Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Sidney Pinheiro Duarte

Probabilidade e Gamão

Juiz de Fora

2016

Sidney Pinheiro Duarte

Probabilidade e Gamão

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pinheiro Duarte, Sidney.
Probabilidade e Gamão / Sidney Pinheiro Duarte. – 2016.
61 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2016.

1. Probabilidade. 2. Gamão. I. Afonso, Luís Fernando Crocco, orient. II. Título.

Sidney Pinheiro Duarte

Probabilidade e Gamão

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 23 de janeiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a. Gilcélia Regiane de Souza
Universidade Federal de São João Del-Rei - Campus Alto Paraopeba

Dedico este trabalho a três forças de poder sobre-humano que me moveram rumo ao meu êxito final:

- *Em primeiro lugar, dedico com amor e saudades à minha adorada Mãe, in memoriam, Iramita Pinheiro Duarte, que me criou para chegar onde cheguei e que tinha a maior satisfação de me acompanhar todos os sábados nas minhas vindas a Juiz de Fora para as aulas do PROFMAT, desde a prova de acesso em 25/08/2012 até o último sábado de sua vida em 16/08/2014. Para mim, aula; para ela, um passeio nos jardins do Campus. Uma verdadeira guerreira que mesmo sem ter formação era culta e sabia a importância do caminho que eu estava trilhando, por isso me acompanhava e rezava enquanto as provas aconteciam. Certamente, teria cadeira reservada na plateia da dissertação com suas orações em mãos, mas ela não pôde esperar. Tudo que faço e que farei é para dar sentido ao que foi plantado por ela. Hoje, cheguei ao fim da luta, e a vitória é dela antes de ser minha. Por toda a história de nossas vidas, estamos e estaremos juntos, nada nos separa. O que alivia a dor da perda é a possibilidade de talvez haver outra existência e com isso um reencontro. Sou seu eco na eternidade! Minha Mãe, eu te amo!*

- *Em segundo lugar, fazendo uso das mesmas palavras acima, aos que um dia foram Minha Grande Família e que me criaram. Hoje, todos, in memoriam:*
  - *Minha Mãe, Iramita Pinheiro Duarte;*
  - *Meu Pai, Orlen de Mattos Duarte;*
  - *Minha Tia e Madrinha, Maria José Pinheiro da Silva. Minha Dinha;*
  - *Minha Avó, Lidia Ragazzi Pinheiro da Silva;*
  - *Meu Avô, Duarte Pinheiro da Silva;*

- *E em terceiro lugar, dedico de coração a Vossa Senhoria Sr.M**SS**. Todos os seus atos, palavras e ações transformaram-se em fonte de energia para mover meus objetivos, e a consequência maior, hoje, faz-se realizar. Suas palavras me incentivaram e suas ações me direcionaram ainda mais nos meus estudos, da prova de acesso ao momento atual. Verdadeiro incentivador anônimo desta obra. Para a alegria de Vossa Senhoria, eu jamais desisto. Quando se faz algo com inteligência, e só com inteligência, os bons frutos sempre serão colhidos, e eu fiz! Em contextos bíblicos e religiosos existe a "Justiça de Salomão", que aqui seja feita a minha justiça, seja essa a "Justiça para Vossa Senhoria". Que esse meu triunfo lhe sirva de obelisco, "O Obelisco para Vossa Senhoria", igual para "Salomão"e maior que o de "Trajano". Nesse último momento, estou sorrindo. E a luta continua, nesta vida ou na outra. Sempre triunfarei! Campeão é Campeão e mesmo ferido sempre vence com "Força e Honra!" "Memento Santa creaturam: Sic transit gloria mundi!"*

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Luís Fernando Crocco Afonso pelo profissionalismo, pela competência e capacidade que possui de ensinar e transmitir conhecimentos; pela atenção e compreensão aos problemas pelos quais passei.

Aos membros da banca de dissertação, Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos e Profª. Drª. Gilcélia Regiane de Souza.

Aos demais Professores do PROFMAT, pelo alto padrão e qualidade dos ensinamentos que transmitiram, e ao Colegiado do curso, agradeço por tudo.

A todos os colegas da minha turma do PROFMAT que nesses dois anos que estivemos juntos sempre demonstraram amizade e união. Sempre me lembrarei de vocês.

Aos amigos e colegas do PROFMAT, em especial a Luiz Fernando Barbosa de Queiroz(amigo de mais de dez anos e de tantos estudos), Célia Maria Souza, Carlos Henrique da Silva Cavaca pela força e apoio quando nada parecia mais possível. Vocês fizeram a Fênix voar.

Aos amigos e irmãos de fé, Prof. Venusiano Batista de Sá Ramos e Valério Alves da Silva, amizades de longa data sempre trocando ideias de Matemática e Jogo de Xadrez com o primeiro e Jogo de Xadrez com o segundo.

Ao Prof. Leandro de Araujo Pires, grande amigo e colega de trabalho no Colégio Estadual Moacyr Padilha em Três Rios RJ.

A médica, física e Profª Drª Virginia Maria Almeida de Freitas, amiga de tantos estudos e de tantos anos.

Aos familiares maternos:

- Tia Iracema Pinheiro de Andrade Bastos. Querida, estimada, maravilhosa e sempre carinhosa. Te amo demais;
- Tia Iraci Pinheiro Pereira e a Prima Priscila Pinheiro Pereira. Com amor e carinho;
- Tia Irma Pinheiro Rodriguês. Obrigado pelo apoio, agradeço com todo amor.

Aos familiares paternos:

- Avôs, Geraldo Duarte e Maria de Mattos Duarte, os dois in memoriam;
- Tios Angela Duarte de Brito e Celso de Brito.

A minha filha de coração, Evelyn do Prado Braz Mesquita e sua mãe Érica do Prado Braz. Evelyn, um dia chegará a sua vez de chegar aqui e ultrapassar o que hoje estou realizando, mesmo que em outra área de conhecimento. Onde eu estiver quero ver isso acontecer.

A Roseli Correia Santana, obrigado pelo amor e carinho com que construiu um ambiente de paz para um perfeito ambiente de estudo.

A Valéria dos Santos Espíndola e sua mãe Neusa dos Santos. Dona Neusa, pessoa muito estimada por minha mãe, tenho por ela um enorme amor e carinho. Valéria, pelo nosso amor, por tudo que você representa para mim e por tudo que me ajudou. Quero que um dia seja a sua vez de ser uma mestre e ir além, quero estar junto de você.

“Aquilo que realizarmos na Vida ecoará na Eternidade! Força e Honra!”

Máximus Décimus Meridius.

RESUMO

Esta dissertação trata dos temas de probabilidade existentes no Jogo de Gamão que unem o lúdico ao raciocínio matemático. De início, é elaborada uma revisão de probabilidade quando são resolvidos alguns problemas em caráter geral, sem fazer uso de teorias mais refinadas de probabilidade. Posteriormente, é feito uma apresentação história do Jogo de Gamão seguido de suas regras e, por fim, através de determinadas posições de peças e de seus diagramas, são analisadas e resolvidas várias situações problemas envolvendo o Jogo de Gamão.

Palavras-chave: Probabilidade. Gamão.

ABSTRACT

This master's thesis presents some probability calculations arising in bagkgammon, a game which unites ludic to mathematical thinking. At first we present a review of probability. Then we introduce backgammon, its history and its rules. At last, we solve some probability problems related to the game.

Key-words: Probability. Backgammon.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.

A palavra "probabilidade" originou-se da palavra latina *probare*, que significa provar, testar. Seu desenvolvimento como Ciência e ramo da Matemática teve início nos estudos de jogos de azar por Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Christian Huygens, no século XVII, e por Jakob Bernoulli, Abraham de Moivre, no século XVIII, que trataram o assunto como um ramo da Matemática. A partir dos jogos de apostas e azar, a probabilidade encontrou aplicações em várias situações do cotidiano e se tornou ferramenta de fundamental importância em todos os ramos do conhecimento humano.

Já o Jogo de Gamão, apelidado de "O rei dos jogos e O jogo dos reis”, é classificado como da família dos jogos de corrida, ou seja, as peças se movimentam através de um percurso. É jogado em um tabuleiro por dois jogadores, cada um com 15 peças, que movimentam suas peças de acordo com os números obtidos nos lançamentos de dois dados. As peças que forem movimentadas seguem sempre o percurso para frente. Caso uma peça seja capturada, ela deverá ser colocada sobre a linha central do tabuleiro e terá que entrar no jogo pelas casas do lado do adversário associadas aos valores que foram obtidos nos dados, o que na maioria das vezes representa um atraso na movimentação dessa peça. Aquele jogador que retirar suas 15 peças primeiro será o vencedor. Devido às regras simples, o Jogo de Gamão reúne estratégia, senso de lógica matemática e probabilidade. Sendo assim, é uma ferramenta prática para o trabalho com os citados conceitos matemáticos.

O objetivo deste trabalho é aproveitar o aspecto lúdico desse jogo e usá-lo no estudo matemático de probabilidade.

O lúdico traz desafios que quando associados ao ensino, em especial à Matemática, conduzem à diversão e ao prazer, conforme cita *Os Parâmetros Curriculares Nacionais*:

> *Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver [5, pág. 48 a 49].*

O presente trabalho se estrutura da seguinte forma:

- Capítulo 1. INTRODUÇÃO.
- Capítulo 2. REVISÃO DE PROBABILIDADE. Neste capítulo é elaborada uma apresentação dos conhecimentos básicos de probabilidade necessários para as aplicações nos problemas que envolvem a probabilidade e o Gamão. Não serão utilizadas teorias mais refinadas de probabilidade.

- Capítulo 3. O JOGO DE GAMÃO. Neste capítulo o Gamão é apresentado no seu contexto histórico, suas regras, anotações de partidas, termos usados e estratégias.
- Capítulo 4. SITUAÇÕES PROBLEMAS ENVOLVENDO O GAMÃO. Neste capítulo é feito um estudo das probabilidades básicas que ocorrem nas partidas e, em seguida, serão resolvidos problemas de probabilidade com diagramas variados de Gamão.
- Capítulo 5. CONCLUSÃO.

2 REVISÃO DE PROBABILIDADE.

Para modelar matematicamente a natureza que nos cerca, são necessários experimentos que se dividem em "Determinísticos" e "Aleatórios".

2.1 DETERMINISMO E ALEATORIEDADE.

Quando os resultados de um experimento podem ser determinados antes do experimento ser realizado, esses são chamados de "Experimentos Determinísticos". Exemplos:

- Encontrar a temperatura da água em um recipiente usando um sistema isolado em função do tempo após o início do aquecimento, conhecendo a massa dos componentes, temperatura inicial, propriedades da fonte de aquecimento e materiais envolvidos.
- Determinar a posição de um corpo em queda livre em função do tempo, conhecendo sua massa, posição inicial, gravidade do local e resistência do ar.
- Determinar o valor de uma aplicação financeira em função do tempo com taxa de rendimento fixa, conhecendo o valor da taxa e o valor inicial da aplicação.

Denomina-se "Experimento Aleatório" aquele experimento que executado várias vezes dentro das mesmas condições resulta em valores diferentes, tornando-se impossível a prévia determinação dos resultados. Esses são governados pela lei do acaso. Na impossibilidade de encontramos um valor constante para o resultado, deve-se procurar as chances ou probabilidades de ocorrência do resultado:

> *A Probabilidade é grau com que se pode esperar justificadamente a realização de um sucesso aparentemente casual, determinado pela frequência relativa dos sucessos do mesmo gênero no curso da experiência.* [2]

Exemplos de "Experimento Aleatório" podem ser observados em:

- Quando se lança uma moeda várias vezes, observa-se o resultado de cara ou coroa.
- Quando se lança várias vezes um dado com seis faces com números de 1 a 6 marcados em suas diferentes faces, nota-se o valor obtido.
- Quando sorteia-se várias vezes uma carta em um baralho, repara-se a carta sorteada.

2.2 FORMULANDO A PROBABILIDADE.

Para se calcular a probabilidade de um evento, é necessário conhecer o espaço amostral, a cardinalidade e o evento.

Neste trabalho, só usaremos espaço amostral com conjuntos finitos de elementos. Portanto, não precisaremos revisar nem fazer uso de teorias mais refinadas de probabilidades. Mais detalhes sobre o cálculo de probabilidades podem ser encontrados em [3].

- *Cardinalidade* é o número total de elementos em um conjunto finito. A cardinalidade será representada por $n(W)$, onde W é um conjunto finito qualquer.
- *Espaço amostral* é definido como sendo o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e será representado por U.
- *Evento* é qualquer subconjunto de um espaço amostral e será representado por A.

Como exemplo, consideremos o lançamento de um dado onde o evento estudado são os números maiores que 4. Teremos:

- O espaço amostral será $U_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(U_0) = 6$.
- O evento será $A = \{5, 6\}$ e $n(A) = 2$.

Para o lançamento de dois dados de seis faces ao mesmo tempo, onde representamos por (a, b) o resultado de sair a no primeiro dado e b no segundo, temos o espaço amostral representado abaixo:

$$U_T = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6), \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}, \text{ onde } n(U_T) = 36.$$

No Jogo de Gamão, que será objeto de estudo neste trabalho, o lançamento simultâneo de dois dados será regra para a movimentação de peças de um jogador. Assim sendo, esse espaço amostral U_T e sua cardinalidade $n(U_T) = 36$ são citados agora para uso futuro.

2.3 TIPOS DE EVENTOS.

Abaixo temos como os eventos podem ser classificados, isto é, os tipos de eventos. Serão dados exemplos de cada um para o espaço amostral do lançamento de um dado $U_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, onde $n(U_0) = 6$:

- *Evento certo*: é o próprio espaço amostral. Como exemplo temos: jogar um dado e obter um número menor que 7, assim teremos $U_0 = A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $n(U_0) = n(A) = 6$.

- *Evento impossível*: é o subconjunto vazio do espaço amostral. Como exemplo temos: jogar um dado e obter um número maior que 7, assim teremos $U_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \emptyset$ e $n(A) = 0$.

- *Evento elementar*: é aquele que tem um só elemento. Como exemplo temos: jogar um dado e obter o número 2, assim teremos $U_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2\}$ e $n(A) = 1$.

- *Eventos mutuamente exclusivos*: são aqueles que têm conjuntos disjuntos. Como exemplo temos: jogar um dado e obter um número menor que 3 ou um número maior que 4, assim teremos o evento $A = \{1, 2\}$ ou o evento $B = \{5, 6\}$, onde $A \cap B = \emptyset$. Sendo assim, a interseção entre os conjuntos disjuntos é o conjunto vazio.

- *Evento união*: é a reunião de dois eventos. Como exemplo temos: jogar um dado e obter um número menor que 4 ou número maior que 5, assim teremos o evento $A = \{1, 2, 3\}$ e o evento $B = \{6\}$, onde $A \cup B = \{1, 2, 3, 6\}$.

- *Evento intersecção*: é a intersecção de dois eventos. Como exemplo temos: jogar um dado e obter um número menor que 4 e maior que 1, assim teremos o evento $A = \{1, 2, 3\}$ e o evento $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, onde $A \cap B = \{2, 3\}$.

- *Eventos complementares*: são dois eventos A e $\overline{A}$ tais que $(A \cup \overline{A}) = U$ e $(A \cap \overline{A}) = \emptyset$. Em um lançamento de um dado, podemos citar como exemplo de eventos complementares $A = \{1, 2\}$ e $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$, pois $A \cup B = U_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

2.4 PROBABILIDADE DE EVENTOS.

A probabilidade de um evento é a razão da cardinalidade do evento pela cardinalidade do espaço amostral e será representada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}.$$

Essa definição é válida somente quando a probabilidade for a mesma para todo elemento de um espaço amostral U. Nessa condição, U é chamado de *Espaço Amostral Equiprobabilístico*.

Quando $A = \emptyset$, temos $n(A) = 0$ e $P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{0}{n(U)} = 0$.

Quando $A = U$, temos $n(A) = n(U)$ e $P(A) = \frac{n(U)}{n(U)} = 1$.

Como $0 \leq n(A) \leq n(U)$, temos $0 \leq P(A) \leq 1$.

2.4.1 Probabilidade da união de eventos.

Aqui serão deduzidas as formulas das probabilidades para a união de dois e de três eventos por serem estas uteis nesse trabalho. Assim sendo:

- Sejam dois eventos A e B de um espaço amostral U. A probabilidade do evento A ou B será:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A)}{n(u)} + \frac{n(B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

- Sejam três eventos A, B e C de um espaço amostral U. A probabilidade do evento A ou B ou C será:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \frac{n[(A \cup B) \cup C]}{n(U)} \\ &= \frac{n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C]}{n(U)} \\ &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n[(A \cap B) \cup (B \cap C)]}{n(U)}. \end{aligned}$$

Como:

$$n[(A \cap B) \cup (B \cap C)] = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C),$$

temos

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= \frac{n(A)}{n(U)} + \frac{n(B)}{n(U)} + \frac{n(C)}{n(U)} - \frac{n(A \cap B)}{n(U)} - \frac{n(A \cap C)}{n(U)} - \frac{n(B \cap C)}{n(U)} \\ &\quad + \frac{n(A \cap B \cap C)}{n(U)} \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Exemplo: Calcule a probabilidade de obtermos um número primo ou um número maior que ou igual a 5 em um lançamento de um dado.

Resolução: Em um lançamento de um dado, o espaço amostral tem cardinalidade $n(U_0) = 6$. Seja $A = \{2, 3, 5\}$ o evento de se obter um número primo e seja $B = \{5, 6\}$ o evento de se obter um número maior que ou igual a 5. Então, $A \cap B = \{5\}$, $n(A) = 3$, $n(B) = 2$, $n(A \cap B) = 1$. Logo, a probabilidade será:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \approx 66,7\%. \end{aligned}$$

Quando $A \cap B = \emptyset$, temos $n(A \cap B) = 0$ e por consequência $P(A \cap B) = 0$. Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Exemplo: Calcule a probabilidade de obtermos um número menor que 3 ou maior que ou igual a 4 em um lançamento de um dado.

Resolução: Em um lançamento de um dado, o espaço amostral tem cardinalidade $n(U_0) = 6$. Seja $A = \{1, 2\}$ o evento de se obter número menor que 3 e seja $B = \{4, 5, 6\}$ o evento de se obter número maior que ou igual a 4. Então, $A \cap B = \emptyset$, teremos $n(A) = 2$, $n(B) = 3$, $n(A \cap B) = 0$. Dessa maneira, a probabilidade será:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{0}{6} \\ &= \frac{5}{6} \approx 83,3\%. \end{aligned}$$

2.4.2 Multiplicação de probabilidade.

Consideremos um experimento onde o espaço amostral é U e o evento seja A. Esse experimento é composto por outros experimentos independentes com espaços amostrais $U_1,\ U_2,\ U_3,\ ...,\ U_k$, respectivamente, com eventos $A_1,\ A_2,\ A_3,\ ...,\ A_k$. Dessa forma U e A são determinados pelos seguintes produtos cartesianos:

$$U = U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_k$$

e

$$A = A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_k.$$

Onde temos:

$$n(U) = n(U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_k) = n(U_1) \cdot n(U_2) \cdot n(U_3) \cdot ... \cdot n(U_k)$$

e

$$n(A) = n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_k).$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_k)}{n(U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_k)} \\ &= \frac{n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_k)}{n(U_1) \cdot n(U_2) \cdot n(U_3) \cdot ... \cdot n(U_k)} \\ &= \frac{n(A_1)}{n(U_1)} \cdot \frac{n(A_2)}{n(U_2)} \cdot \frac{n(A_3)}{n(U_3)} \cdot ... \cdot \frac{n(A_k)}{n(U_k)} \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_k). \end{aligned}$$

Exemplo: Calcule a probabilidade de se obter um número menor que 3 e depois um número primo em lançamentos sucessivos de um dado.

Resolução: Em um lançamento de um dado, o espaço amostral tem cardinalidade $n(U_0) = 6$. Seja $A_1 = \{1, 2\}$ o evento de se obter um número menor que 3 e seja $A_2 = \{2, 3, 5\}$ o evento de se obter um número primo. Então, $n(A_1) = 2$, $n(A_2) = 3$. A probabilidade será:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) \cdot P(A_2) \\ &= \frac{n(A_1)}{n(U_0)} \cdot \frac{n(A_2)}{n(U_0)} \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{6}{36} \\ &= \frac{1}{6} \approx 16,7\%. \end{aligned}$$

2.4.3 Probabilidade do evento complementar.

Dois eventos A e $\overline{A}$ de um espaço amostral U, sendo $A \cup \overline{A} = U$ e $A \cap \overline{A} = \emptyset$, são complementares. Teremos então:

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(U) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Exemplo: Calcule a probabilidade de não sair soma 4 no lançamento de dois dados.

Resolução: Em um lançamento simultâneo de dois dados, o espaço amostral tem cardinalidade $n(U_T) = 36$. Seja o evento $\overline{A}$ em que a soma dos dois dados é 4, esse evento é complementar ao evento A que a soma não é 4. Como $\overline{A} = \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$, segue $n(\overline{A}) = 3$. Assim sendo, teremos:

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\overline{A}) \\ &= 1 - \frac{n(\overline{A})}{n(U_T)} \\ &= 1 - \frac{3}{36} \\ &= \frac{11}{12} \approx 91,7\%. \end{aligned}$$

2.4.4 **Probabilidade condicional.**

É a probabilidade do evento A ocorrer na certeza de já ter ocorrido o evento B, sendo os eventos A e B subconjuntos do espaço amostral U. Os cálculos são feitos em função do evento B e não do espaço amostral U.

A probabilidade de ocorrer um evento A em função de um evento B que ocorreu é expresso por:

$$P(A/B).$$

O cálculo se faz por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Como:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)}$$

e

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)},$$

teremos:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

Exemplo: Dois dados são lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade de um dos dados ser 2, sabendo que sairam dois diferentes valores nos dados.

Resolução: O lançamento de dois dados possui um espaço amostral com cardinalidade $n(U_T) = 36$. Seja A o evento:

$$A = \{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2)\},$$

isto é, pelo menos um dos dados obtém 2, temos então $n(A) = 11$. Seja o evento B onde os dados estão com números diferentes. B é o conjunto de todas as formações $n(U_T) = 36$ de dados exceto as seis formações com números iguais. Assim temos $n(B) = 36 - 6 = 30$, desta forma:

$$A \cap B = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6)(6,2)\},$$

e temos $n(A \cap B) = 10$. Assim:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \\ &= \frac{10}{30} \\ &= \frac{1}{3} \approx 33,3\%. \end{aligned}$$

3 O JOGO DE GAMÃO.

O Gamão é um jogo de tabuleiro e dados que reúne raciocínio lógico e probabilidade. As quinze peças de cada jogador se movimentam de acordo com os números obtidos nos dados tendo como objetivo a retirada das peças do tabuleiro.

O jogador que retirar primeiro todas as suas peças será o vencedor. Por esse motivo, o Gamão, ao lado de outro jogos de tabuleiro como o Ludo, Pachisi e outros, é considerado um jogo de corrida.

Ao longo da História da Humanidade, reis e imperadores foram seus fiéis praticantes. Isso valeu ao jogo o status de "Jogo dos reis", sendo denominado também de "Rei dos jogos".

3.1 HISTÓRIA DO GAMÃO.

O Jogo de Gamão é considerado o mais antigo jogo de tabuleiro do qual se tem conhecimento, sua origem é indeterminada, aproximadamente 3000 a.C., segundo [1]. Em escavações nas ruínas da cidade bíblica de Ur na Mesopotâmia, cidade do profeta Abraão, foi encontrado o Jogo Real de Ur. Já na pirâmide do Faraó do Egito Antigo, Tutancâmon, descobriu-se um tabuleiro de Senet. Ambos os jogos são considerados da mesma família do Gamão, possivelmente antecessores, pois são jogados com dados e tem por objetivo correr com as peças para retirá-las do tabuleiro.

Figura 1 – Nefertiti e o Senet.

Fonte: http://lounge.obviousmag.org/anna_anjos/2013/01/a-origem-dos-jogos-de-tabuleiro.html. Acessado em 11/10/2015.

No transcorrer desses milênios, o jogo adquiriu várias denominações tais como Novo Ardaxsir, Shesh-Besh, Nardo, Tric-Trac e muitos outros, até chegar ao nome atual de Gamão.

Figura 2 – Tabuleiro do Jogo Real de Ur. Museu Britânico.

Fonte: http://lounge.obviousmag.org/anna_anjos/2013/01/a-origem-dos-jogos-de-tabuleiro.html. Acessado em 11/10/2015.

O Jogo de Gamão é cercado de muitas lendas que variam conforme as regiões. A mais provável delas é que o Jogo tenha se originado no Império Persa, na Antiga Mesopotâmia, onde hoje se situam Irã, Iraque e Síria, ou na Índia, segundo [1]. A história de sua suposta origem Persa credita a sua invenção ao sábio Wuzurgmihr, que lhe deu o nome de Novo Ardaxsir, homenageando o rei Ardaxsir I.

O Gamão foi criado para ser usado na astrologia com o intuito de prever o destino dos governantes da Pérsia. Logo, inicialmente, não era um jogo. Por esse motivo, cada um de seus elementos possuía uma simbologia, vejamos:

- O tabuleiro representava o céu;
- Os movimentos das peças encenavam o movimento das estrelas;
- Os dois dados hexaédricos denotavam o dia e a noite;
- Doze casas de cada lado indicavam os doze meses do ano, pois os Persas possuíam já naquele momento um calendário assim estruturado;
- Sete é a soma dos lados opostos de um dado que designava o número de planetas conhecidos no Império Persa naquela época.

Na medida em que foi sendo divulgado para outros povos e culturas, o Gamão deixou de ser visto como um objeto místico e passou a ser encarado com um jogo.

Assim, o jogo tornou-se muito popular entre os povos antigos, como os fenícios, egípcios e gregos. No Império Romano, por exemplo, foi denominado de "Ludus Duodecim Scriptorum"ou "XII Scripta- Jogo das Doze Linhas". Na Roma Antiga, era jogado em um tabuleiro com três fileiras e três dados. Entre os praticantes estavam: cristãos e imperadores como Calígula e Nero. Muitas dessas partidas foram retratadas em pinturas e esculturas.

Figura 3 – Ludus Duodecim Scriptorum. Jogo de tabuleiro romano.

Fonte: http://lounge.obviousmag.org/anna_anjos/2013/01/a-origem-dos-jogos-de-tabuleiro.html. Acessado em 11/10/2015.

A partir do século I d.C. surgiu uma outra versão do Jogo das Doze Linhas, versão denominada Tábula que se espalhou pela Europa a partir do século IV d.C. Essa versão apresentava a forma atual do tabuleiro e das peças do Gamão com menos casas que no Ludus Duodecim Scriptorum.

Por volta do século X d.C. o Tábula já tinha muito em comum com o Gamão atual. As principais diferenças estavam na posição inicial, na movimentação e retirada das peças.

Na Idade Média, o Tábula tornou-se um jogo extremamente popular, principalmente entre a nobreza que o praticava em tabuleiros fabricados com material de grande valor. Esses tabuleiros, chamados de "Toutes-Tables", são considerados verdadeiras obras de arte.

No século XIV, aos olhos da Igreja, o Tábula representava um desvio da atenção da fé, fato que o levou a ser perseguido pelo clero.

Figura 4 – Gamão na Idade Média.

Fonte: https://marceloaith.wordpress.com/category/cultura-arabe/gamao-o-rei-dos-jogos-e-o-jogo-dos-reis/. Acessado em 18/10/2015.

Paralelamente às perseguições religiosas, surgiu o Jogo de Xadrez que passou a ser um concorrente direto da preferência entre os praticantes de jogos. Esses dois fatos fazem com que o Tábula perca popularidade.

Duzentos anos depois, surgiu o jogo de Gamão usando o mesmo tabuleiro e peças do Tábula, mas diferenciando-se na posição inicial, na movimentação e retirada das peças. O Gamão é hoje um jogo muito difundido em quase todos os países.

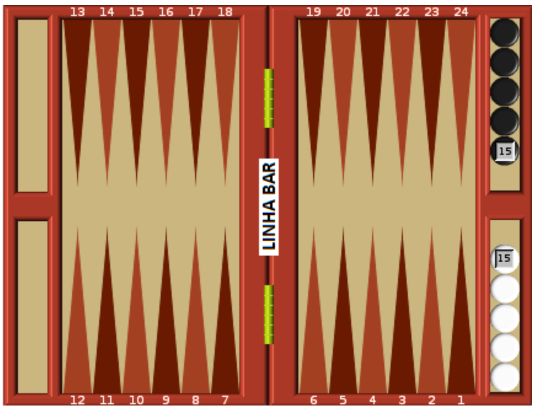
3.2 REGRAS DO GAMÃO.

O Gamão é um jogo de dois adversários, jogado em um tabuleiro onde se movimentam peças de acordo com os números obtidos no lançamento de dois dados. Existem formas diferentes de jogos que usam o tabuleiro de Gamão, ou seja, variantes do Gamão. As principais variações são: Plakato ou Gamão Grego, Gamão Russo, Jacquet, Tric-Trac. Trataremos, neste trabalho, exclusivamente das regras referentes ao Gamão também chamado de Backgammon.

O Gamão geralmente é jogado com o cubo de aposta que também possui regra específica. Neste trabalho não trataremos desse componente do jogo, pois estaremos interessados apenas nos diagramas e probabilidades que o Gamão pode gerar mediante as possibilidades das movimentações das peças de acordo com os números obtidos nos dados.

3.2.1 Tabuleiro.

Figura 5 – O Tabuleiro.

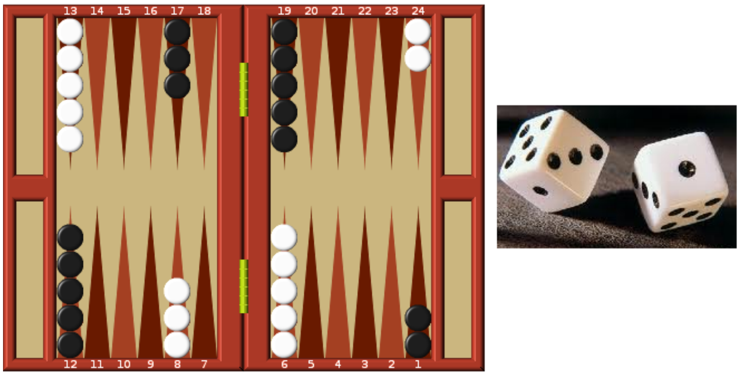


Fonte: O autor.

O tabuleiro apresenta 24 triângulos chamados de casas, sendo que são 12 casas de cada lado. Paralela às casas e dividindo o tabuleiro ao meio, temos a faixa chamada de "linha bar"ou "barra". As casas são numeradas de 1 a 12 de um lado e de 13 a 24 do outro. Consideraremos aqui as casas da parte baixa dos diagramas como sendo o lado das brancas e numeradas de 1 a 12, sendo a parte alta o lado das pretas e numeradas de 13 a 24. Assim sendo, as casas de numeração 1 a 6 são denominadas de setor internos das brancas e as de numeração 7 a 12 são chamadas de setor externo das brancas, da mesma forma as casas de numeração 19 a 24 serão o setor interno das pretas e as de numeração 13 a 18 serão o setor externo das mesmas. Sobre esse tabuleiro, os jogadores movimentam 30 peças de acordo com os números obtidos nos lançamentos de dois dados, sendo que são 15 peças para cada jogador, 15 peças brancas e 15 peças pretas. Os dados são dois hexaedros regulares com pontos de 1 a 6 sendo que a soma das faces opostas sempre resulta em 7.

3.2.2 Posição inicial.

Figura 6 – Posição inicial e os dois dados hexaédricos.



Fonte: Posição inicial: O autor.
Dados: http://jogogeneral.blogspot.com.br/. Acessado em 23/01/2016.

As peças, inicialmente, encontram-se distribuídas da seguinte forma:

- Casa 1: duas peças pretas.
- Casa 6: cinco peças brancas.
- Casa 8: três peças brancas.
- Casa 12: cinco peças pretas.
- Casa 13: cinco peças brancas.
- Casa 17: três peças pretas.
- Casa 19: cinco peças pretas.
- Casa 24: duas peças brancas.

3.2.3 Objetivo do jogo.

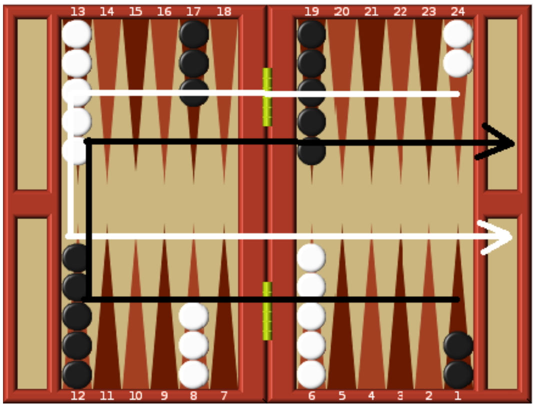
Cada jogador tem por objetivo colocar todas as suas peças no seu setor interno. Depois que todas lá estiverem, começa-se a retirá-las. Ganha o jogo aquele que retirar todas as suas peças primeiro.

3.2.4 Início do jogo.

O jogo começa com cada jogador lançando um dado, aquele que obtiver maior número iniciará o jogo aproveitando os dois números obtidos para movimentar suas peças. Se os dados empatarem, os oponentes farão novamente os lançamentos até desempatarem. Após movimentar as peças, o jogador que fez os primeiros movimentos passa a vez ao adversário que lançará os dados e assim o jogo segue.

3.2.5 Movimentação das peças.

Figura 7 – Sentido das movimentações das peças.



Fonte: O autor.

O movimento das peças se realiza em sentido único partindo do setor interno adversário para o setor interno do jogador. Assim, as brancas se movimentam no sentido anti-horário podendo ir da casa 24 até a casa 1 fazendo a curva no tabuleiro na casa 13 para 12, e as pretas no sentido horário podendo ir da casa 1 até a casa 24 fazendo a curva da casa 12 para 13. As peças não se movimentam contra seu sentido próprio e não podem ultrapassar o seu setor interno. Todas as peças devem estar no setor interno para que o jogador possa começar a fase de retirada.

Cada casa só poderá ser ocupada se estiver vazia, se já estiver ali situada outras peças desse jogador ou se estiver ali uma e somente uma peça do adversário, que nesse caso será capturada. A casa com duas ou mais peças do adversário não poderá ser ocupada, mas poderá ser casa de passagem de peças do jogador na contagem da movimentação.

As peças se movimentam de acordo com os números obtidos nos dados. O jogador poderá movimentar duas ou uma quando os dados obtiverem números diferentes e uma, duas, três ou quatro quando os dados forem números iguais. A movimentação deverá ser feita de tal forma que uma peça ao ser vinculada a um dado possa fazer sua movimentação usando o número total daquele dado, nunca repartindo movimentação de um número relativo a um dado entre duas ou mais peças.

As casas com duas ou mais peças do adversário, "casa fechada", não poderão ser ocupadas nem usadas como "casa intermediária", conceito que será explicado no próximo parágrafo. Contudo, as casas fechadas poderão ser casas de passagem de peças do jogador com contagem na movimentação.

No caso de obter números diferentes nos dados, quando o jogador executa o movimento com duas peças, ele deverá vincular cada peça a um dado. Quando o jogador fizer o movimento com uma só peça, ele deverá determinar em que casa o uso do primeiro dado se completou, isso se chama "casa intermediária". Após isso, ele com a mesma peça fará a movimentação relativa ao segundo dado.

No caso de obter números iguais nos dados, também chamado de "dobradinha", o jogador terá o direito de movimentar a peça ou as peças como se existissem quatro dados com o mesmo valor. Assim poderá, dentro das possibilidades do jogo, movimentar uma, duas, três ou quatro peças de acordo com o que já foi explicado acima.

Se o jogador quiser movimentar uma peça somente e uma casa intermediária estiver fechada e outra livre, a peça poderá se movimentar desde que a casa final esteja livre. Se as duas casas intermediárias dessa peça forem casas fechadas, ele deverá buscar outras peças para executar os movimentos, pois essa peça não poderá se movimentar mesmo que a casa final esteja livre. Se um dado ou uma formação de dados for impossível para um jogador se movimentar, então ele passará a vez. O adversário lançará os dados, moverá as peças se possível e, assim, sucessivamente.

3.2.6 **Captura de peças.**

Quando uma peça está situada sozinha em uma determinada casa, o adversário poderá capturar essa peça, desde que o movimento da peça a conduza para essa casa ou utilize essa casa como casa intermediária. A peça capturada será retirada da casa onde se localizava e colocada na linha bar. O jogador que está com a peça capturada deverá entrar com ela novamente no jogo. Caso a peça não consiga entrar, então o jogador perderá a vez de movimentar. Para fazer isso, ele lança os dados. De acordo com os números obtidos, o jogador entra sempre pelo setor interno do adversário nas casas correspondentes aos valores dos dados, desde que essas casas não estejam fechadas. Se estiverem, ele não entrará com a peça capturada e deverá passar a vez. Se a numeração do setor interno do adversário for de 19, 20, 21, 22, 23 e 24, então corresponderá aos valores 6, 5, 4, 3, 2 e 1 dos dados respectivamente e a peça capturada fará dessa forma a entrada.

Quando uma peça capturada de um jogador entra pelo setor interno do adversário e na casa de entrada se encontra uma peça sozinha do oponente, ocorrerá que a peça que ali estava será capturada e colocada na linha bar enquanto a peça que entra ocupará o lugar. Dessa maneira, essa "nova" peça entra no jogo. Um jogador poderá capturar uma ou mais peças do adversário o que fará com que o oponente precise colocar todas as peças em jogo para voltar a movimentar, caso contrário passará a vez.

3.2.7 Retirada das peças.

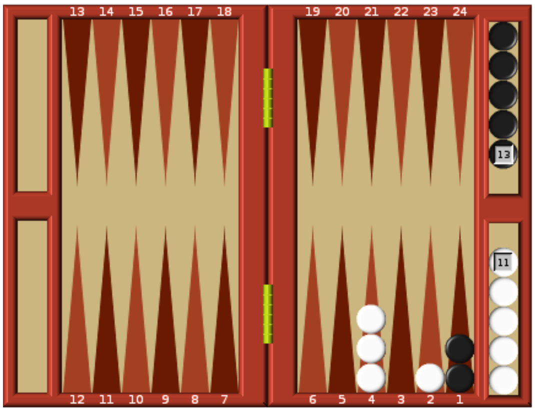
Um jogador só poderá começar a retirar suas peças depois de colocar todas as suas peças no interior do seu setor interno, feito isso a retirada se processa de acordo com os números obtidos nos dados, isto é, as peças retiradas serão as que ocupam as casas com os números obtidos nos dados. Caso o setor interno do jogador seja de número 19, 20, 21, 22, 23 e 24, os números dos dados 6, 5, 4, 3, 2 e 1 serão respectivamente os números associados. Se o jogador não possuir peça na casa referente a um determinado dado, ele deverá agir hierarquicamente da seguinte forma:

- 1º) Movimentar uma peça;
- 2º) Caso não seja possível movimentar peça alguma, então deve-se observar as seguintes situações:
    a) Se somente existirem peças situadas em casas de valores associados aos dados menores que o número obtido no dado em questão, então retira-se a peça mais próxima da casa de valor associado ao número obtido no dado.
    b) Se existir pelo menos uma peça situada em casa de valor associado ao dado maior que o número obtido no dado em questão, então o jogador passará a vez de se movimentar.

No diagrama da Figura 8 jogam as brancas. Podemos analisar várias situações de retirada de peças brancas. Vejamos algumas:

- As brancas obtém a formação 4 e 2. Então as brancas são obrigadas a retirar uma peça da casa 4 usando o dado de valor 4. Para o dado de valor 2, as brancas podem escolher entre retirar uma peça da casa 2 ou movimentar uma peça da casa 4 para a 2.
- As brancas obtém a formação 6 e 2. Então para o dado de valor 2 há novamente dois movimentos possíveis: retirar uma peça da casa 2 ou movimentar uma peça da casa 4 para a casa 2. Quanto ao dado de valor 6, só existem peças situadas em casas

Figura 8 – Retirada de peças brancas.



Fonte: O autor.

de valores associados menores que o valor 6, então deve-se retirar uma peça da casa 4, que é a mais próxima da casa 6.

- As brancas obtém a formação 6 e 5. Só existem peças situadas em casas de valores associados menores que os valores 6 e 5 então retiram-se duas peças da casa 4 que é a mais próxima da casa 6 e da 5.
- As brancas obtém a formação dobrada de 3. Não é possível retirar peça branca alguma pois não existe peça branca na casa 3 e existem peças brancas na casa 4 que é maior que o valor 3 dos dados. As brancas também não conseguem movimentar peça alguma da casa 4, pois a casa 1 está bloqueada. Assim elas passarão a vez.

O jogo será ganho pelo jogador que primeiro retirar todas as suas peças.

3.2.8 Tipos de vitórias.

No Jogo de Gamão temos três tipos de vitória:

- 1º) **Vitória Simples**: se o jogador derrotado conseguir retirar alguma de suas peças.
- 2º) **Vitória Dupla, Gamão Dobrado** ou simplesmente **Gamão**: se o jogador derrotado não conseguir retirar peça alguma do tabuleiro, mas não possuir peças na linha bar ou no setor interno do vencedor.
- 3º) **Vitória Tripla**: se o jogador derrotado não conseguir retirar peça alguma do tabuleiro e possuir peças na linha bar ou no setor interno do vencedor.
- 4º) **Vitória dos Deuses ou Gamão dos Deuses**: é a Vitória tripla quando o jogador derrotado não conseguiu retirar peça alguma do tabuleiro e terminou o jogo com peça na linha bar.

4 SITUAÇÕES PROBLEMAS ENVOLVENDO O GAMÃO.

Para cada movimentação de peças em um novo diagrama, forma-se várias análises, e novos cálculos de probabilidades podem ser feitos.

Esses diagramas apresentam as peças situadas em determinadas posições que definem as situações problemas que aqui serão nosso objeto de estudo.

Nesses mesmos diagramas podemos observar variados temas que podem ser explorados e usados através de suas características próprias que definem a temática em questão, bem como os seus cálculos matemáticos de probabilidade.

As Tabelas de 1 a 7, desse capítulo, foram construidas com base em [4] usando conceitos matemáticos.

O presente capítulo se estrutura da seguinte forma:

- 4.1 PROBABILIDADES BÁSICAS DO GAMÃO. Este capítulo subdivide-se em:
  - 4.1.1 Probabilidade de obter uma dobradinha em um lançamento.
  - 4.1.2 Probabilidade de obter um determinado número em pelo menos um dos dados em um lançamento.
  - 4.1.3 Probabilidade de capturar uma peça. Subdividido em:
    - 4.1.3.1 Probabilidade de capturar uma peça sendo $1 \leq d \leq 6$, onde $d \in \mathbb{N}$.
    - 4.1.3.2 Probabilidade de capturar uma peça sendo $7 \leq d \leq 24$, onde $d \in \mathbb{N}$.
  - 4.1.4 Probabilidade de entrar imediatamente com uma peça capturada.
  - 4.1.5 Probabilidade de entrar imediatamente com duas peças capturadas.
  - 4.1.6 Probabilidade de entrar imediatamente com três ou quatro peças capturadas.
  - 4.1.7 Probabilidade elementar de maior chance de retiradas das peças.
- 4.2 PROBABILIDADE EM DIAGRAMA DO GAMÃO. Subdividido em:
  - 4.2.1 Problemas de entrada de peça capturada.
  - 4.2.2 Problemas quando é forçada a desproteção.
  - 4.2.3 Problemas envolvendo tipos de vitórias.

4.1 PROBABILIDADES BÁSICAS DO GAMÃO.

Existem situações aleatórias que, na maioria dos diagramas, devem ser levadas em conta ao se avaliar a probabilidade de um evento ocorrer em uma determinada posição:

4.1.1 Probabilidade de obter uma dobradinha em um lançamento.

Define-se "dobradinha" como a formação dos dados com números iguais. O jogador que obtém dobradinha em um lançamento tem o direito de utilizar o valor como se existissem quatro dados com o mesmo valor.

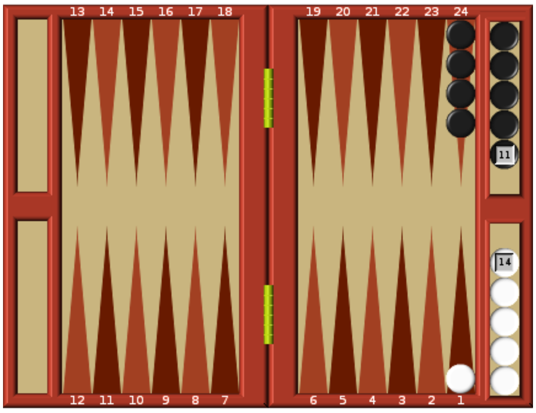
Sendo $n(U_T) = 36$ a cardinalidade do espaço amostral, temos o evento de dobradinha dado pelo conjunto:

$$V_D = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\},$$

onde a cardinalidade de V_D é $n(V_D) = 6$. Assim, a probabilidade do evento é:

$$P(V_D) = \frac{n(V_D)}{n(U_T)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%.$$

Figura 9 – Pretas lançam os dados com 4 peças. Única oportunidade para ganhar.



Fonte: O autor.

Como exemplo temos o diagrama da Figura 9, quando o jogador das pretas tem a oportunidade de jogar os dados. Ele possui quatro peças na casa 24, enquanto o oponente apresenta uma peça na casa 1.

A probabilidade das pretas ganharem é de aproximadamente $16,7\%$, pois basta obter uma dobradinha no lançamento dos dados para que o jogador retire as quatro peças que restam.

4.1.2 Probabilidade de obter um determinado número em pelo menos um dos dados em um lançamento.

Do mesmo modo que no item anterior, $n(U_T) = 36$. Sem perda de generalidade, digamos que o número em questão seja o 1. Assim, teremos o evento:

$$A_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(1,6),(6,1)\},$$

onde a cardinalidade será $n(A_1) = 11$. Assim, a probabilidade do evento será:

$$P(A_1) = \frac{n(A_1)}{n(U_T)} = \frac{11}{36} \approx 30,5\%.$$

4.1.3 Probabilidade de capturar uma peça.

Trataremos aqui da probabilidade de uma peça desprotegida do oponente ser capturada quando não existem casas fechadas pelo adversário entre a peça que vai capturar e a peça do rival que será capturada, sendo d o número de casas que essas duas peças estão distanciadas. Logo, para um jogador capturar a peça do adversário, será necessário obter valor em pelo menos um dos dados ou soma dos valores igual a d, ou ainda, uma dobradinha (α, α) onde $d = 3\alpha$ ou $d = 4\alpha$, sendo $1 \leq \alpha \leq 6$ para $\alpha \in \mathbb{N}$. Assim sendo, teremos os casos:

- a) Onde $1 \leq d \leq 6$, onde $d \in \mathbb{N}$.
- b) Onde $7 \leq d \leq 24$, onde $d \in \mathbb{N}$.

4.1.3.1 Probabilidade de capturar uma peça sendo $1 \leq d \leq 6$, onde $d \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, consideraremos o caso $d = 1$, onde o jogador precisa obter 1 em pelo menos um dos dados para capturar a peça adversária. Nesse caso, a probabilidade será conforme já mencionada:

$$P(A_1) = \frac{11}{36} \approx 30,5\%.$$

Para o estudo dos demais casos, primeiramente definiremos:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\} \\
A_3 &= \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,3),(2,3),(4,3),(5,3),(6,3)\} \\
A_4 &= \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4)\} \\
A_5 &= \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5)\} \\
A_6 &= \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\}
\end{aligned}$$

Consideraremos o caso $d = 2$, onde o jogador precisa obter 2 em pelo menos um dos dados ou dobradinha de 1 para capturar a peça adversária, pois $1 + 1 = 2$. Nesse caso, temos:

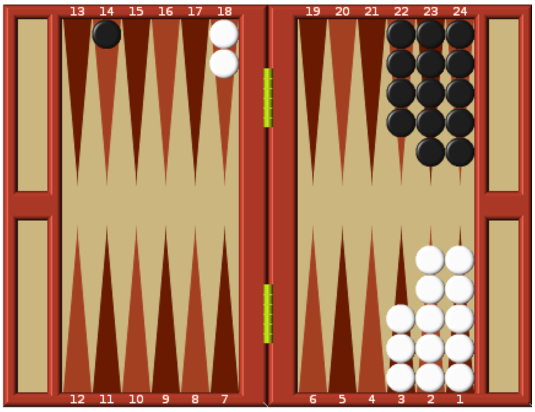
$$A_2 \cup \{(1,1)\} = \{(2,1),(1,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(2,2),(1,1)\},$$

onde $n(A_2 \cup \{(1,1)\}) = 12$ para $n(U_T) = 36$. Assim:

$$P(A_2 \cup \{(1,1)\}) = \frac{n(A_2 \cup \{(1,1)\})}{n(U_T)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \approx 33,3\%.$$

Utilizando desse mesmo raciocínio, obtemos a Tabela 1 com valores aproximados para as probabilidades:

Figura 10 – Brancas lançam os dados e precisam obter 4 para capturar.



Fonte: O autor.

d	**Evento**	**n(Evento)**	**P(Evento)**	**P(Evento)%**
1	A_1	11	$11/36$	$30,5\%$
2	$A_2 \cup \{(1,1)\}$	12	$12/36$	$33,3\%$
3	$A_3 \cup \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$	14	$14/36$	$38,9\%$
4	$A_4 \cup \{(1,1),(1,3),(3,1),(2,2)\}$	15	$15/36$	$41,7\%$
5	$A_5 \cup \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$	15	$15/36$	$41,7\%$
6	$A_6 \cup \{(1,5),(5,1),(2,2),(2,4),(4,2),(3,3)\}$	17	$17/36$	$47,2\%$

Tabela 1 – Onde $1 \leq d \leq 6$, onde $d \in \mathbb{N}$.

4.1.3.2 **Probabilidade de capturar uma peça sendo** $7 \leq d \leq 24$, **onde** $d \in \mathbb{N}$.

A respeito do caso em questão, duas observações podem ser feitas:

- 1ª) Não existem formações de dados que possibilitem a captura para $d = 13$; $d = 14$; $d = 17$; $d = 19$; $d = 21$; $d = 22$; $d = 23$, onde $d \in \mathbb{N}$, sendo então eventos impossíveis e a propabilidade é zero.

- 2ª) Existindo uma peça branca capturada na linha bar e uma peça preta sozinha na casa 1, temos $d = 24$. As brancas podem capturar a peça preta, jogando os dados e obtendo $(6,6)$, desde que nenhuma das casas 19, 13 e 7 estejam bloqueadas.

A princípio, consideraremos o caso $d = 7$, onde o jogador precisa obter 7 na soma dos dados para capturar a peça adversária. Neste caso, temos $n(U_T) = 36$, o evento:

$$C = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\},$$

onde $n(C) = 6$. Logo, a probabilidade será:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U_T)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%.$$

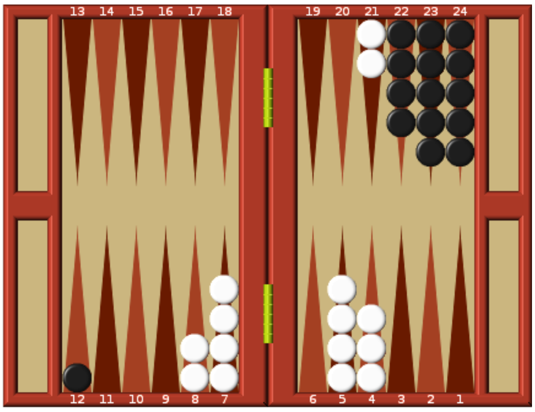
Em segundo lugar, consideraremos o caso $d = 8$, onde o jogador precisa obter 8 na soma dos dados para capturar a peça adversária. Neste caso, temos $n(U_T) = 36$, o evento:

$$D = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4),(2,2)\},$$

onde $n(D) = 6$. Assim, a probabilidade será:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(U_T)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,7\%.$$

Figura 11 – Brancas lançam os dados e precisam obter soma 9 para capturar.



Fonte: O autor.

Servindo-nos desse mesmo raciocínio para $d = 9$, $d = 10$, $d = 11$, $d = 12$, $d = 15$, $d = 16$, $d = 18$, $d = 20$ e $d = 24$, obtemos a Tabela 2 com valores aproximados para as probabilidades.

d	**Evento**	**n(Evento)**	**P(Evento)**	**P(Evento)%**
7	$\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$	6	6/36	16,7%
8	$\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(2,2),(4,4)\}$	6	6/36	16,7%
9	$\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(3,3)\}$	5	5/36	13,9%
10	$\{(4,6),(6,4),(5,5)\}$	3	3/36	8,3%
11	$\{(5,6),(6,5)\}$	2	2/36	5,5%
12	$\{(3,3),(4,4),(6,6)\}$	3	3/36	8,3%
15	$\{(5,5)\}$	1	1/36	2,8%
16	$\{(4,4)\}$	1	1/36	2,8%
18	$\{(6,6)\}$	1	1/36	2,8%
20	$\{(5,5)\}$	1	1/36	2,8%
24	$\{(6,6)\}$	1	1/36	2,8%

Tabela 2 – Onde $7 \leq d \leq 24$, sendo $d \neq 13$; $d \neq 14$; $d \neq 17$; $d \neq 19$; $d \neq 21$; $d \neq 22$; $d \neq 23$, para $d \in \mathbb{N}$.

4.1.4 Probabilidade de entrar imediatamente com uma peça capturada.

Analisaremos, agora, as probabilidades de uma peça capturada entrar no jogo considerando que o setor interno do adversário está fechado em nenhuma, algumas ou em todas as casas.

Seja c o número de casas possíveis para a entrada da peça capturada.

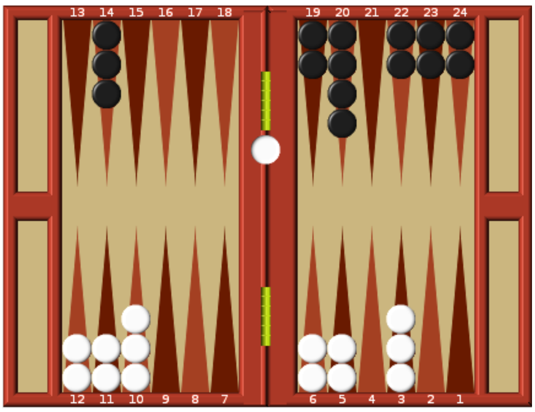
Para os casos quando o jogador tem uma peça capturada e o setor interno do adversário está totalmente fechado, a entrada é impossível, já que todas as casas estão fechadas, $c = 0$. Logo, não existe formação de dados que faça a peça entrar. Assim, a probabilidade de entrar será 0%.

Já para o caso quando o setor interno do adversário está totalmente aberto, todas as casas abertas, $c = 6$, a entrada da peça se faz com todas as formações de dados. Logo, sendo um evento certo, a probabilidade de entrar será 100%.

Para as situações intermediárias, seguem as análises:

- O jogador tem uma peça para entrar e o setor interno do adversário tem cinco casas fechadas e uma aberta, $c = 1$.

Figura 12 – Brancas com peça capturada e só uma casa para entrar.



Fonte: O autor.

A entrada ocorrerá caso o jogador obtenha, em pelo menos um dos dados, o número associado às casas abertas.

Como demonstra a Figura 12, a casa que está aberta é a de número 21, cujo valor associado aos dados é 4 e sem perda de generalidade para qualquer outro valor do dado associado à casa aberta.

O evento será:

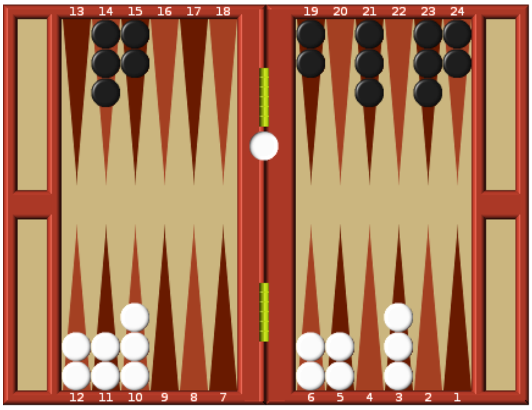
$$A_4 = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4)\},$$

onde $n(A) = 11$ para $n(U_T) = 36$. Assim, a probabilidade será:

$$P(V) = P(A_4) = \frac{11}{36} \approx 30,5\%.$$

- O jogador tem uma peça para entrar e o setor interno do adversário tem quatro casas fechadas e duas abertas, $c = 2$.

Figura 13 – Brancas com peça capturada e duas casas para entrar.



Fonte: O autor.

Para entrar, é necessária a obtenção de pelo menos um dos dois valores numéricos em pelo menos um dos dados, números esses associados às casas abertas.

Calcularemos a probabibidade para esse caso de acordo com o diagrama da Figura 13 quando temos somente as casas livres 22 e 20, cujo os valores associados aos dados são respectivamente 3 e 5 e está sem perda de generalidade para quaisquer outros dois valores associados ao 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Para um espaço amostral de cardinalidade $n(U_T) = 36$, sejam os eventos:

$$\begin{aligned} A_3 &= \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(1,3),(2,3),(4,3),(5,3),(6,3)\} \\ A_5 &= \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(3,5),(4,5),(2,5),(5,5)\}. \end{aligned}$$

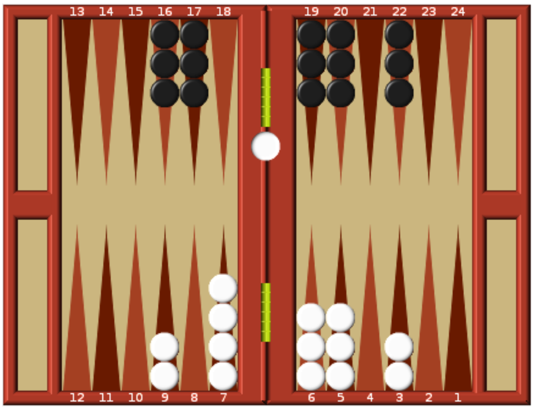
As cardinalidades são respectivamente $n(A_3) = 11$ e $n(A_5) = 11$, como existem dois elementos em comum entre A_3 e A_5, temos então uma cardinalidade resultante:

$$\begin{aligned} n(V) &= n(A_3 \cup A_5) \\ n(V) &= n(A_3) + n(A_5) - n(A_3 \cap A_5) \\ &= 11 + 11 - 2 = 20. \end{aligned}$$

Assim, a probabilidade será:

$$P(V) = \frac{20}{36} \approx 55,5\%.$$

Figura 14 – Brancas com uma peça capturada e três casas para entrar.



Fonte: O autor.

- O jogador tem uma peça para entrar e o setor interno do adversário tem três casas fechadas e três abertas, $c = 3$.

  Para entrar, é necessária a obtenção de pelo menos um dos três valores numéricos em pelo menos um dos dados, números esses associados às casas abertas.

  Calcularemos a probabibidade para esse caso de acordo com o diagrama da Figura 14 quando temos as casas livres 24, 23 e 21, cujos valores associados aos dados são respectivamente 1, 2 e 4 e está sem perda de generalidade para quaisquer outros três valores associados ao 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

  Para um espaço amostral de cardinalidade $n(U_T) = 36$, sejam os eventos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\} \\ A_2 &= \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\} \\ A_4 &= \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4)\}. \end{aligned}$$

  Temos então $n(A_1) = n(A_2) = n(A_4) = 11$. Existem dois elementos em comum entre A_1 e A_2, A_1 e A_4, e A_2 e A_4, e nenhum elemento em comum entre A_1, A_2 e A_4, temos então $n(A_1 \cap A_2) = n(A_1 \cap A_4) = n(A_2 \cap A_4) = 2$ e $n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = 0$. Faremos uso então da fórmula de probabilidade da união de três eventos, ressaltando que, nesse caso, a interseção desse três é o conjunto vazio. Assim teremos:

$$\begin{aligned} n(V) &= n(A_1 \cup A_2 \cup A_4) \\ n(V) &= n(A_1) + n(A_2) + n(A_4) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_4) - n(A_2 \cap A_4) \\ &\quad + n(A \cap B \cap C) \\ &= 11 + 11 + 11 - 2 - 2 - 2 + 0 = 27. \end{aligned}$$

  Assim, a probabilidade será:

$$P(V) = \frac{27}{36} = 75\%.$$

- Seguindo o mesmo raciocínio anterior, agora generalizando para $2 \leq c \leq 6$ com $c \in \mathbb{N}$, quando c é o número de casas livres no setor interno do rival onde uma peça capturada pode entrar. Podemos, então, encontrar um modelo matemático para $P(V)$ em função de c:

$$P(V) = c \cdot (\frac{11}{36}) - C_c^2 \cdot \frac{2}{36},$$

onde $C_c^2 = \frac{c!}{2! \cdot (c-2)!}$

$$\begin{aligned} P(V) &= \left\{(11 \cdot c) - 2 \cdot \left[\frac{c!}{2! \cdot (c-2)!}\right]\right\} \cdot \frac{1}{36} \\ &= \left\{(11 \cdot c) - 2 \cdot \left[\frac{c \cdot (c-1) \cdot (c-2)!}{2! \cdot (c-2)!}\right]\right\} \cdot \frac{1}{36} \\ &= \{(11 \cdot c) - [c \cdot (c-1)]\} \cdot \frac{1}{36} \\ &= \frac{12 \cdot c - c^2}{36}. \end{aligned}$$

A equação acima foi elaborada para $2 \leq c \leq 6$ com $c \in \mathbb{N}$, porém se aplicarmos $c = 0$ e $c = 1$ também se observará a validade da equação para com os resultados previstos. Logo, temos:

$$P(V) = \frac{12 \cdot c - c^2}{36}$$

para $0 \leq c \leq 6$ com $c \in \mathbb{N}$, onde $n(V) = 12 \cdot c - c^2$ que é uma PA de segunda ordem.

A Tabela 3 descreve as observações acima com valores exatos para 0%, 75% e 100%, sendo que as demais porcentagens terão valores aproximados.

Casas livres c	**n(V)**	**P(V)**	**P(V)%**
0	0	0/36	0%
1	11	11/36	30,5%
2	20	20/36	55,5%
3	27	27/36	75%
4	32	32/36	88,9%
5	35	35/36	97,2%
6	36	36/36	100%

Tabela 3 – Casas livres e entrada de uma peça capturada.

Como visto, a probabilidade para as situações de entrada imediata com uma peça capturada é a razão entre o número de formações dos dados que possibilitam a entrada da peça branca capturada, ou seja, $n(V)$, pelo número total de formações $n(U_T) = 36$, quando:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(U_T)} = \frac{12 \cdot c - c^2}{36}.$$

Um erro muito comum por parte de um leigo seria desprezar os cálculos feitos através dos números dessas formações de dados e executar os cálculos através da razão do número de casas liberadas do setor interno de entrada da peça branca capturada pelo total de casas desse setor.

A Tabela 4 relaciona cada caso às probabilidades matematicamente corretas e aos erros comuns dos leigos, sendo as probabilidades certas e erradas simbolizadas por $P(V)$ e $P(Ve)$, respectivamente, com valores exatos para as probabilidades de 0%, 50%, 75% e 100%, sendo que as demais porcentagens terão valores aproximados.

Casas livres c	**n(V)**	**P(V)**	**P(V)%**	**P(Ve)**	**P(Ve)%**
0	0	0/36	0%	0/6	0%
1	11	11/36	30,5%	1/6	16,7%
2	20	20/36	55,5%	2/6	33,3%
3	27	27/36	75%	3/6	50%
4	32	32/36	88,9%	4/6	66,7%
5	35	35/36	97,2%	5/6	83,3%
6	36	36/36	100%	6/6	100%

Tabela 4 – Casas livres e entrada relacionadas às probabilidades certas e erradas.

4.1.5 Probabilidade de entrar imediatamente com duas peças capturadas.

Da mesma forma que na entrada com uma peça, a entrada com duas peças com todas as casas fechadas, $c = 0$, é impossível. Logo, a probabilidade de entrada será de 0%. No caso de todas as casas abertas, $c = 6$, a entrada é sempre possível. Logo, a probabilidade de entrada será de 100%.

Para as situações intermediárias, seguem as análises:

- O jogador tem duas peças para entrar e o setor interno do adversário tem cinco casas fechadas e uma aberta, $c = 1$.

  Nos caso de $c = 1$, a entrada só será possível se obter nos dados uma determinada dobradinha de valor associado à casa aberta.

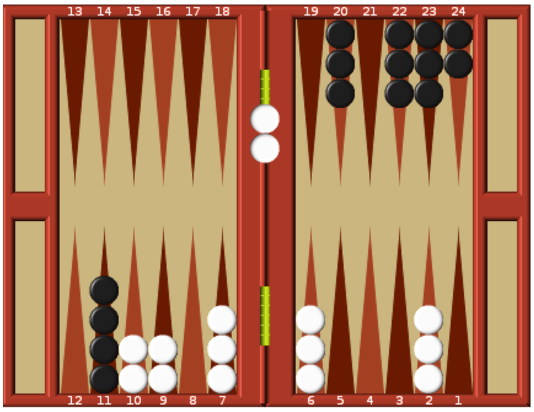
  Consideremos aqui o valor 1 como sendo associado à casa aberta. Assim, temos o evento:

  $$V = \{(1, 1)\},$$

  sem perda de generalidade para os demais casos em que outro valor será associado à outra única casa aberta. Dessa maneira, temos $n(V) = 1$ em um espaço amostral com $n(U_T) = 36$. Consequentemente, a probabilidade de entrada será:

  $$P(V) = \frac{1}{36} \approx 2,8\%.$$

Figura 15 – Brancas com duas peças capturadas e duas casas para entrar.



Fonte: O autor.

- O jogador tem duas peças para entrar e o setor interno do adversário tem quatro casas fechadas e duas abertas, $c = 2$.

  A probabilidade de entrar é a de obter uma formação de dados na qual o par é constituído por esses dois valores associados às duas casas abertas ou obter uma dobradinha de qualquer um dos valores associados às casas abertas.

  Como constata o diagrama da Figura 15, os valores 4 e 6 estão associados às casas abertas. Por isso, temos o evento:

$$V = \{(4,6),(6,4),(4,4),(6,6)\},$$

  sem perda de generalidade para os demais casos em que outros valores serão associados às duas outras casas abertas estando as outras quatro fechadas. Assim temos $n(V) = 4$ em um espaço amostral com $n(U_T) = 36$. Logo, a probabilidade de entrada será:

$$P(V) = \frac{4}{36} \approx 11,1\%.$$

- O jogador tem duas peças para entrar e o setor interno do adversário três casas fechadas e três abertas, $c = 3$.

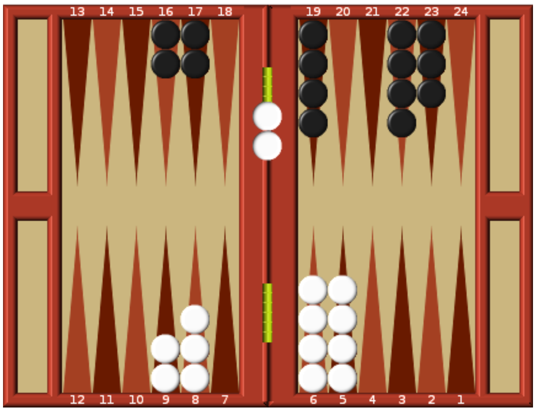
  A probabilidade de entrar é a de obter uma formação de dados na qual o par é constituído por dois dos três valores associados às três casas abertas ou obter uma dobradinha de qualquer um dos valores associados às casas abertas.

  Como atesta o diagrama da Figura 16, os valores 1, 4 e 5 estão associados às casas abertas. Então, temos o evento:

$$V = \{(1,4),(1,5),(4,1),(4,5),(5,1),(5,4),(1,1),(4,4),(5,5)\},$$

  sem perda de generalidade para os demais casos em que outros valores serão associados às três outras casas abertas estando as outras três fechadas. Assim temos $n(V) = 9$

Figura 16 – Brancas com duas peças capturadas e três casas para entrar.



Fonte: O autor.

em um espaço amostral com $n(U_T) = 36$. Dessa forma, a probabilidade de entrada será:

$$P(V) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

De forma geral, podemos observar que para um determinado número de casas abertas c teremos o número de eventos $n(V) = c^2$, pois para cada c possibilidades do primeiro dado temos c possibilidades para o segundo. Logo, temos a modelagem de $P(V)$ em função de c para encontrar a probabilidade de entrada de duas peças capturadas:

$$P(V) = \frac{c^2}{36},$$

para $c \in \mathbb{N}$ onde $0 \leq c \leq 6$. Com isso, pode ser construída a Tabela 5 com valores aproximados para as probabilidades, exceto as probabilidade de 0%, 25% e 100% que são exatas.

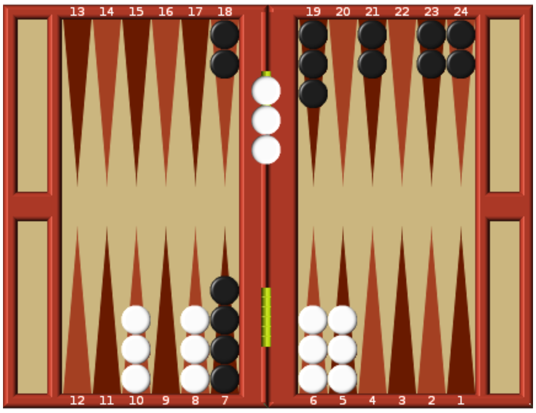
Casas livres c	**n(V)**	**P(V)**	**P(V)%**
0	0	0/36	0%
1	1	1/36	2,8%
2	4	4/36	11,1%
3	9	9/36	25%
4	16	16/36	44,4%
5	25	25/36	69,4%
6	36	36/36	100%

Tabela 5 – Casas livres e entrada de duas peças capturadas.

4.1.6 **Probabilidade de entrar imediatamente com três ou quatro peças capturadas.**

Da mesma forma que na entrada com uma e duas peças, a entrada com três ou quatro peças com todas as casas fechadas é impossível $c = 0$. Logo, a probabilidade de

Figura 17 – Brancas com três peças capturadas e duas casas para entrar.



Fonte: O autor.

entrada será 0%.

Nos caso de $c = 1$, a entrada só será possível se obter nos dados uma determinada dobradinha de valor associado à casa aberta.

Consideremos aqui o valor 2 como sendo associado à casa aberta. Assim, temos o evento:

$$V = \{(2, 2)\},$$

sem perda de generalidade para os demais casos em que outro valor será associado à outra única casa aberta. Logo, $n(V) = 1$ em um espaço amostral com $n(U_T) = 36$. Dessa maneira, a probabilidade de entrada será:

$$P(V) = \frac{1}{36} \approx 2,8\%.$$

Nos caso de $c = 2$, a entrada só será possível se obter nos dados uma de duas determinadas dobradinhas de valor associado a uma das duas casas abertas.

Como indica o diagrama da Figura 16, os valores 3 e 5 estão associados às casas abertas. Isso posto, temos o evento:

$$V = \{(3, 3), (5, 5)\},$$

sem perda de generalidade para os demais casos em que outros valores serão associados às outras duas casas abertas estando as outras quatro fechadas. Assim temos $n(V) = 2$ em um espaço amostral com $n(U_T) = 36$. Dessa forma, a probabilidade de entrada será:

$$P(V) = \frac{2}{36} \approx 5,5\%.$$

Prosseguindo, teremos para $c = 3$ um conjunto de evento de três elementos que são três dobradinhas onde temos $n(V) = 3$. Logo, a probabilidade de entrada será:

$$P(V) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 8,3\%.$$

Para $c \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq c \leq 6$, teremos $n(V) = c$. Assim:

$$P(V) = \frac{c}{36}.$$

Assim, podemos construir a Tabela 6 com valores aproximados para as probabilidades, exceto para a probabilidade de 0% que é exata.

Casas livres c	**n(V)**	**P(V)**	**P(V)%**
0	0	0/36	0%
1	1	1/36	2,8%
2	2	2/36	5,5%
3	3	3/36	8,3%
4	4	4/36	11,1%
5	5	5/36	13,9%
6	6	6/36	16,7%

Tabela 6 – Casas livres e entrada de três ou quatro peças capturadas.

4.1.7 Probabilidade elementar em retirada de peças de finais simples.

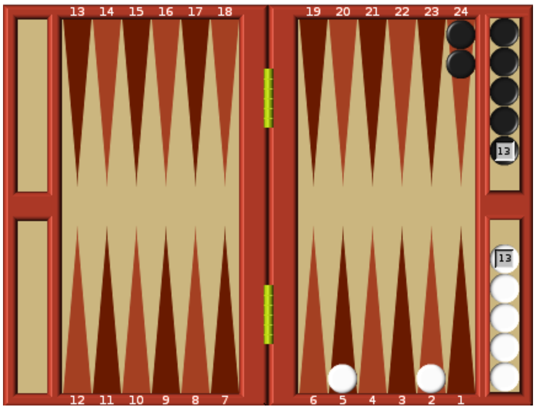
Os finais mais simples que podem ser analisados no Gamão são os finais quando duas peças pretas estão situadas na casa 24 prestes a serem retiradas com qualquer formação de dados e outras duas peças brancas estão situadas em variadas situações no setor interno branco, segundo [4]. Essas várias situações brancas se tornarão aqui o objeto de estudo da probabilidade de ganho para o jogador branco caso a vez de arremessar os dados seja das brancas, pois, se for a vez das pretas lançarem os dados, a probabilidade de ganho para elas será de 100%.

Dentro da situação proposta acima, estando as duas peças pretas fixadas na casa 24, teríamos as várias possibilidades de distribuição de duas peças brancas em seis casas possíveis, podendo as duas peças ocuparem a mesma casa ou casas diferentes, o que gerariam diagramas diferentes em um total de:

$$\text{Total de diagramas} = C_6^1 + C_6^2 = 21.$$

Como exemplo, temos o diagrama na Figura 18, quando as pretas têm duas peças na casa 24 e as brancas duas peças distribuídas nas casas 2 e 5. As brancas lançam os dados, o espaço amostral tem cardinalidade $n(U_T) = 36$ e as brancas conseguem retirar suas duas peças caso apareçam nos dados os números das casas 2 e 5 ou maiores, ou ainda, dobradinhas onde as somas parciais deem maiores que esses números. Logo temos o evento:

Figura 18 – Final elementar. Brancas com probabilidade de ganhar de aproximadamente 52, 8%.



Fonte: [4]

$$R_{25} = \left\{ \begin{array}{llll} (2,2), & (2,5), & (2,6), & (3,5), \\ (3,3), & (3,6), & (4,5), & (4,6), \\ (4,4), & (5,2), & (5,3), & (5,4), \\ (5,5), & (5,6), & (6,3), & (6,4), \\ (6,6), & (6,2), & (6,5) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(R_{25}) = 19.$$

Então, a probabilidade de as brancas conseguirem retirar as suas duas peças será:

$$P(R_{25}) = \frac{19}{36} \approx 52,8\%.$$

Estando as brancas na vez de lançarem os dados, sendo a e b as casas do setor interno branco onde se localizam suas duas peças e situando as duas peças pretas na casa 24, podemos utilizar do mesmo raciocínio que foi usado para calcular $P(R_{25})$.

Podemos construir a Tabela 7 que relaciona o posicionamento das peças brancas a e b, $n(Rab)$, $P(Rab)$ aos valores aproximados $P(Rab)\%$, exceto a probabilidade de 100% que é exata.

4.2 A PROBABILIDADE EM DIAGRAMAS DO GAMÃO.

Através de diagramas de Gamão, trataremos de vários temas de probabilidade resolvendo problemas propostos.

Os problemas serão separados por temas de jogo e de probabilidade da seguinte forma:

- Problemas de entrada de peça capturada: problemas 1, 2 e 3.
- Problemas quando é forçada a desproteção: problemas 1, 2 e 3.

a e b	**n(Rab)**	**P(Rab)**	**P(Rab)%**
1 e 1	36	36/36	100%
1 e 2	36	36/36	100%
1 e 3	34	34/36	94,4%
1 e 4	29	29/36	80,5%
2 e 2	26	26/36	72,2%
2 e 3	25	25/36	69,4%
1 e 5	23	23/36	63,9%
2 e 4	23	23/36	63,9%
2 e 5	19	19/36	52,8%
3 e 3	17	17/36	47,2%
3 e 4	17	17/36	47,2%
1 e 6	15	15/36	41,7%
3 e 5	14	14/36	38,9%
2 e 6	13	13/36	36,1%
4 e 4	11	11/36	30,5%
3 e 6	10	10/36	27,8%
4 e 5	10	10/36	27,8%
4 e 6	08	8/36	22,2%
5 e 5	06	6/36	16,7%
5 e 6	06	6/36	16,7%
6 e 6	04	4/36	11,1%

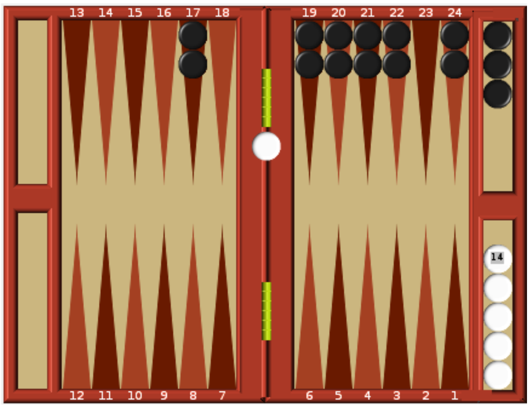
Tabela 7 – Probabilidade elementar em retirada de peças de finais simples.

4.2.1 Problemas de entrada de peça capturada.

Nos problemas 1, 2 e 3 serão explorados os conceitos de *Eventos Independentes, Multiplicação de Probabilidades e Probabilidade Complementar.*

1º Problema de entrada de peça capturada.

Figura 19 – Entrada de peça: problema 1.



Fonte: O autor.

Considerando o diagrama da Figura 19, percebemos que é a vez de as peças brancas lançarem os dados. Calcule a probabilidade das peças brancas ganharem o jogo no menor número de lances possíveis com execução dos movimentos propiciados por ambos os dados sem que as pretas facilitem a partida.

Resposta: As brancas não podem ganhar o jogo com um lance somente, visto que não existe formação de dados que consiga entrar com a peça branca capturada e ainda possibilitar a sua movimentação para o seu setor interno, executando a retirada. Serão necessários dois ou mais lances para acontecer uma possível vitória branca, assim vamos analisar o problema tendo em vista dois lances. Esses dois lances são a menor quantidade possível para as brancas alcançarem a vitória.

Será necessário que ocorra sucessivamente os eventos $1^o), 2^o)$ e $3^o)$ abaixo, *Eventos Independentes*, isto é, um não interferindo na probabilidade do outro. Esses eventos se expressam pelas *Multiplicações das Probabilidades.*

- 1^o) As brancas precisam entrar com o dado 2 na casa 23, seguido da movimentação com o dado 5 e passando a se situar na casa 18. Para isso, precisam das formações de dados que formam o conjunto de evento:

$$E_{v1} = \{(2,5),(5,2)\},$$

  onde o número de elementos de E_{v1} é $n(E_{v1}) = 2$ em um total de $n(U_T) = 36$ formações possíveis dos dados. Assim, em 1^o) temos a probabilidade de:

$$P_1 = \frac{n(E_{v1})}{n(U_T)} = \frac{1}{18}.$$

- 2^o) As pretas jogam os dados, mas não obtêm formações que possibilitem a captura da peça branca na casa 18. As formações que possibilitam a captura formam o conjunto:

$$\overline{E_{v2}} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\},$$

  onde o número de elementos de $\overline{E_{v2}}$ é $n(\overline{E_{v2}}) = 11$ em um total de $n(U_T) = 36$ formações possíveis dos dados. A probabilidade de não ocorrer a captura é *Complementar* a de ocorrer. Assim, em 2^o) temos a probabilidade de:

$$P_2 = 1 - \frac{n(\overline{E_{v2}})}{n(U_T)} = \frac{25}{36}.$$

- 3^o) As brancas precisam obter formações de dados dobrados que possibilitem a retirada imediata da sua única peça. Essas formações constituem o conjunto:

$$E_{v3} = \{(5,5),(6,6)\},$$

onde o número de elementos de E_{v3} é $n(E_{v3}) = 2$ em um total de $n(U_T) = 36$ formações possíveis dos dados. Assim, em 3º) temos a probabilidade de:

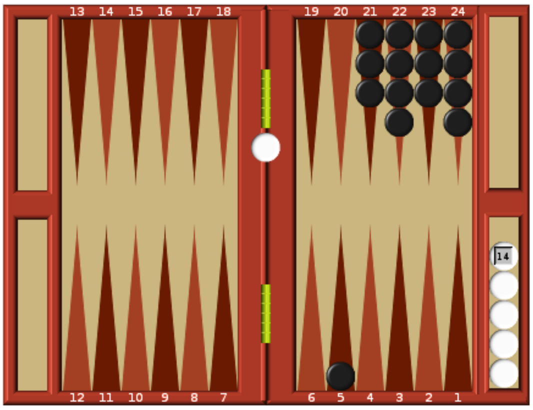
$$P_3 = \frac{n(E_{v3})}{n(U_T)} = \frac{1}{18}.$$

Desse modo, a probabilidade pedida no problema será o cálculo da simultaneidade dos três *Eventos Independentes* 1º), 2º) e 3º) ocorrerem, logo o cálculo se faz pelas *Multiplicações das Probabilidades*:

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{25}{11664} \approx 0,2143\%.$$

2º **Problema de entrada de peça capturada.**

Figura 20 – Entrada de peça: problema 2.



Fonte: O autor.

De acordo com o diagrama da Figura 20, considerando que a oportunidade de lançar os dados é das brancas, calcule a probabilidade das peças brancas ganharem o jogo no menor número de lances possíveis, capturando a peça preta no primeiro lançamento.

Resposta: As brancas não podem ganhar o jogo com um lance somente, visto que não existe formação de dados que consiga entrar com a peça branca capturada e ainda possibilitar a sua movimentação para o seu setor interno executando a retirada. Serão necessários dois ou mais lances para acontecer uma possível vitória branca. Esses dois lances são a menor quantidade possível para as brancas alcançarem a vitória.

Como no exemplo anterior, serão calculados *Eventos Independentes* 1º), 2º) e 3º) e as *Multiplicações das Probabilidades.*

- 1º) A peça branca precisa entrar na casa 20 com uma dobradinha de 5 para capturar a peça preta na casa 5. Por isso, faz-se necessária a formação de dados que estruture o conjunto de evento:

$$E_1 = (5,5),$$

onde o número de elementos de E_1 é $n(E_1) = 1$ em um total de $n(U_T) = 36$ formações possíveis dos dados. Assim, temos a probabilidade de:

$$P_1 = \frac{n(E_1)}{n(U_T)} = \frac{1}{36}.$$

- 2º) As pretas, agora com uma peça capturada, não obtêm formações de dados que possibilitem a entrada capturando a peça branca na casa 5. As formações de dados nas quais as pretas entram capturando são aquelas em que aparece o 5 ou que a soma dê 5. Assim temos o conjunto de evento:

$$\overline{E_2} = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,4), & (1,5), & (2,3), \\ (2,5), & (3,2), & (3,5), \\ (4,1), & (4,5), & (5,1), \\ (5,2), & (5,3), & (5,4), \\ (5,5), & (5,6), & (6,6) \end{array} \right\}, \text{ onde } n(\overline{E_2}) = 15 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

A probabilidade de não ocorrer a captura é *Complementar* a de ocorrer. Então, temos a probabilidade de:

$$P_2 = 1 - \frac{n(\overline{E_2})}{n(U_T)} = \frac{7}{12}.$$

- 3º) As brancas precisam, nesse lance, retirar sua última peça. As formações de dados que não possibilitam a retirada são aquelas em que a soma, com ou sem dobradinha, dê menor que 5. Desta forma temos o evento:

$$\overline{E_3} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\},$$

onde o número de elementos de $\overline{E_3}$ é $n(\overline{E_3}) = 5$ em um total de $n(U_T) = 36$ formações possíveis dos dados. A probabilidade para retirar é *Complementar* a de não retirar. Assim, temos a probabilidade de:

$$P_3 = 1 - \frac{n(\overline{E_3})}{n(U_T)} = \frac{31}{36}.$$

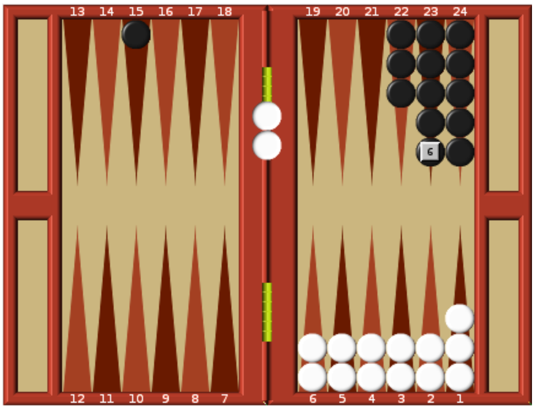
Logo, a probabilidade pedida no problema será o cálculo da simultaniedade dos três *Eventos Independentes* P_1, P_2 e P_3 ocorrerem. Então, o cálculo se faz pelas *Multiplicações das Probabilidades*.

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = \frac{217}{15552} \approx 1,395\%.$$

3º **Problema de entrada de peça capturada.**

Definição de *Cama de Gato*: é a formação de peças quando todas as casas do setor interno de um jogador estão ocupadas por duas ou mais peças desse jogador. Caso exista uma ou mais peças capturadas do oponente, elas poderão entrar somente após a *Cama de Gato* se desfazer, enquanto isso o jogador com peça capturada passará a vez de jogar.

Figura 21 – Entrada de peças e brancas com *Cama de Gato* armada: problema 3.



Fonte: O autor.

De acordo com o diagrama da Figura 21, a vez de lançar os dados é das brancas e elas estão com a *Cama de Gato* armada, ou seja, todas as casas do seu setor interno estão fechadas. Na hipótese delas capturarem a peça adversária, as pretas não terão condições de entrar e passarão a vez até que as brancas desfaçam a *Cama de Gato*.

Calcule a probabilidade das peças brancas lançarem os dados e conseguirem entrar com as duas peças e as pretas passarem a vez no lance seguinte. Considere que as brancas farão os melhores lances possíveis para não abrir a *Cama de Gato*.

Observação: Define-se passar a vez quando não é possível utilizar todos os movimentos indicados pelos dados.

Resposta: A movimentação preta seria totalmente impedida se ocorressem alguns dos eventos que se seguem. A probabilidade se calcula pela união desses, ou seja, ocorre 1º ou 2º :

- 1º) As brancas obtêm uma dobradinha $(5, 5)$. Assim, temos:

$$E_1 = \{(5, 5)\},$$

onde $n(E_1) = 1$. Com esses valores elas entram na casa 20 com as duas peças capturadas e captura a peça preta na casa 15. A peça preta não poderá entrar, pois as brancas possuem uma *Cama de Gato* no seu setor interno. Com isso, as pretas passam a vez sem movimentação. Essa probabilidade será:

$$P_1 = \frac{n(E_1)}{n(U_T)} = \frac{1}{36}.$$

- 2º) As brancas obtêm uma dobradinha $(4,4)$. Assim, temos:

$$E_{2a} = \{(4,4)\},$$

onde $n(E_{2a}) = 1$ então $P_{2a} = \frac{n(E_{2a})}{n(U_T)} = \frac{1}{36}$. Com esses valores, as peçam entram na casa 21 e, para não abrir a *Cama de Gato*, jogam com as duas peças da casa 21 para a casa 17.

As pretas passam a vez se obtiverem uma dobradinha $(2,2)$. Assim, temos:

$$E_{2b} = \{(2,2)\},$$

onde $n(E_{2b}) = 1$ então $P_{2b} = \frac{n(E_{2b})}{n(U_T)} = \frac{1}{36}$.

Temos então:

$$P_2 = P_{2a} \cdot P_{2b} = \frac{1}{1296}.$$

O proposto só ocorrerá caso o 1º evento ocorra ou o 2º evento ocorra. Assim:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{1296} \\ &= \frac{37}{1296} \approx 2,85\%, \end{aligned}$$

4.2.2 Problemas quando é forçada a desproteção.

Nos problemas 1, 2 e 3 serão explorados os conceitos de *Eventos Independentes, Multiplicação de Probabilidades, Probabilidade Complementar e Probabilidade da união.*

1º Problema quando é forçada a desproteção.

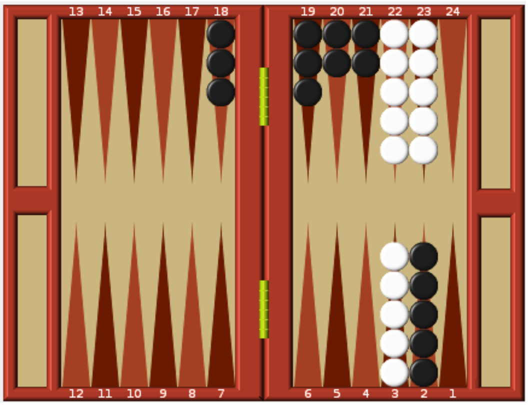
A partir da configuração do diagrama da Figura 22, jogam as brancas. Calcule a probabilidade das pretas, em seu primeiro movimento, capturarem uma peça branca dentro de qualquer setor interno.

Obs: Supondo que as brancas façam a melhor movimentação possível na tentativa de que nenhuma das peças fique desprotegida.

Resposta: Como iremos ver adiante, as brancas serão forçadas a deixarem um peça desprotegida no seu setor interno se obtiverem a formação $(2,2)$ e forçadas a deixarem no setor interno do adversário se obtiverem a formação $(1,1)$. Então teremos as formações de dados compondo o conjunto $E = \{(1,1),(2,2)\}$. As brancas jogam os dados e podem obter as formações com os seguintes subconjuntos de E:

$$E_1 = \{(1,1)\}$$

Figura 22 – Probabilidade das pretas capturarem uma peça branca: problema 1.



Fonte: O autor.

ou

$$E_2 = \{(2,2)\},$$

ou seja, devem ser feito o somatório das probabilidades.

Então, $n(E_1) = n(E_2) = 1$ para $n(U_T) = 36$. Assim, a probabilidade das pretas obterem um desses subconjuntos em específico será:

$$P_{E1} = P_{E2} = \frac{n(E_1)}{n(U_T)} = \frac{1}{36}.$$

A seguir será feito uma análise de cada caso:

- 1º) $E_1 = \{(1,1)\}$.

  Obriga as brancas a deixarem uma fraqueza, pois elas são forçadas a jogarem quatro peças da casa 23 para a casa 22, deixando uma peça desprotegida na casa 23.

  As pretas não podem capturar se obtiverem as formações que compõem o conjunto:

$$\overline{F_1} = \{(1,1),(1,6),(6,1),(6,6)\},$$

  onde o número de elemento é $n(\overline{F_1}) = 4$ em um total de formações $n(U_T) = 36$. A probabilidade das pretas capturarem a peça branca é complementar ao fato de não se capturar. Logo, a probabilidade das pretas capturarem será:

$$P_{F1} = 1 - \frac{n(\overline{F_1})}{n(U_T)} = \frac{8}{9}.$$

- 2º) $E_2 = \{(2,2)\}$.

  Obriga as brancas a deixarem uma fraqueza, pois elas são forçadas a jogarem quatro peças da casa 3 para a casa 1, deixando uma peça desprotegida na casa 3.

As pretas podem capturar se obtiverem as formações que compõem o conjunto:

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{lll} (1,1), & (1,2), & (1,3), \\ (1,4), & (1,5), & (1,6), \\ (2,1), & (3,1), & (4,1), \\ (5,1), & (6,1) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(F_2) = 11 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

Logo, a probabilidade das pretas capturarem será:

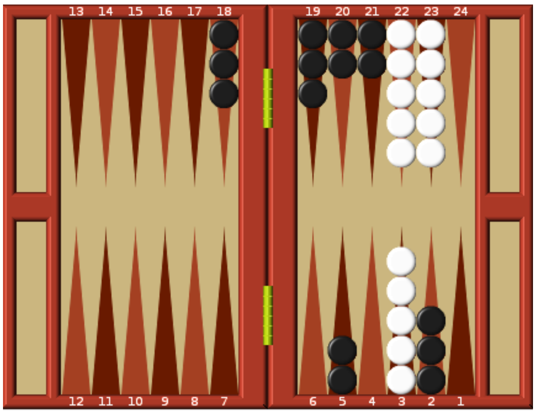
$$P_{F2} = \frac{n(F_2)}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

Assim, a probabilidade pedida no problema será:

$$P = P_{E1} \cdot P_{F1} + P_{E2} \cdot P_{F2} = \frac{43}{1296} \approx 3,318\%.$$

2º Problema quando é forçada a desproteção.

Figura 23 – Probabilidade das pretas capturarem uma peça branca: problema 2.



Fonte: O autor.

A partir da configuração do diagrama da Figura 23, jogam as brancas. Calcule a probabilidade das pretas capturarem uma peça branca dentro de qualquer setor interno em seu primeiro lance.

Obs: supondo que as brancas façam o melhor movimentação possível na tentativa de que nenhuma das peças fique desprotegida.

Resposta: As brancas serão forçadas a deixarem um peça desprotegida no seu setor interno se obtiverem a formação $(2,2)$ e forçadas a deixarem no setor interno do adversário se obtiverem a formação $(1,1)$. Assim, temos as formações de dados compondo o conjunto:

$$E = \{(1,1),(2,2)\}.$$

As brancas jogam os dados e podem obter as formações com os seguintes subconjuntos de E:

$$E_1 = \{(1,1)\}$$

ou

$$E_2 = \{(2,2)\},$$

ou seja, devem ser feito o somatório das probabilidades.

Cada um desses subconjuntos, obtidos pelas brancas, implicará em diferentes formações de dados necessárias para as pretas poderem capturar a peça branca. Como cada subconjunto possui um elemento, então $n(E_x) = n(E_1) = n(E_2) = 1$ em um total de $n(U_T) = 36$. Assim, a probabilidade das pretas obterem um desses subconjuntos em específico será:

$$P_{Ex} = P_{E1} = P_{E2} = \frac{n(E_x)}{n(U_T)} = \frac{1}{36}.$$

A seguir será feito uma análise de cada caso:

- 1º) $E_1 = \{(1,1)\}$.

  Obriga as brancas a deixarem uma fraqueza, pois elas são forçadas a jogarem quatro de suas peças da casa 23 para a casa 22, deixando uma peça desprotegida na casa 23.

  As pretas não podem capturar se obtiverem as formações que compõem o conjunto $\overline{F_1} = \{(1,1),(1,6),(6,1)\}$, onde o número de elemento é $n(\overline{F_1}) = 3$ em um total de formações $n(U_T) = 36$. A probabilidade das pretas capturarem a peça branca é complementar ao fato de não se capturar. Logo, a probabilidade das pretas capturarem será:

$$P_{F1} = 1 - \frac{n(\overline{F_1})}{n(U_T)} = \frac{11}{12}.$$

- 2º) $E_2 = \{(2,2)\}$.

  Obriga as brancas a deixarem uma fraqueza, pois elas são forçadas a jogarem quatro de suas peças da casa 3 para a casa 1, deixando uma peça desprotegida na casa 3.

  As pretas podem capturar se obtiverem 1 em algum dado, sendo este evento F_2 com cardinalidades $n(F_2) = 11$ para o evento e $n(U_T) = 36$ para o espaço amostral. Assim, a probabilidade das pretas capturarem será:

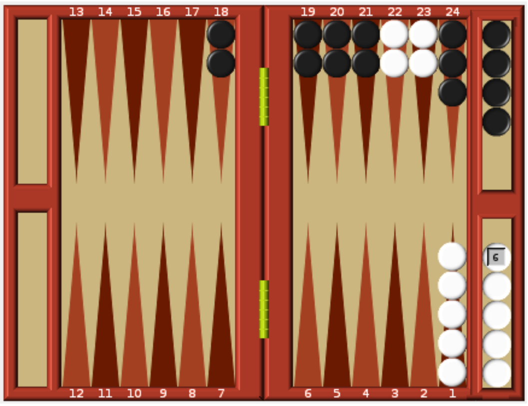
$$P_{F2} = \frac{n(F_2)}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

Logo, a probabilidade solicitada no problema será:

$$P = P_{E1} \cdot P_{F1} + P_{E2} \cdot P_{F2} = \frac{11}{324} \approx 3,395\%.$$

3º **Problema quando é forçada a desproteção.**

Figura 24 – Probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas: problema 3.



Fonte: O autor.

A partir da configuração do diagrama da Figura 24, jogam as pretas. Calcule a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas no próximo lançamento dos dados.

Obs: As pretas só deixarão duas peças desprotegidas se for inevitável.

Resposta: Para que as peças brancas possam capturar duas peças pretas no próximo lançamento, será necessário que as pretas sejam forçadas a deixarem duas de suas peças desprotegidas. Como iremos ver adiante, as formações obtidas pelas pretas que as forçam a isso são as que compõem o conjunto de eventos:

$$E_1 = \{(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)\},$$

onde $n(E_1) = 10$. As pretas jogam os dados e podem obter as formações com os seguintes subconjuntos de E_1:

$$E_{1a} = \{(3,4),(4,3)\}$$

ou

$$E_{1b} = \{(3,5),(5,3)\}$$

ou

$$E_{1c} = \{(4,5),(5,4)\}$$

ou

$$E_{1d} = \{(4,6),(6,4)\}$$

ou

$$E_{1e} = \{(5,6),(6,5)\}.$$

Cada um desses subconjuntos pretos implicará em diferentes formações de dados necessárias para as brancas poderem capturar duas peças pretas. Como cada subconjunto possui dois elementos, então $n(E_{1a}) = n(E_{1b}) = n(E_{1c}) = n(E_{1d}) = n(E_{1e}) = 2$ em um total de $n(U_T) = 36$. Assim, a probabilidade das pretas obterem um desses subconjuntos em específico será:

$$P_{E1a} = P_{E1b} = P_{E1c} = P_{E1d} = P_{E1e} = \frac{n(E_{1a})}{n(U_T)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

A seguir será feito uma análise de cada caso:

- 1º) $E_{1a} = \{(3,4),(4,3)\}$.

  Obriga as pretas a deixarem duas fraquezas de dois modos diferentes:

  a_1) As pretas movem uma peça da casa 20 para a casa 24 e outra da casa 21 para a casa 24 deixando fraquezas nas casas 20 e 21. As brancas podem capturar as duas peças com as formações:

  $$F_{1a1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(1,3),(2,3),(3,2)\},$$

  onde $n(F_{1a1}) = 8$ em um total $n(U_T) = 36$. Assim, a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas de acordo com a situação a_1) será:

  $$P_{1a1} = \frac{n(F_{1a1})}{n(U_T)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

  a_2) As pretas movem uma peça da casa 18 para a casa 21 e outra da casa 20 para a casa 24 deixando fraquezas nas casas 18 e 20. As brancas podem capturar as duas peças com as formações:

  $$F_{1a2} = \left\{ \begin{array}{lll} (2,2), & (2,5), & (5,2), \\ (2,3), & (3,2), & (2,4), \\ (4,2), & (3,5), & (5,3), \\ (4,3), & (3,4) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(F_{1a2}) = 11 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

  Assim, a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas de acordo com a situação a_2) será:

  $$P_{1a2} = \frac{n(F_{1a2})}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

- 2º) $E_{1b} = \{(3,5),(5,3)\}$.

  Obriga as pretas a deixarem duas fraquezas de dois modos diferentes:

b_1) As pretas movem uma peça da casa 18 para casa 21 e outra da casa 19 para a casa 24 deixando fraquezas nas casas 18 e 19. As brancas podem capturar as duas peças com as formações:

$$F_{1b1} = \left\{ \begin{array}{lll} (4,4), & (3,1), & (1,3), \\ (4,1), & (1,4), & (3,4), \\ (4,3), & (4,5), & (5,4), \\ (5,3), & (3,5) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(F_{1b1}) = 11 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

Assim, a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas de acordo com a situação b_1) será:

$$P_{1b1} = \frac{n(F_{1b1})}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

b_2) As pretas movem uma peça da casa 19 para a casa 24 e outra da casa 21 para a casa 24 deixando fraquezas nas casas 19 e 21. As brancas podem capturar as duas peças com as formações:

$$F_{1b2} = \left\{ \begin{array}{lll} (2,2), & (2,1), & (1,2), \\ (1,3), & (3,1), & (1,4), \\ (4,1), & (4,2), & (2,4), \\ (3,2), & (2,3) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(F_{1b2}) = 11 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

Assim, a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas de acordo com a situação b_2) será:

$$P_{1b2} = \frac{n(F_{1b2})}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

- 3º) $E_{1c} = \{(4,5);(5,4)\}$.

Obriga as pretas a deixarem duas fraquezas – uma na casa 19 e outra na casa 20 –, porque movimenta-se uma peça da casa 19 para a 24 e outra da casa 20 para a 24. As brancas podem capturar as duas peças com as formações:

$$F_{1c} = \left\{ \begin{array}{lll} (3,3), & (1,3), & (3,1), \\ (2,1), & (1,2), & (2,4), \\ (4,2), & (4,3), & (3,4), \\ (3,2), & (2,3) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(F_{1c}) = 11 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

Assim, a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas de acordo com a situação 3º) será:

$$P_{1c} = \frac{n(F_{1c})}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

- 4º) $E_{1d} = \{(4,6),(6,4)\}$

  Obriga as pretas a deixarem duas fraquezas – uma na casa 18 e outra na casa 20 –, já que movimenta-se uma peça da casa 18 para a 24 e outra da casa 20 para a 24. As brancas podem capturar as duas peças com as formações:

$$F_{1d} = \left\{ \begin{array}{lll} (2,2), & (2,5), & (5,2), \\ (2,3), & (3,2), & (2,4), \\ (4,2), & (5,3), & (3,5), \\ (3,4), & (4,3) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(F_{1d}) = 11 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

  Assim, a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas de acordo com a situação d) será:

$$P_{1d} = \frac{n(F_{1d})}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

- 5º) $E_{1e} = \{(5,6),(6,5)\}$

  Obriga as pretas a deixarem duas fraquezas – uma na casa 18 e outra na casa 19 –, visto que movimenta-se uma peça da casa 18 para a 24 e outra da casa 19 para a 24. As brancas podem capturar as duas peças com as formações:

$$F_{1e} = \left\{ \begin{array}{lll} (4,4), & (1,3), & (3,1), \\ (4,1), & (1,4), & (3,4), \\ (4,3), & (4,5), & (5,4), \\ (3,5), & (5,3) & \end{array} \right\}, \text{ onde } n(F_{1e}) = 11 \text{ e } n(U_T) = 36.$$

  Assim, a probabilidade das brancas capturarem duas peças pretas de acordo com a situação e) será:

$$P_{1e} = \frac{n(F_{1e})}{n(U_T)} = \frac{11}{36}.$$

Logo, a probabilidade pedida no problema será:

$$\begin{aligned} P &= P_{E1a} \cdot (P_{1a1} + P_{1a2}) + P_{E1b} \cdot (P_{1b1} + P_{1b2}) \\ &\quad + P_{E1c} \cdot P_{1c} + P_{E1d} \cdot P_{1d} + P_{E1e} \cdot P_{1e} \\ &= \frac{2}{36} \cdot (\frac{8}{36} + \frac{11}{36}) + \frac{2}{36} \cdot (\frac{11}{36} + \frac{11}{36}) \\ &\quad + \frac{2}{36} \cdot \frac{11}{36} + \frac{2}{36} \cdot \frac{11}{36} + \frac{2}{36} \cdot \frac{11}{36} \\ &= \frac{37}{324} \approx 11,42\%. \end{aligned}$$

5 CONCLUSÃO.

O Jogo de Gamão engloba o aspecto lúdico e o raciocínio matemático:

- No contexto lúdico, o Jogo de Gamão tem o potencial de se difundir através das culturas dos povos e do tempo.
- No contexto do raciocínio matemático, seus inúmeros diagramas podem proporcionar uma grande quantidade de diferentes contextos de conjuntos, análises combinatórias e probabilidades. Sendo também possível extrair formação de sequência, PA de 2ª ordem, funções, intervalos de Números Naturais em seus diagramas.

Pelos diagramas e problemas que aqui foram apresentados, pode-se observar que o Jogo de Gamão não conduz a cálculos de probabilidades mais elaborados que passem da simples enumeração dos elementos do evento. Mesmo assim, não se tira o mérito das situações apresentadas e do potencial do jogo para desenvolvimento do raciocínio.

Assim sendo, o Jogo de Gamão é um instrumento de grande valor didático e de pesquisa matemática, bem como de diversão e entretenimento.

REFERÊNCIAS

[1] BELMIRO, Arnaldo. **Gamão:** O Rei dos Jogos e o Jogo dos Reis. Rio de Janeiro: Editora Tecnoprint S.A., 1984.

[2] MICHAELIS: Dicionário de Português Online - UOL. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/>. Acesso em: 25 de outubro de 2015.

[3] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta:** Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

[4] SAVIO, Álvaro. **GAMÃO:** Estratégia e Estatística. Rio de Janeiro: IMF Editora Ltda, 1992.

[5] SECRETARIA DA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Volume 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.