  $P$ , interseção de  $S_{DG}$  com o segmento  $EF$ .

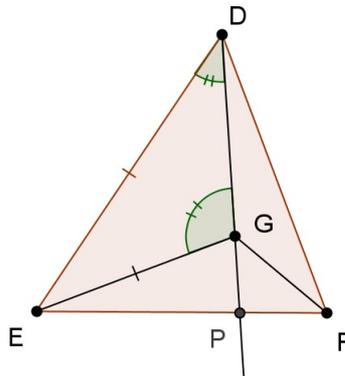


Figura 1.19

Assim, como  $\triangle EGD$  é isósceles,  $\widehat{EDG} = \widehat{EGD}$ . Mas  $\widehat{EGD}$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle GPE$  não adjacente a  $\widehat{GPE}$ . Portanto pelo teorema do ângulo externo (Teorema 1.2.5),  $\widehat{EGD} > \widehat{GPE} = \widehat{DPE}$ . Logo  $\widehat{EDP} > \widehat{DPE}$ , e pela proposição 1.2.5  $EP > ED$ . Porém isso é absurdo pois  $ED = EG > EF$ .

Agora, como  $\triangle EGD$  é isósceles e  $S_{DF}$  divide o ângulo  $\widehat{EDG}$ , segue que  $\widehat{EGD} = \widehat{EDG} > \widehat{GDF}$  (Ver Figura 1.18). Como a semi-reta  $S_{GE}$  divide o ângulo  $\widehat{FGD}$ , então  $\widehat{FGD} > \widehat{EGD}$ . Logo  $\widehat{FGD} > \widehat{GDF}$ , e portanto, pela proposição 1.2.5,  $FD > FG$ .

Para finalizar a prova, basta usar o fato de que  $\triangle ABC \equiv \triangle EFD$  e  $BC = FD$  e o resultado segue.

□

**Proposição 1.2.7.** *Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$  dois triângulos, onde  $AB = EF$  e  $AC = EG$ . Se os lados  $BC$  e  $FG$  não são congruentes, então*

$$BC > FG \Rightarrow \hat{A} > \hat{E}.$$

*Demonstração.* Sejam dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle EFG$ , onde  $AB = EF$  e  $AC = EG$  de modo que  $BC > FG$ . Deve ser provado que  $\hat{A} > \hat{E}$ .

Se  $\hat{A} = \hat{E}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$  e  $BC = FG$ , contrariando a hipótese. Se  $\hat{A} < \hat{E}$ , então, pela proposição anterior, tem-se que  $BC < FG$ , o que também contraria a hipótese. Portanto,  $\hat{A} > \hat{E}$ .

□

**Proposição 1.2.8.** *Seja  $C$  um ponto fora de uma reta uma reta  $r$ . Considere o ponto  $D$  pé da perpendicular baixada de  $C$  sobre  $r$  e os pontos  $A$  e  $B$  sobre  $r$  tais que  $D$  está entre  $A$  e  $B$ . Se  $\overline{AC} > \overline{BC}$ , então  $\overline{AD} > \overline{BD}$ .*

*Demonstração.* Considere a situação proposta, de modo que  $\overline{AC} > \overline{BC}$ . Aqui deve-se provar que  $\overline{AD} > \overline{BD}$ .

Se  $AD = BD$ , como  $\hat{ADC} = \hat{BDC} = 90^\circ$  e  $DC$  é lado comum, então  $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$  e, conseqüentemente,  $AC = BC$ , o que é falso.

Se  $\overline{AD} < \overline{BD}$ , tome sobre o segmento  $BD$  o ponto  $E$ , tal que  $AD = ED$  e ligue  $E$  a  $C$ .

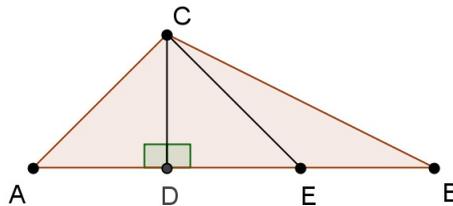


Figura 1.20

Como  $\hat{ADC} = \hat{EDC} = 90^\circ$  e  $DC$  é lado comum, então  $\triangle ADC \equiv \triangle EDC$ . Daí  $\hat{CAD} = \hat{CED}$ . Mas,  $\hat{CED}$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle EBC$  não adjacente ao ângulo  $\hat{EBC}$ , logo, pelo teorema do ângulo externo (Teorema 1.2.5),  $\hat{CED} > \hat{EBC}$ . Isto implica que  $\hat{CAB} > \hat{ABC}$ , e pela proposição 1.2.5,  $\overline{AC} < \overline{BC}$ , que é um absurdo. Portanto,  $\overline{AD} > \overline{BD}$ .

□

## Capítulo 2

# Tentativas de Prova do Quinto Postulado

No capítulo anterior foram observadas as razões para o ceticismo de geômetras, desde Euclides, com relação ao quinto postulado, não aceitando este como tal. A partir daí, numerosas e variadas foram as tentativas, ao longo da história, de demonstrar o quinto postulado como uma consequência das noções comuns e dos outros postulados euclidianos. Porém, explícita ou implicitamente, terminaram todas sem sucesso, até porque, como mais tarde se viria a provar: essa demonstração é impossível!

Dos matemáticos que se embrenharam nesta tarefa impossível, foram vários os que chegaram a acreditar (erradamente) que o tinham conseguido. Segundo MANFREDO ([3], p. 28),

”a maior parte das tentativas de demonstração do Postulado V admitia, mesmo que implicitamente, fatos que, ou eram equivalentes a ele, ou não podiam ser demonstrados usando apenas os outros quatro postulados. Por exemplo, Proclus (410 – 485 d.C) admitia que a distância entre as paralelas é limitada; Wallis (1616-1703) admitia que dado um triângulo existe um triângulo semelhante a ele com área arbitrária; Legendre (1752-1833) admitia que dado um ângulo e um ponto P no seu interior, é possível passar por P uma reta que encontra os dois lados do ângulo”.

Mas estas tentativas não foram em vão, mesmo que o objetivo principal não fora alcançado, os caminhos percorridos e descobertas feitas não devem ser ignorados. Naturalmente que foi através da busca que finalmente a verdadeira natureza e significado do V Postulado foram revelados. Por esta razão, é indispensável dar breves relatos de alguns dos inúmeros esforços para provar o quinto postulado.

## 2.1 As Tentativas Fracassadas

### 2.1.1 Ptolomeu

Dos escritos do filósofo, matemático e historiador, Proclus (410-485 d.C.) vieram comentários a respeito do trabalho de Ptolomeu. Segundo ele, Euclides viveu em Alexandria durante o reinado do primeiro Ptolomeu, ou Claudius Ptolemaeus, que era também geógrafo e astrônomo, e este, escreveu um livro sobre o quinto postulado de Euclides, onde era proposta uma das suas primeiras demonstrações. O livro (que não chegou até dias atuais) intitulava-se "Que linhas prolongadas de ângulos menores que dois ângulos retos encontram-se uma com a outra". O que Ptolomeu afirma no título do livro é precisamente o quinto postulado de Euclides, no sentido em que os ângulos a que se refere são os dois ângulos também referidos no dito postulado como menores que dois retos.

Proclus, nos *Comentários sobre o Livro I dos Elementos*, afirma: "... ele (o quinto postulado) deveria ser retirado completamente da relação dos postulados, pois é um teorema difícil, o qual Ptolomeu propôs-se a demonstrar,... Sua inversa foi, de fato, estabelecida por Euclides como um teorema".

Proclus não descreve completamente a prova obtida por Ptolomeu, porém a partir dos seus comentários, deduz-se que ele inicialmente faz uma prova para a Proposição 28 do Livro I dos Elementos.

*Proposição 28 - Se uma linha reta ao cortar outras duas, fizer o ângulo externo igual ao ângulo interno oposto do mesmo lado, ou se a soma dos ângulos internos do mesmo lado for igual a dois ângulos retos, então, as linhas retas são paralelas entre si.*

A demonstração da proposição 28 do livro I dos Elementos de Euclides obtida por Ptolomeu possui o seguinte raciocínio:

Sejam  $AB$  e  $CD$  duas retas cortadas por uma reta  $FG$  de modo a fazer os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  interiores de um lado de  $FG$ , e  $\gamma$  e  $\delta$  interiores do outro lado de  $FG$ , de modo que  $\alpha + \beta = 180^\circ$

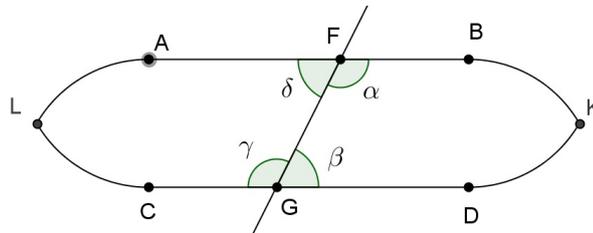


Figura 2.1

Como e que  $\alpha$  e  $\delta$ , assim como  $\beta$  e  $\gamma$ , são suplementares, é imediato que  $\delta + \gamma = 180^\circ$ , e além disso  $\alpha = \gamma$  e  $\delta = \beta$ . Suponha então que as retas  $AB$  e  $CD$  não sejam paralelas.

Ora, se as retas se intersectam de um lado da reta  $FG$ , deve então se intersectar do outro lado. Deste modo, tem-se duas retas distintas com dois pontos comuns, o que é absurdo.

Nas palavras de Ptolomeu:

*Eu digo que as linhas retas são paralelas, isto é, não secantes. Se possível, sejam  $FB$  e  $GD$  prolongadas até se encontrarem em  $K$ ... As linhas retas irão encontrar-se ou em ambos os ... Suponhamos então que  $FA$  e  $GC$  encontram-se em  $L$ . Então as linhas retas  $LABK$  e  $LC DK$  cercam uma área, o que é impossível. É por isso impossível que linhas se encontrem quando os ângulos internos são iguais a dois ângulos retos. Por isso elas são paralelas. (Proclus, séc V).*

Na transcrição apresentada vê-se que Ptolomeu utiliza uma definição de paralelismo que coincide com a de Euclides, ou seja, as linhas retas são paralelas se não se intersectarem (não secantes). Não é esse o seu erro na demonstração do postulado. Seu erro aparecerá na prova da Proposição 29, do Livro I dos *Elementos*.

*Proposição 29 - Uma linha reta que corta duas linhas retas paralelas faz os ângulos alternos iguais entre si, o ângulo externo igual ao ângulo interno oposto e a soma dos ângulos internos do mesmo lado igual a dois ângulos retos*

Na demonstração desta proposição, Ptolomeu considera duas retas paralelas  $AB$  e  $CD$  cortadas por uma reta  $FG$  de modo a fazer os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  interiores de um lado de  $FG$ , e  $\gamma$  e  $\delta$  interiores do outro lado de  $FG$ . Tem-se três possibilidades,  $\alpha + \beta > 180^\circ$ ,  $\alpha + \beta < 180^\circ$  ou  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

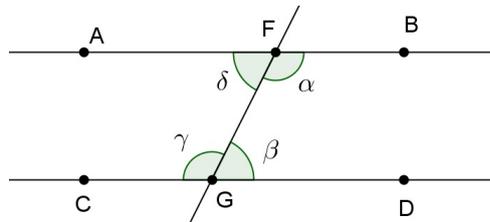


Figura 2.2

Supondo  $\alpha + \beta > 180^\circ$ , como as retas são paralelas, Ptolomeu considera que o que acontece de lado da reta  $FG$  deverá acontecer o mesmo do outro lado. Assim  $\gamma + \delta > 180^\circ$ . "...Mas estes mesmos ângulos são também maiores que dois ângulos rectos; pois  $AF$  e  $CG$  não são mais paralelas que  $FB$  e  $GD$ ..." (Proclus, séc V, 365.17-366.15) Mas, desse modo  $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 360^\circ$ , o que é um absurdo. Do mesmo modo Ptolomeu mostra que  $\alpha + \beta$  não é menor que  $180^\circ$ . E, conclui que  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .

Aqui ele comete um equívoco, quando assume que as propriedades aceitas para os ângulos interiores de um lado da reta transversal também devem ser válidas para os ângulos do outro lado. Na verdade, ele acabou admitindo uma propriedade que é verdadeira somente sob a validade do Postulado das Paralelas.

Posteriormente, Ptolomeu utiliza-se desta proposição 29 para provar o V Postulado.

*Eu digo que, se uma linha reta cai sobre duas linhas retas e faz os ângulos internos no mesmo lado menores que dois ângulos retos, as linhas retas se prolongadas encontrar-se-ão nesse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos. Suponhamos que elas não se encontram...; e se assim for, elas são paralelas. Mas foi provado que a linha que cai sobre paralelas fará os ângulos internos no mesmo lado iguais a dois ângulos retos.*

Adiante, será visto que duas retas paralelas cortadas por uma transversal pode formar ângulos interiores cuja soma é diferente de  $180^\circ$ .

## 2.1.2 Proclus

Proclus Diadochus nasceu em Constantinopla por volta do ano 410. Estudou filosofia em Alexandria e, posteriormente, foi para Atenas, estudar com Plutarco na Academia de Platão. Mais tarde, chegaria a diretor da Academia, cargo que manteve até morrer, no ano 485. Como já relatado a obra "Comentário sobre o Livro I dos Elementos de Euclides" é a principal fonte de conhecimentos sobre a história antiga da geometria grega.

Após comentar sobre o trabalho de Ptolomeu, o próprio Proclus indicou a falha na demonstração deste e propôs a sua prova. Seu argumento consiste em mostrar que dadas duas retas paralelas, se uma transversal intersecta uma delas, deverá então intersectar a outra.

Inicialmente, Proclus considera como axioma que, se duas retas se cruzam, então a distância entre um ponto sobre um lado ao outro lado do ângulo aumenta indefinidamente à medida que este ponto se afasta do vértice.

*A quem quiser ver este argumento construído, digamos que terá que aceitar antecipadamente um axioma...: se de um ponto único duas linhas retas fazendo um ângulo são prolongadas indefinidamente, o intervalo entre elas quando prolongadas indefinidamente excederá qualquer grandeza finita... As linhas retas estendidas indefinidamente, então, divergirão uma da outra uma distância maior que qualquer grandeza finita. (Proclus, séc V)*

Proclus parte dessa afirmação para dar início à sua demonstração do Quinto Postulado.

Sejam duas retas paralelas  $AB$  e  $CD$ , onde a reta  $EF$  corta  $AB$  no ponto  $E$  conforme figura abaixo. Considere um ponto  $P$  que se movimenta ao longo da semi-reta  $S_{EF}$  e seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $AB$ . Aqui a medida do segmento  $PQ$  aumenta indefinidamente, se tornando maior que qualquer distância prefixada, conseqüentemente, deverá em algum momento ser maior que a distância entre as retas  $AB$  e  $CD$ . Daí a conclusão de que  $EF$  corta  $CD$ .

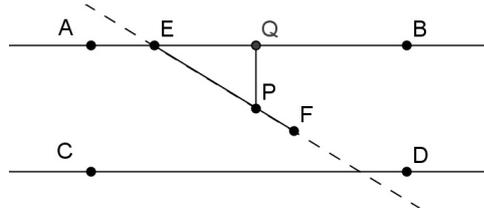


Figura 2.3

Proclus utiliza-se deste fato para concluir sua demonstração. Porém aqui, encontra-se o seu erro. Ele acaba admitindo que duas retas paralelas são equidistantes. Essa propriedade é válida dentro da Geometria Euclidiana, como consequência da validade do V postulado.

### 2.1.3 Nasiredin

Durante a Idade Média, os árabes sucederam os gregos nas descobertas matemáticas. Com as traduções dos livros de Euclides entre os árabes, o V Postulado foi mais estudado pelos árabes do que na Europa. Entre os árabes, será considerado o trabalho de Nasiredin (1201 - 1274), ou Nasir Eddin al-Tusi, astrônomo e matemático persa, que compilou uma versão árabe dos *Elementos* de Euclides. Segundo WOLFE ([6], p.28), "ele parece ter sido o primeiro a dirigir sua atenção para a importância, no estudo do Quinto Postulado, do teorema da soma dos ângulos de um triângulo".

Inicialmente, Nasiredin considera, sem provar, a seguinte afirmação:

*Sejam os pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, sobre as retas  $r$  e  $s$ , de modo que  $AB$  é perpendicular à  $r$  e forma um ângulo agudo  $\alpha$  com  $s$ . Então as perpendiculares baixadas de  $s$  sobre  $r$  dos lados do ângulo agudo, são menores que  $AB$ , e as perpendiculares baixadas do outro lado são maiores que  $AB$ . Além disto os ângulos que essas perpendiculares formam com  $s$  na mesma direção de  $\alpha$  são também agudos.*

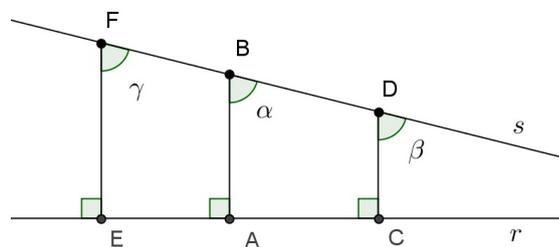


Figura 2.4

Na figura acima, esta afirmação significa que  $EF > AB > CD$ , e os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$  são agudos.

A partir daí, Nasiredin considera um quadrilátero  $ABCD$ , onde os lados  $AD$  e  $BC$

são congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ .

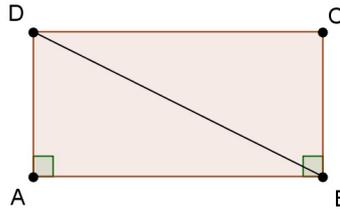


Figura 2.5

Se o ângulo  $\hat{BCD}$  é agudo, pela afirmação considerada  $AD$  é menor que  $BC$ , contrariando a hipótese. Se  $\hat{BCD}$  é obtuso, então  $AD$  é maior que  $BC$ , que também é absurdo. Logo  $\hat{BCD}$  deve ser reto. Analogamente,  $\hat{ADC}$  também deve ser reto. Assim, traçando a diagonal  $BD$  formam-se dois triângulos congruentes cuja soma dos ângulos internos é igual a  $180^\circ$ .

O primeiro erro de Nasiredin está nas suposições feitas inicialmente, quando considera que as retas  $r$  e  $s$  convergem do lado do ângulo agudo. Isto não é necessariamente verdade sem o uso do quinto postulado. Depois, na Figura 2.5, quando assume que o ângulo  $\hat{DCB}$  é agudo, não pode-se concluir que o ângulo  $\hat{CDA}$  é obtuso. Na verdade, posteriormente, será visto que o matemático Girolamo Saccheri, utiliza este quadrilátero para fazer a sua demonstração do quinto postulado, e mostra que os ângulos  $\hat{ADC}$  e  $\hat{BCD}$  são congruentes.

#### 2.1.4 Jonh Wallis

Jonh Wallis (1616 - 1703) se interessou pelo trabalho de Nasiredin e descreveu este trabalho em 1651 na Universidade de Oxford. Em 1663, ele se propõe a fazer sua própria prova do quinto postulado.

Dentre as críticas a respeito do Quinto Postulado durante os séculos XVI e XVII, o trabalho de Jonh Wallis destaca-se por desprender da ideia de assumir retas paralelas como sendo equidistantes.

Wallis propõe um novo axioma, para que, juntamente com os quatro primeiros postulados de Euclides, possa provar o quinto postulado.

**Axioma de Wallis:** *Seja um triângulo  $\triangle ABC$  e um segmento  $DE$  quaisquer. Existe um triângulo  $\triangle DEF$  (tendo  $DE$  como um de seus lados) que é semelhante a  $\triangle ABC$ .*

Dois triângulos são ditos *semelhantes* quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que os ângulos correspondentes sejam congruentes. A consequência disto é que os lados correspondentes devem ser proporcionais.

Utilizando este axioma, o Quinto Postulado de Euclides pode ser provado usando o raciocínio a seguir.

Seja  $P$  um ponto fora de uma reta  $r$ , considere o ponto  $Q$  pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $r$ . Por  $P$  trace uma reta  $s$  que forma um ângulo agudo com  $PQ$ . Aqui as retas  $r$  e  $s$  são cortadas por uma transversal  $PQ$  formando ângulos de um mesmo lado cuja soma é menor que  $180^\circ$ , logo deve ser mostrado que  $r$  e  $s$  se intersectam. Para isso considere um ponto  $R$  sobre a reta  $s$  de modo que  $\hat{R}\hat{P}Q$  seja o ângulo agudo formado pelas retas  $r$  e  $s$ . Seja agora, o ponto  $S$  pé da perpendicular baixada de  $R$  sobre  $PQ$ .

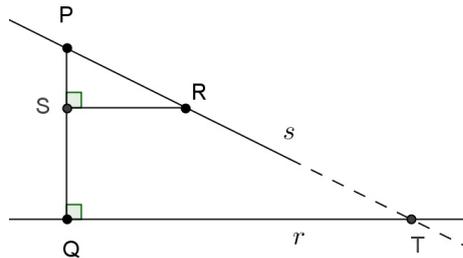


Figura 2.6

Análogo ao descrito por WOLFE ([6], p.30), movimentando o segmento  $PQ$  ao longo da reta que passa por  $P$  e  $Q$ , e mantendo a reta  $r$  rigidamente ligada ao segmento, até que  $Q$  coincida com a posição inicial de  $P$ , esta reta  $r$  deverá cortar a reta  $s$  durante esse movimento. Isto garante a existência do ponto  $R$ . O ponto  $S$  é a posição do ponto  $Q$  quando  $r$  intersecta  $s$  em  $R$ .

Continuando, pelo axioma de Wallis, considerando o triângulo  $\Delta PSR$  e o segmento  $PQ$ , deve existir um ponto  $T$  tal que os triângulos  $\Delta PSR$  e  $\Delta PQT$  são semelhantes. Pela definição de triângulos semelhantes,  $\hat{P}\hat{Q}T = \hat{P}\hat{R}S = 90^\circ$ , logo  $T$  está sobre  $r$ . Do mesmo modo,  $\hat{Q}\hat{P}T = \hat{R}\hat{P}S = \hat{Q}\hat{P}S$ , daí  $T$  está sobre  $s$ . Portanto as retas  $r$  e  $s$  se cruzam no ponto  $T$ .

## 2.2 O Legado de Saccheri

Um dos personagens que mais se destacou na tentativa de demonstração do Quinto Postulado de Euclides foi o padre jesuíta Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733). Nascido em Gênova, aos 23 anos foi para Milão estudar Teologia e Filosofia em um colégio jesuíta, onde foi influenciado a dedicar-se também à matemática. Sabe-se que Saccheri ensinou Filosofia entre 1694 e 1697 na Universidade de Turim, onde acabou publicando, em 1697, fruto da experiência e da sua afinidade com lógica, a obra "*Lógica Demonstrativa*". Nesta, com uma explicação da lógica do ponto de vista geométrico, é feita uma aplicação do método usado por Euclides no tratamento da Lógica Formal.

O Padre Saccheri ocupou uma cadeira do Departamento de Matemática da Universidade de Pávia de 1699 até sua morte, em 25 de setembro de 1733. Neste mesmo ano Saccheri publicou o livro "*Euclides ab omni naevo vindicatus*"<sup>1</sup> - *Euclides livre de qualquer falha*. A maior parte desta obra é dedicada à tentativa de demonstração do Quinto Postulado de Euclides. Utilizando-se de sua habilidade com a lógica, propôs em seu livro a demonstração supracitada utilizando o método de redução ao absurdo. Segundo João Lucas [2] "enquanto ensinava Gramática e estudava Filosofia em Milão, Saccheri leu *Os Elementos* de Euclides tendo ficado particularmente impressionado pelo seu uso do método de prova pela redução a um absurdo".

Utilizando-se desse raciocínio, Saccheri toma como dados os quatro primeiros postulados de Euclides e suas conseqüentes 28 primeiras proposições<sup>2</sup> (aqui ele percebe ser possível formular boa parte da geometria). A partir daí considera a hipótese de falsidade do Quinto Postulado na busca por uma contradição.

Para isso ele considerou um quadrilátero  $ABCD$  (hoje chamado de quadrilátero de Saccheri) onde os lados  $AD$  e  $BC$  são congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ . Nesta seção é feito um estudo de alguns dos resultados encontrados por Saccheri na análise deste quadrilátero.

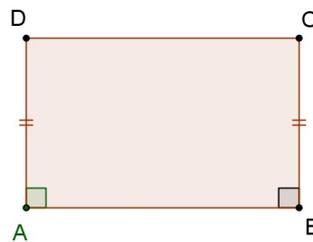


Figura 2.7

Inicialmente, como pré-requisito para o desenvolvimento de seu trabalho ele mostra que os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  do quadrilátero dado são congruentes como parte da prova do seguinte Lema:

**Lema 2.2.1.** *Se um quadrilátero  $ABCD$  tem os ângulos consecutivos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  retos, e os lados  $AD$  e  $BC$  congruentes, então os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são congruentes (Este é um caso especial para o trabalho de Saccheri), mas, se os lados  $AD$  e  $BC$  são distintos,*

<sup>1</sup>O título completo do livro era: *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive comatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae Principia - Euclides livre de qualquer falha: um trabalho que estabelece os princípios de uma Geometria Universal*. A obra era dividida em duas partes: Na primeira (Proposição 1 a 33) acredita ter provado o Quinto Postulado do Livro *Os Elementos* de Euclides; Na segunda (Proposição 34 à 39) mostrará que a linha cujos pontos são todos equidistantes a uma reta dada, é também uma reta.

<sup>2</sup>As 28 primeiras proposições do Livro I dos *Elementos* de Euclides são provadas por ele sem o uso do Quinto Postulado

considerando os dois ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ , é maior aquele que fica adjacente ao menor lado, e vice-versa.<sup>3</sup>

*Demonstração.* Primeiramente será mostrado o primeiro caso. Assim, seja  $ABCD$  um quadrilátero onde  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são ângulos retos. Considerando as diagonais  $AC$  e  $BD$  pode-se formar os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle BAC$  congruentes pelo caso LAL (LADO-ÂNGULO-LADO), visto que  $DA$  e  $CB$  são congruentes,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são retos e  $AB$  é lado comum. Daí tem-se que  $AC = BD$ .

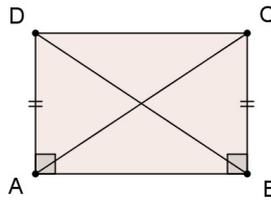


Figura 2.8

Nos triângulos  $\triangle ADC$  e  $\triangle BCD$ ,  $AC = BD$  (visto acima),  $AD = BC$  e  $CD$  é lado comum, implicando na congruência desses triângulos pelo caso LLL (LADO-LADO-LADO).

Segue as congruências entre os ângulos  $\hat{ACD}$  e  $\hat{BDC}$ ,  $\hat{ADB}$  e  $\hat{BCA}$  e, conseqüentemente,  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$ .

Para o segundo caso, considere, sem perda de generalidade, que  $BC < AD$ . Sobre a reta  $BC$ , tome o ponto  $C'$ , do mesmo lado que  $C$  em relação à reta  $AB$ , de modo que  $BC'$  e  $AD$  sejam congruentes.

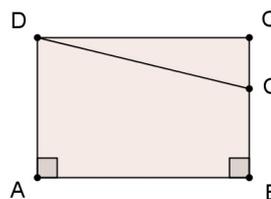


Figura 2.9

Neste caso, da prova acima,  $\hat{BC'D} = \hat{ADC'}$ . Como  $\hat{C}$  é ângulo externo do triângulo  $\triangle DCC'$  então  $\hat{C} > \hat{BC'D} = \hat{ADC'} > \hat{D}$ .

□

No quadrilátero de Saccheri, tendo mostrado que os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são congruentes, restam então, três hipóteses para os mesmos:

1.  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são RETOS (Hipótese do Ângulo Reto)

<sup>3</sup>De modo geral, um quadrilátero  $ABCD$  que tem ângulos consecutivos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  congruentes (não necessariamente retos) satisfaz o Lema

2.  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são OBTUSOS (Hipótese do Ângulo Obtusos)
3.  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são AGUDOS (Hipótese do Ângulo Agudos)

É importante observar que a primeira hipótese é equivalente ao Quinto Postulado e portando sua negação equivale a tomar uma das outras duas como verdade. Saccheri estuda as três hipóteses na busca de contradições para as duas últimas. Esta seção ira discorrer sobre consequências dessas hipóteses de maneira similar ao trabalho original de Saccheri.

**Proposição 2.2.1.** *No quadrilátero  $ABCD$ , com  $AD$  e  $BC$  congruente e perpendiculares ao lado  $AB$ , se  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos segmentos  $AB$  e  $CD$ , respectivamente, então o segmento  $MN$  é perpendicular estes lados.*

*Demonstração.* Considere o quadrilátero com as condições enunciadas.

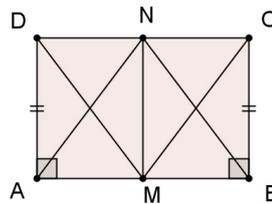


Figura 2.10

Como  $ND = NC$ ,  $\hat{D} = \hat{C}$  e  $AD = BC$ , tem-se que  $\triangle NDA$  e  $\triangle NCB$  são congruentes. Assim,  $AN = BN$ , e, como  $MA = MB$  e  $MN$  é lado comum dos triângulos  $\triangle ANM$  e  $\triangle BMN$ , então estes são também congruentes. Segue imediatamente que  $\hat{AMN} = \hat{BMN} = 90^\circ$ . De modo análogo verifica-se também que  $\hat{DNM} = \hat{CNM} = 90^\circ$

□

**Proposição 2.2.2.** *No quadrilátero  $ABCD$  com  $AD$  e  $BC$  congruente e perpendiculares ao lado  $AB$ , de acordo com as hipóteses do ângulo reto, do ângulo obtuso e do ângulo agudo, tem-se respectivamente que  $AB = CD$ ,  $AB > CD$  ou  $AB < CD$ .*

*Demonstração.* No primeiro caso, o quadrilátero  $ABCD$  possui todos os ângulos retos. Supondo por absurdo que  $AB > CD$  (analogamente  $AB < CD$ ) tem-se pelo Lema 2.2.1 que  $\hat{A} < \hat{D}$  (respectivamente  $\hat{A} > \hat{D}$ ), o que contraria a hipótese. Assim, do Lema 1 obtem-se brevemente que  $AB = CD$ .

Na Hipótese do Ângulo Obtuso considere o segmento  $MN$  onde  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos segmentos  $AB$  e  $CD$ , respectivamente. Da proposição 1 segue que  $MN$  é perpendicular aos lados  $AB$  e  $CD$ . Além disto, divide o quadrilátero  $ABCD$  em dois quadriláteros congruentes  $MBCN$  e  $MADN$ .

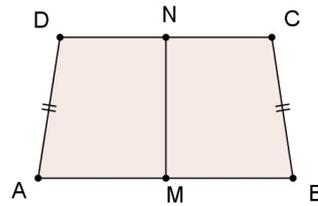


Figura 2.11

Observando um destes quadriláteros, digamos  $MADN$ , tem-se este possui ângulos retos em  $M$  e  $N$  onde, por hipótese,  $\hat{D} > \hat{A}$ . Segue do Lema 1 que  $ND < MA$ . E imediatamente tem-se  $CD < AB$ .

Na Hipótese do Ângulo Agudo a demonstração segue análoga. As inequações têm seus sinais invertidos e, conseqüentemente,  $CD > AB$ .

□

Da mesma forma é possível mostrar que as recíprocas das condicionais da Proposição 2.2.2 são também verdadeiras.

**Proposição 2.2.3.** *No quadrilátero  $ABCD$ , com  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ , se  $AB = CD$ ,  $AB > CD$  ou  $AB < CD$  obtém-se, respectivamente as hipóteses do ângulo reto, do ângulo obtuso ou do ângulo agudo.*

É importante ressaltar que Saccheri emprega-se do *Postulado de Arquimedes* e da *Hipótese de continuidade da reta*, para estender uma propriedade válida para uma única figura à todas as figuras de um do mesmo tipo. Faz isso inclusive para cada uma das hipóteses estudadas.

**Proposição 2.2.4.** *Seja o quadrilátero  $ABCD$ , onde  $AD$  e  $BC$  são congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ . Se a Hipótese do Ângulo Reto é válida neste quadrilátero, então ela é verdadeira em qualquer outro quadrilátero que tenha um par de lados opostos congruentes e perpendiculares a um terceiro lado.*

*Demonstração.* Considere válida a Hipótese do Ângulo Reto no quadrilátero  $ABCD$ , onde  $AD$  e  $BC$  são congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ .

Sobre os lados  $AD$  e  $BC$ , considere os respectivos pontos  $N$  e  $M$ , tal que  $AN = BM$ . Para que a Hipótese do Ângulo Reto seja válida no novo quadrilátero  $ABMN$  os ângulos em  $M$  e  $N$  devem ser retos.

Suponha que o ângulo  $A\hat{N}M$  seja agudo (analogamente pode-se supor  $A\hat{N}M$  obtuso). Então, o ângulo adjacente  $D\hat{N}M$  é obtuso. Assim, no quadrilátero  $ABMN$ , pela hipótese do ângulo agudo,  $AB < NM$ , enquanto que no quadrilátero  $NMCD$ , pela da hipótese do ângulo obtuso, tem-se que  $NM < CD$ . Mas estas duas desigualdades são contraditórias, visto que pela hipótese do ângulo reto no quadrilátero  $ABCD$ ,  $AB = CD$ .

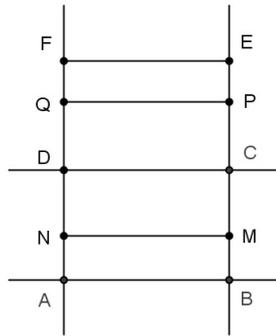


Figura 2.12

Assim, o ângulo  $\hat{A}\hat{N}M$  não pode ser agudo, e usando o mesmo raciocínio, este ângulo também não pode ser obtuso. Assim  $\hat{A}\hat{N}M$  é reto e a hipótese do ângulo reto também é verdade no quadrilátero  $ABMN$ .

Agora, sobre as retas  $AD$  e  $BD$ , e não estando nos segmentos correspondentes, considere, respectivamente, os pontos  $Q$  e  $P$ , de modo que se tenha  $AQ = BP$ . Deve ser verificado que  $PQ$  é perpendicular às retas  $AD$  e  $BD$ .

Com efeito, se  $AQ$  é um múltiplo de  $AD$ , por congruência, a proposição é óbvia. Caso contrário, considere, um múltiplo do segmento  $AD$  maior do que  $AQ$  (é possível pelo Postulado de Arquimedes), e sobre as retas  $AD$  e  $BC$ , marque  $AF$  e  $BE$  iguais a estes múltiplos. Como provado inicialmente, a hipótese do ângulo reto é verdade no quadrilátero  $ABEF$ , e, conseqüentemente, a mesma hipótese também será verdadeira no quadrilátero  $ABPQ$ .

Finalmente a referida hipótese deve ser assegurada para um quadrilátero qualquer, uma vez que, a prova obtida tomando  $AB$  como base e segmentos congruentes ao longo das retas  $AD$  e  $BC$ , porém pode-se tomar como base um dos lados perpendiculares à  $AB$  e utilizar o mesmo processo descrito.

□

**Proposição 2.2.5.** *Se a Hipótese do Ângulo Obtuso é verdadeira em um quadrilátero  $ABCD$ , com  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ , então esta Hipótese será verdadeira em qualquer outro quadrilátero que tenha um par de lados opostos congruentes e perpendiculares a um terceiro lado.*

*Demonstração.* Seja o quadrilátero  $ABCD$ , com  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ , de modo que os ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sejam obtusos, ou seja, vale a Hipótese do Ângulo Obtuso no quadrilátero  $ABCD$ . Inicialmente será mostrado que, vale esta mesma hipótese em qualquer quadrilátero de base  $AB$  e lados adjacentes congruentes e perpendiculares a este.

Assim, sobre os lados  $AD$  e  $BC$  marque os pontos  $H$  e  $K$ , tais que  $AH = BK$ . Em primeiro lugar, nota-se que o segmento  $HK$  não pode ser perpendicular aos lados  $AD$  e  $BC$ , pois, deste modo, a hipótese do ângulo reto se verificaria no quadrilátero  $ABKH$  e, conseqüentemente, no quadrilátero  $ABCD$ .

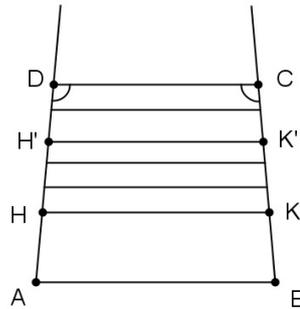


Figura 2.13

Suponha então que o ângulo  $\hat{A}HK$  seja agudo. Segue, pela proposição 2.2.2 que  $HK > AB$ , no quadrilátero  $ABKH$ , e que  $AB > CD$ , no quadrilátero  $ABCD$ . Portanto  $HK > AB > CD$ .

Movendo a reta  $HK$  continuamente, de modo que ela permaneça perpendicular à mediana  $OO'$  do quadrilátero  $ABCD$ , o segmento  $HK$ , contido entre os lados opostos  $AD$ ,  $BC$ , a qual na sua posição inicial é maior do que  $AB$ , será menor do que  $AB$  em sua posição final  $DC$ . A partir do postulado da continuidade, podemos então concluir que, entre a posição inicial  $HK$  e a posição final  $DC$ , deve existir uma posição intermediária  $H'K'$ , para o qual  $H'K' = AB$ .

Conseqüentemente, no quadrilátero  $ABK'H'$  pela Proposição 2.2.3 os ângulos em  $H'$  e  $K'$  devem ser retos. Portanto, pela proposição anterior, a Hipótese do Ângulo Obtuso não poderia ser verdade em  $ABCD$ .

Este mesmo argumento deve ser utilizado caso os segmentos  $AH$  e  $BK$  sejam maiores que  $AD$ , mostrando que neste caso também é impossível que o ângulo  $\hat{A}HK$  seja agudo. Assim, segue a Hipótese do Ângulo Obtuso em  $ABKH$ , bem como em  $ABCD$ .

Tendo provado que vale a Hipótese do Ângulo Obtuso no quadrilátero de "base"  $AB$  e lados adjacentes congruentes de tamanho qualquer, deve ser visto agora que esta hipótese vale para aquele cuja base assume qualquer dimensão. Assim, tendo em vista que na situação anterior, o segmento  $BK$  tem tamanho arbitrário, que este seja usado como base. Deste modo, como vale a Hipótese do Ângulo Obtuso no quadrilátero  $ABKH$ , os ângulos em  $K$ ,  $H$ , são obtusos. Daí, pode-se traçar a perpendicular a  $KB$  em  $K$ , e esta, cortará o segmento  $AH$  no ponto  $M$ , formando o ângulo  $\hat{A}MK$ . Pelo teorema do ângulo externo (proposição ) aplicado ao triângulo  $\Delta MHK$ , é imediato que  $\hat{A}MK$  é obtuso.

Segue, em  $ABKM$  nós temos  $AB > KM$ , pelo Lema 2.2.1. Marque sobre  $AB$

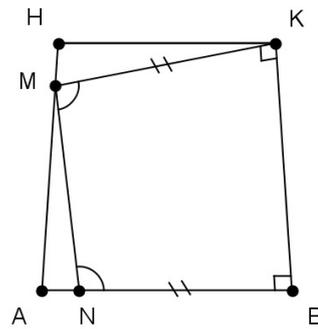


Figura 2.14

o segmento  $BN$  igual a  $MN$ . Então nós podemos construir o quadrilátero bi-retângulo isósceles  $BKMN$ , com o ângulo  $\hat{MNB}$  obtuso, uma vez que é ângulo exterior do triângulo  $\triangle AMN$ . Daqui resulta que a Hipótese do Ângulo Obtuso continua válida no novo quadrilátero.

□

**Proposição 2.2.6.** *Se a Hipótese do Ângulo Agudo é verdadeira em um quadrilátero  $ABCD$ , com  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ , então esta Hipótese será verdadeira em qualquer outro quadrilátero que tenha um par de lados opostos congruentes e perpendiculares a um terceiro lado.*

*Demonstração.* Esta demonstração é obtida pelo método de redução ao absurdo de maneira análoga à última.

□

Muitas propriedades também podem ser deduzidas, sob as três hipóteses consideradas, relacionadas com os triângulos.

**Proposição 2.2.7.** *De acordo com as hipóteses do ângulo reto, do ângulo obtuso ou do ângulo agudo, a soma dos ângulos de um triângulo é respectivamente igual a, maior que ou menor que dois ângulos retos ( $180^\circ$ ).*<sup>4</sup>

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\triangle ABC$  com o ângulo  $\hat{B}$  reto. Seja o ponto  $D$ , no mesmo semiplano que o ponto  $C$  em relação à reta  $AB$ , tal que  $AD$  é perpendicular a  $AB$  e congruente ao segmento  $BC$ . Forma-se assim o quadrilátero  $ABCD$ , onde  $\hat{BAD} = \hat{ABC} = 90^\circ$ ,  $AD = BC$ .

<sup>4</sup>Essa propriedade foi mostrada por Saccheri em duas proposições: a primeira mostrou para um triângulo retângulo (a soma dos ângulos agudos é igual a, maior que ou menor que um ângulo reto, de acordo, respectivamente, com as hipóteses do ângulo reto, obtuso ou agudo); em outra proposição generaliza a propriedade para um triângulo qualquer

Na Hipótese do Ângulo Reto, o quadrilátero  $ABCD$  possui quatro ângulos retos e, pela proposição 2.2.2,  $AB = CD$ . Assim, os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle CDA$  são congruentes. Logo

$$\hat{A}BC + B\hat{C}A + C\hat{A}B = C\hat{D}A + D\hat{A}C + A\hat{C}D.$$

Como no quadrilátero

$$A\hat{B}C + B\hat{C}D + C\hat{D}A + D\hat{A}B = A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B + C\hat{D}A + D\hat{A}C + A\hat{C}D,$$

então, imediatamente, no triângulo  $\triangle ABC$ ,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2 \text{ ângulos retos}(180^\circ).$$

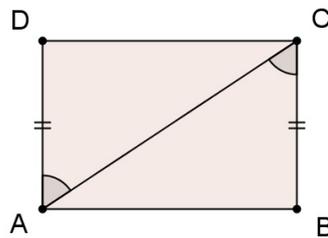


Figura 2.15

Na Hipótese do Ângulo Obtuso, tem-se, pela proposição 2.2.2, que  $AB > CD$ . Assim foram formados dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle CDA$  com  $BC = DA$ ,  $CA$  lado comum e  $AB > CD$ . Pela proposição 1.2.6 <sup>5</sup>  $B\hat{C}A > D\hat{A}C$ , de onde segue que, no triângulo  $\triangle ABC$ ,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \hat{A} + \hat{B} + D\hat{A}C = 2 \text{ ângulos retos}(180^\circ).$$

Para a Hipótese do Ângulo Agudo tem-se uma prova análoga, usando o fato de que aqui  $AB < CD$ . Daí  $B\hat{C}A < D\hat{A}C$  e, conseqüentemente,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2 \text{ ângulos retos}(180^\circ).$$

Fica então provada a proposição para triângulos com um ângulo reto. Deve ser feita agora, a extensão dessa propriedade a um triângulo qualquer. Ou seja, deve ser mostrado que: *se a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é igual a, maior que ou menor que dois ângulos retos, então esta soma deve ser, respectivamente, igual a, maior que ou menor que dois ângulos retos em qualquer outro triângulo*

Para fazer esta demonstração deve-se, inicialmente, notar que qualquer triângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos.

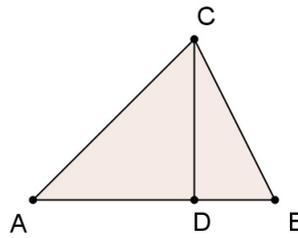


Figura 2.16

Considere, por exemplo, um triângulo  $\triangle ABC$  e um ponto  $D$  sobre o lado  $AB$  tal que  $CD$  é perpendicular a  $AB$ . Aqui será obtida a prova para quando a soma dos ângulos é maior que  $180^\circ$ , os demais casos são análogos.

Deste modo,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{ADC} + \hat{ACD} + \hat{DCB} + \hat{BDC} + \hat{B} - 180^\circ.$$

Como já foi mostrado que a soma dos ângulos de um triângulo retângulo é maior que  $180^\circ$ , segue, portanto que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ.$$

□

**Corolário 2.2.1.** *De acordo com as hipóteses do ângulo reto, do ângulo obtuso ou do ângulo agudo, a soma dos ângulos de um quadrilátero é respectivamente igual a, maior que ou menor que quatro ângulos retos ( $360^\circ$ ).*

*Demonstração.* Esse resultado é imediato, tendo em vista que uma diagonal de um quadrilátero o divide em dois triângulos e que a soma dos ângulos desse quadrilátero é igual à soma dos ângulos dos dois triângulos formados.

□

Outra consequência imediata está relacionada com o ângulo externo de um triângulo.

**Corolário 2.2.2.** *Dado um triângulo  $\triangle ABC$ , considere o ponto  $M$  de modo que  $M\hat{B}C$  seja ângulo externo do triângulo dado. Assim:*

(i)  $M\hat{B}C = B\hat{A}C + B\hat{C}A$  na Hipótese do Ângulo Reto.

(ii)  $M\hat{B}C < B\hat{A}C + B\hat{C}A$  na Hipótese do Ângulo Obtuso.

(iii)  $M\hat{B}C > B\hat{A}C + B\hat{C}A$  na Hipótese do Ângulo Agudo.

---

<sup>5</sup>A desigualdade também foi provada por Saccheri em uma proposição anterior para servir de lema para esta

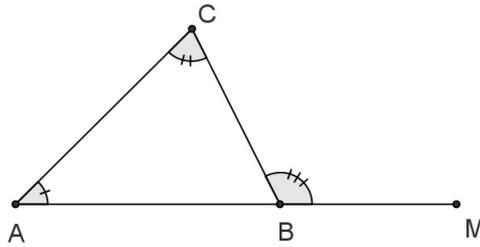


Figura 2.17

Ou seja, pode-se dizer que, na Hipótese do Ângulo Reto, do Ângulo Obtuso ou do Ângulo Agudo, um ângulo externo de um triângulo é, respectivamente, igual a, maior que ou menor que a soma dos ângulos internos a ele não adjacentes.

**Proposição 2.2.8.** Em todo triângulo  $\triangle ABC$  inscrito em um semicírculo de diâmetro  $\overline{AC}$ :

- (i)  $\hat{A}BC = 90^\circ$  na Hipótese do Ângulo Reto.
- (ii)  $\hat{A}BC > 90^\circ$  na Hipótese do Ângulo Obtuso.
- (iii)  $\hat{A}BC < 90^\circ$  na Hipótese do Ângulo Agudo.

*Demonstração.* Considere um triângulo  $\triangle ABC$  inscrito em um semicírculo de centro  $D$ .

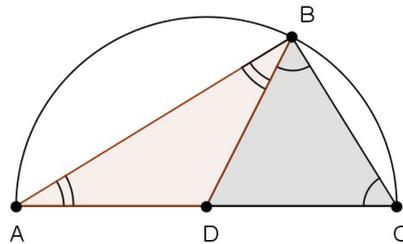


Figura 2.18

Os triângulos  $\triangle ABD$  e  $\triangle BCD$  são isósceles, de onde segue que  $\hat{D}BC = \hat{D}CB$  e  $\hat{D}AB = \hat{D}BA$ . Além disso percebe-se que  $\hat{D}BC + \hat{D}BA = \hat{D}AB + \hat{D}CB$ .

Assim, a soma dos ângulos internos do triângulo  $\triangle ABC$  é dado por

$$\hat{D}BC + \hat{D}CB + \hat{D}AB + \hat{D}BA = 2(\hat{D}BC + \hat{D}BA) = 2\hat{A}BC$$

Portanto, pela proposição 2.2.7, nas Hipótese do Ângulo Reto, do Ângulo Obtuso e do Ângulo Agudo, segue, respectivamente, que

$$2 \hat{A}BC = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}BC = 90^\circ,$$

$$2 \hat{A}BC > 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}BC > 90^\circ \text{ e}$$

$$2 \hat{A}BC > 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A}BC < 90^\circ.$$

□

**Proposição 2.2.9.** *Seja  $\Delta ABC$  um triângulo onde  $\hat{B}$  é um ângulo reto. Seja  $M$  o ponto médio do lado  $AC$  e  $P$  o pé da perpendicular baixada de  $M$  sobre  $AB$ . Assim tem-se que:*

(i)  $AP = PB$  na Hipótese do Ângulo Reto.

(ii)  $AP < PB$  na Hipótese do Ângulo Obtuso.

(iii)  $AP > PB$  na Hipótese do Ângulo Agudo.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $\Delta ABC$  enunciado.

Na Hipótese do Ângulo Reto, considere o ponto  $Q$  sobre o lado  $BC$  tal que  $BQ = PM$ . Assim, tem-se que, no quadrilátero  $PBQM$ ,  $PB = QM$ . E, como a soma dos ângulos de um triângulo é igual a 2 retos ( $180^\circ$ ), segue que  $\hat{AMP} = \hat{MCQ}$  e  $\hat{MAP} = \hat{CMQ}$ . Como  $AM = MC$  segue por ALA (ÂNGULO-LADO-ÂNGULO) que os triângulos  $\Delta APM$  e  $\Delta MQC$  são congruentes. Logo,  $AP = MQ = PB$ .

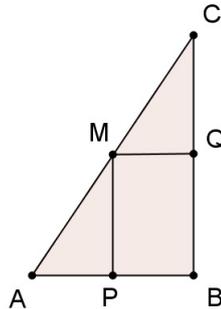


Figura 2.19

Na Hipótese do Ângulo Obtuso, a soma dos ângulos de um quadrilátero é maior que 4 ângulos retos ( $360^\circ$ ). Assim, no quadrilátero  $PBCM$ ,  $\hat{C} + \hat{M} > 180^\circ$ , logo  $\hat{AMP} < \hat{MCB}$ . Seja o ponto  $Q$  sobre o lado  $BC$  tal que  $QM$  é perpendicular ao lado  $BC$ . Segue que os triângulos retângulos  $\Delta AMP$  e  $\Delta MCQ$  possuem hipotenusas congruentes  $AM$  e  $MP$  e  $\hat{AMP} < \hat{MCQ}$ , de onde resulta que  $AP < MQ$ . Por outro lado o quadrilátero  $PBQM$  é tal que  $\hat{P}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{Q}$  são retos, logo  $MQ < PB$ . Portanto  $AP < MQ < PB$ .

Na Hipótese do Ângulo Agudo a prova é análoga. Os sinais das desigualdades invertem e, conseqüentemente,  $AP > PB$

□

Nas próximas duas proposições serão analisadas algumas propriedades apenas sob as Hipóteses do Ângulo Reto e do Ângulo Obtuso, com a finalidade de encontrar primeiramente uma contradição para esta última.

**Proposição 2.2.10.** *Sejam as retas  $r$  e  $s$  que se cruzam formando um ângulo agudo. Nas Hipóteses do Ângulo Reto e do Ângulo Obtuso qualquer reta perpendicular à reta  $r$  intersecta a reta  $s$ .*

*Demonstração.* Considere as retas  $AC$  e  $AP$  de modo que  $\hat{P}A/C$  seja um ângulo agudo. Seja o ponto  $Q$ , do mesmo lado que  $C$  em relação à reta  $AP$ , tal que  $QP$  e  $AP$  sejam perpendiculares. Resta mostrar que as retas  $AC$  e  $AP$  se intersectam.

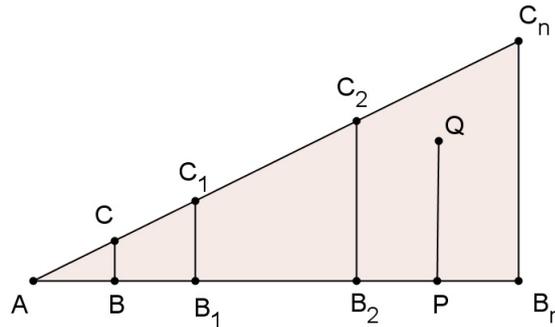


Figura 2.20

Seja  $B$  o pé da perpendicular baixada de  $C$  sobre  $AP$ . Considere, sobre a reta  $AC$ , a sequência de pontos  $C_1, C_2, \dots$ , tais que  $AC = CC_1$ ,  $AC_1 = C_1C_2$  e assim sucessivamente. Seja, ainda, a sequência de pontos  $B_1, B_2, \dots$ , onde  $B_i$  é pé da perpendicular baixada de  $C_i$  sobre  $AP$ , com  $i = 1, 2, \dots$

Pela proposição anterior, considerando as Hipóteses do Ângulo Reto e do Ângulo Obtuso, segue que:

$$BB_1 \geq AB \quad \text{ou} \quad AB_1 \geq 2 \cdot AB,$$

$$B_1B_2 \geq AB_1 \quad \text{ou} \quad AB_2 \geq 2^2 \cdot AB$$

e assim sucessivamente. Genericamente pode-se escrever

$$AB_n \geq 2^n \cdot AB, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Mas, existe um  $n$  suficientemente grande (pelo Postulado de Arquimedes) de modo que

$$2^n \cdot AB \geq AP,$$

logo

$$AB_n \geq AP.$$

Portanto o ponto  $P$  está sobre o lado  $AB_n$  do triângulo retângulo  $\Delta AB_n C_n$ , e como a reta  $PQ$  não deve cortar o lado  $B_n C_n$  do triângulo, segue que essa intersectará a hipotenusa  $AC_n$ .

□

**Proposição 2.2.11.** *O Quinto Postulado de Euclides é válido na Hipótese do Ângulo Reto e na Hipótese do Ângulo Obtuso.*

*Demonstração.* Seja  $AB$  e  $CD$  duas retas cortadas pela reta  $AC$ . Para satisfazer o Quinto Postulado suponha que  $\hat{BAC} + \hat{ACD} < 180^\circ$  (2 ângulos retos).

Assim, pelo menos um dos ângulos  $\hat{BAC}$  e  $\hat{ACD}$  deve ser agudo. Sem perda de generalidade tome  $\hat{BAC} < 90^\circ$ .

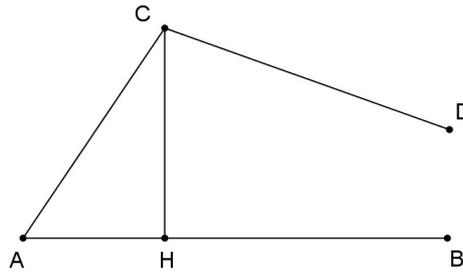


Figura 2.21

Considere o ponto  $H$  pé da perpendicular baixada de  $C$  sobre a reta  $AB$ . No triângulo  $ACH$ , considerando as Hipóteses do Ângulo Reto e do Ângulo Obtuso, tem-se que

$$\hat{A} + \hat{C} + \hat{H} \geq 180^\circ \quad (2 \text{ ângulos retos}).$$

Como assumimos que

$$\hat{BAC} + \hat{ACD} < 180^\circ,$$

segue dessas duas desigualdades que

$$180^\circ + \hat{HCD} \leq \hat{A} + \hat{C} + \hat{H} + \hat{HCD} = \hat{A} + \hat{ACD} + \hat{H} < 180^\circ + \hat{H}$$

e portanto,  $\hat{HCD} \leq \hat{H} = 90^\circ$ .

Assim o ângulo  $\hat{HCD}$  é agudo e pela da última proposição, pode-se concluir que as retas  $AB$  e  $CD$  se intersectam.

□

Aqui Saccheri encontra uma contradição para a Hipótese do Ângulo Obtuso. Segundo o seu raciocínio esta hipótese acarreta na validade do quinto postulado de Euclides e deste por sua vez deduz-se diversas outras propriedades que contrariam a Hipótese em questão. Por exemplo a propriedade de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a  $180^\circ$ .<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Segundo BONOLA ([7], p. 38), "esta prova também é encontrada no trabalho de Nasir-Eddin, que evidentemente inspirou a investigação de Saccheri"

Porém, o trabalho de Saccheri não acaba por aqui. Ele deveria ainda encontrar uma contradição para a terceira hipótese. Assim, a partir daqui a investigação será focada na Hipótese do Ângulo Agudo <sup>7</sup>.

**Proposição 2.2.12.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo retângulo em  $B$ . Seja  $M$  o ponto médio do lado  $AC$ , e o ponto  $P$ , pé da perpendicular de  $M$  sobre o lado  $BC$ . Desse modo, na Hipótese do Ângulo Agudo*

$$AB > 2 \cdot MP.$$

*Demonstração.* Considerando o triângulo enunciado, marque sobre a semi-reta  $S_{PM}$  o ponto  $D$  tal que  $MD = MP$ .

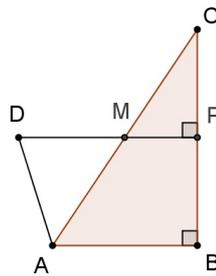


Figura 2.22

Neste caso, os triângulo  $\triangle AMD$  e  $\triangle CMP$  são congruentes. Logo,  $\widehat{MDA} = \widehat{MPC} = 90^\circ$ . Assim, no quadrilátero  $BPDA$ , o ângulo  $\widehat{BAD}$  deve ser agudo, e, pelo Lema 2.2.1,

$$AB > DP = 2PM.$$

□

**Proposição 2.2.13.** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo retângulo em  $B$ , pode-se prolongar os lados  $AC$  e  $AB$  até os pontos  $M$  e  $P$ , respectivamente, formando o triângulo  $\triangle APM$  retângulo em  $P$ , com o lado  $MP$  tão grande quanto se queira.*

*Demonstração.* Considere sobre a semi-reta  $S_{AC}$  o ponto  $M_1$  tal que  $AC = CM_1$ . Seja  $P_1$  o pé da perpendicular baixada de  $M_1$  sobre a reta  $AB$ . No triângulo retângulo  $\triangle AP_1M_1$ , da proposição anterior segue que

$$M_1P_1 > 2 \cdot CB.$$

Do mesmo modo, considere o ponto  $M_2$  tal que  $AM_1 = M_1M_2$ , e seja  $P_2$  o pé da perpendicular baixada de  $M_2$  sobre a reta  $AB$ . Logo

$$M_2P_2 > 2 \cdot M_1P_1 > 2^2 \cdot CB.$$

<sup>7</sup>É importante ressaltar que mesmo depois de mostrar que a Hipótese do Ângulo Obtuso é falsa, Saccheri continua mostrando propriedades, principalmente sobre triângulos, válida para as três hipóteses

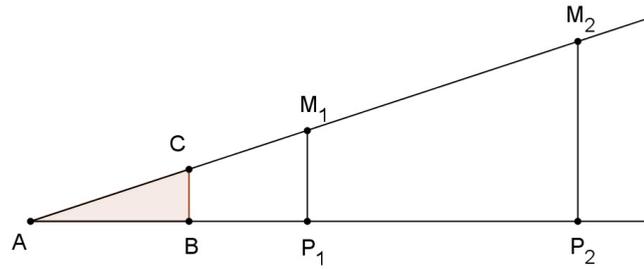


Figura 2.23

Repetindo este processo  $n$  vezes é encontrado o segmento  $M_nP_n$ , tal que  $M_nP_n > 2^n \cdot CB$ . Suficiente para garantir que  $M_nP_n$  pode ser maior do que qualquer segmento fixo dado.

□

A próxima proposição apresenta um resultado para a Hipótese do Ângulo Agudo diferente do que acontece, sob as mesmas condições, com as outras hipóteses na proposição 2.2.10.

**Proposição 2.2.14.** *De acordo com a Hipótese do Ângulo Agudo, dada uma reta  $r$ , é possível traçar uma perpendicular à  $r$  e uma concorrente, formando um ângulo agudo com  $r$ , e que não se intersectam*

*Demonstração.* Para construir essas retas, seja  $\triangle ABC$  em que  $\hat{C}$  é um ângulo reto. Trace a reta  $BD$  de forma que os ângulos  $\hat{A}BD$  e  $\hat{B}AC$  sejam congruentes.

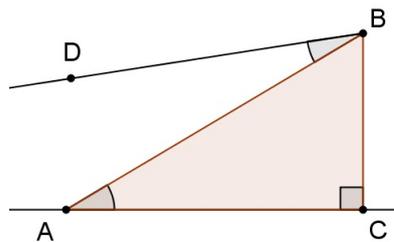


Figura 2.24

Assim, na Hipótese do Ângulo Agudo, como a soma dos ângulos de um triângulo é menor que  $180^\circ$ , o ângulo  $\hat{C}BD$  é agudo. Além disto, pelo Teorema do Ângulo Interior Alternado, as retas  $AC$  e  $BD$  não se encontram.

□

Duas retas que possuem uma perpendicular comum, pelo Teorema do ângulo interior alternado, não se intersectam. No entanto, dentro da Hipótese do Ângulo Agudo, estas retas devem se afastar uma da outra de maneira mutua e constante. Com efeito, se o segmento  $AB$  é perpendicular às retas  $r$  e  $s$ , e sobre estas estão os pontos  $C$  e  $D$ ,

formando o quadrilátero  $ABCD$ , com  $AD = BC$ , este resultado segue imediatamente da Proposição 2.2.2.

Mas, na Hipótese do Ângulo Agudo, nem toda reta paralela possui uma perpendicular comum. Para uma melhor compreensão do trabalho de Saccheri, BONOLA ([7], p. 39-40) propõe uma situação onde é feita, na Hipótese do Ângulo Agudo, uma análise de duas retas coplanares e que não se intersectam, com respeito a existência ou não de uma perpendicular comum.

Para isso, considere as retas  $r$  e  $s$  nessas condições. Seja  $A_1$  e  $A_2$  pontos sobre a reta  $r$ . Sejam ainda os pontos  $B_1$  e  $B_2$ , respectivamente, os pés das perpendiculares do pontos  $A_1$  e  $A_2$  sobre a reta  $s$ .

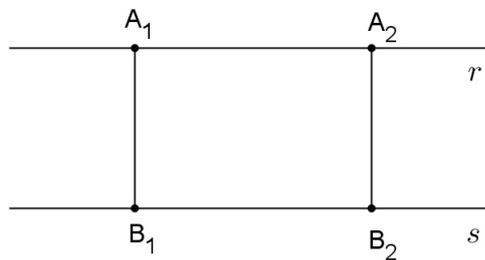


Figura 2.25

Como na Hipótese do Ângulo Agudo, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é menor do que  $360^\circ$  (quatro retos), segue que as somas dos ângulos  $B_1\hat{A}_1A_2$  e  $B_2\hat{A}_2A_1$  no quadrilátero  $B_1A_1A_2B_2$  é menor que  $180^\circ$ . Restam então, três possibilidades para esses dois ângulos:

- (i) um reto e o outro é agudo;
- (ii) ambos são agudos;
- (iii) um é agudo e o outro é obtuso.

No primeiro caso, já existe uma perpendicular comum para as retas  $r$  e  $s$ .

No segundo caso <sup>8</sup>, pode-se provar a existência dessa perpendicular comum usando a ideia de continuidade. Com efeito, se a reta  $A_1B_1$  é movida continuamente, mantendo-se perpendicular à reta  $s$ , até a posição  $A_2B_2$ , o ângulo  $B_1\hat{A}_1A_2$  começa agudo e chega a sua posição final com um ângulo obtuso. Dessa maneira, deve haver uma posição intermediária  $AB$  onde o ângulo  $B\hat{A}A_2$  é reto. Portanto  $AB$  é a perpendicular comum das retas  $r$  e  $s$ .

<sup>8</sup>Esse caso foi tratado por Saccheri na seguinte proposição:

Prop. XXII: *Sejam dois segmentos  $AB$  e  $CD$  coplanares e perpendiculares à reta  $BD$ . Na Hipótese do Ângulo Agudo, se os ângulos interno que o segmento  $AC$  forma com ambas as retas são agudos, então os segmentos  $AC$  e  $BD$  tem uma perpendicular comum; e mais, esta perpendicular está entre os pontos  $A$  e  $C$*

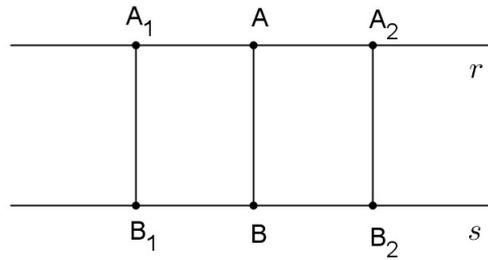


Figura 2.26

No último caso, ou as retas  $r$  e  $s$  não tem uma perpendicular comum, ou, se tiverem não está entre os pontos  $A_1$  e  $A_2$ . É fácil perceber que a impossibilidade de existência dessa perpendicular entre os pontos  $A_1$  e  $A_2$ . De fato, supondo que essa perpendicular exista em um segmento  $AB$  e tomando o ângulo  $B_2\hat{A}_2A_1$  como obtuso, será formado o quadrilátero  $BAA_2B_2$  cuja soma dos ângulos interno é maior que  $360^\circ$ , absurdo dentro da Hipótese do Ângulo Agudo.

Dentro dessa possibilidade de existência de duas retas coplanares, que não se intersectam e não tem perpendicular comum, Saccheri prova que:

*Sejam  $r$  e  $s$  duas retas no mesmo plano. Na Hipótese do Ângulo Agudo, se elas não se intersectam e não tem uma perpendicular comum, então se aproximam, mútua e constantemente, cada vez mais uma da outra e a "distância" entre essas retas se torna menor do que qualquer segmento dado, seja ele tão pequeno quanto se queira*<sup>9</sup>.

Em outras palavras, Saccheri mostra que as retas  $r$  e  $s$  são assintóticas<sup>10</sup>. Resta portanto mostrar que estas retas de fato existem.

Para isso considere uma reta  $r$  e um ponto  $A$  fora dessa reta. Seja  $B$  o pé da perpendicular baixada de  $A$  sobre  $r$ . Seja ainda a reta  $AC$  formando o ângulo reto  $B\hat{A}C$ .

Inicialmente deve-se perceber que se uma reta  $AP$  corta a reta  $r$ , então toda reta que forma com  $AB$  um ângulo inferior a  $B\hat{A}P$  também intersectará a reta  $r$ . E, do mesmo modo, se uma reta  $AQ$ , diferente de  $AC$ , tem uma perpendicular comum com  $r$ , então, toda reta que forma com  $AB$  ângulo agudo maior que  $B\hat{A}Q$ , terá uma perpendicular comum com  $r$ . De fato, a primeira afirmação é imediata e a segunda pode

<sup>9</sup> Saccheri trabalha essa ideia em duas proposições:

PROP. XXIII: *Dadas  $AX$  e  $BX$  duas retas no mesmo plano, na Hipótese do Ângulo Agudo, ou elas possuem uma perpendicular comum, ou se cruzam, se aproximam cada vez mais uma da outra.*

PROP. XXV: *Dadas duas retas  $AX$ ,  $BX$  no mesmo plano (formando com  $AB$ , um ângulo agudo no ponto  $A$ , e um ângulo reto no ponto  $B$ ) de modo a aproximarem cada vez mais e mutuamente, para o ponto  $X$ , se a sua distância é sempre maior do que um determinado comprimento, a hipótese de ângulo agudo está destruída.*

Se supõe que ele usa duas vezes a letra  $X$ , indicando que as retas deverão se intersectar em algum ponto.

<sup>10</sup>Saccheri não usa essa terminologia

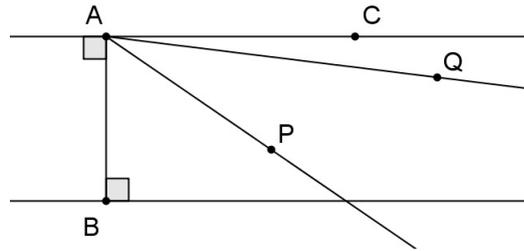


Figura 2.27

ser comprovadas utilizando o caso (ii) visto acima.

Considere agora o conjunto de todas as retas  $AP$  que intersectam  $r$ , partindo de  $AB$  em direção à  $AC$ . Note que não se pode determinar a "última" reta desse conjunto. Igualmente, considere o conjunto de todas as retas  $AQ$  que têm uma perpendicular comum com  $r$ , no sentido de  $AC$  para  $AB$ .

Pode-se dizer que o conjunto dos ângulos  $B\hat{A}P$ , em que a reta  $AP$  corta a reta  $r$  possui um "limite superior", o ângulo  $B\hat{A}X$  em que a reta  $AX$  não intersecta  $r$ . E, o conjunto dos ângulos agudos  $B\hat{A}Q$ , em que  $AQ$  e  $r$  possuem uma perpendicular comum, possui um "limite inferior", o ângulo  $B\hat{A}Y$ , tal que  $BY$  não possui perpendicular comum com  $r$ .

Basta mostrar agora que as retas  $AX$  e  $AY$  são coincidentes.<sup>11</sup> Para essa demonstração suponha por absurdo que as retas  $AX$  e  $AY$  não coincidem.

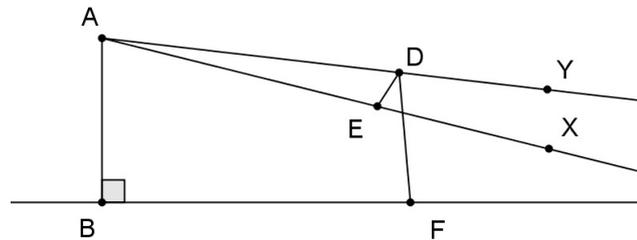


Figura 2.28

Da proposição 2.2.13, pode-se marcar o ponto  $D$  sobre a reta  $AY$  e o ponto  $E$ , pé da perpendicular de  $D$  sobre  $AX$ , de modo que

$$DE > AB. \quad (2.1)$$

Por outro lado, seja  $F$  o pé da perpendicular baixada de  $D$  sobre  $r$ . Como a reta  $AY$  e  $r$  não possuem uma perpendicular comum, o ângulo  $A\hat{D}F$  é obtuso e pelo Lema 2.2.1 tem-se que

$$AB > DF. \quad (2.2)$$

<sup>11</sup> Para provar que as retas  $AX$  e  $AY$  coincidem, Saccheri, (em sua proposição XXXII) considera um ponto no infinito. Assim, será apresentada uma demonstração proposta por BONOLA ([7], p. 42)

De 2.1 e 2.2 segue

$$DE > DF.$$

Mas, note que  $\widehat{DEF}$  é obtuso, contrariando a última inequação. E, por isso  $AX$  coincide com  $AY$ .

Destes resultados pode-se concluir que, dentro da Hipótese Ângulo Agudo, duas retas que não se intersectam, ou tem uma perpendicular comum, a partir da qual elas se afastam indefinidamente, ou elas se aproximam assintoticamente.

Essas consequências pareciam absurdas para Saccheri, que as via de um ponto de vista Euclidiano, porém do ponto de vista lógico nenhuma contradição fora encontrada. Para BONOLA ([7], p. 43) "Saccheri tenta chegar a uma decisão confiando à intuição e à fé na validade do V Postulado de Euclides ao invés da Lógica". Isso se torna evidente quando Saccheri conclui: "*A Hipótese do Ângulo Agudo é falsa, porque é repugnante à natureza da linha reta*".

# Capítulo 3

## As Novas Geometrias

Depois de mais de dois milênios de tentativas sem êxito de provar o Postulado das Paralelas, no início do século XIX, apareceram as primeiras suspeitas de que tal demonstração era impossível. Os primeiros a perceber essa impossibilidade foram os matemáticos Karl-Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860) e Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856). Seus trabalhos foram desenvolvidos sob a negação do quinto postulado na forma de Playfair. Ao negar este postulado, tem-se duas hipóteses a considerar:

- *por um ponto fora de uma reta pode passar mais de uma reta paralela à reta dada;*
- *ou, não passa nenhuma reta paralela à reta dada.*

Esta última foi descartada por conta da Proposição 1.2.3, que garante a existência de pelo menos uma reta paralela. Desenvolvendo a primeira hipótese foi possível construir um sistema lógico-geométrico, tão consistente quanto o de Euclides. Nascia aqui a primeira *Geometria não-Euclidiana*, que mais tarde viria a se chamar *Geometria Hiperbólica*.

Neste capítulo será apresentado os fundadores das Geometrias Não-Euclidianas, em particular da Geometria Hiperbólica. Posteriormente, a parte final do capítulo será dedicada a uma abordagem dessa geometria, mostrando alguns resultados importantes. Por fim sera feita uma apresentação mais breve da Geometria Elíptica.

### 3.1 Fundadores da Geometria Não-Euclidiana

#### 3.1.1 Karl-Friedrich Gauss (1777-1855)

O matemático alemão Karl-Friedrich Gauss (1777-1855) teve como campo de atuação a Matemática, a Astronomia e a Física. Desde criança sempre foi considerado um gênio, principalmente no que se refere à matemática. Aos oito anos de idade Gauss surpreende

um professor quando rapidamente resolve uma tarefa proposta por este: calcular a soma de todos os números naturais de 1 à 100. Gauss percebe que esses inteiros se tratavam nada mais, nada menos, que 50 pares de números cuja soma valia 101. Gauss (o *príncipe da matemática*, como ficou conhecido) é considerado um dos maiores matemáticos da história e produziu resultados importantíssimos em diversos campos da matemática pura e aplicada.

Possivelmente teria se interessado pelas discussões sobre o quinto postulado de Euclides desde 1792, quando tinha apenas 15 anos de idade. Ao longo dos anos, através de suas correspondências, é possível perceber seus trabalhos e investigações no que se refere à formalização de uma nova geometria.

Inicialmente, Gauss, utilizando-se do método de redução ao absurdo, teria tentado demonstrar o Quinto Postulado, como sugere uma carta escrita, em 1799, ao matemático húngaro Wolfgang Bolyai <sup>1</sup> (1775-1856):

*Quanto a mim, já fiz alguns progressos no meu trabalho. No entanto, o caminho que escolhi não nos leva ao objetivo que buscamos, e que você me garante que você alcançou. Parece bastante para obrigar-me a duvidar da verdade de geometria em si.*

*É verdade que eu cheguei a muito, que para a maioria das pessoas seria a constituição de uma prova, mas nos meus olhos não prova exatamente nada...*

Trabalhando na tentativa de prova do Quinto Postulado <sup>2</sup> que, cautelosamente, mas de forma cada vez mais clara, foi aumentando a sua certeza em relação ao fato deste postulado não ser demonstrável. Logo ele percebera que se utilizasse uma afirmação que contrariasse este postulado, não encontraria contradição alguma nos resultados, aliás ele percebe que acaba formulando uma Geometria diferente da Euclidiana, porém completamente satisfatória. Em 1817, em uma carta para o astrônomo alemão W. Olbers (1758 - 1840), Gauss escreve:

*Estou cada vez mais convencido de que a necessidade da nossa geometria não pode ser provado, pelo menos pela razão humana e para a razão humana. Pode ser que na próxima vida chegaremos a pontos de vista sobre a natureza do espaço que hoje são inacessíveis para nós. Até então geometria não pode ser colocado no mesmo nível com a aritmética, que existe puramente a priori, mas sim com a mecânica.*

Durante a segunda década do século XIX que Gauss começa a desenvolver as ideias da nova Geometria. Ele foi o primeiro a designar a nova geometria de *Geometria não-Euclidiana*. Em 1824, Gauss escreve uma carta ao matemático alemão F. A. Taurinus (1794-1874) que estaria tentando provar o postulado das paralelas. Nesta carta fica claro

---

<sup>1</sup>Gauss estudara na Universidade de Gottingen, onde conheceu o húngaro Wolfgang Bolyai (ou Farkas Bolyai).

<sup>2</sup>Segundo alguns documentos existentes, Gauss teria tentado provar o Quinto Postulado até o final da primeira década do século XIX.

que Gauss estava convencido da existência dessa Geometria não Euclidiana:

*Com relação à sua tentativa, não tenho nada (ou quase nada) a dizer, excetuando que ela é incompleta. É verdade que sua prova de que a soma dos três ângulos de um triângulo plano não pode ser maior do que  $180^\circ$  está de alguma forma com ausência de rigor geométrico. Mas isto pode facilmente ser remediado, não pairando nenhuma dúvida de que esta impossibilidade pode ser provada rigorosamente. Mas a situação é muito diferente na segunda parte, que a soma dos ângulos não pode ser menor do que  $180^\circ$ ; este é o ponto crítico, a rocha responsável por todos os naufrágios.*

*Imagino que este problema não o tenha envolvido por muito tempo, tenho refletido sobre ele durante 30 anos e não acredito que qualquer outro possa ter pensado mais sobre esta segunda parte, embora eu não tenha publicado nada sobre o assunto. A hipótese de que a soma dos ângulos é menor que  $180^\circ$  leva a uma Geometria curiosa, muito diferente da nossa (a euclidiana), mas totalmente consistente, a qual desenvolvi a um ponto que me satisfaz plenamente, no sentido de que posso resolver qualquer problema nela, com exceção da determinação de uma constante, que não pode ser fixada a priori. Quão maior for essa constante, mais próximo nos encontraremos da Geometria Euclidiana, e se ela for escolhida infinitamente grande, as duas geometrias coincidem.*

*Os teoremas desta Geometria parecem paradoxais e, para um não iniciado, absurdos; mas, reflexão cuidadosa sobre o assunto revela que eles não contém nada de impossível. Por exemplo, os três ângulos de um triângulo tornam-se tão pequenos quanto se queira, se os lados são tomados arbitrariamente grandes; entretanto, a área de um triângulo nunca pode exceder um limite definido, não importando quão grande os lados sejam tomados, e, de fato, nem alcançar esse limite.*

*Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta Geometria não euclidiana não tiveram sucesso, e a única coisa nela que se opõe a nossa concepção é que, se for verdade, deve existir no espaço uma unidade universal de medida linear (por nós desconhecida). Mas, me parece que conhecemos, apesar do que dizem os metafísicos muito pouco, ou muito próximo de nada, a respeito da verdadeira natureza do espaço, para considerar como absolutamente impossível aquilo que se nos apresenta como não natural. Se essa Geometria não euclidiana fosse verdadeira e se fosse possível comparar aquela constante com as nossas medições feitas na terra e nos céus, ela poderia então ser determinada a posteriori. Consequentemente tenho algumas vezes expressado o desejo de que a Geometria Euclidiana não seja verdadeira, porque então teríamos a priori uma unidade absoluta e universal de medida.*

*Não receio um que tenha demonstrado possuir uma mente matemática deixe de entender o que foi dito acima, mas, de qualquer forma, considere-a uma comunicação privada do qual nenhum uso público, ou qualquer uso que leve de qualquer maneira a sua*

*publicidade, poderá ser feita. Talvez eu mesmo, se tiver no futuro mais tempo livre do que na presente circunstância, divulgue minhas investigações.*

É fato que Gauss jamais publicara seus resultados, permitindo assim que posteriormente, trabalhos análogos fossem desenvolvidos e publicados, e o mérito fosse atribuído a outros. Para BARBOSA ([2], p. 39) a não publicação dos resultados é compreensível mediante a época e situação social em que vivia.

Apesar de a prudência de Gauss na divulgação de seus achados ter permitido que outros viessem com ele dividir a glória da descoberta da nova Geometria, sua atitude é por demais compreensível. Nos seus dias, a filosofia de Kant havia sido assimilada pela Igreja Romana e considerada como dogma. Era a época em que as sombras da Inquisição assustavam todos, particularmente as pessoas que adquiriam o domínio de qualquer conhecimento que pudesse se considerado, de qualquer forma, contrário à doutrina.

### 3.1.2 Janos Bolyai (1802-1860)

Gauss teria estudado na Universidade de Gottingen, onde conheceu o matemático húngaro Wolfgang Bolyai. A carta já citada que Gauss escreve em 1799 para W. Bolyai deixa claro que ambos estavam trabalhando tentativa de prova do postulado das paralelas.

Em 1804, W. Bolyai escreve um tratado, o *Theoria Parallelarum*, onde acredita ter conseguido a tal prova. Ele o envia a Gauss, juntamente com uma carta, e este, ao responder aponta um erro na demonstração. W. Bolyai teria trabalhado por mais algum tempo na teoria das paralelas e posteriormente teria abandonado a questão. Segundo BARBOSA ([2], p.41) Wolfgang Bolyai foi um homem muito talentoso, ele era professor, poeta, dramaturgo, músico e inventor. Suas primeiras publicações foram dramas e poesias. Porém ele ficou conhecido por ser o pai de Janos Bolyai.

Janos Bolyai nasceu em 15 de dezembro de 1802. Janos foi educado para o exército, chegando a ser oficial do corpo de engenheiros militares do exército húngaro. Mas, Janos estudou matemática com seu pai, e, devido a isto, acabou se interessando pela teoria das paralelas. Seu pai saturado com esse problema, pede que deixe de lado essa questão:

*Pelo amor de Deus, te peço que abandones. Ela teme mais do que paixões sensuais, porque ela também ocupa todo o seu tempo, te priva de saúde, paz de espírito e felicidade na vida.*

Janos continuou trabalhando, e, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas à reta dada, conseguiu resultados de natureza diferenciada, de modo que sua atenção foi voltando para a possibilidade de formular uma outra Geometria. Inicialmente imaginou uma Geometria geral que tivesse a Geometria Euclidiana como caso particular. No entanto, durante a terceira década do século XIX

o trabalho de Janos foi ganhando forma, admitindo uma afirmação que contrariasse o postulado das paralelas, Janos alcançou diversos resultados, que constituiu a geometria que mais tarde seria chamada de Geometria Hiperbólica.

Quando anunciou suas descobertas em geometria para seu pai, este lhe escreve recomendando a publicação:

*Me parece aconselhável que, se tem obtido uma solução para o problema, por duas razões, sua publicação deve ser acelerada: em primeiro lugar, porque as ideias passam facilmente de um para outro, que pode publicar; em segundo lugar, porque parece ser que muitas coisas tem uma época na qual são descobertas em muitos lugares simultaneamente, igual as violetas surgem por todas partes na primavera.*

Janos Bolyai publicou seu trabalho em um apêndice de 26 páginas em um livro do seu pai, o Tentamen, publicado em 1832. W. Bolyai enviou uma cópia deste livro a seu amigo Gauss, apresentando os feitos de seu filho. Gauss recebe a notícia com um certo descrédito afirmando que ele mesmo já havia encontrado esses resultados anteriormente:

*Se eu começasse com a afirmação de que não ousou louvar tal trabalho, você, é claro, se sobressaltaria: mas não posso proceder de outra forma, pois louvá-lo significaria louvar a mim mesmo, visto que todo o conteúdo do trabalho, o caminho que seu filho seguiu, os resultados aos quais ele chegou, coincidem quase exatamente com as meditações que têm ocupado minha mente por (um período de) trinta a trinta e cinco anos. Por isso encontro-me surpreso ao extremo.*

*Minha intenção era, com relação ao meu trabalho, do qual muito pouco até o presente foi publicado, não permitir que fosse conhecido durante minha vida. A maioria das pessoas não tem a perspicácia para entender nossas conclusões, e encontrei (na vida) apenas uns poucos que receberam com interesse o que lhes comuniquei. Para entender essas coisas a pessoa primeiramente deve ter uma percepção aguda do que é necessário, e sobre isso a maioria é confusa. Por outro lado, era meu plano colocar tudo por escrito eventualmente, de modo que, pelo menos, não perdesse comigo.*

*Assim, estou muito surpreso de ter sido poupado deste esforço, e super feliz de que tenha sido o filho do meu velho amigo que passou à minha frente de forma tão extraordinária.*

Apesar da última frase de Gauss, Janos ficou completamente decepcionado com a carta do grande matemático amigo do seu pai, pois esta lhe trouxe a notícia que outra pessoa já havia feito as mesmas descobertas. Depois disto, Janos Bolyai não voltou a publicar seus resultados. Mesmo assim continuou suas investigações e deixou mais de 20000 páginas de manuscritos matemáticos. Estes podem ser encontrados na Biblioteca Bolyai-Teleki em Morosvásáhely, atual Târgu-Mures, Roménia.

### 3.1.3 Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856)

Em 1848, Janos Bolyai soube que outra pessoa publicara, antes dele, resultados idênticos aos seus. O matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachewsky (1793-1856), havia publicado um trabalho similar ao de J. Bolyai, em 1829, "roubando" assim os holofotes deste e de Gauss.

Nicolai Lobachevsky nasceu na Rússia. Aos sete anos perdeu o pai, e mudou-se com sua mãe e seus dois irmãos para a cidade de Kazan. Frequentou a Universidade de Kazan, onde entrou em contato com professores vindos da Alemanha, entre eles Johann M. C. Bartels (1769 - 1833), que havia também sido professor de Gauss. Tornou-se instrutor, e logo depois, aos 21 anos de idade, professor na mesma universidade que estudou. Mais tarde foi nomeado reitor, cargo que ocupou até o fim da vida.

Lobachewsky dedicou mais de vinte anos à descoberta da nova geometria (geometria hiperbólica), que inicialmente ele chamou de *geometria imaginária*. A primeira apresentação pública de seu trabalho foi feita à Sociedade de Física-Matemática da cidade de Kazan, em 1826, sem nenhuma aceitação, pois suas afirmações punham em dúvida a inquestionável Geometria de Euclides. Em 1829, publicou o artigo *Sobre os Princípios da Geometria* que marca o nascimento oficial da Geometria não euclidiana. Neste artigo ele se mostra completamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não pode ser provado com base nos outros quatro, e constrói a ideia da nova geometria fundamentada na hipótese, contrária ao V Postulado de Euclides, de que *por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais de uma reta no plano que não encontra a reta dada*.

Estes resultados se tornaram um marco revolucionário da geometria, mostrando que a Geometria Euclidiana não era a verdade absoluta suposta até então, e tornando necessário fazer-se uma revisão completa nos conceitos fundamentais da Matemática.

Lobachewsky, diferentemente de J. Bolyai, continuou seu trabalho e publicações acerca do tema: em 1838 publicou *Novos Fundamentos da Geometria*, em russo; em 1840 publicou *Investigações geométricas sobre a teoria das paralelas*, em alemão; e, em 1855, um ano antes da sua morte, embora estivesse cego, lançou seu livro *Pangeometria*, em francês e russo.

Suas descobertas foram reconhecidas muito lentamente. Acredita-se que Gauss teria tomado conhecimento do trabalho de Lobachewsky somente em 1841. Em 1848 Wolfgang Bolyai ouviu falar do trabalho de Lobachewsky e escreveu a Gauss, pedindo o nome do livro do matemático russo. Gauss respondeu recomendando o trabalho de Lobachewsky e caracterizando-o como uma exposição adequada e de fácil obtenção. Assim, Wolfgang e, através dele, Johann se conheceu a geometria de Lobachewsky.

Não só o trabalho de Lobachewsky como também o de J. Bolyai não tiveram reconhecimentos imediatos. Para BARBOSA ([2], p. 46) isto é justificável:

o trabalho de Lobachewsky foi escrito em russo, numa época em que o latim, o alemão e o francês eram as principais línguas da ciência; os dois pesquisadores, Lobachewsky e J. Bolyai, eram membros novos da comunidade científica internacional; a concepção filosófica dominante apontava na direção oposta à sua descoberta.

## 3.2 Geometria Hiperbólica

Nesta seção será apresentada a Geometria descoberta por Gauss, J. Bolyai e Lobachewsky, e, que hoje é conhecida como *Geometria Hiperbólica*. Essa Geometria é, por definição, a geometria formulada a partir dos axiomas da Geometria Absoluta juntamente com um axioma que contraria o postulado das paralelas e que aqui será chamado de *Axioma Hiperbólico*.

**Axioma de Hiperbólico:** *Por um ponto fora de uma reta, podem ser traçadas pelo menos duas retas paralelas à reta dada.*

É importante reafirmar que o quinto postulado de Euclides é equivalente à afirmação de que por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada (Axioma de Playfair), que por sinal contraria o Axioma Hiperbólico.

A primeira conclusão que se pode ter a respeito do Axioma Hiperbólico é que, dado um ponto fora de uma reta, se existem duas retas passando pelo ponto e paralelas à reta dada, então, devem existir infinitas retas com esta propriedade. Com efeito, considerando um ponto  $P$  fora de uma reta  $r$ , e as retas  $m_1$  e  $m_2$  passando por  $P$  e paralelas à  $r$ , pode-se observar que  $m_1$  e  $m_2$  formam quatro ângulos de modo que a reta  $r$  está completamente contida num deles. Todas as retas traçadas por  $P$  e contidas no par de ângulos opostos pelo vértice, nenhum dos quais contendo  $r$ , não intersectará esta reta.

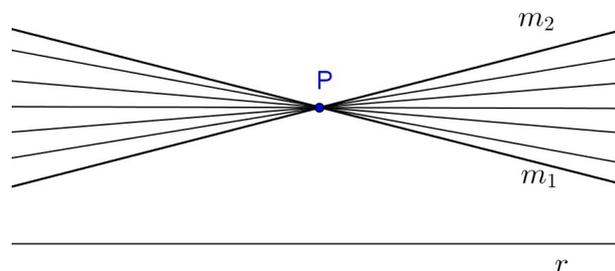


Figura 3.1

Assim devem ser infinitas as retas que passam por  $P$  e são paralelas à reta  $r$ . Porém duas delas se destacam mediante a proposição a seguir.

**Proposição 3.2.1.** *Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$  fora desta reta, existem exatamente*

duas retas  $m_1$  e  $m_2$  que passam pelo ponto  $P$  e separam o conjunto das retas que intersectam  $r$  do conjunto das que não intersectam  $r$ .

*Demonstração.* Seja o ponto  $P$  fora de uma reta  $r$ . Considere ainda o ponto  $Q$  pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $r$ . Por  $P$  traça-se a reta  $m$  perpendicular ao segmento  $PQ$  (e paralela à reta  $r$ ). Tome dois pontos  $E$  e  $F$  sobre  $m$  de modo que  $P$  está entre eles.

Como  $P$  pertence ao lado  $EF$  do triângulo  $\triangle EFQ$ , então qualquer reta que passa por  $P$ , com exceção das retas  $m$  e a reta que passa pelo segmento  $PQ$ , deve cortar um dos segmentos:  $EQ$  ou  $FQ$ .

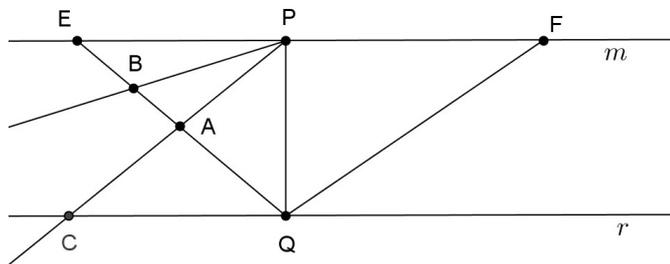


Figura 3.2

Inicialmente serão consideradas apenas as retas intersectam o segmento  $EQ$ . Observe que cada ponto de interseção representa uma das retas que passa por  $P$ , podendo ou não intersectar  $r$ . Esses pontos podem ser representados por dois conjuntos disjuntos: o conjunto  $\mathcal{N}$  dos pontos que representam retas que intersectam  $r$  e o conjunto  $\mathcal{M}$  pontos que representam retas que não intersectam  $r$ . Note que  $Q \in \mathcal{N}$  e  $E \in \mathcal{M}$ . Além disto se  $A \in \mathcal{M}$ , então  $AQ \subset \mathcal{M}$ . Com efeito, se  $C$  é a interseção da reta determinada por  $AP$  e a reta  $r$ , basta notar que qualquer reta que passa por  $P$  e pelo ângulo  $Q\hat{P}A$  deve cortar o segmento  $CQ$ . Do mesmo modo, se  $B \in \mathcal{N}$ , então  $BE \subset \mathcal{N}$ .

Ora, deve existir então exatamente um ponto  $S$  que separa os dois conjuntos  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{M}$ . Resta a qual destes conjuntos o ponto  $S$  pertence. Suponha que  $S \in \mathcal{M}$ , e neste caso, a reta que passa por  $PS$  intersecta  $r$  num ponto  $T$ . Seja um ponto  $T'$  sobre  $r$  de modo que  $T$  está entre  $T'$  e  $Q$ . Assim a reta que passa por  $PT'$  deve intersectar o segmento  $ES$ , o que é um absurdo. Logo  $S \in \mathcal{N}$ . Obtém-se aqui a reta  $m_1$  que passa pelos pontos  $P$  e  $S$  e não intersecta  $r$ .

Analogamente, considerando as retas que intersectam o segmento  $FQ$  e repetindo o processo, é possível encontrar uma reta  $m_2$  com características similares as de  $m_1$ . Assim as retas  $m_1$  e  $m_2$  separam os conjuntos das retas que cortam do conjunto das retas que não cortam a reta  $r$ .

□

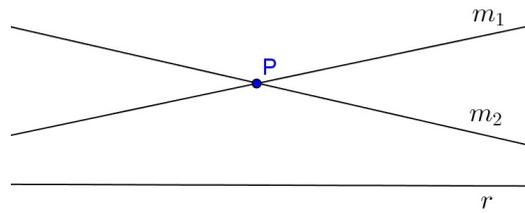


Figura 3.3

As duas retas  $m_1$  e  $m_2$  da prova anterior serão chamadas de *paralelas assintóticas* à reta  $r$  passando por  $P$ . A perpendicular a  $r$  que passa por  $P$  forma com as retas  $m_1$  e  $m_2$  ângulos denominados *Ângulos de Paralelismo*.

**Proposição 3.2.2.** *Sejam  $m_1$  e  $m_2$  paralelas assintóticas a uma reta  $r$  passando por um ponto  $P$ . Os ângulos de paralelismo formados são congruentes. Além disto, estes ângulos são agudos.*

*Demonstração.* Seja o ponto  $P$  fora de uma reta  $r$ . Considere ainda o ponto  $Q$  pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre  $r$ . E ainda, considere as retas  $m_1$  e  $m_2$  paralelas assintóticas a  $r$  passando por  $P$ , formando ângulos de paralelismo  $\alpha$  e  $\beta$  conforme figura baixo.

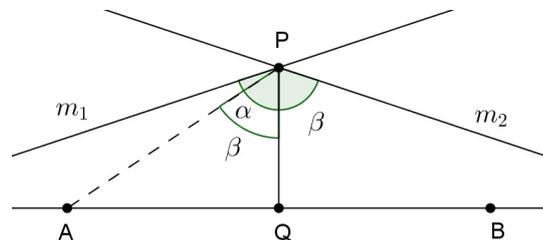


Figura 3.4

Suponha que  $\alpha > \beta$ . No lado em que está o ângulo  $\alpha$ , considere a reta passando por  $P$  e que forma um ângulo  $\beta$  com o segmento  $PQ$ . Note que esta reta deve cortar  $r$  em um ponto  $A$ . Marque sobre  $r$  o ponto  $B$  tal que  $AQ = QB$ . Assim, como  $\hat{AQP} = \hat{BQP} = 90^\circ$  e  $PQ$  é lado comum, segue que os triângulos  $\triangle AQP$  e  $\triangle BQP$  são congruentes. Logo  $\hat{BPQ} = \beta$ , o que é um absurdo.

De modo análogo  $\beta > \alpha$  também acarretaria em um absurdo. Portanto  $\alpha = \beta$ . □

Ocasionalmente as retas  $m_1$  e  $m_2$  da Figura 3.4 podem ser tratadas, respectivamente, como paralela assintótica à esquerda e paralela assintótica à direita, para referir-se à paralela assintótica em um determinado sentido.

**Teorema 3.2.1.** *Se uma reta é paralela assintótica, passando por um ponto e em um determinado sentido, a uma reta dada, então ela é, em cada um de seus pontos, paralela assintótica no mesmo sentido à reta dada.*

*Demonstração.* Considere uma reta  $m$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  e é paralela assintótica a uma reta  $r$  passando por um ponto  $P$  (entre  $A$  e  $B$ ). Suponha sem perda de generalidade que  $m$  é paralela assintótica à direita. Assim, se  $R$  é um ponto qualquer da reta  $m$ , deve-se provar que  $m$  é paralela assintótica a reta  $r$ , à direita, passando por  $R$ . Para isto, são dois casos a considerar.

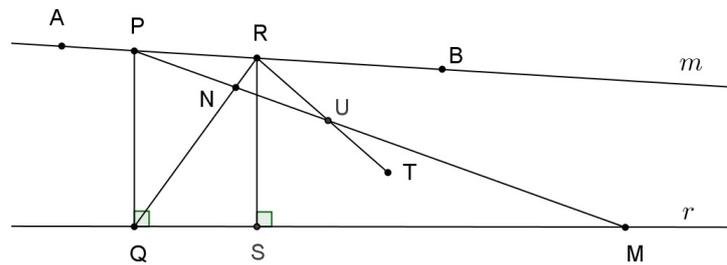


Figura 3.5

**Caso 1:** O ponto  $R$  está no lado do ponto  $P$  que fica na direção do paralelismo. Neste caso, trace  $PQ$  e  $RS$  perpendiculares à  $r$ . Seja a semi-reta  $S_{RT}$  que passa por  $R$  e pelo ângulo  $S\hat{R}B$ . Deve ser mostrado que  $S_{RT}$  corta  $r$ . Considere um ponto  $U$  sobre o segmento  $RT$ . Trace a reta  $PU$  e o segmento  $RQ$ . Como  $m$  é paralela assintótica à reta  $r$  passando por  $P$ , segue que a reta  $PU$  deve cortar a reta  $r$  num ponto  $M$  e corta também o segmento  $RQ$  em  $N$ . Perceba que a semi-reta  $S_{RT}$  corta o lado  $NM$  do triângulo  $\Delta QMN$ . Pelo axioma de Pasch, deverá cortar o lado  $QM$ .

**Caso 2:** O ponto  $R$  está no lado do ponto  $P$  oposto a direção do paralelismo. Essa demonstração é análoga à do Caso 1.

□

**Teorema 3.2.2.** *Se uma reta é paralela assintótica a uma segunda, então esta segunda reta é paralela assintótica à primeira.*

*Demonstração.* Considere as retas  $m$  e  $r$  que passam pelos pontos  $A$  e  $B$ , e  $C$  e  $D$ , respectivamente. Seja  $P$  um ponto entre  $A$  e  $B$ . Suponha que  $m$  seja paralela assintótica à reta  $r$  passando por  $P$ , digamos à direita. Seja  $PQ$  perpendicular à  $r$  e  $QR$  perpendicular à  $m$ . Note que o ponto  $R$  deve ficar do lado do paralelismo.

Para provar que  $r$  é paralela assintótica à  $m$  passando por  $Q$ , tem-se que provar que toda reta que passa pelo ponto  $Q$  e divide o ângulo  $R\hat{Q}D$  (agudo), corta a reta  $m$ . Considere uma dessas retas e seja  $E$  um de seus pontos dentro do ângulo  $R\hat{Q}D$ . Trace  $PF$  perpendicular à esta reta. Note que  $F \in S_{QE}$ , visto que  $R\hat{Q}D$  é agudo. Na semi-reta

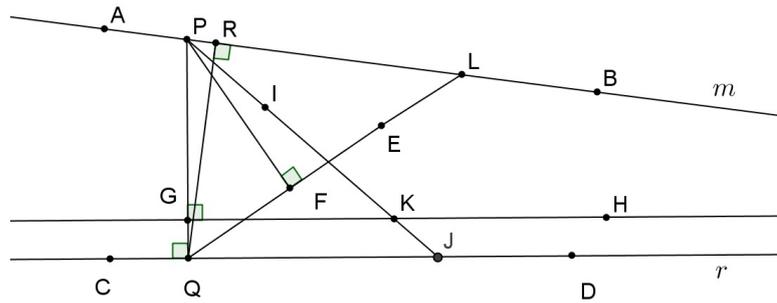


Figura 3.6

$S_{PQ}$  marque o ponto  $G$  tal que  $PG = PF$  e note que  $G$  pertence ao segmento  $PQ$  pois este é a hipotenusa do triângulo retângulo  $\Delta QFP$ . Trace uma reta  $GH$  perpendicular ao segmento  $PQ$ . Construa agora o ângulo  $\hat{GPI} = \hat{FPB}$ , com a semi-reta  $S_{PI}$  na mesma direção do paralelismo. A semi-reta  $S_{PI}$  deve cortar  $r$  no ponto  $J$ . Como a reta  $GH$  corta o lado  $PQ$  do triângulo  $\Delta QPJ$  e não corta o lado  $QJ$ , deve então cortar o lado  $PJ$  em um ponto  $K$ , formando o triângulo retângulo  $\Delta PGK$ . Em  $S_{PB}$  marque o ponto  $L$  tal que  $PL = PK$ , formando o triângulo retângulo  $\Delta PFL$  congruente, por construção ao triângulo  $\Delta PGK$ . Logo  $\hat{PFL} = \hat{P\hat{G}K} = 90^\circ$ . Isto significa que os pontos  $Q, F, E$  e  $L$  são colineares e portanto a semi-reta  $S_{QE}$  corta a reta  $m$ .

□

**Teorema 3.2.3.** *Se duas retas são paralelas assintóticas a uma terceira, na mesma direção, então, são paralelas assintóticas entre si.*

*Demonstração.* Sejam duas retas  $m$  e  $n$  paralelas assintóticas, numa mesma direção, a uma terceira reta  $r$ . Tem-se dois casos a considerar.

**Caso 1:** A reta  $r$  esta entre as retas  $m$  e  $n$ . Neste caso, considere o ponto  $A$  sobre  $m$ , e trace  $AB$  perpendicular a  $n$ . Considere os pontos  $C$  e  $D$  respectivamente sobre as retas  $m$  e  $r$ , do mesmo lado de  $AB$  que corresponde à direção do paralelismo. Considere a semi-reta  $S_{AE}$  que divide o ângulo  $\hat{BAC}$ . Como  $m$  é a paralela assintótica à  $r$  nesta direção, a semi-reta  $S_{AE}$  corta a reta  $r$  num ponto  $F$ . Mas,  $r$  é paralela assintótica à  $n$  passando por  $F$ , e as semi-retas que dividem o ângulo  $\hat{BFD}$  devem intersectar  $n$ . Isto mostra que  $S_{AF}$  corta a reta  $n$ . Portanto  $m$  é paralela assintótica à  $n$ .

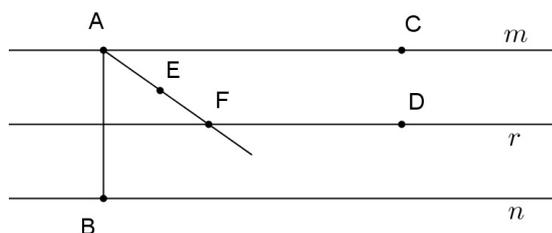


Figura 3.7

**Caso 2:** As duas retas  $m$  e  $n$  estão do mesmo lado da terceira reta  $r$ . Neste caso considere que a reta  $n$  esteja entre as outras duas. Tome um ponto  $P \in m$  e considere a reta  $m'$  que passa por  $P$  e é paralela assintótica à reta  $n$ , na mesma direção do paralelismo (de  $m$  com relação a  $r$ ).

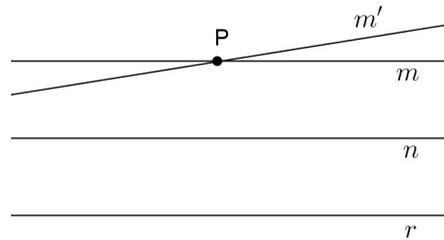


Figura 3.8

De acordo com o Caso 1,  $m'$  é paralela assintótica a  $r$ . Como  $m$  também é paralela assintótica a  $r$  nesta mesma direção, segue que  $m = m'$ , visto que a paralela assintótica, em uma mesma direção e passando pelo mesmo ponto é única. E finalmente,  $m$  é paralela assintótica a  $n$ .

□

Será acrescentado dois pontos especiais a cada reta do plano: um que, em termos de ordenação, vem antes de todos:  $\Omega_1$ ; e outro que, em termos de ordenação, vem depois de todos:  $\Omega_2$ . Esses pontos especiais são chamados de *pontos ideais* ou *pontos no infinito*. Aqui será admitido que as retas paralelas assintóticas possuem em comum um ponto ideal na direção do paralelismo. Assim as paralelas assintóticas convergem para um Ponto Ideal (que não pertence ao plano). Os pontos ideais serão representados por letras gregas maiúsculas. Os demais pontos do plano são os *pontos ordinários*.

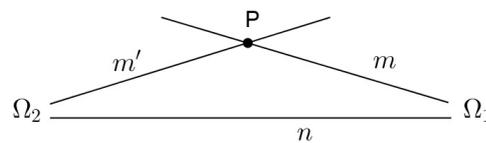


Figura 3.9

Após a construção da ideia de ponto ideal, deve ser inserida a noção de *Triângulos Generalizados*, que são triângulos em que pelo menos um dos vértices é um ponto ideal (ou simplesmente, é um vértice ideal).

Estes triângulos separam o plano em duas regiões: o *interior* do triângulo generalizado, formado por todos os pontos dos segmentos de reta que ligam dois pontos de seus lados; e o *exterior* do triângulo, região complementar à primeira. O interior de um triângulo generalizado é uma região convexa, visto que corresponde à interseção de três semiplanos. Uma reta penetra um triângulo generalizado quando intersecta o seu interior.

Aqui, será tratado os Triângulos generalizados com um único vértice ideal. A notação  $\Delta AB\Omega$  representa um triângulo generalizado com vértices ordinários  $A$  e  $B$ , e vértice ideal  $\Omega$ . Esse triângulo é portanto, formado pelo segmento  $AB$  e por duas semi-retas paralelas assintóticas com origens em  $A$  e  $B$ .

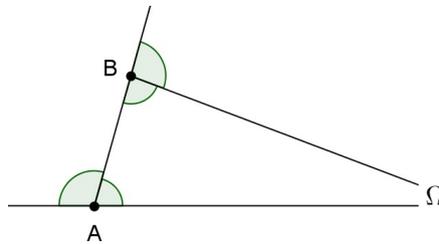


Figura 3.10

Na figura,  $A\hat{B}\Omega$  e  $B\hat{A}\Omega$  são *ângulos internos* do triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$ . Assim como nos "triângulos ordinários" seus suplementos são os *ângulos externos*. No vértice ideal o ângulo é definido como sendo nulo.

**Teorema 3.2.4.** *Se uma reta penetra em um triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$  por um de seus vértices, então, ela corta o lado oposto a este vértice.*

*Demonstração.* Seja o triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$ . As retas  $A\Omega$  e  $B\Omega$  são paralelas assintóticas, logo as retas que penetram pelos vértices  $A$  ou  $B$  devem intersectar o lado oposto. Considere então uma reta  $r$  que passa pelo ponto  $\Omega$  e em algum ponto  $P$  no interior do triângulo. A semi-reta  $S_{AP}$  deve intersectar a reta  $B\Omega$  em um ponto  $Q$ .

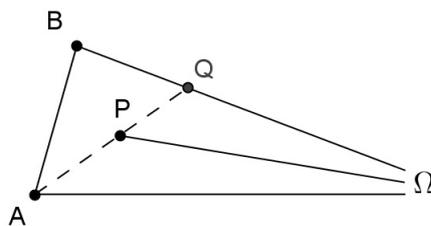


Figura 3.11

Pelo axioma de Pasch, a reta  $r$  corta o lado  $AQ$  do triângulo  $\Delta AQB$ , logo deve intersectar um dos outros lados. Como não pode intersectar o lado  $QB$ , segue que  $r$  deve intersectar o lado  $AB$ .

□

**Teorema 3.2.5.** *Se uma reta corta um dos lados do triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$  e não passa por nenhum de seus vértices, então, intersecta um e somente um dos outros dois lados.*

*Demonstração.* Seja o triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$ . Considere uma reta  $r$  que corta o lado  $B\Omega$  em um ponto  $P$ . Note que a reta deve penetrar no triângulo  $\Delta PAB$  pelo vértice  $P$  e neste caso corta o lado  $AB$ , ou penetra o triângulo generalizado  $\Delta AP\Omega$  pelo vértice  $P$ , e, pelo teorema anterior,  $r$  corta  $A\Omega$ . Se a reta  $r$  corta o lado  $B\Omega$  o resultado segue o mesmo raciocínio.

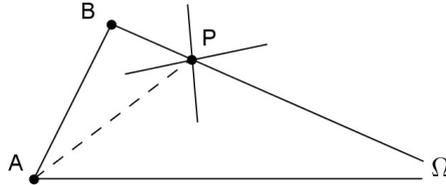


Figura 3.12

Caso uma reta  $r$  corte o lado  $AB$  do triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$  em um ponto  $P$ . Considere a reta  $m$  paralela assintótica às retas  $A\Omega$  e  $B\Omega$  passando por  $P$ .

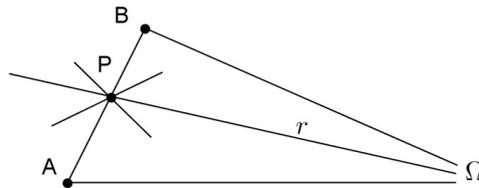


Figura 3.13

Note que  $r$  penetra um dos triângulos generalizados  $\Delta AP\Omega$  ou  $\Delta BP\Omega$  pelo vértice  $P$ , e em qualquer dos casos, pelo teorema anterior, deverá intersectar um dos respectivos lados  $A\Omega$  ou  $B\Omega$ .

□

**Teorema 3.2.6** (Teorema do Ângulo Externo para Triângulos Generalizados). *Um ângulo externo de um triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$  é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.*

*Demonstração.* Dado o triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$ , seja  $C$  um ponto da semi-reta  $S_{AB}$  fora do segmento  $AB$ . Assim, o ângulo  $C\hat{B}\Omega$  é um ângulo externo do triângulo generalizado  $\Delta AB\Omega$ . Tem-se que provar que  $C\hat{B}\Omega > B\hat{A}\Omega$ . Trace a semi-reta  $S_{BD}$  tal que  $D$  está do mesmo lado que  $\Omega$  em relação à reta  $AB$  e de modo que  $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega$ . Pelo Teorema do ângulo interior alternado (Teorema 1.2.6), as retas  $BD$  e  $A\Omega$  são paralelas, logo o ponto  $D$  não pode estar no interior de  $\Delta AB\Omega$ .

Suponha agora que  $D$  esteja sobre  $B\Omega$ . Neste caso, seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Trace  $MN$  perpendicular a  $B\Omega$ . Na reta  $A\Omega$  marque o ponto  $L$  tal que  $LA = BN$  e que  $L$  e  $N$  estejam de lados opostos em relação à reta  $AB$ .

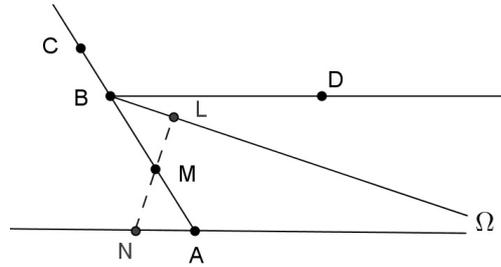


Figura 3.14

Pelo 1º caso de congruência de triângulos (caso L-A-L),  $\triangle BNM \equiv \triangle ALM$ , de onde segue que  $L, M, e N$  são colineares e além disto,  $LN$  é uma perpendicular comum as retas  $A\Omega$  e  $B\Omega$ . O que contraria a Proposição 3.2.2.

Assim  $D$  deve ficar fora do triângulo generalizado  $\triangle AB\Omega$  e, conseqüentemente,  $C\hat{B}\Omega > B\hat{A}\Omega$ .

□

Dois triângulos generalizados,  $\triangle AB\Omega_1$  e  $\triangle CD\Omega_2$ , são ditos *congruentes* se existe uma correspondência entre seus vértices, de modo que, os seus lados finitos se correspondam, e sejam congruentes, e os ângulos correspondentes sejam também congruentes.

Será usada a notação  $\triangle AB\Omega_1 \equiv \triangle CD\Omega_2$  para representar a congruência entre esses dois triângulos com a seguinte correspondência:  $A \longleftrightarrow C, B \longleftrightarrow D$  e  $\Omega_1 \longleftrightarrow \Omega_2$ . Assim como feito com os triângulo (ordinários), a seguir será estabelecida as condições mínimas que garantem a congruência de dois triângulos generalizado.

**Teorema 3.2.7** (1º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados). *Se  $AB = CD$  e  $B\hat{A}\Omega_1 = D\hat{C}\Omega_2$ , então  $\triangle AB\Omega_1 \equiv \triangle CD\Omega_2$ .*

*Demonstração.* Sejam dois triângulos generalizados  $\triangle AB\Omega_1$  e  $\triangle CD\Omega_2$ , com  $AB = CD$  e  $B\hat{A}\Omega_1 = D\hat{C}\Omega_2$ . Para mostrar que  $\triangle AB\Omega_1 \equiv \triangle CD\Omega_2$ , basta mostrar que  $A\hat{B}\Omega_1 = C\hat{D}\Omega_2$ . Suponha, sem perda de generalidade que  $A\hat{B}\Omega_1 > C\hat{D}\Omega_2$ . Seja a semi-reta  $S_{BE}$  tal que  $A\hat{B}E = C\hat{D}\Omega_2$ . Esta semi-reta penetra o ângulo  $A\hat{B}\Omega_1$ , e pelo Teorema 3.2.4, deve cortar o lado  $A\Omega_1$  num ponto  $F$ .

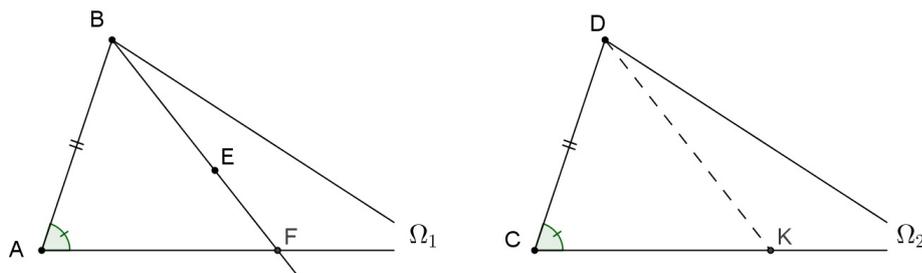


Figura 3.15

Considere o ponto  $K$  no lado  $C\Omega_2$  do triângulo generalizado  $\Delta CD\Omega_2$ , de modo que  $CK = AF$ . Segue daí que  $\Delta ABF \equiv \Delta CDK$ . Consequentemente,  $C\hat{D}K = A\hat{B}F = C\hat{D}\Omega_2$ , o que é um absurdo.

□

**Teorema 3.2.8** (2º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados). *Se  $A\hat{B}\Omega_1 = C\hat{D}\Omega_2$  e  $B\hat{A}\Omega_1 = D\hat{C}\Omega_2$ , então  $\Delta AB\Omega_1 \equiv \Delta CD\Omega_2$ .*

*Demonstração.* Se  $A\hat{B}\Omega_1 = C\hat{D}\Omega_2$  e  $B\hat{A}\Omega_1 = D\hat{C}\Omega_2$ , então, para mostrar que  $\Delta AB\Omega_1 \equiv \Delta CD\Omega_2$ , basta provar que  $AB = CD$ .

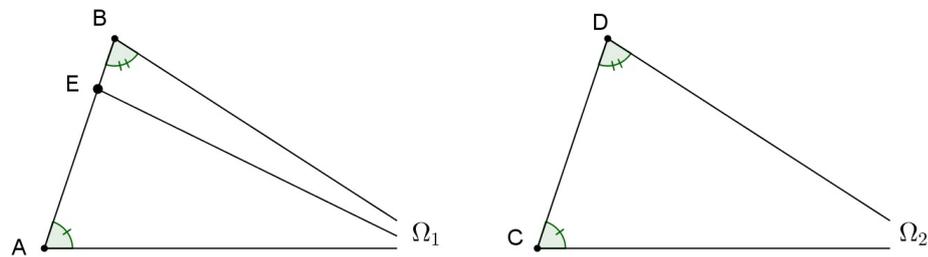


Figura 3.16

Sem perda de generalidade, suponha  $AB > CD$ . Tome um ponto  $E$  de  $AB$  tal que  $AE = CD$ . Considerando a reta  $E\Omega_1$  (paralela assintótica a  $A\Omega_1$  passando por  $E$ ), pelo 1º caso de congruência de triângulos generalizados,  $\Delta AE\Omega_1 \equiv \Delta CD\Omega_2$ . Logo,  $A\hat{E}\Omega_1 = C\hat{D}\Omega_2 = A\hat{B}\Omega_1$ . Mas isto contraria o teorema do ângulo externo para triângulos generalizados (Teorema 3.2.6), pois  $A\hat{E}\Omega_1$  é ângulo externo do triângulo  $\Delta EB\Omega_1$ .

□

**Teorema 3.2.9** (3º Caso de Congruência de Triângulos Generalizados). *Se  $AB = CD$ ,  $A\hat{B}\Omega_1 = B\hat{A}\Omega_1$  e  $C\hat{D}\Omega_2 = D\hat{C}\Omega_2$ , então  $\Delta AB\Omega_1 \equiv \Delta CD\Omega_2$ .*

*Demonstração.* Basta provar que  $A\hat{B}\Omega_1 = C\hat{D}\Omega_2$ . Suponha sem perda de generalidade que  $A\hat{B}\Omega_1 > C\hat{D}\Omega_2$ . Construa os ângulos  $A\hat{B}E$  e  $B\hat{A}F$  congruentes a  $C\hat{D}\Omega_2$  (com  $E$  e  $F$  do mesmo lado da reta  $AB$  que  $\Omega_1$ ). Pelo Teorema 3.2.4 e pelo Axioma de Pasch, pode-se concluir que as semi-retas  $S_{BE}$  e  $S_{AF}$  se cruzam em um ponto  $G$  no interior de  $\Delta AB\Omega$ .

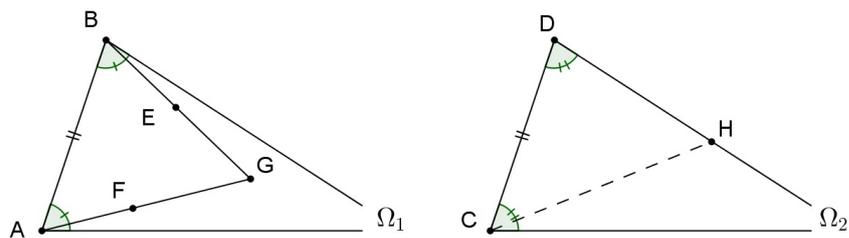


Figura 3.17

Marque, no lado  $C\Omega_2$  do triângulo  $\Delta CD\Omega_2$  o ponto  $H$ , tal que  $CH = AG$ . Segue daí que os triângulos  $\Delta ABG$  e  $\Delta CDH$  são congruentes. Logo,  $\hat{D}\hat{C}H = \hat{B}\hat{A}G = \hat{D}\hat{C}\Omega_2$ , o que é um absurdo.

□

**Teorema 3.2.10.** *Dado um quadrilátero  $ABCD$ , de lados  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$  (um quadrilátero de Saccheri), então os ângulo  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são agudos.*

*Demonstração.* Considere o quadrilátero  $ABCD$ , de lados  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ . Seja  $\Omega$  um ponto ideal da semi-reta  $S_{AB}$ . Considere ainda os triângulos generalizados  $\Delta AD\Omega$  e  $\Delta BC\Omega$ . Seja  $E$  um ponto tal que  $C \in DE$ .

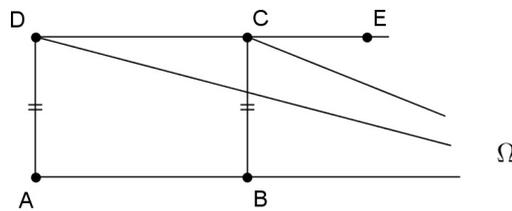


Figura 3.18

Já foi visto (Proposição 2.2.1) que a reta que liga os pontos médios dos segmentos  $AB$  e  $CD$  é uma perpendicular comum destes segmentos. Isto significa que as retas  $AB$  e  $CD$  são paralelas. Conseqüentemente,  $D\Omega$  e  $C\Omega$  estão contidos, respectivamente, nos ângulos  $\hat{A}\hat{D}E$  e  $\hat{B}\hat{C}E$ . Perceba agora que, pelo 1º caso de congruência de triângulos generalizados,  $\Delta AD\Omega \equiv \Delta BC\Omega$ . Logo  $\hat{A}\hat{D}\Omega = \hat{B}\hat{C}\Omega$ . Além disto, no triângulo generalizado  $\Delta CD\Omega$ , pelo Teorema do ângulo externo para triângulos generalizados,  $\hat{E}\hat{C}\Omega > \hat{E}\hat{D}\Omega$ . Segue daí que  $\hat{B}\hat{C}E > \hat{A}\hat{D}C = \hat{B}\hat{C}D$ . Portanto  $\hat{B}\hat{C}D$  é agudo.

□

Este teorema significa que existe uma equivalência entre o Axioma Hiperbólico e a Hipótese do Ângulo Agudo de Saccheri. Conseqüentemente, valem as proposições provadas por Saccheri dentro desta hipótese que foram estudadas no Capítulo 3 e que serão enunciadas aqui como propriedades da Geometria Hiperbólica. Obviamente, não há a necessidade de repetição das suas demonstrações.

**Teorema 3.2.11.** *Dado o quadrilátero de Saccheri  $ABCD$ , de lados  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ , então  $CD > AB$ .*

**Teorema 3.2.12.** *A soma dos ângulos de um triângulo qualquer é menor que  $180^\circ$ .*

Deste teorema decorrem algumas conseqüências imediatas.

**Corolário 3.2.1.** *A soma dos ângulos de um quadrilátero qualquer é menor que  $360^\circ$*

**Corolário 3.2.2.** *Na Geometria Hiperbólica não existe retângulo.*

**Corolário 3.2.3.** *Em um triângulo qualquer, um ângulo externo é sempre maior que a soma dos ângulos internos a ele não adjacentes. Ou seja, dado um triângulo  $\triangle ABC$ , se  $\hat{D}\hat{B}\hat{C}$  é um ângulo externo do triângulo dado, então  $\hat{D}\hat{B}\hat{C} > \hat{B}\hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}\hat{A}$ .*

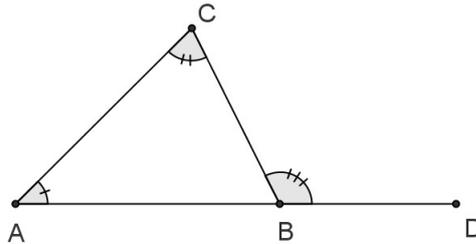


Figura 3.19

O próximo teorema mostrará que na Geometria Hiperbólica não se estuda semelhança de triângulos. Nessa Geometria se dois triângulos são semelhantes, eles deverão ser congruentes.

**Teorema 3.2.13.** *Se os três ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes aos três ângulos de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.*

*Demonstração.* Seja  $\triangle ABC$  e  $\triangle DEF$  dois triângulos tais que  $\hat{A} = \hat{D}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  e  $\hat{C} = \hat{F}$ .

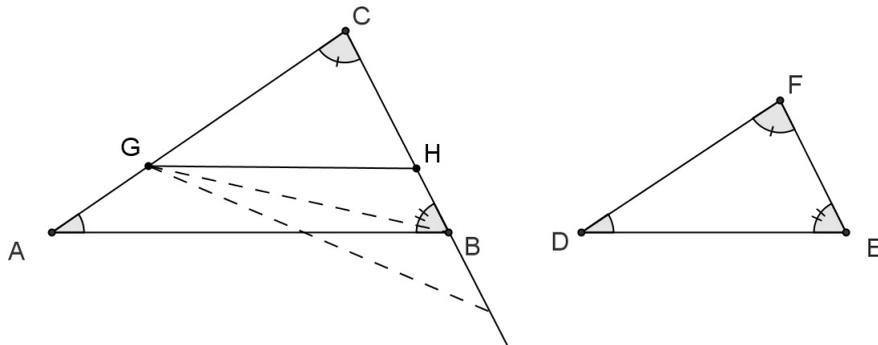


Figura 3.20

Será feita a demonstração de que  $AB = DE$ . A prova da igualdade dos outros lados correspondentes segue de maneira análoga. Para isso, suponha sem perda de generalidade que  $AB > DE$ . Tome o ponto  $G$  sobre o segmento  $AC$  de modo que  $CG = FD$ . Na semi-reta  $S_{CB}$ , marque um ponto  $H$  tal que  $HC = EF$ . Logo  $\triangle GHC \equiv \triangle DEF$ .

Se  $CH < CB$ , então  $ABHG$  é um quadrilátero cuja soma dos ângulos internos é igual a  $360^\circ$  contrariando o Corolário 3.3.1

Se  $CH = CB$ , então,  $H$  coincide com  $B$ , daí  $C\hat{H}G = C\hat{B}G = C\hat{B}A$ . Neste caso  $H$  coincide com  $B$  contrariando a hipótese.

Note que  $CH > CB$ , forma-se um triângulo com ângulo externo congruente a um ângulo interno não adjacente.

□

Com relação às retas paralelas, na Geometria Hiperbólica, pode-se concluir os mesmos resultados alcançados por Saccheri. Assim, com base nas últimas proposições de Saccheri estudadas na Seção 2 do Capítulo 3, duas retas paralelas, ou possuem uma perpendicular comum, a partir da qual elas se afastam indefinidamente, ou elas se aproximam assintoticamente (estas são as paralelas assintóticas).

### 3.2.1 Modelos da Geometria Hiperbólica

Mesmo depois das publicações de J. Bolyai e Lobachewsky, da formulação da Geometria Hiperbólica, ainda pairava, no mundo matemático, questionamentos sobre essa geometria. Esses trabalhos negavam o postulando das paralelas e desenvolviam uma série de teoremas sem chegar a contradição alguma. Porém, não havia certeza de todos os teoremas possíveis foram discutidos, e não havia garantia de que a contradição não apareceria num próximo teorema. No entanto, mesmo a Geometria Euclidiana estava sujeita às mesmas dúvidas, afinal Euclides havia demonstrado um número finito de proposições.

Faltava então um método para dar consistência a essa nova geometria. Essa consistência foi encontrada a partir do *método dos modelos*<sup>3</sup>, que garantia que a Geometria Hiperbólica não poderia conter uma contradição que já não estivesse na Geometria Euclidiana.

Eugênio Beltrami (1835 - 1900) foi o primeiro a exibir um modelo da geometria hiperbólica, permitindo interpretar as propriedades dessa geometria em termos da Geometria Euclidiana. Trata-se de um modelo obtido na Geometria Euclidiana em três dimensões, em uma superfície chamada Pseudo-esfera. Este não era um modelo prático para o estudo da Geometria Hiperbólica. A dificuldade de interpretação desse modelo levou Felix Klein (1849 - 1925) a procurar uma representação plana para as retas da pseudo-esfera.

Nesse modelo o plano é representado pelo interior de um círculo (euclidiano). As retas são as cordas desse círculo sem as suas extremidades. Dessa forma montou-se as primeiras regras do chamado *modelo de Klein-Beltrami*.

---

<sup>3</sup>Um modelo para um sistema axiomático é uma interpretação dada aos conceitos primitivos de modo que os axiomas sejam todos válidos

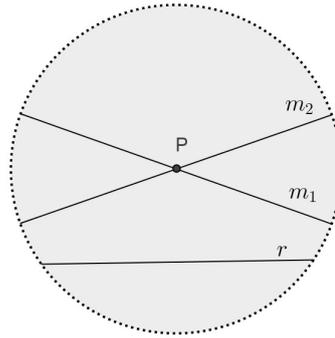


Figura 3.21

As relações "está entre" e "está sobre" têm a mesma interpretação que na Geometria Euclidiana.

O modelo criado pelo matemático francês Jules Henri Poincaré (1854-1912) para a Geometria hiperbólica difere do de Klein-Beltrami na representação das retas. No modelo de Poincaré, mantêm-se a ideia do plano hiperbólico no interior de um círculo euclidiano, porém as retas são arcos de círculos perpendiculares <sup>4</sup> ao círculo que representa o plano hiperbólico. Esse modelo ficou conhecido como o *disco de Poincaré*.

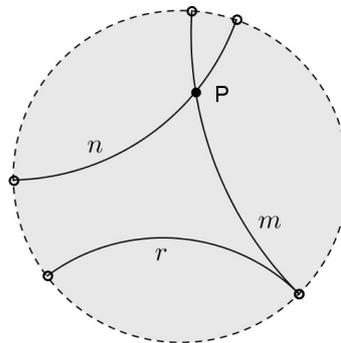


Figura 3.22: Disco de Poincaré

Os Pontos Ideais são representados sobre o círculo e note que não fazem parte do plano hiperbólico. As retas paralelas assintóticas se intersectam nesses pontos. Na Figura 3.22, as retas  $m$  e  $n$  se intersectam no ponto  $P$ , as retas  $n$  e  $r$  são paralelas e  $m$  e  $r$  são paralelas assintóticas.

### 3.3 Geometria Elíptica

O nascimento da Geometria Hiperbólica, abriu as portas para o surgimento de outras geometrias não-euclidianas. Em particular o matemático alemão Georg Friedrich

<sup>4</sup>Dois círculos são perpendiculares quando se intersectam, e suas retas tangentes no ponto de interseção são perpendiculares

Bernhard Riemann (1826-1866) criou a *Geometria Elíptica*.

Na verdade, Riemann fez mais do que criar uma nova geometria, ele colocou tanto a Geometria Euclidiana como a não euclidiana em um quadro teórico mais geral. Em 1854, em seu trabalho “Sobre os fundamentos nos quais se assenta a geometria” desenvolveu o que ele chamou de *teoria geral das variedades*. Riemann defende uma mudança completa na ideia de Geometria, onde esta será formulada a partir das hipóteses consideradas (que devem ser bem postas).

Segundo Riemann, o objetivo da geometria é tratar de modelos gerais aos quais se podem adicionar hipóteses particulares (as de Euclides, por exemplo), a validade das quais é verificada experimentalmente, pela Física. Como um exemplo de modelo geral, Riemann desenvolveu as ideias principais do que hoje chamamos de *Geometria Riemanniana*; com hipóteses adicionais, tal geometria reobtem a geometria euclidiana, a geometria hiperbólica e uma outra geometria, chamada *elíptica*. (MANFREDO, [3], p. 32)

Desse modo, já não se tratava apenas de cumprir ou não o postulado das paralelas. Afinal, qualquer outro axioma poderia ser questionado e substituído, e é claro que isso acarretaria em consequências estruturais da Geometria que se formaria.

Dentro deste raciocínio surge a Geometria Elíptica, onde o postulado das paralelas também é substituído por uma afirmação que o contraria. Ao negar o postulado das paralelas que afirma que por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela à reta dada, existem duas possibilidades: a primeira admite a existência de pelo menos duas paralelas, o que é equivalente a existência de uma infinidade delas, como foi feito para estudar a geometria hiperbólica; a segunda, que é adotada na Geometria Elíptica, diz que:

*Por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada.*

Equivalentemente pode-se afirmar que, na Geometria Elíptica, duas retas quaisquer sempre se cruzam, ou simplesmente, pode-se dizer que nesta geometria não existem retas paralelas.

Mas, já foi visto que este axioma contraria alguns resultados da Geometria Absoluta. Riemann propôs outra mudança. Ele abandona a ideia de que a reta é infinita, porém continua admitindo que o processo de se estender um segmento não tem fim, ou seja, que a reta é ilimitada. Foi Riemann o primeiro a apontar a importância de distinguir os termos infinito e ilimitado em relação com os conceitos geométricos. Neste sentido é importante salientar que muitos dos resultados da Geometria Absoluta não se aplica à Geometria Elíptica.

O modelo mais simples da Geometria Elíptica, é o *modelo da Esfera* (e neste caso específico, a Geometria Elíptica pode ser chamada de *Geometria Esférica*). Neste modelo

os pontos são pontos de uma esfera e as retas são círculos máximos <sup>5</sup> desta.

Da Geometria Euclidiana Plana, se está acostumado a ver a reta que passa por dois pontos como aquela que determina "a menor distância entre esses dois pontos". Essa propriedade sugere que uma boa interpretação de "reta" para a Geometria Elíptica, onde ela deve descrever o caminho mais curto, sobre a superfície do esfera, entre dois pontos desta. Uma curva que dá o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície é chamado de *geodésica*.

Observe que quaisquer duas retas (círculos máximos) sempre se cruzam. Aliás se cruzam em dois pontos distintos. Nesta Geometria não vale a ideia de que dois pontos quaisquer determinam uma única reta (Axioma de incidência 2). Vale notar ainda que por estes dois pontos passam, na verdade, infinitas retas.

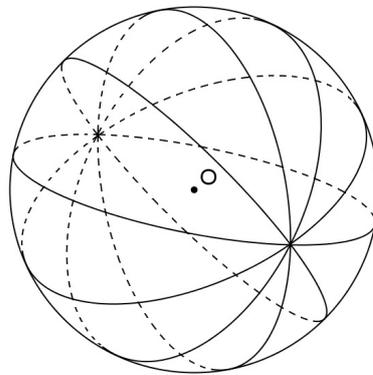


Figura 3.23

Nesta Geometria vale a Hipótese do Ângulo Obtuso de Saccheri.

**Teorema 3.3.1.** *Dado um quadrilátero  $ABCD$ , de lados  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$  (um quadrilátero de Saccheri), então os ângulo  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  são obtusos.*

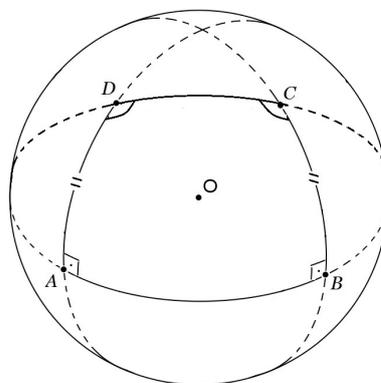


Figura 3.24

<sup>5</sup>Círculos máximos de uma esfera são aqueles cujo centro coincide com o centro desta

Deve ser observado que Saccheri chegou a uma contradição e descartou a Hipótese do Ângulo Obtuso assumindo que a reta é ilimitada. Com as devidas adaptações axiomáticas, note que na Geometria Elíptica isto não é um problema. Assim, as propriedades consequentes desta Hipótese alcançadas por Saccheri antes que chegasse na sua contradição devem valer na Geometria Elíptica.

**Teorema 3.3.2.** *Dado o quadrilátero de Saccheri  $ABCD$ , de lados  $AD$  e  $BC$  congruentes e perpendiculares ao lado  $AB$ , então  $CD > AB$ .*

**Teorema 3.3.3.** *A soma dos ângulos de um triângulo qualquer é maior que  $180^\circ$ .*

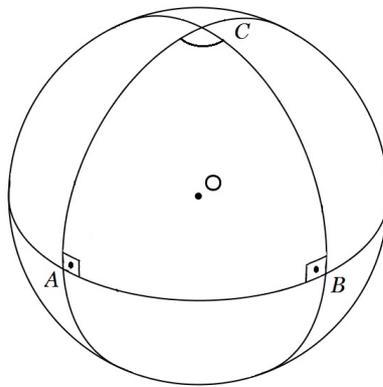


Figura 3.25: No triângulo  $\triangle ABC$   $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$

Uma consequência disto é que na Geometria Elíptica um triângulo pode ter dois ou até mesmo três ângulos retos (Ver Figura 3.25. Deste teorema decorrem outras consequências imediatas.

**Corolário 3.3.1.** *A soma dos ângulos de um quadrilátero qualquer é maior que  $360^\circ$*

**Corolário 3.3.2.** *Na Geometria Elíptica não existe retângulo.*

**Corolário 3.3.3.** *Em um triângulo qualquer, um ângulo externo é sempre maior que a soma dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Assim como acontece na Geometria Hiperbólica, na Geometria Elíptica também não se estuda semelhança de triângulos. Nesta Geometria se dois triângulos são semelhantes, eles deverão ser congruentes.

**Teorema 3.3.4.** *Se os três ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes aos três ângulos de outro triângulo, então os triângulos são congruentes.*

Existem diversas aplicações da Geometria Elíptica na Matemática, na Física, na Astronomia, na navegação, entre outras. Uma aplicação importante, diz respeito a uma associação com o globo terrestre. Conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes e fusos horários estão baseados em importantes ideias geométricas que, quando trabalhadas neste contexto, conduzem a uma melhor compreensão dos conceitos e propriedades abordados nesta geometria.

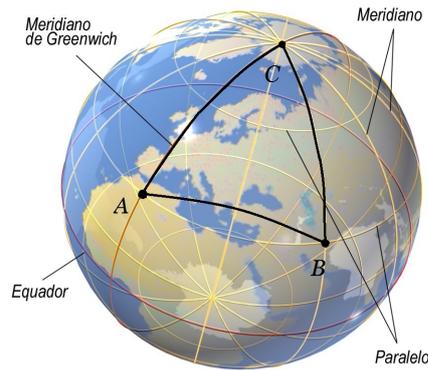


Figura 3.26

*Imagem disponível em: <http://esic-onossomundo.blogspot.com.br/2010/11/elementos-da-esfera-terrestre.html>*

As relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas constituem uma ferramenta matemática importante para a comparação entre os plano euclidiano e plano esférico e, conseqüentemente, uma construção mais aprimorada da ideia de plano na geometria.

A utilização do globo terrestre, com suas conseqüentes questões envolvendo, por exemplo, cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera, auxilia na compreensão de que uma outra geometria diferente da euclidiana pode ter uma melhor aplicação dentro de um quadro real, e ainda, proporciona um interessante trabalho interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia.

# Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. RPM - Revista do Professor de Matemática, v. 45, 2001.
- [2] BARBOSA, J. L. M. Geometria hiperbólica. IMPA, Rio de Janeiro: IMPA, 1995.
- [3] DO CARMO, M. P. Geometrias não-euclidianas. Revista Matemática Universitária, v. 6, p. 25–48, 1987.
- [4] BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. De euclides às geometrias não euclidianas. Revista Iberoamericana de educación matemática, , n. 22, p. 37 – 51, 2010.
- [5] BARBOSA, J. L. M. Geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, 2006.
- [6] WOLFE, H. E. Introduction to non-euclidean geometry. New York: The Dryden Press, 1945.
- [7] BONOLA, R. Non euclidean geometry - a critical and historical study of its development. New York: Dover Publications, 1955.
- [8] COXETER, H. S. M. Introduction to geometry. 2 edição. ed. Toronto: Wiley, 1989.
- [9] COXETER, H. S. M. Non-euclidean geometry. 6 edition. ed. Toronto: The Mathematical Association of America, 1998.
- [10] ROSENFELD, B. A. A history of non-euclidean geometry - evolution of the concept of a geometric space. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [11] GREENBERG, M. J. Euclidean and non-euclidean geometries - development and history. 3 edition. ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1993.
- [12] SACCHERI, G. Euclides vindicatus. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1920. Edited and Translated by George Bruce Halsted.

- [13] MARQUES, H. As tentativas de demonstração do quinto postulado dos elementos de euclides. Universidade de Lisboa. In: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/quintoposteubl/index.htm>.
- [14] GAIOWSKI, A. O.; BASSOI, T. S. A inserção das geometrias não-euclidianas no currículo da educação básica no estado do paraná. In: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/848-4.pdf>.
- [15] THOMAZ, M. L.; FRANCO, V. S. Geometria não-euclidiana / geometria esférica. In: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/233-4.pdf>.
- [16] DE ASSIS, E. S. Geometria não-euclidiana: Uma breve introdução. In: II SEEMAT - II Semana de Educação Matemática.
- [17] MARATTA, R. C.; DE SOUZA, L. F. R. Abordagem de uma aplicação das geometrias não euclidianas. Revista Eletrônica de Educação e Ciência – REEC, v. 1, n. 1, p. 18–50, 2011.
- [18] RIBEIRO, G. F.; DOS SANTOS, T. S.; FERREIRA, L. As geometrias não-euclidianas: uma análise do surgimento dessas novas geometrias. In: XIII CIAEM - Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, Brasil: , c2011.
- [19] ÁNGEL RUIZ. Geometrías no euclidianas - breve historia de una gran revolución intelectual. 1ª edition. ed. Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1999.
- [20] LUCAS, P. Las otras geometrias. In: La Historia de las Matemáticas y su aplicación a la docencia en Enseñanza Secundaria. c1999.