Universidade Federal de Goiás
Regional Catalão
Unidade Acadêmica Especial de
Matemática e tecnologia
Programa de Mestrado profissional em
Matemática em Rede Nacional

CLEUBER DIVINO DE MORAES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

CATALÃO
2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Cleuber Divino de Moraes
E-mail:	cleubimmat@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	[x]Sim [ ] Não
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de educação de Minas Gerais
Agência de fomento:	Coordenação de aperfeiçoamento de nível superior — Sigla: Capes
País: Brasil	UF:BR — CNPJ: 00.889.834/001-08
Título:	Resolução de problemas ao som de música clássica no ensino de matemática
Palavras-chave:	Problemas matemáticos,Música, Aprendizagem
Título em outra língua:	Troubleshooting the classical music sound in teaching mathematics
Palavras-chave em outra língua:	Mathematical problems, music, learning
Área de concentração:	Matemática do ensino Básico
Data defesa:	26/10/2015
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT
Orientador (a):	Porfírio Azevedo dos Santos Junior
E-mail:	Porfirio0806@gmail.com
Co-orientador (a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Cleuber Divino de Moraes

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 18 / 11 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

CLEUBER DIVINO DE MORAES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Trabalho apresentado como requisito parcial para a Conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão.

CATALÃO

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Moraes, Cleuber Divino
Resolução de problemas ao som de música clássica no ensino de matemática [manuscrito] / Cleuber Divino Moraes. - 2015.
67 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Dr.Porfírio Azevedo dos Santos Junior.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Catalão , Catalão, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - profissional), Catalão, 2015.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui gráfico.

1. Problemas matemáticos. 2. Música. 3. Aprendizagem. I. Junior, Dr.Porfírio Azevedo dos Santos, orient. II. Título.

Cleuber Divino de Moraes

"Resolução de Problemas ao Som de Música Clássica no Ensino de Matemática"

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, da Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia da Regional Catalão da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de Outubro de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira
FAMAT/UFU

Prof. Dr. Paulo Roberto Bergamaschi
Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – RC/UFG

A Deus, por ser extremamente paciente e piedoso comigo...

A minha esposa que foi companheira em todas as horas...

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à DEUS, que nesse tempo em que me dediquei ao curso, cuidou da minha família, não permitiu que nada de errado acontecesse nas viagens semanais e me deu saúde para enfrentar as longas noites de estudo e grandes jornadas de trabalho.

À minha esposa, pela paciência e companheirismo, que em meio a muitas provações durante os anos de 2014-2015 nunca me permitiu desanimar, sempre se mostrou forte e guerreira, sem o apoio dela eu não concluiria este curso.

Às minhas filhas, Mariana e Maria Clara. A Mariana pela paciência e compreensão de ser privada da presença do pai nas festinhas do dia dos pais, nas reuniões de colégio, no acompanhamento das tarefas de casa por um período de quase três anos e à Maria Clara por se tornar um dos meus maiores motivos para concluir este curso, veio de forma inesperada, nasceu dois meses antes do esperado, durante dois meses morou em uma UTI. De forma alguma eu imaginava que daqui há alguns anos teria que dizer, papai não concluiu o mestrado por você ter nascido antes da hora.

À minha sogra, que infelizmente não pode presenciar essa vitória. Ela que muitas vezes derramou lágrimas comigo. Um desses momento foi quando saiu o resultado do exame de qualificação.

Ao professor Porfírio pela orientação e pela paciência. Sem suas dicas e correções não teria conseguido produzir este trabalho.

À Élida, esposa do Porfírio, pelo apoio mesmo indiretamente, permitindo com que ele me orientasse em sua casa, aos sábados e feriados.

À CAPES pelo apoio financeiro, o que também tornou possível a minha participação nesse curso.

“Contudo, seja qual for o grau a que chegamos,
o quê importa é prosseguir decididamente”
(Fl 3, 16)

RESUMO

Este trabalho busca avaliar o quanto a metodologia de resolução de problemas juntamente com o uso da música clássica em som ambiente, pode contribuir para o aprendizado de matemática. O trabalho faz uma contextualização sobre a metodologia resolução de problemas, descreve sobre alguns fatores que podem contribuir para dificultar o ensino de matemática levando a uma reflexão no sentido de compreender o cenário onde se encontra o objeto principal dessa pesquisa, os alunos. A pesquisa foi desenvolvida na Escola Estadual Segismundo Pereira, em Uberlândia MG, com alunos de 8º e 9º ano do ensino fundamental. Com intuito de desenvolver esta pesquisa utilizamos problemas interessantes, selecionados de acordo com o nível de conhecimento dos alunos e que possibilitassem o envolvimento de conteúdos que estudam no decorrer do ano e que também possibilitasse oportunidade de rever conteúdos que não foram consolidados em séries anteriores. As atividades aplicadas seguiram as etapas da metodologia, sempre direcionando o aluno para a solução de cada problema e fazendo com que ele próprio desenvolvesse seu aprendizado com a orientação do professor. Diante da aplicação desta metodologia e o uso da música foi possível, com a pesquisa, avaliar através das atividades que desenvolveram e socializaram por meio de apresentações das soluções no quadro, das observações feitas durante as aulas, pelo desempenho nas avaliações regulares da disciplina de matemática, além dos dados obtidos em questionários que foram aplicados no início e na fase final da pesquisa, que o procedimento utilizado contribuiu para amenizar as conversas paralelas, proporcionar aos discentes maior liberdade para exporem suas ideias, despertar no docente uma reflexão sobre a prática de ensino utilizada em sala de aula, de modo que o levasse a buscar metodologias diferentes para alcançar resultados satisfatórios em suas aulas. No ponto de vista do pesquisador, um dos fatos mais importante foi possibilitar aos discentes maior liberdade para dialogar com o professor sobre os conteúdos abordados, fazendo com que eles aprendessem matemática a partir de seus questionamentos, proporcionando aos discent maior interação com o professor.

Palavras-chave: Problemas matemáticos. Música. Aprendizagem.

ABSTRACT

This work aims to evaluate how much the methodology of problem solving altogether with the use of classical music as ambient sound, can contribute to the learning of Mathematics. This work makes a contextualization about the methodology of solving problems, it describes some factors that can contribute to hamper Math teaching, leading to a reflection towards understanding the scene where the main object of this research is, the students. This research was developed at Escola Estadual Segismundo Pereira, in Uberlândia MG, with students of the 8th and 9th grades of the elementary school. Aiming to develop this evaluation we used interesting problems, selected according to the students' knowledge level and that could make possible the involvement of the contents they study during the year also aiming to give the students more opportunity to review the contents which were not consolidated in previous years. The implemented activities followed the stages of the methodology, always directing the student to the solution of each problem and leading him to develop the learning by himself with the teacher's orientations. With the application of this methodology and the use of music it was possible, with the research, to evaluate from the activities they developed and socialized through the presentation of the resolutions on the blackboard, the observations made during the classes, through their performance on the regular Math tests besides the data obtained from questionnairies that were applied at the beginning and at the final phase of the research, that the used procedure contributed to ease the side conversations, provided more freedom to expose their ideas, awaked on the teacher a reflection about the classroom teaching practice so that it could lead him to seek different methodologies to achieve satisfatory results in his classes. In the researcher's point of view, one of the most important facts was to enable the students, more freedom to talk with the teacher about the approached content, it allowed them to learn Mathematics from their own questions, providing the students greater interaction with the teacher.

Keywords: Mathematical problems, music, learning

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A matemática desempenha um papel fundamental na formação do cidadão, é uma ciência que necessita de disciplina, atitude e disposição para compreendê-la. Temos contato com a matemática de forma sistematizada, dentro de uma estrutura pedagógica desde as primeiras séries escolares, começa com a alfabetização e daí por diante cada conhecimento novo a ser adquirido necessita de conhecimentos consolidados anteriormente. Por exemplo, não fazemos praticamente nada em matemática sem as operações básicas da aritmética. Atualmente devido a muitos fatores, tanto no ambiente escolar, como fora dele, pode-se observar que grande parte dos alunos que frequenta as aulas de matemática não tem disposição e não conseguem desenvolver uma disciplina de estudo que possibilite a consolidação dos conhecimentos básicos de matemática, o que compromete seriamente o aprendizado em matemática e consequentemente em todas as ciências que dela dependem.

Este trabalho de conclusão do curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) aborda a resolução de problemas nas aulas de matemática juntamente com o uso de música clássica em turmas de 8º e 9º ano do ensino fundamental. Essa metodologia é vista pelo autor como um possível caminho para o ensino de matemática, o trabalho originou-se através de observações e relatos ao longo de vários anos atuando como professor de ensino fundamental e médio. A metodologia de resolução de problemas de Polya (2003) foi utilizada para o desenvolvimento das atividades em sala de aula.

A pesquisa deste trabalho baseia-se na metodologia desenvolvida por Polya que conta com quatro etapas, que foram obedecidas neste trabalho na aplicação de situações problemas em sala de aula. No desenvolvimento do trabalho, à medida que os alunos desenvolviam as atividades o professor orientava e fazia “pontes” na discussão dos assuntos tratados nos problemas. A intenção foi utilizar dos problemas para ensinar matemática. A proposta está dividida nos capítulos descritos a seguir.

Inicia-se o Capítulo 2 descrevendo a motivação para a escolha do tema do trabalho, explica o que é uma situação problema, utiliza-se de três problemas que surgiram ao longo da história da matemática no sentido de ajudar refletir sobre a metodologia de resolução de problemas.

No Capítulo 3 faz uma descrição da metodologia segundo as etapas de Polya, que delineará as atividades propostas nesse trabalho. Reflete-se sobre a defasagem de conhecimentos adquiridos por grande parte dos alunos que chegam ao 9º ano do ensino fundamental, as dificuldades que eles tem em entender e manipular os símbolos da álgebra, colocando a proposta no sentido de avaliar o quanto ela pode vir a ajudar a amenizar tais fatos, em seguida descreve-se sobre a interação professor-aluno em sala de aula, levantando a proposta de avaliar uma possível contribuição no processo de aprendizagem de cada aluno durante o processo de aproximação desses sujeitos.

Neste sentido, avalia-se o quanto a proposta pode contribuir ou não com o trabalho do professor em sala de aula, com o objetivo de motivá-lo a trabalhar com a metodologia, faz-se uma descrição da proposta de estudo dos conteúdos para os alunos que apresentam uma maior dificuldade e potencialização daqueles que tem certa afinidade com o conteúdo, e finaliza pontuando sobre a grande dificuldade que os alunos apresentam em trabalhar com os símbolos presentes na matemática, levando a metodologia a ser avaliada sobre o quanto pode contribuir para que eles tenham um maior acesso a essa simbologia.

O Capítulo 4 descreve a iniciativa de colocar música clássica para os alunos ouvirem enquanto resolvem os problemas, buscando simplesmente uma melhor disciplina em sala de aula. Neste contexto, propõe-se avaliar o quanto esta prática pode ajudar ou não os alunos a terem uma concentração maior. Apresenta a proposta do trabalho, descrevendo o seu desenvolvimento em sala de aula, faz uma descrição dos objetivos que se espera alcançar com a prática e finaliza expondo um exemplo de atividade que foi ministrada juntamente com os alunos seguindo a metodologia do trabalho.

No Capítulo 5 são descritas e analisadas as atividades que fizeram parte do desenvolvimento da proposta, bem como os questionários que foram aplicados nas fases inicial e final do trabalho. Na oportunidade são interpretados os resultados obtidos por meio de gráficos, faz-se também uma descrição das atividades realizadas pelos alunos, possibilitando a avaliação da eficácia ou não da proposta e finaliza-se com o Capítulo 6 onde apontam-se as considerações finais.

2 MOTIVAÇÃO PARA A ESCOLHA DO TEMA

Neste capítulo que descreve os motivos que levaram à escolha do tema deste trabalho também é apresentada a descrição de uma situação problema e explana o porquê de trabalhar com problemas nas aulas de matemática. Descreve exemplos de dois problemas, envolvendo equações que surgiram ao longo da história da matemática, permitindo através deles refletir sobre a proposta de trabalhar com resolução de problemas e expõe parte da história do *Último Teorema de Fermat*, no sentido de despertar sobre a importância de desafiar a mente dos alunos com problemas interessantes e desafiadores e finaliza com a descrição da metodologia de resolução de problemas.

A Matemática desempenha importante papel na formação de cidadãos capazes de compreender o mundo em que vivem e de se comunicar em sociedade, pois ela está relacionada a várias áreas do conhecimento, como História, Geografia, Ciências Naturais, Artes entre outras. Após vários anos ministrando aulas de matemática em turmas de 8º e 9º ano do ensino fundamental e também em turmas do ensino médio, pude constatar, através de resultados obtidos em avaliações, reuniões pedagógicas registradas pelos conselhos de classe, atendimento aos pais registrados pela direção e equipe pedagógica, um grande crescimento ao desapreço aos conteúdos de matemática.

Durante esses anos tive contato com alunos com alto índice de raciocínio lógico, mas que se perdiam na formalização e simbologia presentes na matemática; outros que se esforçavam para entender os símbolos, mas tinham dificuldades em interpretar problemas; outros que tinham facilidade em entender símbolos, interpretar e resolver problemas mas tinham grandes dificuldades em socializar os resultados e tinham muitos deles que, devido à falta de concentração não compreendiam símbolos, não entendiam definições, não acompanhavam sequências de raciocínios lógicos, fatores estes que contribuíam para que chegassem à conclusão que definitivamente não gostavam de matemática. Ao longo dos anos, fazendo reflexões embasadas em registros, avaliações, reuniões pedagógicas lavradas em ata, e ao ter a oportunidade de produzir este trabalho de conclusão de curso do PROFMAT, senti-me motivado a investigar uma estrutura de aula onde pudesse criar situações que valorizassem a criatividade e a intuição dos alunos, que aumentassem a participação efetiva de cada um deles nas aulas de matemática, e que também possibilitassem o cuidado de desenvolver o ensino e aprendizagem em matemática e proporcionassem um ambiente de concentração e disciplina na sala de aula, para o estudo da matemática. A partir desse pensamento surgiu então a ideia da proposta pedagógica de resolução de problemas ao som de música clássica no ensino de matemática.

2.1 Situação problema e o porque trabalhar com resolução de problemas

Pode-se partir da ideia de que um problema é identificado como “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução” (LESTER, 1983). Esta descrição quer dizer que uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um obstáculo que precise ser ultrapassado, e na medida em que não se disponha de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-lo de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisão a respeito da sequência de passos a serem seguidos. Neste sentido, o trabalho buscou através das atividades realizadas em sala de aula, propor problemas matemáticos que não tivessem apenas respostas diretas, mas que exigissem do aluno uma reflexão mais profunda do que aquelas que aparecem nos exercícios rotineiros que valorizam o aprendizado por reprodução ou imitação.

Situações problema aparecem com frequência na história da matemática permitindo sua evolução em virtude de diversas tentativas e maneiras diferentes de resolução. Serão apresentados a seguir dois exemplos de problemas que surgiram ao longo da história, e que ajudaram na reflexão da importância de se propor problemas matemáticos, no sentido de usá-los como uma ferramenta no processo de ensino e aprendizagem em matemática.

2.2 Um problema que envolve equação do 1º grau

O problema seguinte, aparece em um contexto histórico em que as tentativas de resolução eram registradas na linguagem da época sem fazer o uso de símbolos ou abreviações para se expressar os pensamentos algébricos. Problemas como este contribuíram para o desenvolvimento da álgebra como conhecemos hoje. Um problema semelhante a este, não necessariamente este, pode ser proposto para alunos do 8º ano, período em que iniciam o estudo com a álgebra, possibilitando fazer uma investigação do quanto ele pode contribuir com o aprendizado em matemática, no sentido de ser explorado de forma motivacional, propondo aos alunos que o tentem resolver sem fazer o uso de incógnitas e símbolos presentes na álgebra. Em seguida os alunos podem ser orientados a resolvê-lo fazendo o uso de letras para representar os números. Atividades como esta possibilitam também a exploração de toda álgebra envolvida no estudo das equações do 1º grau bem como algumas técnicas da aritmética das frações, incluindo as manipulações algébricas tão necessárias em matemática. Após o problema ser solucionado, pode-se fazer uma verificação das soluções encontradas, e assim ensinar operações com números inteiros a partir do valor numérico de expressões algébricas. E ainda, pode-se proporcionar uma aula em que os alunos possam socializar seus pensamentos e ideias na busca de soluções para o problema, que também é um dos objetivos do trabalho.

PROBLEMA 1

O problema é apresentado em forma de dedicatória gravada no túmulo de Diofante, escrita por Hipatia no ano de 415.

Caminhante!
Aqui foram sepultados
os restos de Diofante.
E os números podem mostrar
– oh, milagre –
quão longa foi sua vida,
cuja sexta parte constituiu
sua formosa infância

E mais um duodécimo
pedaço de sua vida havia
transcorrido quando de pêlos
se cobriu o seu rosto

E a sétima parte de sua existência

transcorreu em um matrimônio sem filhos

Passou-se um quinquênio mais
e deixou-o muito feliz
o nascimento de seu primeiro filho,

Que entregou à terra seu corpo,
sua formosa vida, que durou somente
a metade da de seu pai.

E com profundo pesar desceu à sepultura,
Tendo sobrevivido apenas quatro anos
Ao descenso de seu filho.

Diga-me: Quantos anos viveu Diofante quando lhe chegou a morte?

Fazendo o uso de letras para representar números e aplicando as técnicas algébricas envolvidas na equação do 1º grau, sabemos com facilidade decifrar a dedicatória:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \Rightarrow \frac{84x}{84} = \frac{14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336}{84} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 420 + 336 \Rightarrow 9x = 756 \Rightarrow x = \frac{756}{9} \Rightarrow x = 84.$$

Assim, podemos resolver todo o enigma, substituindo x por 84:

Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofante. E os números podem mostrar – oh, milagre – quão longa foi sua vida,	$x = 84$
cuja sexta parte constituiu sua formosa infância	$\frac{x}{6} = \frac{84}{6} = 14$
E mais um duodécimo pedaço de sua vida havia	$\frac{x}{12} = \frac{84}{12} = 7$

transcorrido quando de pêlos se cobriu o seu rosto	
E a sétima parte de sua existência transcorreu em um matrimônio sem filhos	$\frac{x}{7}=\frac{84}{7}=12$
Passou-se um quinquênio mais e deixou-o muito feliz o nascimento de seu primeiro filho,	5
Que entregou à terra seu corpo, sua formosa vida, que durou somente a metade da de seu pai.	$\frac{x}{2}=\frac{84}{2}=42$
E com profundo pesar desceu à sepultura, Tendo sobrevivido apenas quatro anos Ao descenso de seu filho.	4

Assim, se esse enigma é exato, comprova-se que Diofante morreu aos 84 anos. Por quatro anos presenciou a morte do filho, que tinha 42 anos. Diofante foi pai, portanto, com 38 anos e casou-se aos 21 anos. Os matemáticos da época de Hipatia e Diofante não conheciam as equações. Apenas os mais brilhantes eram capazes de resolver problemas-desafio como este.

O trabalho busca propor problemas interessantes, como este, para serem trabalhados aplicando a metodologia de resolução de problemas, a qual exige que o professor se coloque como um orientador da aprendizagem, no sentido de levar os alunos a fazerem questionamentos, estabelecerem um plano para resolverem o problema, sem dar a solução do problema, tornando-se mais próximo dos alunos e buscando contribuir o máximo possível para o aprendizado.

2.3 Um problema que envolve equação do 2º grau

Este é um dos mais famosos problemas da Antiguidade, que foi lido em uma disputa em praça pública, na Índia e que envolve equação do 2º grau. Aparece em um contexto onde ainda não era conhecida uma fórmula resolutiva para equações do 2º grau como é conhecida nos dias de hoje. As equações eram resolvidas por meio de argumentações. No contexto desse trabalho, problemas como este podem ser propostos aos alunos no sentido de se buscar uma motivação para a introdução do conteúdo de equações do 2º grau. A partir deles é possível introduzir ou manipular a fórmula resolutiva de Báskara, rever conceitos de aritmética, promover manipulações com a álgebra e aritmética envolvidas, buscando contribuições para que os alunos tenham um aprendizado significativo.

PROBLEMA 2

Um grupo de abelhas, cujo número era igual à raiz quadrada da metade de todo o enxame, pousou sobre um jasmim, tendo deixado para trás $\frac{8}{9}$ *do enxame; apenas uma abelha voava ao redor de um loto, atraída pelo zumbido de uma de suas amigas que caíra imprudentemente na armadilha da florzinha de doce fragrância. Quantas abelhas formavam o enxame?*

O problema será resolvido, considerando o conhecimento da fórmula de Báskara.

Solução

Compreendendo o problema

Fazendo uma leitura do problema, identifica-se que o enxame de abelhas está dividido em três partes. Uma parte pousou sobre um jasmim, outra parte foi deixada para trás e duas abelhas estão no contexto do loto.

Estabelecendo um plano

Vamos usar a letra x para representar o número total de abelhas do enxame. Dessa forma tem-se que a parte que se refere à raiz quadrada da metade de todo o enxame pode ser representada por $\sqrt{\frac{x}{2}}$, a outra parte que são os $\frac{8}{9}$ do enxame que foram deixadas para traz é representada por $\frac{8x}{9}$ e ainda temos 2 abelhas restantes, as que estão no contexto do loto. Para descobrir o número de abelhas do enxame é necessário juntar essas 3 partes, o que pode ser feito por adição, isto é,

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8x}{9} + 2 = x$$

Ao usarmos a letra x para representar o número total de abelhas no enxame o problema pode ser traduzido em forma de uma equação irracional e o número de abelhas será encontrado quando for resolvida esta equação.

Executando o plano estabelecido

Vamos aplicar as técnicas para resolução de equações irracionais.

Primeiro vamos isolar o radical e elevar os dois membros ao quadrado:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = x - \frac{8x}{9} - 2 \Rightarrow 9\sqrt{\frac{x}{2}} = 9x - 8x - 18 \Rightarrow 9\sqrt{\frac{x}{2}} = x - 18 \Rightarrow \left(9\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 = (x-18)^2 \Rightarrow$$

$$81\frac{x}{2} = x^2 - 36x + 324 \Rightarrow 81x = 2x^2 - 72x + 648 \Rightarrow 2x^2 - 153x + 648 = 0.$$

A equação irracional foi reduzida a uma equação do 2º grau, então vamos resolvê-la fazendo o uso da fórmula de Báskara.

$$\Delta = (-153)^2 - 4.2.648 \Rightarrow \Delta = 23409 - 5184 \Rightarrow \Delta = 18225$$

$$x = \frac{-(-153) \pm \sqrt{18225}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{153 \pm 135}{4} \Rightarrow x = \frac{288}{4} \text{ ou } x = \frac{18}{4} \Rightarrow$$
$$x = 72 \text{ ou } x = 4{,}5$$

Verificando a solução

Ao resolver a equação foram encontradas duas soluções distintas. Isso não significa que ambas sejam as soluções para o problema. Como a quantidade de abelhas era um número inteiro e positivo, então o exame era formado por 72 abelhas.

Mesmo para os mais brilhantes matemáticos da antiguidade, qualquer problema que fosse expresso por uma equação do 2º grau era um verdadeiro desafio. Hoje problemas como este podem ser propostos a alunos do 9º ano, série em que é ensinado o conteúdo de equações do 2º grau.

Segundo Lupinacci e Botin (2004, p. 1) a resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da matemática. O processo de ensino-aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos.

Existem vários outros problemas que podem ser propostos como um recurso pedagógico, tais como problemas do cotidiano e problemas históricos, que podem ser explorados no sentido de buscar uma contribuição para o aprendizado dos conteúdos curriculares. Hoje, com facilidade o professor pode ter acesso a problemas desafiadores e interessantes para ministrar aulas norteadas pela resolução de problemas, uma dessas fontes é a plataforma da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que disponibiliza um conteúdo recheado de problemas interessantes e desafiadores adequados a cada nível escolar.

Na história da humanidade, em particular no que diz respeito à matemática, vários problemas surgiram. Muitos tentaram resolvê-los e não conseguiram, mas deixaram uma grande contribuição científica às variadas civilizações, por exemplo, o Último Teorema de Fermat.

2.4 O Último Teorema de Fermat

Esta seção tratará sobre o *Último teorema de Fermat*, não no sentido de mostrar toda a bela e intrigante história conduzida por ele, mas no sentido de refletir sobre o quanto é importante desafiarmos a mente dos alunos, pois devemos acreditar que, no futuro, esses ensinamentos contribuam com grandes avanços nessa ciência.

Foi assim com Andrew Wiles, uma criança de origem inglesa, no ano de 1963, quando tinha dez anos de idade, já era fascinado pela matemática. “Eu adorava resolver problemas na escola. Eu os levava para casa e criava novos. Mas os melhores problemas eu encontrava na biblioteca local" (WILES apud SINGH, 1997, p. 27).

Um dia, quando voltava para casa da escola, o jovem Wiles decidiu passar na biblioteca, onde tinha o hábito de passar sempre quando podia. Não era uma biblioteca grande, mas tinha muitos livros que tratava sobre enigmas, problemas de matemática, e isso era o que atraía a atenção de Andrew Wiles. Eram livros recheados com todo tipo de charadas científicas e problemas de matemática, e para cada problema havia uma solução conveniente, registrada nas últimas páginas. Naquele dia, Andrew Wiles foi atraído por um livro que tinha apenas um problema, mas não apresentava nenhuma solução.

O livro, *O último problema*, de Eric Temple Bell, apresentava a história de um problema que tinha suas origens na Grécia Antiga, mas só ficou famoso no século XVII quando o matemático francês Pierre de Fermat o colocara como um desafio para o mundo. Pierre de Fermat escreveu nas margens de um papel a seguinte anotação incompleta. "Eu descobri uma demonstração interessante, pena que a margem desse papel é muito pequena para contê-la." (PIERRE DE FERMAT apud SINGH, 1997, p. 83).

O problema ao qual se referia Fermat era o seguinte:

Provar que não existe soluções em números inteiros para a seguinte equação,

$$x^n + y^n = z^n \text{, para } n \text{ maior do que } 2.$$

Um problema cujo enunciado era de fácil entendimento para Wiles, aparentemente simples, pois tinha uma aparência familiar, baseada num elemento que era de seu conhecimento – o teorema de Pitágoras.

Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Com apenas dez anos de idade, Wiles não tinha a noção da grandeza desse problema, lia apenas nos livros a história de um problema que confundiu e frustrou os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos.

O fato mais intrigante é que trinta anos depois de ler o relato de Bell, Wiles ainda se lembrava do que sentira ao ser apresentado em *O último teorema de Fermat*:

> Parecia tão simples, e no entanto, nenhum dos grandes matemáticos da história conseguira resolvê-lo. Ali estava um problema que eu, um menino de dez anos, podia entender e eu sabia que a partir daquele momento nunca o deixaria escapar. Tinha de solucioná-lo. (WILES apud SINGH, 1997, p. 27).

O *último teorema de Fermat* passou a ser para Wiles um problema muito especial, e nada menos do que o objetivo de sua vida. E em 1993, passados 356 anos desde o desafio de Fermat, Wiles assombrou o mundo ao enunciar a demonstração. Mas sua luta ainda não tinha terminado. Um erro o fez voltar às pesquisas por mais quatorze meses, até que em 1995 ele ganhou as páginas de jornais do mundo inteiro, por resolver um problema que poucos no mundo eram capazes de entender a solução. *O último teorema de Fermat*, escrito por Simon Singh, é uma boa sugestão de leitura para professores que buscam trabalhar resolução de problemas nas aulas de matemática, visto que ele nos relata a história para resolver uns dos maiores problemas de matemática de todos os tempos. Um drama humano, de grandes sonhos, brilho intelectual e extraordinária determinação.

Neste sentido a proposta deste estudo busca levar para sala de aula problemas que desafiem a mente dos alunos, tomando o cuidado para que eles sejam acessíveis e de fácil compreensão. Além disso, os problemas devem exercitar o pensar matemático do aluno, exigir criatividade na resolução e servir de ‘trampolim’ para a introdução ou consolidação de propriedades ou conceitos matemáticos. A proposta de orientar os alunos por meio de uma metodologia para resolução de problemas, incentivando a participação efetiva deles na sua resolução, valorizando suas ideias, aproximando o professor dos alunos, talvez possa aumentar o interesse pela matemática e quem sabe despertar mentes brilhantes adormecidas e em desenvolvimento.

3 Metodologia de resolução de problemas

A proposta de trabalhar com resolução de problemas nas aulas de matemática, com uma turma de 9º ano de uma escola estadual em Uberlândia, busca também maneiras de contribuir para que se tenha alunos determinados, não somente em resolver problemas de matemática, mas também no sentido de colaborar para que acreditem em si próprios e desenvolvam suas capacidades de lidar com situações que exijam reflexões para tomada de decisões. Tais contribuições podem ser avaliadas quando a proposta exige que o professor se coloque como o incentivador e motivador desses alunos, ajudando-os a ter uma organização e a tomar decisões a partir de reflexões diante de um problema a ser resolvido. Neste sentido, as atividades desenvolvidas no trabalho seguem uma prática pedagógica delineada pela metodologia de resolução de problemas segundo as ideias de Polya.

Para Polya (2003, p. 11):

> uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. Por isso, se um professor "desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas" dos alunos, "apresentando-lhes problemas adequados aos seus conhecimentos" poderá despertar neles o gosto pelo pensamento independente e proporcionar-lhes alguns meios para o concretizarem.

Quando é apresentado um problema matemático ao aluno, que seja adequado aos seus conhecimentos, principalmente nas séries iniciais, cria-se um ambiente adequado para que ele se sinta motivado a buscar o "caminho" ou "as maneiras" para resolver tal problema. Neste contexto, o professor se coloca como orientador do aprendizado, levando o aluno a refletir a partir dos enunciados, fazer conexões com os conteúdos compreendidos em sala de aula, incentivando-o de forma efetiva a participar do processo na busca da solução do problema. Assim, o professor contribui para a independência do aluno e consequentemente para o seu interesse pela matemática.

A proposta de trabalhar com resolução de problemas visa também avaliar o papel do professor na sala de aula, no sentido de colocá-lo como um orientador da aprendizagem e não somente como aquele que é responsável pela transmissão de informações. Neste sentido, o papel do professor ganha nova dimensão. Ele passa a ser o mediador entre o conhecimento e o aluno, bem como o facilitador, o incentivador e o avaliador do processo.

O professor sendo mediador do processo é responsável por pautar os procedimentos utilizados pelo aluno nos processos de resolução, promover debates, reformular e valorizar as soluções mais adequadas. Como facilitador, ele não expõe todo o conteúdo para o aluno, mas fornece informações que direcionam o aluno na busca pela solução, dando-lhes as ferramentas necessárias para a construção de seu conhecimento.

Na função de incentivador, o professor busca estimular o trabalho coletivo entre os alunos, tão importante quanto a interação entre aluno e professor. Nesse contexto, a proposta pedagógica propicia um ambiente para o desenvolvimento da aprendizagem onde os alunos têm a oportunidade de confrontar e argumentar ideias.

Sendo o professor, também um avaliador, a proposta exige que ele fique atento aos erros cometidos pelos alunos na tentativa de resolução de um problema, para proporcionar uma reflexão a partir desses erros, corrigindo-os e buscando maneiras de orientá-los para que esses possam contribuir de alguma forma para se chegar a uma solução, e consequentemente ao aprendizado. Nesse processo, o professor também deve avaliar se sua maneira de orientar para a resolução do problema está adequada ou se precisa ser reorganizada, para propiciar aos alunos a oportunidade de participarem de forma efetiva na construção do conhecimento.

> [...] ao avaliar uma situação, o professor não apenas constata e pontua determinada dificuldade do aluno. O professor também decide que tipos de encaminhamentos e intervenções deve inserir em sua prática pedagógica para que o aluno supere a sua dificuldade inicial. Nesse caso, o professor considera não apenas o que o aluno foi capaz de fazer, mas também aquilo que ele já sabe fazer, para, a partir disso, planejar as atividades seguintes [...] (CHAMORRO, 2007, p. 9).

Um dos motivos que levaram a escolha desta metodologia é que as etapas para a resolução de um problema podem ser aplicadas à série escolar na qual foi aplicada a proposta e também a todos os conteúdos que são ensinados na grade curricular adotada pela escola, sejam em equações de 1º grau, equações de 2º grau, semelhança de triângulos, etc.

Segundo Polya (2003), encontrar “caminho” ou as “maneiras” para se chegar a solução de um problema envolve, preferencialmente, a passagem por quatro etapas:

a) compreensão do problema;
b) estabelecimento de um plano;
c) execução do plano;
d) verificação.

Para Polya (2003), a resolução de um problema é na verdade um desafio e um pouco de descobrimento, uma vez que não existe um método rígido pelo qual o aluno possa sempre seguir para encontrar a solução de uma situação-problema. Nesse sentido, Polya aponta que existem maneiras de organizar ideias e pensamentos que podem contribuir para se chegar a solução de um problema. Esta organização pode ajudar na interpretação de enunciados, nas conexões com o conhecimento matemático já adquirido pelos alunos, a fazer reflexões a partir das ferramentas matemáticas que foram utilizadas para resolver o problema etc.

Tendo como base as concepções de Polya (2003) descrevemos de forma mais detalhada os quatro passos de resolução para assim melhor entendermos o universo das situações-problema:

a) **compreensão da situação-problema:** esta é a primeira etapa de resolução em que se deve interpretar o que sugere a situação-problema, retira(m)-se o(s) dado(s) relevante(s) nela contida, verifica-se o que está sendo perguntado e o que precisa ser resolvido em termos de conhecimentos matemáticos. Para compreender um problema o professor deve estimular os alunos a fazerem as seguintes perguntas: O que é solicitado? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes para determinar a solução? Faltam dados? Que relações posso estabelecer para encontrar dados omitidos? Que fórmulas e/ou algoritmos posso utilizar? Nesse processo de compreensão do problema, muitas vezes torna-se necessário construir figuras e esquematizar a situação problema;
b) **estabelecimento do plano de resolução:** esta segunda etapa exige que o aluno faça mentalmente ou por escrito a conexão teoria-prática-problema: a teoria são os conhecimentos matemáticos apreendidos anteriormente e ensinados pelo professor, a prática são os

conhecimentos obtidos das suas vivências diárias e o problema são os dados obtidos da situação-problema proposta. Nesta etapa o aluno pode fazer vários planos ou estratégias e trocar ideias com os demais componentes. É importante que o professor estimule o aluno a buscar conexões entre os dados e o que é solicitado, estimulando também, que pensem em situações similares, a fim de que possam estabelecer um plano de resolução, definindo prioridades e, se necessário, investigações complementares para resolver o problema;

c) **execução do plano:** nesta terceira etapa o aluno deve executar o plano elaborado na etapa anterior, com o propósito de tentar obter a solução da situação-problema. Aqui torna-se importante o uso de material concreto e, sem dúvida, da capacidade de calcular mentalmente. Esta etapa é o momento de "colocar as mãos na massa" ,de executar o plano estabelecido. Se as etapas anteriores foram bem desenvolvidas, esta será provavelmente, a etapa mais fácil do processo de resolução um problema. Para que o aluno tenha sucesso, o professor deve estimular a realização de cada procedimento com muita atenção, estando atento a cada ação desenvolvida, verificando cada passo. O aluno também deve ser estimulado a mostrar que cada procedimento realizado está correto, possibilitando a afirmação de seu aprendizado e a comunicação de sua produção;

d) **revisão:** nesta quarta e última etapa, o aluno deve verificar se a solução que encontrou é realmente a que foi solicitada pelo enunciado e pela pergunta da situação-problema. Aqui o professor deve ser um agente participante, no sentido de fazer coerentemente as devidas interferências ao examinar a solução que cada aluno encontrou, se esta é correta ou não: se correta devem ser realizados questionamentos, do tipo se existem outras maneiras de se chegar a mesma solução; e se errada, verificar onde está o erro e ajudá-lo nesse processo construtivo na busca da solução correta. O retrospecto, que é a revisão da solução, é um momento muito importante, pois propicia uma depuração e uma abstração da solução do problema. A depuração tem por objetivo verificar os procedimentos utilizados, procurando simplificá-los ou, buscar outras maneiras de resolver o problema de

> forma mais simples. A abstração tem por finalidade refletir sobre o processo realizado procurando descobrir a essência do problema e do método empregado para resolvê-lo, de modo a favorecer uma transposição do aprendizado adquirido nesse problema para a resolução de outras situações problema.

Ao trabalhar com resolução de problemas, avalia o quanto essa prática pedagógica pode contribuir para se alcançar alguns objetivos defendidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), citados a seguir:

> a) o ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> b) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> c) aproximações sucessivas ao conceito, são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da matemática;
> d) o aluno não constrói um conceito em reposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;
> e) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação de aprendizagens, mas uma orientação da aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1997, p. 32-33).

Nesse sentido, a proposta busca avaliar o quanto pode contribuir no ensino de matemática partindo dos problemas, e não das definições. Os problemas são selecionados dentro do conteúdo que está sendo desenvolvido ou não, são propostos problemas interessantes e desafiadores. Um dos objetivos do trabalho é buscar meios e maneiras de fazer com que os alunos formulem estratégias para resolver os problemas que foram propostos.

A etapa que se refere a compreensão da situação problema, orienta o aluno a fazer uma leitura atenta do problema buscando a sua compreensão. Nesse momento, a proposta busca avaliar a sua contribuição no sentido de levar o aluno a perceber que não se trata apenas de um exercício em que se aplica de forma mecânica algum método resolutivo de matemática, mas que ele se encontra diante de uma situação em que se exige um pouco mais para se chegar a uma solução.

Ao orientar o aluno a estabelecer um plano de resolução, a proposta busca levá-lo a fazer a estruturação do problema, por meio de desenhos, introdução de incógnitas e busca de relações entre as incógnitas. Ao executar o plano estabelecido o aluno é estimulado a usar conceitos, métodos matemáticos já adquiridos e ideias que são abordadas no problema. Ao ser orientado no sentido de fazer a verificação do problema ele é levado a fazer uma análise de sua solução, sobre os conceitos e métodos utilizados, os procedimentos matemáticos, a pensar em outros problemas que podem ser solucionados com estratégias semelhantes, etc.

Atualmente a carga horária da disciplina de matemática na escola, onde a proposta foi aplicada, é de cinco horas aula semanais, das quais somente uma foi usada para o desenvolvimento do trabalho. Mesmo não sendo possível aplicar a metodologia resolução de problemas em todas as aulas (foi desenvolvida paralelamente), ela possibilitou avaliar o quanto pode contribuir com a aprendizagem em matemática.

3.1 Uma reflexão sobre o ensino de matemática

Nesta seção serão apresentadas algumas citações seguidas de alguns comentários de um artigo intitulado *A matemática na escola. Alguns problemas e suas causas*, escrito pelo professor Roberto Markarian. Embora suas atividades como professor situem-se a nível universitário, sua consciência de cidadão o leva a preocupar-se com problemas do ensino fundamental e médio. As reflexões apoiadas nessas citações permitirão uma melhor compreensão do universo onde se encontra o objeto principal da nossa proposta: os alunos.

> A abstração das propriedades quantitativas ou geométricas que caracterizam as primeiras noções estudadas nas séries iniciais constituem um processo de complicada assimilação. Pequenos erros nesse processo dificultam a assimilação de novos conceitos e procedimentos, gerando grandes traumas futuros. Por outro lado, a memorização de uma nomenclatura diferente e muito precisa introduz componentes que não são usuais na vida diária (MARKARIAN, 2004, p. 276, 277).

Atualmente grande parte dos alunos chega ao 8º e 9º ano sem a consolidação de conhecimentos prévios para entender os conteúdos que ali serão apresentados, o que é constatado em avaliações e exercícios propostos em sala. Quando o professor começa a introduzir algumas operações com polinômios, como o exemplo seguinte:

Reduzir os termos semelhantes da expressão algébrica

$$-x^2 - 3x - 12 - 7x^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{7}.$$

É comum que vários alunos se expressem com as seguintes falas:

Professor, quanto é (-1-7)
Professor, não consigo fazer contas com frações...

Quando os conceitos de álgebra são introduzidos, fazendo o uso de variáveis para representar números, muitos ainda não adquiriram um conhecimento consolidado das operações aritméticas com números inteiros e frações, dificultando assim o desenvolvimento do cálculo algébrico. Este pode ser um dos fatores que contribuem para a desmotivação de alguns alunos no sentido de fazê-los acreditar que não entendem a álgebra, e que usar letras para representar números é muito difícil.

O trabalho também busca avaliar resultados que possam contribuir para amenizar os erros cometidos nesse processo de sistematização do conhecimento matemático, introduzindo conceitos e procedimentos através de atividades adequadas aos conhecimentos dos alunos, direcionadas a conteúdos que não foram consolidados em séries anteriores, como operações com números inteiros, operações com frações e outros conteúdos, buscando maneiras de fazer com que tais conteúdos sejam revistos. No contexto da proposta será avaliado se é possível diminuir os efeitos desses erros no processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que a prática de resolução de problemas possibilita uma aproximação entre professor e aluno e exige que o professor tenha um atendimento mais direcionado a cada aluno. Nesse sentido, o professor direciona as aulas se colocando como um orientador da aprendizagem, trabalhando as dificuldades mais específicas de cada aluno, motivando-os para que sejam o principal desenvolvedor do processo. Nesta linha Markarian faz a seguinte colocação:

> A interação aluno-docente que caracteriza o aprendizado dá-se sobre a base do estado atual de conhecimento e está fortemente influenciada pelos interesses de ambas as partes. O docente, a parte conservadora dessa relação, a que representa o social, o adquirido, o que deve ser conservado, tem grandes dificuldades para manter-se em dia com os conhecimentos, visto que hoje a maioria dos docentes que trabalham com as séries iniciais são obrigados a ter uma jornada triplicada de trabalho. (MARKARIAN, 2004, p. 276, 277).

A prática resolução de problemas busca avaliar os seus resultados pautada na interação aluno-docente durante as aulas, no sentido de avaliar uma maneira de propiciar ao professor o atendimento mais individualizado aos alunos, ouvindo seus questionamentos, aproveitando o máximo possível as aulas destinadas à resolução de problemas para tirar dúvidas de resultados que possam ser exigidos na resolução de um problema e que ainda não foram compreendidos ou consolidados por alguns alunos, visto que muitas vezes o professor não consegue aplicar atividades que possam ser examinadas em casa para melhor compreensão das dificuldades individuais de cada um, devido à grande jornada de trabalho a qual é submetido muitas vezes. A prática tem a proposta de avaliar o quanto ela pode contribuir com o trabalho do professor em sala de aula, visto que ela não exige muitos recursos. Os resultados produzidos pelos alunos durante a resolução dos problemas são analisados e discutidos na própria aula, o professor destina apenas um tempo para pesquisar e selecionar problemas que possam vir ao encontro dos objetivos da proposta, e isso pode ser feito facilmente na plataforma da OBMEP, por exemplo. Nesta linha de pensamento Markarian reforça observando que:

> O bom desempenho em matemática é considerado, em geral, como uma mostra de sabedoria e inteligência. Aqueles que têm facilidade para matemática são tidos como pessoas especiais, com algum dom extraordinário. O saber matemático goza de prestígio. Isso se deve, por um lado, ao fato de que as dificuldades da disciplina fazem com que quem sabe ou a aprende com facilidade seja visto como diferente, especialmente dotado; por outro lado, os jovens com particular facilidade para a matemática, em geral, têm também facilidades para formar conceitos em outras disciplinas, para continuar a concatenação lógica de raciocínios, até para encontrar semelhanças em geografia, física, e outras disciplinas (MARKARIAN, 2004, p. 276, 277).

Nas turmas das séries iniciais, aqui faz-se referência em particular em uma turma de 8º ano em 2014 e 9º ano em 2015 de uma escola estadual em Uberlândia-MG, é constatado pelo professor através de reflexões em cima de análises sobre o comportamento dos alunos, relatados em documentos que surgiram à partir de conselhos de classe e reuniões pedagógicas proposta pela escola dentro do calendário escolar, que muitos alunos ainda não tem maturidade suficiente para compreender que cada um necessita de um tempo adequado para consolidar um conhecimento. Por exemplo, nessa mesma turma há alunos que entendem o desenvolvimento da resolução de uma equação do 2º grau com uma ou duas explicações, outros necessitam que o professor explique várias vezes, buscando maneiras diferenciadas para explicar tal conteúdo, e ainda assim, muitas vezes não compreendem os resultados, sendo necessário que o professor resolva várias equações para que possam entender. Neste contexto vários alunos se sentem inferiores por não conseguirem entender os conteúdos ao mesmo tempo que aqueles que tem uma facilidade maior, conforme relatado por um deles:

Professor, não entendi nada.

Outros:

Nossa como é fácil, como que você não entende?
Professor, pode passar exercícios pra gente resolver

É comum após a explicação do conteúdo, depois de resolver alguns exemplos o professor perguntar aos alunos se houve entendimento, na maioria das vezes aqueles com maior dificuldade não se pronunciam, ficam intimidados diante daqueles que tem uma facilidade maior. Os alunos com maior dificuldade geralmente não se sentem à vontade para expor suas dúvidas, com medo de que seus questionamentos sejam criticados pelos demais.

Neste contexto, o trabalho busca inserir todos os alunos no processo de aprendizagem, independentemente se o aluno tem facilidade ou não em assimilar os conteúdos, uma vez que um dos procedimentos é fazer um acompanhamento mais individual na tentativa de possibilitar que cada aluno tenha compreensão dos problemas, respeitando o seu tempo de aprendizado, no sentido de potencializar aqueles que tem uma certa aptidão para o estudo da matemática e proporcionar aos demais um aprendizado significativo. A proposta exige sempre do professor a postura de observador, e posteriormente de orientador da aprendizagem.

No papel do orientador da aprendizagem o professor busca incentivar os alunos a resolverem os problemas, a exporem suas ideias diante dos demais colegas, e quando as soluções dos problemas são socializadas o professor faz a intermediação de maneira que as tentativas de resolução de cada um sejam valorizadas, mesmo não estando totalmente corretas, pois nesse processo o professor apropria-se dos erros para os levar a uma reflexão e ajudá-los a chegar na solução dos problemas ou a buscarem outras maneiras para resolvê-los. Assim, a proposta busca dar oportunidade a todos os alunos a interagirem, discutirem as soluções ou tentativas de resolução de um problema e contribuírem com o aprendizado uns dos outros. O simbolismo na matemática é outro fator que dificulta a aprendizagem como pontua a citação seguinte:

> O aprendizado da Matemática depende muito de uma linguagem e de símbolos próprios e específicos. Essas linguagens e simbolismos a tornam, por sua vez, mais inacessível. Pode-se dizer que são um “mal necessário”. É interessante observar que esses elementos decisivos no processo da Matemática demoraram muito para se desenvolver com toda força, consolidaram-se só no século XVI com o desenvolvimento da notação e do formalismo da álgebra. (MARKARIAN, 2004, p. 276, 277).

A matemática é uma linguagem muitas vezes expressa através de símbolos. Assim sendo, cabe abordar aqui as dificuldades dos alunos que não conseguiram compreender as instruções e os enunciados matemáticos, bem como as operações aritméticas envolvidas, pois é necessário a superação das dificuldades de leitura e escrita para poderem resolver os problemas que lhes são propostos.

Através de análises em avaliações aplicadas aos alunos, em exercícios propostos e corrigidos em sala de aula, foi possível constatar que grande parte dos alunos que chega ao 9º ano tem uma dificuldade enorme para lidar com os símbolos matemáticos. Alguns ainda não sabem lidar com os sinais de igualdade, outros não conseguem fazer a passagem da linguagem usual para a linguagem dos símbolos por mais simples que seja. Neste contexto, uma atividade foi proposta durante as aulas, quando o professor estava fazendo revisão de equações do 1º grau, aos alunos do 9º ano, pedindo que resolvessem a seguinte equação:

$$x - 5 = 3$$

Todos conseguiram com facilidade encontrar a solução da equação resolvendo-a da seguinte maneira:

$$x - 5 = 3$$
$$x = 3 + 5$$
$$x = 8$$

Mas, na mesma lista em que foi proposta a resolução dessa equação havia um exercício com o seguinte enunciado.

A diferença entre um número e 10 é igual a 12, qual é esse número?

Vários alunos não conseguiram montar a equação. Durante a correção do exercício, ao escrever a equação da seguinte forma $x - 10 = 12$, surgiram muitas falas do tipo:

Professor eu não estava entendendo a palavra diferença

Pra mim quando fala em diferença, tenho que usar o símbolo ($\neq$)

Posso usar x ou qualquer outra letra

A dificuldade em lidar com os símbolos matemáticos é também observada nas discussões que são feitas após a aplicação das provas da OBMEP, quando algumas soluções dos problemas são realizadas em sala.

O trabalho busca avaliar o quanto a metodologia de resolução de problemas nas aulas de matemática pode contribuir para que os alunos tenham um acesso mais concreto a essa simbologia, uma vez que quando um aluno resolve ou tenta resolver um problema o professor presencia situações onde pode intervir e aos poucos mostrar que a linguagem dos símbolos adotada em matemática pode contribuir para a resolução do problema.

Outra questão que dificulta o ensino de matemática é a grande falta de disciplina de grande parte dos alunos. A indisciplina tem sido alvo de inúmeras discussões entre os educadores brasileiros em todos os níveis de ensino, desde a Educação Básica até o Ensino Superior, conforme afirma Aquino (1996).

A turma na qual a proposta foi aplicada, é uma turma em que a maioria dos alunos é indisciplinado. Não no sentido de agressividade e descumprimento de regras propostas pela escola, mas no sentido de se deixarem levar por vários fatores que contribuem para o desinteresse pelo conhecimento, a conversa excessiva em momentos que deveriam estar concentrados para compreenderem uma teoria dada, ou raciocinarem na busca da solução de um problema ou exercício. Muitos têm uma quantidade grande de faltas, conforme registrado em ata dos conselhos de classe pelos professores da turma. Neste sentido, o trabalho busca oportunizar um ambiente em que haja tranquilidade e disciplina para que o professor possa desenvolver, juntamente com os alunos, a aula de resolução de problemas e avaliar o quanto o uso da música clássica colocada em um som ambiente contribui para se alcançar disciplina, de modo que os alunos evitem conversar enquanto tentam resolver os problemas, focando apenas nas atividades propostas.

4 O USO DA MÚSICA CLÁSSICA COMO UM MEIO PARA ATINGIR DISCIPLINA E CONCENTRAÇÃO NAS AULAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O uso da música clássica como um recurso pedagógico, busca simplesmente avaliar o quanto ela pode contribuir para que os alunos tenham uma maior disciplina em sala de aula, proporcionando um ambiente em que seja possível aos alunos se concentrarem nos problemas.

> [...] Losavov, cientista búlgaro, desenvolveu uma pesquisa na qual observou grupos de crianças em situação de aprendizagem, e a alguns deles foi oferecida música clássica enquanto estavam tendo aulas. O resultado foi uma grande diferença na aprendizagem, favorável ao grupo que ouviu música. A explicação do pesquisador é que ouvindo música clássica, lenta, a pessoa passa do nível alfa (alerta) para o nível beta (relaxados, mais atentos); baixando a ciclagem cerebral, aumentam as atividades dos neurônios e as sinapses tornam-se mais rápidas, facilitando a concentração e a aprendizagem. (OSTRANDER; SCHOEDER, 1978).

Durante as aulas, após a explicação de um conteúdo, o professor, apresenta para a turma alguns exemplos e em seguida propõe a resolução de vários exercícios.

O que se pode observar é que grande parte dos alunos não se concentra na resolução dos exercícios. Ficam conversando o tempo todo com o colega ao lado e quase sempre atrapalham aqueles que buscam resolvê-los. Ao colocar música clássica em um som ambiente, durante as aulas de resolução de problemas, busca-se avaliar o quanto esta ação pode contribuir para amenizar tais fatos, em consonância com os resultados obtidos por Losavov (apud OSTRANDER;

SCHOEDER, 1978). Buscar-se-á averiguar se essa prática pode contribuir para que os alunos atinjam um grau de concentração maior enquanto tentam resolver os problemas, e despertem um interesse maior pelas aulas de matemática, como observado por Cury (2003).

Em depoimento, em seu livro *Pais brilhantes, professores fascinantes*, Augusto Cury (2003, p.120) diz que “se houver música ambiente dentro da sala de aula, de preferência música suave, o conhecimento seco e lógico transmitido pelos professores de matemática, física química ou línguas ganha uma dimensão emocional”. Neste sentido o autor complementa: “sem a emoção, o conhecimento não possui paladar.” (CURY, 2003, p. 120).

A turma com a qual foi desenvolvida a proposta de resolução de problemas ao som de música clássica, é uma turma em que os alunos já estudam há algum tempo juntos, muitos mantêm um ciclo de amizades mesmo fora da escola trazendo vários assuntos para dentro da sala de aula que contribuem para a falta de concentração durante as aulas. Assim, propõe-se avaliar se o uso da música clássica em sala de aula, contribui efetivamente para amenizar tais fatos.

4.1 Proposta do trabalho

A proposta do trabalho é investigar a eficácia de ministrar aulas desenvolvendo a metodologia de resolução de problemas no ensino de matemática em turmas do 8º e 9º ano do ensino fundamental. Além disso, busca-se avaliar o quanto o uso da música clássica colocada em um som ambiente, pode contribuir para uma maior disciplina entre os alunos, no sentido de proporcionar um ambiente mais tranquilo em sala de aula, levando os alunos a uma maior concentração na resolução dos problemas.

4.1.1 Desenvolvimento da proposta

A proposta será desenvolvida uma vez por semana, sempre às sextas-feiras, numa aula em que os alunos receberão três problemas que podem tratar sobre o conteúdo que estão estudando ou não. Na aula seguinte os alunos socializarão as suas resoluções e serão orientados sempre a seguir as etapas descritas pela metodologia.

Até que os alunos se habituem com as etapas da proposta, elas serão enumeradas em um problema, no sentido de dar orientação, nos problemas seguintes essa estruturação ficará a cargo dos alunos.

Enquanto os alunos desenvolvem as atividades, o professor acompanha a turma, estimulando e direcionando as ideias através de dicas e questionamentos (sem contar como se chega a solução), levando os alunos à compreensão do problema identificando os objetivos, os dados do problema, as condições, etc.

Os alunos são motivados a socializarem as suas soluções ou tentativas, com os demais colegas preenchendo uma pequena ficha de inscrição (Apêndice A). Esta ficha será utilizada para organização da aula onde será feito a socialização dos resultados obtidos pelos alunos na aula anterior. Aqueles que tem interesse em apresentar a sua solução, preenchem a ficha se propondo a resolver os problemas no quadro. Como não é possível que todos participem da atividade no quadro, será feito um sorteio de alguns alunos, para apresentarem os resultados. Os alunos se inscrevem para resolver somente um, dois ou três problemas.

Na aula de apresentação das possíveis soluções, os alunos desenvolvem as resoluções no quadro (um de cada vez), explicando o que fizeram para estabelecer um plano, o desenvolvimento do mesmo e a interpretação da solução.

O professor também registra no quadro as sugestões dos outros alunos. Se aparecerem maneiras diferentes de resolver o mesmo problema, inclusive se estiverem erradas, o professor faz a intermediação com estes erros, corrigindo-os e levando os alunos a uma reflexão sobre os procedimentos utilizados, a fim de que possa contribuir com o aprendizado. Assim, todas as sugestões deverão ser discutidas e analisadas, com o objetivo de incentivar os alunos a sempre tentarem vários métodos.

Na etapa da interpretação da resolução o aluno é levado a observar que um problema não está necessariamente resolvido quando o aluno encontra mais de uma resposta, ele pode por exemplo resolver, com uma equação do segundo grau, chegando em duas soluções distintas, sendo que apenas uma satisfaz as condições do enunciado do problema.

Para completar a solução de uma atividade proposta, o aluno precisa saber o que e como fez, e por que sua ação foi apropriada ou não. Esta reflexão é parte integrante da resolução do problema. A análise dos resultados aproximados e outros comentários será realizada pelo professor na etapa de revisão da resolução.

O objetivo central da proposta é avaliar o quanto esta metodologia juntamente com o uso da música pode contribuir ou não com o aprendizado em matemática, visto que ao focar na música espera-se avaliar o quanto ela pode contribuir ou não com a disciplina e a concentração dos alunos.

Ao desenvolver a prática, muitas outras contribuições podem ser agregadas. Este trabalho avaliará todas elas. Pode ser que a metodologia contribua para o hábito de leitura, visto que em várias situações problemas o aluno será orientado a ler o problema várias vezes. Nesse processo, o aluno poderá ser levado a perceber a grande dificuldade que tem em ler textos matemáticos e, dessa forma, o professor poderá reforçar a importância da interpretação de texto, essencial em qualquer área. Deste modo, ele poderá orientar a respeito das contribuições da prática da leitura em qualquer metodologia de ensino.

No decorrer do desenvolvimento da proposta, as atividades que serão trabalhadas talvez possam incentivar a independência de estudo do aluno. Como as soluções dos problemas propostos serão discutidas somente na aula posterior à aula destinada à resolução dos problemas, o aluno será motivado a pensar na solução do problema em casa. Durante os dias que antecedem o encontro haverá discussões, apresentação de soluções e a solução apresentada pelo professor.

A metodologia pode proporcionar uma maior participação dos alunos nas aulas, uma vez que uma de suas exigências é dar oportunidade para exporem suas ideias. Neste sentido, há também a expectativa de que ela aproxime o professor dos alunos, pois a metodologia também é delineada pelas intervenções feitas pelo professor, ao expor as ideias desenvolvidas nas etapas da proposta. Nesta direção, será avaliado o quanto a prática pode contribuir para que o professor se coloque no sentido de fazer intermediações para que elas sejam valorizadas.

O trabalho também poderá contribuir no sentido de despertar no professor a necessidade de se apresentar ao aluno como orientador e jamais como o detentor do saber. Buscará, também, levar o professor a uma reflexão sobre a interação professor-aluno, o que é tão importante para o aprendizado.

Também se espera que o trabalho possa levar os alunos a pensar produtivamente, a ter o hábito de resolver problemas de matemática e ao professor, a condição de explorar ao máximo os conteúdos de matemática, possíveis em cada problema, buscando alcançar, de forma efetiva, o aprendizado de matemática dos alunos.

A avaliação da eficácia da prática, se dará por meio da análise dos dados coletados por questionários, aplicados antes e depois da execução da proposta; dos resultados observados e registrados nas aulas de resolução de problemas e de alguns problemas resolvidos pelos alunos.

Em conformidade com a ideia do que venha a ser uma situação-problema apresentada por Lester (1983), serão propostos aos alunos problemas interessantes, dentro do conteúdo que estão estudando ou não, sempre adequados aos seus conhecimentos, que não serão resolvidos apenas de forma imediata, mas exigirá um processo de reflexão para se chegar a solução, possibilitando ao professor a partir deles ensinar matemática, conforme o exemplo descrito a seguir.

PROBLEMA 1

O custo em reais de 25 laranjas é igual ao número de laranjas que se pode comprar com um real. Qual é o número de laranjas que se pode comprar com três reais?

Orientação para a resolução

1ª etapa: compreensão do problema

Nessa etapa o professor atua realizando, vários questionamentos, como por exemplo. O que é solicitado? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a solução? Faltam dados? Que relações posso estabelecer para encontrar dados omitidos? Que fórmulas e/ou algoritmos posso utilizar? Com estes questionamentos o objetivo do professor é direcionar o aluno à compreensão do problema, tais questionamentos são feitos de maneira geral para a turma, ou de forma mais individualizada quando é necessário.

2ª etapa: estabelecimento ou elaboração de um plano

O professor deve estimular o aluno a buscar conexões entre os dados e o que é solicitado, estimulando também, que pensem em situações similares, a fim de que possam estabelecer um plano de resolução, definindo prioridades e, se necessário, investigações complementares para resolver o problema, em cima de conteúdos que ele já sabe e já conhece, o professor primeiramente faz esse procedimento de forma geral para a turma e depois atua no sentido de dar um atendimento mais individualizado.

3ª etapa: execução do plano

O professor atua dando orientação a realização de cada procedimento com muita atenção, estando atento a cada ação desenvolvida, verificando cada passo. Nessa etapa o professor aproveita para tirar dúvidas de conteúdos que não foram consolidados anteriormente, por exemplo, se é um problema que envolve habilidades de fazer cálculos com números inteiros, o professor explica novamente o conteúdo e estimula o aluno a estudá-lo novamente. O aluno também deve ser estimulado a mostrar que cada procedimento realizado está correto, possibilitando a afirmação de seu aprendizado e a comunicação de sua produção;

4ª etapa: verificação

Aqui o professor faz as intervenções, no sentido de fazer coerentemente as devidas interferências ao examinar a solução que cada aluno encontrou, se esta é correta ou não: se correta devem ser realizados questionamentos, do tipo se existem outras maneiras de se chegar a mesma solução; e se errada, verificar onde está o erro e ajudá-lo nesse processo construtivo na busca da solução correta. Várias outras questões direcionadas aos conteúdos de matemática utilizados para resolver o problema podem ser levantados, inclusive utilizar o problema na introdução ou desenvolvimento de conteúdos curriculares.

Para a resolução dos demais problemas propostos os alunos são orientados da mesma maneira.

PROBLEMA 2

Em Patópolis, o sistema de numeração possui base b. Pato Donald comprou um carro por $440, entregando ao vendedor uma nota de $1.000 sobrando de troco $340. Qual é a base b?

PROBLEMA 3

Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, ao pagar a conta, que era de R$600,00 dois deles estavam sem dinheiro o que fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$10,00. Quantos amigos havia no grupo?

5 APLICAÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

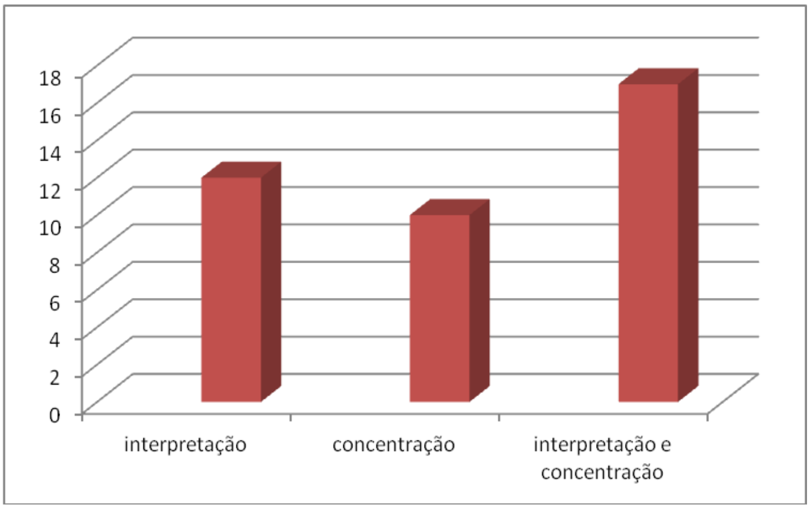
Nesta parte do trabalho serão apresentados e analisados os resultados obtidos com a aplicação da proposta através das atividades desenvolvidas em sala. Os gráficos apresentados são resultados dos questionários aplicados no início e fase final do desenvolvimento do trabalho. Além disso, serão expostas algumas soluções de problemas que foram aplicados aos alunos, permitindo uma avaliação de resultados que foram buscados com a inserção da proposta nas aulas de matemática.

A aplicação desta metodologia proposta foi realizada durante o segundo semestre de 2014 e primeiro semestre de 2015, com 39 alunos de uma turma de 8º ano em 2014 e 9º ano em 2015 na Escola Estadual Segismundo Pereira, em Uberlândia - MG.

Na fase inicial do desenvolvimento do trabalho foi aplicado aos alunos um questionário (Apêndice D) visando coletar dados para a pesquisa. Foram feitas algumas perguntas aos alunos no sentido de descrever melhor como cada aluno interpretava a sala de aula, a sua relação com o professor, a indisciplina na sala de aula, as suas dificuldades, entre outros. Na fase final do desenvolvimento da proposta foi aplicado, aos alunos, um segundo questionário (Apêndice E) com a mudança de apenas algumas perguntas com o objetivo de fazer uma comparação, de modo a contribuir com a avaliação da prática.

Um tema abordado no questionário foi o seguinte: Qual a maior dificuldade em relação às atividades relacionadas a matemática? Grande parte dos entrevistados disseram ter dificuldades em interpretar e se concentrar nas atividades, conforme mostra o Gráfico 1, a seguir.

Gráfico 1 - Grau de dificuldade



Fonte: O autor.

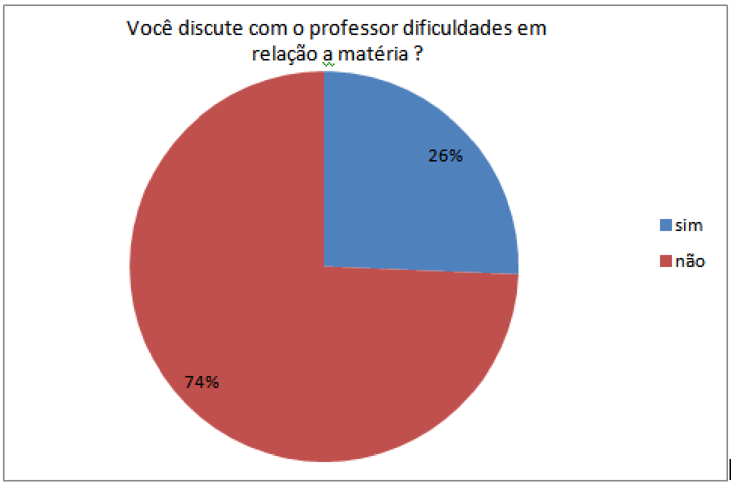
A maioria dos alunos respondeu ter dificuldades em interpretar as atividades, também informaram que tinham dificuldades na concentração, o que confirmou as observações feitas pelo professor a partir do comportamento de alguns deles. Aqueles que se dispersavam com grande facilidade nas aulas de matemática, geralmente não faziam as tarefas que eram propostas e não liam os enunciados das atividades.

Às sextas-feiras, quando os problemas eram distribuídos aos alunos, a maioria deles apresentava dificuldades na interpretação dos problemas, por algum tipo de distração. Alguns não conseguiam concentração nem para fazer a leitura das primeiras informações contidas em cada problema. Estas habilidades de concentração e interpretação da leitura feita em cada problema são fundamentais na primeira etapa da metodologia, a compreensão do problema. Neste contexto, foram colocadas músicas clássicas para serem ouvidas de diferentes compositores como: Mozart, Vivaldi, Schubert, Strauss, Wagner e Verdi, objetivando acalmar os alunos e melhorar sua atenção na realização das atividades propostas, conforme observou Losavov.

Num primeiro momento houve certa resistência por parte do grupo em ouvir esse repertório musical. Quando questionados sobre o motivo, alguns disseram nunca ter tido acesso a esse tipo de música e os que as conheciam, afirmaram que não gostavam muito do ritmo, achavam muito estranho aula de matemática com música clássica. Neste momento foi importante observar que as mudanças iniciais nas aulas já estavam proporcionando um diálogo acerca do método utilizado na aula de matemática. Depois de algumas aulas aplicando resolução de problemas ao som dessas músicas, já se pode notar uma significativa mudança na atitude dos alunos, pois os mesmos faziam silêncio para ouvir as músicas, justificando que elas os deixavam mais atentos para realizar as atividades matemáticas solicitadas. Com o passar do tempo os alunos se mostravam ansiosos para a chegada da sexta-feira, em que teriam aula de resolução de problemas ao som de música clássica.

Um outro tema abordado no questionário aplicado aos alunos levou o professor a uma grande reflexão, por acreditar ser um professor que dava oportunidades para os alunos questionarem sobre os conteúdos, exporem suas ideias, murmurarem suas dificuldades. Quando foi perguntado se eles discutiam com o professor as dificuldades em relação a matéria foram obtidos os seguintes resultados apresentados no Gráfico 2.

Gráfico 2 - Relação alunos x docente - dificuldades com o conteúdo



Fonte: O autor.

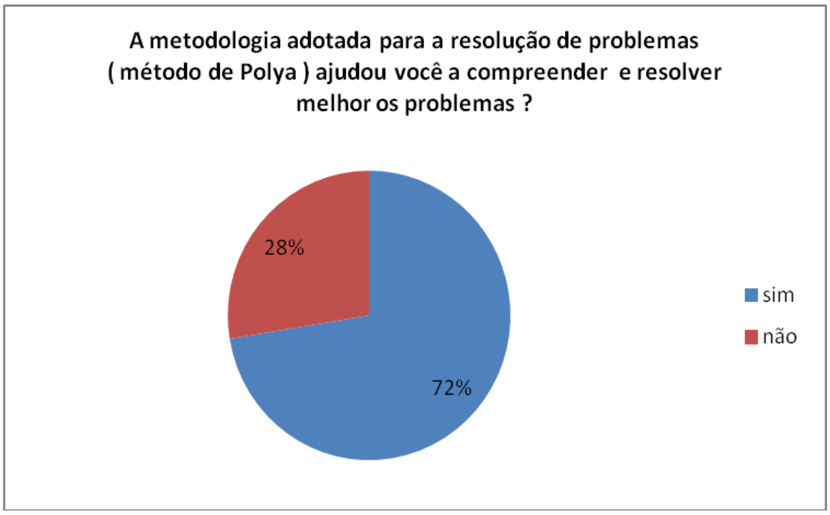
A prática pedagógica permitiu maior aproximação com os alunos, levou o professor a ter uma percepção maior das dificuldades de cada um, maior atenção aos seu questionamentos. Anteriormente acreditava-se que alguns alunos não prestavam atenção às aulas porque eram apenas indisciplinados, não tinham pré-requisitos para acompanhar os conteúdos. No entanto, a investigação norteada pela resolução de problemas possibilitou uma grande reflexão sobre "ser professor", tornando este professor mais acessível aos alunos – um orientador da aprendizagem, e não apenas transmissor do conhecimento. Na etapa que se refere a compreensão do problema o professor, ao orientar os alunos, pode presenciar de uma forma mais individual as suas dificuldades. Muitas vezes as dicas dadas ao mesmo tempo a todos os alunos da turma não foram suficientes para que alguns compreendessem o problema, fazendo-se assim necessário que o professor desse dicas individuais, fosse até as carteiras, lesse o problema juntamente com o aluno, encorajando-o a colocar no papel suas ideias.

A etapa referente a execussão do plano também ajudou muito esta aproximação, quando o professor orientava a executar o plano traçado por eles para resolver o problema observou-se que muitos tinham grande dificuldade com os conteúdos de matemática que seriam utilizados para encontrar a solução do problema. Neste momento, o professor ia até as carteiras e os orientava quanto a forma de proceder com tais conteúdos, levando-os a recordarem conceitos, definições, etc.

A análise dos dados coletados no primeiro questionário motivou a aplicação de um segundo questionário, no sentido de fazer uma comparação para contribuir com a avaliação da metodologia do trabalho, uma vez que alguns temas abordados nos questionários se referiam a resultados avaliados pelo trabalho.

No questionário que foi aplicado na fase final da aplicação da prática pedagógica, depois que os alunos já estavam familiarizados com a metodologia da proposta, foi pergundado se este novo procedimento adotado nas aulas contribuiu para compreender e solucionar os problemas. O Gráfico 3, a seguir, mostra a opinião dos alunos em relação a esta questão.

Gráfico 3 - Compreensão a partir da metodologia



Fonte: O autor.

A metodologia contribuiu para que grande parte dos alunos tivessem uma compreensão melhor das atividades propostas. As etapas da proposta permitiram aos alunos tentarem resolver os problemas de uma forma mais organizada estruturando seus raciocinios e pensamentos, e a proximidade com o professor os encorajaram a escrever seus argumentos em cada problema.

Nesta mesma linha de pensamento também foi perguntado aos alunos se a música contribuiu de forma positiva para ajudá-los na concentração e na disciplina em sala de aula. A declaração dos alunos é representada a seguir no Gráfico 4.

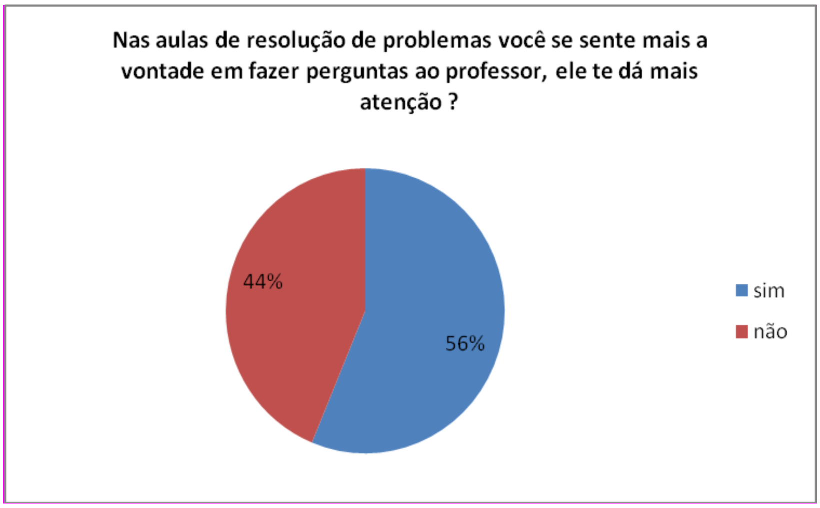
Gráfico 4 - Concentração a partir da música

Fonte: O autor.

Durante o acompanhamento e orientação de cada etapa desenvolvida pela proposta, o professor também observou maior disciplina dos alunos quando colocava a música para eles ouvirem. Alguns deles, mesmo assim, não conseguiam se concentrar, não se davam esta oportunidades ou não conseguiam participar conforme a exigência de cada momento. Outros faziam um silêncio profundo e até reclamavam quando outros faziam barulho. Ao caminhar entre as carteiras, observou-se que vários alunos, que muitas vezes não faziam tarefas em sala de aula, se esforçavam para seguir o que era orientado ou questionado em cada etapa do problema proposto. Este esforço por compreender as etapas pelas quais haviam de passar para resolver o problema fez com que estes alunos lessem o problema várias vezes buscando o seu entendimento, o que os levaram a fazer perguntas ao professor, atitude que não era comum antes da aplicação da proposta. Neste momento, pode-se observar que a metodologia já estava proporcionando uma maior interação entre professor e aluno, o desenvolvimento da prática de leitura dos enunciados, contribuindo de forma efetiva para a aprendizagem dos alunos.

No segundo questionário, o tema relação aluno x professor sinalizou um resultado mais satisfatório (Gráfico 5), porém com necessidade de maiores ajustes para tornar a sala de aula um espaço em que se possa propiciar aprendizado a todos os alunos, sem exceção. Diante destes fatos percebe-se que a metodologia adotada contribuiu para um melhor diálogo entre professor e aluno, sendo necessário melhorar a aplicação do processo para atingir a turma como um todo.

Gráfico 5 - Relação alunos x docente - atenção pelo professor

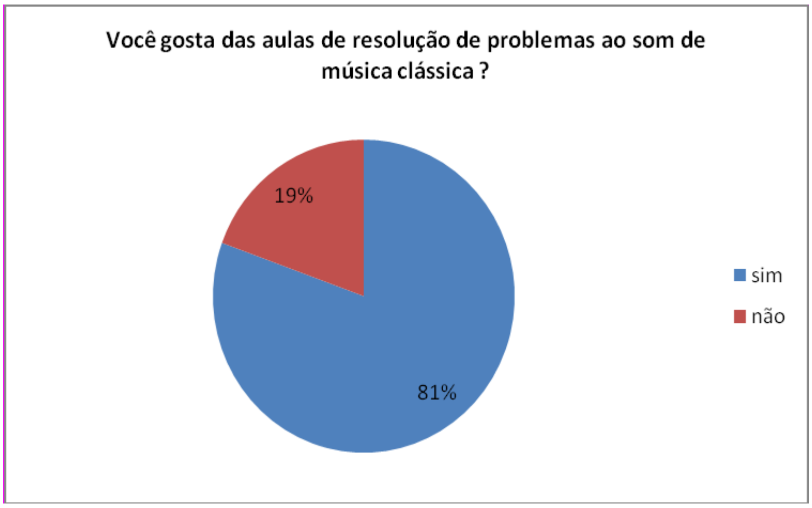


Fonte: O autor.

Observando os resultados dos Gráficos 5 e 6, fica evidenciado que o fato dos alunos gostarem da metologia aplicada não foi suficiente para se alcançar, em sua totalidade, um objetivo específico que surgiu no decorrer do trabalho, a quebra da barreira de comunicação entre o professor e alunos.

Fica evidenciado que a proposta criou uma maior liberdade aos alunos em dialogar sobre matemática com o professor, mas mesmo assim muitos ainda apresentaram dificuldade em chegar no professor e tirar dúvidas.

Gráfico 6 - Apreciação das aulas de resolução de problemas matemáticos



Fonte: O autor.

Em uma determinada aula os problemas foram distribuídos e a música não foi colocada. Neste momento, alguns alunos perguntaram:

Professor cadê a música?

O professor disse a eles que não teria música, que havia esquecido de selecionar aquelas que seriam utilizadas naquela aula. Mesmo assim, os alunos insistiram para que fosse colocado alguma que já estava gravada no computador. A música foi colocada e eles continuaram a pensar nos problemas.

Após a análise de alguns pontos dos questionários e alguns momentos vivenciados durante as aulas, serão feitos relatos e análises voltados especificamente para alguns problemas propostos e resolvidos pelos alunos.

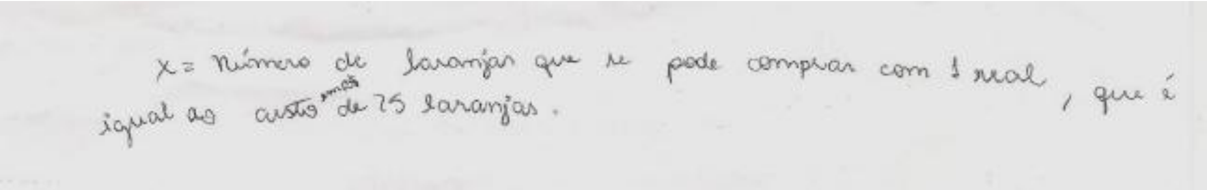
Problema proposto:

O custo em reais de 25 laranjas é igual ao número de laranjas que se pode comprar com um real. Qual é o número de laranjas que se pode comprar com três reais?

Esse é um de três problemas que foram propostos para os alunos do 9º ano do ensino fundamental, a resolução que se segue foi feita por uma aluna, medalhista OBMEP pela terceira vez. É uma aluna que apresenta um grande interesse pelas aulas de matemática e gosta de resolver problemas. Um dos objetivos dessa proposta foi potencializar alunas como esta.

Primeiramente os alunos foram orientados a *compreender o problema*. Foi distribuído a todos os alunos, juntamente com os problemas propostos, uma orientação constando as etapas da metodologia aplicada. O professor repassou pequenas dicas, para que os alunos compreendessem o problema. Muitos tiveram muitas dificuldades para compreender a situação. A aluna 1 e mais alguns alunos fizeram alguns questionamentos, concentraram se, leram mais algumas vezes e apresentaram uma interpretação, retirando os dados do problema, que é uma das tarefas que devem ser cumpridas na etapa, conforme a Figura 1.

Figura 1 - Interpretação de um problema


x = número de laranjas que se pode comprar com 1 real, que é igual ao custo mais de 25 laranjas.

Muitos outros alunos também fizeram com sucesso esta tarefa, outros não. Aqueles que ainda não tinham compreendido o problema, foram orientados de forma individual pelo professor buscando levar a todos à compreensão do problema. Vale observar que este também é um dos objetivos da proposta, possibilitar o aprendizado de todos os alunos.

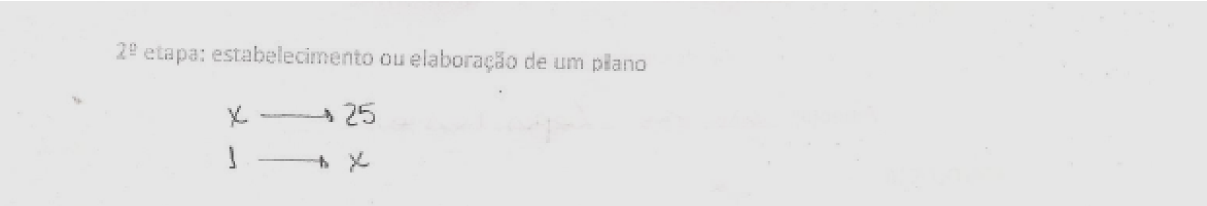
Os que demonstraram ter tido a compreensão do problema, foram orientados a partirem para a segunda etapa *estabelecer ou elaborar um plano.* O professor os orientou para fazer relação com alguma variável, que lembrassem conteúdos que foram estudados anteriormente e que apresentassem alguma familiaridade com o problema. Muitos depois de pensarem por alguns minutos disseram:

Professor esse problema não tem solução não.

Foi então que, nesse momento, eles foram orientados a se colocarem no cenário do problema, isto é, se eles fossem comprar ou vender as laranjas, como eles fariam para resolver tal situação. Observou-se então que houve uma concentração ainda maior, pois perceberam que se tratava de um problema real, a aluna 1 e vários outros alunos apresentaram um esquema como se segue na Figura

2. Fizeram relações com a incógnita buscando estabelecer um plano que envolvesse uma regra de três para chegarem à solução do problema.

Figura 2 - Esquema para elaboração de um plano

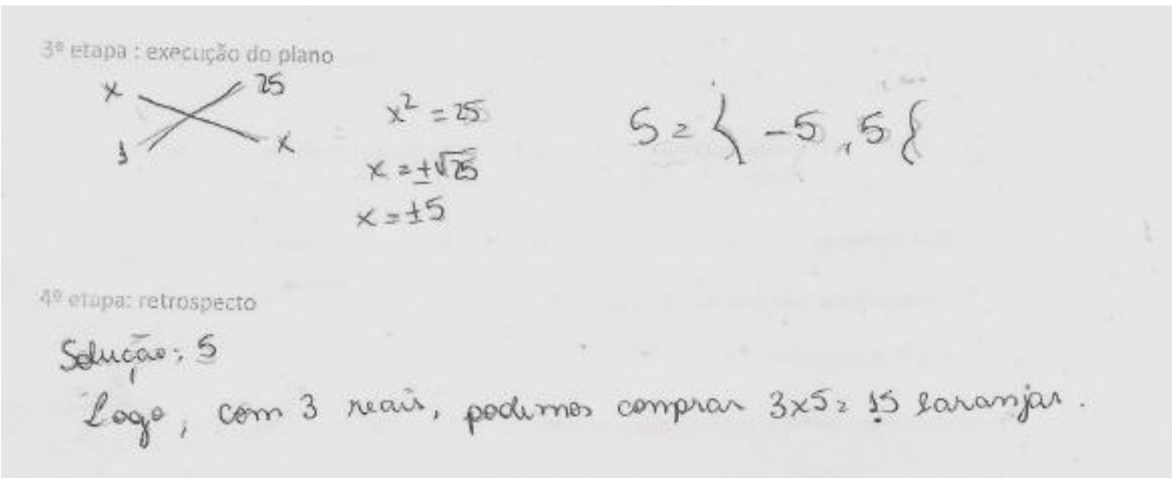


Após observar que grande parte dos alunos conseguiram estabelecer um plano para resolver o problema, os alunos foram orientados a *executar o plano*, ou seja, trabalhar com o esquema montado por eles. Muitos perguntaram:

Professor, isso é uma regra de três? Posso multiplicar cruzado?

Nesse momento, o professor aproveitou para fazê-los refletir sobre grandezas direta e inversamente proporcionais, deixando que eles tirassem a conclusão se poderiam multiplicar cruzado ou não. Um dos resultados que a proposta buscou, foi ensinar matemática a partir dos problemas propostos. Nesse problema, foi possível trabalhar com os alunos regra de três e os conteúdos que ela envolve. Muitos deles conseguiram fazer a análise, outros não. Depois da discussão, e concedendo mais um tempo para pensar, muitos resolveram multiplicar cruzado, encontrando assim uma equação do 2º grau como apresentado na Figura 3.

Figura 3 - Execução do plano e retrospecto



Como era o conteúdo que estavam estudando, muitos não tiveram dificuldades para resolvê-lo, executando-se assim o plano estabelecido, outros queriam resolver usando a fórmula de Báskara, o que podia ser feito. Mas o professor aproveitou este momento para retomar o conteúdo envolvendo as equações do segundo grau incompletas, levando-os a perceber que não era necessário fazer o uso da fórmula para resolver tal equação.

Fica assim evidente que a metodologia contribui para que o professor retome conteúdos que não foram consolidados pelos alunos nas aulas de matemática. Muitos ficaram surpreendidos por perceberem uma aplicação para equação do 2º grau. Aos alunos que não conseguiram concluir a elaboração do plano, o professor deu um atendimento mais individualizado, foram dadas orientações mais específicas, levando-os a fazer uma leitura mais detalhada e cuidadosa do problema e encorajando-os a escrever, dando-lhes informações para que pudessem elaborar um plano para a resolução do problema.

Na quarta etapa: *a revisão*, muitos alunos questionaram:

> *Professor o problema tem duas soluções, considero a solução sendo 5 ou -5.*

Nesse momento, o professor aproveitou para explicar, que 5 ou -5 era a solução da equação, que serviu como uma ferramenta para resolver o problema, e não a solução do problema, pois se tratava de contagem, e a incógnita representava uma quantidade de laranjas e que esta quantidade é um número positivo. Muitos alunos disseram que não escreveram, mas sabiam que -5 não podia ser.

Os dois problemas seguintes não apresentavam de maneira ordenada as etapas da proposta para orientá-los a resolver. Foi deixado a cargo dos alunos a percepção e desenvolvimento das mesmas.

PROBLEMA

Em Patópolis o sistema de numeração possui base b, Pato Donald comprou um carro por $440, entregando ao vendedor uma nota de $1000 sobrando de troco $340. Qual é a base b?

Neste problema o professor foi orientando da seguinte maneira

> *Vamos raciocinar em cima de um número que se escreve na base 10, por exemplo, 129. Veja que 129 = 100 + 20 + 9, tente manipular mais esse número, será que podemos representa-lo de outra forma?*

Alguns alunos responderam:

Professor não sei não.

Outros

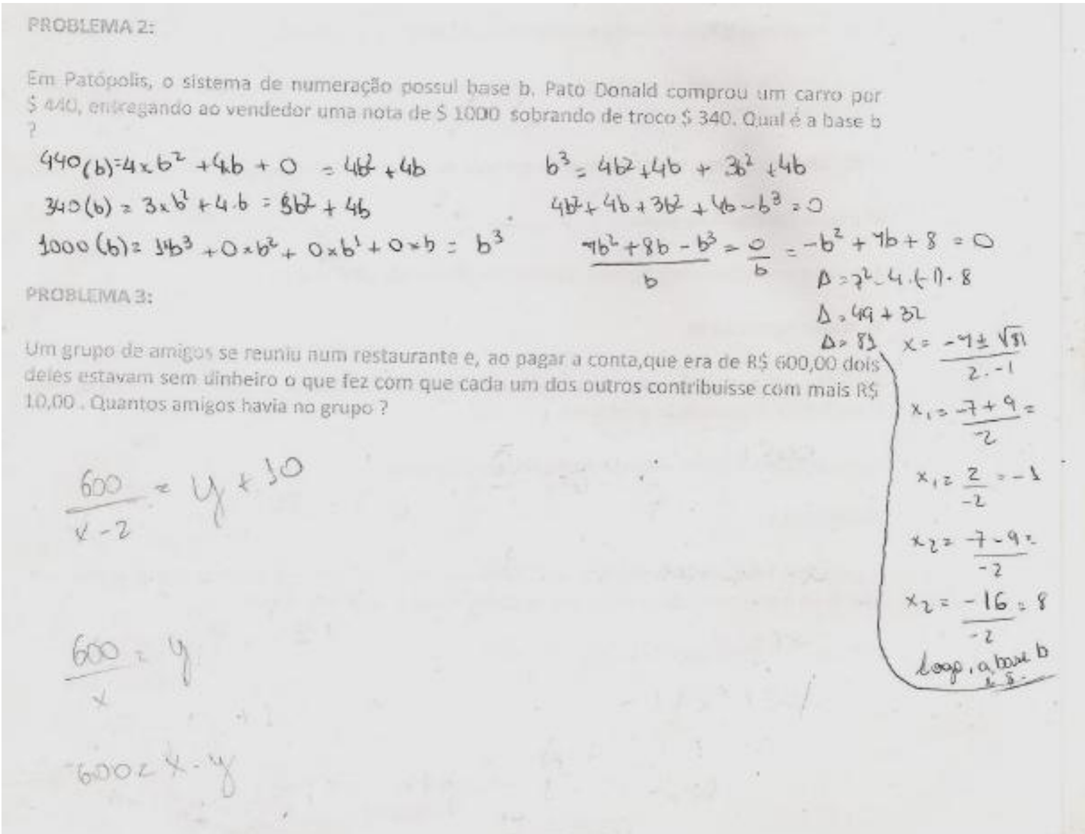
129 = 9 + 20 + 100.

De repente um aluno chamou o professor até sua carteira e disse:

Professor, veja se está correto, $129 = 1x10^2 + 2x10 + 9$

E o professor confirmou que estava correto. Com estas dicas e as orientações dadas na etapa, apenas um dos alunos resolveu o problema durante a aula, apresentando a seguinte solução (Figura 4).

Figura 4 - Solução para os problemas


PROBLEMA 2:

Em Patópolis, o sistema de numeração possui base b. Pato Donald comprou um carro por $ 440, entregando ao vendedor uma nota de $ 1000 sobrando de troco $ 340. Qual é a base b ?

$440_{(b)} = 4 \times b^2 + 4b + 0 = 4b^2 + 4b$

$340_{(b)} = 3 \times b^2 + 4 \cdot b = 3b^2 + 4b$

$1000_{(b)} = 1b^3 + 0 \times b^2 + 0 \times b^1 + 0 \times b = b^3$

$b^3 = 4b^2 + 4b + 3b^2 + 4b$

$4b^2 + 4b + 3b^2 + 4b - b^3 = 0$

$\frac{7b^2 + 8b - b^3}{b} = \frac{0}{b} = -b^2 + 7b + 8 = 0$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8$

$\Delta = 49 + 32$

$\Delta = 81$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \cdot -1}$

$x_1 = \frac{-7 + 9}{-2} =$

$x_1 = \frac{2}{-2} = -1$

$x_2 = \frac{-7 - 9}{-2} =$

$x_2 = \frac{-16}{-2} = 8$

Logo, a base b é 8

PROBLEMA 3:

Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, ao pagar a conta, que era de R$ 600,00 dois deles estavam sem dinheiro o que fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$ 10,00 . Quantos amigos havia no grupo ?

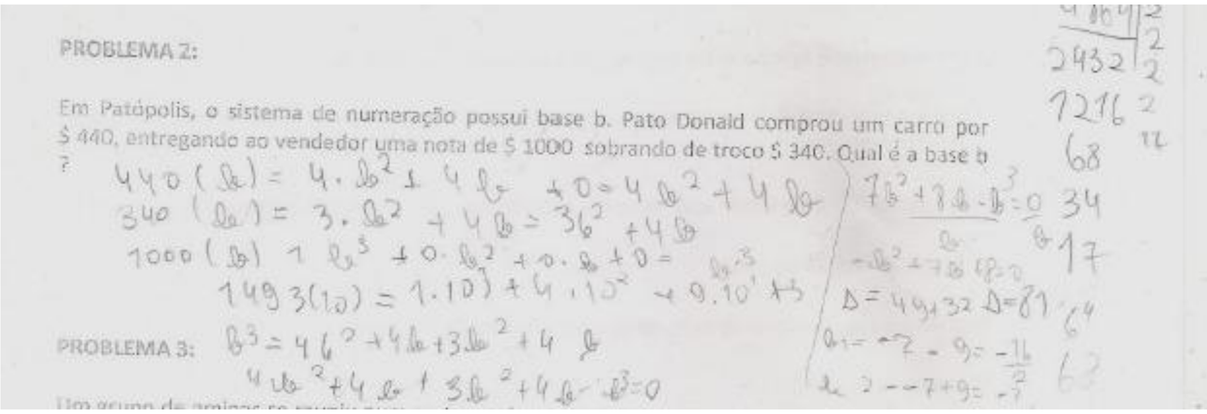
$\frac{600}{x - 2} = y + 10$

$\frac{600}{x} = y$

$600 = x \cdot y$

Um outro aluno não conseguiu muito bem estruturar um plano para resolver o problema, chegou a uma solução meio que tentando escrever o que ouvia de comentários de outros colegas, mas pelo menos escreveu uma solução formal para o problema, que segue na Figura 5.

Figura 5 - Solução forma de um problema



O aluno através das dicas teve a compreensão do problema, estabeleceu um plano, mas não conseguiu executar o plano, o que fez com que ele não chegasse na solução do problema.

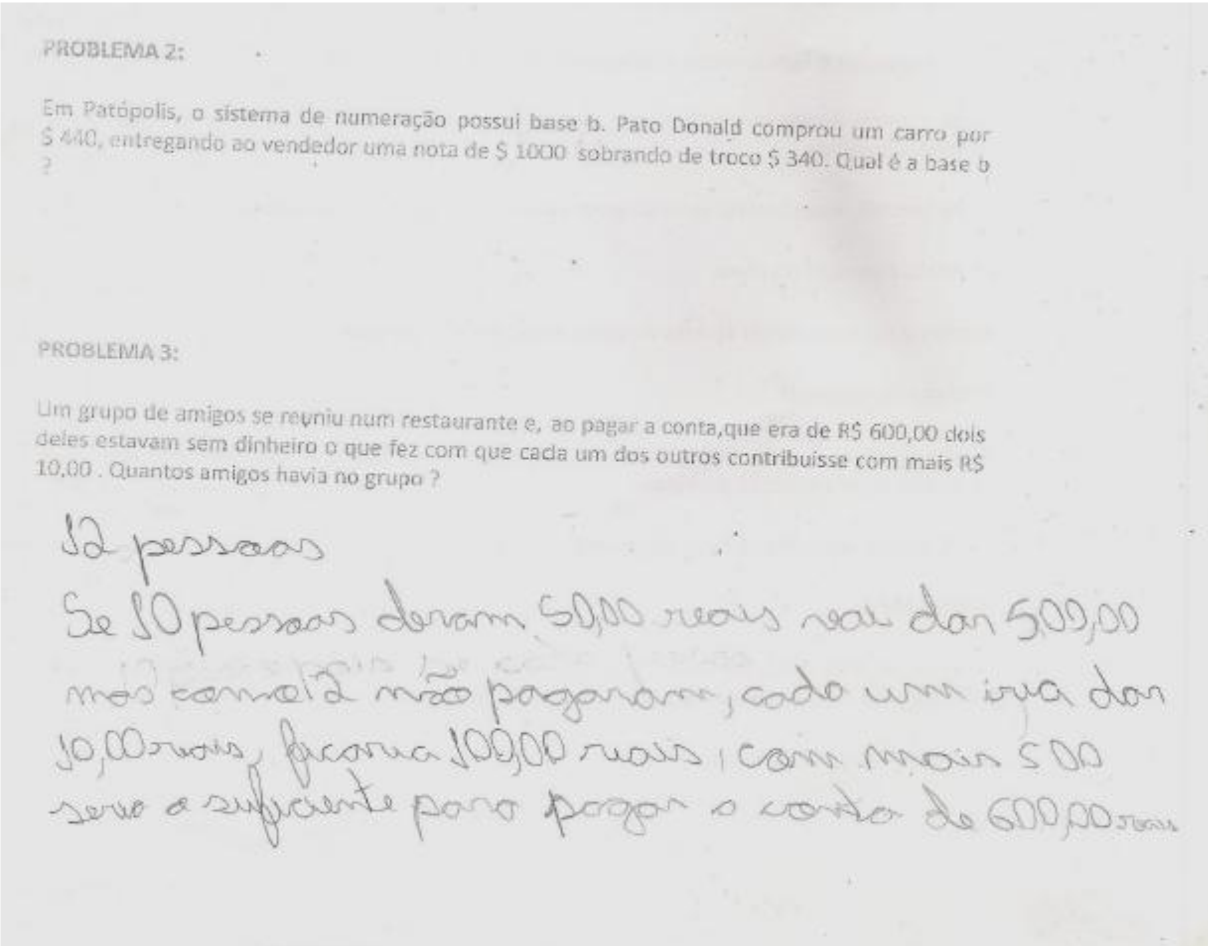
Na aula seguinte onde foi discutida as soluções dos problemas, o professor fez as intervenções, levando este e os demais alunos a perceberem que etapas da proposta não foram cumpridas corretamente, por exemplo, a execução do plano. O aluno não conseguiu resolver a equação do 3º grau. Neste momento o professor aproveitou para explicar que algumas equações podem ser reduzidas às equações do 2º grau, e a que estava envolvida no problema era uma delas. Depois de explicar os conteúdos de matemática o professor fez a correção dos erros, buscando orientá-los para a resposta correta.

Nesta aula, ocorreu algo que chamou a atenção e que ficou claro que o aluno havia compreendido a metodologia. Ele pediu que o professor não desse a resposta do problema, ele se propôs a fazer novas tentativas. Neste dia, não foi feito a socialização da resposta do problema, apenas foram discutidos os questionamentos que surgiram, o que mostra que a proposta não é engessada, ela possibilita ao professor conduzir uma aula de modo que os alunos sejam os principais desenvolvedores do processo de aprendizagem.

Com relação ao terceiro problema, conforme descrito a seguir, *Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, ao pagar a conta, que era de R$600,00 dois deles estavam sem dinheiro o que fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$10,00. Quantos amigos havia no grupo?*

a maioria dos alunos alcançou com êxito os objetivos da primeira etapa da metodologia, que era compreender o problema, mas mais da metade dos alunos não conseguiram expressar os raciocínios. Neste momento, o professor interferiu orientando no sentido de levá-los a compreender que nem sempre temos que fazer o uso de incógnitas para representar um dado desconhecido. É possível encontrar a solução de alguns problemas com argumentação. Com essa dica os alunos começaram a levantar hipóteses com números, uns disseram ser 10 pessoas, mas os argumentos eram derrubados quando faziam os cálculos, outros partiam de um valor atribuído a conta de 500 reais, mas também percebiam contradição na argumentação, e com estas tentativas muitos chegaram numa solução semelhante à descrita por um dos alunos conforme apresentado a Figura 6.

Figura 6 - Solução de um problema com argumentação


PROBLEMA 2:

Em Patópolis, o sistema de numeração possui base b. Pato Donald comprou um carro por $ 440, entregando ao vendedor uma nota de $ 1000 sobrando de troco $ 340. Qual é a base b ?

PROBLEMA 3:

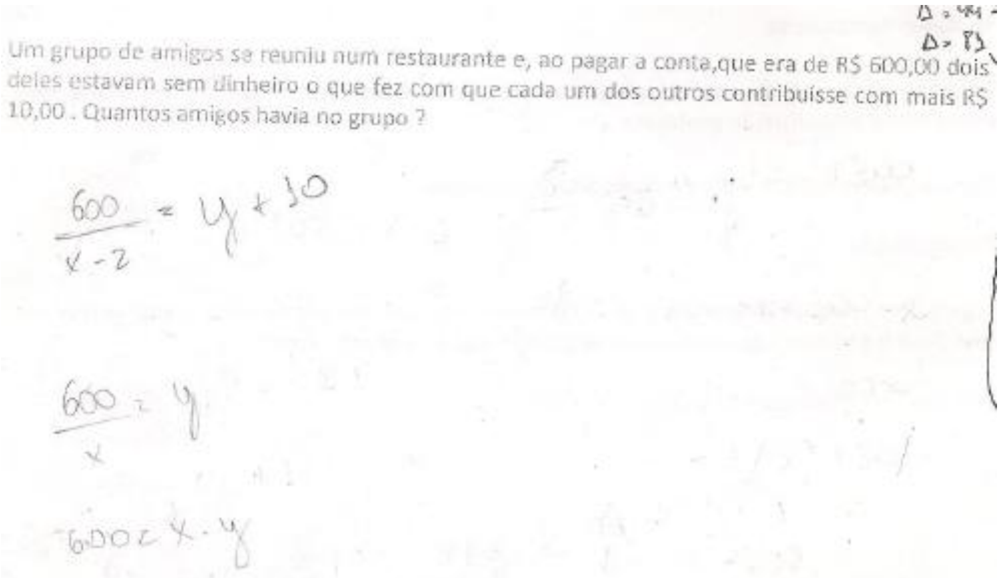
Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, ao pagar a conta,que era de R$ 600,00 dois deles estavam sem dinheiro o que fez com que cada um dos outros contribuisse com mais R$ 10,00 . Quantos amigos havia no grupo ?

12 pessoas
Se 10 pessoas deram 50,00 reais vai dar 500,00 mas como 2 não pagaram, cada um iria dar 10,00 reais, ficaria 100,00 reais, com mais 500 seria o suficiente para pagar a conta de 600,00 reais

Dos alunos que resolveram o problema 3, 70% deles não resolveram o problema 1 e nenhum deles resolveu o problema 2, mas com as dicas dadas em cada etapa apresentaram uma solução interessante para o problema.

Nesse caso sem fazer o uso de incógnitas. Um fato interessante é que a aluna que resolveu os dois problemas anteriores, que aparentemente apresentavam uma dificuldade maior para realizar as etapas da proposta não resolveu este problema. Cabe aqui comentar novamente sobre a tentativa de solução da aluna 1, pois foi a única que estabeleceu um plano fazendo o uso de incógnitas. Ela não conseguiu durante a aula resolver o problema, mas analisando as equações deixadas por ela pode-se perceber que houve compreensão do problema, foi elaborado um plano de resolução, foram feitas relações entre incógnitas corretamente, mas a aluna teve dificuldades em executar o plano (Figura 7).

Figura 7 - Resolução de um problema relacionando incógnitas


Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, ao pagar a conta,que era de R$ 600,00 dois deles estavam sem dinheiro o que fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$ 10,00 . Quantos amigos havia no grupo ?

$$\frac{600}{x-2} = y + 10$$

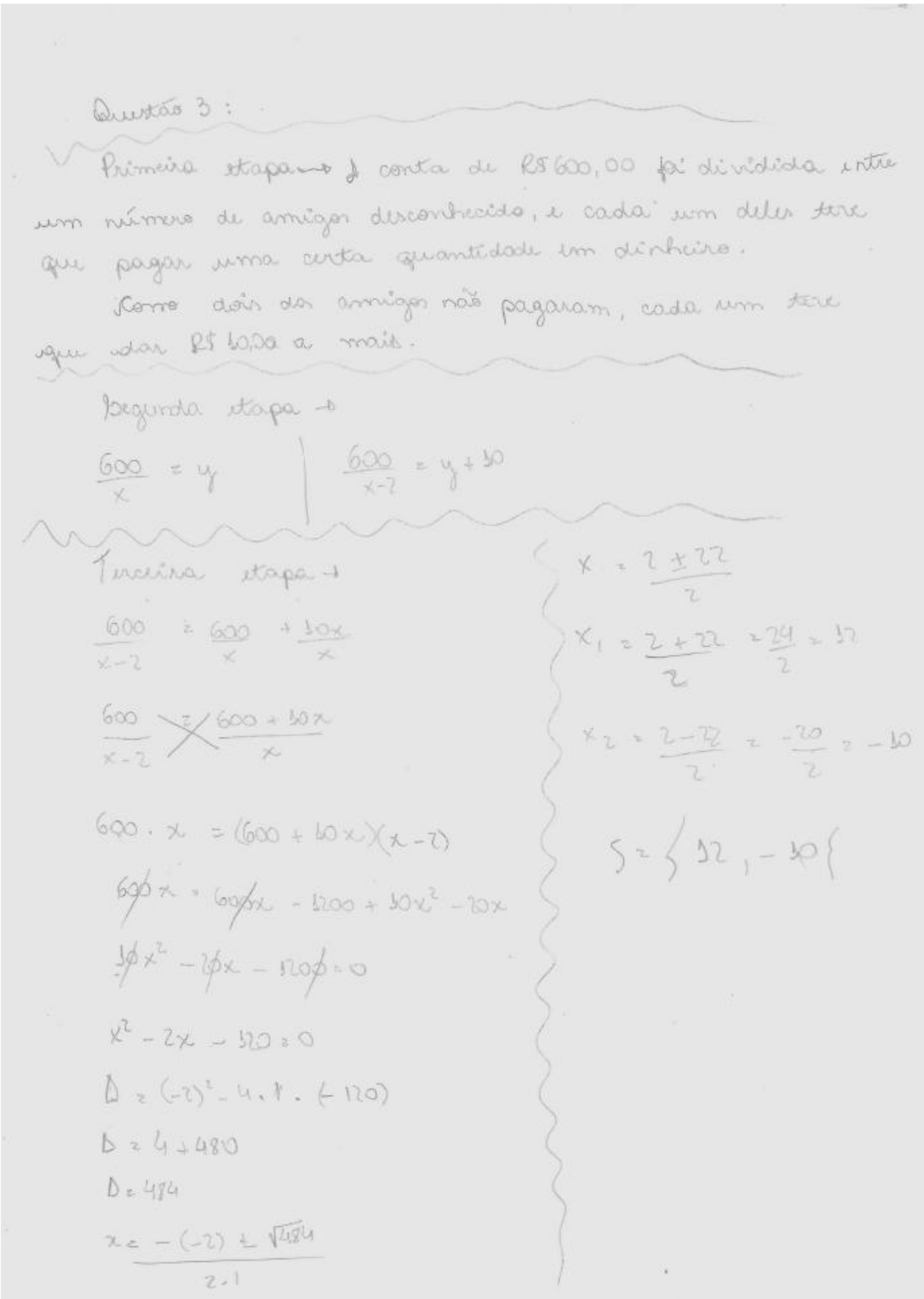
$$\frac{600}{x} = y$$

$$600 = x \cdot y$$

Passados alguns dias, a aluna apresentou ao professor a solução (Figura 8),

dando continuidade ao plano estabelecido em sala de aula e deixando bem claro as etapas que foram desenvolvidas até chegar na solução do problema.

Figura 8 - Solução de problema por etapas



Questão 3:

Primeira etapa → A conta de R$ 600,00 foi dividida entre um número de amigos desconhecido, e cada um deles teve que pagar uma certa quantidade em dinheiro.

Como dois dos amigos não pagaram, cada um teve que dar R$ 30,00 a mais.

Segunda etapa →

$\frac{600}{x} = y$ | $\frac{600}{x-2} = y + 30$

Terceira etapa →

$\frac{600}{x-2} = \frac{600}{x} + \frac{30x}{x}$

$\frac{600}{x-2} = \frac{600 + 30x}{x}$

$600 \cdot x = (600 + 30x)(x-2)$

$\cancel{600x} = \cancel{600x} - 1200 + 30x^2 - 20x$

$3\cancel{0}x^2 - 2\cancel{0}x - 120\cancel{0} = 0$

$x^2 - 2x - 120 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-120)$

$\Delta = 4 + 480$

$\Delta = 484$

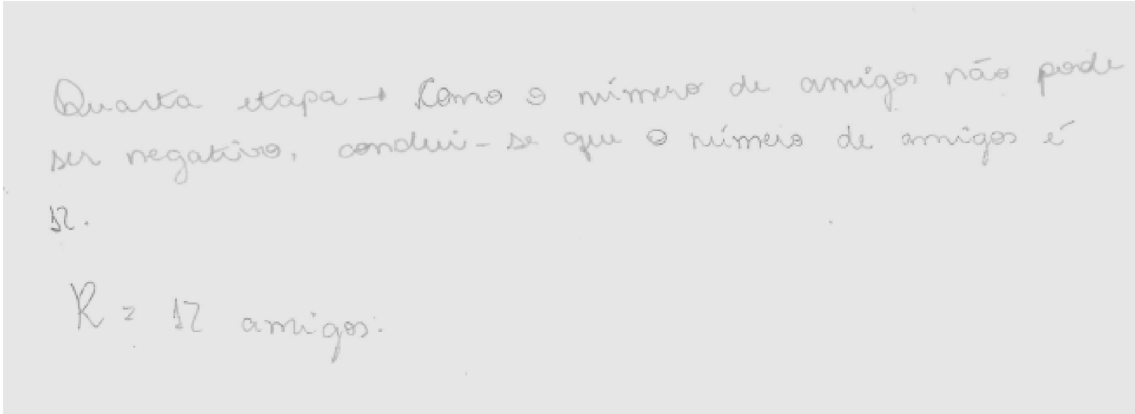
$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{484}}{2 \cdot 1}$

$x = \frac{2 \pm 22}{2}$

$x_1 = \frac{2 + 22}{2} = \frac{24}{2} = 12$

$x_2 = \frac{2 - 22}{2} = \frac{-20}{2} = -10$

$S = \{12, -10\}$


Quarta etapa → Como o número de amigos não pode ser negativo, conclui-se que o número de amigos é 12.

R = 12 amigos.

Quando o professor disse a ela que a resolução estava correta, ela em tom de muita felicidade disse:

> *Professor fiquei o fim de semana todo tentando solucionar o problema, ainda bem que está correto.*

Tal fato foi motivo de grande alegria para o professor, pois o problema proposto conseguiu fazer com que o aluno continuasse a busca pela solução mesmo fora da sala de aula, não foi somente esta aluna que resolveu o problema em casa, outros também apresentaram a solução, umas corretas outras não. Este também é um dos objetivos específicos que a proposta buscou alcançar, fazer com que os alunos tentassem resolver os problemas de forma independente e não somente dentro da sala de aula, mas que os resolvessem motivados pelo prazer de encontrar uma solução. Nesse dia, a aluna 1 fez várias colocações sobre a sua experiência com a matemática e sobre as aulas de resolução de problemas, o que motivou o registro do questionário seguinte que foi aplicado a ela (Figura 9).

Figura 9 - Experiência com a matemática – registro de uma aluna

Aluno 1:

Você sempre gostou de matemática ou começou a se interessar por ela quando começou a resolver problemas ?

Sempre gostei de matemática.

Você acha que as aulas destinada a resolução de problemas contribui para o seu sucesso nas provas da OBMEP ?

Sim. É bom ter contato com problemas dissertativos nas aulas de matemática.

Quando você não consegue resolver um problema durante a aula, você continua pensando nele em casa ?

Sim. Acho que eu fico inquieta até não descobrir algum argumento que responda a questão, mesmo que esteja errado.

A metodologia proposta para resolver problemas, no caso a metodologia de Polya te ajudou a obter uma organização maior, possibilitando uma maior facilidade em resolver problemas ?

Me ajudou um pouco. Com esse método ficou mais fácil organizar as ideias, as informações do enunciado com calma.

Como você gostaria que os conteúdos de matemática fossem apresentados a você ?

Eu gosto da maneira que o professor introduz os conteúdos, e acho interessante a resolução de problemas desafiadores, que "fogem" do conteúdo dos livros didáticos.

Hoje em dia não é fácil encontrar alunos que gostam de matemática. Quando estes são identificados, o papel do professor como um orientador da aprendizagem é potencializá-los, no sentido de proporcionar meios e atividades para que eles dêem sequência ao seu processo de aprendizado sem perder o entusiasmo pela ciência. A proposta deixou evidente que ela pode contribuir com este processo.

A aula destinada a discussão e resolução dos exercícios, foi iniciada com o professor pedindo para que os alunos expusessem sobre o que acharam dos problemas propostos, se foram interessantes, se foram de fácil compreensão, se acharam difícil, etc. Surgiram então os seguintes relatos:

professor não entendi nada [...],
professor tinha muita conta [...],
professor eu não consigo entender nada
quando leio os exercícios de matemática.
eu tento, tento e não consigo.
tive dificuldades mas consegui resolver.
Depois que compreendi o problema foi fácil resolver.

O professor explicou que às vezes deixamos de resolver um problema porque não fazemos tentativas suficientes, quando vamos por um caminho errado, temos descrença em buscar outros meios, por exemplo, o problema 3 pode ser resolvido de uma maneira simples. Então o professor convidou um outro para apresentar a sua solução.

Este aluno foi até o quadro, explicou como tinha chegado a solução, e perguntou se precisava escrever. Nesse momento, o professor disse a ele que seria bom que ele registrasse, pois quando resolvemos um problema ou até mesmo um exercício qualquer, no caso de matemática, isso faz sentido quando socializamos à outras pessoas e a maneira que temos de fazer isso é escrevendo. Então o aluno tomou o pincel e escreveu a sua solução. Enquanto o aluno escrevia vários outros alunos participavam, dando dicas, comentando os resultados expostos no quadro, e o professor fazia as intervenções para proporcionar uma participação efetiva dos alunos na aula. Aqui pode-se observar que um dos objetivos da metodologia, que é proporcionar uma maior participação dos alunos nas aulas de matemática, foi alcançado.

Depois que o aluno apresentou a sua solução e houve entendimento de todos, a aluna 1 foi convidada para apresentar a sua solução, que foi feita de maneira diferente.

Então ela começou a colocar a sua resolução no quadro, mostrando aos outros alunos as etapas pelas quais ela havia refletido para resolver o problema, montou equações com duas variáveis, fez substituições, chegou em uma equação do 2º grau, resolveu-a, encontrou duas soluções, mas apenas uma satisfazia as condições do problema. Também falou das dificuldades que encontrou, que não se lembrava que quando se tem uma igualdade pode-se multiplicar cruzado. Então o professor aproveitou este momento para retomar a explicação de proporções, equações do 2º grau, sistema de equações com duas variáveis. Aqui fica evidente que a metodologia possibilita ao professor ensinar ou retomar conteúdos de matemática em cada problema, no sentido de proporcionar de forma efetiva o aprendizado dos alunos que é um dos objetivos avaliado pela proposta.

Foi possível discutir a resolução do problema durante toda aula, não sendo possível discutir outros problemas, uma vez que quando os alunos se envolvem, o tempo se torna muito curto. Mas o professor deixou claro que se alguém tivesse interesse poderia procurá-lo para discutir a solução.

As soluções seguintes permitem uma avaliação sobre a evolução dos alunos nas tentativas de solucionarem um problema. Mesmo sem conseguir chegar a uma resposta correta, é possível alcançar êxito ao registrar no papel suas ideias, usar figuras para auxiliá-los na busca de uma solução, escrever textos argumentando o seu raciocínio, tentar fazer cálculos que justifiquem sua maneira de pensar e etc.

A solução que segue (Figura 10) foi escrita por um aluno que tinha muita dificuldade em expressar as suas ideias, quase não participava das aulas. As questões discursivas que eram propostas a ele em avaliações rotineiras quase sempre ficavam em branco. Com a inserção das aulas de resolução de problemas, este aluno foi evoluindo de forma extraordinária. Nos problemas que eram propostos e quando o professor ia dando as dicas levando os alunos a cumprirem as tarefas de cada etapa, ele sempre se mostrava atencioso às dicas dadas pelo professor. Quando ele expunha seus questionamentos diante dos demais colegas o professor fazia as intervenções para que suas ideias fossem valorizadas, o que contribuiu para que ele perdesse o medo de escrever.

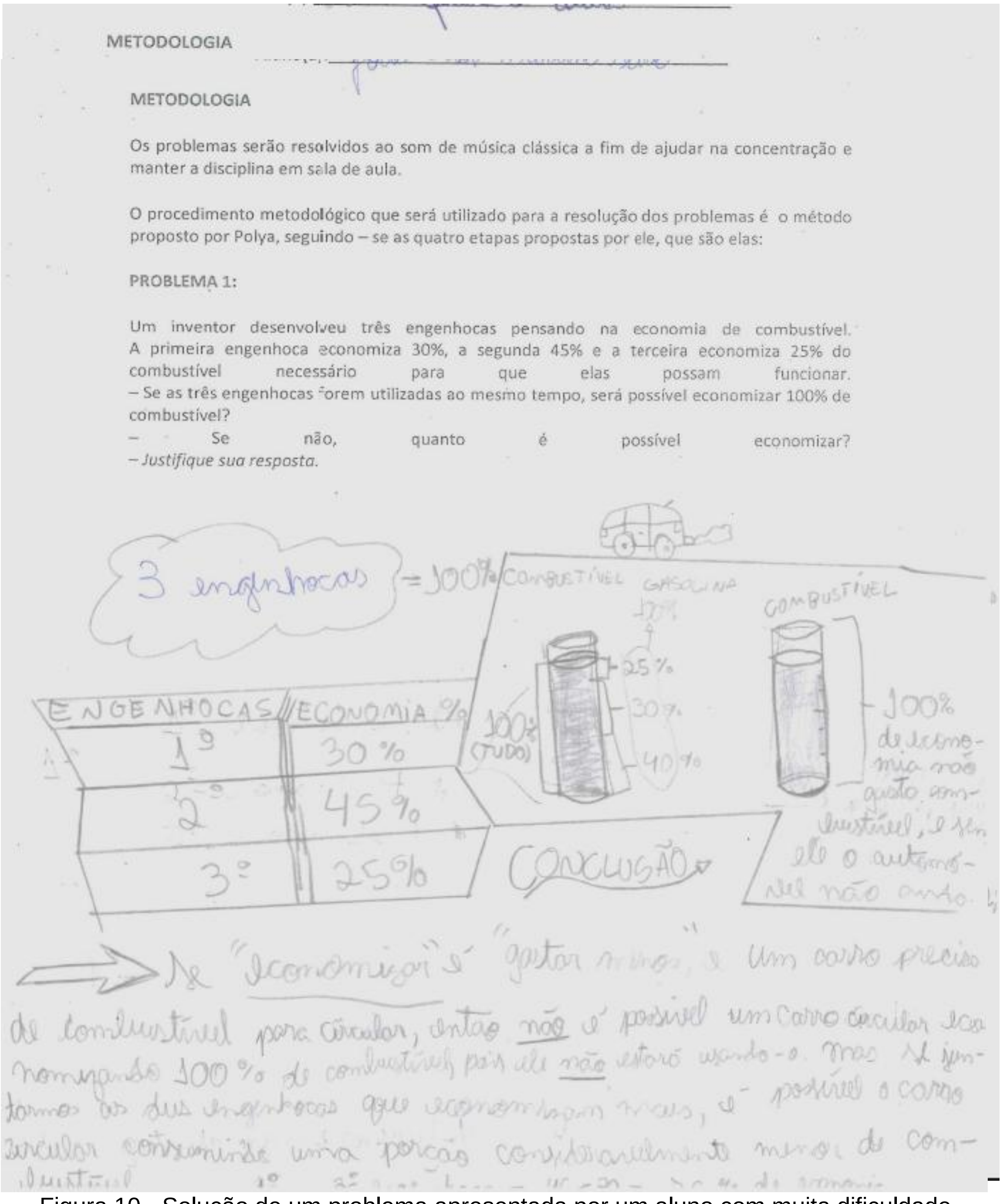
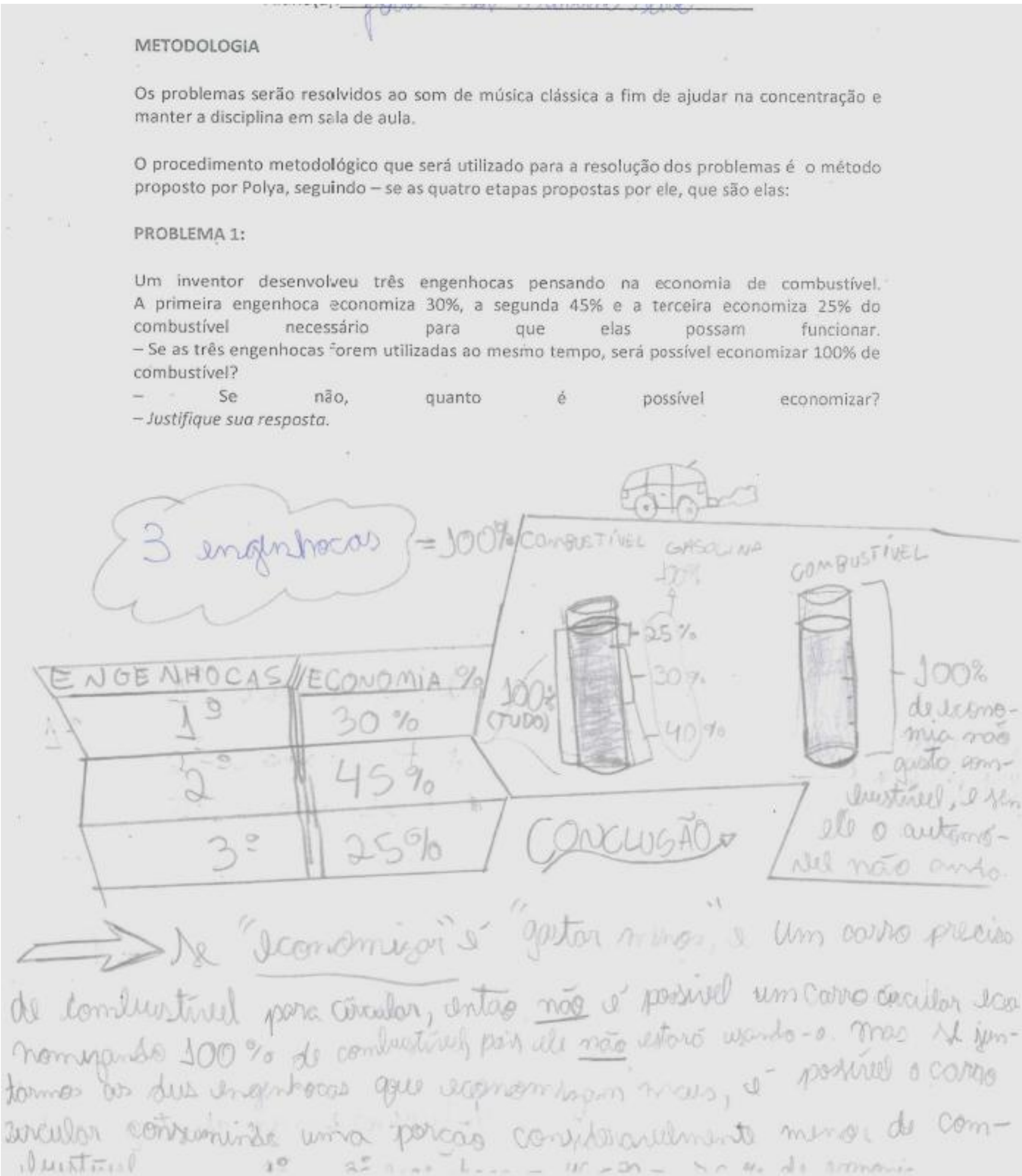


Figura 10 - Solução de um problema apresentada por um aluno com muita dificuldade

A solução apresentada por ele não estava correta, mas tornou possível a percepção de sua evolução quanto a compreensão da metodologia. O aluno estabeleceu um plano, buscou associar o problema a um caso particular, tentando resolver primeiramente o problema para um total de 50l de combustível e depois pensar em um caso mais geral. Na tentativa de resolver o problema o aluno requisitou a presença do professor em sua mesa várias vezes, questionando sobre cálculo de porcentagens, operações com frações, etc. Ficou evidente que mesmo não conseguindo encontrar a resposta correta para o problema, a metodologia contribuiu para o aprendizado do aluno e o inseriu no contexto do desenvolvimento da aprendizagem. É relevante observar aqui que este é um dos objetivos da proposta, inserir todos os alunos no cenário do aprendizado.

Em relação ao problema apresentado na Figura 11, pode-se observar que a conclusão feita pelo aluno sinaliza a contribuição da metodologia no sentido de fazer com que os alunos leiam com atenção os problemas, isto fica claro quando o aluno tenta escrever a sua conclusão usando o significado das palavras que aparecem no enunciado. Vários alunos apresentaram uma solução para o problema semelhante a esta, o que mostrou que as etapas da metodologia levaram alguns alunos a fazerem uma leitura crítica dos enunciados. Tal fato foi percebido quando os alunos responderam a primeira parte do problema, dizendo que não era possível economizar 100% de combustível, alguns poucos alunos responderam que a economia seria possível, pois se focaram apenas nas informações numéricas problema (30% +45%+ 25% = 100%). O fato também de aparecerem desenhos na busca pela resolução do problema foi interessante, pois este direcionamento é dado em uma das etapas, isto significa que o aluno buscou meios que lhe possibilitasse compreender e fazer o plano para resolver o problema. Ficou notório, nesta aula, a grande dificuldade que os alunos tinham em lidar com cálculos com porcentagens, um dos objetivos do problema era levar o aluno ao entendimento de que descontos sucessivos de 30%, 45% e 25% não representa um desconto de (30% +45%+ 25% = 100%). Na aula em que foi socializada a solução do problema o professor ensinou aos alunos cálculos envolvendo porcentagem, o que tornou visível a contribuição da metodologia para proporcionar ao professor a oportunidade de desenvolver os conteúdos a partir dos problemas. Estes fatos ficam evidenciados na figura a seguir.

Figura 11 - Contribuição da metodologia na resolução de um problema



METODOLOGIA

Os problemas serão resolvidos ao som de música clássica a fim de ajudar na concentração e manter a disciplina em sala de aula.

O procedimento metodológico que será utilizado para a resolução dos problemas é o método proposto por Polya, seguindo – se as quatro etapas propostas por ele, que são elas:

PROBLEMA 1:

Um inventor desenvolveu três engenhocas pensando na economia de combustível. A primeira engenhoca economiza 30%, a segunda 45% e a terceira economiza 25% do combustível necessário para que elas possam funcionar.
– Se as três engenhocas forem utilizadas ao mesmo tempo, será possível economizar 100% de combustível?
– Se não, quanto é possível economizar?
– *Justifique sua resposta.*

No decorrer da aplicação da metodologia ficou claro que as etapas da proposta contribuíram de forma efetiva para o aprendizado dos alunos, muitos tiveram oportunidades de aprenderem conteúdos, que partiram de seus questionamentos, possibilitando o aprendizado da matemática a partir dos problemas, um dos objetivos principais deste trabalho.

As etapas da metodologia possibilitaram o enriquecimento do olhar do aluno sobre a realidade dos problemas estudados, uma vez que cada um tem sua especificidade e linguagem. Os dados indicam que houve um crescimento satisfatório no raciocínio dos alunos, alguns que antes nem liam os enunciados das atividades tiveram iniciativas de colocar no papel suas ideias, passaram, com a metodologia, a expressar melhor os seus pensamentos, buscando descrever os seus raciocínios de forma que fosse possível o entendimento. O desenvolvimento de cada etapa da metodologia os ajudaram a ter uma organização melhor, levando-os a compreensão dos enunciados das atividades propostas, para dar seguimento às etapas da resolução.

Os comentários que teceram essas resoluções tiveram como objetivo mostrar a riqueza que foi trabalhar com resolução de problemas em sala de aula. O quanto essa metodologia foi capaz de envolver os alunos e de colocá-los no cenário do aprendizado, dar a oportunidade de se sentirem participantes desse processo e propiciar maior aproximação entre professor e aluno.

A ideia em discutir e debater as estratégias elaboradas pelos alunos em cada etapa da metodologia, além de socializar os resultados obtidos, fez com que os alunos reconhecessem a importância de pensar metódica e rigorosamente alcançando os resultados com maior eficácia. Entretanto é relevante lembrar que a aplicação da metodologia não dispõe de maiores recursos financeiros, mas pode ser aprimorada com investimentos em laboratórios de informática, possibilitando o uso de tecnologias e softwares que podem auxiliar na resolução dos problemas visando alcançar resultados mais satisfatórios no ensino de matemática.

Na escola onde foi aplicada a metodologia não foi possível trabalhar com resolução de problemas em todas as aulas, infelizmente o currículo é engessado e deve ser cumprido rigorosamente, uma vez que as avaliações externas às quais a escola é submetida são extremamente conteudistas. O diagnóstico gerado pelas análises e observações das atividades da proposta provocou uma reflexão inicial do professor para nortear trabalhos futuros a fim de inovar suas aulas.

Não foi possível detalhar todas as experiências vivenciadas em sala durante as aulas de resolução de problemas, mas pelos dados e comentários descritos foi possível evidenciar que esse é um caminho que contribui consideravelmente com o aprendizado em matemática.

5.1 Avaliação do aprendizado no contexto da proposta

Nas aulas de resolução de problemas não houve avaliações escritas em forma de prova, mas as atividades foram avaliadas considerando a distribuição de pontos adotada pela escola, sendo quatro bimestres com valor de 25 pontos em cada um. As avaliações foram elaboradas a partir dos problemas propostos considerando todo o envolvimento dos alunos. Eles não perderam pontos por apresentarem soluções incompletas ou erradas, todos os resultados desenvolvidos, após serem discutidos, foram considerados para obtenção de notas.

Os alunos que apresentaram as soluções dos problemas no quadro explicando como chegaram à solução receberam 0,5 pontos, toda semana, contabilizados no bimestre e concorreram a um prêmio, uma entrada de cinema, um lanche, uma caixa de bombom, etc. O ganhador do prêmio era o aluno ao ser sorteado para ir ao quadro, apresentasse a solução correta e explicasse as etapas da metodologia. Os prêmios tinham como objetivo motivar os alunos para irem ao quadro e apresentar a solução correta. O sorteio era feito a partir das inscrições preenchidas pelos alunos. Os alunos que eram candidatos para ir ao quadro já haviam feito a inscrição anteriormente para resolverem os problemas. Os alunos inscritos que não iam ao quadro recebiam apenas 0,5 pontos, pois, conforme citado anteriormente, não era possível que todos participassem no quadro. Os demais alunos que não faziam a inscrição para resolverem os problemas eram avaliados em 0,5 pontos, conforme a sua participação nas aulas de resolução de problemas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ficou evidente através dos resultados obtidos pelos questionários aplicados antes e na fase final da execução da proposta, nas análises de resultados produzidos pelos alunos, nas atividades que foram propostas e também nas observações do professor da turma, pautadas nos procedimentos desenvolvidos pela proposta, que a metodologia contribuiu consideravelmente para o aprendizado dos alunos, colocando-os como principais responsáveis pelo processo de aprendizagem. Além disso, a proposta possibilitou ao professor uma proximidade maior com os alunos, ao tirar suas dúvidas, ouvir seus questionamentos, incentivar cada um deles a buscar a solução de um problema e valorizar suas ideias.

A música contribuiu bastante com a disciplina em sala de aula, mas não atingiu a todos os alunos, muitos ainda continuaram conversando durante as aulas, causando desconcentração. O trabalho também contribuiu para o alcance de alguns objetivos secundários, como desenvolver no aluno o hábito de leitura e de escrita. Muitos alunos mesmo não conseguindo resolver um problema, faziam rascunhos, desenhos e escreviam com palavras as suas ideias tentando explicar seus pensamentos. Contudo, a proposta levou alguns alunos a uma independência maior aos estudos, quando terminava a aula de resolução de problemas muitos alunos chegavam até o professor com questionamentos e com ideias. Perguntavam se existia algum site que tratava dos assuntos abordados no problema para que pudessem pesquisar e estudar para resolvê-lo.

A prática possibilitou aos alunos com maior dificuldade em matemática se sentirem inseridos no processo de aprendizagem, dando-lhes oportunidades para ir ao quadro e exporem suas ideias. As intermediações do professor, valorizando os resultados apresentados por cada um, contribuíram com o aprendizado uns dos outros, houve troca de dicas e sugestões. A proposta também ajudou o professor a refletir sobre sua postura, principalmente no que tange a interação professor-aluno. Os comportamentos observados enquanto ministrava cada aula de resolução de problemas, quando ia de carteira em carteira tirando dúvidas dos alunos, quando dava oportunidade para eles exporem suas ideias e a paciência com que os orientava e os valorizava, reforçou no professor a crença que o sucesso de qualquer prática desenvolvida deve ser pautado nessa relação de cumplicidade.

A proposta despertou em alguns alunos o hábito de resolver problemas. Foi apresentado a eles a plataforma da OBMEP, alguns alunos buscaram de forma independente problemas para que pudessem resolver, outros já descobriram os clubes de matemática e como consequência do trabalho, na feira científica da escola, a ser realizada neste ano, alguns alunos solicitaram uma sala de resolução de problemas.

Introduzir resolução de problemas nas aulas de matemática não é uma tarefa fácil, não é apenas distribuir problemas aos alunos e pedir que eles resolvam, exige do docente um atendimento mais individualizado, uma reflexão de sua postura de professor, tempo destinado a pesquisa para que possa conhecer metodologias que orientem na resolução de problemas. Enfim, a maior contribuição deste trabalho foi a aproximação do professor com os alunos, o que contribuiu positivamente com a relação dos envolvidos durantes as aulas. Os alunos ficaram mais à vontade para fazer perguntas e questionamentos, tornando a sala de aula um lugar de efetiva aprendizagem.

Nessa proposta foi utilizado o método de Polya, mas existem vários outros autores que podem contribuir com o assunto. A proposta não exigiu muitos recursos, mas vale ressaltar que investimentos em laboratórios de informática, salas de aula equipadas com equipamentos de tecnologia podem enriquecer a metodologia possibilitando um alcance maior da eficácia da proposta. O trabalho subtraiu muito tempo do professor fora de sala de aula, exigiu do docente tempo para selecionar problemas adequados ao grau de maturidade dos alunos, analisar as atividades desenvolvidas, registrar o acompanhamento do desenvolvimento dos discentes, e acima de tudo exigiu uma grande mudança da postura do professor levando-o a fazer um esforço maior em atender alunos em suas individualidades, o que foi um desafio, frente aos 39 alunos.

Finalizando este trabalho conclui-se que o recurso de trabalhar com resolução de problemas nas aulas de matemática é enriquecedor tanto para os alunos quanto para o docente, é uma tentativa de tornar o ensino de matemática mais atraente e eficaz, em um tempo onde o conhecimento sistematizado passa por um período de descrença pela maioria de nossos alunos.

REFERÊNCIAS

AQUINO, Júlio Groppa. **Indisciplina na escola**: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1996.

BAÑOL, F. S. **Biomúsica**. São Paulo: Ícone, 1993

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: E. Blucher, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Brasília, DF, 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 18 set. 2015.

CHAMORRO, C. C. W. et al. Avaliação da aprendizagem nos anos iniciais. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Pró-letramento**: matemática. Brasília, DF, 2007. Fascículo 8, p. 9.

CURY, A. J. **Pais brilhantes, professores fascinantes**. Rio de Janeiro: Sextante, 2003.

GUELLI, O. **Contando a história da matemática**. 9. ed. São Paulo: Ática, 1997.

LEINIG, C. E. **Tratado de musicoterapia**. São Paulo: Sobral, 1977.

LESTER, F. K. Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Ed.). **Acquistion of mathematical concepts and processes**. Orlando: Academic Press, 1983. p. 229-261.

LUPINACCI, V. L. M.; BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais**... Recife: [s.n.], 2004. p. 1-5. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC18361331034.pdf>. Acesso em: 10 maio 2015.

MARKARIAN, Roberto. **A matemática na escola**: alguns problemas e suas causas, escrito pelo professor. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Explorando o ensino da matemática: artigos: volume 1. Brasília, DF, 2004. cap. 6. Ensino, p. 273-281.

OSTRANDER, L.; SCHOEDER, L. **Super-aprendizagem pela sugestologia**. Rio de Janeiro: Record, 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 2003.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 1997.

APÊNDICE A – Ficha de inscrição para resolução de problemas

TURMA ___

FICHA DE INSCRIÇÃO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

00/00/0000

ALUNO(A):____ Nº __

PROBLEMA 1 ___ PROBLEMA 2___ PROBLEMA 3____ TODOS___

APÊNDICE B - Resolução de problemas ao som de música clássica (exemplo de atividade)

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA
TURMA: 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL
PROF: Cleuber Divino de Moraes

Aluno(a):____

METODOLOGIA

Os problemas serão resolvidos ao som de música clássica a fim de ajudar na concentração e manter a disciplina em sala de aula.

O procedimento metodológico que será utilizado para a resolução dos problemas é o método proposto por Polya, seguindo as quatro etapas propostas por ele:

1º etapa: compreensão da situação-problema

O que o problema pede ou qual a incógnita?

Quais são os dados?

Podemos representar o problema por meio de um esquema ou de uma figura?

2ª etapa: estabelecimento de um plano de execução

Tente encontrar a ligação entre a incógnita e os dados do problema

Tente lembrar de algum problema ou exercício que você já resolveu e que é parecido com o problema proposto.

Tente identificar uma teoria aprendida em sala de aula para resolver o problema.

3º etapa: execução do plano

Resolva a equação obtida através do plano estabelecido na etapa 2.

4ª etapa: retrospecto

Verifique se a solução ou soluções encontradas é realmente a que foi solicitada pelo enunciado e pela situação problema. Tente pensar em outra maneira de resolver o problema

PROBLEMA 1:

O custo em reais de 25 laranjas é igual ao número de laranjas que se pode comprar com um real. Qual é o número de laranjas que se pode comprar com três reais?

1ª etapa: compreensão do problema

2ª etapa: estabelecimento ou elaboração de um plano

3ª etapa: execução do plano

4ª etapa: retrospecto

PROBLEMA 2:

Em Patópolis, o sistema de numeração possui base b. Pato Donald comprou um carro por $440, entregando ao vendedor uma nota de $1.000 sobrando de troco $340. Qual é a base b?

PROBLEMA 3:

Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, ao pagar a conta, que era de R$600,00 dois deles estavam sem dinheiro o que fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$10,00. Quantos amigos havia no grupo?

APÊNDICE C - Proposta pedagógica para a resolução de problemas em sala de aula ao som de música clássica: resolução de situações-problema (exemplo de atividade)

RESOLVENDO PROBLEMAS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA

TURMA: 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CLEUBER DIVINO DE MORAES

METODOLOGIA

O procedimento metodológico utilizado foi a pesquisa analisando a metodologia de resolução de problemas e as contribuições no ensino-aprendizagem em matemática. Utilizou-se o método proposto por Polya, seguindo as quatro etapas, para a resolução dos seguintes problemas:

PROBLEMA 1:

O custo em reais de 25 laranjas é igual ao número de laranjas que se pode comprar com um real. Qual é o número de laranjas que se pode comprar com três reais?

1ª etapa: compreensão do problema

O que o problema pede ou qual a incógnita?

O problema solicita:

Quais são os dados?

Podemos representar o problema por um esquema ou uma figura?

2ª etapa: estabelecimento ou elaboração de um plano

Encontrar a ligação entre os dados e a incógnita do problema

3ª etapa: execução do plano

4ª etapa: retrospecto

Em Patópolis, o sistema de numeração possui base b. Pato Donald comprou um carro por $ 440, entregando ao vendedor uma nota de $1000 sobrando de troco $340. Qual é a base b?

Um grupo de amigos se reuniu num restaurante e, ao pagar a conta, que era de R$600,00 dois deles estavam sem dinheiro o que fez com que cada um dos outros contribuísse com mais R$10,00. Quantos amigos havia no grupo?

APÊNDICE D - Questionário 1

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: "RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA"
PESQUISADOR: Cleuber Divino de Moraes MATRICULA: : 20121140
ORIENTADOR: PROF. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior

Caro aluno,

Este questionário visa coletar dados para nossa pesquisa sobre: resolução de problemas com música clássica. Vale ressaltar que todos os dados da pesquisa ficarão em sigilo.

NOME: ____
IDADE: ______________
SÉRIE:_______________

01. Você gosta de estudar?
( ) Sim ( )Não

02. Qual disciplina você mais gosta? E porquê?
____
____
_____

03. Você gosta de como a matemática é ensinada?
( ) Sim ( )Não

04. Como você gostaria que fossem as aulas de matemática?
____
____
_____

05. Você gosta das aulas de resolução de problemas ao som de música clássica?
( ) Sim ( ) Não

06. A música ajuda você a ter uma concentração maior ?
( ) Sim ( ) Não

07. A música contribui para a disciplina da sala.
( ) Sim ( ) Não

08. Você discute com o professor as dificuldades em relação a matéria?
( ) Sim ( ) Não

09. O que você tem mais dificuldade?
(   ) Assimilar o conteúdo.
(   ) Interpretar as atividades
(   ) Efetuar cálculos
(   ) Se concentrar ao resolver um exercício

10. Os problemas propostos te ajudam a compreender melhor a matemática ?
(   ) sim   (   ) não

11. Você acha interessante os problemas que são propostos ?
(   ) sim
( ) não

12. Os problemas trabalhados em sala de aula te motivam a resolver os problemas propostos pela prova da OBMEP ?
( ) sim
( ) não

13. Durante as aulas de resolução de problemas você se sente mais a vontade para compartilhar suas idéias com os demais colegas ?

(   ) sim
(   ) não

14. O metodologia adotada para a resolução de problemas (método de Polya) ajudou você a compreender melhor e resolver problemas ?
( ) sim
( ) não

APÊNDICE E - Questionário 2

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – CAMPUS CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: “RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA”
PESQUISADOR: Cleuber Divino de Moraes MATRICULA: : 20121140
ORIENTADOR: PROF. Porfírio Azevedo dos Santos Júnior

Caro aluno,

Este questionário visa coletar dados para nossa pesquisa sobre: resolução de problemas com música clássica. Vale ressaltar que todos os dados da pesquisa ficarão em sigilo.

NOME: ____

IDADE: ________________

SÉRIE:_________________

01. Você gosta das aulas de resolução de problemas ao som de música clássica?

( ) Sim ( ) Não

02. A música ajuda você a ter uma concentração maior ?

( ) Sim ( ) Não

03. A música contribui para a disciplina da sala.

( ) Sim ( ) Não

04. Nas aulas de resolução de problema você se sente mais a vontade em fazer perguntas ao professor, ele te dá mais atenção?

( ) Sim ( ) Não

05. O que você tem mais dificuldade?

( ) Assimilar o conteúdo.
( ) Interpretar as atividades
( ) Efetuar cálculos
( ) Se concentrar ao resolver um exercício

6. Os problemas propostos te ajudam a compreender melhor a matemática ?

( ) sim ( ) não

7. Os problemas trabalhados em sala de aula te motivam a resolver os problemas propostos pela prova da OBMEP ?

( ) sim
( ) não

8. Durante as aulas de resolução de problemas você se sente mais a vontade para compartilhar suas idéias com os demais colegas ?

( ) sim
( ) não

9. O metodologia adotada para a resolução de problemas (método de Polya) ajudou você a compreender melhor e resolver problemas ?

( ) sim
( ) não

ANEXO A – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Aluno)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: " RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA."
PESQUISADOR: CLEUBER DIVINO DE MORAES MATRICULA: 20121140
ORIENTADOR: PROF. DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

Prezado Aluno(a): ____

Solicitamos a sua participação em uma pesquisa que será desenvolvida pelo programa de pós-graduação (PROFMAT) – MESTRADO: "RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA" da Universidade Federal de Goiás – Campus Catalão.

O objetivo deste estudo é investigar o quanto a resolução de problemas pode contribuir como um fator motivador para a aprendizagem em matemática e a música clássica pode ajudar na disciplina e concentração dos alunos.

Os instrumentos que utilizaremos para a obtenção dos dados serão: questionário, filmagens e fotos. Todas as informações serão usadas somente para os fins desta pesquisa e preservaremos o anonimato.

Para que possam ser sujeitos desta pesquisa precisamos de sua autorização.

AUTORIZAÇÃO

Eu, ____, dou a minha autorização para CLEUBER DIVINO DE MORAES utilizar as informações contidas nos questionários, gravações e fotos para os fins da pesquisa científica que será realizada. Estou ciente que a privacidade será mantida em sigilo.

____
Assinatura do sujeito da pesquisa
(Aluno)

____
Assinatura do pai ou responsável

ANEXO B - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Escola)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS – REGIONAL CATALÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - PROFMAT
MESTRADO: "RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA"
PESQUISADOR: CLEUBER DIVINO DE MORAES MATRICULA: 20121140
ORIENTADORA: PROF.DR. PORFÍRIO AZEVEDO DOS SANTOS JÚNIOR

Prezada Diretor: DALMI MAGALHÃES

Solicitamos a participação da ESCOLA ESTADUAL SEGISMUNDO PEREIRA em uma pesquisa que será desenvolvida pelo programa de pós-graduação (PROFMAT) – MESTRADO: "RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA AO SOM DE MÚSICA CLÁSSICA" da Universidade Federal de Goiás – Campus Catalão.

O objetivo deste estudo é investigar o quanto a resolução de problemas pode contribuir como um fator motivador para a aprendizagem em matemática e a música clássica pode ajudar na disciplina e concentração dos alunos.

Os instrumentos que serão utilizados para a obtenção dos dados serão: questionário, filmagens e fotos. Todas as informações serão usadas somente para os fins desta pesquisa, preservando assim o anonimato dos sujeitos envolvidos.

Para que a escola possa ser nosso campo de pesquisa precisamos de sua autorização.

AUTORIZAÇÃO

Eu, ____, diretor desta unidade escolar dou a minha autorização para CLEUBER DIVINO DE MORAES utilizar as informações contidas nos questionários, gravações e fotos para os fins da pesquisa científica que será realizada. Estou ciente que a privacidade será mantida em sigilo.

____

Assinatura do diretor da unidade escolar