



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-SBM)  
Câmpus de Vitória da Conquista-BA

# Tópicos de Geometria euclidiana em Applets do Geogebra

Antônio Carlos Bastos Sousa

Orientador  
Prof. Dr. Júlio César dos Reis

2015

Sousa, Antônio Carlos Bastos

Tópicos de Geometria euclidiana em Applets do Geogebra/ Antônio Carlos Bastos Sousa - Vitória da Conquista: [s.n.], 2015.

190 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas.

Orientador: Júlio César dos Reis

I.Tópicos de Geometria euclidiana em applets do Geogebra para a educação básica



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA  
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-SBM)  
Câmpus de Vitória da Conquista-BA

# Tópicos de Geometria euclidiana em Applets do Geogebra

**Antônio Carlos Bastos Sousa**

Dissertação apresentada a Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-SBM) do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia Câmpus de Vitória da Conquista

Orientador  
**Prof. Dr. Júlio César dos Reis**

**2015**



# TERMO DE APROVAÇÃO

Antônio Carlos Bastos Sousa

TÓPICOS DE GEOMETRIA EUCLIDIANA EM APPLETS DO GEOGEBRA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Câmpus Vitória da Conquista pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Júlio César dos Reis  
Orientador

Roque Mendes Prado Trindade  
DCET - UESB

Sandra Rêgo de Jesus  
DM - UFBA

**Vitória da Conquista, 17 de Dezembro de 2015**



*À minha família, Aryadna Patrícia e Carlos Augusto, razões do meu viver. Aos que acreditam que a Matemática é mais que uma ciência.*



# Agradecimentos

A DEUS do universo, que criou todas as coisas nos deu o dom da vida e possibilitou que eu chegasse até aqui, meu eterno agradecimento.

À minha esposa Aryadna Patrícia que esteve sempre comigo nesta caminhada me apoiando e incentivando com muito carinho e amor.

Ao meu filho Carlos Augusto, um presente de Deus, que nos trouxe alegria, felicidade, razão de viver e nos transformou em uma família.

À Sociedade Brasileira de Matemática que propiciou este excelente programa de Mestrado, o PROFMAT.

À CAPES pelo financiamento, incentivo e reconhecimento da necessidade do aperfeiçoamento dos profissionais em Educação e em particular dos professores de Matemática em exercício.

Ao Prof. Dr. Júlio César dos Reis que me aceitou como seu orientando.

À Coordenação e aos professores do PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), pela dedicação e trabalho dispensado.

A todos os colegas do curso turma 2014.1, com os quais tive incríveis momentos de amizade, companheirismo e aprendizado.

Ao colega de turma, viagem e estudos Daniel de Jesus Silva com quem dividi muitos quilômetros de estrada, dúvidas, aprendizado e companhia.

Aos meus pais e familiares pelo incentivo.

Aos professores pelo estímulo.

Aos alunos e ex-alunos com quem pude aprender a ser professor na Universidade do Estado da Bahia, Departamento de Ciências Campus VI e no Instituto de Educação Anísio Teixeira em Caetité-BA.

Aos que me ajudaram direta ou indiretamente neste feito, muito obrigado.



*A fé é fundamento do que se espera  
e a prova das realidades que não se veêm.  
Pela fé, foram aprovados os antigos.  
Pela fé, sabemos que o universo foi criado  
pela palavra de Deus, de sorte que do invisível  
teve origem o visível.  
Bíblia Sagrada, Hebreus 11: 1-3*



# Resumo

A ideia norteadora deste trabalho é que o software *Geogebra 5.0* possibilita compilar/gerar miniprogramas denominados *applets* para apresentação, explanação e estudo de conteúdos de Matemática, mais especificamente no campo da Geometria Euclidiana, de forma dinâmica e interativa. Apresenta-se as construções destes *applets* de geometria plana e espacial baseados nos capítulos de livro Matemática: ciências e aplicações, dos autores Iezzi et al adotado em escolas públicas por meio do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2015-2017, com os respectivos textos de definição, propriedades, teoremas, fórmulas e suas representações geométricas usando as janelas 2D e 3D do software. As construções são apresentadas detalhadamente exibindo os comandos e/ou ferramentas utilizadas nas construções por meio de passos com referência cruzada, onde as etapas seguintes elucidarão e farão uso dos passos anteriores. Desta forma os conteúdos são acompanhados com objetos (pontos, retas, planos, botões, seletores, controles deslizantes) e ilustrações (figuras, gráficos, imagens) que podem ser acionados, movimentados pelo operador condicionando-o a intervir nestes objetos, preservando suas propriedades fundamentais e obtendo assim múltiplas representações/cálculos dos mesmos. Têm-se como aporte teórico *Iezzi et al (2013)*, *Giraldo (2013)*, *Gravina(1996)*, *Muniz Neto(2014)*, *Papert (1985)* entre outros os quais tratam do embasamento teórico matemático e/ou apontam o uso softwares matemáticos e/ou tecnologias digitais no ensino de geometria. No desenvolvimento do mesmo busca-se fazer uso da potencialidade, praticidade, usabilidade, portabilidade e funcionalidade dos recursos disponíveis no software de modo a apresentar com clareza, concisão e generalidade os saberes geométricos no plano e no espaço para estudantes do ensino médio.

**Palavras-chave:** Software, Geometria, Geogebra, Interação, Applet.



# Abstract

The guiding idea of this work is that the software *Geogebra 5.0* enables compile/generate so-called mini-programs *applets* for presentation, explanation and study of mathematics content, more specifically in the field of Euclidean geometry, dynamic and interactive way. It presents the buildings of these *applets* flat and spatial geometry based on the chapters of the book Mathematics: science and applications, the authors Iezzi et al adopted in public schools through the National Textbook Program (PNLD) 2015-2017, with their definition of texts, properties, theorems, formulas and their geometric representations using the 2D and 3D windows software. The buildings are presented in detail displaying the commands and/or tools used in construction through steps cross-linked, where the following steps elucidate and make use of the previous steps. In this way the contents are accompanied with objects (points, lines, planes, buttons, dials, sliders) and illustrations (pictures, graphics, images) that can be activated, moved around by conditioning it to intervene operator in these objects, preserving its fundamental properties and thus obtaining multiple representations/calculations thereof. There have as Theoretical input *Iezzi et. al (2013)*, *Giraldo (2013)*, *Gravina (1996)*, *Muniz Neto (2014)*, *Papert (1985)* and others which treat the mathematical theoretical and/or link using mathematical software and/or digital technologies in geometry teaching. The development of it seeks to make use of the capability, practicality, usability, portability and functionality of the features available in the software in order to present with clarity, brevity and generality geometrical knowledge in the plane and space for high school students.

**Keywords:** Software, Geometry, Geogebra, Interaction, Applet.



# Lista de Figuras

1.1	Construções geométricas de questões no <i>Geogebra</i> da disciplina MA13 - Geometria PROFMAT: do autor, 2015. . . . .	27
1.2	Construções geométricas de questões no <i>Winggeom</i> da disciplina MA13 - Geometria PROFMAT: do autor, 2015. . . . .	27
1.3	Construções geométricas de questões no <i>Geogebra</i> janela 2D da disciplina MA23 - Geometria analítica PROFMAT: do autor, 2015. . . . .	28
1.4	Construções geométricas de questões no <i>Geogebra</i> janela 3D da disciplina MA23 - Geometria analítica PROFMAT: do autor, 2015. . . . .	28
2.1	Representação geométrica da somas superior, inferior e da integral definida de $f$ : do autor, 2015. . . . .	33
2.2	Representação geométrica da integral definida de $f$ : do autor, 2015. . . . .	33
2.3	Applet primitivo Introdução à geometria plana: do autor, 2015. . . . .	37
2.4	Conchóide de Nicomedes e a trisseção do ângulo - modelo concreto e computacional: do autor, 2015. . . . .	39
2.5	Dominó de equações quadráticas no formato de Lemniscata - modelo concreto e computacional: do autor, 2015. . . . .	40
2.6	Ferramentas para traçar hipérbolas - modelo concreto de mesa, lousa e computacional . . . . .	40
2.7	Ferramentas para traçar parábolas - modelo concreto de mesa, lousa e computacional: do autor, 2015. . . . .	40
2.8	Janelas de visualização 1 e 2 representando geometricamente e graficamente $y = 5x - x^2$ : do autor, 2015. . . . .	42
3.1	Subseção Introdução: do autor, 2015. . . . .	54
3.2	Subseção Exemplo 1: do autor, 2015. . . . .	56
3.3	Subseção Exemplo 2: do autor, 2015. . . . .	57
3.4	Subseção Exemplo 3: do autor, 2015. . . . .	59
3.5	Subseção Exemplo 4: do autor, 2015. . . . .	62
3.6	Subseção Exercícios - questão 5: do autor, 2015. . . . .	62
3.7	Subseção Exercícios - questão 7: do autor, 2015. . . . .	63
3.8	Seção Semelhança e triângulos retângulos: do autor, 2015. . . . .	64
3.9	Seção Semelhança e triângulos retângulos - exemplo 5: do autor, 2015. . . . .	65

3.10	Seção Critérios de Semelhança entre triângulos: do autor, 2015. . . . .	65
3.11	Seção Critérios de Semelhança entre triângulos - exercício 9: do autor, 2015. . . . .	67
3.12	Seção Semelhança e triângulos retângulos: do autor, 2015. . . . .	67
3.13	Tela do <i>applet</i> referente ao capítulo 12 do volume da coleção em modo offline: do autor, 2015. . . . .	71
3.14	Tela final do <i>applet</i> Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras: do autor, 2015. . . . .	72
3.15	Seção Introdução-tangente: do autor, 2015. . . . .	73
3.16	Seção Seno e Cosseno: do autor, 2015. . . . .	74
3.17	Seção Exercícios: do autor, 2015. . . . .	76
3.18	Seção Arcos e Ângulos: do autor, 2015. . . . .	79
3.19	Subseção Ângulo central e medidas da seção Arcos e ângulos: do autor, 2015. . . . .	79
3.20	Seção Comprimento da circunferência: do autor, 2015. . . . .	80
3.21	Seção Comprimento de um arco: do autor, 2015. . . . .	82
3.22	Seção Circunferência trigonométrica: do autor, 2015. . . . .	84
3.23	Seção Seno e cosseno: do autor, 2015. . . . .	85
3.24	Seção Seno e Cosseno: do autor, 2015. . . . .	87
3.25	Seção Relação entre seno e cosseno: do autor, 2015. . . . .	88
3.26	Seção Tangente: do autor, 2015. . . . .	89
3.27	Seção Outras razões: do autor, 2015. . . . .	89
3.28	Seção Início: do autor, 2015. . . . .	90
3.29	Subseção Introdução: do autor, 2015. . . . .	91
3.30	Subseção Teorema dos Senos: do autor, 2015. . . . .	92
3.31	Subseção Introdução: do autor, 2015. . . . .	94
3.32	Subseção Teorema dos Cossenos: do autor, 2015. . . . .	94
3.33	Seção Introdução: do autor, 2015. . . . .	95
3.34	Seção Retângulo: do autor, 2015. . . . .	97
3.35	Seção Quadrado: do autor, 2015. . . . .	97
3.36	Seção Paralelogramo: do autor, 2015. . . . .	98
3.37	Seção Triângulo: do autor, 2015. . . . .	99
3.38	Subseção Área pelos lados e raio da circunferências circunscrita da seção Triângulo: do autor, 2015. . . . .	100
3.39	Subseção Área pelos lados e raio da circunferências circunscrita da seção Triângulo: do autor, 2015. . . . .	101
3.40	Seção Losango: do autor, 2015. . . . .	101
3.41	Seção Trapézio: do autor, 2015. . . . .	102
3.42	Seção Polígono regular: do autor, 2015. . . . .	103
3.43	Seção Círculo: do autor, 2015. . . . .	104

3.44	Seção Setor Circular: do autor, 2015. . . . .	105
3.45	Seção Coroa Circular: do autor, 2015. . . . .	106
3.46	Seção segmento Circular: do autor, 2015. . . . .	107
4.1	Tela de abertura do Geogebra com janelas 2D e 3D: do autor, 2015. . .	109
4.2	Seção Introdução do capítulo 9: do autor, 2015. . . . .	115
4.3	Seção Noções Primitivas: do autor, 2015. . . . .	117
4.4	Seção Proposições Primitivas: do autor, 2015. . . . .	118
4.5	Seção Determinação de planos: do autor, 2015. . . . .	118
4.6	Seção Posição relativa de dois planos: do autor, 2015. . . . .	119
4.7	Subseção Planos paralelos da seção Posição relativa de dois planos: do autor, 2015. . . . .	120
4.8	Seção Posição relativa entre reta e plano: do autor, 2015. . . . .	120
4.9	Seção Posição relativa de duas retas: do autor, 2015. . . . .	121
4.10	Seção Algumas Propriedades: do autor, 2015. . . . .	121
4.11	Seção Ângulo de duas retas: do autor, 2015. . . . .	122
4.12	Seção Retas que formam um ângulo reto: do autor, 2015. . . . .	122
4.13	Seção Retas e plano perpendiculares: do autor, 2015. . . . .	123
4.14	Seção Planos perpendiculares: do autor, 2015. . . . .	123
4.15	Seção Projeções Ortogonais: do autor, 2015. . . . .	124
4.16	Seção Distâncias: do autor, 2015. . . . .	124
4.17	Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015. . . . .	125
4.18	Subseção Formas reais e geométricas da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015. . . . .	125
4.19	Subseção Sólidos geométricos da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015. . . . .	126
4.20	Item Poliedros da Subseção Sólidos geométricos da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015. . . . .	126
4.21	Item Corpos redondos da Subseção Sólidos geométricos da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015. . . . .	127
4.22	Seção Introdução: do autor, 2015. . . . .	128
4.23	Seção Conceitos: do autor, 2015. . . . .	128
4.24	Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015. . . . .	129
4.25	Subseção Prisma Oblíquo da Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015. . . . .	130
4.26	Subseção Prisma Reto da Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015.	131
4.27	Seção Paralelepípedos: do autor, 2015. . . . .	131
4.28	Seção Paralelepípedo retangular: do autor, 2015. . . . .	132
4.29	Seção Diagonal paralelepípedo e volume: do autor, 2015. . . . .	132
4.30	Seção Cubo: do autor, 2015. . . . .	133
4.31	Seção Aplicações: do autor, 2015. . . . .	133

4.32	Seção Princípio de <i>Cavalieri</i> : do autor, 2015. . . . .	134
4.33	Seção Áreas e volume: do autor, 2015. . . . .	135
4.34	Seção Introdução: do autor, 2015. . . . .	136
4.35	Seção Conceito: do autor, 2015. . . . .	136
4.36	Seção Elementos e propriedades: do autor, 2015. . . . .	137
4.37	Seção Pirâmide regular: do autor, 2015. . . . .	137
4.38	Seção Áreas e volume: do autor, 2015. . . . .	138
4.39	Seção Volume: do autor, 2015. . . . .	139
4.40	Seção Tetraedro: do autor, 2015. . . . .	139
4.41	Seção Pirâmides semelhantes: do autor, 2015. . . . .	140
4.42	Seção Tronco de pirâmide: do autor, 2015. . . . .	140
4.43	Seção Introdução: do autor, 2015. . . . .	141
4.44	Seção Conceito . . . . .	142
4.45	Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015. . . . .	143
4.46	Seção Áreas e volume: do autor, 2015. . . . .	144
4.47	Seção Seção Meridiana e cilindro equilátero: do autor, 2015. . . . .	145
4.48	Seção Introdução: do autor, 2015. . . . .	146
4.49	Seção Conceito: do autor, 2015. . . . .	146
4.50	Seção Elementos e classificação: do autor, 2015. . . . .	148
4.51	Seção Áreas e volume: do autor, 2015. . . . .	148
4.52	Seção Seção Meridiana e tronco: do autor, 2015. . . . .	149
4.53	Subseção Tronco e cones semelhantes da seção Seção Meridiana e tronco: do autor, 2015. . . . .	149
4.54	Seção Introdução: do autor, 2015.: do autor, 2015. . . . .	150
4.55	Seção Conceito: do autor, 2015. . . . .	151
4.56	Subseção Observação da seção Conceito: do autor, 2015. . . . .	152
4.57	Seção Seção de uma esfera: do autor, 2015. . . . .	152
4.58	Seção Elementos de uma esfera: do autor, 2015. . . . .	153
4.59	Seção Volume da esfera: do autor, 2015. . . . .	154
4.60	Seção Área da superfície esférica: do autor, 2015. . . . .	155
4.61	Seção Área da superfície esférica: do autor, 2015. . . . .	157
4.62	Seção Cunha esférica: do autor, 2015. . . . .	157
5.1	Propriedades avançadas do objeto com cor vinculada a um valor boole- ano: do autor, 2015. . . . .	160
A.1	Tela do sítio do Geogebra para download: do autor, 2015. . . . .	169
A.2	Tela de download do Geogebra para Windows: do autor, 2015. . . . .	170
A.3	Etapa inicial de instalação do Geogebra: do autor, 2015. . . . .	170
A.4	Segunda etapa da instalação do Geogebra: do autor, 2015. . . . .	170
A.5	Terceira etapa instalação do Geogebra: do autor, 2015. . . . .	171

A.6	Etapa final de instalação do Geogebra: do autor, 2015. . . . .	171
B.1	Tela do sítio do Java para download: do autor, 2015. . . . .	173
B.2	Tela de download do Java para Windows: do autor, 2015. . . . .	174
B.3	Tela de download do Java para Windows: do autor, 2015. . . . .	174
B.4	Etapa inicial de instalação do Java: do autor, 2015. . . . .	174
B.5	Segunda etapa da instalação do Java: do autor, 2015. . . . .	175
B.6	Etapa final de instalação do Java: do autor, 2015. . . . .	175
C.1	Menu de acesso ao Protocolo de construção: do autor, 2015. . . . .	177



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>25</b>
<b>2</b>	<b>PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DO TRABALHO E PRIMEIROS APONTAMENTOS</b>	<b>31</b>
2.1	Motivação para a pesquisa . . . . .	36
2.2	Construção de sequências didáticas e cenários de investigação . . . . .	40
<b>3</b>	<b>A CONSTRUÇÃO DOS APPLETS DE GEOMETRIA PLANA</b>	<b>43</b>
3.1	Elaboração de <i>applets</i> no <i>Geogebra</i> com conteúdos de geometria: definições, notações, teoremas etc . . . . .	44
3.2	Incorporando linguagem e notação usual de Matemática (escrita em $\text{\LaTeX}$ ), botões e comandos avançados (booleanos, Javascript etc) . . . .	45
3.3	Construção digital do capítulo 12 do volume 1 - Semelhança e triângulos retângulos . . . . .	47
3.3.1	Passo 1 - Criando textos . . . . .	48
3.3.2	Passo 2 - Criando botões e posicionando-os na tela geométrica .	48
3.3.3	Passo 3 - Criando caixas para exibir e esconder objetos . . . . .	49
3.3.4	Passo 4 - Programando o botão . . . . .	50
3.3.5	Passo 5 - Criando subseções . . . . .	51
3.3.6	Passo 6 - Vinculando objetos a uma caixa de seleção ativa . . .	51
3.3.7	Passo 7 - Elaborando estrutura da subseção . . . . .	51
3.3.8	Passo 8 - Duplicando objetos na janela geométrica . . . . .	52
3.3.9	Passo 9 - Incluindo segmentos e ângulos na janela geométrica . .	52
3.3.10	Passo 10 - Criando outra subseção . . . . .	54
3.3.11	Passo 11 - Criando polígonos regulares na janela geométrica . .	55
3.3.12	Passo 12 - Nomeando objetos da janela geométrica . . . . .	55
3.3.13	Passo 13 - Textos dinâmicos na janela geométrica . . . . .	55
3.3.14	Passo 14 - Criando círculo dado o centro e um de seus pontos .	56
3.3.15	Passo 15 - Criando retângulos na janela geométrica . . . . .	57
3.3.16	Passo 16 - Exibindo um texto vinculado a uma condição matemática . . . . .	58
3.3.17	Passo 17 - Construindo paralelepípedos em perspectiva cavaleira	59

3.3.18	Passo 18 - Homotetia de uma figura na janela geométrica . . . . .	60
3.3.19	Passo 19 - Construção de exercícios e subtópicos . . . . .	61
3.3.20	Passo 20 - Criando a seção Semelhança entre triângulos . . . . .	63
3.3.21	Passo 21 - Criando a seção Critérios de Semelhança entre triângulos	65
3.3.22	Passo 22 - Elaborando a seção O triângulo retângulo . . . . .	67
3.3.23	Passo 23 - Exportando o <i>applet</i> do Geogebra Capítulo 12 (vol 1) - Semelhança e triângulos retângulos para o GeogebraTube e gerando arquivo para uso off-line . . . . .	69
3.3.24	Passo 24 - Um novo <i>applet</i> - Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras . . . . .	72
3.4	Construção digital do capítulo 13 volume 1 . . . . .	73
3.4.1	Passo 25 - Applet do Capítulo 13 - Trigonometria do triângulo retângulo . . . . .	73
3.4.2	Passo 26 - Construindo a seção "Ângulos notáveis" do capítulo 13 a partir da seção Aplicações do triângulo retângulo do capítulo 12 descrita no passo 24 . . . . .	77
3.5	Passo 27 - Construindo o <i>applet</i> do capítulo 1 "A circunferência trigono- métrica" do volume 2 da coleção . . . . .	78
3.6	Passo 28 - Construindo o <i>applet</i> do capítulo 2 - Razões trigonométricas na circunferência do volume 2 da coleção . . . . .	84
3.7	Passo 29 - Construindo o <i>applet</i> do capítulo 3 - Triângulos quaisquer do volume 2 da coleção . . . . .	90
3.7.1	Subseção Teorema dos senos . . . . .	91
3.7.2	Subseção Teorema dos Cossenos . . . . .	93
3.8	Passo 30 - Construindo o <i>applet</i> do capítulo 8 - Áreas de figuras planas do volume 2 da coleção . . . . .	95
<b>4</b>	<b>A CONSTRUÇÃO DOS <i>APPLETS</i> DE GEOMETRIA ESPACIAL</b>	<b>109</b>
4.1	Passo 31 - Noções iniciais da janela 3D combinada com a janela 2D do <i>Geogebra</i> . . . . .	109
4.2	Passo 32 - Construindo o <i>applet</i> do capítulo 9 - Geometria Espacial de Posição, do volume 2 da coleção . . . . .	115
4.3	Passo 33 - <i>Applet</i> do Capítulo 10 - Prismas, do volume 2 da coleção . .	127
4.4	Passo 34 - <i>Applet</i> do Capítulo 11 - Pirâmides, do volume 2 da coleção .	135
4.5	Passo 35 - <i>Applet</i> do Capítulo 12 - Cilindro, do volume 2 da coleção . .	141
4.6	Passo 36 - <i>Applet</i> do Capítulo 13 - Cones, do volume 2 da coleção . . .	145
4.7	Passo 37 - <i>Applet</i> do Capítulo 14 - Esfera, do volume 2 da coleção . . .	150
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DA PESQUISA</b>	<b>159</b>
5.1	Desafios encontrados na realização . . . . .	160
5.2	Extensões . . . . .	162

5.3	Possibilidades em outros campos da matemática . . . . .	162
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>165</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Instalação do <i>Geogebra</i> offline</b>	<b>169</b>
<b>B</b>	<b>Instalação do <i>Java Runtime Enviroment - JRE</i></b>	<b>173</b>
<b>C</b>	<b>Protocolos de construção de dois <i>applets</i></b>	<b>177</b>
C.1	Protocolos de construção . . . . .	177
C.1.1	Protocolo de construção do Capítulo 8 - Área de figuras planas .	178
C.1.2	Protocolo de construção do Capítulo 10 - Prismas . . . . .	184



# 1 INTRODUÇÃO

Vivemos, na contemporaneidade, em um mundo complexo e desafiador. Por sua vez a sociedade também se apresenta assim, marcada pelo fulcro da competitividade capitalista, que cobra cada vez experiência e saber. Por isso, faz-se necessário considerarmos o processo das construções e dos posicionamentos. Eles não se dão de forma isolada ao contexto histórico, pedagógico e social como um todo.

Pensando-se desta maneira é que este trabalho fora construído. A ideia aqui discutida se refere à forma em que o software matemático denominado *Geogebra* pode ser agregado aos recursos disponíveis nas escolas públicas aos professores de Matemática do ensino médio. E, ainda como o mesmo pode ser utilizado e explorado de modo eficiente para que este apresente o conteúdo de geometria euclidiana da forma como se encontra no livro didático de Matemática nas suas janelas 2D (plana) e 3D (espacial) por meio de ferramentas, objetos e recursos disponíveis neste software.

Logo a proposta apresentada tange as seguintes premissas: Desenvolver um trabalho que apresente possibilidades de uso do software *Geogebra* em toda sua totalidade de modo a restringir o uso de ferramentas e/ou softwares auxiliares para apresentação e explanação de conteúdos de geometria euclidiana, ou seja, todo o conteúdo, exemplo, exercícios e atividades, interativas ou não, serão feitas nos objetos construídos no mesmo; Descrever as etapas realizadas na incorporação do software ao conteúdo de modo a evidenciar sua potencialidade e eficiência neste ramo da Matemática; Apresentar técnicas e métodos eficientes de se utilizar o *Geogebra* no ensino-aprendizagem de geometria euclidiana presente no ensino médio e abordada no livro didático deste nível.

Com base nas experiências enquanto docente da disciplina Matemática nos níveis fundamental, médio e superior e, também estudante de graduação, pós-graduação *latu-sensu* e *strito sensu* se é utilizado e desenvolvido estudos em softwares matemáticos, perpassando pelo *Grafeg*, *Winggeom*, *EigenMath*, *Winplot* e *Geogebra 4*.

Tendo conhecimento prévio sobre o *Geogebra* para a construção de objetos na forma de apresentação de tópicos de conteúdo manifesta-se a vontade em realizar o trabalho de conclusão de curso explanando a incursão a esta experiência, pois já havia idealizado este trabalho desde o primeiro semestre do mestrado e, naquela época, vislumbrava-se a realização em tópicos de Geometria euclidiana plana no *Geogebra*.

De acordo com o seu criador, Markus Hohenwarter (2007), o *GeoGebra* é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido na Universidade de Salzburg, Áustria, para educação matemática nas escolas. Por um lado, o *GeoGebra* é um sistema de geometria dinâmica. Permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas como com funções que podem se modificar posteriormente de forma dinâmica. Por outro lado, equações e coordenadas podem estar interligadas diretamente através do *GeoGebra*. Assim, o software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos; permite achar derivadas e integrais de funções e oferece comandos, como raízes e extremos. Essas duas visões são características do *GeoGebra*: uma expressão em álgebra corresponde a um objeto concreto na geometria e vice-versa.<sup>1</sup>

À primeira vista o software Geogebra se apresenta como um ambiente computacional para o desenvolvimento de exemplos, exercícios e atividades de matemática, principalmente no tocante à representação gráfica, pois o mesmo possui janela gráfica para geometrias plana e analítica, janela algébrica que faz correspondência aos objetos geométricos construídos na janela geométrica, uma janela de computação algébrica simbólica, uma janela para planilhas de cálculos e uma janela de probabilidades. Entretanto com a utilização massiva e exploração de seus recursos se é encontrado diversas possibilidades para o mesmo, dentre elas a construção de miniprograma denominado *applet*<sup>2</sup> que apresenta cada capítulo do livro didático acerca dos conteúdos de geometria euclidiana plana e espacial e os assuntos correlatos como trigonometria na circunferência e razões trigonométricas. Então o trabalho se encaminha para que ao longo do mesmo seja apresentado as construções deste *applets*.

Durante todo o mestrado ao buscar desenvolver objetos geométricos para representar a solução de algumas questões e atividades aprofunda-se o uso dos softwares *Winplot*, *Winggeom* e *Geogebra*. Em MA13 - Geometria I (Geometria Euclidiana), no semestre 2013.2, utilizando os softwares *Geogebra* e *Winggeom*, consecutivamente para

---

<sup>1</sup> Tradução para Português: Hermínio Borges Neto, Luciana de Lima, Alana Paula Araújo Freitas, Alana Souza de Oliveira. Disponível em [http://static.geogebra.org/help/docupt\\_BR.pdf](http://static.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf). Acesso em 14 de setembro de 2015.

<sup>2</sup> *Applet* é um pequeno software que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro programa maior (como por exemplo um web browser), geralmente como um plugin. O termo foi introduzido pelo AppleScript em 1993. No contexto de Java, applets são aplicativos que se servem da JVM (Java Virtual Machine) existente na máquina cliente ou embutida no próprio navegador do cliente para interpretar o seu bytecode. Criados pela Sun em 1995, são geralmente usados para adicionar interatividade a aplicações web que não podem ser geradas pelo HTML. Eles são executados numa "caixa de areia" (sandbox) pela maioria dos navegadores, impedindo-os de acessarem os dados da máquina na qual estão sendo executados. O código do applet é baixado de um servidor web e o navegador ou o embute dentro de uma página web ou abre uma nova janela exibindo a interface do programa. Ele é exibido na página web através do uso da tag HTML `<applet></applet>`, que especifica a fonte e as estatísticas de localização do applet. A localização do applet não pode ser controlada por meio de CSSs. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Applet>. Acesso em 27 de setembro de 2015.

representar figuras planas e espaciais, pois até então o *Geogebra* não possuía janela 3D na sua versão oficial off-line, conforme mostra as figuras 1.1 do *Geogebra* e 1.2 do *Winggeom*.

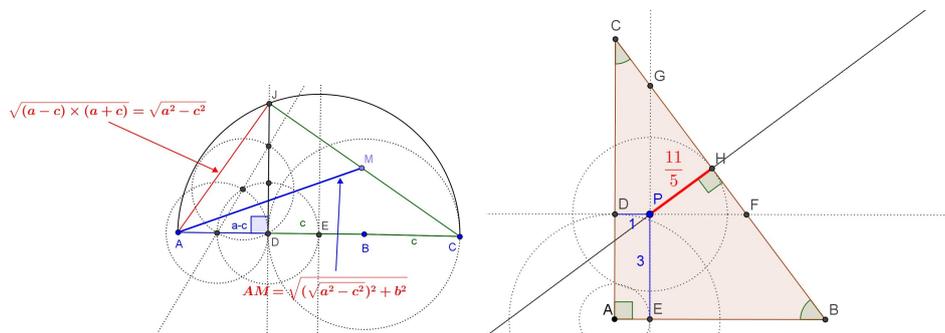


Figura 1.1: Construções geométricas de questões no *Geogebra* da disciplina MA13 - Geometria PROFMAT: do autor, 2015.

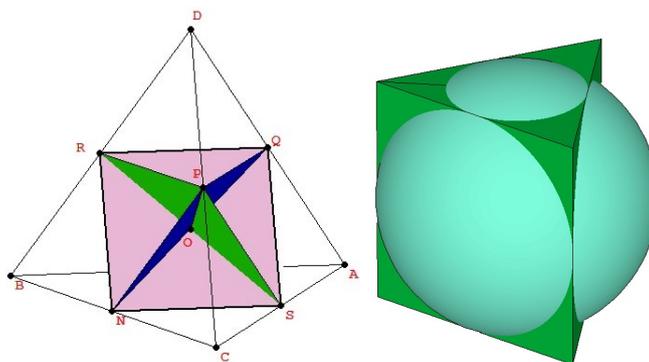


Figura 1.2: Construções geométricas de questões no *Winggeom* da disciplina MA13 - Geometria PROFMAT: do autor, 2015.

Ao cursar as disciplinas MA23 - Geometria II (Geometria Analítica) e MA36 - Recursos computacionais para o ensino de matemática do PROFMAT-SBM fora disponibilizado a versão oficial do *Geogebra 5* no site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) para *download*, o qual possui janela 3D, janela de visualização 2, Janela CAS (Computação Algébrica Simbólica) entre outros recursos adicionais em relação às versões anteriores.

Desta forma foi-se explorada para fins de reconhecimento e investigação a janela 3D para a solução de atividades previstas na referida disciplina, usando para isto tanto a janela de visualização 2D (plana) quanto a janela de visualização 3D (espacial) como mostra as figuras 1.3 e 1.4. Com esta versão foi-se finalmente afirmado o interesse em desenvolver objetos no referido software para a abordagem de conteúdos do ensino médio.

Assim, ao definir o objeto de estudo do trabalho "Tópicos de Geometria Euclidiana em *applets* do *Geogebra*" nos estudos orientados foi-se optado pelo livro didático adotado pela instituição em que atuo para servir de aporte teórico e "recorte" de estudo.

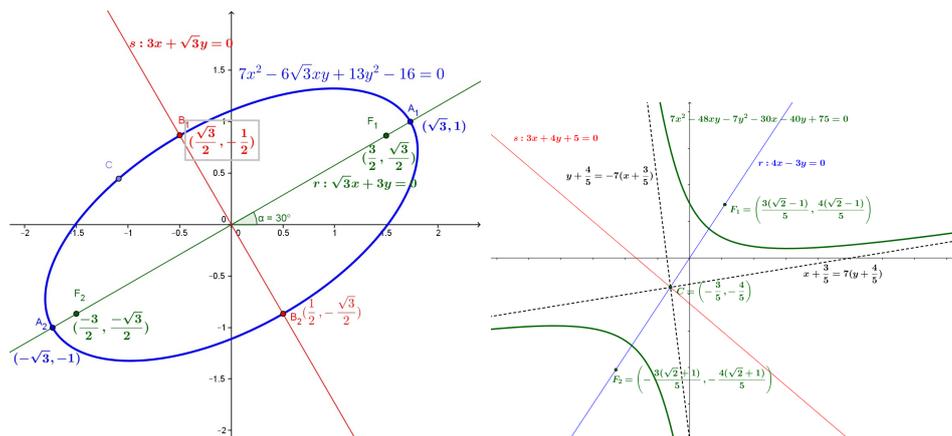


Figura 1.3: Construções geométricas de questões no *Geogebra* janela 2D da disciplina MA23 - Geometria analítica PROFMAT: do autor, 2015.

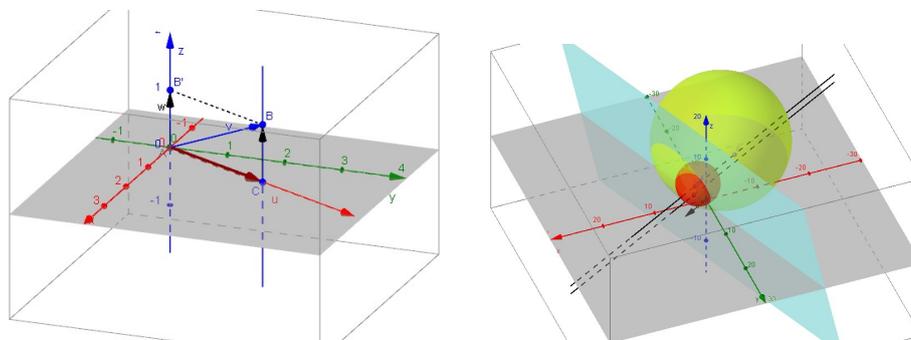


Figura 1.4: Construções geométricas de questões no *Geogebra* janela 3D da disciplina MA23 - Geometria analítica PROFMAT: do autor, 2015.

E, ao mesmo tempo para se definir uma interface gráfica de aplicativo de computador com estrutura prevista para produção dos elementos, definições, propriedades e conceitos geométricos euclidianos (plano e espacial), já que os tópicos aqui a serem elucidados estão presentes em qualquer livro didático publicado para o ensino médio. Desta forma, não limita as possibilidades de utilização e desenvolvimento dos objetos construídos para a coletânea utilizada.

Ao tratar dos objetivos de estudo em itens têm-se:

- Desenvolver um material digital para ensino de Geometria Euclidiana no software *Geogebra*;
- Construir *applets* com tópicos de geometria euclidiana no *Geogebra* usando sua geometria dinâmica com programação sobre os entes geométricos por meio de botões, figuras, textos, controles deslizantes e caixa de seleção;
- Criar atividades e exercícios em ambiente computacional de geometria dinâmica interativa;
- Desenvolver cenários de investigação no referido *software* por meio de objetos

---

interativos explorando suas potencialidades no estudo e aprendizado de tópicos da Matemática relacionados à Geometria Euclidiana.

Esta dissertação apresenta o roteiro de algumas construções de *applets* desenvolvidos durante a pesquisa e, desta forma, mostra de forma ilustrada a construção dos capítulos do livro relativos à geometria euclidiana de modo que as partes dos capítulos (seções) e suas subpartes (subseções) são botões que podem ser acionados pelo operador na própria tela do *applet* orienta ao leitor a reconstruir tais objetos. E, quando o conteúdo se referir a uma definição geométrica serão construídos objetos que podem ser movimentados, girados, transformados e acionados.

Têm-se como proposta explicar o uso do software *Geogebra* na construção de tais objetos e à medida que os constrói, vai-se ensinando como se utilizá-lo e compreender o uso de ferramentas. Em outras palavras, é um estudo orientado no *Geogebra*, onde se ensina a utilizar suas ferramentas, objetos e a explorar sua funcionalidade de forma a conduzir o leitor a reproduzir ações, comandos e a construir tais objetos. Em suma, o leitor ainda que leigo ou inexperiente no software conseguirá construir os passos iniciais e a partir deles os demais para elaborar formas geométricas euclidianas.

Portanto o método utilizado aqui é semelhante a um tutorial (manual) para apresentar ao leitor as ferramentas e os comandos utilizados neste software para se construir aulas de apresentação (slides) que contém a síntese do conteúdo presente no livro didático utilizado na instituição de ensino da forma que lá se encontra em formato hipertexto com interações dinâmicas por meio do mouse em botões, imagens, pontos e elementos geométricos, fazendo uso do potencial da computação algébrica, geometria dinâmica, lógica de programação, scripts nas linguagens *Java* e  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ; e programação orientada a objetos (mini programas) no formato de *applet* que o software oferece. Basta que o dispositivo tenha um navegador de internet para executar os arquivos offline, pois os *applets* construídos no *Geogebra* são executados em navegadores de internet.

A disponibilização dos arquivos em modo *applet* offline (não requer a instalação de programas) será explicada e detalhada neste trabalho e é possível graças a um sistema via web desenvolvidos pelos programadores do referido software denominado *GeogebraTube*, onde estão hospedados diversos recursos e objetos desenvolvidos nele. E, para ter acesso a este sistema se faz necessário a criação de um cadastro que aceita acessos via múltiplos logins (e-mail do *G-mail*, *Twitter*, *Facebook* e/ou *Microsoft*) e permite armazenar, gravar e gerar arquivos em diversos formatos, inclusive em formato *applet* off-line que é a principal meta deste trabalho.

Sendo assim tais *applets* oferecem mais disponibilidade e praticidade, já que não se faz necessário a instalação de programas, acessibilidade e portabilidade para qualquer computador, notebook, celular ou tablet atuais, bastando ter o arquivo offline para se estudar/explorar todo o material/conteúdo e recursos do *Geogebra*.

Inicialmente havia-se pensado em resumir e sintetizar o detalhamento das construções em geometria plana e, ao desenvolver a pesquisa chegou-se a conclusão de que a

janela de visualização (janela 2D) seria utilizada e aproveitada como tela de apresentação dos conteúdos (texto, imagens, fórmulas, botões e controles deslizantes) relativos também aos objetos da geometria espacial. Desta forma todas as construções de geometria plana são necessárias para o desenvolvimento dos *applets* em geometria espacial e a explicação da construção das telas do *applets* acionadas por botões-seção é explicada detalhadamente em passos que orientam a elaboração dos objetos e os vínculos criados entre eles.

E neste caso optamos em enxugar a explicação feita necessariamente sobre o software, pois verifica-se a existência há algum tempo de diversos referenciais na literatura sobre o mesmo para focar na construções dos *applets* desejados e o detalhamento das construções em Geometria Plana, que são mais práticas, usuais e já em desenvolvimento no ambiente do software *Geogebra* há alguns anos, para com isso dar mais ênfase à Geometria Espacial, que é algo novo no *Geogebra* que fora disponibilizado há pouco tempo na sua versão oficial do programa e não possui na literatura estudos e elaboração de objetos sistematizados como os que aqui são apresentados. Em tempo ressalta-se que os *applets* aqui construídos são os conteúdos propriamente ditos, semelhante à forma que se encontram nos livros didáticos. Desta forma, supõe-se que o leitor ou quem tiver acesso a este trabalho saiba realizar comandos básicos e usar o seu computador pessoal.

A estrutura deste trabalho se divide em capítulos sendo o primeiro capítulo referente a introdução à temática que o mesmo aborda, em seguida no segundo capítulo são feitos apontamentos teóricos e metodológicos das ideias/ações que norteiam a discussão sobre o uso de mídias digitais e softwares de geometria dinâmica em particular o *Geogebra* no desenvolvimento de objetos matemáticos no ensino de geometria euclidiana do ensino médio. Nos dois capítulos seguintes explana-se as construções dos *applets* de geometria euclidiana sendo: o terceiro capítulos trata das construções dos mini programas de geometria plana e assuntos correlatos e o quarto capítulo aborda a construção do *applets* de geometria espacial; e se relacionam com a abordagem dos conteúdos (definições, propriedades, leis e teoremas) apresentados em [1].

Por conseguinte, no quinto capítulo se faz a análise em *feedback* das construções dos *applets* tratados nesta pesquisa, onde se é tratado as otimizações e explorações da máxima potencialidade do referido software. O sexto e último capítulo traz algumas considerações sobre o trabalho bem como algumas reflexões sobre o desenvolvimento do mesmo.

Sendo assim, será tratado no próximo capítulo a motivação para a pesquisa e o aporte teórico e metodológico utilizado.

# 2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DO TRABALHO E PRIMEIROS APONTAMENTOS

*A geometria está por toda a parte.*

Platão

Este trabalho de dissertação foi pensado como produto das atividades já realizadas em salas de aula do ensino médio de uma instituição na cidade Caetité-BA, desde 2012 e foram estruturadas como proposta de atividade educacional para o ensino de Geometria euclidiana, área da Matemática presente no ensino médio. Atendendo às normas que regulamentam o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) será apresentado alguns pontos importantes deste trabalho que nortearam as discussões a seguir.

A ideia norteadora deste trabalho é que os *applets* tornam a apresentação/explicação dos tópicos de geometria dinâmicos e interativos, pois em alguns momentos o estudante é convidado a intervir para que se avance no conteúdo e compreenda o que é explicado. Desta forma os conteúdos são acompanhados com formas (pontos, retas, planos, botões, seletores, controles deslizantes) e ilustrações (figuras, gráficos, imagens) que podem ser acionados, movimentados.

Portanto, este trabalho atende às normas do Trabalho de Conclusão de Curso na modalidade 1 (Elaboração de proposta de atividades educacionais). O software Geogebra será um compilador de aulas dentro de sua interface ao inserir o conteúdo por meio das ferramentas de texto, imagem e geométricas permitindo ao usuário navegar no conteúdo através de botões que ao serem acionados exibem o conteúdo na tela e permite interagir com os objetos.

Todos os objetos aqui construídos e detalhados são inéditos e originais, pois nas referências consultadas e publicadas em ambiente livre (internet, revistas e portais de conteúdo) não foram encontradas quaisquer publicações com este teor e contexto e

dos referenciais utilizados para a confecção em sua maioria não detalha como aqui foi feita a construção dos mesmos. É o caso da publicação americana *Exploring Advanced Euclidean Geometry with Geogebra*<sup>1</sup> escrita por Gerard A. Venema que traz alguns exercícios e propostas de demonstração de teoremas (de *Poncelet*, *Ceva*, *Menelaus*, *Perigal* etc ) e o modelo de disco de *Poincaré* para geometria hiperbólica usando as ferramentas do *Geogebra*. Portanto, é um trabalho inédito e original.

Têm-se como objetivo explicar os conteúdos de geometria de forma dinâmica, onde os estudantes possam intervir diretamente na ideia apresentada (teorema, definição, lei, axioma, etc) interagindo com os elementos que o compõem. Nesse sentido, segue como exemplo a relação pitagórica  $a^2 + b^2 = c^2$  onde se é possível atribuir diversos valores para  $a, b$  e  $c$  que satisfaçam a relação e a produzir questionamentos à medida que se interage com o objeto, do tipo: o que acontece se, é verdade que..., entre outras, formular conjecturas e validá-las e permitir por meio da investigação, exploração e questionamentos que o aluno construa/produza o conceito matemático em questão na perspectiva construcionista e pseudointerativa de Seymour Papert e investigativa em cenário de Ole Skovsmose, as quais não serão discutidas por não serem o foco deste texto.

Considerando agora o ambiente do software *Geogebra* para se ilustrar estas ideias, façamos uso da literatura sobre o Cálculo integral e diferencial em [2] (sem demonstrar!) o teorema fundamental do Cálculo e somas de Riemann no intervalo  $[a, b]$ , sendo  $a \leq c_i \leq b$ :

$$\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \leq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^n f(c_{i+1})\Delta x_i \quad (2.1)$$

Sendo  $f$  uma função contínua no intervalo  $[a, b]$  e  $F$  a sua primitiva, constrói-se rapidamente (sua representação geométrica) com poucos comandos no *Geogebra* no campo de entrada escrevendo-se: a função " $f(x)$ " que se deseja representar, os valores de  $A$  e  $B$ , suas somas de Riemann inferior  $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$  e superior  $\sum_{i=1}^n f(c_{i+1})\Delta x_i$  a função  $F$  primitiva indefinida e definida (área compreendida entre o eixo  $x$  e a função) no intervalo mencionado, respectivamente por meio dos comandos diretamente na barra de entrada  (exatamente como está escrito, cada comando está separado por ponto e vírgula!): " $f(x)=1/4(x+1)(x-2)(x+3)+3$ ;  $A=Ponto[EixoX]$ ;  $B=Ponto[EixoX]$ ;  $SomaDeRiemannInferior[f, x(A), x(B), 25]$ ;  $SomaDeRiemannSuperior[f, x(A), x(B), 25]$ ;  $Integral[f, x(A), x(B)]$ ;  $Integral[f]$ ."

À medida em que se digita no campo ou se destaca a exibição do objeto mostrado na Figura 2.1 (pela janela de álgebra) cada uma das expressões (soma inferior, integral e soma superior, respectivamente):

<sup>1</sup> Publicação da editora *Mathematical Association of America (MAA)*. Washington DC - Estados Unidos, 2013.

<sup>2</sup> A função  $f(x) = 1/4(x+1)(x-2)(x+3)+3$  é um exemplo arbitrário e sua integral indefinida é

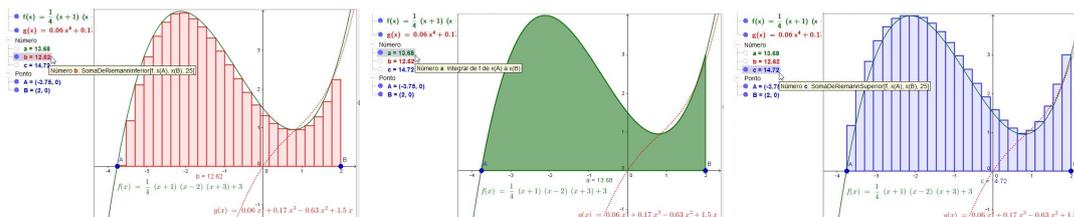


Figura 2.1: Representação geométrica da somas superior, inferior e da integral definida de  $f$ : do autor, 2015.

Obtém-se, após editar as cores na barra de estilos  e movimentar os pontos  $A$  e  $B$  a Figura 2.2. Ou seja, é possível afirmar que no *software* não é exigido muitos recursos gráficos e comandos para se produzir uma representação com esta (a qual demanda muitos elementos geométricos) e a elaboração de novos objetos para se representar uma nova expressão para diferentes valores de  $A$  e  $B$ .

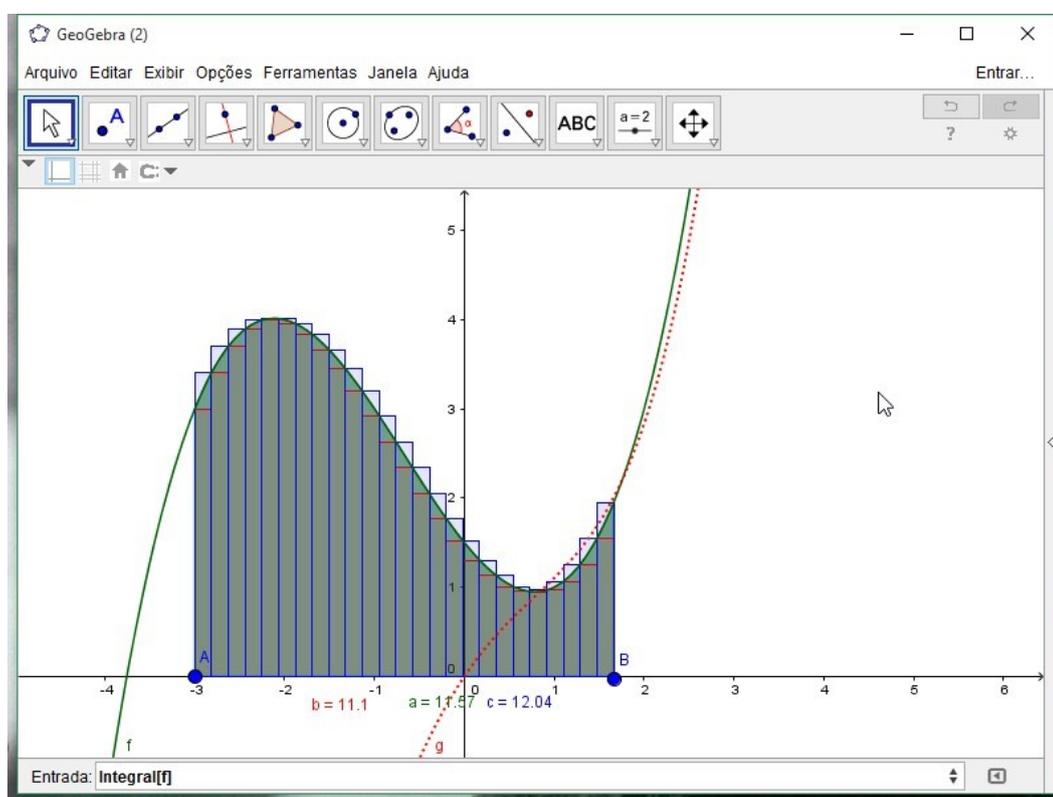


Figura 2.2: Representação geométrica da integral definida de  $f$ : do autor, 2015.

E, por se tratar de uma construção dinâmica ao movimentar os pontos  $A$  e  $B$  temos novas figuras/representações de uma mesma construção (bastando para isto mover os pontos  $A$  ou  $B$  clicando com o mouse sobre os mesmos e/ou definir/reescrever uma outra função  $f$  tal como  $f(x) = \cos(x)$ ,  $f(x) = \sin(x)$ ,  $f(x) = e^{\alpha x}$ , ou quaisquer função exponencial, polinomial, trigonométrica etc), o caracteriza os objetos construídos como um cenário de investigação. Não iremos aprofundar neste conteúdo ainda que os objetos dada por  $F = g$ . Na expressão "SomadeRiemann" "25" é o número  $n$  de partições.

construídos exibam a potencialidade de geometria dinâmica do software pois não é o foco deste trabalho uma vez que pretende-se atingir outro público.

O público alvo são estudantes do ensino médio que buscam aprender tópicos de geometria euclidiana uma vez que está previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - Matemática (PCNEM-MAT) o ensino de geometria plana, espacial e analítica nesta etapa de ensino, bem como nas orientações curriculares do ensino médio do estado da Bahia, Matriz curricular do ensino Médio do Ministério da Educação entre outras instâncias que coordenam e regulamentam o ensino desta área da matemática. E, de forma indireta os professores do ensino de Matemática (médio e/ou superior) que utilizam o *Geogebra* e/ou pretendem aprofundar o seu uso.

Conforme preconiza os parâmetros curriculares nacionais, o *Geogebra* por meio de sua interface tange e avança na importância da linguagem gráfica no entendimento de Matemática e na valorização do cálculo mecânico quando possibilita múltiplas representações do mesmo exemplo. Nesse sentido aponta [3] que

*Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. Este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento.*

De igual modo [4] reitera que as tecnologias da informação e comunicação (TICs) "permitem perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica."

Quanto aos pré-requisitos por parte dos alunos é necessário e suficiente noções básicas de uso de computador e acesso à páginas de internet, já que os *applets* se comportam de maneira similar ao livro didático, pois é uma versão digital do mesmo, e sigam as instruções previstas na tela do aparelho durante o uso. E, por ser um material didático, este deve ser utilizado mediante a orientação de um professor de Matemática.

O papel pedagógico deste material é dar uma abordagem mais ampla dos enunciados previstos em livros didáticos do ensino médio fazendo com que o aluno intervenha diretamente no processo de construção de seu próprio conhecimento. Pretende-se a longo prazo que tais *applets* sirva como material didático digital que, em ambiente computacional, contemple a abordagem do livro e alavanque o entendimento no que diz respeito à generalização e formalização, já que os *applets* serão dinâmicos e as operações/cálculos/representações nele envolvidos serão atualizados instantaneamente.

Para o desenvolvimento das atividades previstas neste trabalho é necessário também que os professores tenham noções básicas de uso do computador (ligar, desligar, abrir e executar arquivo e programas, instalar programas, interpretar e executar comandos) e, para aplicá-las faz-se necessário ao menos uma sala de aula equipada com projetor multimídia-datashow e/ou laboratório de informática e que os alunos saibam utilizar o computador (realizar comandos pelo teclado e mouse, abrir arquivos, programas, etc). Entretanto há versões do referido software para dispositivos móveis com sistemas operacionais (celulares, tablets, ipads) possibilitando assim utilizá-lo com muita portabilidade.

Dentre as dificuldades previstas, espera-se que alguns alunos demorem em realizar o comando/procedimento solicitado, bem como compreendê-lo, ou seja quais ideias matemáticas estão envolvidas implicitamente. Neste momento, orienta-se que o professor chame a atenção do aluno antes de realizar o procedimento, para que ele possa fazer simultaneamente e constatar a sua ação. Outras dificuldades de ordem operacional, do tipo o computador não responde, o programa não aceitou o comando, etc poderão surgir e poderão ser sanadas caso a caso.

Será apresentado uma descrição geral e detalhada de cada atividade e suas etapas, bem como o tempo previsto para a elaboração e desenvolvimento da mesma. Como o *applet* será entendido como o tópico do conteúdo em sala de aula o tempo de uso será equivalente e compatível com o tempo de explanação do conteúdo, resolução de exercícios e etc.

Supõe-se que após a aplicação surjam novos questionamentos acerca da atividade bem como novos caminhos para o uso do *applet*, reformulação e ajuste. Em outras palavras, o uso deste recurso possibilitará a produção de novos exemplos e exercícios, o que indicará a construção de novos *applets* que tenham como base o que foi utilizado para dar continuidade à proposta de uso destes objetos.

Pode-se constatar na prática a partir de um levantamento das pesquisas já realizadas sobre o *Geogebra* que em sua maioria os objetos e ferramentas neles criados são para ilustração e aplicação de um conteúdo ao invés de se incorporá-lo propriamente dito (texto e fórmulas) na forma em que se encontra na literatura. É notável que este software é utilizado para se resolver questões, apresentar definições e suas representações analíticas e calcular algebricamente e numericamente diversas expressões analíticas (algébrica e/ou geométricas), produzir animações, efeitos especiais e transformações geométricas entre outras possibilidades.

Conforme salienta [5]:

*As ferramentas de geometria dinâmica permitem a construção de objetos geométricos de acordo com propriedades ou relações estabelecidas. Estes podem então ser manipulados dinamicamente, de tal maneira que as propriedades e relações sejam preservadas. Esse modo particular de construção*

*geométrica apresenta características especiais, que podem ter consequências importantes para a aprendizagem. Quando um objeto geométrico é representado por meio de papel e lápis, em geral procura-se empregar certas notações para indicar suas propriedades. Portanto, essas propriedades determinam a maneira de se representar, e se fazem notar na representação. Entretanto, o processo de construir uma representação para um objeto em ambientes de geometria dinâmica dispara outra qualidade de reflexão sobre suas propriedades e relações matemáticas.*

A maioria dos trabalhos desenvolvidos apresenta um roteiro de exploração e investigação do software ao tempo que explana a funcionalidade do mesmo e suas ferramentas. Abordam uma metodologia tutorial onde o leitor/operador é instruído quanto aos comandos que deverão ser realizados.

A metodologia deste material é também na forma de tutorial, dividido em passos de construção, os quais apresentam os comandos e botões acionados para se produzir o *applet* com conteúdo didático (textos com definições, notação e exemplos) interativo e dinâmico e é orientada para uso por professores e pesquisadores da área que queiram replicar e/ou reproduzir o material aqui apresentado, bem como disponibilizá-lo para uso fora do software (uso *offline*) para ser usado por estudantes do ensino médio e/ou superior em Matemática e áreas afins.

Entretanto o foco aqui é fazer com que o software funcione como o livro didático e transpasse as limitações existentes no material impresso, como por exemplo ao representar um polígono e sua respectivas medidas de comprimento e área, ao dispor de interação por meios de seus comandos, botões, objetos e ferramentas.

A opção de descrever as construções em passos é para se fazer referência cruzada, ou seja, as construções que dependerem dos passos anteriormente descritos é mencionado o passo que é utilizado ao invés de descrever uma mesma construção mais de uma vez. Então, desta forma, usaremos o software para adequar e inserir o conteúdo e à medida que os objetos forem construídos apresenta-se as ferramentas e os comandos do software que participam na construção.

Como também já foi dito os dois capítulos seguintes são conexos e hipereferenciados em *links* por passos, ou seja, a construção dependerá de passos anteriores e os objetos criados na janela 3D dependerão e terão vínculos com objetos da janela 2D (janela de visualização).

## 2.1 Motivação para a pesquisa

O exercício da docência exige que o professor se empenhe para produzir conhecimento em sala de aula e despertar o saber no educando. Participar com frequência

de cursos de formação continuada e buscar aprimorar cada vez mais a forma que se utiliza para ensinar. Busca-se suporte nas mídias computacionais para ampliar e diversificar as formas de ensino e aprendizagem em Matemática. Ainda no ensino médio SOUSA (2015)<sup>3</sup> resolveu fazer vários cursos de informática para aprender a utilizar o computador.

Posteriormente durante a graduação o mesmo desenvolve diversas atividades matemáticas em software e meu estágio supervisionado do ensino médio na graduação desenvolvi aulas em laboratório de informática utilizando softwares como o *Eigen-Math*, um software de computação algébrica e o *Winggeom*, um software de geometria plana e espacial. A partir desse contato, passa-se a pensar vê-las integrando na prática de professor que ensina Matemática e percebe que os softwares matemáticos e outras ferramentas computacionais como blogs, fóruns quando utilizados de forma planejada e dirigida oferecem um grande potencial para a aprendizagem matemática.

Ja no exercício da docência como professor do Departamento de Ciências Humanas da Universidade do Estado da Bahia, desenvolve nos anos de 2010 a 2014 diversas atividades de laboratório computacional, coordenando um projeto de extensão cujas experiências vividas e geradas serviram de base para construir os materiais aqui apresentados. Durante a atividade de monitoria de extensão foram desenvolvidas ações na versão primitiva de *applets* do *Geogebra* para outros tópicos de Matemática como funções, conjuntos entre outros como mostra a figura que possibilitaram alavancar o estudo, pesquisa e a exploração do software para a construção dos *applets* de geometria euclidiana (plana e espacial) descritos nos próximos capítulos.

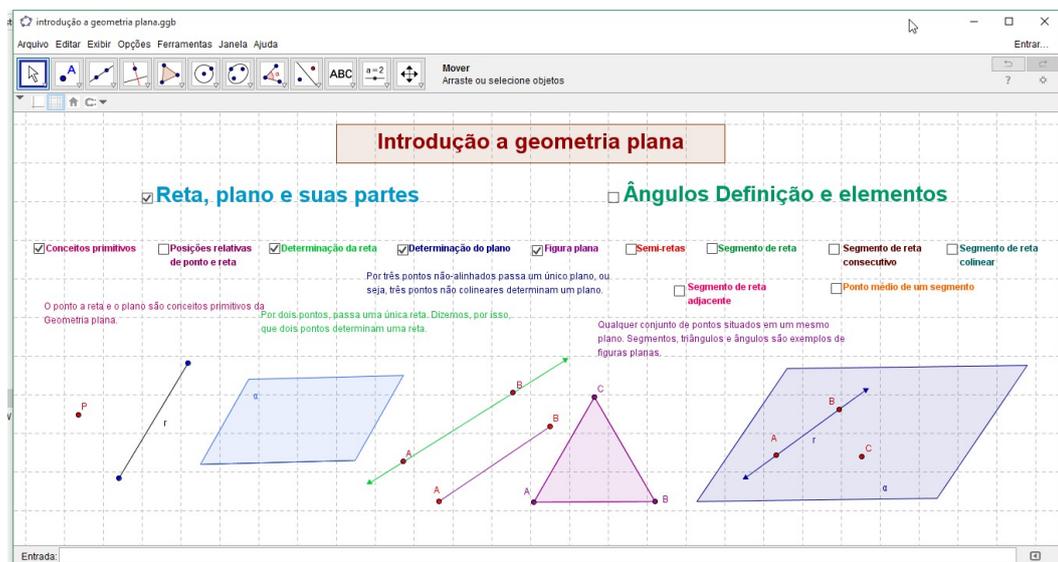


Figura 2.3: Applet primitivo Introdução à geometria plana: do autor, 2015.

Em se tratando dos âmbitos da educação e da contemporaneidade, as tecnologias digitais estão diretamente relacionadas ao modo de vida atual e é praticamente im-

<sup>3</sup> Antônio Carlos Bastos Sousa

possível viver sem elas. Considero importante saber usar e lidar com as tecnologias, principalmente as utilizadas para o campo profissional do educador. Ao lidar com tecnologias de ensino observa-se que há muitas lacunas e diversas formas de abordagem para as práticas educativas e a cada experiência vivida decorre um refinamento na práxis. Desta forma vejo que cursos de capacitação e aperfeiçoamento contribui para ampliar e diversificar as abordagens sobre tópicos matemáticos em ambientes digitais/computacionais.

Ao longo da sua formação docente que avançou-se o interesse em produzir um trabalho como este e para isto tomou-se conhecimento das publicações de diversos autores da área de informática na educação matemática, dentre eles *José Armando Valente*, *Marcelo de Carvalho Borba*, *Mirian Godoy Penteado*, *Seymour Papert*, *Coxford* entre outros e pude escrever um trabalho de conclusão de curso (graduação) sobre esta temática<sup>4</sup>.

Atualmente desenvolvo atividades de ensino e pesquisa em softwares matemáticos de geometria dinâmica e computação algébrica. Durante o curso de mestrado e a experiência profissional no ensino superior me inteirei das publicações de *Vitor Giraldo*, *Maria Alice Gravina* e outros teóricos, as quais me auxiliaram a ter embasamento teórico e metodológico.

Foi de grande valia constatar os trabalhos dos mesmos pois me acarretou desenvolver atividades voltadas para a modelagem matemática computacional em *softwares* geometria dinâmica, planilha eletrônica, computação algébrica etc. Penso que em condições propícias para o desenvolvimento do trabalho, desenvolver uma aula de Matemática em ambiente computacional é motivador, instigante e prazeroso para o professor e educando.

E, ao mesmo tempo, é notório que as tecnologias digitais (calculadoras, televisão, jogos, Internet, softwares, celular) têm influenciado os processos educacionais vigentes e o cotidiano das escolas/universidades e salas de aula de forma muito branda. Não há uma "preocupação" em se usar mídias digitais no ensino e/ou mudar a forma de trabalho para alguns professores. Geralmente tais tecnologias são suporte para as atividades fora do espaço escolar (tarefas de casa, envio de atividades por e-mail, pesquisas) etc.

Até porque muitas das escolas não possuem espaço físico, equipamentos, recursos e materiais metodológicos e didático pedagógicos, técnicos e profissionais que façam manutenção e instalação de peças e programas, de modo a possibilitar aos professores trabalharem somente nestes espaços. Na prática, as escolas públicas possuem um laboratório de informática e poucos computadores para atender todo o seu alunado. Embora ainda que não seja a realidade de outras locais.

Apesar de todas os entraves e dificuldades apresentados, a pesquisa fora motivada

---

<sup>4</sup>SOUSA, Antônio Carlos Bastos. Aplicações Computacionais: o uso dos softwares Eigenmath e Wingeom no aprendizado de álgebra e geometria no ensino médio e superior. Caetité-BA, 2006. Monografia (Graduação em Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática).

por acreditar que a educação emancipa cidadãos e se a mesma se correlacionar com o cotidiano fará com que a mesma tenha e significado na vida dos alunos e professores.

Acredita-se que aprender Matemática e especificamente Geometria, não está apenas no simples ato de copiar e memorizar e sim em construir e reconstruir ideias, fazer e refazer experiências, analisar e comprovar resultados de diversas formas possíveis e assim, interagir com o conhecimento, fazendo com o mesmo tenha significado intrínseco e individual para cada um que o aprende, baseado na experiência vivenciada com o mesmo.

Além disso, na docência do ensino superior lecionei nestes anos a disciplina Softwares Matemáticos e por três semestres as disciplinas Laboratório do ensino de Matemática I e II. Nesta disciplina construí diversas ferramentas matemáticas com material concreto (papelão, isopor, madeira, mdf, plástico, polietileno etc) e digital (via software de geometria dinâmica, plotagem e computação algébrica).

Então já há alguns anos desenvolve e aplica-se atividades construcionistas em que o aluno é convidado, partindo de um conteúdo matemático em estudo, a criar experimentos que abarque as noções matemáticas deste conteúdo e/ou até mesmo objetos e experimentos desenvolvidos por matemáticos no passado tais como mecanismos para traçar curvas, ferramentas de cálculo, modelação de objetos geométricos etc que foram criados para se estudar e/ou resolver problemas. As Figuras 2.4 à 2.7 se referem a alguns dos objetos desenvolvidos com estudantes de graduação ao longo do período docente.



Figura 2.4: Conchóide de Nicomedes e a trisseção do ângulo - modelo concreto e computacional: do autor, 2015.

E daí veio a ideia de se fazer algo que fosse mais presente em sala de aula e também correspondesse exatamente ao conteúdo abordado. Em outras palavras, incrementar aos recursos padrões utilizados no ensino de geometria por professores de Matemática em sala de aula: lousa, pincel, livro didático, régua, compasso, transferidor e material impresso (listas, apostilas, atividades-projeto); miniprogramas (*applets*) de geometria euclidiana relativos aos conteúdos abordado ao longo do estudo deste campo da Matemática no livro didático do ensino médio.

Pensando assim buscou-se verificar o "estado da arte" sobre esta temática em livros

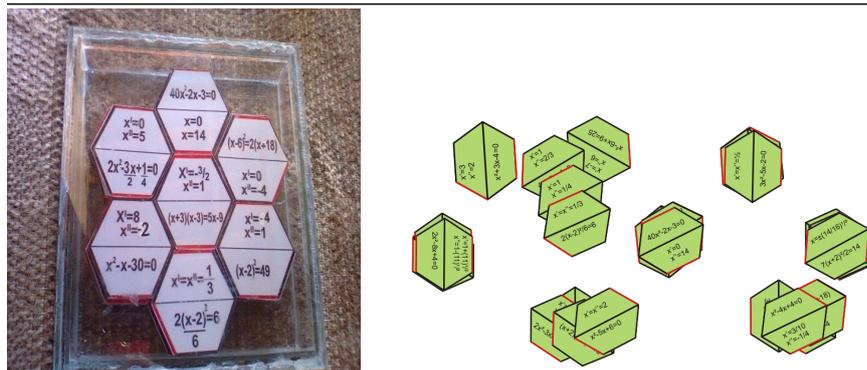


Figura 2.5: Dominó de equações quadráticas no formato de Lemniscata - modelo concreto e computacional: do autor, 2015.

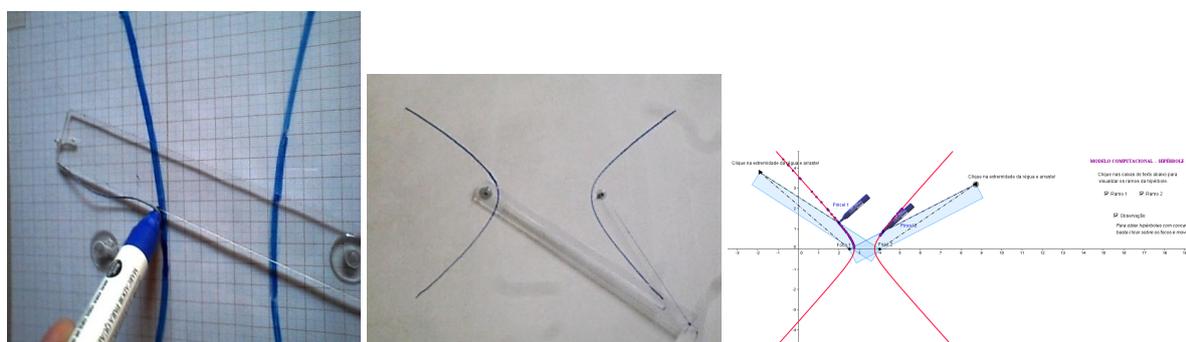


Figura 2.6: Ferramentas para traçar hipérbolas - modelos concretos de mesa e lousa e computacional

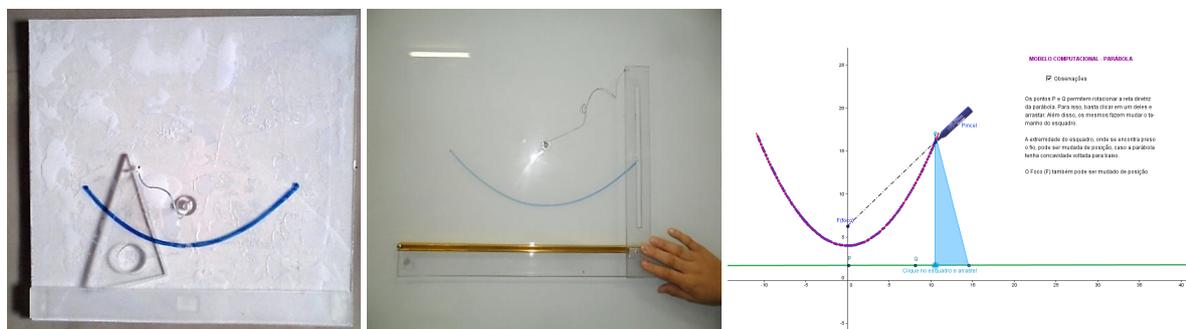


Figura 2.7: Ferramentas para traçar parábolas - modelos concretos de mesa e lousa e computacional: do autor, 2015.

e sítios da internet, os quais serão tratados na próxima seção.

## 2.2 Construção de seqüências didáticas e cenários de investigação

Desenvolveu-se os *applets* explanados neste trabalho inspirados nos trabalhos de Humberto José Bortolossi et al., mais especificamente no seu sítio de internet *Conteú-*

dos Digitais em Matemática para o ensino médio - Universidade Federal Fluminense (UFF)<sup>5</sup> onde disponibiliza diversos materiais e recursos digitais, dentre os quais alguns trabalham com temas que relacionam a Matemática ao cotidiano e uso da mesma em tecnologias tais como computação gráfica, animação de imagens etc.

Outro recurso que serviu de inspiração é denominado *Teoremas de Geometria plana*<sup>6</sup> usando animações, dos autores *Carlos Eduardo Souza Ferreira* e *Maria Alice Gravina*, no qual dois *applets* desenvolvidos em *Flash* traz os principais teoremas de Geometria Euclidiana Plana. Enquanto que nestes *applets* mencionados não há conexão e linearidade do conteúdo da forma como se é trabalhado em sala de aula, os *applets* elaborados neste trabalho seguirão o livro didático e alavancará a possibilidade do usuário obter múltiplos exemplos de um mesmo exemplo ao interagir com os objetos e inter-relacionando diretamente com o livro didático e a sala da aula. Em outras palavras é como se cada capítulo do livro se tornasse um aplicativo, programa de computador, que permite o usuário operá-lo para uma finalidade específica, neste caso, estudar os tópicos de geometria euclidiana trabalhados no ensino médio.

Posteriormente ao conhecer alguns objetos livres disponibilizados no acervo do sítio do *Geogebra* na internet foi-se coletando, analisando e aprimorando os objetos que construía neste programa durante as aulas que ministrava aos alunos de ensino médio e superior.

Nesse sentido ressalta-se [6] que,

*inconformado com a passividade dos sistemas instrucionais, deu bases à teoria construcionista, cuja característica principal é a concretude e, nesse sentido as interações do aprendiz com o computador é voltada para atividades de programação para o desenvolvimento de projetos de investigação ou na resolução de situações-problema fazendo desenvolver a cognição e a metacognição. Graças às ideias de Papert temos hoje ambientes constituídos em ciberespaços onde há colaboração coletiva e mútua na produção de conhecimento compartilhado.*

Surgiu então a iniciativa de se conhecer, estudar e pesquisar o referido software de modo a produzir objetos matemáticos investigativos.

Há algumas situações didáticas em que se faz necessário estudar e investigar o mesmo problema matemáticos de geometria em mais de uma maneira. Para exemplificar tomemos um retângulo de perímetro  $2P$  fixo donde  $2P = 2x + 2y$ , logo  $P = x + y$  cujos vértices estão confinados no plano cartesiano e sendo um deles a origem  $O = (0, 0)$  do plano. A área  $S$  do mesmo é  $S = xy$ . Escrevendo a área do retângulo como um função em  $x$  têm-se  $f(x) = x(P - x) = Px - x^2$ .

<sup>5</sup>Disponível em <http://www.uff.br/cdme/>. Acesso em 28 de setembro de 2015.

<sup>6</sup>Disponível em <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/teoremasgeometria/TeoremasGeometriaplana.htm>. Acesso em 28 de setembro de 2015.

E para isto, no *Geogebra* têm-se a janela de visualização 2 e ao ser habilitada simultaneamente com a janela de visualização permite fazer representação dupla e com interação simultânea de uma mesma construção geométrica e analítica, ou seja em uma das janelas de visualização faz-se a interação como os elementos geométricos (pontos, retas, segmentos, planos etc) e na outra janela se faz o estudo do comportamento gráfico e/ou funcional (analítico) do objeto, como pode ser visto na Figura 2.8.

Então a janela de visualização 1 (padrão) é para representar o retângulo propriamente dito, neste caso delimitado pela reta  $y = P - x$  e os eixos  $x$  e  $y$ , enquanto que a janela de visualização 2 será para representar o gráfico da função área do retângulo, dada por  $f(x) = Px - x^2$ , de modo que ao movimentar os vértices do retângulo na janela de visualização 1 ambos gráficos/figuras/objetos/construções se interagem simultaneamente. Assim temos diversas possibilidades entre a janela de visualização 1 e 2 para análise e interpretação *geogébrica* (geométrica/algébrica): valores máximos e mínimos, decrescimento e crescimento, reta tangente, declividade e derivada da função entre outras. A figura 2.8 representa uma situação para  $P = 5$ .

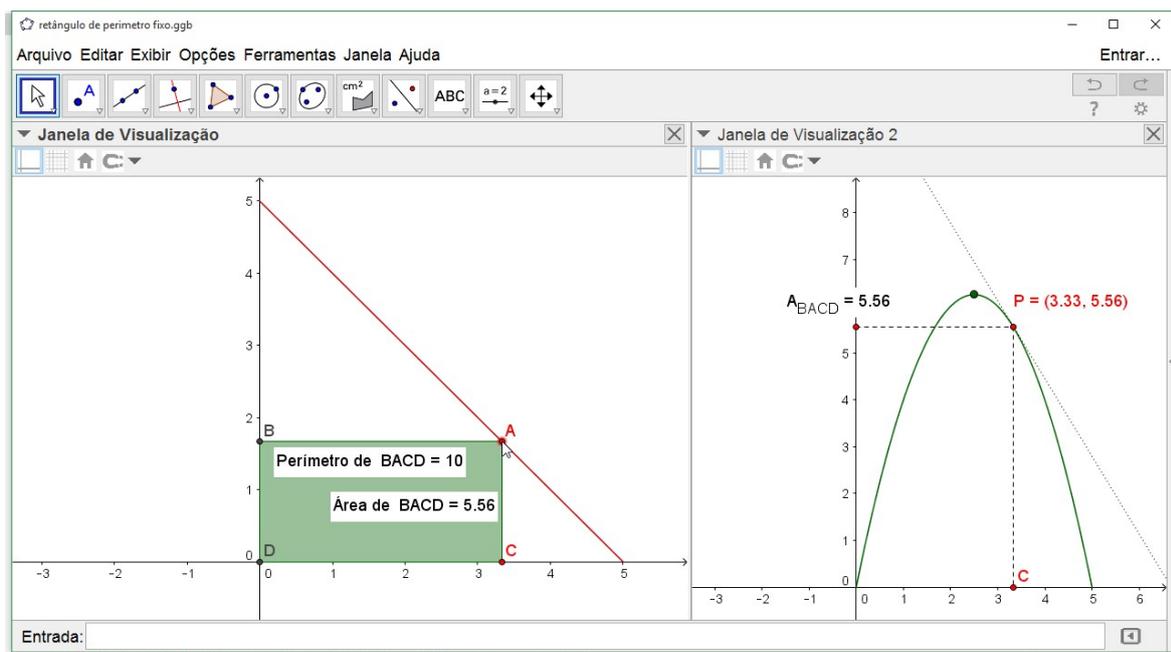


Figura 2.8: Janelas de visualização 1 e 2 representando geometricamente e graficamente  $y = 5x - x^2$  em que  $0 \leq x \leq 5$ : do autor, 2015.

Embora o exemplo acima apresente uma das utilidades de duas janelas de visualização 2D, esta forma de abordagem das ideias em duas janelas servirá de base para se desenvolver os *applets* de geometria espacial no capítulo 4, onde a parte teórica/textual do conteúdo se apresentará na janela de visualização padrão e os objetos geométricos espaciais na janela 3D. Então no próximo capítulo trataremos primeiro os tópicos de geometria plana para construção dos objetos.

# 3 A CONSTRUÇÃO DOS APPLETS DE GEOMETRIA PLANA

*Faz-se necessário adotar a concepção de design educacional como base da prática pedagógica com o uso de tecnologias proporciona a integração de diferentes mídias ao currículo com foco na aprendizagem do aluno, em sua realidade de vida, interesses e preferências de aprendizagem.*

Cavellucci e Valente

Esta dissertação não tem como objetivo ensinar a utilizar o *Geogebra* e tampouco servir de manual para utilização do mesmo. O propósito aqui é apresentar um conjunto de comandos e ações via teclado e mouse na interface do *Geogebra* de modo a produzir um material interativo e didático com uma boa aparência, facilidade de uso e que apresenta as principais noções, definições e exemplos sobre a Geometria Euclidiana do livro didático utilizado, coletânea do ensino médio *Matemática: ciência e aplicações* dos autores *Gelson Iezzi [et al.]*.

O *Geogebra* utiliza-se de um pacote de texto denominado *Latex*. O  $\text{\LaTeX}$  é um pacote feito para a preparação de textos impressos de alta qualidade, especialmente para textos matemáticos. Ele foi desenvolvido por *Leslie Lamport* a partir do programa  $\text{\TeX}$  criado por *Donald Knuth*.

Neste caso quem vier a tomar conhecimento da discussão aqui apresentada necessitará conhecer a literatura sobre o tema, já desenvolver ou ter desenvolvido atividade neste software e estar familiarizado com sua interface e, ainda, conhecer um pouco sobre linguagem  $\text{\LaTeX}$  e comandos em *Javascript*, para que assim possa replicar ou reproduzir as atividades aqui propostas. Nos apêndices trataremos o detalhamento dos pacotes de instalação do Java Runtime Environment que é a "máquina virtual" que processa a linguagem em que o *Geogebra* opera, a instalação e o primeiro uso do *Geogebra* e a utilização do material off-line gerado em HTML dos *applets* aqui feitos.

### 3.1 Elaboração de *applets* no *Geogebra* com conteúdos de geometria: definições, notações, teoremas etc

Nesta parte do trabalho será mostrado como foram utilizados alguns comandos e ferramentas disponíveis no *Geogebra* e alguns scripts de linguagem Java para deixar mais fácil e operacional os objetos criados. Mais especificamente, para cada tópico de matemática a ser trabalhado/desenvolvido de forma ordenada, concatenada e sequencial para dar ênfase ao conteúdo. Em outras palavras, traremos os textos definições, exemplos, notas explicativas, observações e exercícios como botões clicáveis e ativos. Isto é, à medida que o usuário avança na leitura e interpretação será solicitado a sua intervenção e o mesmo clicará nos objetos indicados.

Como o desenvolvimento deste trabalho foi-se pensado para o uso na educação básica na instituição em que o pesquisador atua como docente do ensino médio, a coletânea adotada neste nível de ensino é Matemática: ciências e aplicações, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida, em três volumes, um para cada série/ano, que já vinha sendo utilizado desde 2007 nesta instituição e em 2014 foi escolhido como a coletânea do triênio 2015-2017. Os conteúdos de Geometria euclidiana estão presentes nos dois primeiros volumes: no volume 1 os capítulos 12 - Semelhança e triângulos retângulos e 13 - Trigonometria do triângulo retângulo; no volume 2 os capítulos 01 - A circunferência trigonométrica, 02 - Razões trigonométricas na circunferência, 03 - Triângulos quaisquer, 08 - Área de figuras planas, 09 - Geometria Espacial de posição, 10 - Prisma, 11 - Pirâmide, 12 - Cilindro, 13 - Cone e 14 - Esfera.

Supõe-se que os autores não apresentaram outros tópicos de geometria plana, principalmente as notações iniciais, por fazerem parte do ensino fundamental II e, portanto, contempladas nestas séries. Entretanto, quando necessário, faremos recorrência a estas noções para maior concisão e completude do conteúdo.

Vale ressaltar que não estamos aqui analisando os livros didáticos da coletânea tampouco a diagramação, editoração, formato, abordagem, metodologia etc. Os mesmos foram utilizados para se extrair as definições, teoremas e exemplos e, desta forma, apontar quais tópicos de geometria euclidiana serão feitos os objetos no *Geogebra* e, assim o pesquisador vincular o material presente no livro com o material produzido e, também poder utilizar este material produzido em suas aulas já esta coleção fora adotada pelo PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) 2015-2017.

Para cada capítulo desenvolveremos um ou mais *applets* do *Geogebra* para contemplar o conteúdo, exemplo e exercícios do mesmo. Detalharemos com mais ênfase as construções envolvendo a Geometria espacial, pois pretende-se explorar a maior parte dos recursos disponíveis na janela 3D do software e as exportações dos objetos para o

formato *applet* offline, como já fora dito anteriormente.

O material digital aqui construído e detalhado é uma produção independente, pois não é a cópia na íntegra e traz consigo a estrutura básica do conteúdo da coleção Matemática: Ciência e aplicações, disponível no PNL D 2015-2017 do ensino médio e quem tiver acesso à mesma poderá transitar ideias entre este material e os livros da referida coleção.

Em tempo reitera-se que não se pretende supervalorizar esta coleção nem tampouco seus autores, a mesma está sendo utilizada como referencial apenas por ser uma coleção adotada numa instituição do ensino médio em Caetité-BA nas 3 últimas vezes e de forma consecutiva, como livro didático para as turmas do ensino médio. Ou seja, poderia ter sido qualquer outra obra ou autor e inclusive nível de instrução (médio/superior/pós), pois o foco aqui é explorar, construir e fazer uso das ferramentas do *Geogebra* para o que o mesmo apresente o conteúdo, interaja com as definições, notações e teoremas através de construções dinâmicas e didáticas e que o desenvolvimento do conteúdo através da explanação e interação do professor e/ou aluno seja feita somente no software, sem precisar recorrer a outros programas como os de apresentação (*Power Point, Press, Flash, Prezi* etc), calculadoras ou programas de computação algébrica.

A forma como os *applets* aqui construídos se justificam ao constatar que a maioria dos objetos do *Geogebra* ora são aplicações ou exemplos e exercícios ou quando abordam o conteúdo abordam alguns tópicos apenas, sem continuidade e/ou fechamento. De outro modo, listaremos nos volumes da coleção todos os conteúdos/capítulos relacionados a geometria euclidiana e faremos a construção do material sobre todos eles. Esse é o objetivo e a meta aqui propriamente dita. E, à medida em que se é desenvolvido, reafirma-se o que diz [5] quanto "a importância de precisão com que cada objeto é definido na generalidade de um argumento matemático".

## **3.2 Incorporando linguagem e notação usual de Matemática (escrita em L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X), botões e comandos avançados (booleanos, Javascript etc)**

Inicialmente foram analisados os capítulos do livro [1] correspondentes ao conteúdo de geometria. Em seguida foi-se definida uma estrutura de apresentação do conteúdo que está no livro para ser incorporado no *Geogebra*. Para isto foram criados botões acionáveis correspondentes às seções do capítulo e ao serem clicados apresentam o conteúdo da mesma. Isto se faz necessário, pois todo o conteúdo é exibido na mesma tela, não havendo transição de janelas, como acontece em apresentações por slide.

Outro ponto a destacar é que estaremos seguindo a abordagem dos autores e, quando possível, serão acrescentados elementos no objeto de modo que o torne mais geral,

no sentido de possibilitar uma compreensão mais ampla do conteúdo; investigativo de modo que o usuário realmente produza questionamentos sobre o que e como está aprendendo; e explorativo para possibilitar maior interação e estímulo ao usuário ao aprender o conteúdo.

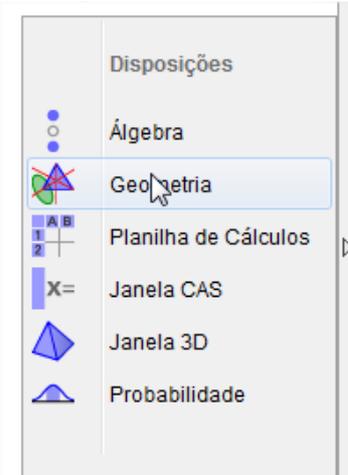
Nesse sentido ressalta-se o que diz [5] que estas atividades

*ilustram como os ambientes de geometria dinâmica, em particular o recurso de arrastar, podem ser explorados para motivar a distinção entre argumentos matematicamente válidos e argumentos empíricos ou indutivos, que implicam logicamente nas propriedades desejadas. Para que estes objetivos sejam atingidos, é fundamental que as conclusões dos alunos sejam fundamentadas em argumentos matemáticos, e não na simples visualização do software. Note que foram incluídas questões chaves nas atividades, com o papel de disparar essa discussão.*

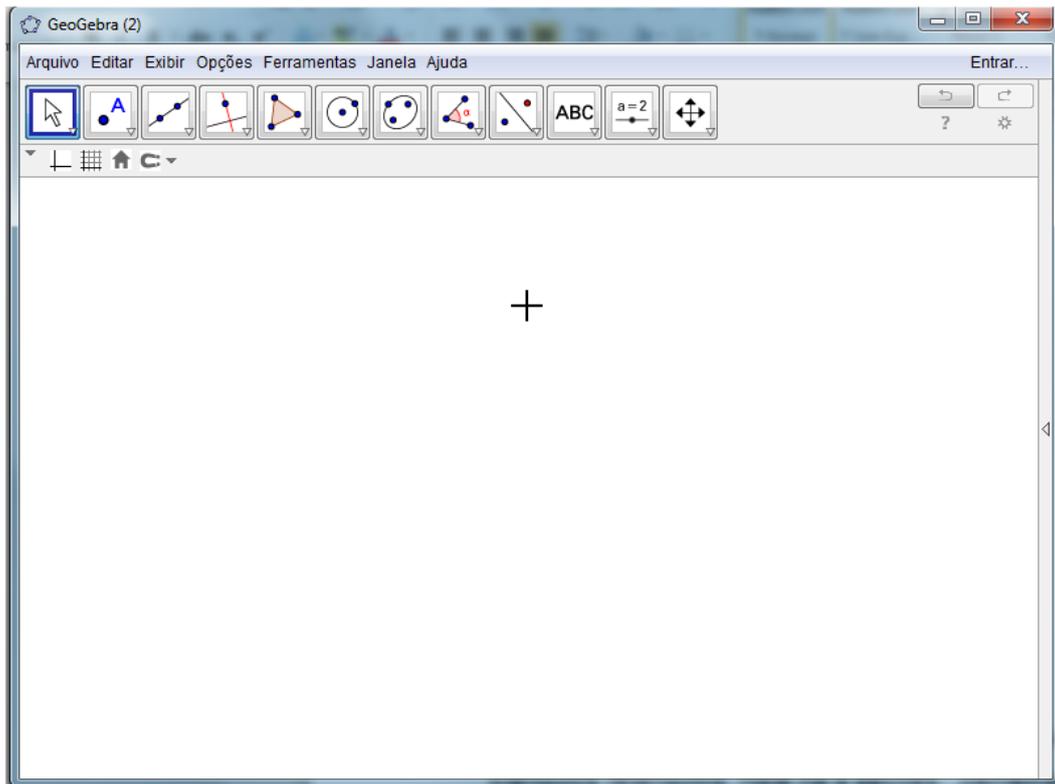
A partir de agora apresentaremos os roteiros de elaboração dos *applets* que são construídos com base nos capítulos dos livros que tratam sobre geometria euclidiana plana e espacial (métrica e de posição). Após baixar e instalá-lo, para iniciar o *Geo-*



*Gebra*, dê um clique duplo no ícone  que executa o mesmo. (A versão utilizada é a 5.0.). Ao abrir o programa na aba mostrada abaixo clique no item Geometria como indicado pela seta do mouse:



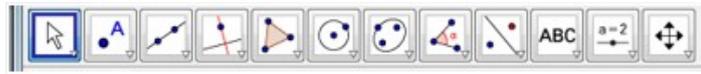
Será exibida a janela geométrica:



A barra de menus:



A barra de ferramentas:



A barra de formatação e propriedades:



Será explanado a utilização destas ferramentas à medida em que forem utilizadas.

### 3.3 Construção digital do capítulo 12 do volume 1 - Semelhança e triângulos retângulos

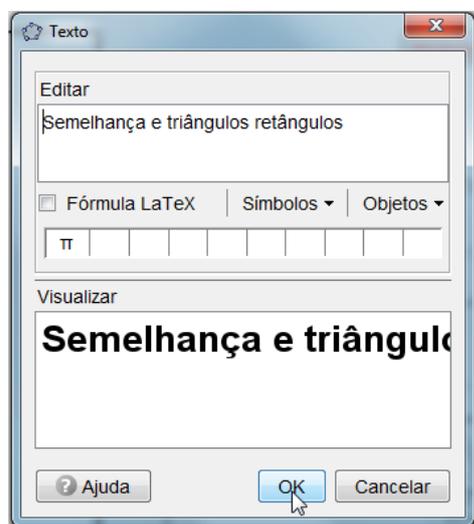
Para se iniciar as atividades começou-se com o capítulo 12 do volume 1, que trata da Semelhança e triângulos retângulos. Nele há 4 seções: Semelhança entre figuras; Semelhança de triângulos; Critérios de semelhança e O triângulo retângulo. Sendo assim o resultado é como mostra a figura a seguir:



Para criar estes objetos (textos e botões) os comandos são:

### 3.3.1 Passo 1 - Criando textos

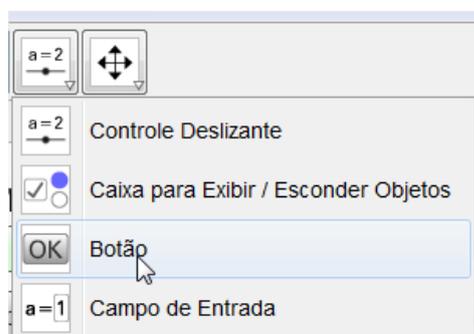
Selecione a ferramenta texto  na barra de ferramentas principal, clique na janela geométrica do software e digite o texto "Semelhança e triângulos retângulos" dentro da janela editar e em seguida pressione o botão OK, conforme indica seta do mouse.



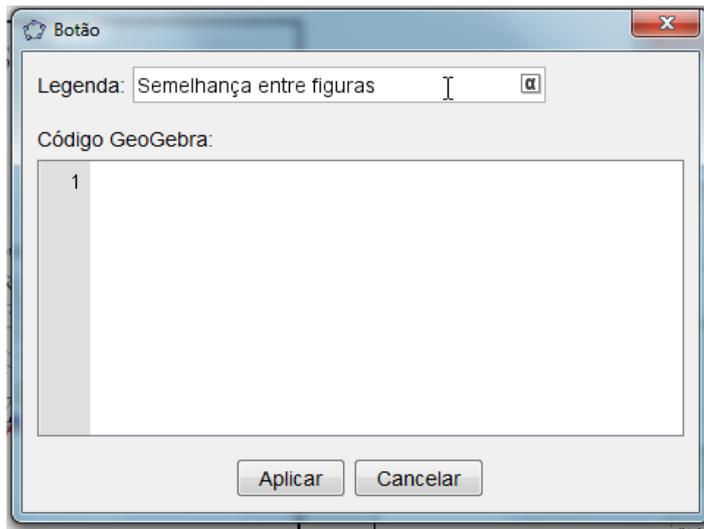
Vale lembrar que os textos que representam definição e enunciados são marcados a opção "Posição absoluta na tela", clicando sobre os mesmos com o botão direito do mouse e selecionando esta opção. Em seguida para se criar qualquer um dos botões é explicado no próximo passo.

### 3.3.2 Passo 2 - Criando botões e posicionando-os na tela geométrica

Clique na ferramenta  no seu canto inferior direito onde há uma seta que fica vermelha, a qual expande a ferramenta exibindo as ferramentas embutidas. Em seguida clique em "Botão" onde está indicado por uma seta na figura a seguir:



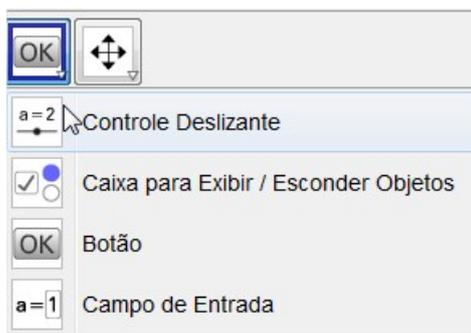
Selecione a ferramenta e clique na tela geométrica do *Geogebra* e será exibido uma janela. Nela, digite o texto Legenda que será exibido no botão na caixa superior. Veja como é o resultado:



Repetindo este passo cria-se os demais botões. Para posicioná-los como se pretende é necessário movê-los. No *Geogebra* a ferramenta que permite selecionar mover e marcar objetos e ferramenta seleção indicada pelo item  .

Sendo assim qualquer objeto criado que necessitar ser alterado, esta ferramenta deve ser ativada. Para isto, basta clicar sobre a mesma usando o mouse e pressionando o seu botão esquerdo.

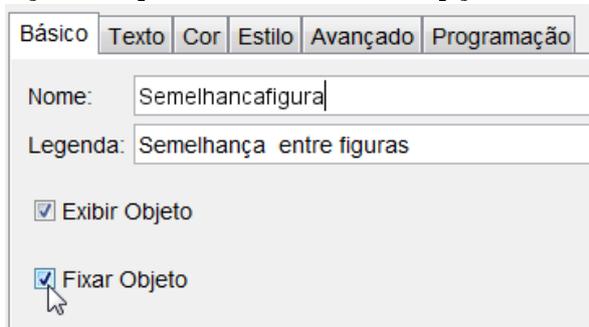
Resta colocar o botão para funcionar como "liga-desliga" e para isto precisaremos de uma caixa de seleção exibir e esconder objetos (ver figura a seguir), disponível na mesma ferramenta anterior. Portanto, cada botão terá uma caixa de seleção para ser acionado.



### 3.3.3 Passo 3 - Criando caixas para exibir e esconder objetos

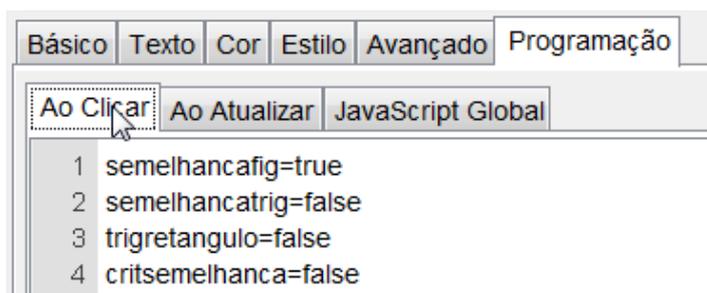
Clique na ferramenta  e clique na janela geométrica. Ao aparecer uma janela na caixa Legenda digite uma abreviação do botão que a acionará. Para o botão Semelhança entre figuras optamos por "semelhancafig". Repetindo este passo para os demais botões foram criadas as demais caixas de seleção: semelhancatrig, critsemelhanca, trigretangulo que serão acionadas pelos botões: Semelhança de triângulos; Critérios de semelhança e O triângulo retângulo, respectivamente. Assim para

que funcione é necessário programar o botão ao ser clicado. Então devemos alterar suas propriedades, clicando com o botão direito do mouse sobre o mesmo e escolhendo o item propriedades. Para começar definiremos o nome do botão e se já estiver na posição adequada marcaremos a opção Fixar objeto, conforme mostra a figura a seguir.



### 3.3.4 Passo 4 - Programando o botão

Na aba Programação definiremos o que o botão vai ativar e desativar, ou seja, quais caixas de seleções exibirão ou esconderão os objetos. No caso do botão da seção Semelhança entre figuras, na aba Ao clicar ficou assim definida:



Ou seja, o botão ativará a caixa de exibir objetos denominada `semelhancafig` e desativará as demais. Para isto digitou-se a atribuição `semelhancafig=true`. Isto quer dizer que a caixa `semelhancafig` está ativa, ligada e as demais equações das outras caixas de exibir esconder objetos com o termo após a igualdade `false` que ficarão desligadas, inativas. Portanto esta rotina fará com que apenas os objetos associados àquela caixa sejam exibidos. Desta forma para ativar uma caixa e desativar a outra basta trocar o termo `false` por `true` e o `true` por `false`.

É viável testar os botões e verificar se apenas uma caixa de exibir/esconder objetos fica ativa. Feito esta rotina, podemos ocultar as caixas de seleção clicando sobre as mesmas com o botão direito do mouse e selecionando o item exibir objeto e, assim, a ocultará. O procedimento é como a seguir:



### 3.3.5 Passo 5 - Criando subseções

Dando continuidade e usando os passos 3.3.1 a 3.3.4 foram criados os botões e as caixas de exibir objetos associados, uma subseção da seção Semelhança entre figuras e os mesmos só serão exibidos quando se clica neste botão:



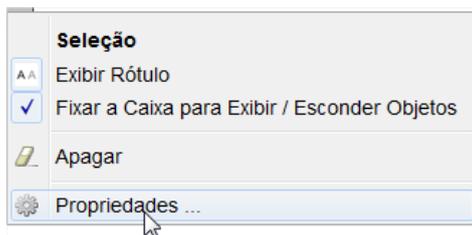
Para isto definiu-se uma condição para exibir estes objetos somente quando a caixa de exibição do referido botão estiver ativa.

### 3.3.6 Passo 6 - Vinculando objetos a uma caixa de seleção ativa

Para vincular os botões criados na subseção à sua seção, selecionaremos estes objetos (botões, textos e elementos geométricos), clicando e mantendo pressionado o botão esquerdo do mouse, arrastando-o e determinando uma região retangular ao redor dos mesmos, como mostra a figura abaixo:



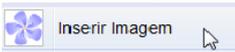
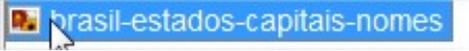
e em seguida clicamos com o botão direito do mouse sobre a região criada e selecionamos o item propriedades

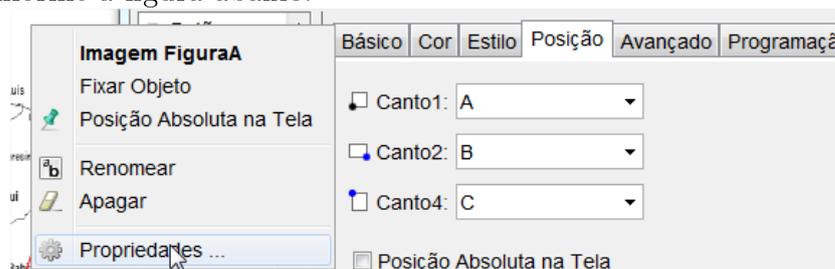


Será exibida uma janela e na aba Avançado digita-se `semelhancafig=true` (o nome da caixa de exibição da seção associada igual a ligada) no item "Condição para exibir objeto". Fazendo isto, estes botões só estarão ativos quando a caixa exibir/esconder objetos estiver ativa. De agora em diante chamaremos de valor booleano qualquer caixa de exibir e esconder objetos, por ser o nome que o *Geogebra* utiliza para esta categoria de objeto.

### 3.3.7 Passo 7 - Elaborando estrutura da subseção

Já temos uma estrutura definida para apresentar o conteúdo. Agora utilizando o Passo 1 digita-se o texto "Cada uma das figuras apresenta, em escalas diferentes, o esboço de um mapa contendo o nome de algumas das capitais brasileiras". No livro é introduzido conteúdo utilizando a distância entre cidades em dois mapas com escalas diferentes. Então cria-se três pontos A, B e C e clicando sucessivamente na tela geométrica em locais distintos, usando a ferramenta . Em seguida, utilizando a

ferramenta  dentro de  e clicando sobre um dos pontos criados na tela geométrica escolhemos a imagem na janela <sup>1</sup> que corresponde ao mapa do Brasil. Precisaremos redimensionar a figura para que seja exibida por completo na tela. Então os cantos da figura serão posicionados sobre os outros dois pontos criados, clicando sobre a figura com o botão direito do mouse, selecionando e clicando em propriedades e abrindo a aba Posição determinando os cantos conforme a figura abaixo.



Apesar de não ser a abordagem aqui tal construção feita até este ponto corresponde no contexto da álgebra linear transformação linear dos vetores  $AB$  e  $AC$  (cisalhamento, rotação e escala-dilatação/contração) ou uma transformação de Moëbius dos números complexos da região delimitada pelos números complexos  $B$  e  $C$  que tem origem do plano complexo o ponto  $A$ .

Retomando a construção, movimenta-se os pontos de modo a obter a melhor visualização da figura (forma ortogonal). Confinar esta imagem em pontos possibilita usar o zoom (roda central do mouse) para ampliar ou reduzir a figura, que fora o objetivo deste passo.

### 3.3.8 Passo 8 - Duplicando objetos na janela geométrica

Se é necessário criar um outro mapa com escala diferente. No *Geogebra* o recurso copiar e colar permite duplicar um objeto ou mais objetos da janela geométrica. Determina-se uma região retangular ao redor dos mesmos, neste caso o mapa e os três pontos que estão nos cantos, pressione as teclas *Ctrl* e *C* e depois *Ctrl* e *V* e escolha o local onde será colado o objeto, basta agora movimentar os pontos que estão no canto e ajustar a escala do mapa.

### 3.3.9 Passo 9 - Incluindo segmentos e ângulos na janela geométrica

De acordo a explicação do livro é solicitado ao aluno que faça a medida da distância entre duas cidades e em seguida meça os ângulos entre três cidades. Neste caso

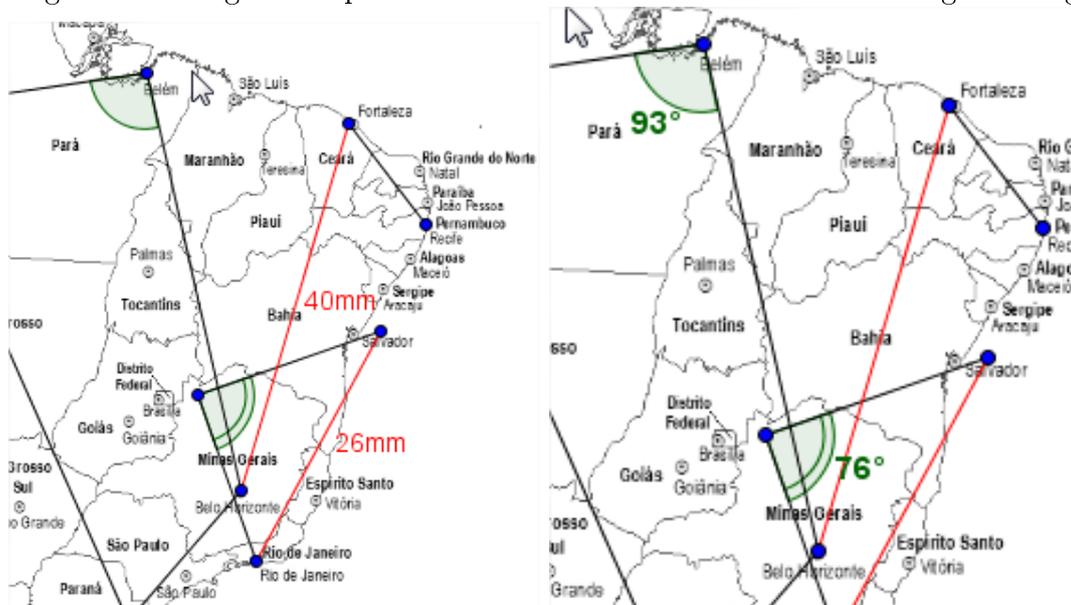
precisaremos criar segmentos usando a ferramenta  e na lista escolha .

<sup>1</sup>Arquivo de imagem obtida em <http://www.mapasparacolorir.com.br>. Acesso em 27/01/2015.

e clicando com o mouse sobre a marcação de duas cidades cria-se o segmento. Serão necessários os segmentos que liguem no mapa as cidades Belo Horizonte-Belém-Manaus-Curitiba, formando um quadrilátero e Belo Horizonte-Rio de Janeiro-Salvador, formando um triângulo e Belo Horizonte-Fortaleza-Recife, formando dois segmentos.

Segundo os autores, o estudante medirá os ângulos com vértice em Belém entre Manaus e Belo Horizonte e com vértice em Brasília entre Rio Janeiro e Salvador. Desta forma, para se criar um ângulo escolha a ferramenta  e clique sucessivamente nos pontos criados sobre Manaus-Belém-Belo Horizonte nesta ordem. Será exibido o ângulo e a sua medida. Da mesma forma clicando sobre os pontos em Rio de Janeiro-Brasília-Salvador cria-se o ângulo com vértice em Brasília.

Como está sendo reproduzido o livro, que já possui uma didática orientada, o mesmo apresenta as medidas das distâncias no mapa bem como os ângulos mencionados. Sendo assim e usando o passo 3.3.1 cria-se os textos destas medidas e posiciona-se ao lado dos segmentos e ângulos respectivamente. O resultado é mostrado na figura a seguir:



Como complementação a abordagem do livro foram criados dois botões: Medindo distâncias e Medindo ângulos e a eles associadas as perguntas (textos): *O que pode concluir a respeito da distância entre as cidades nos dois mapas? Qual a razão de semelhança? O que pode concluir a respeito dos ângulos com vértice na cidade de Belém? E os ângulos com vértice na capital brasileira?* Vale lembrar que estes questionamentos não estão presentes no livro e foram criadas para dar sentido à interação do usuário.

Para concluir esta subseção conforme mostra a Figura 3.1, foram selecionados todos os objetos criados nos Passos 7 ao 9, clicando e arrastando o mouse para se determinar uma região retangular ao redor dos mesmos. Agora todos estes objetos estarão associados ao valor booleano do botão introdução e para isto executa-se o Passo 6 e na janela que é exibida digita-se a condição de se exibir o objeto o texto "intro=true" e pressione OK. Este é o resultado final, lembrando que a coloração dos botões e textos

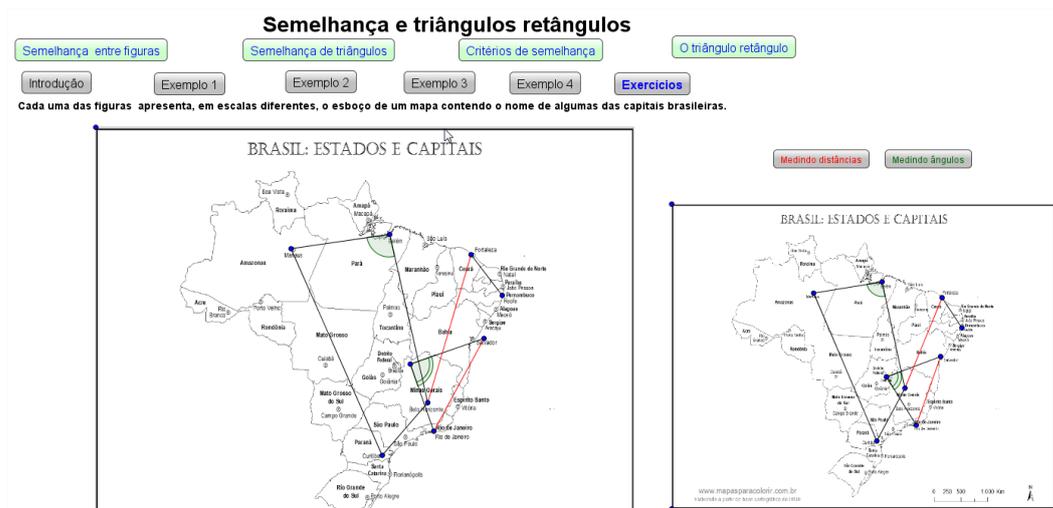
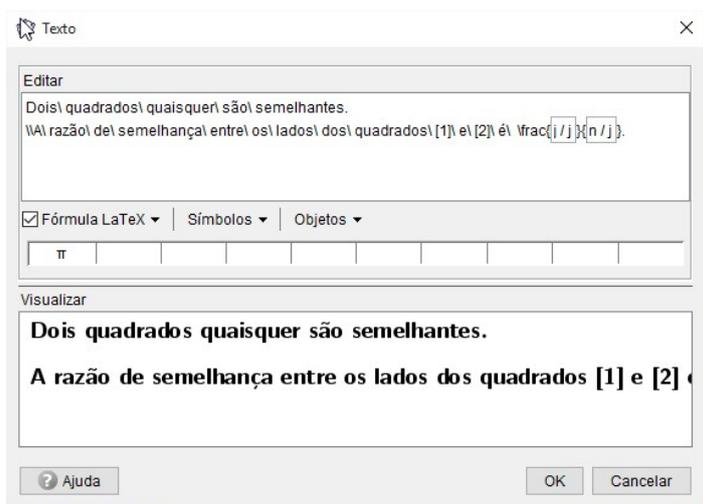


Figura 3.1: Subseção Introdução: do autor, 2015.

fica a critério de quem o faz, na opção Propriedades nas abas Básico, Texto e Estilos.

### 3.3.10 Passo 10 - Criando outra subseção

Terminado esta etapa a subseção introdução está pronta. Sendo assim se clicarmos em Exemplo 1, todos estes objetos ficarão ocultos, para então criarmos os objetos que serão exibidos quando o valor booleano associado a este botão estiver ativo. Seguindo o exemplo 1 do livro, usando o passo 3.3.1 cria-se um texto e ativando a caixa de marcação linguagem  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  na janela de edição digita-se do seguinte modo o texto conforme é exibido na imagem a seguir:



Pressiona-se OK.

### 3.3.11 Passo 11 - Criando polígonos regulares na janela geométrica

Como se trata da semelhança de dois quadrados se faz necessário criá-los, onde vale lembrar que o quadrado é um polígono regular de quatro lados e a ferramenta que utilizaremos é polígono regular disponível em  e clicando na seta vermelha do canto inferior direito escolhendo  Polígono Regular. Em seguida marca-se dois pontos distintos na tela e ao aparecer a janela digite 4, que é o número de vértices do polígono desejado. Repita este passo para se criar o outro quadrado.

### 3.3.12 Passo 12 - Nomeando objetos da janela geométrica

Usando o Passo 1 e clicando sobre um dos vértices de um dos quadrados criaremos os textos "[1]" e "[2]" para cada um dos quadrados exibidos. Usando a ferramenta  editaremos o texto do passo 3.3.10 para que a representação fracionária  $\frac{a}{b}$  exiba valores dinâmicos para a e b. Neste caso selecionamos e apagamos o a e em seguida usando  clicaremos sobre um dos lados do quadrado. Depois selecionamos e apagamos o b e com  clicaremos sobre o lado do outro quadrado. Pressionaremos OK e voltaremos para a janela geométrica.

### 3.3.13 Passo 13 - Textos dinâmicos na janela geométrica

O texto apresentado no Passo 10 possui valores dinâmicos "a" e "b" e ao movimentarmos os pontos dos vértices do quadrado a fração é atualizada seus valores. Caso queiramos valores unitários, basta tomar um dos lados do quadrado como unidade, ou seja, no texto " $\frac{a}{b}$ " trocar "a" por " $l_1/l_1$ ", sendo " $l_1$ " o nome do segmento lado do quadrado e "b" por " $l_2/l_1$ " onde " $l_2$ " é o lado do outro quadrado. Os itens dinâmicos foram incluídos no texto clicando o sobre os mesmos na tela geométrica e/ou clicando na opção "Objetos" e selecionando o item na lista. O resultado é como mostra a Figura 3.2 a seguir:

Na Figura 3.2, alterou-se o formato dos pontos para setas no item Propriedades e na aba Estilos. Ao final selecionamos todos os objetos fazendo um reticulado ao redor deles e utilizando o Passo 6 na aba Avançado digita-se "ex1=true". Até aqui os objetos criados nos Passos 11 e 12 foram vinculados ao booleano "ex1" e exibidos quando o mesmo estiver ativo (ligado) através do botão "Exemplo1". Quanto ao arredondamento das casas decimais dos valores numéricos exibidos está disponível no programa no menu opções, arredondamento, selecionar a quantidade de casas decimais. Desta forma, o exemplo 1 está pronto.

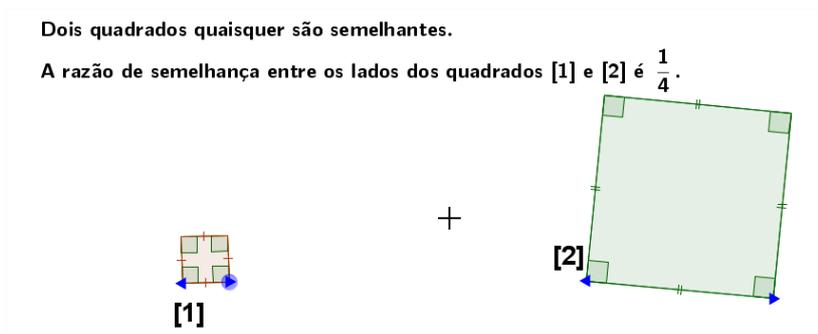
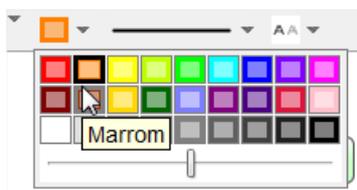


Figura 3.2: Subseção Exemplo 1: do autor, 2015.

O exemplo 2 do livro sugere trabalhar a semelhança entre círculos. Então, na tela do *Geogebra*, clica-se sobre o botão "Exemplo 2" e os demais objetos da tela ficarão ocultos. Os procedimentos a serem utilizados na construção deste exemplo são idênticos ao do "Exemplo 1" e, portanto, usaremos o Passo 10 para criar o texto "Dois círculos quaisquer são semelhantes. A razão de semelhança entre os círculos [1] e [2] é  $\frac{a}{b}$ ". Precisaremos criar dois círculos, que será mostrado como fazer isto no passo a seguir.

### 3.3.14 Passo 14 - Criando círculo dado o centro e um de seus pontos

Na barra de ferramentas clica-se em  e na janela geométrica clica-se em dois pontos. O primeiro ponto criado será o centro do círculo e o segundo será da extremidade do círculo. Criado e selecionado o círculo, usa-se a barra suspensa que fica logo abaixo da barra de ferramentas para definir a cor e a transparência do círculo, selecionando a cor e movendo a barra horizontal como na figura a seguir:



Para terminar esta construção utilizaremos o Passo 1 para nomear este círculo como "[1]". Repetiremos estes passos para criar outro círculo que será nomeado por "[2]". Utilizando o passo 3.3.9 cria-se o segmento para determinar o raio de cada círculo. Em seguida repete-se o passo 3.3.13, clicando-se desta vez sobre os raios dos círculos ao invés dos lados do quadrado. Ao final selecionamos todos os objetos fazendo um reticulado ao redor deles e utilizando o Passo 6 na aba avançado digita-se "ex2=true". Até aqui os objetos criados neste passo foram vinculados ao valor booleano "ex2" e exibidos quando o mesmo estiver ativo (ligado) através do botão "Exemplo 2". Desta forma, o exemplo 2 está pronto e ficará como a seguir:

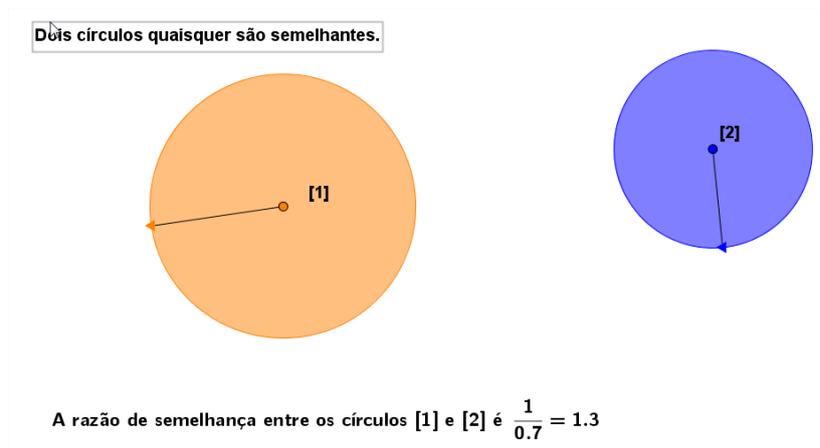


Figura 3.3: Subseção Exemplo 2: do autor, 2015.

Desta forma ao usar a ferramenta seleção e clicar sobre a extremidade de um dos raios e arrastá-lo obteremos diversas formas de representação da razão.

### 3.3.15 Passo 15 - Criando retângulos na janela geométrica

Passaremos para o exemplo 3 do livro que trata da semelhança entre retângulos ao afirmar "Dois retângulos serão semelhantes somente se a razão entre as medidas de suas bases for igual à razão entre as medidas de suas alturas". Clicaremos no botão "Exemplo 3" da janela geométrica para ocultar os objetos já criados.

Para se criar retângulos será necessário: inicialmente usar a ferramenta  disponível na barra de ferramentas e clicar em dois pontos distintos na janela geométrica.

Em seguida usar  para se determinar duas retas perpendiculares à reta dada nos dois de seus pontos já determinados. Neste caso clica-se sobre a reta já criada e depois sobre um de seus pontos. Feito isto repita o processo para criar a outra perpendicular

no outro ponto. Usa-se  para criar um terceiro ponto sobre a reta perpendicular e novamente usando  cria-se outra reta perpendicular neste terceiro ponto. Para de-

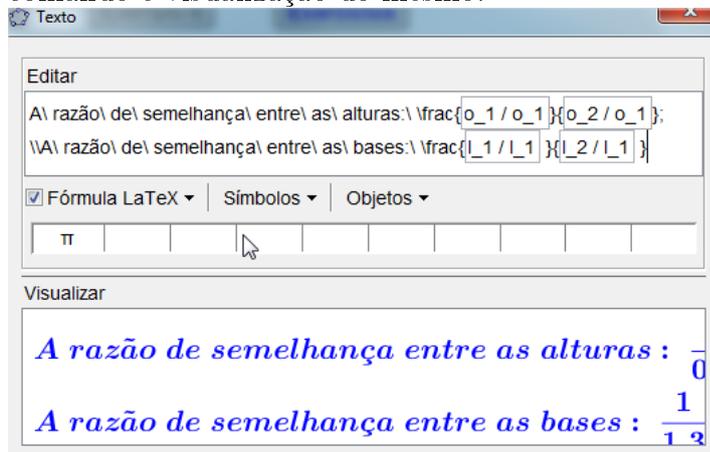
terminar o quarto vértice do retângulo abre-se a lista da ferramenta  clicando sobre a seta inferior direita que ficará vermelha e escolhe-se usa-se  Interseção de Dois Objetos.

Após isso clique sobre as retas que se cortam no quarto vértice. O retângulo está delimitado e falta determiná-lo e usando a ferramenta  e clicando sobre os quatro vértices de forma sequencial e clicando sobre o primeiro vértice fecha-se o polígono.

Com o retângulo criado precisa-se esconder as quatro retas que o originou. Basta clicar com o botão direito do mouse sobre a reta e desmarcar a opção exibir objeto.

Repete-se estes passos para se criar outro retângulo que será utilizado neste exemplo 3.

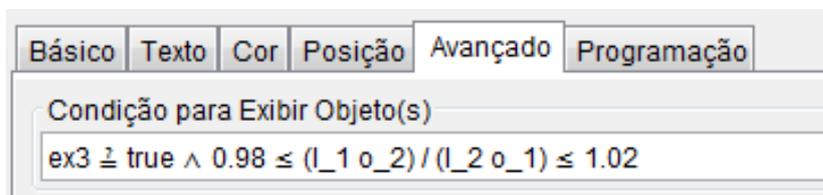
Reutilizaremos o passo 3.3.10 para se determinar as razões de semelhança entre as bases e as alturas dos triângulos em dois textos. De acordo a construção, selecionaremos as bases e as alturas, respectivamente, dos retângulos. A cópia de tela a seguir exhibe o comando e visualização do mesmo:



Na imagem anterior "o\_1", "o\_2", "l\_1" e "l\_2" são base e altura, respectivamente do retângulo e as medidas "o\_1" e "l\_1" foram tomadas como unidade.

### 3.3.16 Passo 16 - Exibindo um texto vinculado a uma condição matemática

Será criado um texto que verifica a semelhança entre os retângulos, repetindo o passo 3.3.1 e digitando "Os retângulos acima são semelhantes". Em seguida, clicando sobre o mesmo com o botão direito do mouse e na aba avançado escrevendo o código que é mostrado na imagem a seguir e pressionando OK:



Este texto verifica a razão de semelhança propriamente dita com aproximação de centésimos, pois a equação da proporção entre os lados  $l_1 * o_2 = l_2 * o_1$  implica em  $(l_1 * o_2) / (l_2 * o_1) = 1$ . Ao final selecionamos todos os objetos fazendo um reticulado ao redor deles e utilizando o Passo 6 na aba avançado digita-se "ex3=true". Até aqui os objetos criados nos Passo 15 e 16 foram vinculados ao booleano "ex3" e exibidos quando o mesmo estiver ativo (ligado) através do botão "Exemplo 3". Desta forma, o exemplo 3 está pronto e explorando as abas cor e estilo e ficará como na Figura 3.4 a seguir:

Dois retângulos serão semelhantes somente se a razão entre as medidas de suas bases for igual à razão entre as medidas de suas alturas.

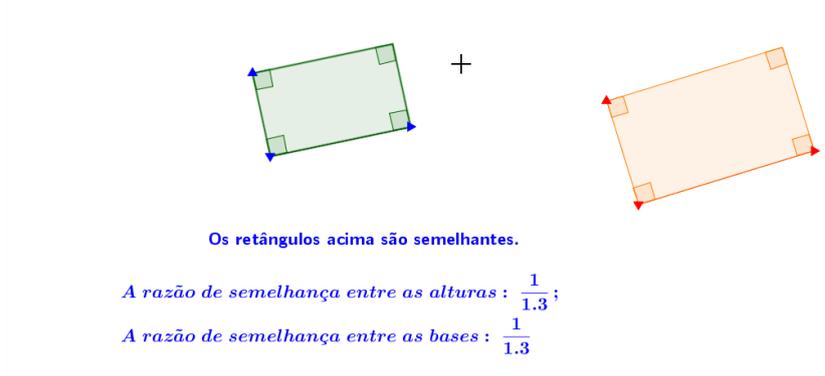


Figura 3.4: Subseção Exemplo 3: do autor, 2015.

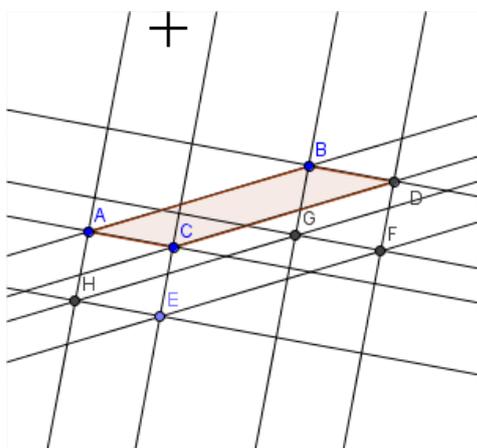
Feito estes passos conclui-se o exemplo 3. No exemplo 4 do livro é elucidado a semelhança entre paralelepípedos retângulos. Para este exemplo serão criados dois paralelepípedos em perspectiva cavaleira a ser tratado no próximo passo. Clica-se sobre o botão "Exemplo 4" para começar sua construção e ocultar as já existentes.

### 3.3.17 Passo 17 - Construindo paralelepípedos em perspectiva cavaleira

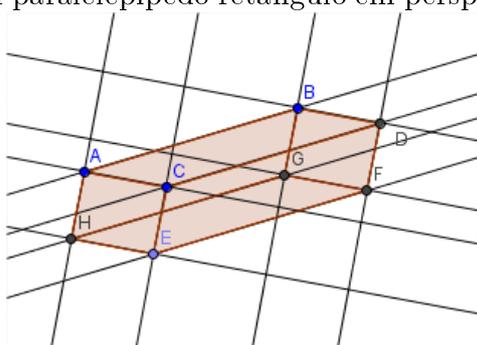
Primeiramente cria-se a base do paralelepípedo usar a ferramenta  disponível na barra de ferramentas e clicar em dois pontos distintos na janela geométrica. Será necessário criar um ponto fora da reta para se determinar o paralelismo. Usa-se  para criar um terceiro ponto e  para determinar a reta que passa por este ponto. Em seguida usar  disponível em  para se determinar duas retas paralelas às retas dadas, clicando na reta e no ponto fora dela. Para determinar o quarto vértice do paralelogramo abre-se a lista da ferramenta  clicando sobre a seta inferior direita que ficará vermelha e escolhe-se  **Interseção de Dois Objetos**. Após isso, clique sobre as retas que se cortam no quarto vértice. O paralelogramo está delimitado, falta determiná-lo. Usando a ferramenta  e clicando sobre os quatro vértices de forma sequencial e clicando sobre o primeiro vértice fecha-se o polígono.

Agora sobre cada um dos vértices determina-se retas perpendiculares a uma de suas retas usando  e clicando sobre cada um dos vértices. Sobre uma destas retas criadas marca-se um ponto e com  determina-se as retas paralelas aos lados do paralelogramo que passam por este ponto. Em seguida usando  **Interseção de Dois Objetos**

marca-se a interseção com as retas perpendiculares aos vértices consequentes. Ao marcar o ponto faça a próxima reta paralela, repetindo isto até obter os oito vértices do paralelepípedo. Até aqui temos:



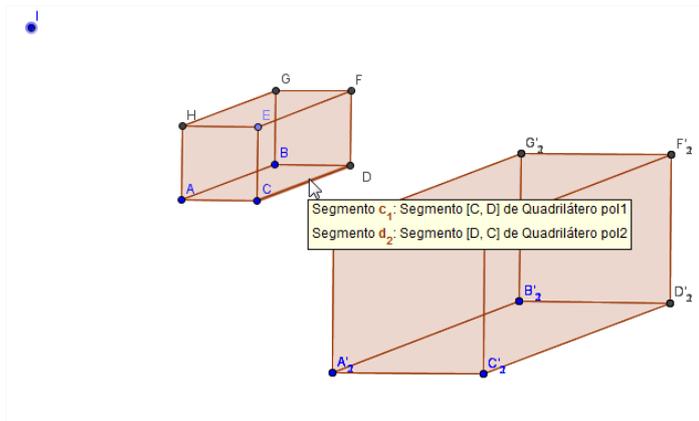
Resta determinar os demais polígonos das faces. Usa-se a ferramenta  e clicando sobre os quatro vértices de forma sequencial e clicando até sobre o primeiro vértice fecha-se o polígono. Escondendo as retas suporte, como explicado no Passo 15 temos um paralelepípedo retângulo em perspectiva cavaleira, conforme mostra figura a seguir:



No livro didático se é calculado as razões de semelhança entre as medidas de largura comprimento e altura e verifica-se que os sólidos são semelhantes. Porém aqui seguiremos o sentido contrário, será dito que os sólidos são semelhantes e será solicitado ao operador que calcule qual a razão de semelhança. Então precisaremos determinar uma homotetia da figura já construída.

### 3.3.18 Passo 18 - Homotetia de uma figura na janela geométrica

Após a construção da figura selecionamos todos os seus objetos criando um reticulado ao redor dos mesmos. Em seguida selecione a ferramenta  em  na barra de ferramentas. Usando a ferramenta seta e com o mouse, clica-se em um ponto qualquer da janela geométrica e em seguida digita-se o fator de homotetia. Aqui foi-se digitado o valor 2, pois no livro a razão de semelhança é 2. O resultado obtido é semelhante à figura a seguir:



Seleciona-se em cada figura os segmentos que determinarão as medidas de largura, comprimento e altura altere suas propriedades para que seja exibido o seu "Valor" (medida) na guia "Básico" em "Rótulo".

Usando o passo 3.3.1 acrescentaremos os textos "Dois blocos de paralelepípedos serão semelhantes se as razões entre as três dimensões de um deles e as correspondentes do outro forem sempre iguais" e "Os paralelepípedos acima são semelhantes. Quais as razões de semelhança: Do maior para o menor? E do menor para o maior?".

Nesse sentido, ressalta-se que o operador interage com as medidas de um dos paralelepípedos mas não altera sua razão de semelhança. Para destacar os pontos móveis é viável alterar suas propriedades de cor e estilo e esconder os demais pontos não móveis. Adiciona-se um texto do tipo "mova os pontos azuis" para indicar quais pontos são arrastáveis.

Após posicionar os objetos adequadamente podemos esconder o ponto do foco da homotetia clicando sobre o mesmo com o botão direito do mouse e desmarcando exibir objeto. Optou-se esconder os vértices não-dinâmicos. Por fim, seleciona-se todos os objetos e clica-se com o botão direito do mouse seleciona-se propriedades e na aba avançado e na célula condição para exibir objeto digita-se "ex4=true".

O resultado será semelhante ao exibido a seguir na figura 3.5:

Até aqui contemplamos todos os exemplos desta seção, os quais são correspondentes ao do livro didático. Trataremos a respeito dos exercícios a partir de agora.

### 3.3.19 Passo 19 - Construção de exercícios e subtópicos

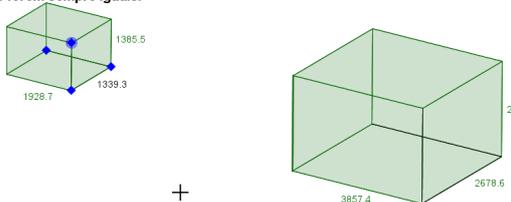
Dentre os exercícios disponíveis no livro optou-se em apresentar os exercícios 5 e 7 do livro e suas resoluções. Então foi-se clicado no botão "Exercícios" para ocultar os objetos já criados. Usando os passos 3.3.1 ao 3.3.5 mencionados anteriormente, cria-se os valores booleanos e os botões correspondentes à "Questão 5" e "Questão 7". Será apresentado o resultado final da construção como mostra Figura 3.6 a seguir para detalhamento da mesma.

**Semelhança e triângulos retângulos**

Semelhança entre figuras   Semelhança de triângulos   Crterios de semelhança   O triângulo retângulo

Introdução   Exemplo 1   Exemplo 2   Exemplo 3   Exemplo 4   Exercícios

Dois blocos de paralelepipedos serão semelhantes se as razões entre as três dimensões de um deles e as correspondentes do outro forem sempre iguais.



Clique e arraste o pontos azuis.

Os paralelepipedos acima são semelhantes.  
Quais a razões de semelhança: Do maior para o menor?  
E do menor para o maior?

Figura 3.5: Subseção Exemplo 4: do autor, 2015.

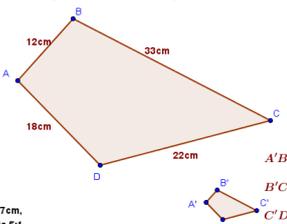
**Semelhança e triângulos retângulos**

Semelhança entre figuras   Semelhança de triângulos   Crterios de semelhança   O triângulo retângulo

Introdução   Exemplo 1   Exemplo 2   Exemplo 3   Exemplo 4   Exercícios

Questão 5   Questão 7

5) Quais as medidas dos lados de um quadrilátero  $A'B'C'D'$  com perímetro de 17cm, semelhante ao quadrilátero ABCD da figura?



Solução:  
O perímetro da figura ABCD é 85cm.  
Como o quadrilátero  $A'B'C'D'$  tem perímetro 17cm,  
os perímetros estão na razão 5 para 1, ou seja 5:1.  
Logo os lados do quadrilátero  $A'B'C'D'$  são como na figura a seguir:

$$A'B' = \frac{12}{5} \text{ cm} = 2,4 \text{ cm}$$

$$B'C' = \frac{33}{5} \text{ cm} = 6,6 \text{ cm}$$

$$C'D' = \frac{22}{5} \text{ cm} = 4,4 \text{ cm}$$

$$D'A' = \frac{18}{5} \text{ cm} = 3,6 \text{ cm}$$

Figura 3.6: Subseção Exercícios - questão 5: do autor, 2015.

Na questão 5 as partes textuais foram criadas usando o passo 3.3.1 e quando necessário habilitava-se a opção da Fórmula  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  (para a representação formal de fração).

Para o quadrilátero usou-se a ferramenta  e clicou-se em quatro pontos distintos da janela geométrica. Usando a potencialidade do software a representação geométrica da solução está na razão indicada na questão e para isto se fez uma homotetia de razão 5 semelhante à descrita no passo 3.3.18. Ao final usando o passo 3.3.6 vinculou-se os objetos criados ao booleano correspondente à Questão 5, que neste caso fora denominado "quest5".

Para a questão 7, clicou-se no botão "Questão 7" para ocultar as construções já existentes e em seguida se fez a construção de um paralelepípedo presente no passo 3.3.18 e, de acordo o enunciado a resolução é para se determinar um outro bloco retangular semelhante ao primeiro à razão 3 e, então a homotetia determinada é de razão 3. Foram realizados os passos de 3.3.1 a 3.3.5 para inserir os textos "7) O bloco retangular mostrado o comprimento mede 8 cm, a largura 2 cm e a altura 6 cm.", "Solução: As dimensões do outro bloco são 3x maiores, ou seja, o comprimento mede 24 cm, a largura 6 cm e a al-

tura 18 cm. ” e  $A \frac{1}{3}$ . “Quais as dimensões desse outro bloco?” sendo este último habilitado a opção ”Fórmula  $\text{\LaTeX}$ ”.

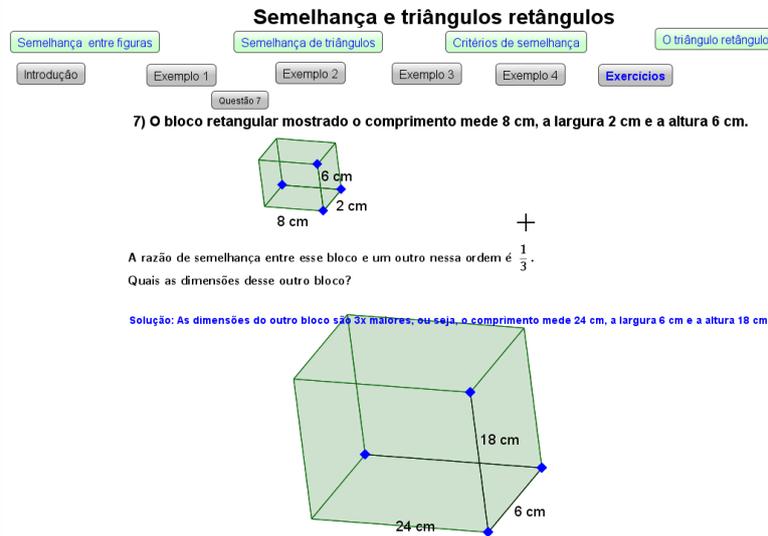


Figura 3.7: Subseção Exercícios - questão 7: do autor, 2015.

Para terminar esta construção, o passo 3.3.6 vincula-se os objetos criados ao booleano correspondente à Questão 7, que neste caso fora denominado ”quest7”. E, para não haver sobreposição de construções devemos incluir os valores booleanos criados no passo 3.3.18 e 3.3.19 na lista presente no passo 3.3.4 dos demais botões com termo ”false” após a igualdade.

### 3.3.20 Passo 20 - Criando a seção Semelhança entre triângulos

Ao se clicar no botão ”Semelhança entre triângulos” a tela é limpada para novas construções. Na seção semelhança entre triângulos serão utilizado os passos 3.3.1 a 3.3.19, mas não necessariamente todos os comandos. Como se deseja dois triângulos semelhantes utilizaremos a ferramenta  para se construir um triângulo qualquer dinâmico clicando com o mouse em três pontos distintos da janela geométrica e usando a ferramenta  e clicando sobre o triângulo já existente será demarcado os ângulos internos.

Clicando sobre as formas ajusta-se sua aparência e a legenda dos botões nas abas ”Básico”, ”Cor” e ”Estilo” da opção ”Propriedades”.

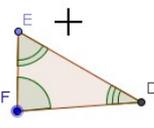
Na construção do triângulo semelhante ao primeiro determina-se um ponto fora do triângulo dado e em seguida usar  disponível em  para se determinar duas retas paralelas aos dois lados do triângulo que passam por este ponto. Para delimitar

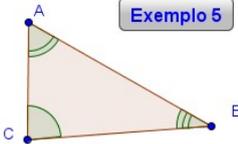
o triângulo marca-se sobre umas destas retas criadas um ponto com  ao clicar sobre a mesma. E novamente usando  determina-se a reta paralela ao terceiro lado do triângulo inicial. Agora usa-se  para demarcá-lo. Ajusta-se sua aparência e a legenda dos botões nas abas "Básico", "Cor" e "Estilo" da opção "Propriedades" desta nova figura. Os elementos textuais explicativos, como os exibidos na Figura 3.8 a seguir são feitos do mesmo modo dos passos anteriores.

**Semelhança e triângulos retângulos**

figuras      Semelhança de triângulos      Critérios de semelhança

Observe que os triângulos ABC e DEF tem a mesma forma.  
É possível colocar um triângulo dentro do outro, de maneira que seus lados fiquem respectivamente paralelos. (mova o ponto F)





Exemplo 5

Daí, podemos estabelecer a seguinte definição:

Dois triângulos são semelhantes quando seus ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Quando dois triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada razão de semelhança.

Daí concluímos a validade do teorema de Tales:

“Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.”

Figura 3.8: Seção Semelhança e triângulos retângulos: do autor, 2015.

Como mostrado na figura anterior, o texto sugere que podemos operar as formas geométricas, movimentando e deformando-as a rigor. Ainda foi incluído um botão com respectivo valor booleano relativo ao exemplo 5 presente no livro (e incluído na lista de programação dos demais botões) conforme está na Figura 3.9 e construído sua pergunta e resolução:

A figura triângulo fora construída como usando os comandos apresentados neste passo e os textos usando o Passo 1 e a opção linguagem  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ligada. Os textos ora digitados são "Na\figura\abaixo,\sendo\TS\//\QR,\qual\é\ a\medida \dos \segmentos \US \e \UR?" "Solução: \\\frac{TS}{QR}=\frac{US}{US+4}=\frac{9}{12}\ \Rightarrow US=12.\Logo,\UR=US+4=16."

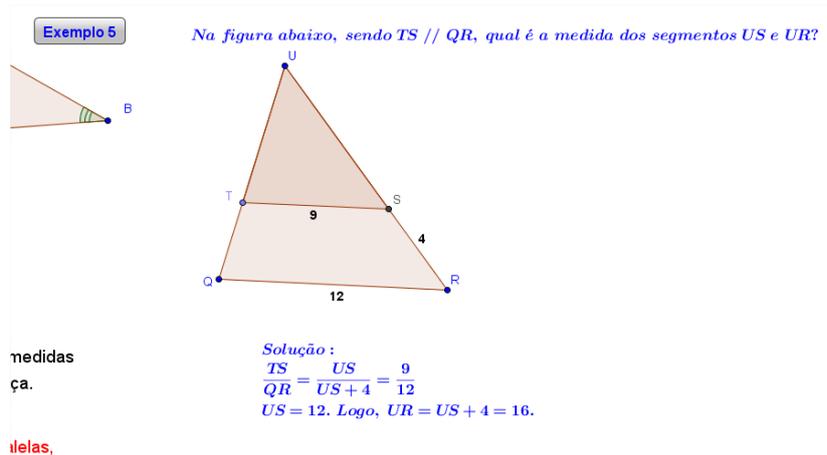


Figura 3.9: Seção Semelhança e triângulos retângulos - exemplo 5: do autor, 2015.

### 3.3.21 Passo 21 - Criando a seção Critérios de Semelhança entre triângulos

Será exibida inicialmente a tela de construção final (Figura 3.10) para explanar apenas os comandos realizados nesta seção que ainda não foram mencionados.

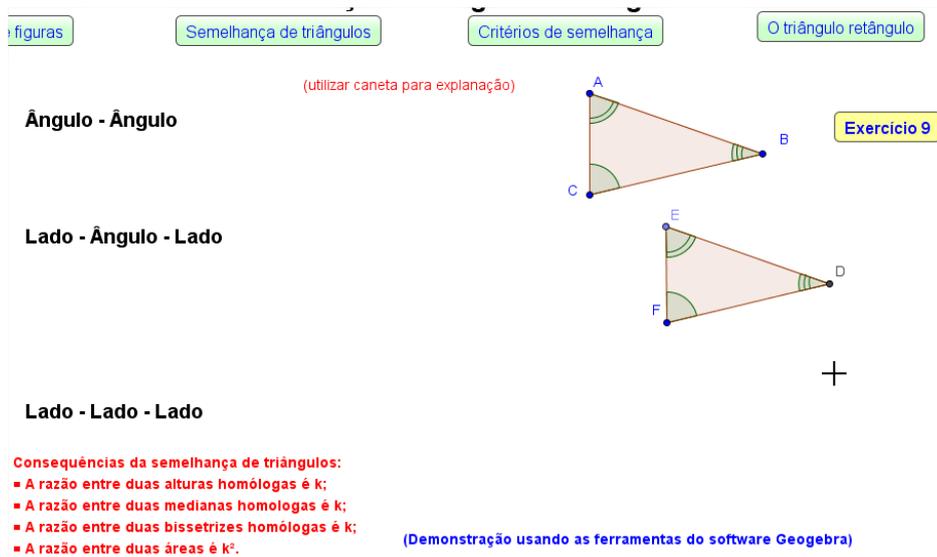


Figura 3.10: Seção Critérios de Semelhança entre triângulos: do autor, 2015.

As figuras triangulares foram construídas e formatadas como na seção anterior, passo 3.3.20. Nesta seção, sugere-se utilizar a ferramenta caneta de mão livre , em  para escrever na tela geométrica ou o operador poderá optar por usar as ferramentas  Segmento em ,  Ângulo com Amplitude Fixa em  e marcar dois ângulos com medida conhecida, um em cada extremidade do segmento para demons-

trar os casos ângulo-ângulo e lado-ângulo-lado. Novamente usando a construção do polígono e homotetia descrita no passo 3.3.18 para demonstrar o caso lado-lado-lado. Os textos são inseridos como no passo 3.3.1.

Usando as mesmas ferramentas já mencionadas é possível demonstrar as consequências da semelhança entre as alturas usando , selecionando o lado do triângulo e o vértice oposto. Em seguida com  Interseção de Dois Objetos marca-se a interseção com o lado oposto ao vértice e usando  Segmento determina-se a altura relativa da base ao vértice. Para a consequência das medianas usa-se  Ponto Médio ou Centro em  clicando sobre as extremidades dos segmentos do triângulo, dois a dois, ou sobre os mesmos segmentos e, em seguida, usando  Segmento marcar um segmento que liga o ponto médio ao vértice oposto. Para a consequência das bissetrizes usar a ferramenta  Bissetriz em  e clicar sobre os vértices do ângulo.

Por fim, a razão entre as áreas é feita pelo produto das razões entre as bases e as alturas relativas. Caso o professor queira exemplificar numericamente poderá usar as ferramentas  Distância, Comprimento ou Perímetro e  Área para comprimento e área respectivamente, clicando com o mouse sobre os segmentos e/ou polígonos.

Buscando interagir ainda mais com o livro foi-se criado o botão para o exercício 9. Seguindo os passos 3.3.1 a 3.3.10 para criar esta subseção e apresentar a solução. Para que os triângulos com vértice comum fossem semelhantes usou-se consequentemente alguns comandos dos passos 3.3.19 e 3.3.20 (determinar segmento, marcar um ponto sobre o mesmo, determinar uma reta que passa por este ponto, definir um triângulo e traçar uma reta paralela em um ponto e marcar a interseção entre retas e por fim definir o triângulo).

Serão necessários dois objetos deste e para isto selecionaremos todos os itens e pressionaremos Ctrl+C e Ctrl+V sucessivamente. Alteramos e ajustamos o texto do segundo objeto criado. Ao final vincular a exibição da construção ao valor booleano referente ao Exercício 9. A construção alcançada após estes passos é como a figura 3.11:

Sendo observado que as construções sobre os conteúdos e/ou definições são mais interativas que os exercícios resolvidos optou-se a partir daqui destacar apenas as construções sobre os conteúdos. E quando for necessário resolver uma questão o operador poderá optar em abrir uma nova janela do programa e elaborar um objeto que atenda ao quesito por meio dos passos aqui elucidados.

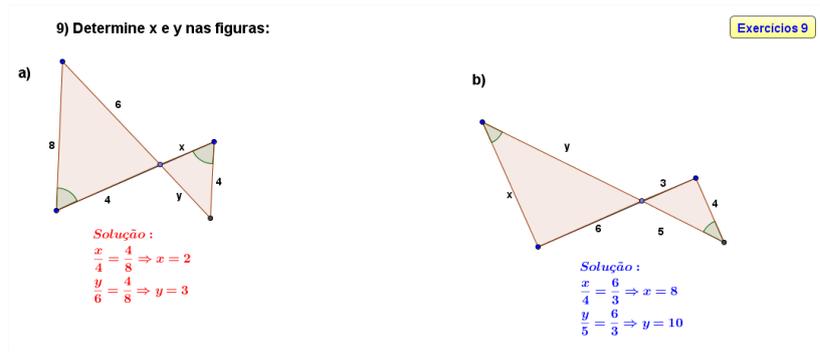


Figura 3.11: Seção Critérios de Semelhança entre triângulos - exercício 9: do autor, 2015.

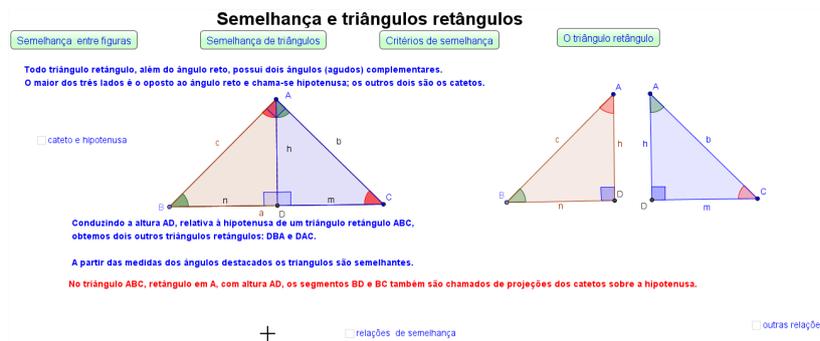


Figura 3.12: Seção Semelhança e triângulos retângulos: do autor, 2015.

### 3.3.22 Passo 22 - Elaborando a seção O triângulo retângulo

Nesta seção do capítulo a parte textual segue como anteriormente, sendo que as definições e enunciados foram extraídas do livro didático utilizado. Faz-se necessário construir um triângulo retângulo usando os comandos: reta definida por dois pontos e reta perpendicular em um ponto. Marca-se um ponto sobre a reta construída e define-se o triângulo usando a ferramenta polígono.

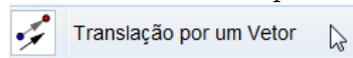
Determina-se a altura relativa ao vértice que possui o ângulo reto e marca sua interseção com o lado oposto. Constrói-se o segmento da altura relativa à hipotenusa e os segmentos correspondentes às projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Movimenta-se e gira-se a figura até obter a posição indicada. Estes comandos aparecem detalhadamente nos passos anteriores.

Na aba Propriedades formatam-se os textos e as formas geométricas referentes aos segmentos catetos, projeções dos catetos sobre a hipotenusa e a hipotenusa dando aos mesmos as legendas usuais das relações métricas. A maior parte das construções desta seção já foi mencionada nos passos anteriores e de tudo que já foi dito e que nesta apresenta algo novo é se produzir duas figuras dinâmicas que se alteram a partir de uma figura base.

Neste caso a figura base é o triângulo retângulo de que possui a altura relativa à hipotenusa (o da esquerda na figura) e os outros dois (à direita na figura) são cópias

transladadas no plano da divisão do triângulo devidamente identificado pelas cores marrom e azul.

Então se faz uma reta de suporte à hipotenusa e sobre esta reta marca dois pontos fora da hipotenusa (no caso à direita) e usando a ferramenta



em seleciona um dos triângulos (caso não sido selecionado o desejado clique com o botão direito do mouse e escolha a opção selecione outro e o selecione na lista) e clica-se sobre um ponto do triângulo base e sobre um dos dois pontos criados anteriormente. Movimente o ponto livre (fora da hipotenusa) para obter a visualização desejada. Repita estes passos para o outro triângulo.

Criam-se valores booleanos relativos ao texto da legenda dos catetos e hipotenusa de cada triângulo e vincula-se ao mesmo (ver passo 3.3.6).

**Semelhança e triângulos retângulos**

Semelhança entre figuras    Semelhança de triângulos    Critérios de semelhança    O triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo, além do ângulo reto, possui dois ângulos (agudos) complementares. O maior dos três lados é o oposto ao ângulo reto e chama-se hipotenusa; os outros dois são os catetos.

**Catetos e hipotenusa**

Conduzindo a altura AD, relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois outros triângulos retângulos: DBA e DAC.

A partir das medidas dos ângulos destacados os triângulos são semelhantes.

No triângulo ABC, retângulo em A, com altura AD, os segmentos BD e DC também são chamados de projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Explorando a semelhança dos triângulos, temos que:

**Relações de semelhança**

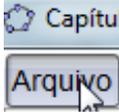
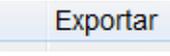
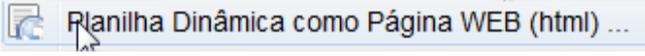
$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DBA &\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \\ \triangle ABC \sim \triangle DAC &\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \\ \triangle ABC \sim \triangle DBA &\Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \end{aligned}$$

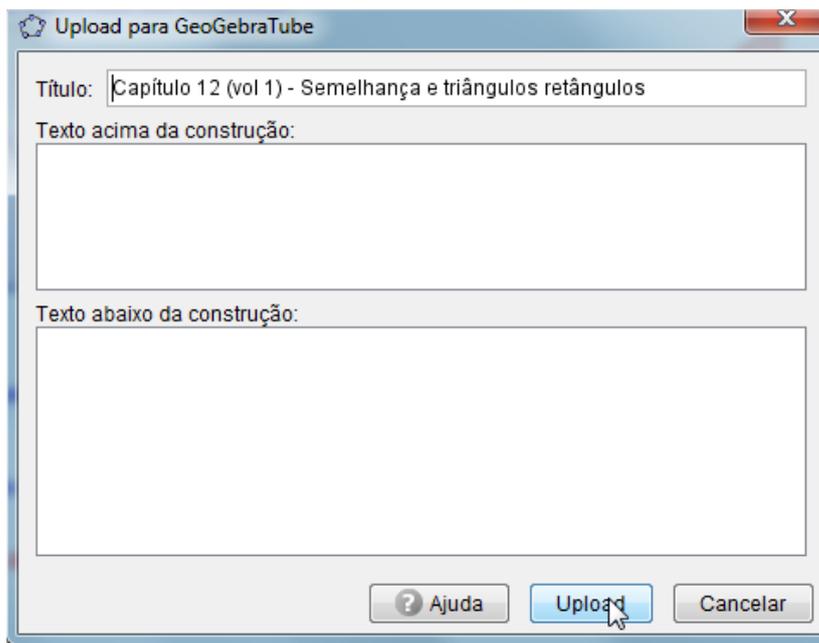
**Outras relações**

Faz-se este mesmo processo para se trabalhar os textos sobre as relações de semelhança e outras relações decorrentes no triângulo retângulo. Optou-se em colocar estes botões vinculados aos valores booleanos a estes textos acessíveis na tela para deixar a janela geométrica limpa e à medida que se aborda o conteúdo acrescenta-se o seu detalhamento.

Vale lembrar que nos textos que envolvem linguagem matemática e representações formais habilitou a opção "Fórmula L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X" na caixa de edição do texto. Para concluir, nesta seção não será incluído exemplos e exercícios já que as relações métricas do triângulo retângulo envolvem o cálculo numérico das medidas da figura no exercício em questão. Ademais, a programação de exercícios já fora mostrada nos passos anteriores. E, ainda, este *applet* do *Geogebra* já possui um grande conjunto de elementos: botões, textos, valores booleanos, pontos, retas, segmentos, triângulos, polígonos e círculos. Por isto começaremos a explicar o passo da exportação do *applet* para o formato .HTML para uso off-line e que acarretará de não necessitar da instalação do software *Geogebra*, conforme foi mencionado anteriormente aqui detalharemos todas as etapas deste passo/processo.

### 3.3.23 Passo 23 - Exportando o *applet* do Geogebra Capítulo 12 (vol 1) - Semelhança e triângulos retângulos para o GeogebraTube e gerando arquivo para uso off-line

Para exportação selecionaremos o menu arquivo  e a opção:  em , e ao clicar aparecendo a janela a seguir:



Nesta janela digita-se o Título do *applet* em seguida pressiona-se Upload. Será aberta a janela do navegador de internet padrão do computador. Vale lembrar que a partir daqui até o momento do download é necessário conexão com a internet para executar os comandos.

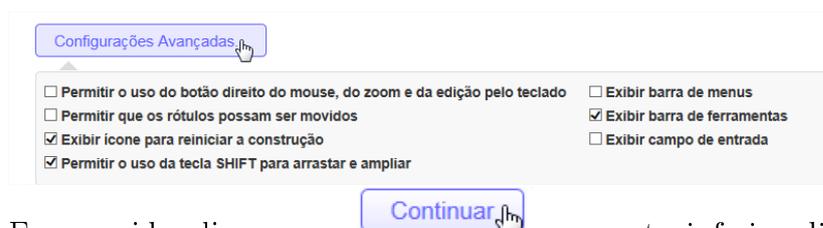
Na tela do navegador aparecerá como na imagem a seguir e será solicitado que façamos o login no site, ou seja, que criemos uma conta de acesso ao conteúdo que será disponibilizado pelo *GeogebraTube*, clicando no local indicado:



Na tela seguinte podemos optar por diversas formas de login, desde pelo cadastro apenas no site a conta no Google e/ou Microsoft e/ou Facebook.



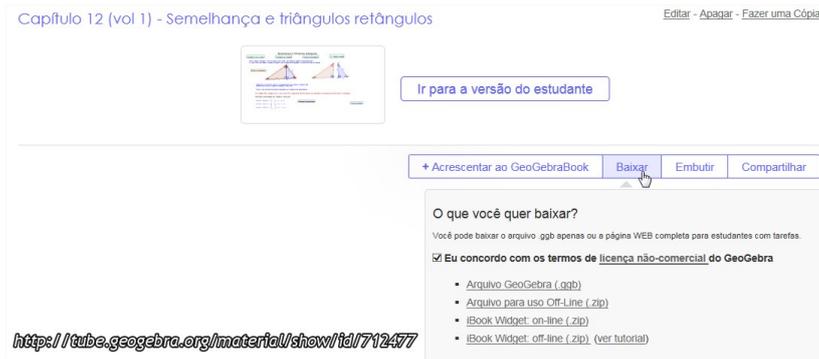
Após isso, na tela seguinte rolamos a barra e clica-se no botão Configurações avançadas ativando as opções marcadas na figura abaixo:



Em seguida clica-se em  no canto inferior direito da página. Será carregada novamente a página e na opção Visibilidade, a qual determina a forma de divulgação do material:



Em seguida clica-se em  no canto inferior direito da página. O material será disponibilizado no site e teremos formas para obtê-lo: Baixar, para fazer o download do material para o dispositivo (computador, celular, notebook e/ou tablet), Embutir caso queiramos incorporar em um blog, site ou ambiente virtual de aprendizagem tal como Moodle e Compartilhar, sendo esta última opção uma forma de disponibilizar o material por meio de um link (endereço da internet). Aqui trataremos apenas a opção baixar e suas sub-escolhas:



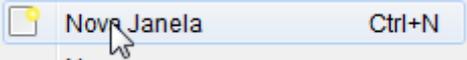
Marcando a caixa de concordância com os termos da licença do *Geogebra*, as duas primeiras opções são para uso em um computador pessoal (PC ou notebook, tablet, netbook etc) sendo a primeira o arquivo original do *Geogebra*, onde só é possível utilizar se este programa estiver instalado. A segunda opção é para baixar o pacote de uso do arquivo em qualquer computador, ainda que não tenha o *Geogebra* instalado. Sendo assim, nesta opção, baixa-se um arquivo formato .zip (compactado), o qual contém um pacote de arquivos dentre os quais o arquivo .HTML da página da web e uma pasta com os arquivos necessários para rodar o *applet* no ambiente off-line (máquina Java e o applet Java do Geogebra) através de um navegador de internet. Baixando o arquivo e executando [m712477-Captulo-12-vol-1---Semelhana-e-tringulos-retngulos.html](http://m712477-Captulo-12-vol-1---Semelhana-e-tringulos-retngulos.html), visualizaremos no navegador o *applet* na versão off-line, como mostrado na figura 3.13:



Figura 3.13: Tela do *applet* referente ao capítulo 12 do volume da coleção em modo offline: do autor, 2015.

Portanto este formato off-line possibilita o uso em qualquer máquina, não sendo necessária a instalação de programas e de compiladores como a máquina virtual Java Runtime. E, com isso, descarta os requisitos prévios para que o material possa ser utilizado.

### 3.3.24 Passo 24 - Um novo *applet* - Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras

Neste passo será gerado um novo *applet*. Com o *Geogebra* aberto clica-se no menu  e depois em  e depois em . No menu Exibir escolhe-se Janela de visualização 1. Executando o passo 3.3.11 constroem-se dois polígonos regulares na janela geométrica: o quadrado e o triângulo equilátero. Repetindo o passo 3.3.9 traça-se a diagonal do quadrado. Usando a ferramenta  clica-se sob o lado do triângulo e determina-se o ponto médio. Em seguida com o passo 9 traça-se a altura relativa a um dos vértices e usa-se a ferramenta ângulo  e marca-se os ângulos retos nas figuras como mostra a Figura 3.14:

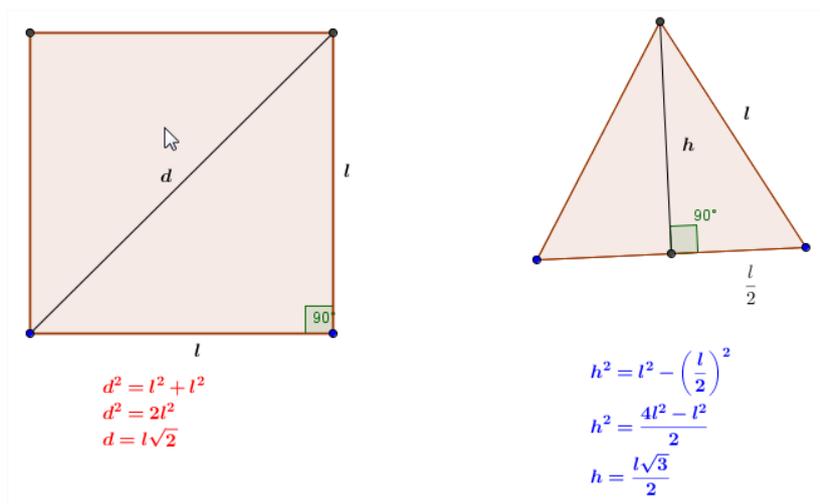


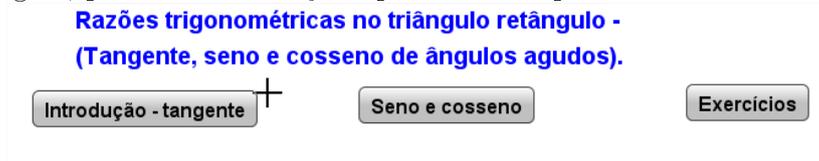
Figura 3.14: Tela final do *applet* Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras: do autor, 2015.

Usando o teorema de Pitágoras se determina a diagonal do quadrado e a altura do triângulo equilátero. Usando o passo 3.3.1 para escrever  $d^2 = l^2 + l^2$   $\backslash\backslash d^2 = 2l^2$   $\backslash\backslash d = l \sqrt{2}$  e  $h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2$   $\backslash\backslash h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{2}$   $\backslash\backslash h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$  em  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  e o passo 3.3.12 para nomear os segmentos dos polígonos indicados constrói-se a demonstração. Optamos por desenvolvê-lo à parte pois reutilizaremos este *applet* para tratar da tabela trigonométrica dos arcos notáveis.

### 3.4 Construção digital do capítulo 13 volume 1

#### 3.4.1 Passo 25 - Applet do Capítulo 13 - Trigonometria do triângulo retângulo

Foram criadas as seções do capítulo acionadas por botões como mostra a imagem a seguir, pelos comandos já explicados nos passos anteriores.



Feito isto e usando os passos de construção de texto, retas, segmentos e textos dinâmicos em Fórmula  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  como explicados anteriormente foram criados os elementos que sintetizam a introdução deste capítulo e traz a noção de tangente como declividade de uma rampa de acesso:

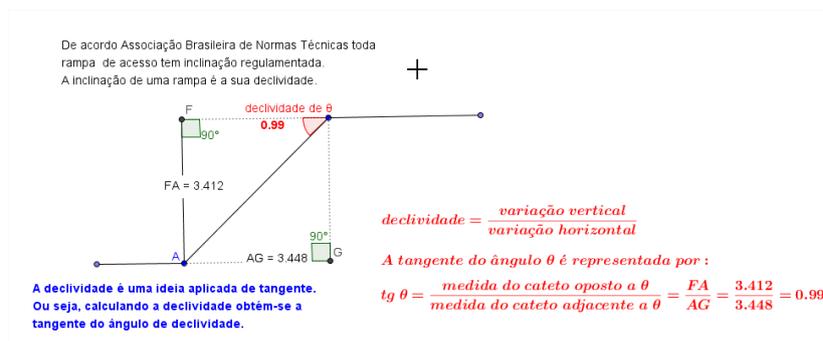


Figura 3.15: Seção Introdução-tangente: do autor, 2015.

Ao final os objetos foram vinculados ao botão "Introdução-tangente". Para criar os elementos da outra seção usa-se a ferramenta e clicando na janela geométrica em locais distintos determina-se três pontos. Em seguida usa-se para marcar uma reta passando por dois destes pontos. Em seguida com cria-se uma reta perpendicular à reta dada que passa pelo terceiro ponto.

Usando e posicionado o mouse sobre a interseção cria-se o ponto comum entre as retas. Usando cria-se o triângulo retângulo onde um dos seus vértices é a interseção entre as retas. Para terminar a construção usa-se clicando sobre o polígono para determinar seus ângulos internos. Basta agora ajustar a legenda dos ângulos, renomear os lados e esconder as retas de suporte.

Podemos determinar a medida dos ângulos do triângulo retângulo ao movimentar os pontos para trabalhar as noções de seno e cosseno. Em seguida foram os textos

dinâmicos destas duas relações. Segue a cópia de tela por meio da figura 3.16:

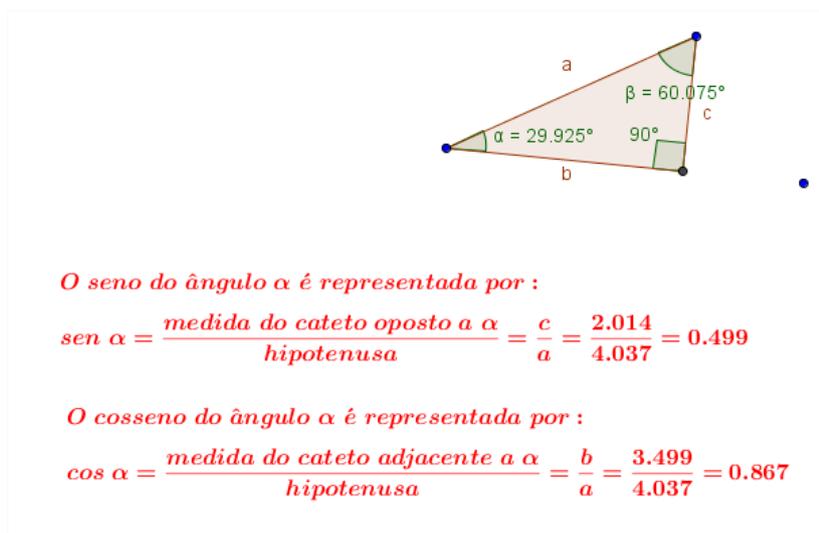


Figura 3.16: Seção Seno e Cosseno: do autor, 2015.

Buscou enxugar e explicação do livro e para isto se fez uma subseção ativada por um botão, como é mostrado a seguir:

**Relações entre razões**

*Do triângulo ao lado temos :*

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{c}{a}$$

*Daí conclui – se que :*

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta = \frac{c}{a}$$

$$\text{sen } \beta = \text{cos } \alpha = \frac{b}{a}$$

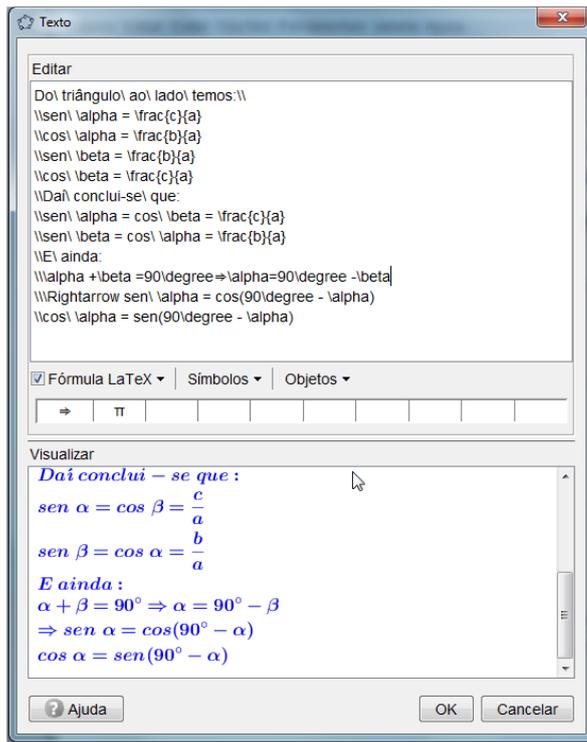
*E ainda :*

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \beta$$

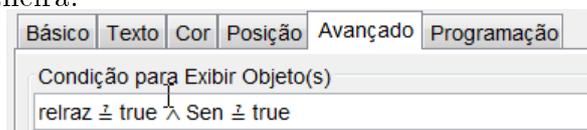
$$\Rightarrow \text{sen } \alpha = \text{cos}(90^\circ - \alpha)$$

$$\text{cos } \alpha = \text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

Foi-se criado o botão e respectivo valor booleano "Relações entre as razões" e incluindo o texto ativado por este botão como mostra abaixo:



Para que o mesmo seja exibido apenas quando a seção "Seno e cosseno" estiver ativa editou as propriedades do texto e programou a aba avançado do mesmo da seguinte maneira:



Sendo "relraz" o valor booleano da subseção e "Sen" o valor booleano da seção.

Para a última seção "Exercícios" vamos usar construção do triângulo retângulo da seção "Seno e Cosseno" explanada neste passo.

Ajustou-se apenas os rótulos dos lados para valores e dos vértices para legendas A, B e C e o texto genérico para responder as seguintes questões "1. Com base na figura determine: a)  $\sin A$ ,  $\cos A$  e  $\text{tg } A$  ? b)  $\sin C$ ,  $\cos C$  e  $\text{tg } C$ "; "3. Determine o seno do ângulo assinalado em cada caso."; "10. Determine a medida aproximada de x em cada caso"; e "16.(UFR-RJ) Milena, diante da configuração representada, pede ajuda aos vestibulandos para calcula o comprimento da sombra x do poste, mas, para isso, ela informa que o  $\sin ? = 0,6$ . Calcule o comprimento da sombra x". E, quando for necessário será feito uma nova figura a partir das ferramentas disponíveis, resolvendo e calculando manualmente na tela do *Geogebra* usando a caneta de mão-livre.

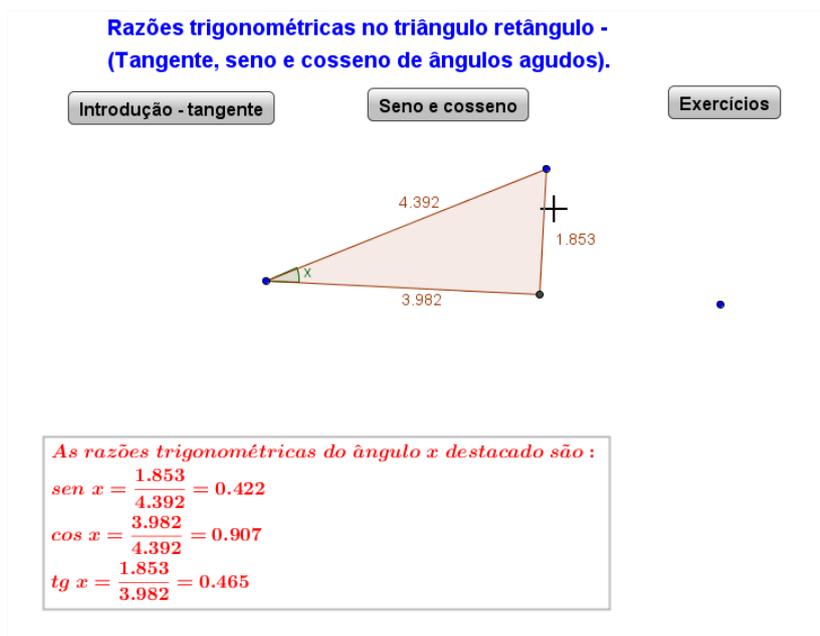
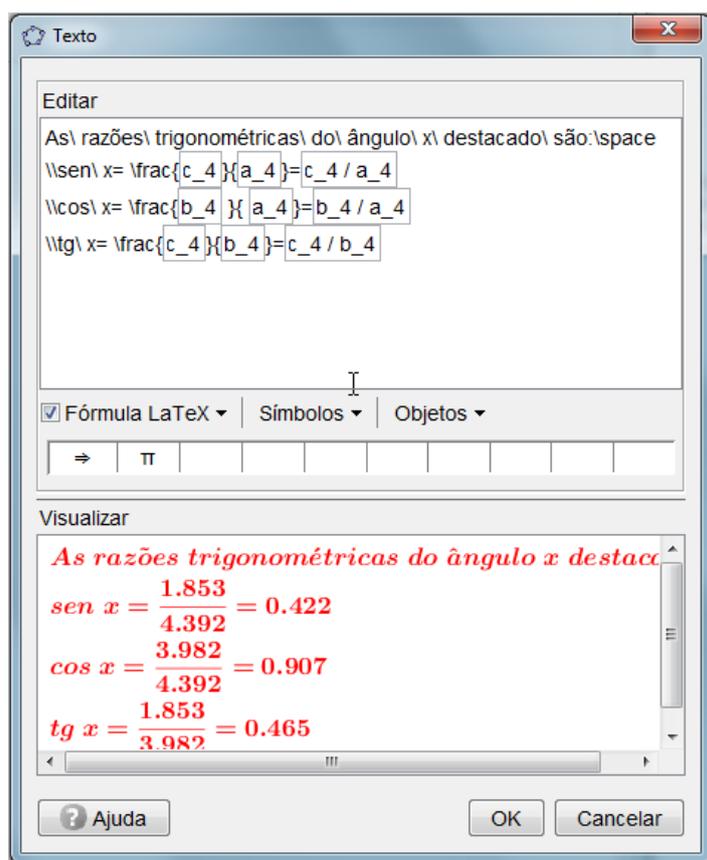


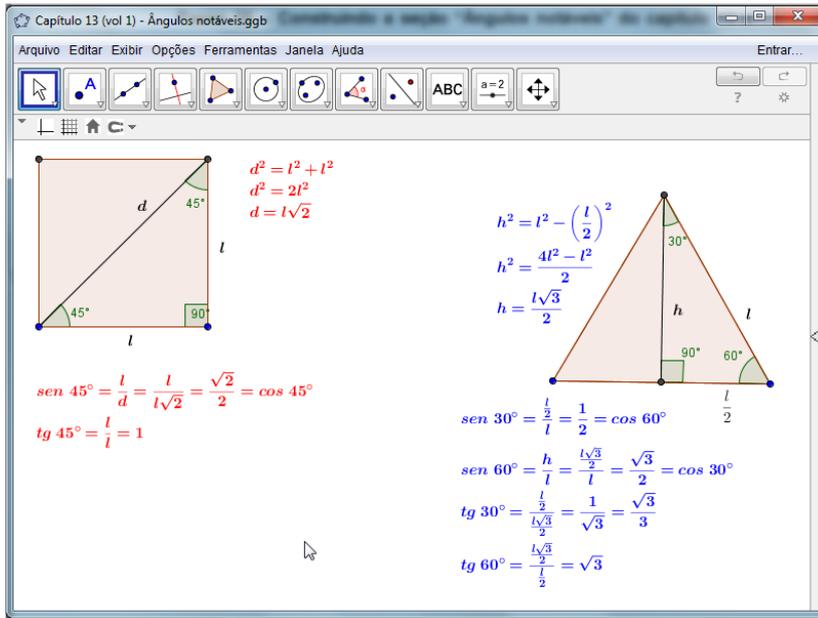
Figura 3.17: Seção Exercícios: do autor, 2015.



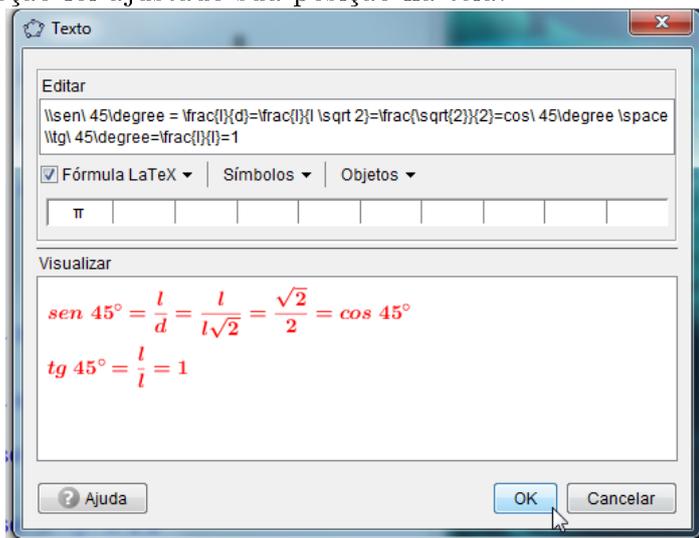
A última seção do capítulo 13 do livro didático trata dos ângulos notáveis. O próximo passo tratará isto.

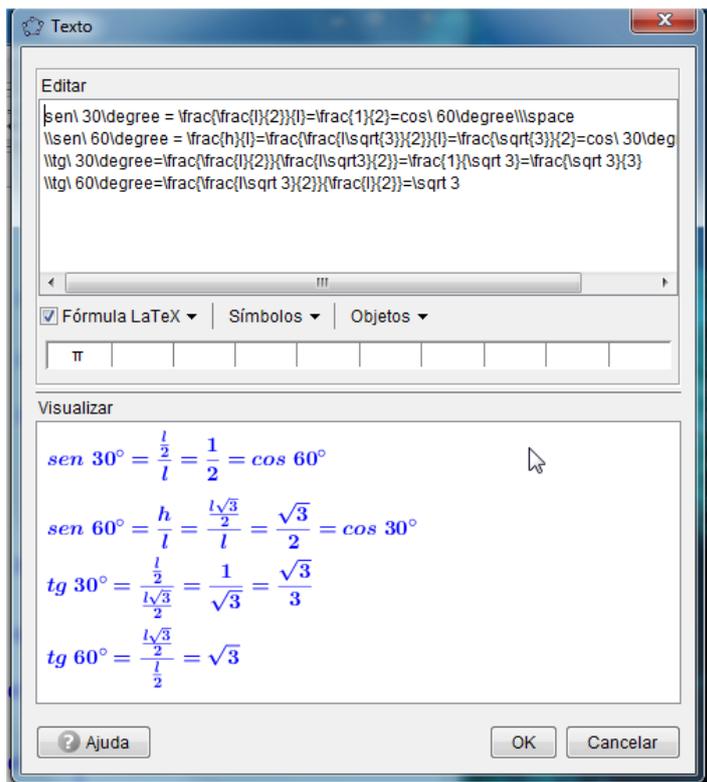
### 3.4.2 Passo 26 - Construindo a seção "Ângulos notáveis" do capítulo 13 a partir da seção Aplicações do triângulo retângulo do capítulo 12 descrita no passo 24

Será reutilizado a construção do Passo 24 e acrescentado os textos que trataram das razões trigonométricas dos ângulos de 30° 45° e 60°, presentes no quadrado e no triângulo equilátero, respectivamente. Optou-se em fazer um *applet* a parte para reforçar os valores dos senos, cossenos e tangentes destes ângulos.



Os textos incrementados foram inseridos conforme a seguir e com a ferramenta seleção foi ajustado sua posição na tela:





Os exercícios apresentados para esta seção farão uso dos valores encontrados para os ângulos notáveis e, devido a isto, a construção do passo 3.4.1 (triângulo retângulo) é suficiente para tratar estas questões. Aqui encerramos os *applets* do volume 1 da coletânea e com o passo 3.3.23 faremos a exportação para uso off-line dos mesmos. Para cada um dos passos seguintes abordaremos o capítulo na íntegra para que a leitura desta dissertação seja branda e concisa, ao tempo em que será comentado os passos utilizados e os novos comandos.

### 3.5 Passo 27 - Construindo o *applet* do capítulo 1 "A circunferência trigonométrica" do volume 2 da coleção

A cópia de tela a seguir apresenta o *applet* já pronto com todos os botões (e seus respectivos valores booleanos associados), textos, imagens referentes ao capítulo supracitado. Em cada botão as seções do capítulo são: Arcos e ângulos; Comprimento da circunferência; Comprimento de um arco; e a Circunferência trigonométrica já programados com os respectivos valores booleanos "arcang", "compcirc", "comparc" e "circ trig" respectivamente.

Os botões e os textos das definições exibidos são referentes à seção Arcos e ângulos e foram criados conforme passos 3.3.1 a 3.3.12 citados. A imagem abaixo mostra a programação do botão "Arcos e ângulos":

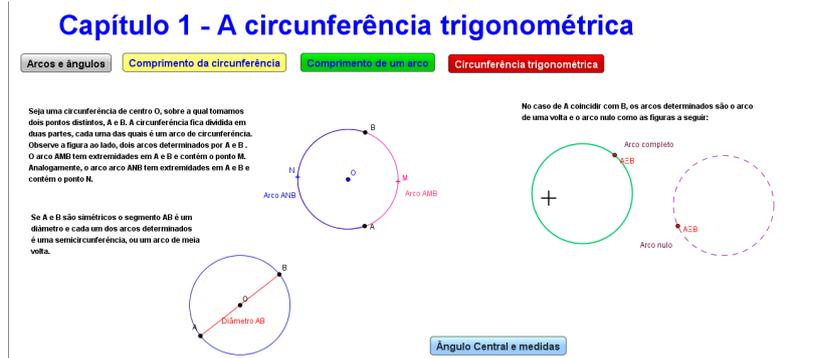


Figura 3.18: Seção Arcos e Ângulos: do autor, 2015.

```

Básico  Texto  Cor  Estilo  Avançado  Programação
Ao Clicar  Ao Atualizar  JavaScript Global
1  arcang=true
2  arco1=false
3  compcirc=false
4  comparc=false
5  circtrig=false
    
```

Copiando e colando esta programação nos demais botões troca-se o valor booleano associado por "true". O comando "2" denominado "arco1=false" se refere ao botão Arco Central e as medidas que estão dentro da seção Arcos e Ângulos. Voltando à primeira seção, as formas circulares foram construídas usando  em , clicando na tela, definindo o centro e em seguida digitando a medida do raio (no caso o valor "2"), os ajustes foram feitos em propriedades. Foi incluído o botão "Ângulo central e medidas" para a subseção de mesmo nome. Ao associar o valor booleano e ao definir as condições de exibição dos objetos, os elementos acionados pelo botão são mostrados na Figura 3.19 :

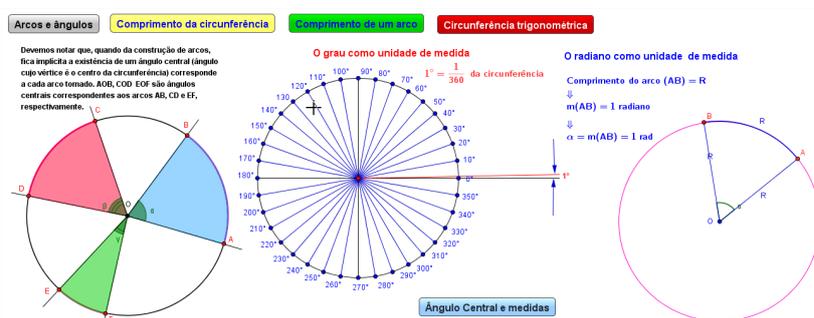


Figura 3.19: Subseção Ângulo central e medidas da seção Arcos e ângulos: do autor, 2015.

Nesta subseção utilizamos além dos comandos e passos já mencionados os botões/ferramentas:  e  em  para definirmos um setor circular e um arco

circular, respectivamente para a figura da esquerda e da direita. Foi-se utilizada  em  para se definir o ângulo com amplitude fixa (figura central) de  $10^\circ$ . Vale lembrar que os textos de definição e enunciados são ajustados marcando a opção "Posição absoluta na tela".

Ao final selecionam-se todos os objetos e em propriedades na aba avançado em condição para exibir objetos digita-se "arcang=true" que o valor booleano associado desta seção. Clicando no próximo botão já programado para a próxima seção "Comprimento da circunferência" apresenta uma circunferência dado o centro e um de seus pontos através do botão .

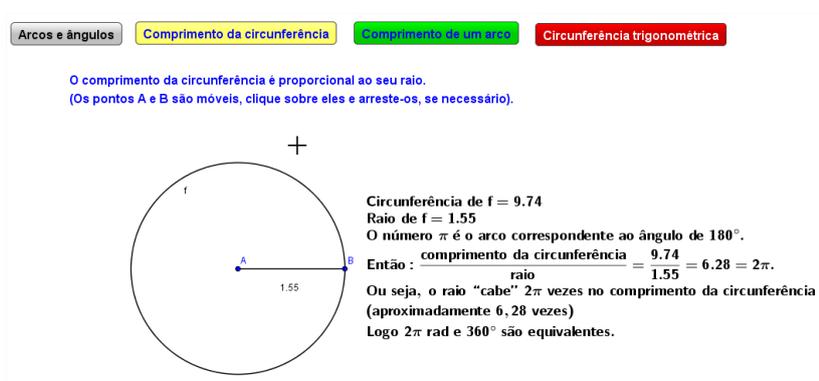
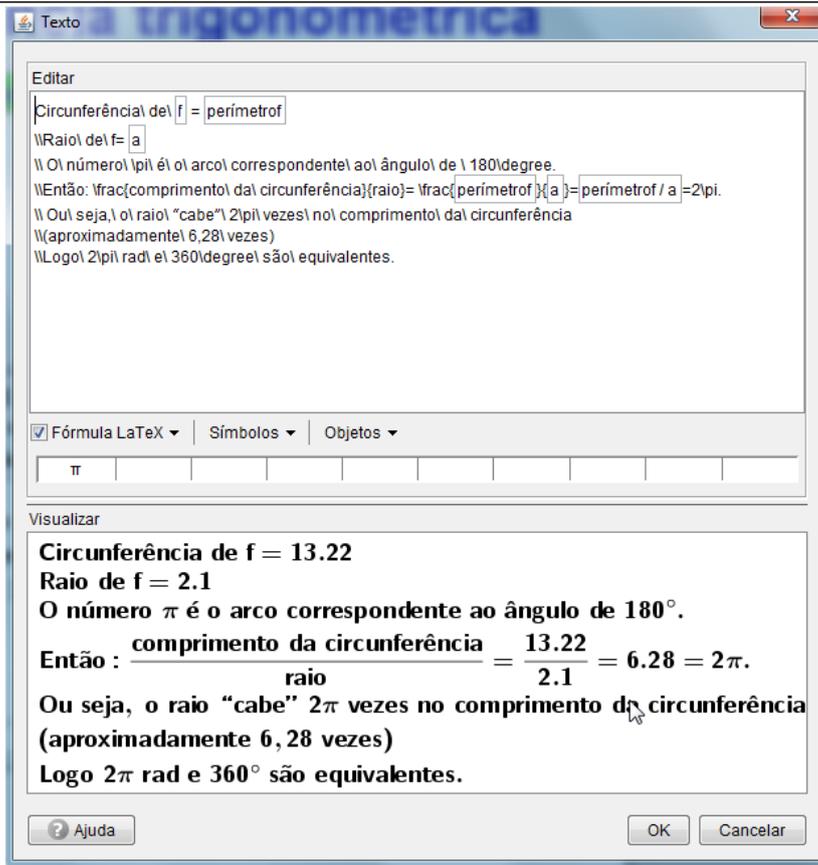


Figura 3.20: Seção Comprimento da circunferência: do autor, 2015.

Definiu-se seu raio e usou-se a ferramenta  em  para determinar o perímetro da circunferência, clicando sobre a mesma. Fora incluído o texto dinâmico com Fórmula  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  conforme código abaixo:



Nesta construção o raio é dinâmico e, então as demais informações sobre a circunferência também são. Neste caso o ponto B da extremidade da circunferência pode ser arrastado pelo mouse, redefinindo a circunferência. Após isso se selecionam todos os objetos e em propriedades na aba avançado em condição para exibir objetos digita-se "compcirc=true", que é o valor booleano associado da seção.

A próxima seção "Comprimento de um arco" apresenta os objetos: 4 circunferências concêntricas, um delas de raio unitário usando  em , cujo centro e extremidades dos raios estão sobre uma mesma reta. Em seguida sobre a circunferência de raio  $CD$  marcou-se um ponto qualquer denominado "E" móvel e traçou-se uma reta do centro passando pelo mesmo e usando a ferramenta interseção entre objetos marcou a interseção com cada uma das outras circunferências.

Marcou-se o menor ângulo entre estas duas retas feitas usando  e em seguida utilizando  em  definiu-se os arcos circulares. Renomeou-se os pontos conforme figura a seguir e escreveu-se uma dica: "Clique e arraste o ponto E." Abrindo a caixa  e usando a ferramenta  determinou-se as medidas envolvidas na figura (raio e arcos).

Em seguida escreveu-se o texto dinâmico que relaciona estas medidas do comprimento arco e o raio com o ângulo previamente determinado.

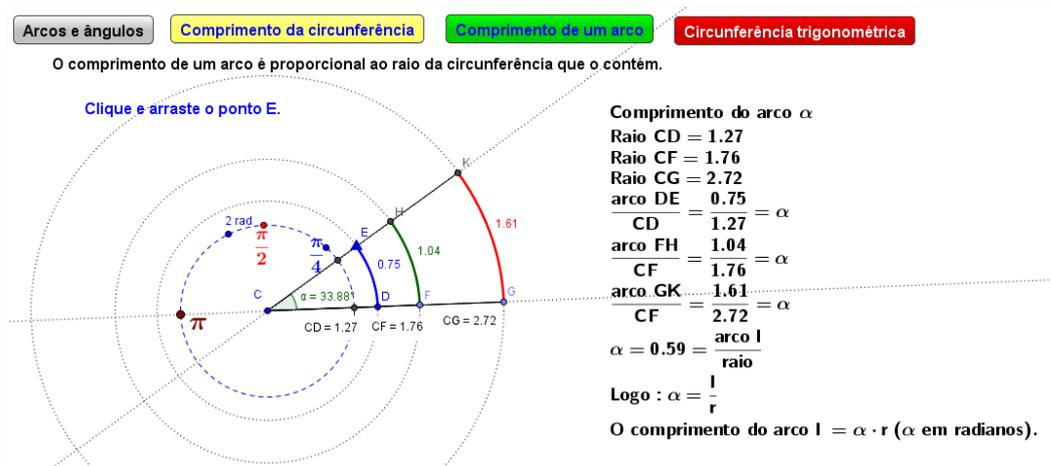
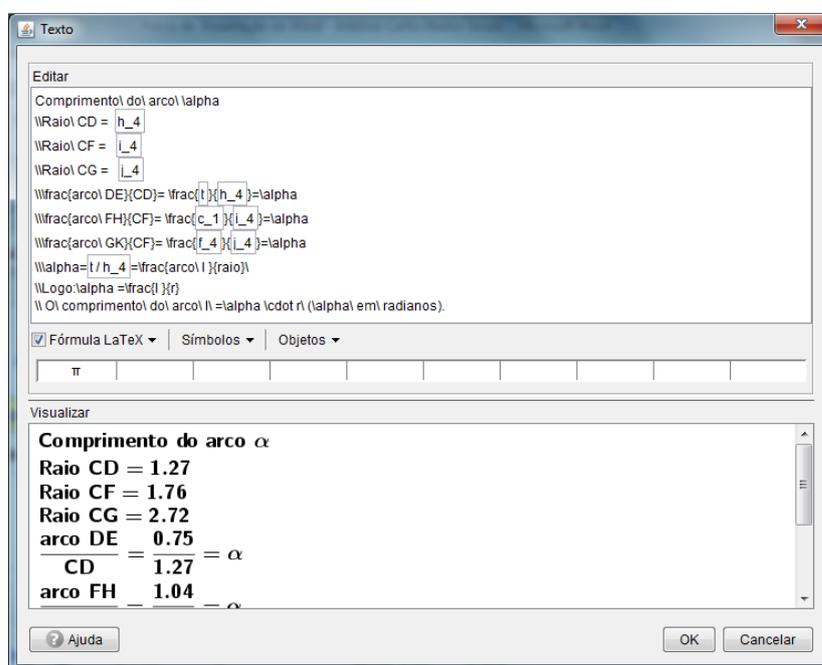
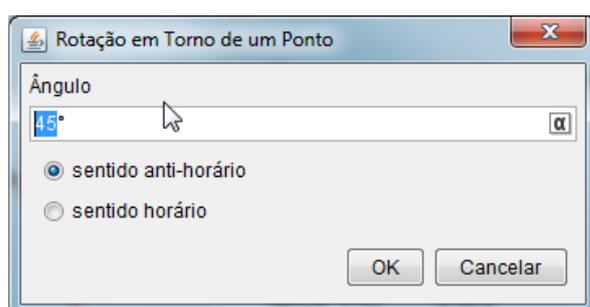


Figura 3.21: Seção Comprimento de um arco: do autor, 2015.



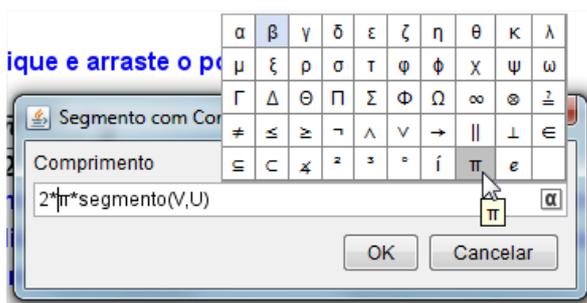
Para incrementar a figura e acrescentar alguns arcos notáveis utilizou-se a ferramenta  para se determinar alguns ângulos:  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $2\pi$ . Para isto ao clicar na ferramenta selecionou-se o centro, a extremidade do raio sobre a reta (horizontal) e ao aparecer a caixa de diálogo digita-se cada um dos valores selecionando e apagando o valor já existente (45):



Após isso, oculta-se os rótulos dos pontos e acrescenta-se um texto para os valores dos ângulos em radianos, clicando sobre cada um dos pontos e em seguida digitando o texto na caixa de diálogo ativando o item "Fórmula L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X" para os que são na forma de fração. Então, se seleciona todos os objetos e em propriedades na aba avançado em condição para exibir objetos digita-se "comparc=true" que o valor booleano da seção.

Na última seção, "Circunferência trigonométrica" usou-se um par de retas perpendiculares em um ponto móvel na tela. Para isto criou-se o ponto usando  e em seguida no campo de entrada , na parte inferior da janela digitou-se "y=y(U)" para a reta vertical onde U é o ponto criado anteriormente, que será o centro da circunferência. De igual modo digitou-se "x=x(U)" para a reta horizontal. Sobre esta última marcou-se um ponto "V", atribui-se os rótulos legenda O e A para estes dois pontos, respectivamente e em seguida determinou uma circunferência de centro O passando por A usando . Incluiu-se os texto "(1,0)" para o ponto A.

Sobre a circunferência marcou o ponto "W" usando  e usando  determinou-se seu arco. Determina-se o rótulo legenda e digita-se "P" neste campo na opção propriedades deste ponto. Pretende-se construir a seguinte animação: um segmento cujo comprimento é igual a de um arco de circunferência (cada número real está associado e representado por um ponto da circunferência de raio unitário). Constrói-se um segmento de comprimento igual ao da circunferência dada usando a ferramenta  no item  clicando e marcando um ponto sobre a tela e ao aparecer a caixa de diálogo digita-se  $2*\pi*\text{segmento}(V,U)$  (para escolher o número  $\pi$  clica-se sobre  $\alpha$  no canto direito, como é mostrado abaixo:



Sobre este segmento correspondente ao comprimento da circunferência já criado marca-se quatro pontos equidistantes usando a ferramenta ponto médio  e inclua os textos referente às suas medidas em radianos. Em seguida usando a mesma ferramenta  e clicando sobre este último ponto criado e ao aparecer a janela digita-se "ArcoCircular[U, V, W]". Fazendo isto aparecerá um ponto o qual definiremos a legenda como " P' " na aba básico na opção rótulo. Ao incluir o texto explicativo e o texto dica será necessário indicar os quadrantes através de textos

e para isto definiu-se suas posições usando na aba "Posição":

Básico | Texto | Cor | Posição | Avançado | Programação

Origem:  $((x(U) + x(V))/2, ($

as sentenças em cada um dos textos (as sentenças definem o ponto médio em relação às coordenadas dos pontos U e V):

$((x(U) + x(V))/2, (y(U) + y(V))/2)$ ,  $((x(U) - x(V))/2, (y(U) + y(V))/2)$ ,  $((x(U) - x(V))/2, (y(U) - y(V))/2)$  e  $((x(U) + x(V))/2, (y(U) - y(V))/2)$

para os textos do 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes, respectivamente. Portanto, o resultado é a Figura 3.22:

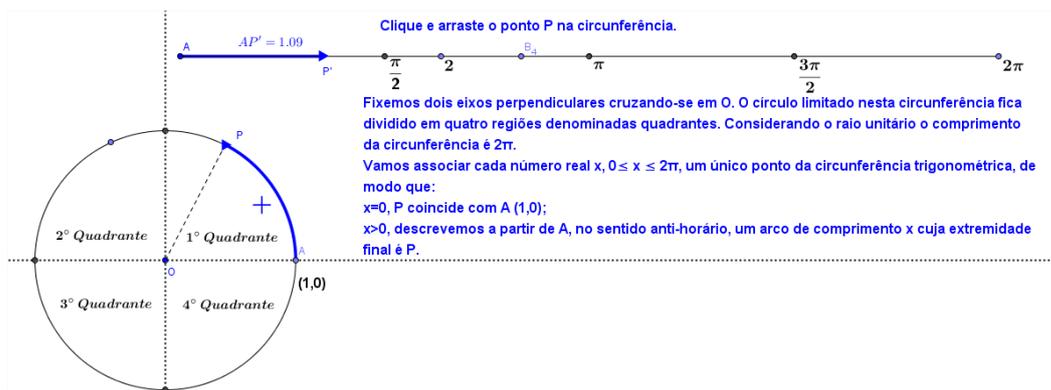


Figura 3.22: Seção Circunferência trigonométrica: do autor, 2015.

Conclui-se aqui as principais ideias abordadas neste capítulo. Embora o livro traga a abordagem da simetria na circunferência trigonométrica optou-se em tratar disso quando forem trabalhadas as razões trigonométricas na circunferência, que é exatamente a próxima construção e o próximo capítulo do livro. Conforme detalhado no passo 3.3.23 podemos importar esta construção para o *GeogebraTube* e dispor da versão offline.

## 3.6 Passo 28 - Construindo o *applet* do capítulo 2 - Razões trigonométricas na circunferência do volume 2 da coleção

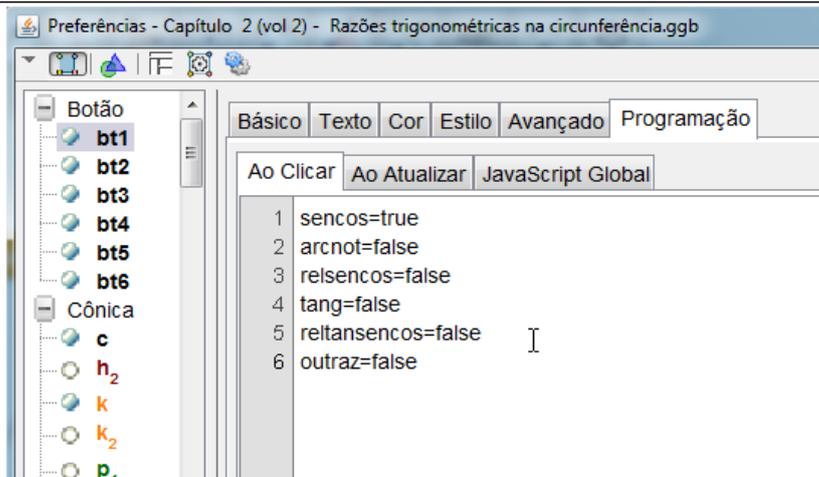
Começando a construir o *applet* temos os botões e os valores booleanos ainda visíveis conforme figura:

**Razões na circunferência trigonométrica**

Seno e Cosseno | Relações entre seno e cosseno | Tangente | Relações entre tangente, seno e cosseno | Outras razões

senos     reisenos     tang     reitansenos     outraz

E a respectiva tela de preferências (propriedades e ajustes dos objetos);



A figura anterior mostra a programação do botão "bt1" cuja legenda é "Seno e Cosseno" da seção de mesmo nome que tem um botão auxiliar "Arcos notáveis e seus simétricos". Em seguida foram ocultados os valores booleanos e incluídos os textos e elementos geométricos:

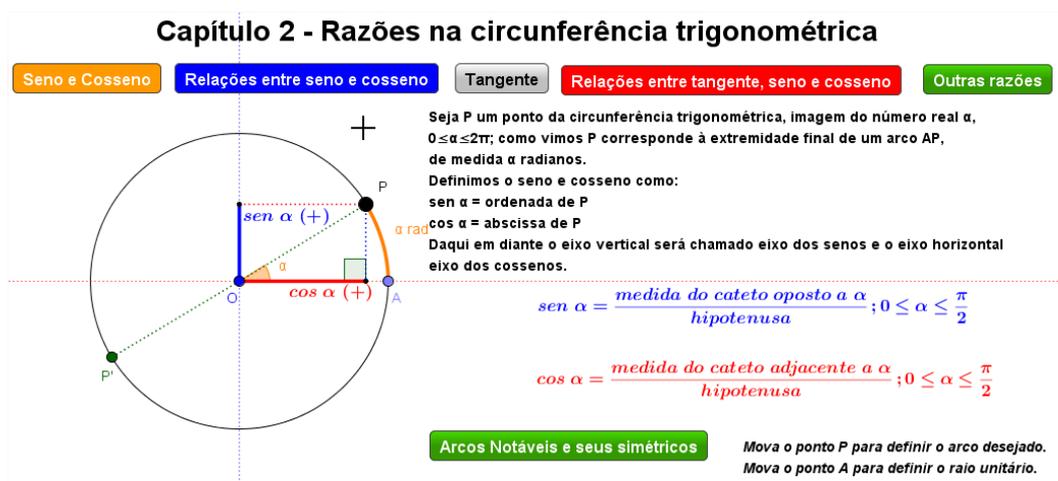
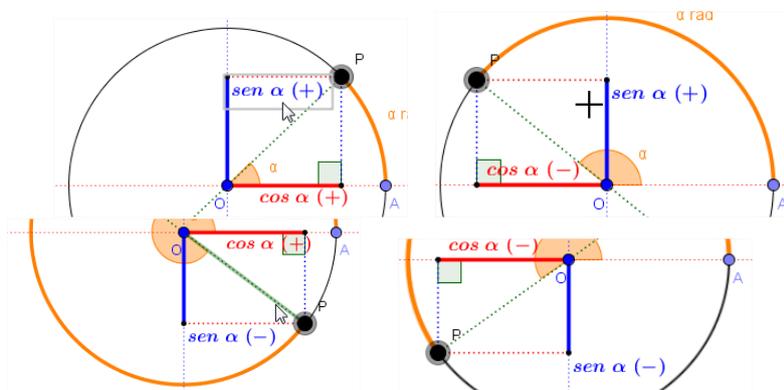


Figura 3.23: Seção Seno e cosseno: do autor, 2015.

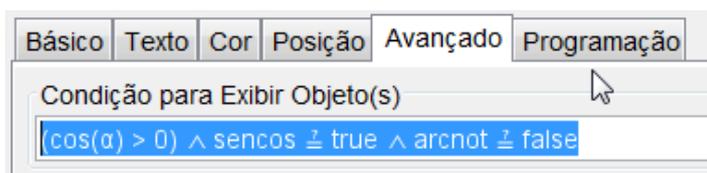
O círculo e o arco de extremidade "P" fora construído como na última seção do capítulo anterior referente ao passo 3.5: Um par de retas perpendicular a um ponto móvel "O", um ponto "A" sobre a reta horizontal que determina a extremidade do raio unitário e a origem de todos os arcos e um ponto P móvel sobre a circunferência. Usando um par de retas perpendiculares em P determina-se as coordenadas de P ( $\text{sen } \alpha, \text{cos } \alpha$ ) usando a ferramenta interseção entre objetos determina-se os pontos sobre os eixos ortogonais em "O" referentes às coordenadas de "P".

Em seguida usando a ferramenta segmentos marca-se os segmentos referentes à medida algébrica do seno e cosseno e colore-se a critério. Nestes elementos é determinada a condição de exibição "sencos = true  $\vee$  relsencos = true"; onde os mesmos vão ficar disponíveis para as seções "Seno e Cosseno" e "Relações entre seno e cosseno".

Segue que nos pontos referentes às coordenadas de P inclui-se os textos nestes pontos relativos à sua notação (seno ou cosseno) e edita-se a condição de exibição destes textos, conforme figura:



O texto " $\cos\alpha(+)$ " será exibido se " $(\cos(\alpha) > 0) \wedge \text{sencos} = \text{true} \wedge \text{arcnot} = \text{false}$ ", ou seja o cosseno do arco  $\alpha$  deve ser positivo, o valor booleano da seção "Seno e Cosseno" ativado e o valor booleano do botão "Arcos Notáveis e seus simétricos" desativados. De igual modo fora feito para os textos " $\cos\alpha(-)$ ", " $\text{sen}\alpha(+)$ " e " $\text{sen}\alpha(-)$ ", trocando nestes textos apenas a parte da condição relativa ao texto ( $> 0$  ou  $< 0$ ).



O texto da definição é uma síntese de duas seções deste capítulo: seno e cosseno, que optamos unificar para que o material não ficasse demasiado extenso e a notação de seno e cosseno é como apresentado no capítulo 13 do volume 1 da coleção, passo (3.4.1. Fora incluído o texto no canto inferior direito como dica: "Mova o ponto P para definir o arco desejado. Mova o ponto A para definir o raio unitário." para elucidar a interação com este objeto.

Como já programado o botão da subseção "Arcos notáveis e seus simétricos" apresenta elemento nesta seção e, neste caso fora aproveitadas todas as construções geométricas e, acrescentando à circunferência trigonométrica os arcos notáveis de 0 a  $2\pi$  usando a ferramenta  em  e determinando os ângulos notáveis. Conforme condição acima, os textos " $\text{sen}\alpha(+)$ ", " $\text{sen}\alpha(-)$ " e " $\cos\alpha(+)$ ", e " $\cos\alpha(-)$ " vão ficar ocultos ao ativar o valor booleano "arcnot" por este botão. No lugar destes textos, apresentam-se os valores de seno e cosseno dos arcos notáveis:

Cuja condição de exibição é como abaixo para o cosseno e o seno da imagem anterior:

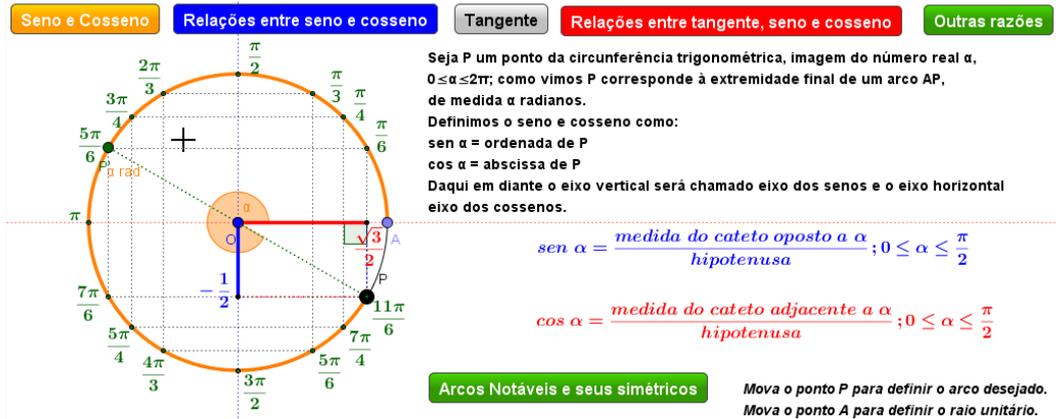
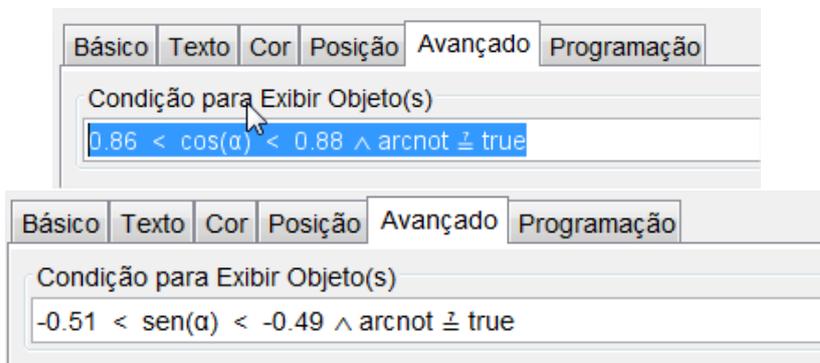
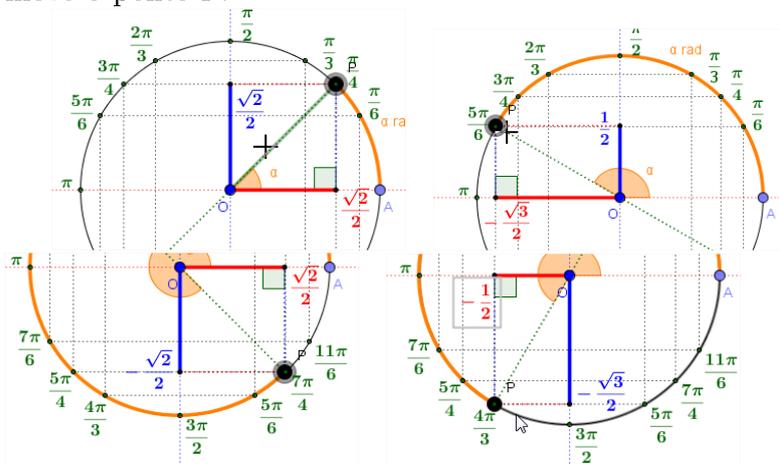


Figura 3.24: Secção Seno e Cosseno: do autor, 2015.



Onde foram usados intervalos para aproximar-se ao resultado exato, uma vez que a maioria dos senos e cossenos dos arcos (com exceção dos notáveis) é obtida por aproximação decimal mediante cálculo numérico ou tábuas como a de Ptolomeu, por exemplo. Neste caso o motivo do intervalo é para admitir uma margem de erro aceitável em relação ao valor exato quando o estudante e/ou professor interage com o objeto e move o ponto P.



Até aqui nesta seção temos como ideia imprimir esta tela completa e entregar a cada aluno para que ele acrescente os valores de seno e cosseno na circunferência trigonométrica à medida que se movimentava o ponto "P", estudando e verificando as simetrias horizontais, verticais e complementares.

Na seção seguinte, "Relações entre seno e o cosseno" os elementos foram aproveitados da seção anterior e acrescentado outros textos, arco complementar a  $\alpha$  e ângulos alternos internos, como a seguir:

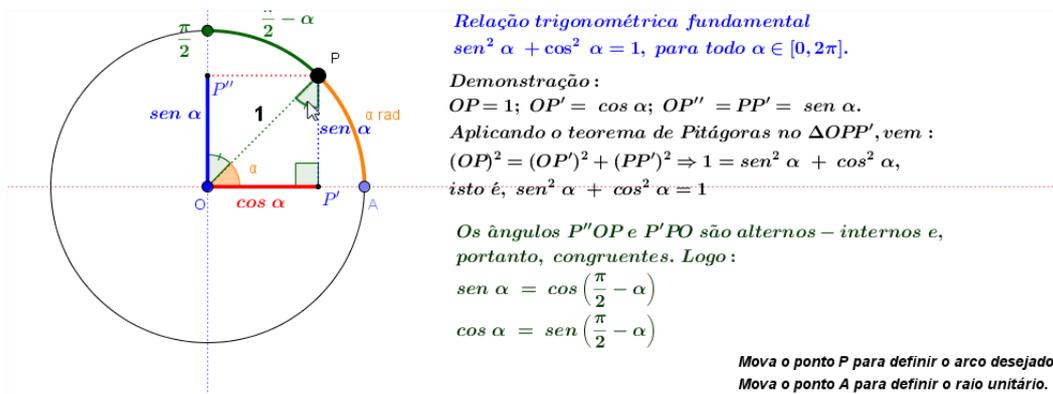


Figura 3.25: Secção Relação entre seno e cosseno: do autor, 2015.

Todos os objetos acrescentados aqui já foram explicados como acrescentá-los. Um ponto a ressaltar é que se separou os textos para que ficassem destacados com cores distintas.

Para a seção seguinte "Tangente" elaborou-se novos elementos representar a circunferência trigonométrica e acrescenta uma reta paralela ao eixo dos senos no ponto (1,0), que é extremidade do raio e a origem dos arcos. E, ao invés de representar a medida da tangente como um segmento usamos a ferramenta vetor  em  pois sua representação geométrica tem uma seta em uma das extremidades determina-se a direção da medida e o seu comprimento, uma semirreta de origem na interseção da extremidade do arco com o eixo horizontal.

Incluíram-se também os textos em blocos e mais um arco simétrico que define a tangente de mesmo valor. Os elementos desta seção foram reaproveitados na seção "Relação entre tangente, seno e cosseno" sendo que nesta última só apresenta uma caixa texto com a relação  $\text{tg} \alpha = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{cos} \alpha}$  ao aplicar o Teorema de Tales na figura, as coordenadas de P na forma de seno e cosseno do ângulo  $\alpha$  construído e os valores da tangente dos arcos notáveis. Esta ficou como na Figura 3.26.

Fora incluído os textos: sinal da tangente " $\text{tg} \alpha(+)$ " ou " $\text{tg} \alpha(-)$ " conforme definição da medida da  $\text{tg}(\zeta) > 0$  ou  $\text{tg}(\zeta) < 0$  na caixa avançado e condição para exibir objeto e  $\sqrt{3}$  definidos por condição  $(\text{tang} = \text{true} \vee \text{reltansencos} = \text{true}) \wedge 1.71 < \text{tg}(\zeta) < 1.73$ ; conforme já elucidado, ao movimentar o ponto "P" e atingir a medida da tangente em questão ( $60^\circ$  ou  $240^\circ$ ) e imagem a seguir:

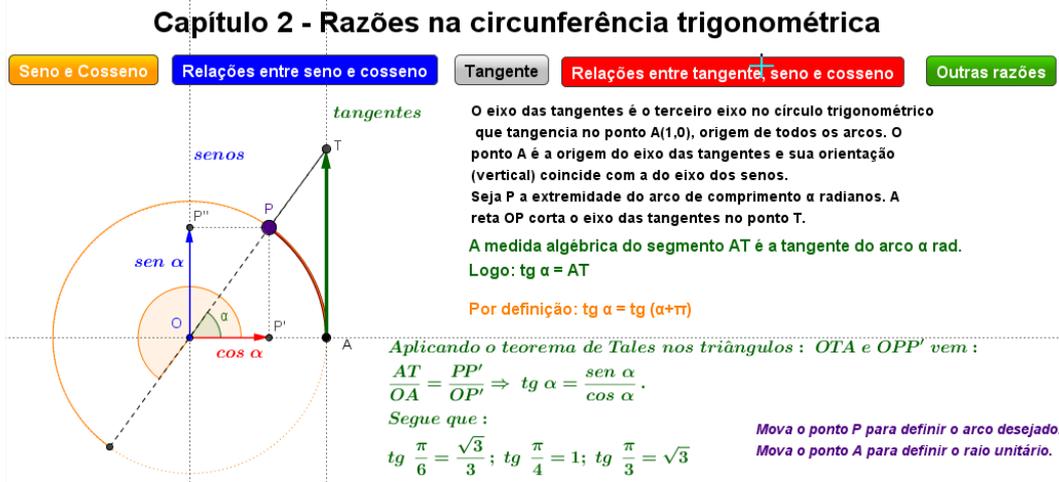
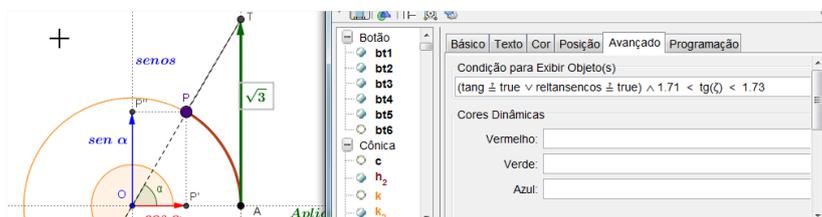


Figura 3.26: Secção Tangente: do autor, 2015.



E para concluir este capítulo na seção "Outras razões" elaborou-se uma nova circunferência trigonométrica formatando e definindo os elementos correspondentes às relações  $sec\alpha$ ,  $cossec\alpha$  e  $cotg\alpha$ . E, nestas relações reutilizamos a ferramenta vetor ao invés de segmento e na sua extremidade o seu valor em relação às razões  $cos\alpha$ ,  $sen\alpha$  e  $tg\alpha$ . E, por isto pode-se tratar alguns exemplos de arcos notáveis diretamente na tela usando a caneta de mão livre. A seção ficou mostra a Figura 3.27:

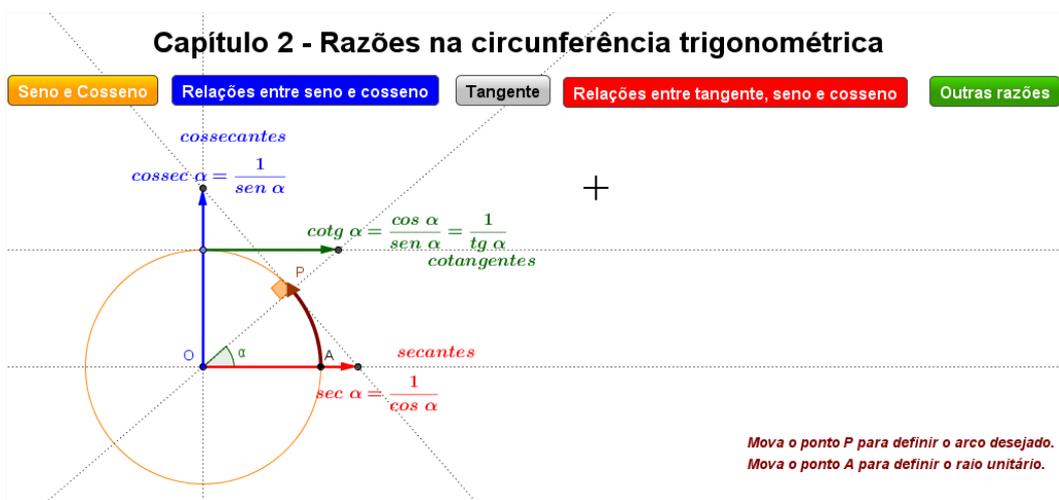


Figura 3.27: Secção Outras razões: do autor, 2015.

Portanto o applet está pronto para ser feito o upload para o GeogebraTube, conforme descrito no passo 3.3.23. Encerra-se aqui a construção digital deste capítulo.

### 3.7 Passo 29 - Construindo o *applet* do capítulo 3 - Triângulos quaisquer do volume 2 da coleção

Neste capítulo que trata sobre triângulos quaisquer foram incluídos inicialmente os textos e os botões das seções, como passos 3.3.1 ao 3.3.12 (a imagem a seguir fala por si). Os valores booleanos deste *applet* são "inicio", "leisen", "leicos", "introsen", "teosen", "intrococ" e "teococ" ativados cada um de acordo a programação do botão a ele associado (os nomes dos valores booleanos sugerem o nome dos botões). É elucidado na introdução do capítulo os triângulos acutângulos e obtusângulos e, apesar do livro não trazer uma imagem ou exemplo de cada um deles optou-se em construir um triângulo dinâmico de modo que ao usuário interagir movendo seus vértices é exibida sua característica (acutângulo ou obtusângulo).

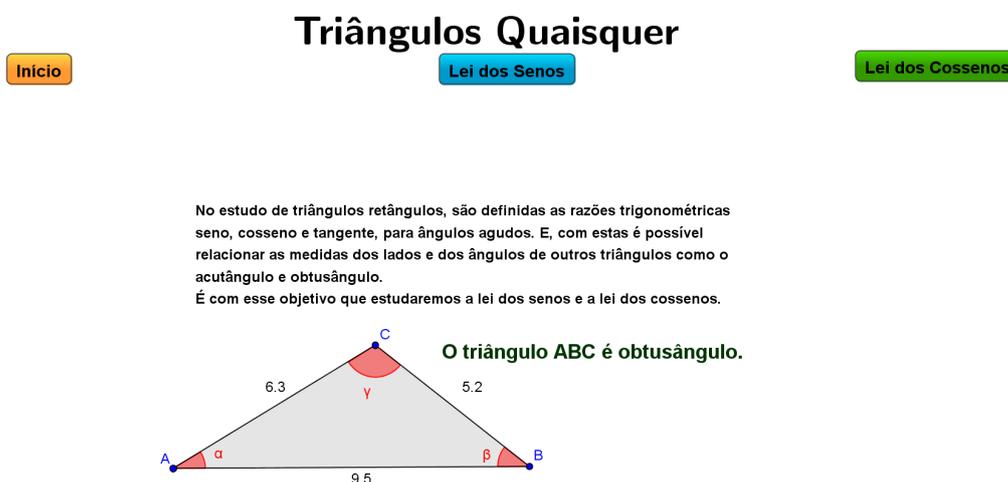


Figura 3.28: Secção Início: do autor, 2015.

Neste caso criou-se um triângulo e, em seguida marcaram-se seus ângulos internos, alterando a propriedade destes para exibir apenas seus nomes. Posteriormente, digitaram-se três textos informando o tipo do triângulo e definiu-se sua condição de exibição de acordo os ângulos internos do triângulo:

Condição para Exibir Objeto(s)
inicio $\hat{=}$ true $\wedge$ ( $\beta < 90^\circ$ ) $\wedge$ ( $\alpha < 90^\circ$ ) $\wedge$ ( $\gamma < 90^\circ$ )

Condição para Exibir Objeto(s)  
 $\text{inicio} \neq \text{true} \wedge (\beta \neq 90^\circ \vee \alpha \neq 90^\circ \vee \gamma \neq 90^\circ)$

Condição para Exibir Objeto(s)  
 $(\beta > 90^\circ) \vee (\alpha > 90^\circ) \vee (\gamma > 90^\circ) \wedge \text{inicio} \neq \text{true}$

As condições acima são, respectivamente para os textos "O triângulo ABC é acutângulo.", "O triângulo ABC é retângulo." e "O triângulo ABC é obtusângulo.". Como a janela do *Geogebra* permite malha é possível obter todos eles, interagindo com a figura (triângulo) ao mover seus vértices. A seção seguinte habilitada pelo botão "Lei dos senos". Foram incluídos duas subseções: Introdução e Teorema dos senos; sendo a primeira "Introdução" fora incluído um recorte do texto e imagem presentes no livro, que traz uma situação-problema hipotética onde se busca calcular a distância entre dois condomínios separados por uma região alagadiça, onde um topógrafo mede distâncias e ângulos. E, ao final o autor comenta que ao aprender o conteúdo "Lei dos senos" esta situação problema poderá ser resolvida bem como outras.

### Triângulos Quaisquer

Inicio
Lei dos Senos
Lei dos Cossenos

Introdução
Teorema

Do entrocamento (E) de uma rodovia saem dois pequenos trechos retíneos da estrada ("retões"), em um terreno plano, que levam às entradas de dois condomínios, indicados pelas letras A e B. Deseja-se determinar a distância entre A e B, mas a medição direta é difícil, pois há uma região alagadiça entre esses pontos. Observe na figura, a vista frontal de A e B a partir de E. Com auxílio de um aparelho adequado, o topógrafo mediu esse ângulo, obtendo 65°. Em seguida, percorreu os 600 metros do "retão" EA e, a partir do ponto A, mediu o ângulo entre as retas EA e EB, obtendo 38°.

Conhecedor de matemática, o topógrafo sabia que que já tinha reunido informações suficientes para determinar a distância entre as entradas dos dois condomínios (distância entre A e B).

Por meio do teorema que que apresentaremos a seguir, conhecido como LEI DOS SENOS, poderemos resolver este e outros problemas.

Ilustrações sem escala ou em escalas diferentes. Cores artificiais.

+

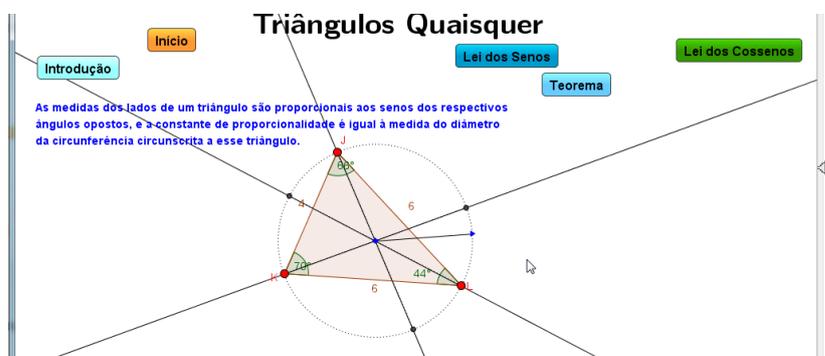
Entrada:

Figura 3.29: Subseção Introdução: do autor, 2015.

### 3.7.1 Subseção Teorema dos senos

A segunda subseção "Teorema" é feita a construção de uma circunferência dado centro e um de seus pontos, e sobre a circunferência são determinados três pontos distintos e construído um triângulo.

São determinadas também as três retas que passam pelos vértices do triângulo e pelo centro da circunferência. Marcam-se os outros três pontos de interseção com a circunferência, simétricos aos vértices do triângulo. Oculta-se as retas e definem os segmentos com formato pontilhado para se ter menos destaque nos mesmos. A imagem a seguir mostra a construção em andamento:



Inclui-se mais alguns textos e algumas fórmulas em escrita  $\text{\LaTeX}$ . Altera-se as propriedades dos objetos para que sejam exibidas o rótulo de suas medidas.

### Triângulos Quaisquer

Início
Lei dos Senos
Lei dos Cossenos

Introdução
Teorema

As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.

**Demonstração :** Dado um triângulo ABC e sua circunferência circunscrita. Sejam O e r o centro e a medida do raio dessa circunferência.  $\angle BAC$ ,  $\angle ABC$  e  $\angle BCA$  são os ângulos do triângulo ABC com vértices em A, B, e C, respectivamente.

Movendo um dos vértices do triângulo verifica – se que a medida do ângulo e do lado oposto não se alteram, pois são ângulo e corda inscritos na circunferência. Posicionando o vértice sobre um dos diâmetro determina – se um ângulo reto nesse vértice e, conseqüentemente um triângulo retângulo ABC.

Então :  $\text{sen}(\angle BAC) = \frac{a}{2r} \Rightarrow \text{sen} \hat{A} = \frac{a}{2r} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen} \hat{A}} = 2r$ .

De modo análogo temos :

$$\frac{b}{\text{sen} \hat{B}} = 2r \text{ e } \frac{c}{\text{sen} \hat{C}} = 2r.$$

Segue a expressão da lei dos senos :

$$\frac{a}{\text{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen} \hat{C}} = 2r.$$

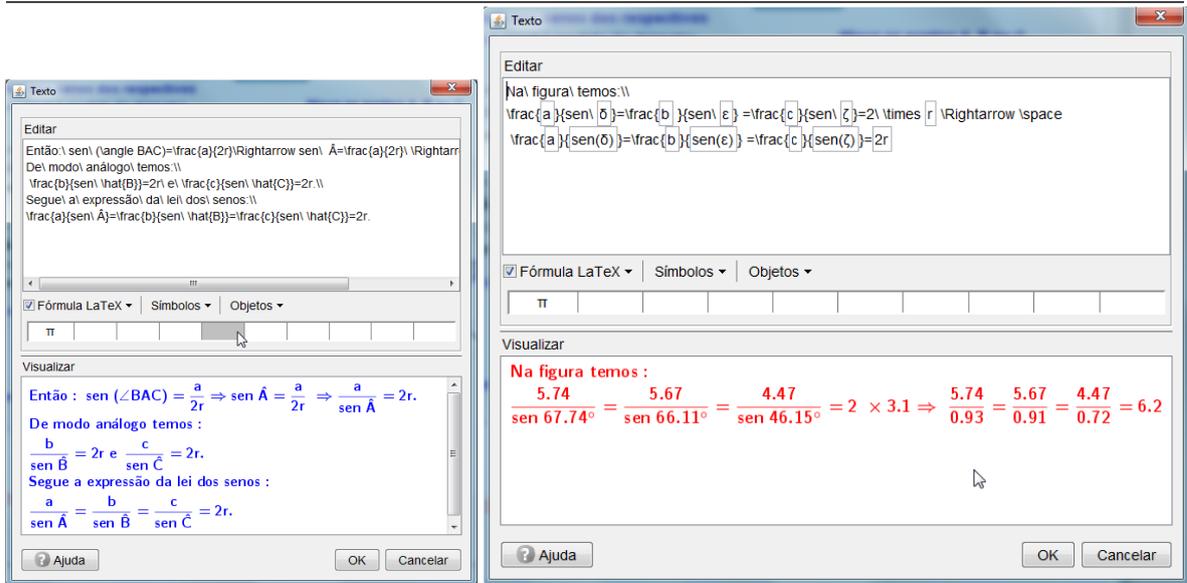
Na figura temos :

$$\frac{5.74}{\text{sen } 67.74^\circ} = \frac{5.67}{\text{sen } 66.11^\circ} = \frac{4.47}{\text{sen } 46.15^\circ} = 2 \times 3.1 \Rightarrow \frac{5.74}{0.93} = \frac{5.67}{0.91} = \frac{4.47}{0.72} = 6.2$$

Mova os pontos A, B ou C.

Figura 3.30: Subsecção Teorema dos Senos: do autor, 2015.

Os textos estão separados por cor (caixas de texto individuais) e, conseqüentemente as escritas dos dois últimos são:



Nesta última o programa representa e calcula os senos dos ângulos do triângulo dinâmico. Neste *applet* optamos pelo arredondamento de uma casa decimal no menu "Opções" no item "Arredondamento". Como nesta subseção a demonstração é interativa, foi inserido um texto-dica "Mova os pontos A, B ou C.". Pensa-se e acredita-se que aqui optou-se em mostrar os casos gerais de triângulos que nem sempre na prática possuem seus ângulos internos com medidas notáveis ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  e seus múltiplos) e, no entanto, tem seus senos rigorosamente definidos.

### 3.7.2 Subseção Teorema dos Cossenos

Na seção "Lei dos cossenos" segue o mesmo roteiro feito na seção "Lei dos senos". A subseção "Introdução" apresenta-se um texto com a situação-problema hipotética sobre a construção de um túnel ligando duas praias de uma cidade litorânea, onde um funcionário usando barco e aparelhos calcula duas distâncias e um ângulo. A Figura 3.31 é a subseção já pronta.

Já na subseção "Teorema" a fixemos com textos envolvendo a demonstração dividida em duas partes: triângulo acutângulo e triângulo retângulo e a construção geométrica foi de um triângulo dinâmico com seus vértices, ângulos, altura relativa a um dos vértices determinados previamente (incluiu-se texto para os rótulos das medidas e dos vértices) e as condições para o ângulo suplementar  $\eta$  de modo que só se torna visível quando  $(\eta > 90^\circ) \wedge teocos = true$  e a medida  $(c - m)$  só se torna visível quando  $teocos = true \wedge (\eta < 90^\circ)$ .

Colocou-se também uma cor de fundo (a critério do autor) para o fundo do enunciado da lei dos cossenos. Encerra-se aqui este *applet*, o que o torna apto para upload no *Geogebra*tube descrito no passo 3.3.23. Em tempo, como as explicações das leis do seno e cosseno são possíveis resolver os problemas apresentados na introdução, sendo necessária a intervenção do professor/operador para isto. É sugerido que se movimente os vértices do triângulo de modo a determinar as medidas dos ângulos e dos lados

## Triângulos Quaisquer

Início
Lei dos Senos
Lei dos Cossenos

Introdução
Teorema

A prefeitura de uma cidade litorânea está estudando a viabilidade de construir um túnel com traçado retilíneo para atravessar um trecho montanhoso e ligar as praias Brava e Mansa pela avenida Beira Mar, que está interrompida entre elas. Vamos supor que todo o terreno ao redor dos morros seja plano.

Em uma pequena embarcação e munido de GPS e aparelhos de medição, um funcionário especializado avistou do ponto F os pontos B e M mais próximos à base do morro. (Observe figura a seguir). Feitas as medições o funcionário verificou que, naquele momento, estava a 1,5KM de B e a 3,2km de M; além disso mediu os ângulos formados pelas retas FB e FM, obtendo  $41^\circ$ .

Se o projeto for aprovado, quantos quilômetros de extensão terá o túnel de traçado, considerando a medida do segmento BM como base para determinação da extensão desse túnel?

Por meio do teorema a seguir, denominado LEI DOS COSENOS, podemos resolver esse e outros problemas.

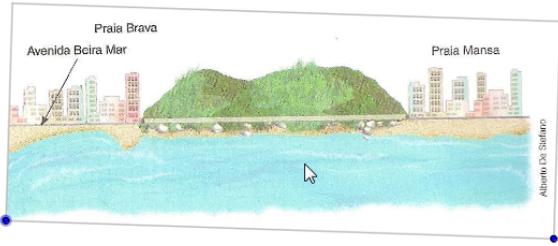
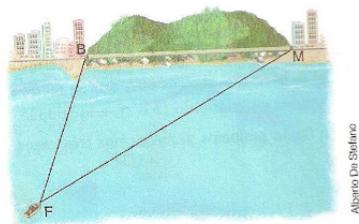



Figura 3.31: Subsecção Introdução: do autor, 2015.

## Triângulos Quaisquer

Início
Lei dos Senos
Lei dos Cossenos

Introdução
Teorema

Em todo o triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, diminuída do dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.

Seja o triângulo acutângulo ABC e  $CH = h$ , a medida da altura relativa ao lado AB.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta BCH : a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \Delta ACH : h^2 = b^2 - m^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cm \quad (1)$$

$\Delta ACH : \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad (2)$ . Donde, substituindo (2) em (1) vem :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}. \text{ Analogamente podemos obter :}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}.$$

Para o triângulo obtusângulo ABC temos que  $\cos(180^\circ - \hat{A}) = -\cos(\hat{A})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta BCH : a^2 = h^2 + (c + m)^2 \\ \Delta ACH : h^2 = b^2 - m^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cm \quad (1)$$

$\Delta ACH : \cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos \hat{A} \quad (2)$ . Donde, substituindo (2) em (1) vem :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}. \text{ Analogamente, } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \text{ e } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}.$$

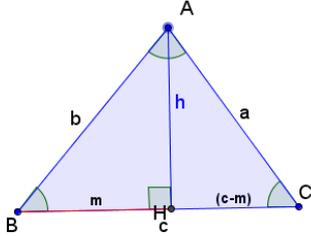


Figura 3.32: Subsecção Teorema dos Cossenos: do autor, 2015.

conforme o enunciado pede. E caso as medidas sejam exageradamente grandes ou pequenas se trabalha com medidas proporcionais, como mostra a Figura 3.32. Após estas explicações, já se pode passar para o próximo capítulo que tratará da área de figuras planas.

## 3.8 Passo 30 - Construindo o *applet* do capítulo 8 - Áreas de figuras planas do volume 2 da coleção

Com as ideias apresentadas nos dois capítulos do volume 1 e nos três capítulos do volume 2 da coleção [1] abordou e apresentou um conjunto de conteúdos (ferramentas) para se estudar a área de figuras planas, as quais se apresentam no capítulo 8 do referido volume (os outros capítulos são sobre funções trigonométricas, transformações de arco, matrizes, determinantes e sistemas lineares). Nesse sentido, se quer reafirmar que já foram descritos todos os passos para a construção de figuras planas nos passos anteriores, desde polígonos à formas circulares, as quais iremos tomar como já conhecidas para construir este *applet*. Sendo assim após realizar alguns dos passos já mencionados a tela inicial do *applet* que exibe o conteúdo do botão "Introdução" ficou assim como na Figura 3.33:

### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Freqüentemente usamos a geometria de objetos do nosso cotidiano para compreender conceitos matemáticos. A visualização e a medição desses objetos são estratégias para a descoberta e compreensão de propriedades geométricas. Em situações tais como calcular as dimensões de um terreno, o custo para envernizar a superfície de uma porta, ou, ainda, o custo envolvido na confecção de um quadro, as quantidades envolvidas dependem do cálculo de áreas de superfícies. As imagens a seguir são exemplos de aplicações destes cálculos:



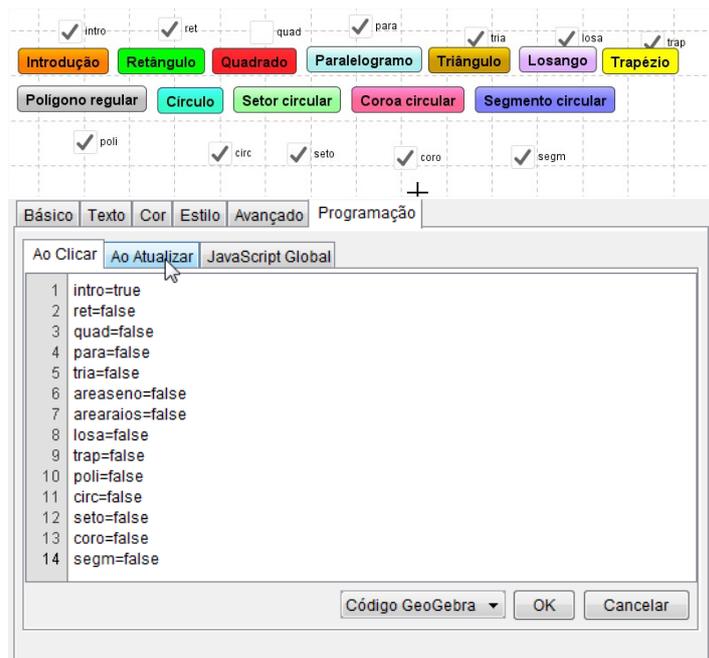


Neste capítulo, vamos revisar alguns conteúdos estudados no ensino fundamental que serão úteis para a resolução de problemas de Geometria Métrica Espacial: áreas de superfícies planas delimitadas. De modo geral, área é a medida da extensão de uma superfície, expressa em uma unidade padrão preestabelecida (a unidade de área é um quadrado de lado 1). Mas, como são definidos os padrões de medida? É o Sistema Internacional de Unidades (SI) que estabelece as unidades básicas de medidas e as unidades derivadas, as quais podem ser expressas a partir das unidades de base. Particularmente, estaremos nos referindo à unidade básica de comprimento — o metro — e às unidades dela derivadas, conforme mostrado na tabela abaixo:

Unidade (SI)		
Grandeza	Nome	Símbolo
comprimento	metro	m
superfície	metro quadrado	m <sup>2</sup>
volume	metro cúbico	m <sup>3</sup>

Figura 3.33: Seção Introdução: do autor, 2015.

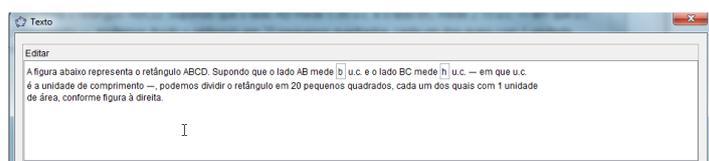
A partir da imagem anterior verificamos que foram inseridos apenas textos, botões e imagens, cujos comandos foram mencionados nos passos 3.3.1 ao 3.3.12. Em cada um dos botões exibidos a programação do mesmo ficou como mostra a figura seguinte, com os seus respectivos valores booleanos que foram ocultados posteriormente:



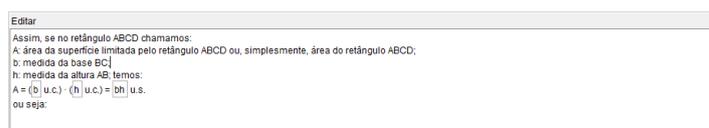
Os itens 1 ao 14 da imagem anterior correspondem aos valores booleanos associados aos botões-seção, com exceção dos itens 6 e 7 que são subseções do botão "Triângulo" e seus nomes são as letras iniciais de cada seção.

O leitor deve ficar atento pois ao passar de uma seção para outra não será explanado que será necessário vincular os objetos ao valor booleano da seção ativa, uma vez que este procedimento já fora elucidado diversas vezes. Portanto, ao se clicar na seção Retângulo vemos o seu conteúdo:

Onde, foram incluídos textos dinâmicos relativos às medidas da base e da altura da figura (destacado na imagem abaixo por um reticulado nas letras b e h respectivamente), como é mostrado a seguir:



E, também foram destacados os pontos das extremidades dos segmentos (lados) do retângulo que determinam as suas medidas "b" e "h" respectivamente utilizando para isto a aparência de seta, que dá a ideia de mobilidade.



Observa-se que há um texto destacado na parte central inferior do seção, que é exatamente a escrita da fórmula da área desta mesma figura e isto ocorrerá em todas as seções.

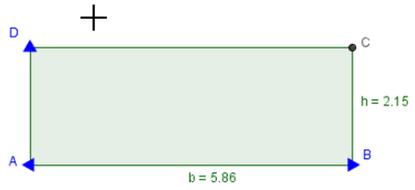
Na seção seguinte "Quadrado" representado na Figura 3.35 também foram incluídos

### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Poligono regular
Circulo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

A figura abaixo representa o retângulo ABCD. Supondo que o lado AB mede 5.86 u.c. e o lado BC mede 2.15 u.c. — em que u.c. é a unidade de comprimento —, podemos dividir o retângulo em 20 pequenos quadrados, cada um dos quais com 1 unidade de área, conforme figura à direita.



Assim, se no retângulo ABCD chamamos:

- A: área da superfície limitada pelo retângulo ABCD ou, simplesmente, área do retângulo ABCD;
- b: medida da base BC;
- h: medida da altura AB; temos:

$$A = (5.86 \text{ u.c.}) \cdot (2.15 \text{ u.c.}) = 12.59 \text{ u.s.}$$

ou seja:

$A = b \cdot h$   
**A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.**

Figura 3.34: Seção Retângulo: do autor, 2015.

textos dinâmicos correspondentes às medidas do lado da figura.

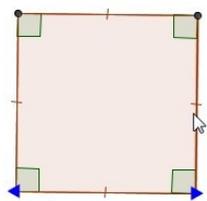
### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Poligono regular
Circulo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Como todo quadrado é um retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura, a fórmula da área do retângulo pode ser usada para obter-se a expressão da área de um quadrado.

Dessa forma, se  $l$  é a medida do lado de um quadrado, então, se  $b = l$  e  $h = l$ , temos :

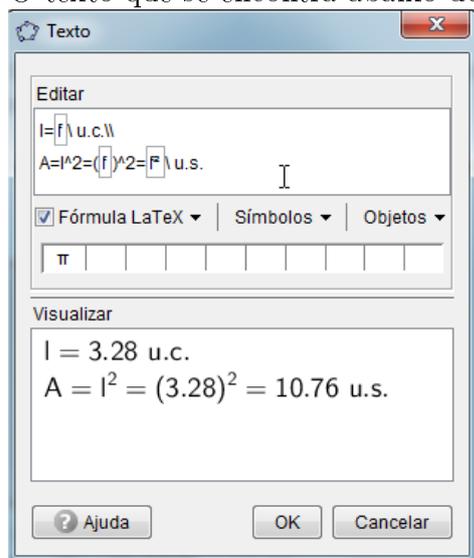
$$A = b \cdot h \Rightarrow A = l \cdot l \Rightarrow A = l^2$$


$l = 3.28 \text{ u.c.}$   
 $A = l^2 = (3.28)^2 = 10.76 \text{ u.s.}$

**A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado.**

Figura 3.35: Seção Quadrado: do autor, 2015.

O texto que se encontra abaixo do quadrado tem código-fonte:



Na seção "Paralelogramo" temos a construção da Figura 3.36 a seguir, onde o retângulo à direita do leitor é uma translação do retângulo ADQP. Sendo a figura dinâmica os textos relativos às suas medidas de comprimento e área também são instantaneamente recalculadas ao se interagir com os elementos da mesma.

### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Determinemos a área do paralelogramo ABCD, representado na figura ao lado, em que b e h são as medidas da base e da altura, respectivamente.

Área = 10.82 u.s.

Observe que, projetando-se os vértices A e D sobre a reta BC, obtêm-se os pontos P e Q, respectivamente, ficando assim determinado o retângulo APQD, como é mostrado na figura ao lado.

Note que os triângulos APB e DQC são congruentes e, portanto, têm áreas iguais.

Assim, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo APQD, ou seja:

$$A = b \cdot h$$

$$A = 4.92 \text{ u.c.} \times 2.2 \text{ u.c.}$$

$$A = 10.82 \text{ u.s.}$$

**A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.**

Figura 3.36: Seção Paralelogramo: do autor, 2015.

Para seção "Triângulos", Figura 3.37, foram acrescentados duas subseções e seus respectivos botões quando a mesma estiver ativa: "Área a partir dos lados e do raio da circunferência circunscrita" e "Área a partir dos lados e do raio da circunferência inscrita".

### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Sector circular
Coroa circular
Segmento circular

Área pelos lados e raio da circunferência circunscrita
Área pelos lados e raio da circunferência inscrita

Seja o triângulo ABC, cuja base AC mede b e a altura relativa a essa base mede h, representado na figura abaixo.

Note que as respectivas paralelas aos lados AC e AB, traçadas pelos vértices B e C, interceptam-se no ponto D, determinando assim o paralelogramo ABCD, cujas medidas da base e da altura são b e h, conforme mostrado na figura abaixo.

Como  $AB = DC$ ,  $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$  e  $AC = DB$ , os triângulos ABC e DCB são congruentes e, portanto, suas áreas são iguais. Logo, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo ABCD, ou seja:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{9,56 \cdot 2,09}{2} \Rightarrow A = \frac{19,94}{2} = 9,97 \text{ u.s.}$$

**A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura.**

Figura 3.37: Seção Triângulo: do autor, 2015.

A tela primeira trata-se da fórmula obtida da área de um paralelogramo e, para dar ênfase a isto os triângulos inferiores são translações dos triângulo superior e, portanto, exatamente equivalentes. Ao se clicar no botão "Área pelos lados e raio da circunferências circunscrita" temos conforme mostra a Figura 3.38:

E clicando sobre o botão "Área pelos e raio da circunferência inscrita" é exibido na tela a subseção (ver Figura 3.39):

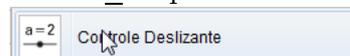
É perceptível que se fora construído os elementos sobre o mesmo triângulo e foi-se programado para se exibir de acordo a subseção.

Para a seção losango, Figura 3.40 temos:

As medidas do losango podem ser redefinidas pelos vértices  $S, R$  e  $Q$ , os quais determinam as medidas de suas diagonais. O enunciado e a fórmula foram extraídos do livro e se definiu um texto dinâmico para o cálculo da área.

A construção da seção "Trapézio", ficou como se é mostrado na Figura 3.41 e foi-se utilizou-se a translação de objetos como fora explicado no passo 3.3.22:

Dando continuidade às seções do capítulo a seguinte se refere à área de polígonos regulares. Neste inserimos um controle deslizante denominado "n\_4" para se determinar o número de lados do polígono usando a ferramenta



### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Área pelos lados e raio da circunferência circunscrita
Área pelos lados e raio da circunferência inscrita

Seja o triângulo A'B'C' inscrito na circunferência X de centro O e raio de medida R, como mostra a figura ao lado. Já vimos que a área do triângulo ABC pode ser calculada por:

$$A = \frac{ab \operatorname{sen} \hat{C}}{2}$$

Usando a lei dos senos, podemos escrever :

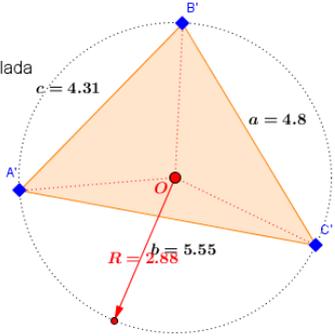
$$\frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = 2R \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{2R}$$

E substituindo na equação anterior :

$$A = \frac{abc}{4R}$$

Na figura temos :

$$A = \frac{4.8 \text{ u.c.} \times 5.55 \text{ u.c.} \times 4.31 \text{ u.c.}}{4 \times 2.88 \text{ u.c.}} = \frac{114.98 \text{ u.s.}}{11.51} = 9.99 \text{ u.s.}$$



A área de um triângulo é o quociente do produto dos seus lados e o quádruplo do raio da circunferência circunscrita.

Figura 3.38: Subsecção Área pelos lados e raio da circunferências circunscrita da seção Triângulo: do autor, 2015.

em  na barra principal. Em seguida foi se alterado seu valores como é mostrado a seguir:

Básico	Controle Deslizante	Cor	Posição	Avançado	Programação
<b>Intervalo</b>					
min: 3	max: 30	Incremento: 1			
<b>Controle Deslizante</b>					
<input type="checkbox"/> Fixo	<input type="checkbox"/> Aleatório (F9)	Horizontal	Largura: 200 px		
<b>Animação</b>					
Velocidade: 1		Repetir: Oscilando			

Foi preciso definir um polígono regular que tivesse o número de lados equivalente ao valor do controle deslizante e para isto construiu-se um segmento "k\_6" de extremidades em 'O\_2' e "S\_2" e usando o campo de entrada foi-se digitado os valores "Polígono[O\_2, S\_2, n\_4]", que corresponde à descrição dada pelo programa no campo de entrada "Ponto, Ponto, número de lados".

### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Área pelos lados e raio da circunferência circunscrita
Área pelos lados e raio da circunferência inscrita

“Seja o triângulo A'B'C' representado na figura ao lado, em que a, b e c são as respectivas medidas dos lados B'C, A'C e A'B' (era medida do raio da circunferência de centro O, inscrita nesse triângulo. Como os lados de A'B'C são tangentes à circunferência, então OP, OQ e OR são perpendiculares a A'B', B'C e A'C, respectivamente, ou seja:

- OP = r (medida da altura do triângulo A'OB', relativa ao lado A'B');
- OQ = r (medida da altura do triângulo B'OC, relativa ao lado B'C);
- OR = r (medida da altura do triângulo A'OC, relativa ao lado A'C).

Chamando A a área de A'B'C, A<sub>1</sub> a área de A'OB', A<sub>2</sub> a área de B'OC e A<sub>3</sub> a área de A'OC, então, como  $A = A_1 + A_2 + A_3$ , temos:

$$A = \frac{ar + br + cr}{2} = \frac{(a + b + c)r}{2} \Rightarrow A = \frac{pr}{2}, \text{ onde } p \text{ é o perímetro.}$$

Na figura ao lado temos :

$$A = \frac{(4.31 \text{ u.c.} + 5.55 \text{ u.c.} + 4.8 \text{ u.c.}) \times 1.36 \text{ u.c.}}{2} \Rightarrow A = \frac{14.67 \times 1.36 \text{ u.s.}}{2} = 9.99 \text{ u.s.}$$

+

**A área de um triângulo é a metade do produto do perímetro pelo raio da circunferência inscrita.**

Figura 3.39: Subsecção Área pelos lados e raio da circunferências circunscrita da seção Triângulo: do autor, 2015.

### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Considerando que o losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si, observe na figura que ele pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes e sua área é a soma das áreas desses triângulos.

Assim sendo, no losango PQRS, se m é a medida da diagonal maior e n é a medida da diagonal menor, a área A de sua superfície é tal que:

$$A = 4 \cdot A_{MRS} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{mn}{2}$$

Na figura ao lado temos :

$$A = \frac{mn}{2} = \frac{3.78 \text{ u.c.} \times 5.6 \text{ u.c.}}{2} = 10.58 \text{ u.s.}$$

**A área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.**

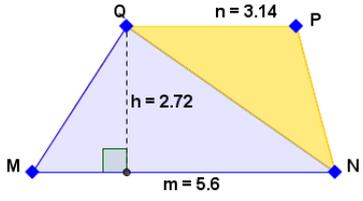
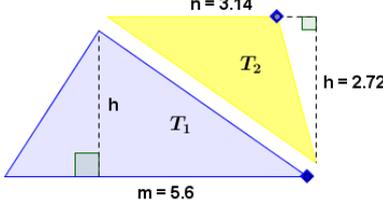
Figura 3.40: Seção Losango: do autor, 2015.

### Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Considere o trapézio MNPQ da figura, no qual as bases MQ e NP medem m e n, respectivamente. Observe, na figura, que esse trapézio pode ser decomposto em dois triângulos  $T_1$  e  $T_2$ , de mesma altura e tais que a soma de suas áreas é igual à área A de MNPQ.

Assim, temos :

$$A = \frac{mh}{2} + \frac{nh}{2} = \frac{mh + nh}{2}, \text{ ou seja :}$$

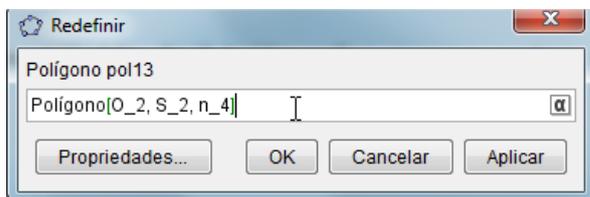
$$A = \frac{(m + n)h}{2}$$

Na figura acima temos :

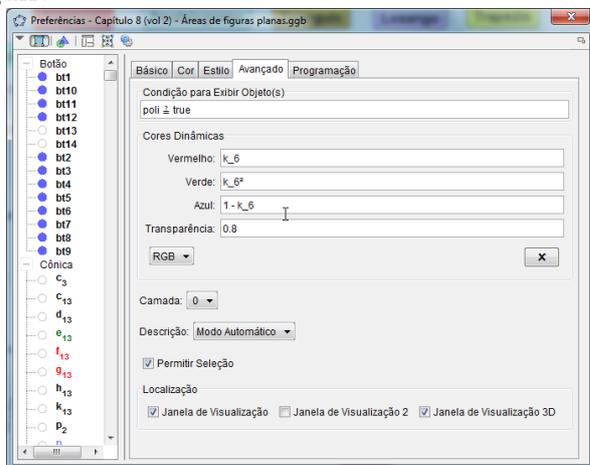
$$A = \frac{(5.6 \text{ u.c.} + 3.14 \text{ u.c.}) \times 2.72 \text{ u.c.}}{2} = 11.89 \text{ u.s.}$$

A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

Figura 3.41: Seção Trapézio: do autor, 2015.



Após isto, formata-se o polígono para que sua cor possa variar de acordo à medida do seu lado. Nesta seção usamos os campos "Cores dinâmicas" e alteramos conforme a seguir:



Incluindo-se os textos e as fórmulas é mostrado a seguir esta seção:

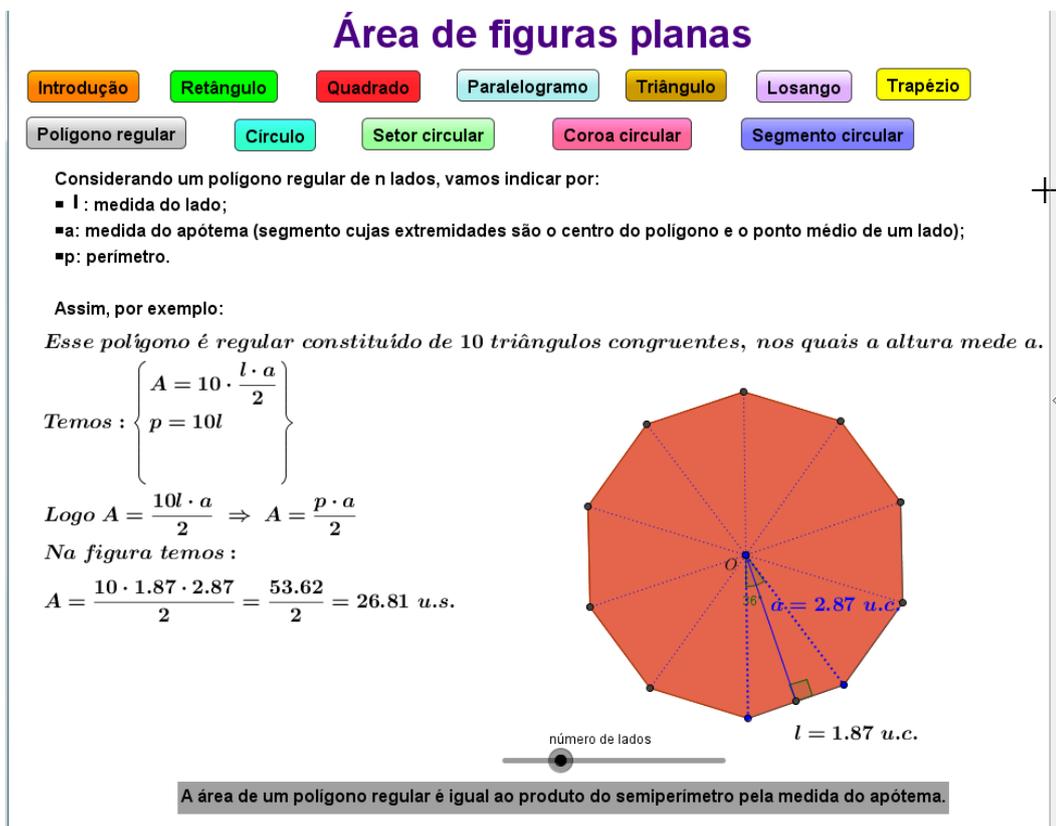
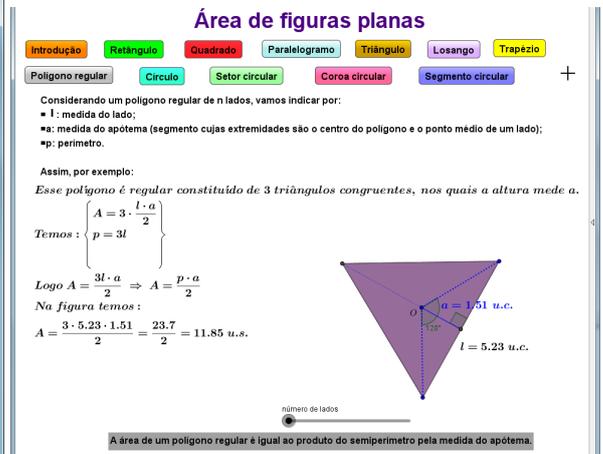
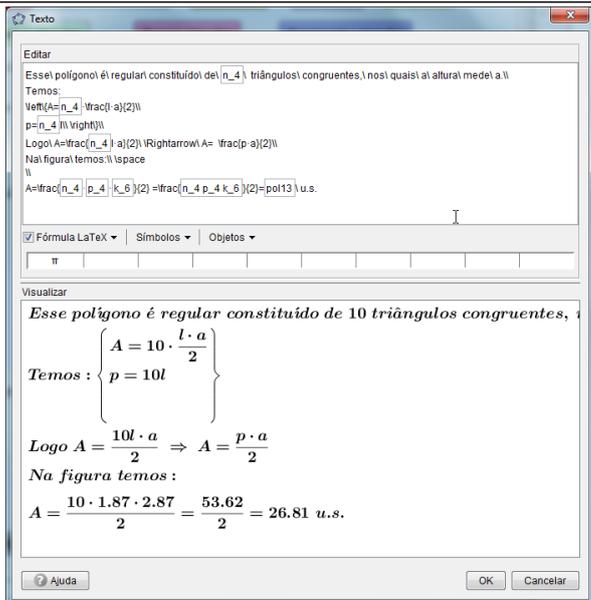


Figura 3.42: Seção Polígono regular: do autor, 2015.

Conforme abordagem dos autores no livro/capítulo, os mesmos trazem a área do círculo como um "polígono de n lados" com "n tendendo ao infinito". Então, na seção círculo, ver Figura 3.43, utilizou-se uma cópia e cola do polígono presente na seção "Polígono regular" e acrescentado um círculo circunscrito.

Na seção denominada "Setor circular", representada na Figura 3.44, foram feitas novas construções geométricas para se definir a área de um setor circular, sabendo o raio,

## Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapezio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Considere a seguinte sucessão de polígonos regulares inscritos em círculos de raio de medida  $r$ . (arraste o controle deslizante "número de lados").

Observe nessa sucessão que, se o número de lados do polígono aumenta, o comprimento do apótema também aumenta, ao passo que o comprimento do lado diminui. Dessa forma, quando o número de lados de um polígono é extremamente grande:

- o seu perímetro ( $p$ ) é aproximadamente igual ao comprimento da circunferência do círculo ( $2\pi r$ );
- a medida do seu apótema ( $a$ ) é aproximadamente igual à medida do raio do círculo ( $r$ ), ou seja:

$$\begin{cases} p = 2\pi r \\ a = r \end{cases}$$

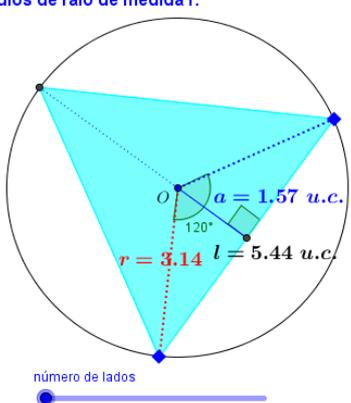
Como a área de um polígono regular é dada por  $A = \frac{p \cdot a}{2}$ , então, nesse caso, temos:

$$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

que é a expressão da área do círculo de raio de medida  $r$ . Assim:

$$A = \pi r^2$$

Na figura temos:  $A = \pi \cdot 3.14^2 = 9.85\pi$  u.s.



**A área de um círculo é igual ao produto do número real  $\pi$  pelo quadrado da medida do seu raio.**

Figura 3.43: Seção Círculo: do autor, 2015.

o arco ou ângulo do círculo. Para isto usou-se:



em . Foram formatados os pontos da extremidade do arco para dar ênfase à sua medida. Após estes comandos, obtêm-se a Figura 3.44

Em seguida, na seção Coroa circular, como mostra a Figura 3.45, foram incluídos os textos e as formas geométricas necessárias. Buscando dar noção precisa da coroa como "a área da coroa circular é a diferença entre a área dos círculos concêntricos de raios maior e menor" foi-se formatada as formas circulares de modo que uma sobrepusesse à outra. Sendo assim o círculo maior situado na camada 0 e o círculo menor, o raio e suas extremidades na camada 1. Isto é feito na aba avançado, após abrir as propriedades da figura.

Sendo assim, define-se a cor branca (a mesma do fundo do *applet*) para o círculo menor com transparência de 100%, inclui-se textos-dicas e fica como é mostrado a seguir:

## Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Na figura ao lado temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} C : \text{círculo de centro } O \text{ e raio de medida } r; \\ \alpha : \text{medida do ângulo de vértice } O. \end{array} \right.$$

Chama-se setor circular de centro  $O$ , raio de medida  $r$  e ângulo central de medida  $\alpha$ , a região determinada pela interseção de  $C$  com a região limitada pelos lados do ângulo. Assim, na figura, a região colorida representa o setor circular definido. Dado um setor circular de centro  $O$ , com raio de medida  $r$  e ângulo central de medida  $\alpha$ , vamos comparar sua área com as áreas de outros setores de mesmo raio, mas cujas medidas dos ângulos centrais são sucessivamente aumentadas (mova o ponto vermelho da circunferência). Dessa forma, concluímos que a área de um setor circular é diretamente proporcional à medida do ângulo central (ou ao comprimento do correspondente arco). Assim:

- quando a medida do ângulo central é dada em graus, a área do setor circular pode ser calculada pela seguinte regra de três:
 
$$\frac{A_s}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{360^\circ} \Rightarrow A_s = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

**Na figura acima temos:**  $A_s = \frac{119,99^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2,51^2 = 6,62 \text{ u.s.}$

- Note que, se a medida do ângulo central fosse dada em radianos, teríamos:
 
$$\frac{A_s}{\alpha} = \frac{\pi r^2}{2\pi} \Rightarrow A_s = \frac{\alpha r^2}{2}.$$

**Porém  $\alpha r$  é o comprimento  $x$  do arco. Então,**  $A_s = \frac{xr}{2} \Rightarrow A_s = \frac{5,26 \cdot 2,51}{2} = 6,62 \text{ u.s.}$

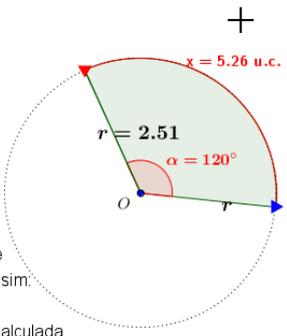
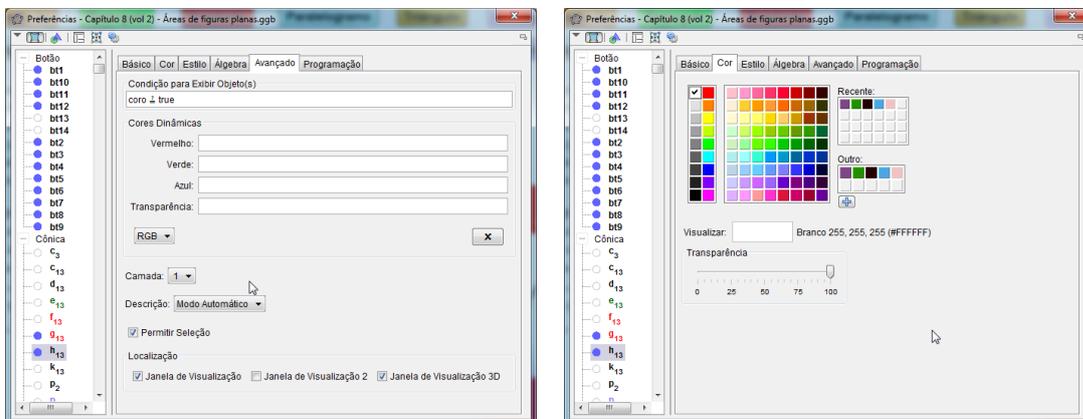


Figura 3.44: Seção Setor Circular: do autor, 2015.



Após isto temos a Figura 3.45:

Por fim a última seção deste capítulo 8, denominada Segmento Circular, conforme Figura 3.46, foram feitas novas construções, textos e figuras e, usando as camadas o triângulo compreendido pelo ângulo e a corda é fixado na camada 1 e o setor circular na camada 0, já que a área do segmento circular é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo.

Optou-se em representar o cálculo imediato, ou seja, o resultado de cada área e, neste caso fica a orientação de se trabalhar as fórmulas do setor circular e triângulo respectivamente ou então, caso o professor/instrutor queira poderá movimentar os pontos correspondentes à extremidade do ângulo e trabalhar a fórmula para ângulos

## Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  círculos concêntricos cujos respectivos raios medem  $R$  e  $r$ , com  $R > r$ . Chama-se coroa circular o conjunto de pontos que pertencem à região limitada pelas circunferências de  $C_1$  e  $C_2$ , ou seja, o conjunto dos pontos que pertencem a  $C_1$  e não pertencem a  $C_2$ , como mostra a figura ao lado.

Observe que a área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos cujos raios medem  $R$  e  $r$ .

Logo, sendo :

$A_C$  a área da coroa circular;

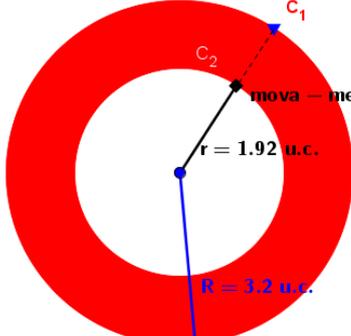
$A_R$  a área do círculo maior;

$A_r$  a área do círculo menor temos :

$$A_C = A_R - A_r \Rightarrow A_C = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_C = \pi(R^2 - r^2)$$

Na figura temos :

$R = 3.2$  u.c.;  $r = 1.92$  u.c.  $\Rightarrow A_C = \pi(3.2^2 - 1.92^2) = 6.54\pi$  u.s.



**A área da coroa circular é a diferença entre a área dos círculos de raios maior e menor.**

Figura 3.45: Seção Coroa Circular: do autor, 2015.

notáveis, onde é sugerido a fórmula:

$$A_{segmento} = \frac{r^2(\alpha - \text{sen}\alpha)}{2} \quad (3.1)$$

(sendo  $\alpha$  o ângulo dado em radianos).

Com base nestas construções e dos passos aqui desenvolvidos temos todas as figuras planas básicas construídas e, desta forma o conjunto de comandos para se produzir uma estrutura de figuras geométricas dinâmicas para os objetos de geometria espacial. Sendo assim o próximo capítulo fará uso dos principais comandos e ações desenvolvidas até aqui para a elaboração de objetos geométricos espaciais.

## Área de figuras planas

Introdução
Retângulo
Quadrado
Paralelogramo
Triângulo
Losango
Trapézio

Polígono regular
Círculo
Setor circular
Coroa circular
Segmento circular

Seja  $\widehat{AB}$  um arco de circunferência, contido em um círculo cujo raio mede  $r$ , como é mostrado na figura.

Chama-se segmento circular o conjunto de pontos que pertencem à parte do círculo limitada pelo arco  $\widehat{AB}$  e pela corda de extremidades A e B (destacados ao lado).

Assim, a área do segmento circular ( $A_{\text{seg}}$ ) é igual à diferença entre a área do setor circular ( $A_{\text{set}}$ ) e a área do triângulo AOB ( $A_{\Delta AOB}$ ).

$A_{\text{seg}} = A_{\text{set}} - A_{\Delta AOB}$ . Ou seja, na figura temos:

$A_{\text{seg}} = 7.08 \text{ u.s.} - 5.67 \text{ u.s.} = 1.41 \text{ u.s.}$

$$A_{\text{seg}} = \frac{r^2(\alpha - \text{sen } \alpha)}{2} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

A área do segmento circular é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo.

Figura 3.46: Seção segmento Circular: do autor, 2015.



# 4 A CONSTRUÇÃO DOS *APPLETS* DE GEOMETRIA ESPACIAL

*Uma geometria não é mais verdadeira que outra, ela somente pode ser mais conveniente.*  
Henri Poincaré

## 4.1 Passo 31 - Noções iniciais da janela 3D combinada com a janela 2D do *Geogebra*

Neste capítulo serão utilizadas as janelas 2D e 3D do software *Geogebra*. Então após abrir o *Geogebra*, com o mouse selecionar o menu "Exibir" e escolher "Janela de visualização" e "Janela de visualização 3D" como é mostrado na Figura 4.1 a seguir.

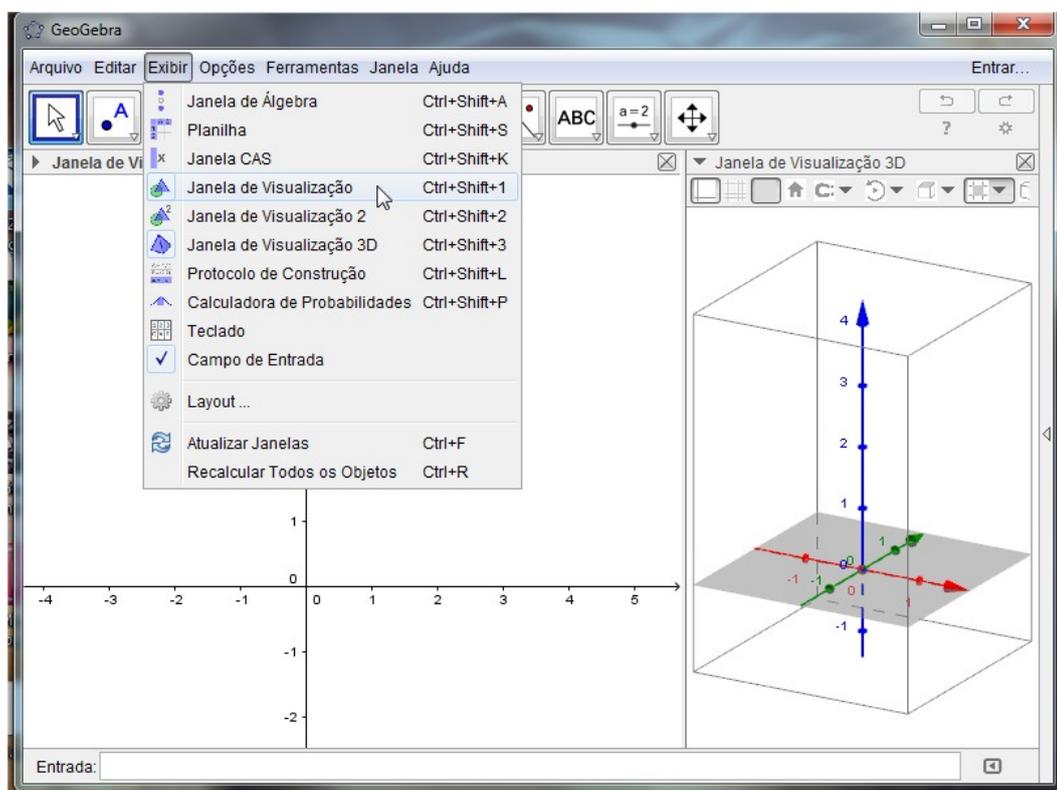


Figura 4.1: Tela de abertura do Geogebra com janelas 2D e 3D: do autor, 2015.

Será verificado que aparecerá duas janelas de visualização a 2D, de geometria plana à esquerda e de geometria espacial, a janela 3D à direita, uma ao lado da outra. Assim poderemos trabalhar o conteúdo na janela 2D e obter a representação de figuras espaciais na janela 3D, sendo que estes objetos serão ativados e/ou manipulados por botões os quais só aparecem na janela de visualização 2D.

Reitera-se tudo o que já fora explicados entre os passos 3.3.1 ao 3.8 para a criação de objetos, botões, textos, imagens de modo que a partir daqui não será comentado detalhadamente sobre isto, uma vez que neste capítulo o foco é a explanação das construções de elementos na janela 3D. Ou seja, reafirma-se que em cada *applet* realizou-se a programação dos botões e valores booleanos, texto e objetos ativos da janela 2D (que já se foi explicado diversas vezes como fazê-los) para funcionar concomitantemente com objetos da janela 3D.

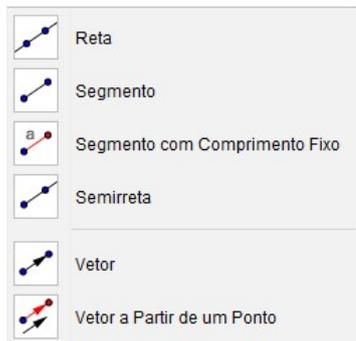
Sendo assim, observa-se que ao se clicar sobre a janela 3D aparece o seu conjunto de ferramentas na barra de ferramentas como é mostrado a seguir:



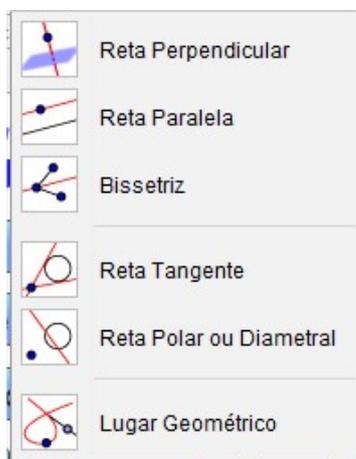
Estas são as ferramentas que poderão ser utilizadas nesta janela. Será explanado sobre cada um dos seus itens e isto se faz necessário, pois não fora tomado nenhum referencial teórico que explanasse as mesmas. A ferramenta mais à esquerda é  que corresponde à ferramenta seleção e mover objetos na janela como já se era feito na janela 2D. A próxima ferramenta  é um conjunto, pois ao clicar na sua seta do canto inferior direito e abrir suas opções temos:



Como é mostrado na imagem anterior, a legenda a cada ferramenta sugere a sua finalidade. Retornando à barra principal temos  que também é um conjunto e ao expandi-la temos:



Em seguida temos a ferramenta retas especiais (perpendicular, paralela, lugar geométrico etc)  cujas ferramentas embutidas são:



A próxima ferramenta da barra principal é  que corresponde à construção de polígonos. Após esta temos , referente à construção de círculos e suas partes, e as ferramentas embutidas são:



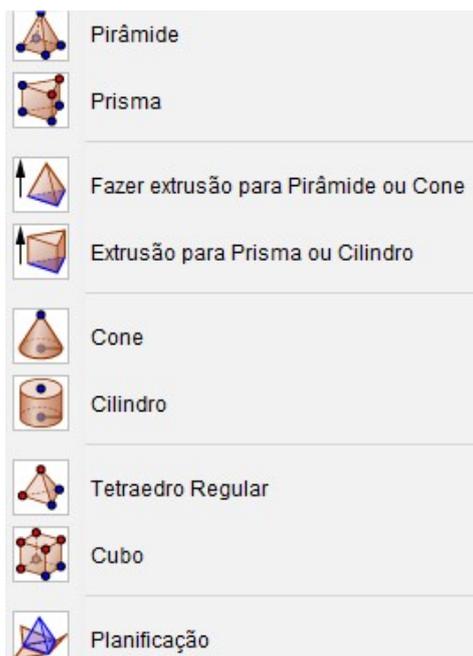
A ferramenta  se refere à interseção de superfícies. Já a próxima ferramenta



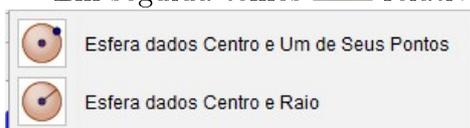
refere-se à construção de planos e as ferramentas expandidas são:



Na ferramenta  é possível construir as formas espaciais como o prisma, pirâmide, cone e cilindro, bem como extrudar (solidificar) figuras planas. Tais opções aparecem ao expandir a caixa:

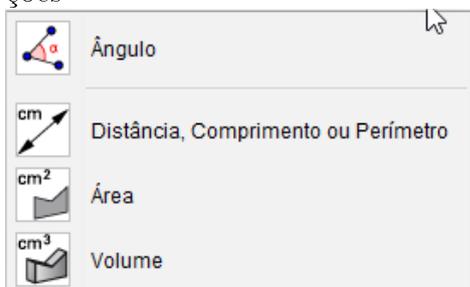


Em seguida temos  relativas à esfera que possui as ferramentas embutidas

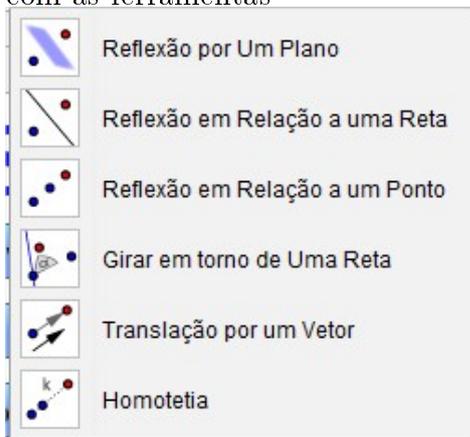


As quatro últimas caixas de ferramenta são:

 referente às operações com ângulos, distâncias, áreas e volume que possui as opções

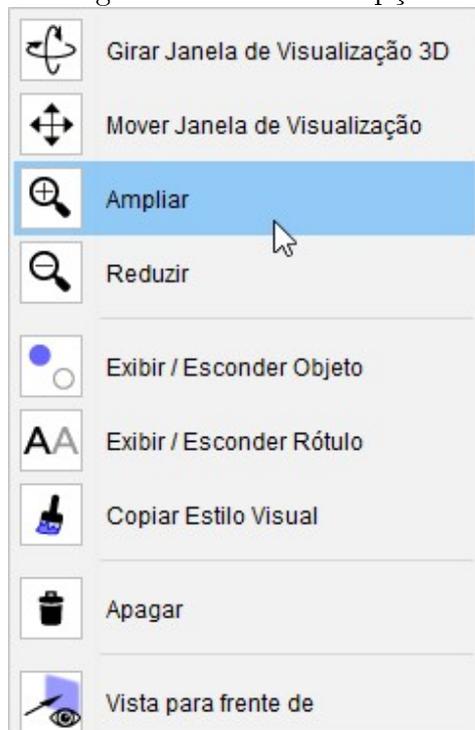


 correspondente à translação, reflexão e rotação de pontos, retas e planos no espaço com as ferramentas



A ferramenta relativa à inclusão de textos ;

E a ferramenta na extremidade esquerda  para rotacionar/orbitar/ampliar/reduzir a tela geométrica com as opções



Desta forma foi-se exibido todas as ferramentas embutidas disponíveis na barra de ferramentas. E, caso seja necessário criar algum objeto não listado isto será feito pela caixa de entrada, que é a barra inferior do software .

Além deste conjuntos grandes de ferramentas as janelas 2D e 3D possuem suas barras de estilos, respectivamente:



, ambas possuem quatro itens iguais (da esquerda para direita) que são  exibir e esconder eixos,  exibir e esconder malha de demarcação de coordenadas,  visualização padrão e  modo de captura de pontos quanto a sua disposição na tela por valor exato, livre ou fixo à malha numérica. Entretanto quanto à janela 3D os demais itens da barra de estilos a seguir serão utilizados sob demanda:

 para girar a tela na direção de um dos eixos principais;

 para trocar a face de visualização em direção aos planos principais  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$

e  para girar a tela até a visualização padrão.

Com base nesta explanação sucinta das ferramentas disponíveis na janela 3D será dado início à construção dos *applets* de geometria espacial e é o que será feito nas

próximas seções.

## 4.2 Passo 32 - Construindo o *applet* do capítulo 9 - Geometria Espacial de Posição, do volume 2 da coleção

Tendo conhecimento do que fora explanado nos passos 3.3.1 ao 3.8 é possível construir na janela 2D a estrutura dos conteúdos, botões e condições de exibição para qualquer enunciado, fórmula ou teorema e leis sobre figuras planas. Toda esta estrutura da janela de visualização 2D será utilizada em todos os próximos *applets* que possuem a janela 3D ativa, ou seja, para este capítulo (Geometria Espacial de posição) e para os capítulos Prisma, Pirâmide, Cilindro, Cone e Esfera as construções feitas na janela 3D são exibidas e ocultadas pelos botões e valores booleanos da janela 2D. Portanto, munido disto temos a seguir a tela Introdução do capítulo 9 já devidamente preenchida e formatada:

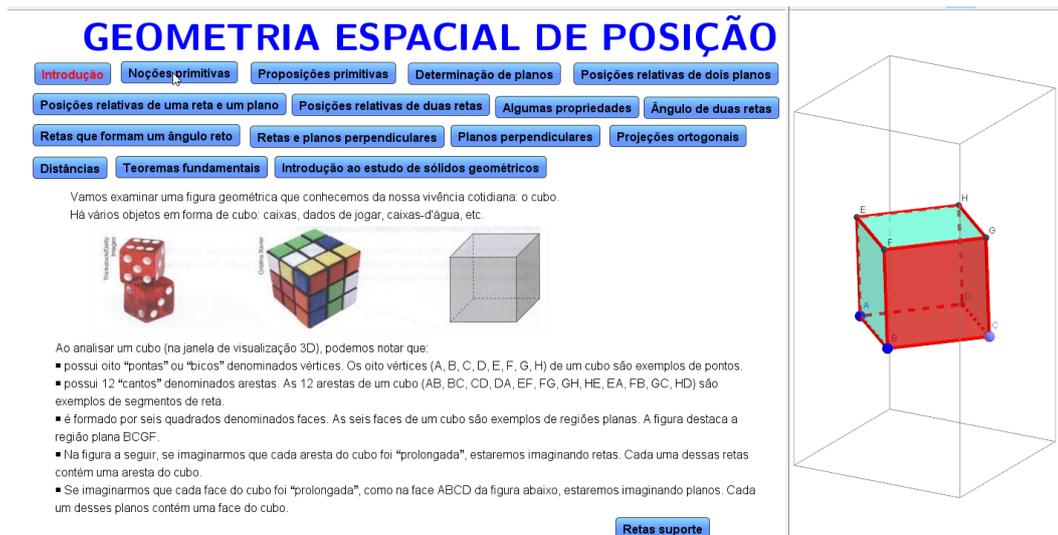
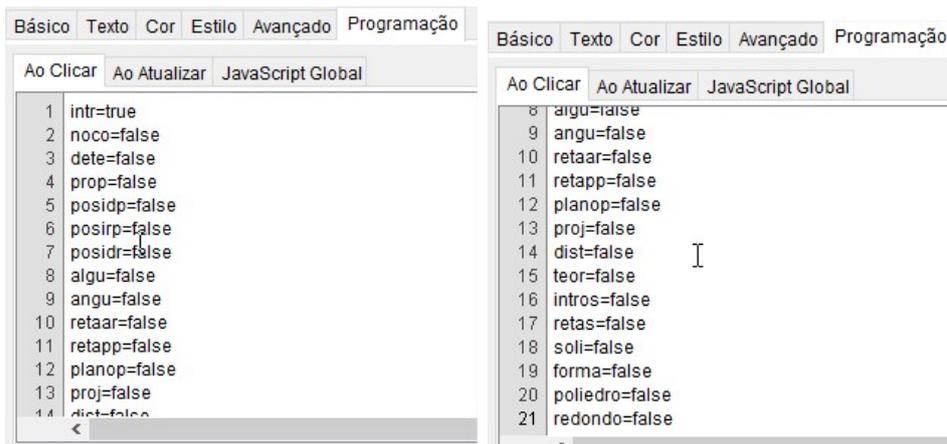
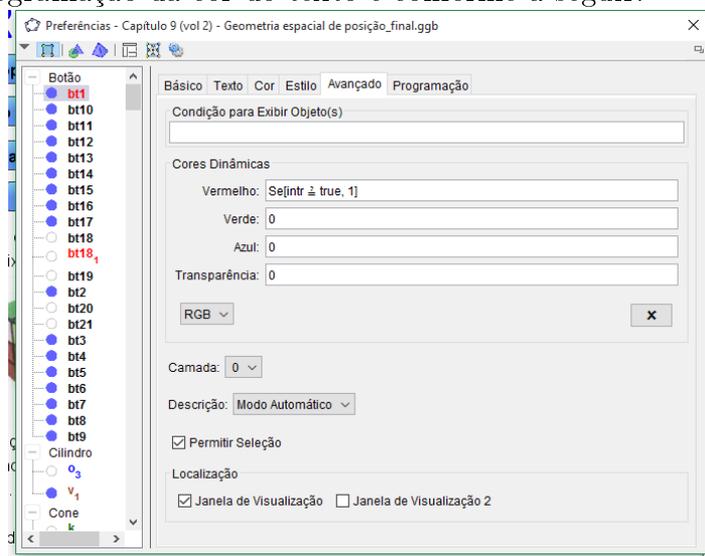


Figura 4.2: Seção Introdução do capítulo 9: do autor, 2015.

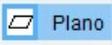
E, também se faz necessário exibir os valores booleanos criados neste *applet* que são acionados pelos botões:



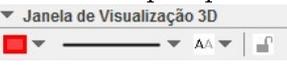
Após se definir os valores booleanos e os botões de ativação se fez necessário destacar o texto do botão ativo trocando a cor do mesmo quando este for clicado e, assim a programação da cor do texto é conforme a seguir:



Nesta imagem temos a troca de cor para vermelho do texto do botão relativo ao valor booleano "intr" correspondente à Introdução. De igual modo foi feito para os demais botões.

Dando continuidade, clica-se com o botão direito do mouse a escolhe a opção  **Plano** para exibir o plano  $xy$ . E, sobre o mesmo ao selecionar a ferramenta  **Cubo**

em  marca-se dois pontos quaisquer no referido plano e define-se o cubo. E, ao selecionar qualquer um dos seus objetos é possível alterar seu estilo na barra de estilo

. Neste caso optou em destacar a face frontal do cubo alterando sua cor em relação às demais.

Foi incluído um botão "Retas suporte" na parte inferior direita da seção, para ativar as retas suporte do cubo exibido na Figura 4.2. Na seção seguinte Noções Primitivas foram incluídos textos e formas planas e não houve a necessidade de se criar formas espaciais. Então as ferramentas e os objetos foram criados na janela 2D. Sendo assim a Figura 4.3 mostra resultado final desta seção.

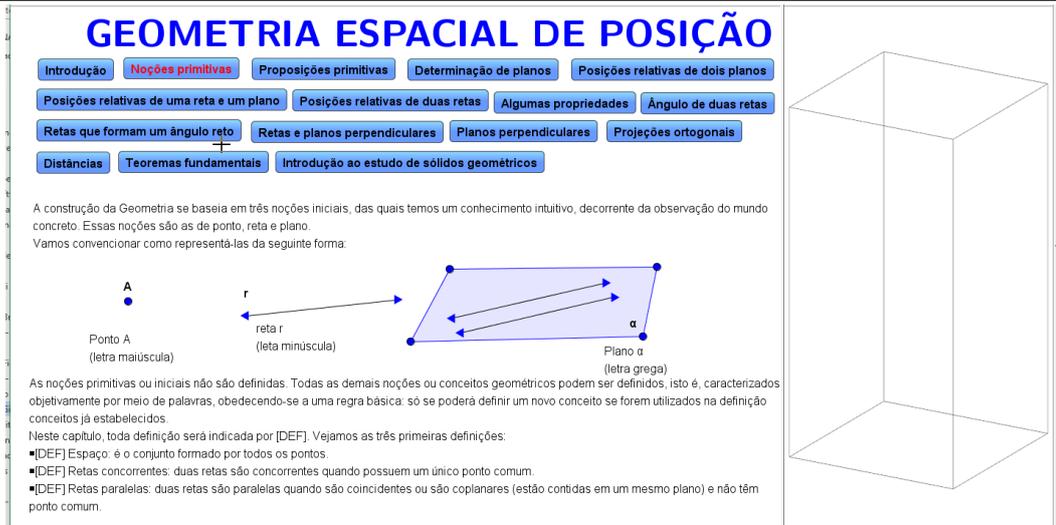
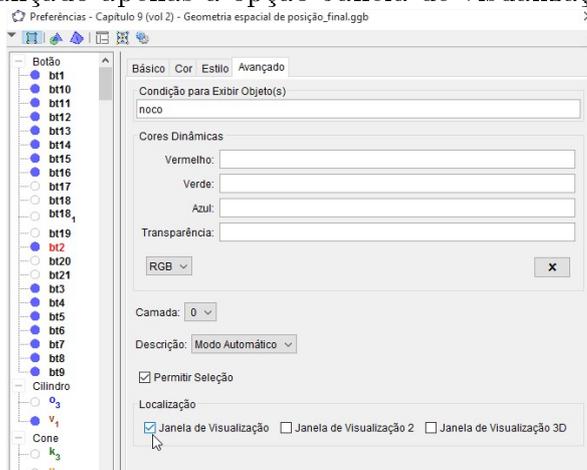


Figura 4.3: Seção Noções Primitivas: do autor, 2015.

Nesta seção, ver Figura 4.3, é indicado a interagir com os objetos presentes na janela 2D. Ou seja as ferramentas utilizadas foram  em  e  as quais já foram utilizadas e explicadas anteriormente. E se definiu que os mesmos só seriam exibidos na janela 2D, ao se clicar com o botão direito do mouse e marcando na aba Avançado apenas a opção Janela de visualização, como é mostrado a seguir:



Na seção seguinte, Proposições primitivas, como mostra a Figura 4.4, o operador é convidado a operar o software utilizando a barra de ferramentas da janela 2D para obter a visualização das proposições elucidadas. E isto se faz necessário para o operador se habituar a manipular o software e aprender utilizar as suas ferramentas.

A Figura 4.5 correspondente à seção denominada Determinação de planos fora construído um triângulo genérico e dinâmico sobre o plano  $xy$  de modo a obter sua representação simultânea nas janelas 2D e 3D. Sabendo-se que o mesmo fora construído na janela 2D os passos de sua construção já foram explicados. Sendo assim e por padrão ao se construir uma figura neste plano o *Geogebra* exibe simultaneamente a figura nas duas janelas. Quando isto não ocorrer se faz necessário habilitar na aba Avançado

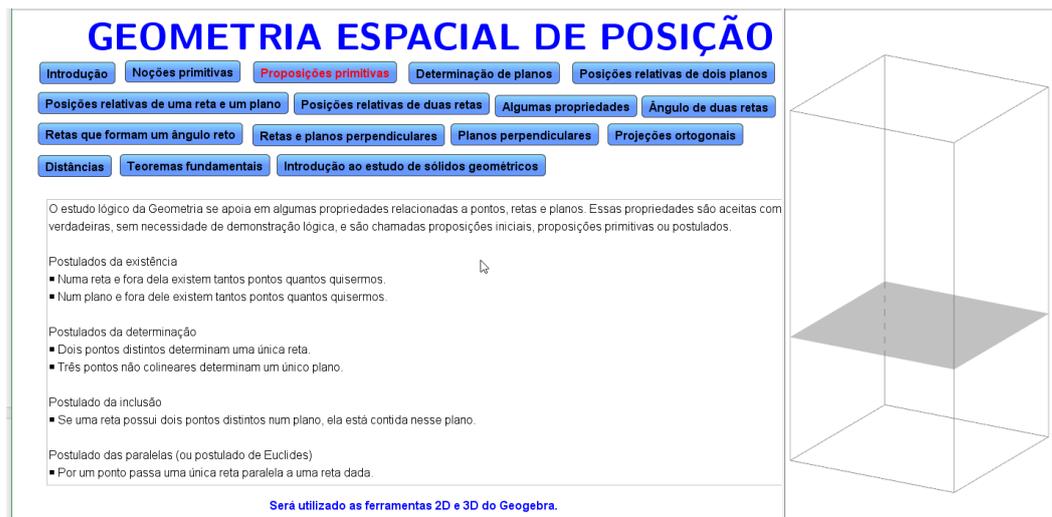


Figura 4.4: Seção Proposições Primitivas: do autor, 2015.

da opção Propriedades do objeto, marcando as caixas de seleção da forma como é mostrado na Figura 4.5:

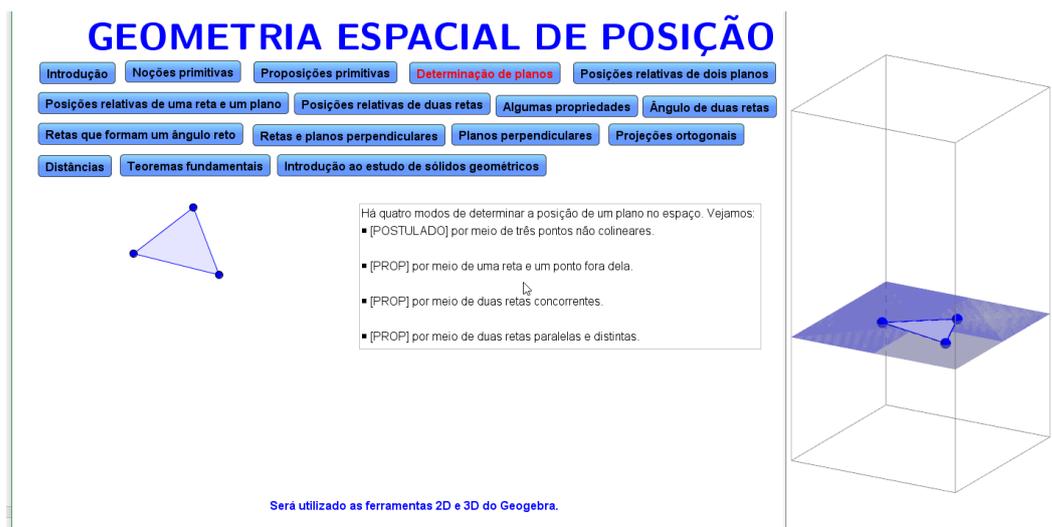


Figura 4.5: Seção Determinação de planos: do autor, 2015.



A seção Posição relativa de dois planos foi construída utilizando algumas ferramentas exclusivas da janela 3D. Usa-se  para determinar três pontos distintos no plano  $xy$ . Em seguida escolhe-se  em  para determinar um plano paralelo ao plano  $xy$  passando por um dos pontos já construído, ou seja, construir um plano coincidente ao plano  $xy$ .

Cria-se uma reta passando por dois destes pontos usando . Com a reta criada

e o terceiro ponto utiliza-se  para definir uma circunferência no espaço orientada pela reta dada. Para isto clica-se na reta e no ponto fora dela.

Usando novamente  marca-se um novo ponto sobre a circunferência criada para que se obtenha um ponto livre para girar sobre a circunferência. Oculta-se o ponto fora da reta da mesma maneira como é feito na janela 2D. Define-se um plano ao usar a ferramenta  em  passando por ponto livre da circunferência e os dois pontos da reta que orienta a circunferência.

Feito isto temos dois planos que se interceptam ou são coincidentes. Após estes passos e formatando o tamanho e a cor dos elementos na Barra de estilos temos como se é mostrado na Figura 4.6:

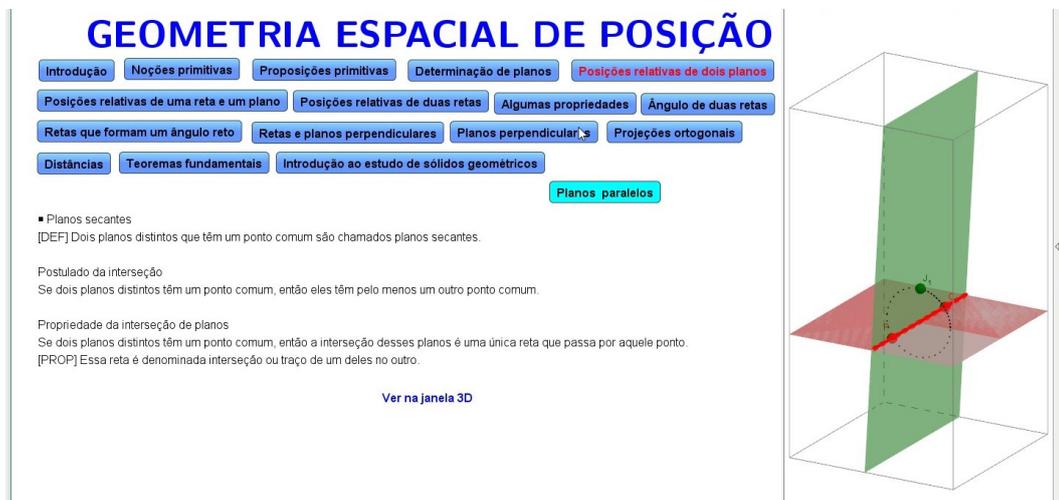


Figura 4.6: Seção Posição relativa de dois planos: do autor, 2015.

A subseção "Planos paralelos" acionável por um botão de mesmo nome apresenta a representação na janela 3D usando  em  com  para determinar onde o plano paralelo passará. Enquanto que na janela 2D têm-se o texto da definição propriamente dita.

Podemos utilizar alguns elementos da construção desta seção para as próximas e para isto basta definir a Condição de exibição de cada objeto na aba Propriedades

digitando-se  onde se é mostrado que será utilizado em algumas seções estes objetos construídos.

Assim sendo foram aproveitados o plano paralelo ao plano  $xy$ , a reta e os dois pontos que a determina e foram acrescentados mais duas retas uma de posição qualquer e outra paralela ao plano dado passando por um ponto de sobre o eixo  $z$  usando  para se definir este ponto e  para a reta paralela reta

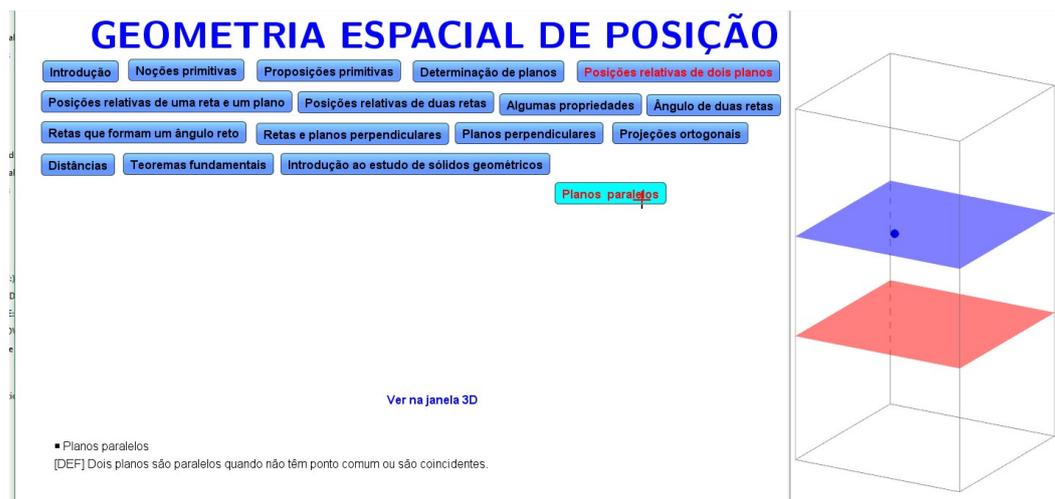


Figura 4.7: Subseção Planos paralelos da seção Posição relativa de dois planos: do autor, 2015.

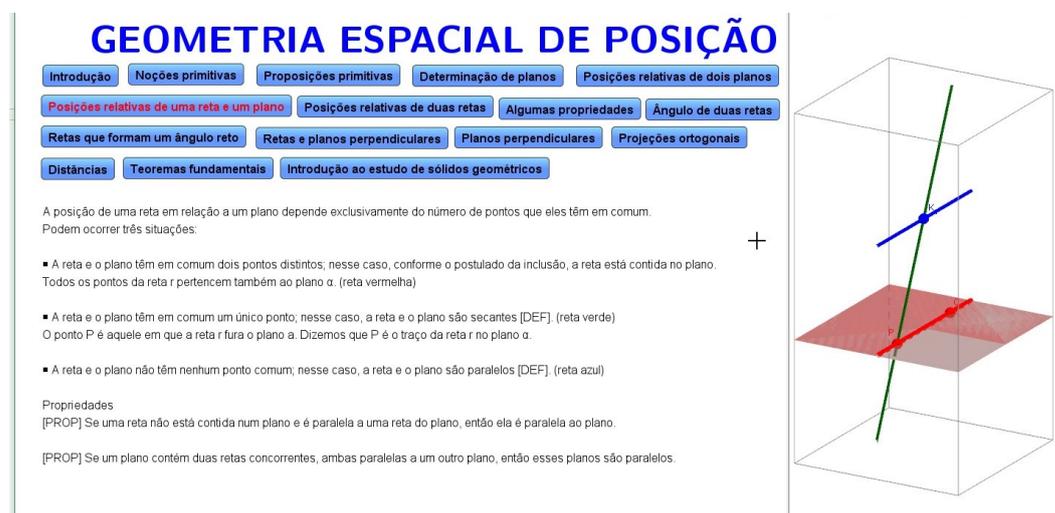


Figura 4.8: Seção Posição relativa entre reta e plano: do autor, 2015.

dada, e assim obter a representação da seção Posições Relativa entre reta e plano. A tela final da seção é a Figura 4.8

Na seção seguinte Posição relativa de duas retas, ver Figura 4.9, foi-se acrescentado nos elementos da seção anterior apenas um plano passando pelo par de retas paralelas e uma reta pertencente ao plano paralelo ao plano  $xy$ . A figura é a representação deste resultado:

Na seção Algumas Propriedades, como é visto a Figura 4.10, foram acrescentados nos elementos da seção anterior um plano paralelo ao plano  $xy$  passando pela reta paralela já existente. Feito isto é possível representar geometricamente as definições desta seção.

A seção Ângulos de duas retas definida na Figura 4.11 para ser construída aproveitou-se alguns dos elementos da seção anterior (vale lembrar que a condição de exibir os ob-

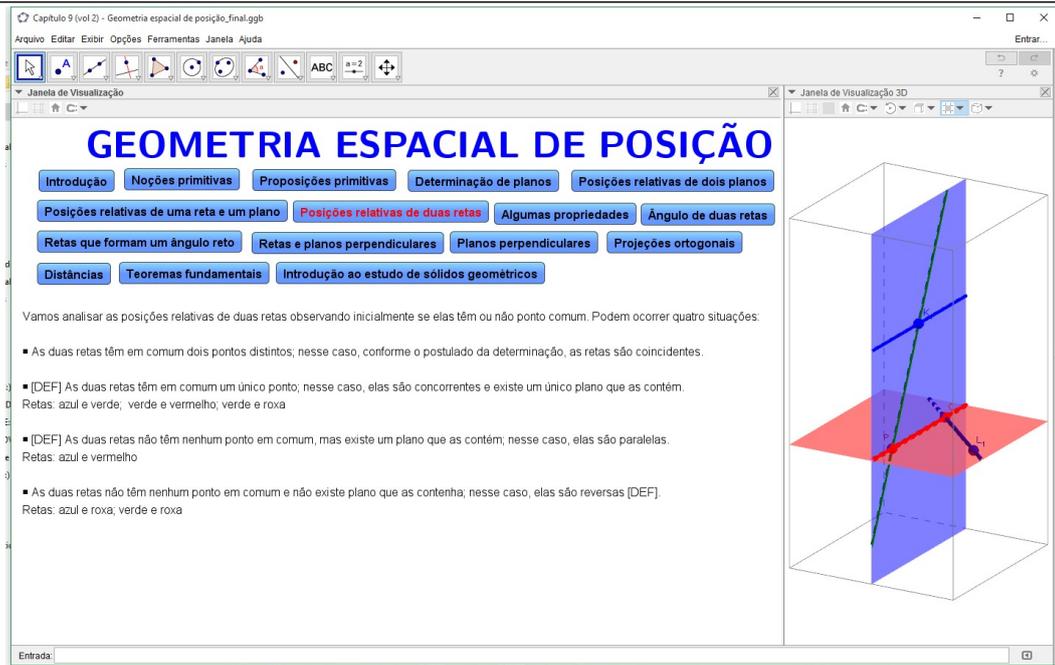


Figura 4.9: Seção Posição relativa de duas retas: do autor, 2015.

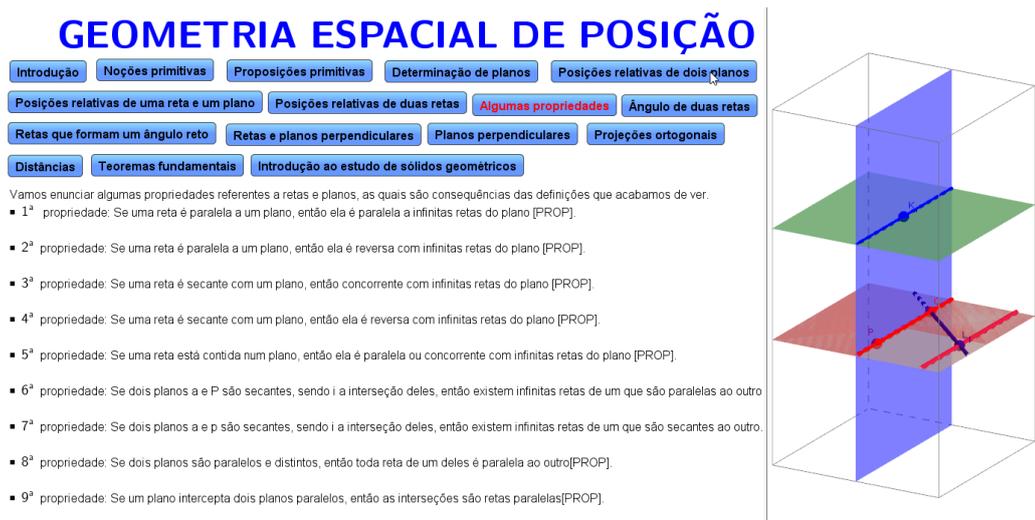


Figura 4.10: Seção Algumas Propriedades: do autor, 2015.

jetos devem ter a sequência lógica dos valores booleanos que o ativam e desativam como explicado no capítulo anterior sobre geometria plana) e definiu-se o ângulo usando  na barra de ferramentas.

A seção Retas que formam um ângulo também é construída com alguns elementos das seções anteriores. E foi acrescentado apenas uma reta perpendicular ao plano passando pelo ponto que determina a reta paralela ao plano que é paralelo ao plano  $xy$ . Determinou-se o ângulo reto entre estas duas retas citadas, como pode ser visto na Figura 4.12 .

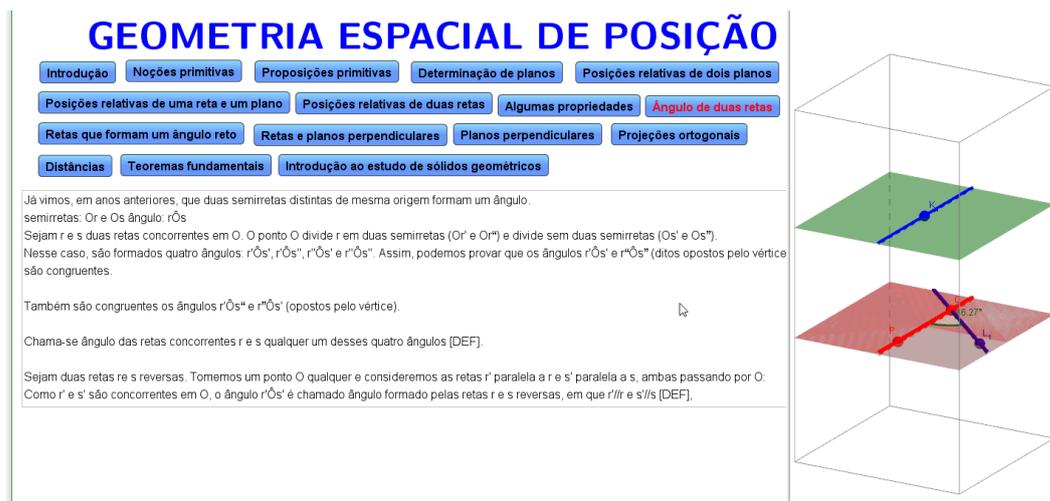


Figura 4.11: Seção Ângulo de duas retas: do autor, 2015.

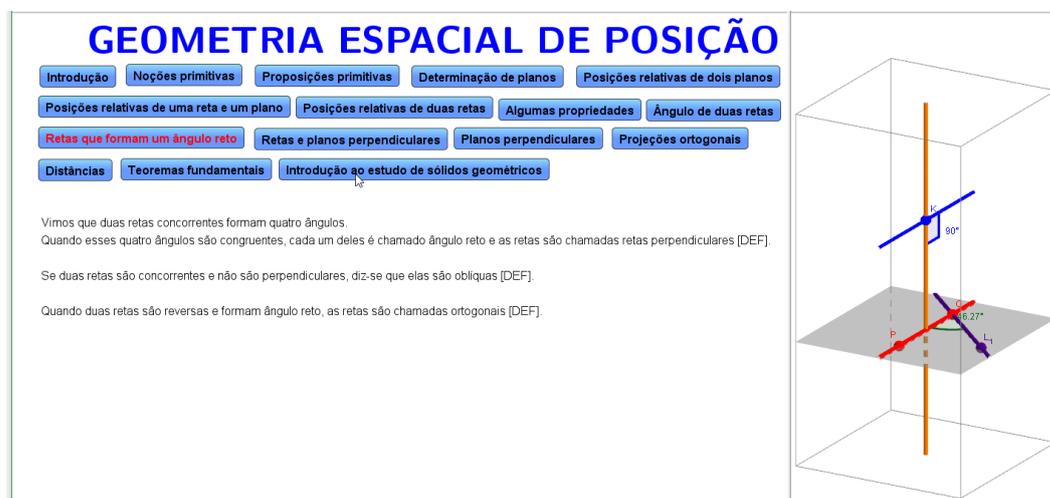


Figura 4.12: Seção Retas que formam um ângulo reto: do autor, 2015.

A Figura 4.13 é a seção - Retas e plano perpendiculares foram incluídos novos elementos: um plano paralelo a  $xy$  e uma par de retas concorrentes ao mesmo uma reta perpendicular a este plano passando pelo ponto de concorrência das outras duas já citada, uma reta oblíqua passando pelo ponto pertencente à reta ortogonal fora do plano dado. Em seguida definiu-se os ângulo retos. Cada uma das tais construções já foram citadas neste passo (para se construir na janela 3D) e o modo de obtê-las é semelhante à maneira como se constrói na janela 2D.

Nesta seção a interação do usuário ao girar uma das duas retas ao clicar e arrastar um dos seus pontos, verifica-se que o ângulo reto ocupa diversas posições no plano ao girar com a reta.

Dando continuidade, a seção Planos perpendiculares corresponde à Figura 4.14 possui a construção de dois planos ortogonais. Foi-se feito uma reta pertencente ao plano dado e após isto definiu-se uma reta perpendicular por  ao plano passando

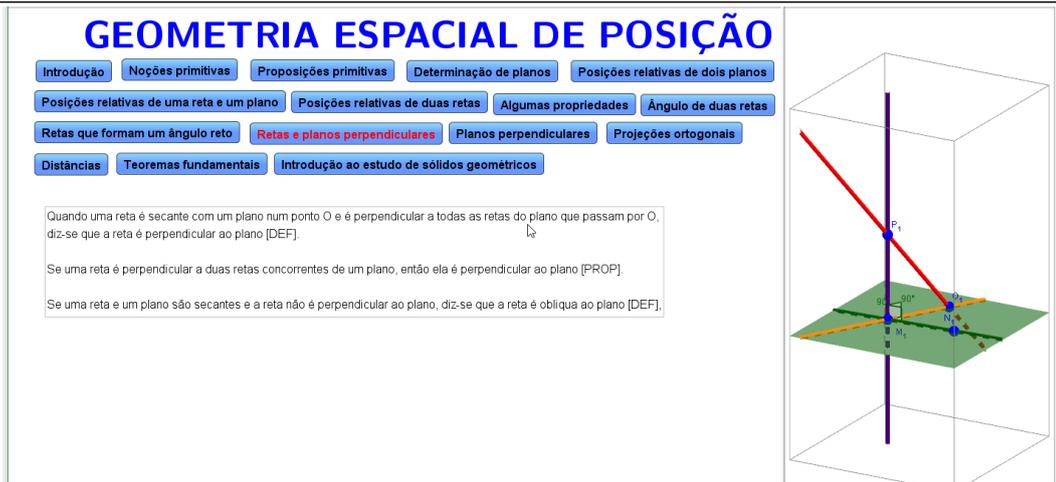


Figura 4.13: Seção Retas e plano perpendiculares: do autor, 2015.

por um de seus pontos e para concluir a construção determinou um plano perpendicular a uma reta passando por um ponto dado utilizando  em .

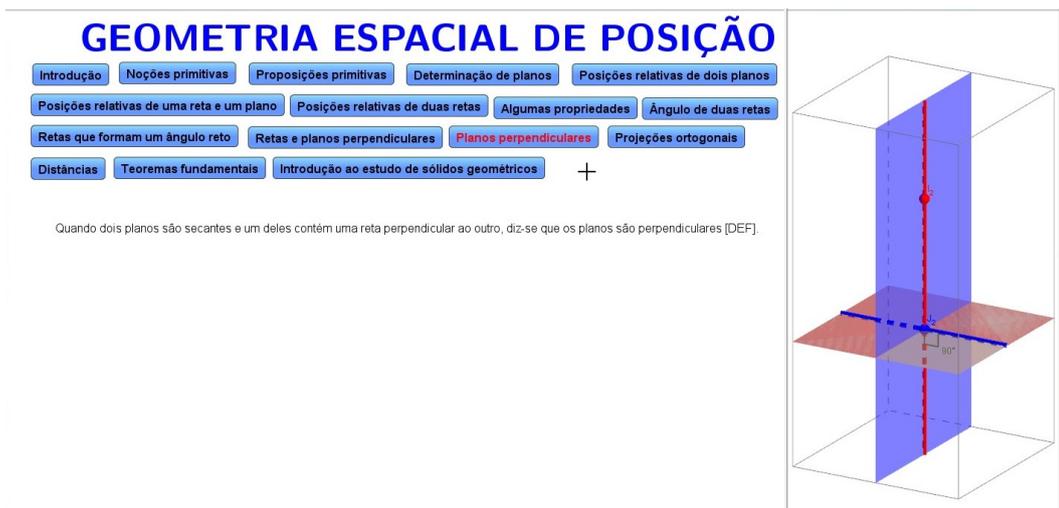


Figura 4.14: Seção Planos perpendiculares: do autor, 2015.

A Figura 4.15 é a seção Projeções Ortogonais já concluída. Determinou-se diversos segmentos usando  e suas respectivas projeções ortogonais. Para tanto foi-se necessário determinar várias retas perpendiculares a um plano paralelo a  $xy$  e determinar segmentos pertencentes à mesma. Usando  representou-se o círculo no plano e no espaço, e sobre o mesmo usando a ferramenta ponto em  determinou-se alguns pontos e suas projeções. Usando a Barra de estilos formatou-se traço, cor e nome dos objetos.

A seção Distâncias, tem todos os elementos da Seção Algumas Propriedades e portanto foi-se acrescentados apenas a reta que perpendicular que passa pelo ponto que determina o plano paralelo ao plano dado. A Figura 4.16 explicita o resultado obtido nesta seção.

## GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Introdução
Noções primitivas
Proposições primitivas
Determinação de planos
Posições relativas de dois planos

Posições relativas de uma reta e um plano
Posições relativas de duas retas
Algumas propriedades
Ângulo de duas retas

Retas que formam um ângulo reto
Retas e planos perpendiculares
Planos perpendiculares
Projeções ortogonais

Distâncias
Teoremas fundamentais
Introdução ao estudo de sólidos geométricos

Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano é o pé da perpendicular ao plano conduzida pelo ponto [DEF].

Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da figura sobre esse plano [DEF].

A projeção ortogonal de uma reta  $r$  sobre um plano  $\alpha$  é assim definida:

- Se  $r$  é perpendicular a  $\alpha$ , a projeção de  $r$  sobre  $\alpha$  é o ponto em que  $r$  "fura"  $\alpha$  [DEF].
- Se  $r$  não é perpendicular a  $\alpha$ , a projeção de  $r$  sobre  $\alpha$  é a interseção de  $\alpha$  com o plano  $p$ , perpendicular a  $\alpha$  e conduzido por  $r$  [DEF].

A projeção ortogonal de um segmento de reta  $AB$  sobre um plano  $\alpha$  é assim definida:

- Se  $AB$  é perpendicular a  $\alpha$ , a projeção de  $AB$  sobre  $\alpha$  é o ponto em que a reta  $AB$  "fura"  $\alpha$  [DEF].
- Se  $AB$  não é perpendicular a  $\alpha$ , a projeção de  $AB$  sobre  $\alpha$  é o segmento  $A'B'$  tal que  $A'$  e  $B'$  são, respectivamente, as projeções de  $A$  e  $B$  sobre  $\alpha$  [DEF].

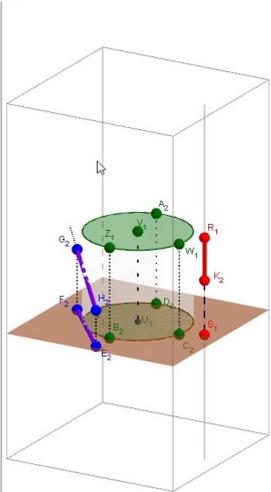


Figura 4.15: Seção Projeções Ortogonais: do autor, 2015.

## GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Introdução
Noções primitivas
Proposições primitivas
Determinação de planos
Posições relativas de dois planos

Posições relativas de uma reta e um plano
Posições relativas de duas retas
Algumas propriedades
Ângulo de duas retas

Retas que formam um ângulo reto
Retas e planos perpendiculares
Planos perpendiculares
Projeções ortogonais

Distâncias
Teoremas fundamentais
Introdução ao estudo de sólidos geométricos

A distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  pode ser assim definida:

- Se  $A$  e  $B$  coincidem, a distância entre eles é nula.
- Se  $A$  e  $B$  são distintos, a distância entre eles é o segmento de reta  $AB$ .

A distância de um ponto  $P$  a uma reta  $r$  é a distância de  $P$  a  $P'$ , em que  $P'$  é o pé da perpendicular a  $r$ , conduzida por  $P$  [DEF].

A distância entre duas retas re paralelas é a distância de um ponto  $P$  qualquer de uma delas até a outra [DEF].

A distância de um ponto  $P$  a um plano  $\alpha$  é a distância de  $P$  a  $P'$ , em que  $P'$  é o pé da perpendicular a  $\alpha$ , conduzida por  $P$  [DEF].

A distância entre uma reta  $r$  e um plano  $\alpha$ , sendo  $r$  contida em  $\alpha$  ou  $r$  paralela a  $\alpha$ , é a distância de um ponto  $P$  qualquer de  $r$  ao plano  $\alpha$  [DEF].

A distância entre dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  paralelos é a distância de um ponto  $P$  qualquer de um deles ao outro plano [DEF].

A distância entre duas retas reversas  $r$  e  $s$  é a distância de um ponto qualquer  $P$  da reta  $r$  ao plano  $\alpha$  que contém  $s$  e é paralelo à reta  $r$  [DEF].

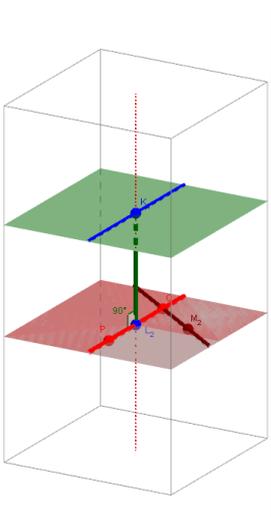


Figura 4.16: Seção Distâncias: do autor, 2015.

Embora algumas das seções já construídas tenham noções e objetos elementares para ilustrar as definições dos elementos primitivos ponto, reta e plano, na Seção Teorema Fundamentais é solicitado que o usuário opere e manipule o *Geogebra* para transcrever as demonstrações do livro didático e construir as representação na janela 3D do programa, ressaltando nesse sentido a necessidade e motivação para o estudante conhecer e utilizar os comandos, botões, objetos e ferramentas para realizar a atividade solicitada.

A última seção, Introdução a sólidos geométricos, possui as mesmas imagens presentes no livro didático para apresentar as primeiras noções e considerando que a visualização espacial no *software* é melhorada foram criadas duas subseções: Formas reais e geométricas com os enunciados e figuras extraídas do livro e Sólidos geométricos, sendo que este último possui dois botões de ativação para exibição dos objetos geométricos na janela 3D.

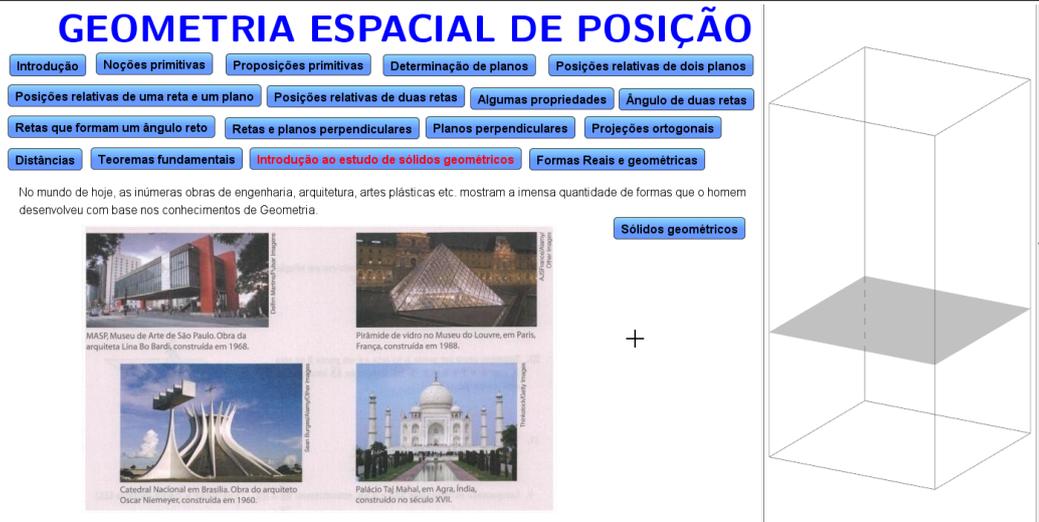


Figura 4.17: Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015.

Nesta seção são exibidas figuras de representação plana de sólidos e os textos explicativos e conceituais na janela 2D. Não foram feitas construções na janela 3D.

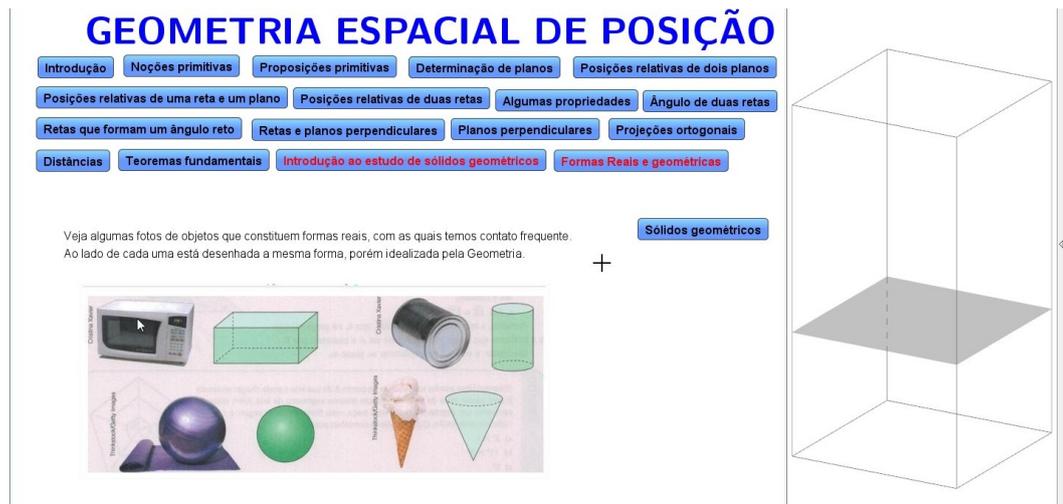


Figura 4.18: Subseção Formas reais e geométricas da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015.

Aqui os autores fazem analogia entre formas geométricas reais presentes no cotidiano e as genéricas que serão vistas no desdobramento do conteúdo nos próximos capítulos. Da mesma forma com se apresenta na Figura 4.17 não se fez objetos na janela 3D.

Para introduzir o estudo dos sólidos [1] classifica em dois grupos os que serão estudados: Poliedros e Corpos redondos. Estas notações são apresentadas na janela 2D acompanhadas de dois botões de ativação Poliedros e Corpos redondos que ao serem acionados exibe tais objetos na janela 3D.

Ao clicar sobre o botão Poliedros da subseção Sólidos geométricos é exibido os tipos de poliedros que serão estudados conforme Figura 4.20. Foi-se feita as construções: de uma pirâmide tetraédrica regular, clicando e determinando dois pontos no mesmo

## GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Introdução
Noções primitivas
Proposições primitivas
Determinação de planos
Posições relativas de dois planos

Posições relativas de uma reta e um plano
Posições relativas de duas retas
Algumas propriedades
Ângulo de duas retas

Retas que formam um ângulo reto
Retas e planos perpendiculares
Planos perpendiculares
Projeções ortogonais

Distâncias
Teoremas fundamentais
Introdução ao estudo de sólidos geométricos
Formas Reais e geométricas

Quando examinamos as formas tridimensionais idealizadas pela Geometria, estamos observando sólidos geométricos.  
Os sólidos geométricos mais simples podem ser de dois tipos:

Sólidos geométricos

- **Poliedros:** são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos etc.). A palavra poliedro vem do grego antigo, em que poli significa "vários", e edro, "face". Veja alguns exemplos de poliedros na janela 3D do Geogebra. Em um poliedro podemos distinguir: faces (polígonos planos), arestas (quinas) e vértices (pontas). Observe as figuras na janela 3D do Geogebra.
 

Poliedros
- **Corpos redondos:** são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana). Veja os exemplos:
 

Corpos redondos

+

Faremos um estudo dos principais poliedros nos capítulos 10 e 11.  
Já os principais corpos redondos serão estudados nos capítulos 12, 13 e 14.

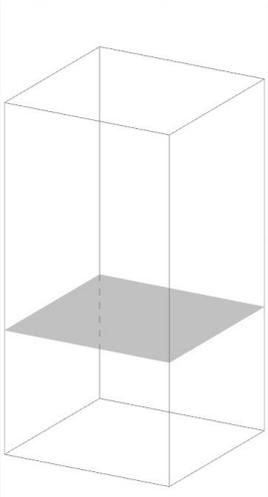


Figura 4.19: Subseção Sólidos geométricos da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015.

## GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Introdução
Noções primitivas
Proposições primitivas
Determinação de planos
Posições relativas de dois planos

Posições relativas de uma reta e um plano
Posições relativas de duas retas
Algumas propriedades
Ângulo de duas retas

Retas que formam um ângulo reto
Retas e planos perpendiculares
Planos perpendiculares
Projeções ortogonais

Distâncias
Teoremas fundamentais
Introdução ao estudo de sólidos geométricos
Formas Reais e geométricas

Quando examinamos as formas tridimensionais idealizadas pela Geometria, estamos observando sólidos geométricos.  
Os sólidos geométricos mais simples podem ser de dois tipos:

Sólidos geométricos

- **Poliedros:** são sólidos geométricos cujas superfícies são formadas apenas por polígonos planos (triângulos, quadriláteros, pentágonos etc.). A palavra poliedro vem do grego antigo, em que poli significa "vários", e edro, "face". Veja alguns exemplos de poliedros na janela 3D do Geogebra. Em um poliedro podemos distinguir: faces (polígonos planos), arestas (quinas) e vértices (pontas). Observe as figuras na janela 3D do Geogebra.
 

Poliedros
- **Corpos redondos:** são sólidos geométricos cujas superfícies têm ao menos uma parte que é arredondada (não plana). Veja os exemplos:
 

Corpos redondos

Faremos um estudo dos principais poliedros nos capítulos 10 e 11.  
Já os principais corpos redondos serão estudados nos capítulos 12, 13 e 14.

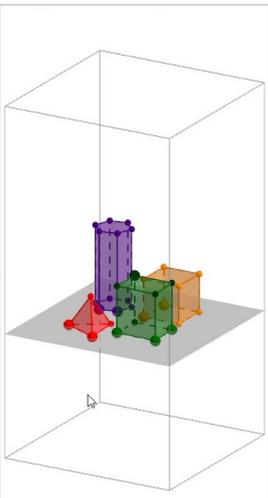


Figura 4.20: Item Poliedros da Subseção Sólidos geométricos da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015.

plano (aresta) definindo assim o sólido; de um cubo da mesma maneira determina-se sua aresta criando dois pontos no mesmo plano; de um prisma e um paralelepípedo determinando o polígono da base e em seguida a reta perpendicular ao mesmo que corta os dois planos paralelos usando  Tetraedro Regular,  Cubo e  Prisma em  seguindo as instruções presentes na ferramenta, ou seja, criando os vértices necessários para determinação da figura.

Para ampliar o espaço visual do ambiente 3D foi-se criado mais um plano paralelo ao plano  $xy$  que contém os vértices superiores dos sólidos (o mesmo se encontra oculto) de modo que pudesse transladar os sólidos e isto ajudou a melhorar a visualização dos conceitos e dos objetos construídos. Acionando as ferramentas rotação de cena  e vista principal  da barra de estilos da janela 3D é possível girar a tela e visualizar

as demais faces dos sólidos.

Ainda nesta mesma subseção ao clicar sobre o botão Corpos redondos da Subseção Sólidos geométricos é exibido os tipos de corpos redondos e a Figura 4.21 é a tela final.

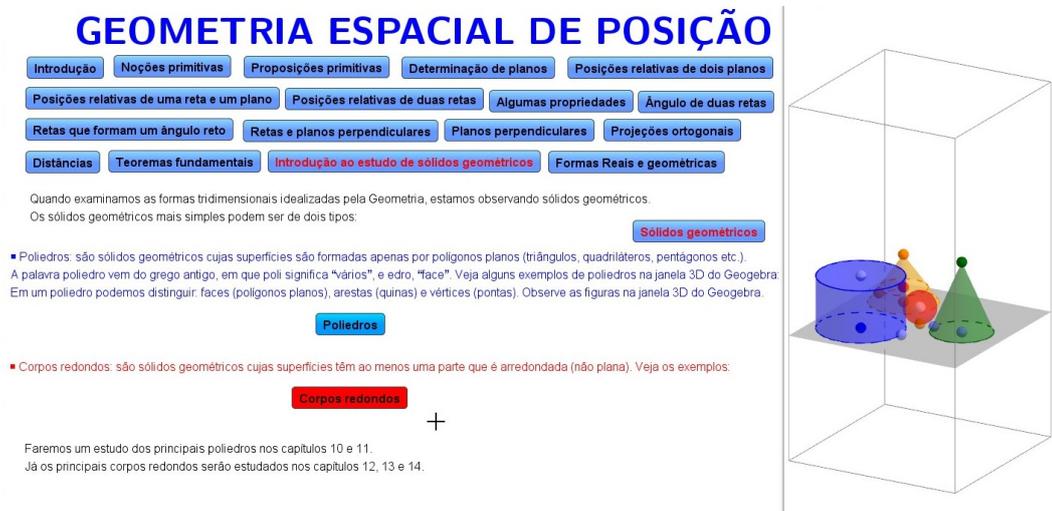


Figura 4.21: Item Corpos redondos da Subseção Sólidos geométricos da Seção Introdução a sólidos geométricos: do autor, 2015.

Foi-se feita a construção de uma esfera, de dois cones e de um cilindro usando

 Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos em ,  Cilindro e  Cone em  seguindo as instruções presentes na ferramenta, ou seja, criando os vértices e/ou pontos necessários para determinação da figura.

Para o cilindro é necessário os pontos da extremidade do eixo gerador e a medida do raio (usando o campo de entrada do Geogebra). Para o cone estes mesmos elementos e para a esfera o centro e o ponto da extremidade da medida do raio. Oculta-se o plano paralelo que contém o vértices e após todos estes passos o *applet* do Capítulo 9 - Geometria espacial de posição está pronto para exportação/*upload*.

### 4.3 Passo 33 - *Applet* do Capítulo 10 - Prismas, do volume 2 da coleção

Neste capítulo que trata dos sólidos Prismas foram criados os valores booleanos e o botões das seções. Na introdução deste capítulo, [1] traz como exemplos de prismas embalagens presentes no cotidiano através de imagem/foto. Nesta seção optamos em representar a forma espacial de tais embalagens e usou como base de apoio dos sólidos o plano  $xy$  principal. Construiu-se os polígonos da base na janela de visualização 2D e em seguida habilitou sua exibição apenas na janela 3D, conforme foi-se explicado no passo 4.1.

Por conseguinte e usando a ferramenta de rotação de cena  visualiza-se todos os elementos principais de um prisma: vértices, arestas e faces. A Figura 4.22 é a tela final desta seção:



Figura 4.22: Seção Introdução: do autor, 2015.

Na seção Conceitos, como mostra a Figura 4.23 na janela 3D foram-se feitas as construções: um plano paralelo a  $xy$  com  e uma reta secante por meio de  a estes dois planos, um polígono regular de 5 lados determinando por dois pontos sua aresta e através do comando no campo de entrada: "*Polígono*[ $A, B, 5$ ]

A proposta desta seção é mostrar um prisma pentagonal regular qualquer (reto ou oblíquo) ao movimentar os pontos que definem e orientam a reta secante a dois planos, a qual orienta o feixe de segmentos paralelos a ela, que passam pelos polígonos da base.

Adiciona-se as cinco retas paralelas a reta secante já construída utilizando  **Reta Paralela**, como visto no passo 4.2. E, em seguida, os textos denominando os planos  $\alpha$  e  $\beta$ .



Figura 4.23: Seção Conceitos: do autor, 2015.

Para mostrar a representação geométrica da definição deste prisma onde um feixe de segmentos paralelos a esta reta que tenha as extremidades nos polígonos (obtidos pelas interseções das retas nos planos paralelos) usando  para determinar a reta paralela e  e determinar os pontos de interseção entre as retas e os planos.

Foram construídos um outro pentágono da base do prisma com  e um ponto pertencente ao polígono usando  em  e determinou-se uma reta paralela e um segmento cujas extremidades pertencem aos planos e, ocultando a reta em seguida. Ao arrastar o ponto, o segmento percorrerá todo o polígono e conseqüentemente representará geometricamente a definição do prisma. Desta forma esta seção está pronta e passaremos para próxima seção.

Na seção Elementos e Classificação, têm-se na janela 2D o conteúdo textual e na janela 3D temos dois planos paralelos ao plano  $xy$ , um pentágono regular no plano inferior determinando um prisma reto pentagonal regular feito como no passo anterior usando o mesmo comando.

Em seguida levantando uma perpendicular ao polígono passando por um de seus vértices até secar o outro plano usando  e marcando a interseção com o mesmo através de  determina-se o prisma desejado por meio da ferramenta  clicando-se no polígono da base que se encontra em um plano e no vértice situado no outro plano. A Figura 4.24 é a seção já concluída.

## PRISMAS

Introdução
Conceito
Elementos e classificação
Paralelepípedo
Paralelepípedo retangular

Diagonal paralelepípedo e Volume
Cubo
Aplicações
Princípio de Cavallere
Áreas e volume

Prisma oblíquo
Prisma reto

Considerando o prisma representado na janela 3D ao lado, temos:

- os polígonos  $ABCDE$  e  $A'B'C'D'E'$ , chamados bases do prisma, são congruentes e estão situados em planos paralelos entre si ( $\alpha$  e  $\beta$ );
- os paralelogramos  $AA'B'B$ ,  $BB'C'C$ ,  $CC'D'D$ ,  $DD'E'E$  e  $EE'A'A$  são chamados faces laterais;
- os lados dos polígonos das bases ( $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EA$ ,  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $CD'$ ,  $DE'$  e  $E'A'$ ) são as arestas das bases;
- os segmentos  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$  e  $EE'$  são as arestas laterais;
- a distância entre os planos  $\alpha$  e  $\beta$ , que contém as bases, é a altura do prisma.

Quanto ao número de lados de cada polígono da base, os prismas são classificados em: triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme o polígono da base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

Quanto à inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas são classificados em:

- prisma oblíquo: se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases; (prisma azul)
- prisma reto: se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Observe que, nesse caso, as faces laterais são retângulos. (prisma roxo)

Observação

Quando as bases de um prisma reto são polígonos regulares, ele é chamado prisma regular.

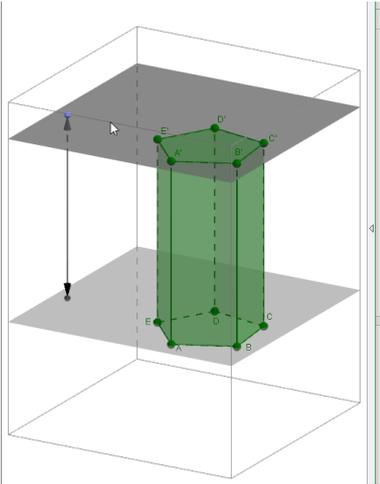


Figura 4.24: Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015.

Adicione mais uma reta perpendicular passando pelo ponto que define o plano paralelos e obtêm-se a interseção com o outro plano. Inclui-se dois vetores entres estes dois pontos em sentidos contrários de modo que a construção nos dê a ideia bem clara de distância entre os planos para definir o conceito de altura do prisma. Formata-se os estilos e a cores dos objetos e têm-se a tela como na Figura 4.24.

Ainda nesta seção foram incluídos duas subseções acionáveis por botões exibidos na janela 2D denominados Prisma reto e Prisma oblíquo para tratar de alguns destes tipos de prismas com bases regulares feitas no plano  $xy$ .

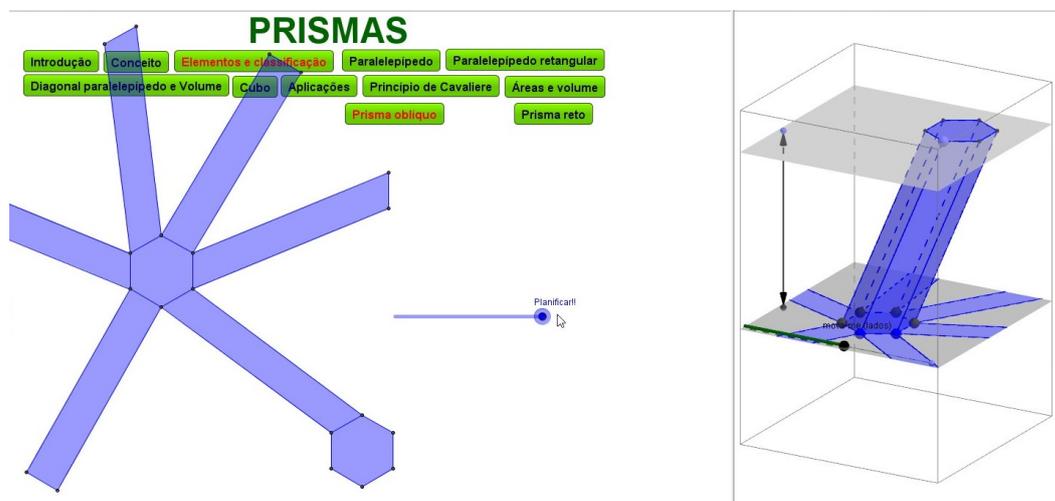


Figura 4.25: Subseção Prisma Oblíquo da Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015.

Foram criados dois novos prismas (um para cada subseção) e dois controle deslizantes na janela 3D para cada tipo de prisma na janela 3D para determinar o número de lados da base do prisma. Para tanto usou-se um segmento de comprimento fixo na janela 3D e determinou sobre o mesmo um ponto móvel em seguida escreveu-se no campo de entrada o comando polígono regular, digitando-se: Polígono, o nome de cada ponto, a medida do segmento somada a 3; pois este último é o menor número de lados de um polígono, e o plano que contém o polígono, neste caso o plano  $xOy$ . Desta forma foi-se feito assim: Definição: `Polígono[S_6, T_6, k_7 + 3, PlanoXOY]`.

A janela 2D destas subseções foi aproveitada para exibir as planificações destes prismas por meio da ferramenta  em  e clicando sobre o sólido, como é mostrado nas Figuras 4.25 e 4.26.

Após ser tratado na seção anterior os elementos e a classificação dos prismas na seção Paralelepípedos as bases dos sólidos da janela 3D (retângulo, quadrado e paralelogramo) foram construídas na janela 2D e habilitadas as suas visualizações apenas na janela 3D. Em seguida foram feitos os paralelepípedos usando  e com a ferramenta  determinou-se a planificação de cada um deles. Formatou-se as cores e os estilos dos objetos como na Figura 4.27.

As duas seções seguintes, Paralelepípedo retangular e Diagonal paralelepípedo e o volume, correspondentes às Figuras 4.28 e 4.29 respectivamente, possuem elementos comuns (sendo programado a condição de exibir objetos para isto) sendo que em cada uma delas há textos distintos entre si na janela 2D e na seção Diagonal do paralelepí-

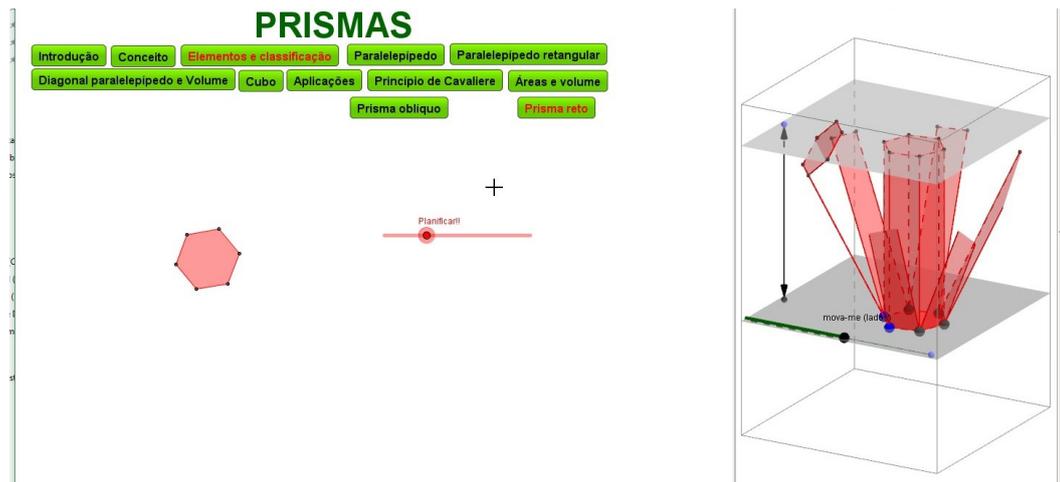


Figura 4.26: Subseção Prisma Reto da Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015.



Figura 4.27: Seção Paralelepípedos: do autor, 2015.

pedo e volume foram inseridas as referidas fórmulas da diagonal e do volume usando as medidas do sólido da janela 3D.

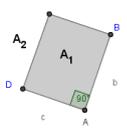
Neste caso o comando que fornece o volume é  disponível em . São também destacados o triângulo retângulo que contém a diagonal do paralelepípedo e o seu respectivo ângulo reto usando .

Conforme fora apresentado por [1] na primeira seção destas, Paralelepípedo retangular, temos um texto que trata da área da carroceria metálica em formato de paralelepípedo retangular de um caminhão. Então acrescentou-se uma imagem ilustrativa (extraída do livro) e a representação da base do paralelepípedo da janela 2D. Em seguida, construiu-se o sólido na janela 3D, de modo que fosse possível planificá-lo e obter a representação de sua planificação na janela 2D. A Figura 4.29 ilustra como fora feito.

Por conseguinte as duas próximas seções: Cubo e Aplicações, mostradas nas Figuras

**PRISMAS**

Introdução   Conceito   Elementos e classificação   Paralelepípedo   Paralelepípedo retangular  
 Diagonal paralelepípedo e Volume   Cubo   Aplicações   Princípio de Cavaliere   Áreas e volume




Planificação

Considere que a carroceria do caminhão mostrado na imagem tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são: 8 m de comprimento, 4,5 m de largura e 3 m de altura. Suponha que Onofre, dono do caminhão, contrate uma pessoa para pintar toda a superfície da carroceria. Considerando que essa pessoa cobra R\$ 4,50 para pintar uma superfície de 1 m<sup>2</sup>, que quantia Onofre terá de desembolsar para pagar pelo serviço contratado?  
 Para resolver esse problema é necessário saber calcular a área total da superfície de um paralelepípedo retângulo. Por isso, apresentaremos a sua resolução logo após o desenvolvimento do item seguinte.

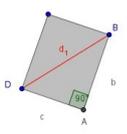
A figura acima representa um paralelepípedo retângulo, em que a e b são as medidas dos lados do retângulo da base e c, a medida da altura. A figura acima representa a planificação desse paralelepípedo.  
 A planificação do paralelepípedo mostra que sua superfície é a reunião de seis retângulos, dois a dois congruentes. Assim, a sua área total  $A_t$  é igual à soma das áreas desses seis retângulos, ou seja:

$$A_t = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 \Rightarrow A_t = 2ab + 2ac + 2bc$$

Figura 4.28: Seção Paralelepípedo retangular: do autor, 2015.

**PRISMAS**

Introdução   Conceito   Elementos e classificação   Paralelepípedo   Paralelepípedo retangular  
 Diagonal paralelepípedo e Volume   Cubo   Aplicações   Princípio de Cavaliere   Áreas e volume



No paralelepípedo da janela 3D, sejam d a medida da diagonal do paralelepípedo e  $d_1$  a medida da diagonal da base. Observe que os triângulos BAD e D'DB são retângulos. Assim, temos:  
 No  $\triangle BAD$ :  $d_1^2 = b^2 + c^2$   
 No  $\triangle D'DB$ :  $d^2 = d_1^2 + a^2$   
 Donde:  $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$   
 Logo:  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

VOLUME

O volume de um sólido é a medida da região do espaço limitada por sua superfície.  
 Enfim, para expressar o volume de um sólido por meio de um número, devemos estabelecer uma unidade padrão: a unidade de volume é o cubo cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de comprimento).  
 Para cada unidade de comprimento temos uma correspondente unidade de volume.  
 Dizemos, então, que o volume desse paralelepípedo é  $V = (1,83 \text{ u.c.}) \cdot (1,77 \text{ u.c.}) \cdot (2,17 \text{ u.c.}) = 7,05(\text{u.c.})^3$  ou, de modo mais geral:  
 $V = a \cdot b \cdot c$

Na figura como  $b \cdot c$  é a área da base ( $A_b$ ) e  $a$  é a medida  $h$  da altura, temos:  
 $V = (b \cdot c) \cdot a \Rightarrow V = A_b \cdot h$

Observação: A unidade de medida de volume do Sistema Internacional de Unidades (SI) é o metro cúbico. Apesar de não fazer parte do SI, a unidade litro é reconhecida como unidade de medida por esse sistema de medidas e definida como o volume de um cubo cuja aresta mede 1 decímetro, ou seja,  $1L = 1\text{dm}^3$ .

Figura 4.29: Seção Diagonal paralelepípedo e volume: do autor, 2015.

4.30 e 4.31 respectivamente; também tem objetos comuns e além disso suas construções já foram explanadas nos passos anteriores, lembrando que os valores referentes as medidas são dinâmicas de acordo o tamanho do cubo da janela 3D. Com efeito, os objetos que foram construídos e ainda não comentados estão na seção Aplicações.

Foram feitos uma par de segmentos perpendiculares e um segmento representando a função linear do volume em relação à altura, como explanado na Figura 4.31 da seção.

Em seguida vinculou-se um ponto ao segmento correspondente ao eixo  $x$  de modo que represente o volume da caixa cúbica até a sua altura, e assim foi-se acrescentado a partir do quadrado superior do cubo um paralelepípedo de cor laranja de modo a representasse o volume faltante de acordo a posição o valor do ponto  $P$  que determina a altura  $h$  do volume existente no cubo como na figura a seguir:



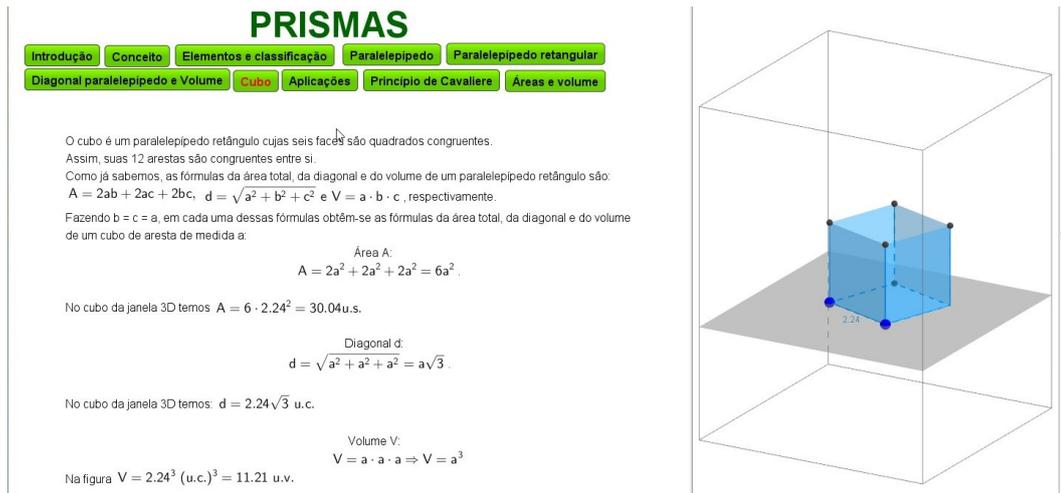


Figura 4.30: Seção Cubo: do autor, 2015.

Deste modo o intento aqui é mostrar geometricamente a situação apresentada no enunciado.



Figura 4.31: Seção Aplicações: do autor, 2015.

Dando prosseguimento às seções do capítulo 10 do livro temos a seção Princípio de *Cavaliere*. Na janela 2D apresenta-se o conteúdo e na janela 3D há dois planos paralelos e um deles secante a duas superfícies determinadas pelo comando descrito na Figura 4.32.

De acordo com [7], seja  $S$  a superfície gerada pela rotação da curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$  no semi-plano superior  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0$ , em torno do eixo dos  $x$ .  $S$  pode ser parametrizada por:

$$\psi(t, \theta) = (x(t), y(t)\cos(\theta), y(t)\sen(\theta)) \tag{4.1}$$

onde  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas,  $y(t) \geq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  e  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Sendo a função  $\gamma(t)$  que descreve a superfície de revolução determinada conforme comando no campo de entrada:

Nome:	q_5
Valor:	$Se 0 \leq x + 1 \leq 4, 1 / 4 \text{ sen}(x - 1) + 1 $

e o comando no campo de entrada que determina uma das superfícies é:

Superfície[q\_5(t) cos( $\theta$ ) - 1, q\_5(t) sen( $\theta$ ) - 1, t, t, 0, 6,  $\theta$ , 0, 6.28319]

(a outra é apenas uma translação no plano, ou seja incrementa-se valores em  $x$  e em  $y$ ), as quais são construções diferenciadas das anteriores presentes nesta seção. O plano secante é móvel e sua construção é justamente para facilitar o entendimento e a interpretação do referido princípio.

**PRISMAS**

Introdução   Conceito   Elementos e classificação   Paralelepípedo   Paralelepípedo retangular  
 Diagonal paralelepípedo e Volume   Cubo   Aplicações   **Princípio de Cavalieri**   Áreas e volume

Conseguimos estabelecer uma fórmula para o volume de um paralelepípedo retângulo de maneira intuitiva; entretanto, para determinar a expressão do volume de outros sólidos, o processo não é tão simples. Uma maneira que pode ser utilizada para a obtenção do volume de um sólido é adotar como axioma um resultado formalizado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que é conhecido como princípio de Cavalieri.

**Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).**

De modo geral, sua aplicação deve ser feita colocando-se os dois sólidos com bases em um mesmo plano, paralelo àquele em que estarão as seções de áreas iguais.  
 A seguir, usaremos o princípio de Cavalieri para calcular o volume de um prisma.

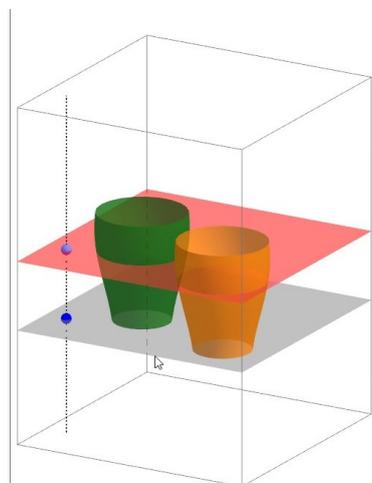


Figura 4.32: Seção Princípio de *Cavalieri*: do autor, 2015.

A última seção deste capítulo, Áreas e volume, ver Figura 4.33, traz os conceitos que definem as áreas da base, lateral, total e o volume de um prisma na janela 2D e na janela 3D há construção de dois sólidos de mesmo volume: um cubo e um prisma reto triangular regular.

Sendo a aresta da base do prisma triangular a medida móvel e dinâmica que também determina a altura do referido prisma enquanto que a medida da aresta do cubo é calculada a partir da igualdade dos volumes destes sólidos; um plano secante a estes sólidos para determinar a área da seção por um plano paralelo à base de cada um deles pelo comando  na barra de ferramentas e os textos que identificam os planos  $\alpha$  e  $\beta$ .

Sendo assim, elaborou-se todas as seções dos conteúdos do capítulo e encerrou-se aqui as construções do *applet*. E, tendo conhecimento do que foi produzindo até então na janela 3D conforme a necessidade pode-se construir prismas em uma nova janela para representar e resolver os exercícios.

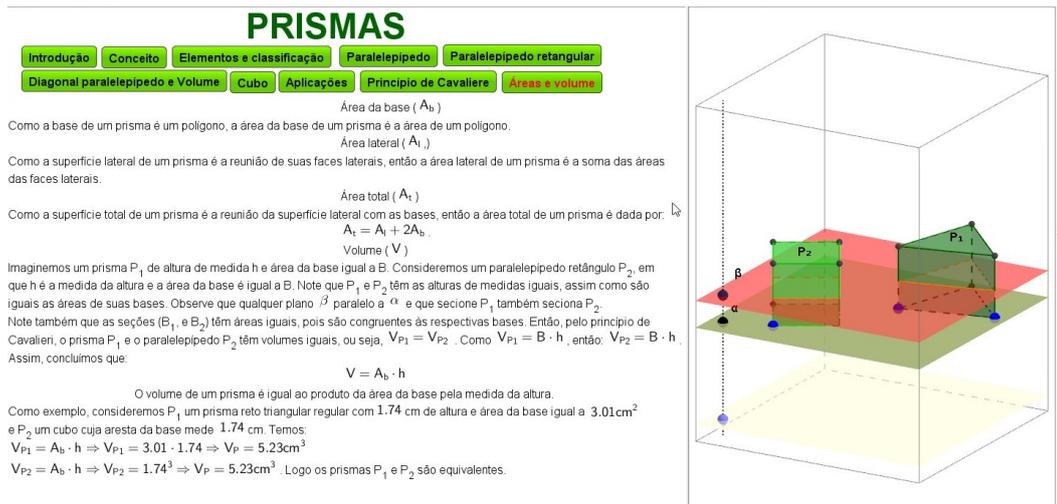


Figura 4.33: Seção Áreas e volume: do autor, 2015.

## 4.4 Passo 34 - Applet do Capítulo 11 - Pirâmides, do volume 2 da coleção

Será exibido a tela inicial do *applet* após elaborar os botões já devidamente programados de acordo às seções do conteúdo deste capítulo: Introdução, Conceito, Elementos e propriedades, Pirâmide regular, Áreas e volume, Tetraedro, Pirâmides semelhantes e Tronco de pirâmide; a serem estudadas e os textos da seção inicial, Introdução, como é mostrado na Figura 4.34.

Nesta seção, construiu-se na janela 2D um texto sobre as pirâmides do Egito e a respectiva foto/imagem extraída do livro e na janela 3D foram feitas três pirâmides semelhantes às da foto usando o plano principal  $xy$  para a base das pirâmides (neste caso os polígonos foram criados na janela 2D e marcados para serem exibidos apenas na janela 3D).

E com a ferramenta  para marcar o vértice da pirâmide e  para determiná-las. Em seguida foi-se ocultado os vértices, pois pretende-se aqui mostrar apenas a estrutura/forma destas pirâmides tendo uma visão panorâmica e orbital das mesmas e para alcançar isto usa-se a ferramenta  da janela de visualização.

A seção Conceito traz a definição do sólido pirâmide e sua respectiva representação geométrica, como mostra a Figura 4.35. Conforme apresentado por [1] o exemplo da janela 3D é de uma pirâmide pentagonal. Foi-se construído o texto da definição de pirâmide e o polígono regular de 5 lados no plano  $xy$  na janela 2D e habilitou-se a visualização na janela 3D. E em seguida sobre um plano paralelo superiormente a  $xy$  determinou-se o vértice da pirâmide. Para ilustrar geometricamente o conceito incluiu-se um ponto livre no polígono e determinou-se um segmento do vértice da pirâmide até este ponto (dem modo que este segmento desloque dentro da pirâmide). Inclui-se a legenda  $\alpha$  do plano.

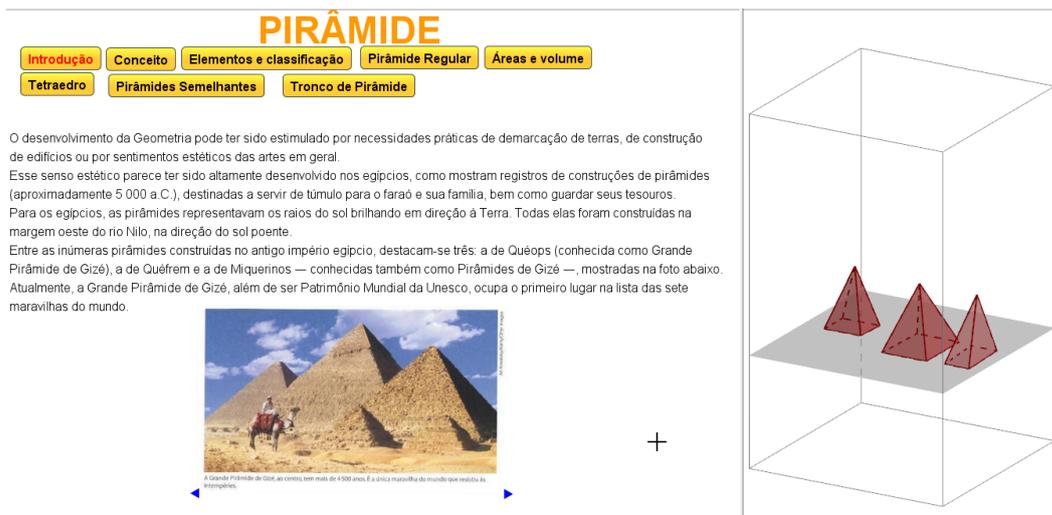


Figura 4.34: Seção Introdução: do autor, 2015.

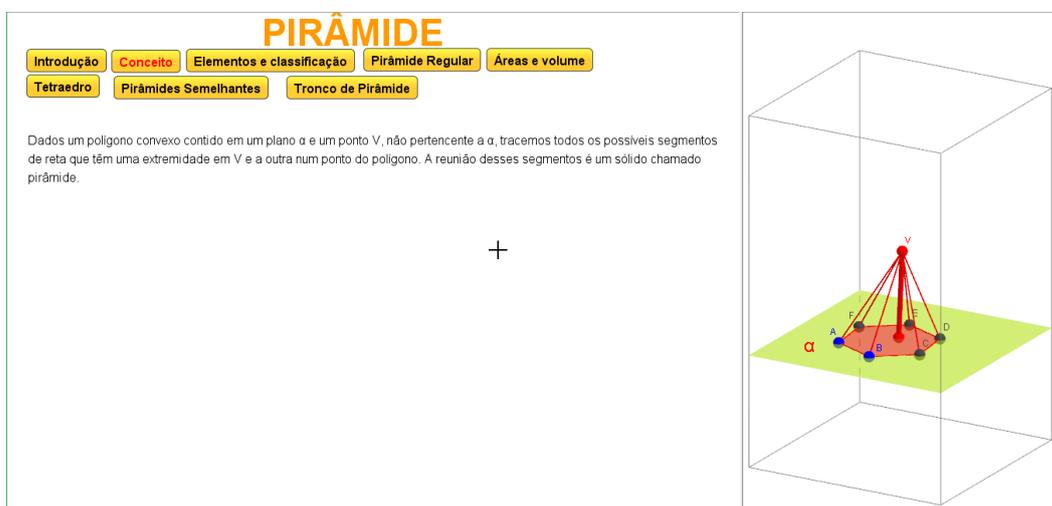


Figura 4.35: Seção Conceito: do autor, 2015.

Para a próxima seção Elementos e propriedades, ver Figura 4.36, foram aproveitadas os objetos 3D da seção anterior e acrescentado um plano paralelo ao plano  $xy$  que contém uma pirâmide regular de lados dinâmicos acionáveis por um controle deslizante e o seu vértice pertencente ao plano  $xy$ . A construção deste controle deslizante na janela 3D foi-se feita como na figura 4.25 da subseção Prisma Oblíquo do capítulo anterior, sobre o sólido Prisma.

Na seção Pirâmide regular inclui-se os textos na janela 2D como já de praxe, criou-se um plano paralelo ao plano  $xy$ , um controle deslizante para determinar o número de lados do novo polígono regular de lados dinâmicos dados neste plano e uma reta perpendicular ao seu centro. Sobre esta reta determinou o vértice da pirâmide e representou este sólido com .

Em seguida destacou um ponto médio de um dos lados com  'Ponto Médio ou Centro' e representou o triângulo retângulo e o seu ângulo reto que contém o vértice da pirâmide,

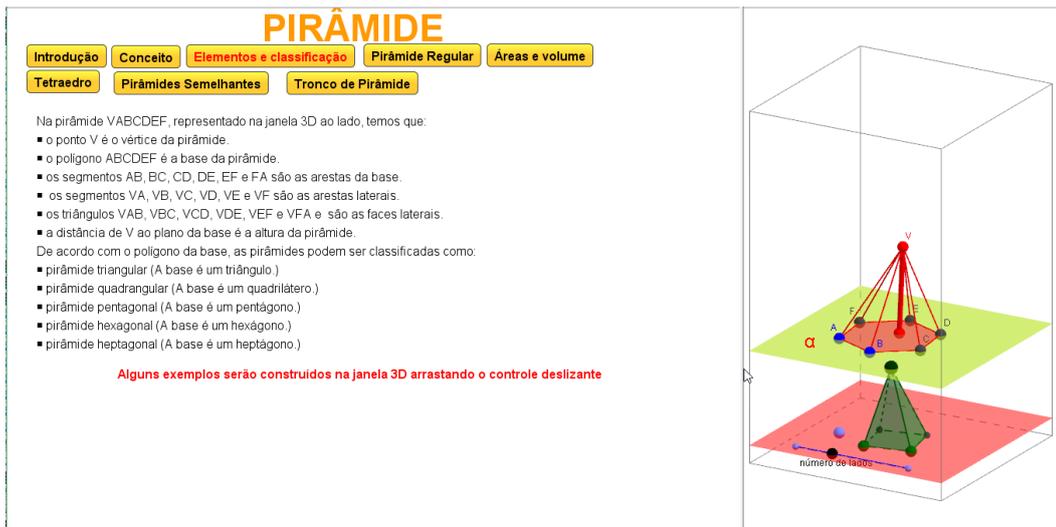


Figura 4.36: Seção Elementos e propriedades: do autor, 2015.

o centro da do polígono da base e o ponto médio da aresta da base inserindo os textos-legenda referentes aos mesmo. Assim temos os elementos suficiente para se estabelecer a relação entre a geratriz  $g$  da pirâmide, o apótema  $m$  do polígono da base e a altura  $h$  da pirâmide, escrevendo:

$$g^2 = m^2 + h^2 \tag{4.2}$$

Após estes comandos o resultado segue de acordo a Figura 4.37:

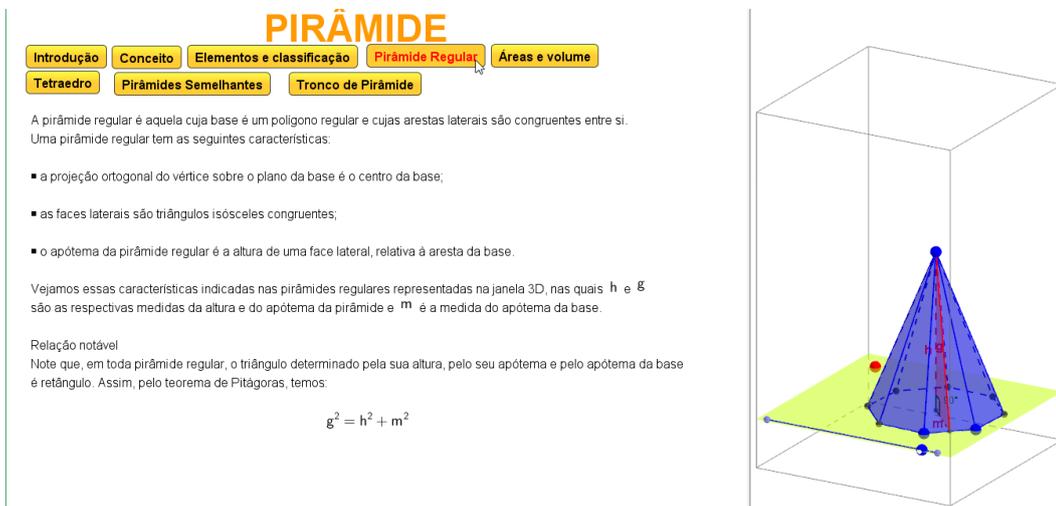


Figura 4.37: Seção Pirâmide regular: do autor, 2015.

Entretanto, [1] não fazem explanação sobre a relação entre as medidas  $l$  da aresta lateral,  $a$  da aresta da base e  $g$  do apótema da pirâmide, a qual é muito útil em alguns casos na resolução de itens, que é obtida imediatamente em uma pirâmide regular reta:

$$l^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + g^2 \tag{4.3}$$

Na seção seguinte, Áreas e volume, incluiu-se os textos na janela 2D e reaproveitou a pirâmide, o controle deslizante do número de lados da pirâmide da seção anterior e o texto que aponta o volume de uma pirâmide como a união dos volumes das  $n - 2$  pirâmides triangulares de base e altura congruentes.

Para isto foi-se construído o polígono compreendido pelos vértice não adjacentes de cada pirâmide triangular exibida pelo controle deslizante. A Figura 4.38 ilustra a representação alcançada.

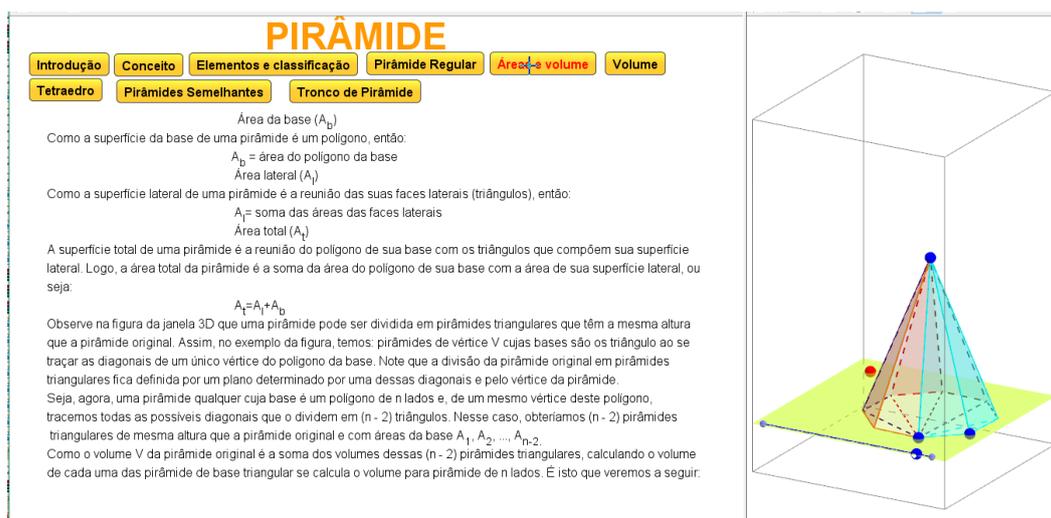


Figura 4.38: Seção Áreas e volume: do autor, 2015.

Na Figura 4.39 é mostrado a seção Volume onde foram incluídas a explicação na janela 2D e na janela 3D foram feitos três planos paralelos a  $xy$ . O primeiro deles para determinar o vértice superior do prisma de base triangular, que foi construído e ocultado posteriormente, a ser seccionado em três pirâmides conforme o indicado pelo

texto da seção. O segundo plano paralelo foi construído usando  e , sendo esta última utilizada da mesma forma como foi explanado no Passo 3.3.22, para transladar as pirâmides de base triangular e o último plano que secciona todas as pirâmides foi para determinar a equivalência de áreas entre duas das pirâmides. Todas estas construções foram feitas para deixar mais clara a compreensão da fórmula que determina o volume de uma pirâmide, buscando ampliar a visualização espacial dos sólidos com a translação  e a rotação de cena .

Na seção seguinte, Tetraedro, na janela 2D é apresentada as fórmulas da altura, área e volume do tetraedro enquanto que na janela 3D é exibido um tetraedro de aresta dinâmica onde se é destacado o segmento correspondente à sua altura e o triângulo retângulo que o contém usando os passos relatados na seção 4.37 - Pirâmide regular deste capítulo. A Figura 4.40 apresenta o resultado alcançado:

As duas últimas seções deste capítulo tem elementos comuns uma vez que tratam de pirâmides semelhantes e troncos de pirâmide. Na primeira destas, Pirâmides seme-

## PIRÂMIDE

Introdução
Conceito
Elementos e classificação
Pirâmide Regular
Áreas e volume
Volume

Tetraedro
Pirâmides Semelhantes
Tronco de Pirâmide

Primeiramente determinemos o volume de uma pirâmide triangular e, para tal, consideremos o prisma triangular da figura abaixo, cuja base tem área  $A_b$  e cuja medida da altura é  $h$ . Seccionando esse prisma pelo plano (A, C, E), obtemos: uma pirâmide quadrangular  $P_1$  e uma pirâmide triangular  $P_2$  de base ABC e altura de medida  $h$ . Seccionando  $P_3$  pelo plano (C, D, E), obtemos duas pirâmides triangulares:  $P_3$  de vértice F e base DEC (ou de vértice C e base DEF), e  $P_4$  de vértice A e base DEC.

Note que:

- $P_2$  e  $P_3$  são pirâmides de bases equivalentes ( $A_{ABC}$  e  $A_{DEC}$ ) e mesma altura.
- $P_3$  e  $P_4$  são pirâmides que têm o ADEC como base comum e mesma altura, pois as distâncias de seus respectivos vértices (F e A) ao plano da base são iguais. Para obter o volume dessas pirâmides triangulares vamos, de maneira introdutória, mostrar o seguinte teorema:

Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.

Demonstração:  
 Se A é a área da base DEC,  $A_3$  a área da seção S e  $A_2$  a área da seção S', temos:  
 $\frac{h}{H} = k \Rightarrow \frac{A_1}{A} = k^2 \Rightarrow A_1 = A_2$

Logo, pelo princípio de Cavalieri, podemos concluir que:  $V_P = V_{P'}$

De modo semelhante, podemos mostrar que  $V_{P_2} = V_{P_3}$  e  $V_{P_3} = V_{P_4}$ , então:  $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4}$ .

Fazendo  $V_{P_2} = V_{P_3} = V_{P_4} = V$  e considerando que o prisma ABCDEF é a reunião das pirâmides  $P_2, P_3$  e  $P_4$ , o seu volume ( $A_b \cdot h$ ) é tal que:  $A_b \cdot h = V + V + V \Rightarrow V = \frac{A_b \cdot h}{3}$ .

Portanto, concluímos, para pirâmides triangulares, a validade do seguinte teorema:  
 O volume de uma pirâmide é igual a  $\frac{1}{3}$  do produto da área da base pela medida da altura.

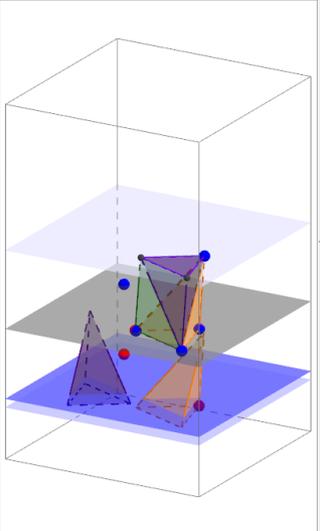


Figura 4.39: Seção Volume: do autor, 2015.

## PIRÂMIDE

Introdução
Conceito
Elementos e classificação
Pirâmide Regular
Áreas e volume

Tetraedro
Pirâmides Semelhantes
Tronco de Pirâmide

De modo geral, chama-se tetraedro toda pirâmide de base triangular. Se as quatro faces de um tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, ele é chamado tetraedro regular. Observe que, em um tetraedro regular:

- as seis arestas são congruentes, ou seja,  $AB = AC = AD = BC = CD = DB$
- qualquer face — ABC, ACD, ABD ou BCD — pode ser considerada como base, já que são triângulos equiláteros.

Vejam como obter a área total  $A_t$ , a altura da medida  $h$  e o volume  $V$  de um tetraedro regular cuja aresta mede  $a$ .

Área total ( $A_t$ )

A superfície total de um tetraedro é a reunião das superfícies de quatro triângulos equiláteros congruentes. Assim, considerando que a medida das arestas do tetraedro é  $a$ , então sua área total é quatro vezes a área de um triângulo equilátero cujo lado mede  $a$ .

Logo:  $A_t = 4 \cdot A_{\text{face}} \Rightarrow A_t = 4 \cdot a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_t = a^2 \sqrt{3}$

Altura ( $h$ )

Para calcularmos  $h$ , medida da altura de um tetraedro regular, consideremos o ponto O, projeção ortogonal do vértice A sobre o plano da base BCD, como mostra a figura. Observe que o triângulo AOB é retângulo; então, pelo teorema de Pitágoras, temos:  
 $AB^2 = AO^2 + OB^2$  (I). Como  $AB = a$ ,  $AO = h$  e  $OB = \frac{2}{3} BM$  (BM: altura do triângulo equilátero BCD), vem:  
 $OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} BM = a \frac{\sqrt{3}}{3}$  (II). Substituindo (II) em (I):  $a^2 = h^2 + (a \frac{\sqrt{3}}{3})^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} \Rightarrow h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Volume ( $V$ )

Sendo  $A_b$ : área de uma face (triângulo equilátero)  $\Rightarrow A_b = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$  e  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$

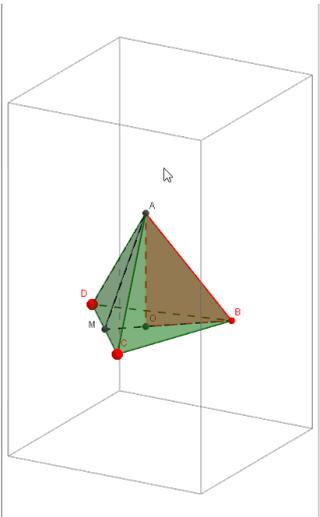


Figura 4.40: Seção Tetraedro: do autor, 2015.

lhantes, ver Figura 4.41, temos o conteúdo exibido na janela 2D e na janela 3D fez-se um trio de planos paralelos ao plano  $xy$  e sobre um deles, o inferior, determinado um controle deslizante e um polígono regular cujo números de lados é determinado por este controle e assim definindo a base do pirâmide inicial. Em seguida determinou-se uma reta perpendicular aos planos e marcou sobre o plano superior o vértice da pirâmide.

O plano do meio secciona a pirâmide determinando uma pirâmide semelhante à original e o tronco de pirâmide na base. Para tanto ao invés de se criar o sólido pirâmide traçou suas arestas laterais e marcou sua interseções como o plano de seção determinando os polígonos das faces laterais e da base do tronco e da pirâmide obtida na seção. Neste caso construiu-se todos dos polígonos das faces laterais de dois vértices não adjacentes.

Na última seção, ver Figura 4.42, Troncos de pirâmide, na janela 3D aproveitou-se

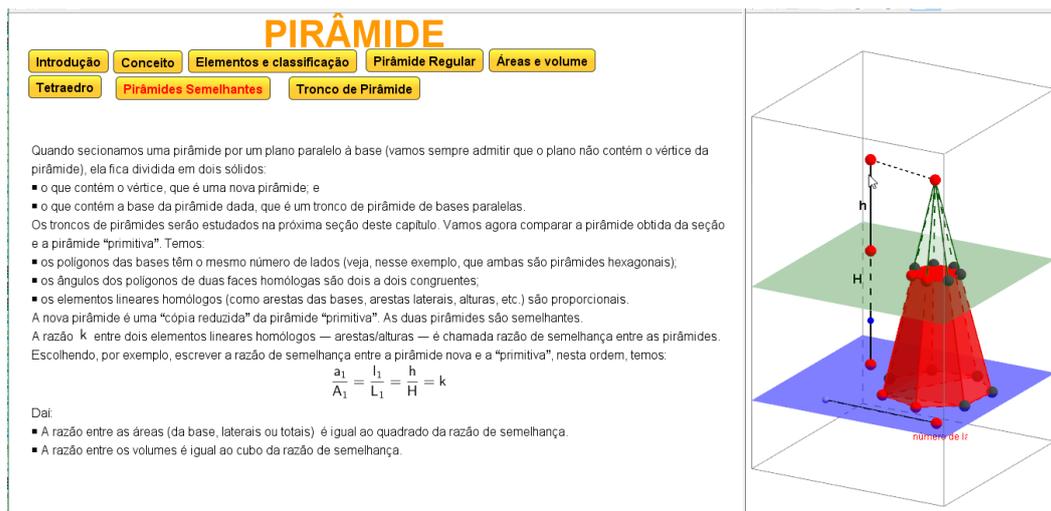


Figura 4.41: Seção Pirâmides semelhantes: do autor, 2015.

o tronco de pirâmide da seção anterior, os pontos que orientam o plano da base, o plano de seção, o controle deslizante e o vértice da pirâmide. Quanto à janela 2D foi acrescentado o conteúdo correspondente.

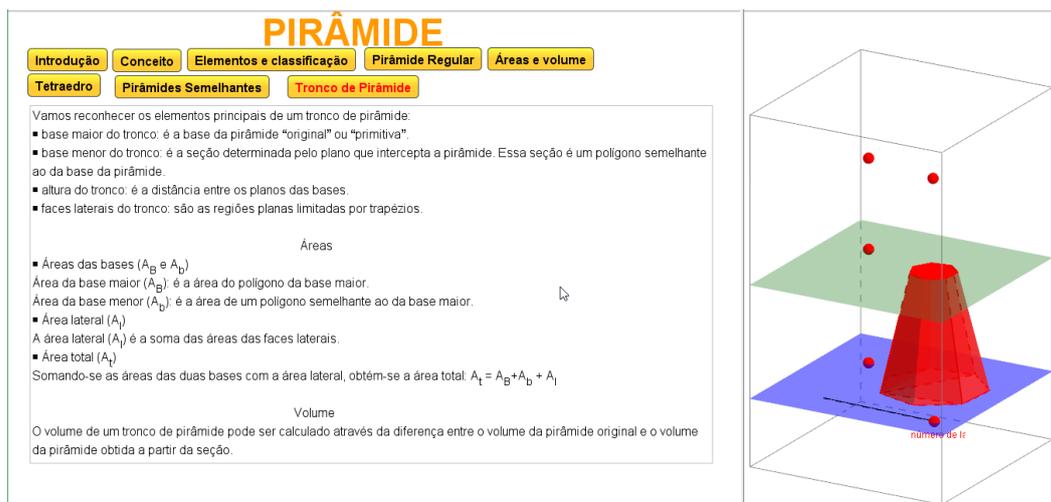


Figura 4.42: Seção Tronco de pirâmide: do autor, 2015.

Os autores [1] não trazem nenhuma das fórmulas a seguir sobre troncos, mesmo sendo estas da literatura acerca do assunto:

Área lateral:

$$A_l = \frac{(a + b)g}{2} \quad (4.4)$$

Sendo  $a, b$  aresta da base menor e maior;

Volume:

$$V = \frac{h}{3}(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b) \quad (4.5)$$

Onde  $A_b, A_B$  área das bases menor e maior;

Portanto, este *applet* relativo ao capítulo 11 - Pirâmides está pronto para *upload* e uso.

## 4.5 Passo 35 - Applet do Capítulo 12 - Cilindro, do volume 2 da coleção

O cilindro é primeiro sólido dos corpos redondos a ser estudado no ensino médio e nesta coleção. Então como sempre [1] fazem na introdução de capítulos, apresentam formas reais correspondentes aos sólidos, para o cilindro são latas, recipientes e tubos de linha/barbante. Então após estruturar o título, os botões-seção: Introdução, Conceito, Elementos e classificação, Áreas e volume e Seção Meridiana e triângulo equilátero; e os seus respectivos valores booleanos, a tela da seção Introdução do *applet* tem na janela de visualização 2D o texto introdutório sobre a presença dos cilindros em formas de objetos do dia a dia e a respectiva imagem que se encontra no livro.

Na janela 3D construiu-se sobre o plano  $xy$  três cilindros correspondentes às três latas à direita da imagem da janela 2D e ao usar a ferramenta rotação de cena pode-se constatar alguns elementos dos cilindros descritos no texto.



Figura 4.43: Seção Introdução: do autor, 2015.

Na seção seguinte Conceito, na janela 2D os textos e os botões de interação e na janela 3D foram determinados dois planos paralelos (plano paralelo a um plano dado passando por um ponto) a  $xy$ . Marcou-se um ponto em um deles e em seguida determinou-se a distância entre estes planos definindo um segmento sobre a reta que seca estes dois planos. Como se pretende orientar a geratriz do cilindro a partir de uma reta qualquer (pois se quer um cilindro qualquer - oblíquo ou reto) em cada um dos planos marcou-se um ponto e determinou-se um segmento entre eles. No plano mais abaixo marcou-se um ponto e uma reta paralela ao segmento qualquer (ver passo 4.3).

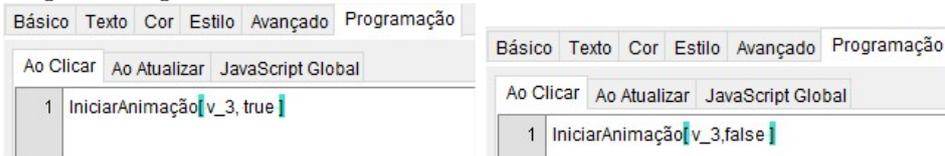
Esta reta será utilizada para determinar o eixo que contém os círculos das bases do cilindro e usa-se  para determiná-las.

Nesta versão o *Geogebra 5.0* não possui uma ferramenta para se construir um cilindro qualquer (não necessariamente reto). Adotando-se a definição de cilindro como um sólido de revolução então para construir um cilindro qualquer foi-se determinado um ponto que gira ao redor de uma reta a partir de um ângulo (o ângulo foi criado usando

na janela 2D, cujo nome é  $v_3$  e varia de 0 a  $6228 \cong 2\pi$ ) usando a ferramenta  em  e depois por este ponto marca-se uma reta paralela ao eixo do cilindro.

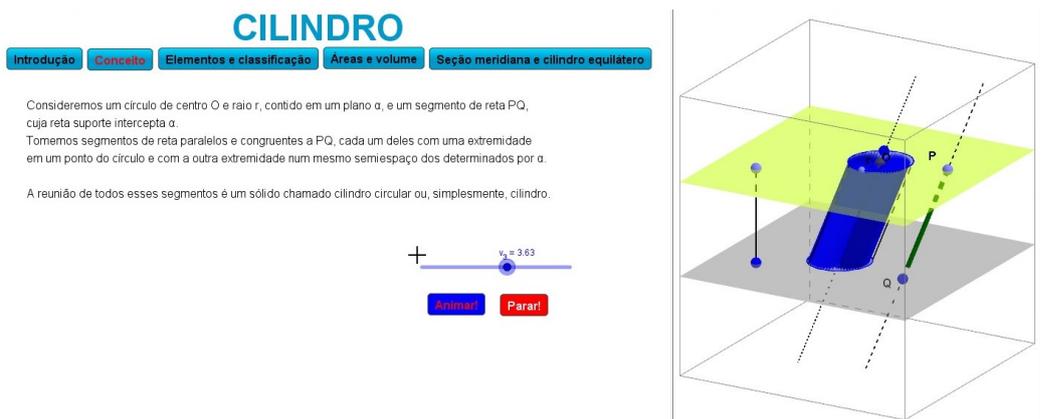
O paralelogramo correspondente à geratriz (delimitado pelo eixo, pelas extremidades dos raios e pela reta paralela ao eixo na extremidade do círculo das bases) do cilindro foi feita usando  e girará em torno do eixo ao movimentar o controle deslizante e delimitará o cilindro.

Para dar mais completude e continuidade a este sólido programou-se dois botões denominados "Animar" e "Parar" como se é mostrado nas figuras seguintes de modo que a geratriz gire continuamente.



Ao final se ocultou as retas suporte e a tela desta seção ficou como na Figura 4.44. Esta construção representa geometricamente a seguinte definição:

**Definição 4.1.** Consideremos um círculo de centro  $O$  e raio  $r$ , contido em um plano  $\alpha$ , e um segmento de reta  $PQ$ , cuja reta suporte intercepta  $\alpha$ . Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a  $PQ$ , cada um deles com uma extremidade em um ponto do círculo e com a outra extremidade num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ . A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado cilindro circular ou, simplesmente, cilindro.



**CILINDRO**

Introdução **Conceito** Elementos e classificação Áreas e volume Seção meridiana e cilindro equilateral

Consideremos um círculo de centro  $O$  e raio  $r$ , contido em um plano  $\alpha$ , e um segmento de reta  $PQ$ , cuja reta suporte intercepta  $\alpha$ .  
Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a  $PQ$ , cada um deles com uma extremidade em um ponto do círculo e com a outra extremidade num mesmo semiespaço dos determinados por  $\alpha$ .  
A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado cilindro circular ou, simplesmente, cilindro.

+  $v_3 = 3.63$

Animar Parar

Figura 4.44: Seção Conceito

Para passar à próxima seção vinculou-se os objetos aos valores booleanos na aba Avançado de suas propriedades e, sabendo que a seção seguinte, Elementos e classificação, trataria sobre os elementos e a classificação dos cilindros aproveitou e programou-se a exibição para valores booleanos usando "conc  $\vee$  elem". Como de praxe na janela 2D os textos e definições e na janela 3D as formas espaciais, como mostra a Figura 4.45.

Desta maneira a seção terá dois tipos de cilindros, sendo necessário construir apenas o cilindro reto como em 4.2 e determinando sobre este cilindro sua geratriz e a animação da mesma, como foi explicado anteriormente na seção anterior a esta.



Figura 4.45: Seção Elementos e Classificação: do autor, 2015.

A penúltima seção, como mostra a Figura 4.46 temos na janela 2D as fórmulas e na janela 3D os objetos. Como abordagem de [1] a área lateral do cilindro é obtida rolando o mesmo sobre um plano (enquanto que no livro é ilustrado como um corte reto sobre a "casca lateral" do cilindro) e obtendo assim um retângulo enquanto que o seu volume é dado por equivalência ao volume de um prisma que possui base e altura de medidas iguais à do cilindro, optando-se aqui por um prisma reto de base pentagonal regular. Nesta seção o desafio fora obter o desenrolar do cilindro de modo que a área lateral fosse corretamente representada.

Para tanto, constrói-se dois planos paralelos construídos da mesma forma como nas seções anteriores. Determina-se um plano perpendicular usando  em  e sobre ele demarcou um retângulo de área igual à área lateral do prisma. Para se saber a medida da base deste retângulo é necessário saber o perímetro do círculo da base do cilindro. Entretanto as áreas da base do prisma e do cilindro são iguais e sabendo que o prisma tem medida do lado dinâmico, seja  $A_b$  a área da base do prisma, decorre que:

$$\pi r^2 = A_b \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A_b}{\pi}} \quad (4.6)$$

Portanto o raio do cilindro é  $r = \sqrt{\frac{A_b}{\pi}}$  e o perímetro da base  $P = 2\pi\sqrt{\frac{A_b}{\pi}}$  (escritas na tela do programa quando solicitadas tais medidas), que será a medida da base do retângulo e com ela usando  e  determina-se o retângulo. Sobre o lado da base do retângulo marca-se um ponto móvel com a ferramenta ponto e uma reta perpendicular ao segmento. Daí se determina um círculo com centro neste ponto móvel cujo raio é a medida da equação anterior e marca sua interseção com a reta.

Agora se faz um círculo com centro nesta interseção e de mesmo raio, para assim,

obter um círculo tangente ao plano vertical onde está definida o retângulo correspondente à área lateral. Levanta-se a perpendicular ao plano paralelo a  $xy$ , marca-se a interseção no outro plano e com  **Cilindro** em  define-se o cilindro "rolante".

Em seguida usando novamente  em  será criado um ponto que gira de acordo com o movimento do ponto móvel sobre o segmento, cujo o ângulo é a distância do ponto móvel até uma extremidade do segmento multiplicada pelo valor  $6.28318 \cong 2\pi$ . Constrói-se a geratriz, como foi explicado na seção anterior para deixar claro que o sólido se desenrola no plano perpendicular construído. Para exibir o volume de cada sólido usa-se  em  clicando com o mouse sobre cada sólido.

CILINDRO

Introdução
Conceito
Elementos e classificação
Áreas e volume
Seção meridiana e cilindro equilátero

Área da base ( $A_b$ )

A área de um círculo de raio de medida  $r$  é a área da base. Logo  $A_b = \pi r^2$

Área lateral ( $A_l$ )

Dá-se o nome de área lateral à área de um retângulo de base  $2\pi r$  (comprimento da circunferência da base) e altura  $h$  em que  $r$  é a medida do raio do cilindro e  $h$  é a medida da altura do cilindro. Isso pode ser visualizado se planificarmos a superfície lateral do cilindro. Assim,  $A_l = \text{área de um retângulo} \Rightarrow A_l = 2\pi r h$

Área total ( $A_t$ )

A área total de um cilindro é a reunião da área da superfície lateral com a área dos círculos das bases. Substituindo  $A_l = 2\pi r h$  e  $A_b = \pi r^2$ , vem:  $A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 \Rightarrow A_t = 2\pi r(h + r)$

Volume ( $V$ ) do cilindro

Consideremos um cilindro de altura de medida  $h$  e área da base  $A_b$ . Consideremos também um prisma de altura de medida  $h$  e área da base  $A_b$ . Note que o cilindro e o prisma têm alturas iguais e bases equivalentes. Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases contidas em um mesmo plano e fiquem no mesmo semiespaço de origem  $a$ . Qualquer plano  $\beta$  paralelo a  $a$  que seccione o cilindro também secciona o prisma, e as seções  $B_1$  e  $B_2$  têm áreas iguais a  $A_b$ , pois são congruentes às respectivas bases. Então, pelo princípio de Cavalieri, o cilindro e o prisma têm volumes iguais.  $V_{\text{Cilindro}} = V_{\text{Prisma}}$

Como  $V_{\text{Prisma}} = A_b \cdot h$ , então  $V_{\text{Cilindro}} = A_b \cdot h$

Conclusão: o volume de um cilindro é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

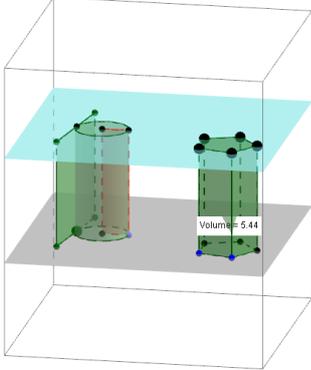
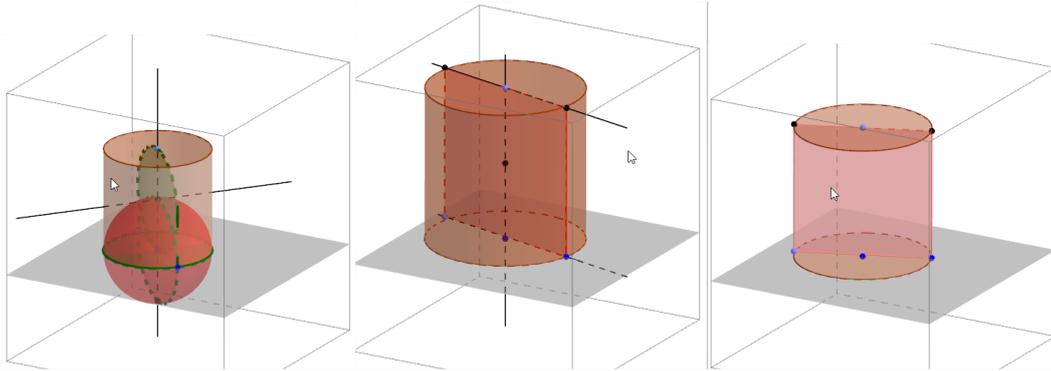


Figura 4.46: Seção Áreas e volume: do autor, 2015.

A última seção deste capítulo: Seção Meridiana e cilindro equilátero tem na janela 2D as definições e na janela 3D foi-se construído inicialmente um círculo na base e com  uma esfera com centro e raio de mesma medida. Em seguida determinou-se uma reta perpendicular  ao círculo da base e marcou sua interseção com a superfície da esfera e sobre esta interseção  mais uma reta perpendicular à reta do eixo do cilindro  $E$ , em seguida, um novo círculo perpendicular à base usando  e novamente marcou-se a interseção com reta perpendicular à base do cilindro obtendo assim a altura igual ao diâmetro da base e finalmente construindo o cilindro equilátero.

Depois disso construiu-se a seção meridiana usando as retas suporte dos lados do quadrado, da mesma maneira como foi feito na construção da geratriz, como mostra as figuras a seguir:



O final desta seção ficará como mostra a Figura 4.47.



Figura 4.47: Seção Seção Meridiana e cilindro equilátero: do autor, 2015.

Vinculado este últimos objetos ao booleano da seção e ocultando as retas suporte, a esfera e o círculo perpendicular à base concluiu-se esta seção. Neste *applet* foram desenvolvidos estas ações que o torna apto para disponibilização offline.

## 4.6 Passo 36 - Applet do Capítulo 13 - Cones, do volume 2 da coleção

Neste *applet* temos as seguintes seções: Introdução, Conceito, Elementos e classificação, Áreas e volume, Seção meridiana e tronco. Nesta última seção temos a subseção Troncos e cones semelhantes e os seus respectivos botões e valores booleanos.

A Figura 4.48 traz a tela da seção Introdução. Nela têm os textos e as imagens sobre elementos do cotidiano no formato cônico à esquerda na janela 2D enquanto que na janela 3D temos um cone reto definido cuja base possui o centro no plano  $xy$  e o vértice do cone em um plano paralelo a este.

Neste já temos que os cones feitos aqui por meio da ferramenta  Cone serão retos e, desta forma ao movimentar o vértice do mesmo têm-se a sua inclinação completa. O plano paralelo construído poderá deslizar para cima ou para baixo (em relação ao eixo  $z$ ) conforme se queira ilustrar as imagens/fotos exibidas.



Figura 4.48: Seção Introdução: do autor, 2015.

A seção seguinte, Conceito, temos o texto da definição de um cone qualquer na janela 2D e a janela 3D traz a representação geométrica da definição a seguir:

**Definição 4.2.** *Consideremos um círculo de centro  $O$  e raio  $r$ , contido em um plano  $\alpha$ , e um ponto  $V$ , fora de  $\alpha$ . Chama-se cone circular, ou apenas cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em  $V$  e a outra em um ponto do círculo.*

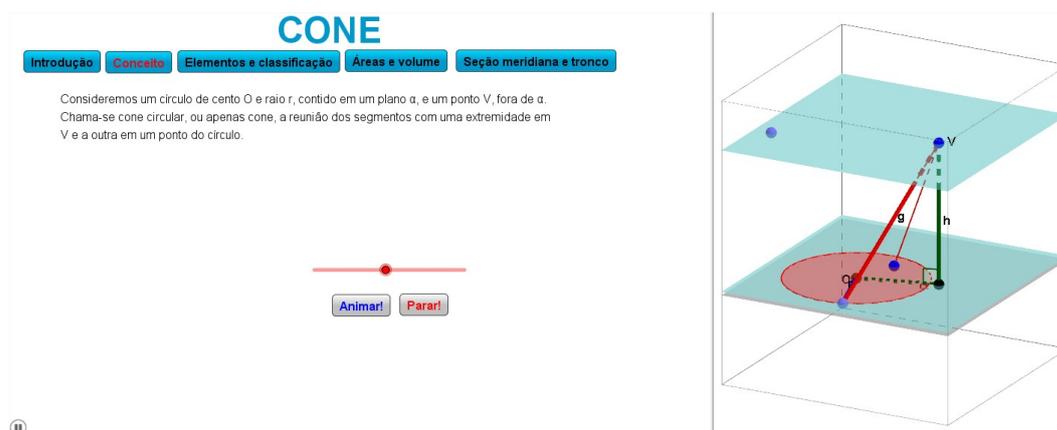


Figura 4.49: Seção Conceito: do autor, 2015.

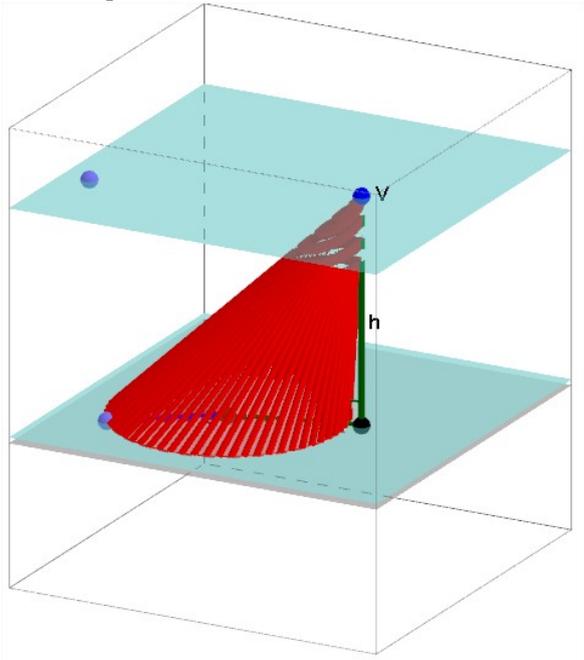
A Figura 4.49 mostra a construção realizada. Usou-se dois planos paralelos ao plano  $xy$  com  em  em um deles um círculo de raio fixo (medida 2 u.c.) por meio de  e dois pontos sobre este círculo, um na sua circunferência e o outro um ponto interno pertencente a ele.

Em seguida com  feito na janela 2D determina-se o ângulo com valor entre 0 e 360° e  também em  na janela 3D seleciona-se o ponto da circunferência e seu eixo de direção e, ao ser solicitado digita-se  $\beta$ , que é o controle deslizante da janela 2D.

Agora para obter o triângulo que gira em torno do eixo do cone, determinou-se um ponto no outro plano paralelo ao plano  $xy$  e dois segmentos que partem dele, um

segmento ligando este ponto (vértice do cone) ao ponto interno ao círculo e o outro a sua respectiva projeção no segundo plano e o segmento que determina a medida da altura e por fim o segmentos que ligam o ponto móvel (que gira na circunferência conforme controle deslizante) ao ponto de projeção o vértice do cone.

Para completar inclui-se na janela 2D os botões de animação "Animar" e "Parar" para acionar o controle deslizante e determina-se o triângulo compreendido entre o vértice do cone, o ponto móvel e o centro do círculo. Após isto, habilita-se o rastro deste triângulo para obter o "cone de revolução" como destacado na imagem a seguir:



Renomeia-se os pontos para atender a definição, inclui-se os textos-legenda dos segmentos:  $g$  da geratriz do cone,  $h$  da altura; e oculta-se a reta de direção do círculo e o ponto fixo da circunferência e seção ficou pronta.

Para seção seguinte, Elementos e classificação, como mostra a Figura 4.50, aproveitou-se todos os objetos 3D da seção anterior, incluiu-se o texto-legenda do segmento  $r$  raio do círculo da base do cone e incluiu-se um novo texto da janela 2D onde há a descrição dos elementos, a classificação de cones e a equação:

$$r^2 + h^2 = g^2 \quad (4.7)$$

A qual relaciona as medidas de um cone reto e conclui-se esta seção.

A Figura 4.51 mostra a seção Áreas e volume. As fórmulas de área e volume se apresentam na janela 2D. Assim como em cilindro o volume de um cone se dá por comparação, neste caso ao volume da pirâmide e, com efeito, na janela 3D têm-se uma pirâmide e um cone de base de mesma área e altura congruentes. A obtenção da área da base foi-se do mesmo modo para se obter na figura 4.46. Os novos elementos construídos nesta seção se refere à planificação animada por controle deslizante na janela 3D da superfície lateral do cone.

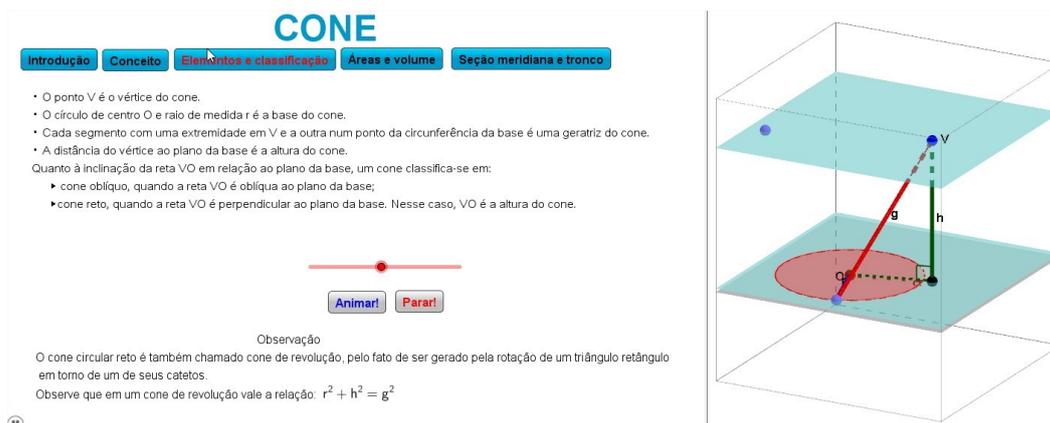


Figura 4.50: Seção Elementos e classificação: do autor, 2015.

Para obtê-la determina-se um ponto móvel no círculo da base do cone como o que foi construído na seção anterior porém o ângulo será determinado a partir de um segmento (cuja medida corresponda ao ângulo de rotação) na janela 3D (este passo da construção foi feito no sólido cilindro).

Determina-se uma esfera cujo raio seja a geratriz do cone e as retas: perpendicular à base do cone (eixo do cone) e a reta que passa pela geratriz e em seguida marca-se a interseção delas com a esfera.

Em seguida, determina-se o círculo que passa pelo ponto móvel e por este dois últimos pontos determinados usando  em  e sobre esta circunferência marca o setor circular através de  em , cujo arco tem comprimento igual ao ângulo de rotação (digita-se a expressão  $-(Segmento[T, V] \pi Segmento[P, S] / Segmento[R, S])$  ao ser solicitada a medida do ângulo, sendo  $P, R$  e  $S$  os pontos do segmento que contém o controle deslizante.

Desta forma ao mover o ponto  $P$  do controle deslizante a área lateral é planificada dinamicamente. Segue a tela final da construção desta seção.

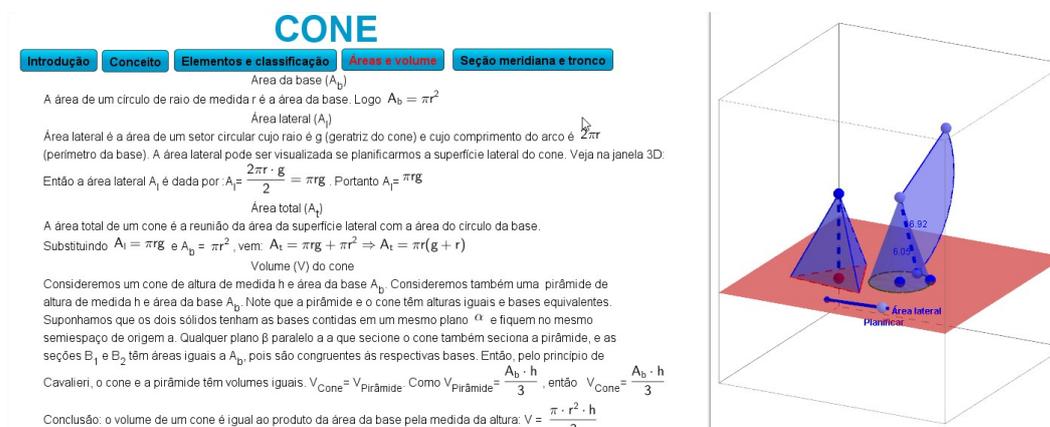


Figura 4.51: Seção Áreas e volume: do autor, 2015.

Na seção a representação geométrica na janela 3D da seção meridiana se dá pela construção do triângulo que contém o vértice e um diâmetro do mesmo, conforme definição apresentada na janela 2D. Conforme comandos explicados anteriormente obtemos a construção como mostra a Figura 4.52.

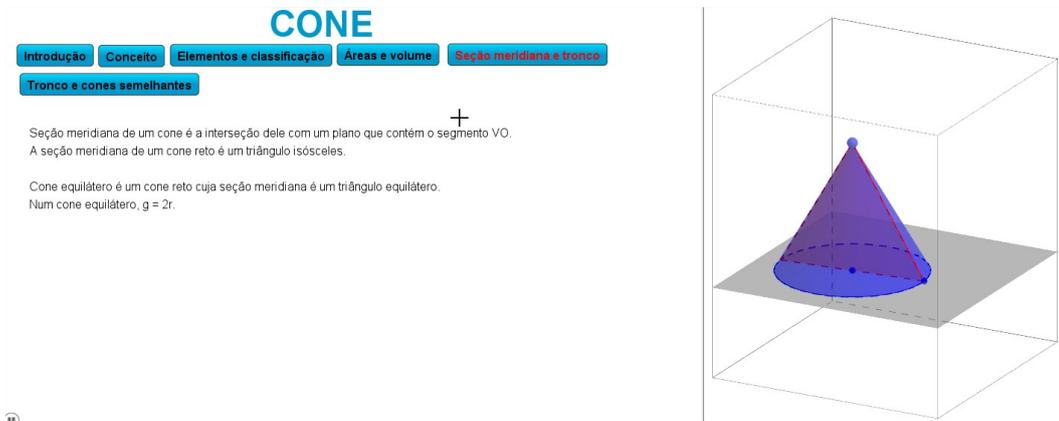


Figura 4.52: seção Seção Meridiana e tronco: do autor, 2015.



Figura 4.53: Subseção Tronco e cones semelhantes da seção Seção Meridiana e tronco: do autor, 2015.

Há uma subseção denominada Tronco e cones semelhantes e nela foi-se incorporada os textos da definição e as fórmula de área e de volume. Novamente o *Geogebra* não possui ferramenta pronta para construir um tronco de cone.

E, então, construiu-se um superfície de revolução para determiná-lo (este passo está descrito na Figura 4.32 da seção Princípio de *Cavalieri* do sólido Prisma, e aqui a função é a reta que passa pela geratriz e é ortogonal ao plano  $xz$  e fazendo a mudança de variável escreve-se a mesma como  $f(x) = y = ax + b$  e delimitada pela coordenada do ponto que define o plano de seção paralelo ao plano da base).

Ao final têm-se a Figura 4.53.

## 4.7 Passo 37 - *Applet* do Capítulo 14 - Esfera, do volume 2 da coleção

Neste passo teremos o último *applet* construído para este trabalho, pois se refere ao único sólido geométrico ainda não estudado, a esfera.

Na figura 4.54 têm os botões da seções, os textos e a imagem que traz objetos reais no formato esférico (a própria imagem do livro da coleção) na janela 2D e como não se tem nesta seção objetos na janela 3D, foi-se selecionado um botão e destacado sua programação nas suas propriedades aos quais vincularemos os objetos das duas janelas.

Em tempo o valor booleano *obs* é da subseção Observação da seção Conceito, explanada a seguir.

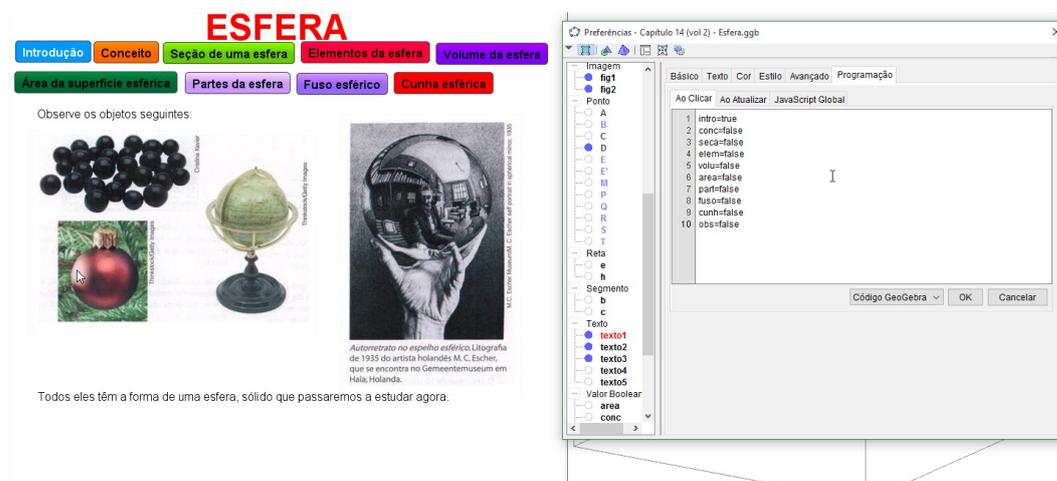


Figura 4.54: Seção Introdução

A Figura 4.55 se refere a seção Conceito do sólido esfera, onde na janela 3D foram construídas duas esferas concêntricas com  (sendo ocultada a menor delas) e determinados pontos sobre as superfície esféricas e dois dos raios da maior usando a ferramenta segmento  em . Já na janela 2D textos e o botão com respectivo valor booleano da subseção Observação

Como se é sabido que a esfera é também um sólido de revolução, a subseção Observação, ver Figura 4.56, tratará das proposições tanto do sólido quanto da sua superfície na janela 2D e na janela 3D as respectivas representações geométricas.

**Proposição 4.1.** *A superfície esférica de centro  $O$  e raio  $r$  é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro.*

**Proposição 4.2.** *A esfera de centro  $O$  e raio  $r$  é o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.*

Ainda nesta janela (2D) temos um controle deslizante cujo valor é angular (temporizado para  $0.5^\circ$  incremento e 10 a velocidade) e os botões "Animar!" e "Parar!" que

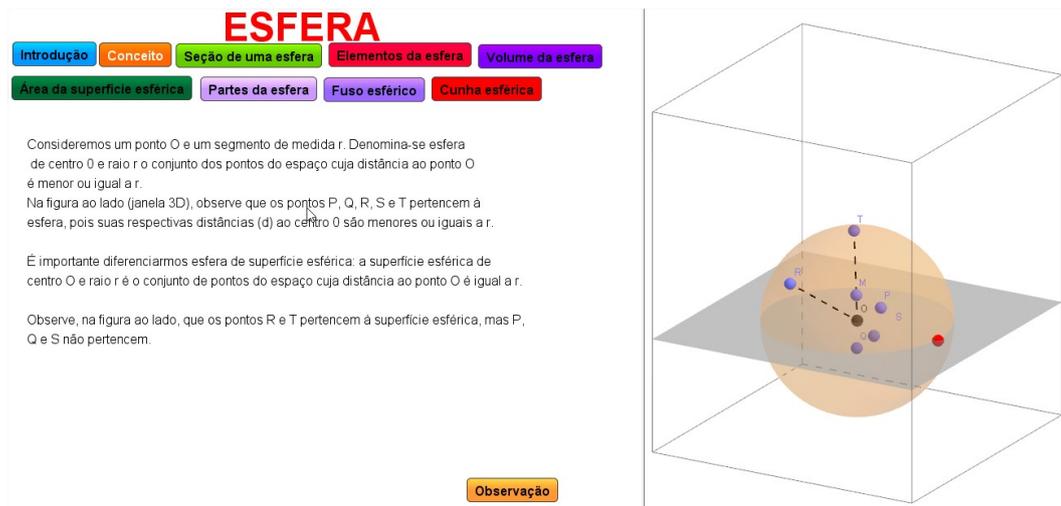


Figura 4.55: Seção Conceito: do autor, 2015.

realizam a animação da revolução de dois setores angulares de  $90^\circ$  adjacentes e de um mesmo círculo na janela 3D, onde foi-se feito uma esfera com  secante ao plano  $xy$  com seu centro e extremidade externa do raio pertencente a este plano.

Foi-se marcado a interseção entre a esfera e o plano usando  e a reta perpendicular ao plano  $xy$  no centro da mesma utilizando  e suas interseções através de  e em seguida por meio de  em  determinou a rotação do ponto para com  marcar os setores angulares abaixo e acima do plano  $xy$ .

Programou-se o botão Animar usando:

```

Ao Clicar  Ao Atualizar  JavaScript Global
1  IniciarAnimação[a,true]
2  DefinirTraço[p, true ]
3  DefinirTraço[q, true ]

```

e de forma análoga (trocando os valores booleano de *true* para *false*) programou-se o botão Parar. Portanto esta seção está pronta.

A seção seguinte, Seção de uma esfera, é representada pela Figura 4.57 onde temos na janela 3D uma esfera que foi seccionada por um plano que corta o raio no ponto A. Para isto determinou a esfera através de  e em seguida usando  em  determinou-se seu raio passando por estes dois pontos. Sobre este segmento foi-se criado um ponto usando  e com  seleciona este ponto e o raio determinando um plano secante à esfera.

Agora por meio de  determinou-se o círculo de interseção entre este plano e a esfera. Marcando-se um ponto B pela ferramenta  sobre o círculo da interseção

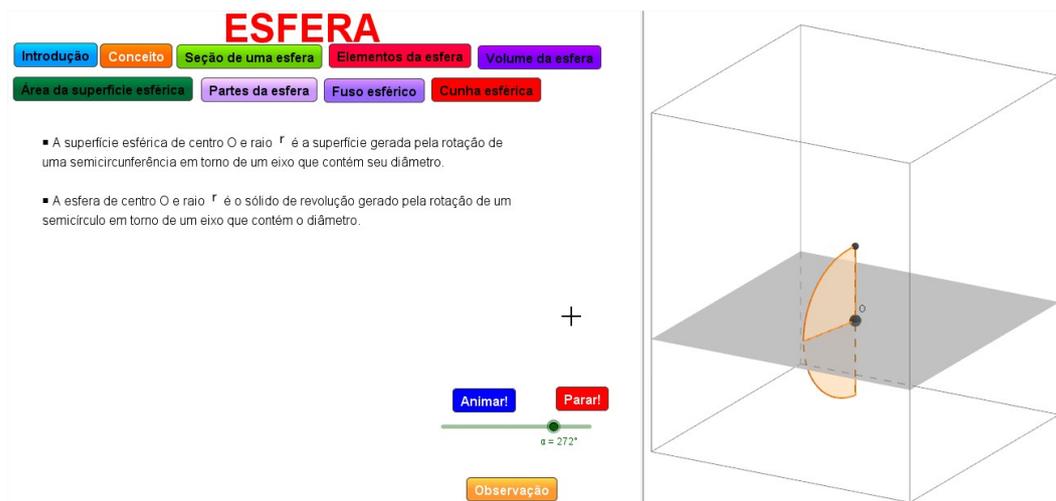


Figura 4.56: Subseção Observação da seção Conceito: do autor, 2015.

das duas superfícies é possível estabelecer um triângulo retângulo utilizando  e destacando seu ângulo reto usando .

Nesta seção a parte textual da janela 2D além das definições têm-se um algoritmo dinâmico que calcula como exemplo o valor do raio da esfera exibida e calcula interativamente e dinamicamente a partir da relação entre as medidas:  $s$  - raio do círculo da seção,  $d$  - distância até o centro e  $r$  - raio da esfera; por meio da equação:

$$s^2 + d^2 = r^2 \tag{4.8}$$

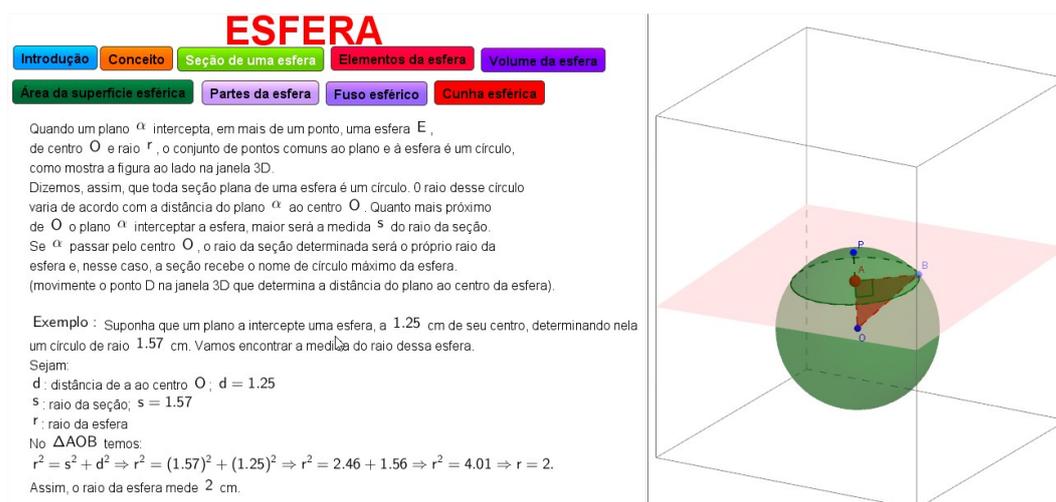


Figura 4.57: Seção Seção de uma esfera: do autor, 2015.

Ao vincular a exibição dos objetos da seção ao valor booleano da mesma clica-se no botão da próxima seção, Elementos de uma esfera correspondente à Figura 4.58.

Já nesta seção temos as definições de paralelo, meridiano, Equador, hemisférios e pólos na janela 2D e suas respectivas representações na janela 3D. Novamente com

 construiu-se a esfera. A ferramenta  auxilia a determinação do círculo de interseção entre o plano  $xy$  e a esfera.

Por meio de  construiu-se o eixo da esfera. E com  marcou os polos. Agora com  e  se fez um ponto móvel marcou um meridiano que passa por ele. Por fim usando  e  se fez um ponto sobre a superfície esférica e determinou-se um paralelo móvel e  em  para determinar o raio até este ponto do paralelo. Em seguida usando a ferramenta de textos incluiu-se os textos-legenda de cada elemento e terminar esta seção vinculando tais objetos feitos ao botão da mesma.

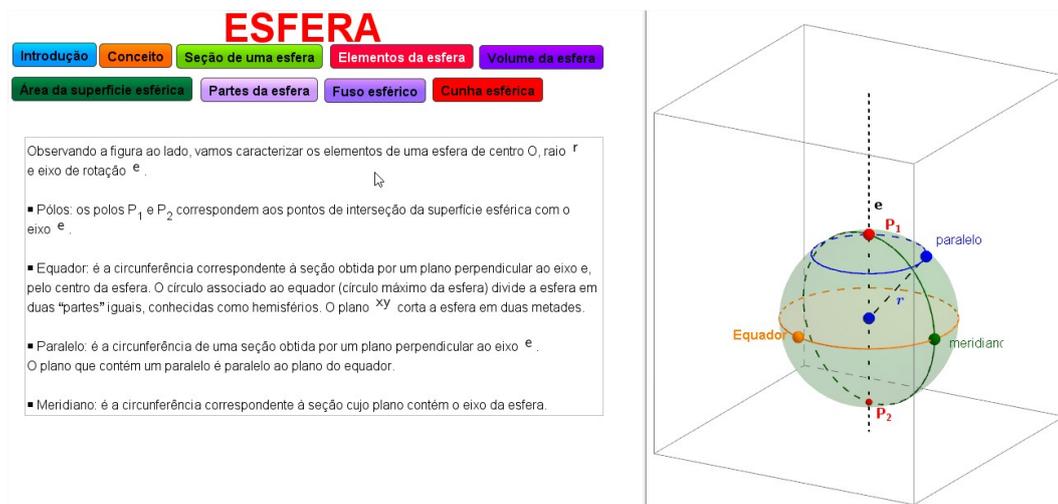


Figura 4.58: Seção Elementos de uma esfera: do autor, 2015.

Na seção Volume da esfera, representada pela Figura 4.59, foram construídos dois pontos sobre o plano  $xy$  e uma reta perpendicular a um deles e o segmento que os liga. Determina-se um cilindro equilátero e dois cones retos congruentes e com vértice comum cuja altura é igual ao raio do cilindro. Portanto, digita-se no campo de entrada  $Cilindro[e\_1, 2 * b\_1]$ ,  $Cone[e\_1, b\_1]$  e  $Cone[k, -b\_1]$ , respectivamente, onde  $e\_1$  é o círculo da base inferior,  $k$  é o círculo da base superior e  $b\_1$  o raio.

Em seguida marcou-se o ponto de interseção da reta com a base superior do cilindro, determinou-se o segmento que liga os centros das base e sobre ele marcou-se o ponto médio (vértice comum dos cones). Este passo foi necessário para determinar o plano que contém o centro da esfera de raio igual ao do cilindro por meio de .

Novamente com a ferramenta  marcou-se um novo plano paralelo à base superior do cilindro e em seguida um ponto sobre ele que se define um segmento congruente à altura do cilindro e paralelo ao eixo dele. Sobre este último segmento defini-se um ponto (do plano  $\beta$ ) que determinará o plano de seção paralelo à base entre os sólidos

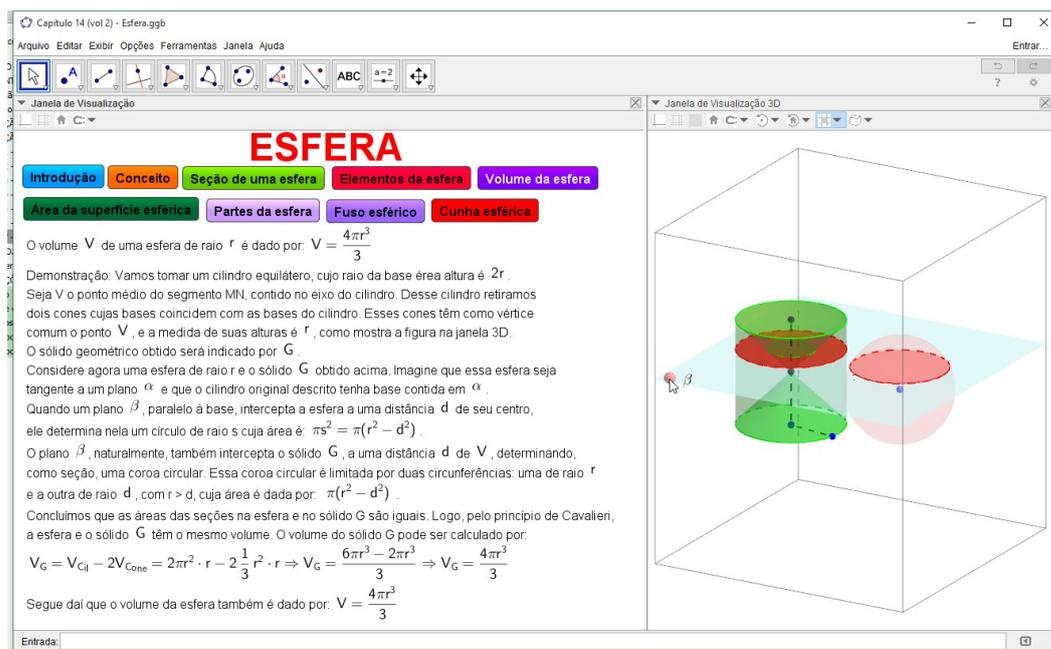


Figura 4.59: Seção Volume da esfera: do autor, 2015.

construídos.

Como este plano intersecta os sólidos marca-se com a ferramenta  a interseção entre eles, sendo exibidos círculos e editando suas cores na barra de estilos  destaca-se suas áreas de acordo ao textos e definições da janela 2D (área de seções iguais implica volumes iguais), na qual se é apresentado o texto da demonstração e as fórmulas. Após isto oculta-se alguns objetos e vincula-se os demais ao botão da seção, de modo a ficar como a Figura 4.59 encerrando esta seção.

A seção Área da superfície esférica, ver Figura 4.60, fará uso do cálculo do volume da esfera (seção anterior) para se obter o área a superfície esférica.

Embora [1] apresentem uma esfera texturizada com polígonos regulares (e.g. esfera de Gauss), optou-se aqui em fazer alguns triângulos esféricos para cobrir a superfície da esfera e, também, deixá-la transparente para que ao destacar um destes triângulos e assim montar uma pirâmide de base triangular.

Então criou-se uma esfera dado centro e um dos seus pontos  e sobre a mesma marcou pontos  de modo que por eles traçou arcos de circunferência . Em seguida, destacou-se três arcos que formam um triângulos esférico com a cor vermelha e marcou-se três raios cuja extremidades são os vértices deste triângulo.

Na janela 2D construiu-se os textos e as fórmulas onde foi incluído o texto dinâmico que calcula a área da esfera exibida, para fins de exemplo do cálculo por meio do texto: "Na esfera da janela 3D sua área é: "  $A = 4\pi(c_2)^2 = 4c_2^2\pi$ ; u.a." sendo  $c_2$  o objeto segmento dinâmico do raio, concluindo a construção desta seção.

Encerrando estes capítulos (esfera e deste trabalho) temos as duas seções: Fuso

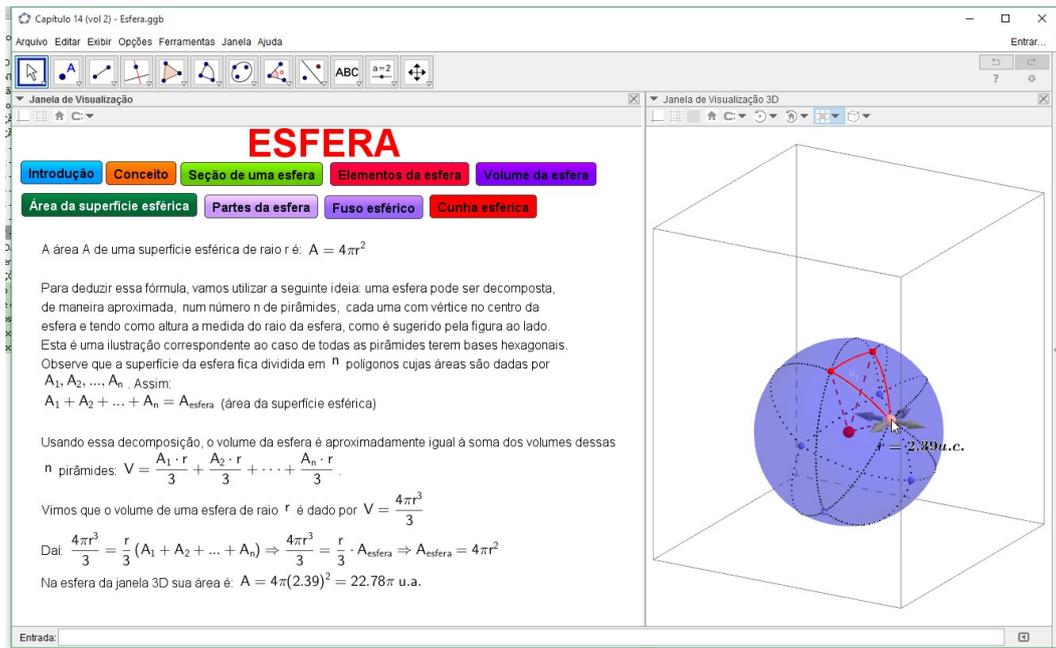
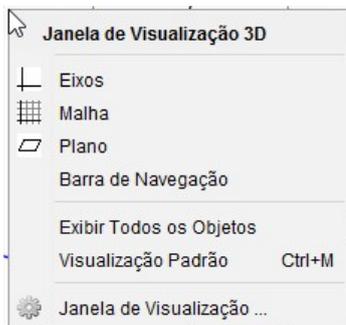


Figura 4.60: Seção Área da superfície esférica: do autor, 2015.

esférico e Cunha esférica; acionadas pelo botão Partes da esfera as quais possuem elementos da janela 3D em comum. Para dar início a construção do Fuso esférico nesta janela, habilitou-se os eixos e o plano selecionando individualmente no menu suspenso que aparece ao se clicar com o botão direito do mouse ou através da barra de estilos (conforme descrito no Passo 4.1).



Para tanto, construiu-se uma reta que representa o eixo de rotação, usando  a partir de um ponto no plano  $xy$ , exatamente na origem do sistema de eixos  $(0, 0, 0)$ , definido no campo de entrada por "PontoEm[PlanoXOY]" outro ponto no plano  $xy$  para determinar o círculo máximo da esfera por meio de  e o raio ( $m_2$ ) do mesmo com



Para se determinar o ângulo  $\alpha$  dinâmico que delimita o fuso esférico criou-se um controle deslizante a partir um segmento ( $n_2$ ) sobre o plano  $xy$  e o ponto pertencente ao mesmo de modo a definir outro segmento ( $a_3$ ) que é um pedaço do segmento original, destacando o seu estilo (espessura) e o ponto móvel.

Isto se faz necessário pois construiremos uma superfície de revolução dinâmica e

interativa definida por meio de coordenadas esféricas e este último segmento ( $a_3$ ) apresentará o comprimento do ângulo  $\alpha$ , sendo  $\zeta$  a função de duas variáveis paramétricas que escreve a superfície esférica de acordo a medida do ângulo  $\alpha$ . Conforme em [7] uma esfera pode ser parametrizada por:

$$\zeta(t, \theta) = (m_2 \text{sen}(t) \text{sen} \theta, m_2 \text{sen}(t) \text{cos} \theta, m_2 \text{cos} \theta), m_2 > 0, 0 \leq \alpha \leq \pi \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (4.9)$$

No *Geogebra* foi-se escrita como:

```
Superfície[m_2 sen(t) sen(θ), m_2 sen(t) cos(θ), m_2 cos(θ), t, 0, 3.14159, θ, δ, δ + a_3 (6.28 / n_2)]
```

Entretanto para facilitar a visualização optou-se em fazer com que o fuso esférico gire sobre o círculo quando arrastamos o ponto que determina a extremidade do raio. Marcou-se a interseção da esfera com o eixo vermelho ( $x$ ) e determinou-se o ângulo ( $\delta$ ) entre este ponto e a extremidade do raio fazendo com que  $\alpha$  comece após o raio destacado do fuso superfície.

E, em seguida com  determinou-se a outra extremidade do ângulo  $\alpha$ . Nestas extremidades foram inseridos os textos que determinam as medidas do raio e do ângulo  $\alpha$ .

Quanto à janela 2D foi incluída as definições e as fórmulas. Na parte final deste, incluiu-se usando os itens do botão objetos selecionando os valores dinâmicos do raio ( $m_2$ ) e do ângulo ( $a_3 * 6.28319/n_2$ ) determinado pelo segmento que representa  $\alpha$  e escreveu texto a seguir que calcula instantaneamente a área do fuso.

”Para calcular a área do fuso esférico, podemos estabelecer a seguinte proporção:  $\frac{4\pi r^2}{360^\circ} = \frac{A_{fuso}}{a_3 * 360^\circ \setminus n_2} \Rightarrow A_{fuso} = \frac{4\pi(m_2)^2(a_3 \setminus n_2 * 360^\circ)}{360^\circ}$ . A área desse fuso é  $a_3 \setminus n_2 * 6.28319 * m_2^2 \text{ cm}^2$ ”.

A Figura 4.61 apresenta a tela da seção Cunha esférica.

Vincula-se os objetos da janela 3D aos booleanos  $fuso \vee cunh$ , escrevendo-os ao selecionar em propriedades, na aba avançado, no item condição para exibir objetos.

Como já dito os objetos 3D da seção anterior serão exibidos aqui também e, desta forma, nesta seção acrescentou na janela 3D os setores circulares correspondentes à extremidade do ângulo  $\alpha$  usando  e vinculando estes ao booleano  $cunh$ .

Construiu-se uma esfera dado centro e um de seus pontos, marcou-se a interseção com a reta e em seguida ocultou-a (para se ter o três pontos que determinam o setor circular).

Na janela 2D escreveu as definições e fórmulas e o cálculo (dinâmico) do volume da cunha a partir da interação na medida do ângulo  $\alpha$  na janela 3D. Após isto o arquivo está pronto para se tornar *applet*.

A figura 4.62 exhibe o resultado obtido na seção Cunha esférica.

Portanto, encerram aqui todas as construções no *Geogebra* dos tópicos de geometria euclidiana abordados no ensino médio.

## ESFERA

Introdução
Conceito
Seção de uma esfera
Elementos da esfera
Volume da esfera

Área da superfície esférica
Partes da esfera
Fuso esférico
Cunha esférica

Fuso esférico é a superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência, a qual gira  $\alpha$  graus ( $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ) em torno do eixo que contém seu diâmetro.

Quando  $\alpha$  é dobrado, a área do fuso é dobrada; triplicando  $\alpha$ , também a área do fuso é triplicada; e assim sucessivamente.

No caso de  $\alpha = 360^\circ$ , o fuso transforma-se na superfície da esfera, cuja área é  $A = 4\pi r^2$ .

De modo geral, a área do fuso é proporcional a  $\alpha$  e, portanto, pode ser calculada por uma regra de três simples. Vejamos como ficam as expressões da área de um fuso em função da medida  $\alpha$  do ângulo de giro, em graus e radianos:

Para  $\alpha$  em graus:

$$\frac{A_{\text{esfera}}}{360^\circ} = \frac{A_{\text{fuso}}}{\alpha} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{\alpha \pi r^2}{90^\circ}$$

Para  $\alpha$  em radianos:

$$\frac{A_{\text{esfera}}}{2\pi} = \frac{A_{\text{fuso}}}{\alpha} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = 2\alpha r^2$$

Essas expressões não precisam ser memorizadas, pois sempre podem ser obtidas por meio de regra de três simples, como mostra o Exemplo 4, a seguir.

Vamos calcular a área do fuso esférico da figura da janela 3D.

Para calcular a área do fuso esférico, podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{4\pi r^2}{360^\circ} = \frac{A_{\text{fuso}}}{50.7^\circ} \Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{4\pi(1.9)^2(50.7^\circ)}{360^\circ}$$

A área desse fuso é  $3.2 \text{ cm}^2$ .

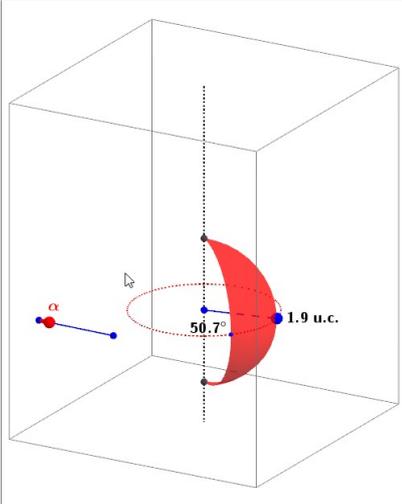


Figura 4.61: Seção Fuso esférico: do autor, 2015.

## ESFERA

Introdução
Conceito
Seção de uma esfera
Elementos da esfera
Volume da esfera

Área da superfície esférica
Partes da esfera
Fuso esférico
Cunha esférica

Cunha esférica é a sólido gerado pela rotação de um semicírculo, o qual gira  $\alpha$  graus ( $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ ) em torno do eixo que contém seu diâmetro.

Quando  $\alpha$  é dobrado, o volume da cunha é dobrada; triplicando  $\alpha$ , também o volume da cunha é triplicada; e assim sucessivamente.

No caso de  $\alpha = 360^\circ$ , a cunha transforma-se em uma esfera e seu volume é  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ .

De modo geral, o volume da cunha é proporcional a  $\alpha$  e, portanto, pode ser calculada por uma regra de três simples. Vejamos como ficam as expressões da área de um fuso em função da medida  $\alpha$  do ângulo de giro, em graus e radianos:

Para  $\alpha$  em graus:

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{360^\circ} = \frac{V_{\text{cunha}}}{\alpha} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{\alpha \pi r^3}{270^\circ}$$

Para  $\alpha$  em radianos:

$$\frac{V_{\text{esfera}}}{2\pi} = \frac{V_{\text{cunha}}}{\alpha} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{2\alpha r^3}{3}$$

Observe que a superfície de uma cunha esférica contida em uma esfera de raio  $r$  é a reunião de um fuso esférico com dois semicírculos de raio  $r$ . Assim, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo de raio  $r$ .

Para calcular o volume da cunha esférica exibida na janela 3D, podemos estabelecer a seguinte proporção:

$$\frac{4\pi r^3}{3 \times 360^\circ} = \frac{V_{\text{cunha}}}{50.7^\circ} \Rightarrow V_{\text{cunha}} = \frac{4\pi(1.9)^3(50.7^\circ)}{1080^\circ}$$

O volume da cunha é  $2 \text{ u.v.}$ .

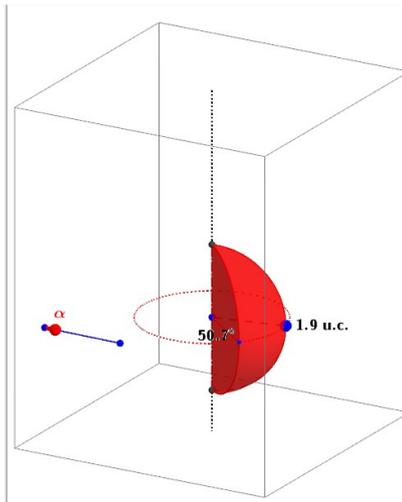


Figura 4.62: Seção Cunha esférica: do autor, 2015.



## 5 ANÁLISE DA PESQUISA

Para que possamos fazer uma análise e revisão da pesquisa é viável que além dos conhecimentos matemáticos neles englobados sejam também lembrados os pré-requisitos: escrita  $\text{\LaTeX}$ , lógica, comandos no *Geogebra*.

Dentre os softwares matemáticos livres existentes atualmente no mercado o *Geogebra* é o software livre e gratuito de geometria e álgebra com a interface bastante amigável. E, além disso, ao explorar mais profundamente o software os recursos avançados permitem a elaboração de objetos (*applets*) que unem lógica, programação e matemática. Por ter linguagem  $\text{\LaTeX}$  incorporada e, também, processar valores e algoritmos dinâmicos (comprimento de um segmento, área de uma figura plana etc) este programa permite uma visão mais ampla e generalizada da Matemática propriamente dita e, neste caso, da geometria euclidiana.

Nesse sentido ressalta-se a importância de se compreender a linguagem  $\text{\LaTeX}$  para se escrever textos no *Geogebra* em linguagem matemática usual e convencional, bem como as ferramentas disponíveis no *software*, quando, por exemplo, se quer produzir uma sentença do tipo: " um retângulo de base  $b$  e altura  $a$  tem área  $ab$ " sendo  $a$  e  $b$ , objetos dinâmicos (controles deslizantes e/ou representação geométrica e um segmento); em que os valores de  $a$  e  $b$  são alterados os valores de  $a$  e  $b$  a sentença é reprocessada graficamente e numericamente *online* na tela do software.

O ponto a destacar é que as alterações das propriedades dos objetos têm ficado com fácil acesso nas últimas versões do software, apesar de não estarmos avaliando o *software* em si, as propriedades dos objetos aparecem na janela principal abaixo da barra de ferramentas, onde nela é possível alterar traço, tamanho e cor e fixar o objeto na tela de visualização.

Durante a revisão do material foi percebido que os botões ao serem acionados não se destacavam, ou seja, não mudavam a forma e a cor. Então para isto foi incluída uma programação na cor do texto de cada botão de acordo ao seu valor booleano. Ao acionar (clicar) o botão, o texto passa a ser vermelho ou troca de cor, indicando a seção ativa. Este comando fora ativado na seção "Cores dinâmicas" da aba "Avançado" do item "Propriedades" como é mostrado na Figura 5.1:

À medida em que se foram produzindo os *applets* ficou evidente que o software

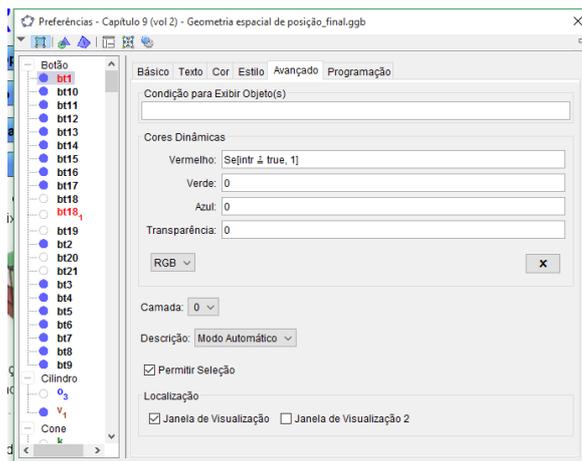


Figura 5.1: Propriedades avançadas do objeto com cor vinculada a um valor booleano: do autor, 2015.

*Geogebra* é um software de desenvolvimento/compilação, pois o mesmo aceita condicionar os seus objetos e ferramentas disponíveis ao conteúdo a ser abordado e adequar os conteúdos aos objetos utilizando comandos de programação e scripts de linguagem.

Todo material já vem sendo utilizado durante as aulas que leciono numa instituição de ensino em Caetité para os 2º e 3º anos do Ensino Médio e isto ajudou a melhorá-lo e ajustá-lo.

## 5.1 Desafios encontrados na realização

Produzir algo é sempre compendioso. E inovar ou transpor algo requer sempre tempo e dedicação. Ao iniciar este trabalho pensávamos que seria bastante leve e rápido o feito. Inicialmente foi se pensado em trabalhar os tópicos de geometria sem seguir especificamente um livro ou material didático. Porém, buscando aliar a pesquisa à prática docente no ensino foi-se idealizado que os tópicos de geometria elaborados fossem os mesmos presentes no livro didático de ensino médio, nível em que atuo na docência da disciplina Matemática.

E isto se tornou um desafio, pois agora tínhamos ideias, definições e estruturas já prontas no livro para serem reconstruídas no software e para deixar o material mais próximo e semelhante ao livro se fez necessário transcrever maior parte do mesmo no software. Ou seja, foi criada uma versão digital "enxuta e concisa" dos capítulos de geometria euclidiana dos livros didático no *Geogebra*.

Enxuta, pois não se faz necessário reproduzir os capítulos na íntegra no software sendo que esta "reconstrução" é feita durante a execução da aula onde o professor explana e argumenta as ideias subliminares, apresenta exemplos e resolve exercícios. Concisa pois as ideias principais de cada capítulo dos livros estão presentes nestes mini programas os quais, ao mesmo tempo, possibilitam maior interatividade, abrangên-

cia e generalidade ao trabalhar de forma dinâmica as construções geométricas, suas definições e consequências.

Utilizou-se quase todas as ferramentas básicas do software, as quais foram citadas ao longo deste trabalho, e alguns recursos avançados e incorporada alguns algoritmos de programação em código *Geogebra*, que é a linguagem de programação nativa do mesmo como, por exemplo, programar um botão para ativar/desativar o valor booleano.

Além disso, em certos textos se fez presente a opção denominada Fórmula  $\text{\LaTeX}$  a qual é um pouco trabalhosa para quem não estar habituado em utilizá-la. Inicialmente os *applets* não tinham botões de interação via mouse e para deixar os *applets* com interface gráfica semelhante aos programas geralmente utilizados tornou-se necessário programar botões e, desta forma, o trabalho abarcou também a programação orientada a objetos.

Enfim, o maior desafio foi de construir os objetos com o rigor matemático necessário para que a sua apresentação e explicação apoiada nos recursos do programa contemple os conceitos e conteúdos, exemplos e alguns exercícios presentes no livro impresso.

Um exemplo disso é que o *Geogebra* não possui controle deslizante para janela 3D e até é compreensível (*deslizar no espaço em que direção?*) que os programadores não tenham feito isto. Entretanto para atender a transformação geométrica em sólidos (número de lados da base do prisma e da pirâmide, planificação da área lateral do cone na janela 3D) foi-se criado vários para atender a estética da janela e a dinâmica do conteúdo abordado.

Outro exemplo é quanto à construção dos sólidos, o *software* não possui uma ferramenta para determinar a construção de cilindros quaisquer e/ou cones quaisquer e, devido a isto, foram construídos como sólidos de revolução animados nas seções 4.5 e 4.7 onde nestas seções temos a definição de cada um destes.

O trabalho fora inicialmente escrito no Microsoft Word 2010 e foi-se necessário migrar para a plataforma  $\text{\LaTeX}$  para uma estrutura padrão para trabalhos de Matemática como os artigos da *American Mathematics Society (AMS)* tornando assim ainda mais trabalhoso editá-lo, porém com melhorias na tipografia textual e formatação consideráveis.

Foi utilizado o compilador *TeXstudio*<sup>1</sup> para escrever em  $\text{\LaTeX}$  e o modelo de dissertação de mestrado da Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho (UNESP)<sup>2</sup> com alguns ajustes e melhorias. E, assim, transcrever todos estes passos e apresentar de forma ilustrada os procedimentos (comandos e ações) realizados tornou necessária a utilização de um software denominado *PrintScr* que captura qualquer parte da tela do computador, permitindo edição e recorte da imagem/figura no momento da captura e possibilita salvar em arquivo no formato .png ou .jpg, o qual ajudou bastante

<sup>1</sup>Disponível em: <http://texstudio.sourceforge.net/>. Acesso em 18 de outubro de 2015.

<sup>2</sup>Disponível em <http://www.rc.unesp.br/tmelo/modelo-diss-profmat.zip>. Acesso em 18 de outubro de 2015.

na criação de imagens e ilustração produzidas, pois foram totalizadas mais de um mil capturas de tela.

Tive como meta didatizar o *Geogebra*, ou seja, fazendo uso de suas ferramentas deixá-lo com melhor aparência visual, agradável, conciso e objetivo e, para isto teve-se que se fazer uma programação visual com uso de gráficos, botões textos e imagens. Nesse sentido este software serviu como compilador de mini programas para se apresentar os conteúdos de geometria euclidiana.

Outro ponto a considerar foi a necessidade de se criar passos de construção para não deixar o trabalho repetitivo e focar na explanação das ferramentas utilizadas e de novos comandos. Ou seja, quando a ferramenta era utilizada pela primeira vez criava-se um passo de construção para a mesma e quando era reutilizada o texto referenciava ao passo o qual a mesma estava presente.

Ressalto ainda que da forma como os objetos foram construídos os mesmos podem ser ajustados para qualquer publicação e/ou livro sobre o tema, inclusive para outros níveis de ensino uma vez que atende a teoria do conteúdo. Isto é fato, pois toda coleção do ensino médio aborda tais tópicos de geometria euclidiana. Enseja-se que os interessados sobre o tema que desejem utilizar os *applets* tendo conhecimento e leitura desta dissertação poderão fazer um *applet* equivalente à abordagem do o livro didático utilizado.

Embora os *applets* produzidos sejam de geometria euclidiana foram utilizados conteúdos de trigonometria, lógica, matemática discreta, funções e números reais, geometria analítica, cálculo integral e diferencial para produzi-los.

## 5.2 Extensões

Após se criar cada um dos objetos e exportá-los para o *GeogebraTube* e, em seguida baixar como "material offline" fora criado uma página em linguagem Html para indexar os conteúdos e facilitar a navegação entre os capítulos trabalhados. Foi tirada uma cópia de tela em formato de imagem de cada um dos *applets* para que isto se tornasse possível e programado os links e os hiperlinks para navegação nos conteúdos através de um programa de acesso à internet (navegador de internet).

Outro ponto a destacar é que estes *applets* podem ser incorporados a outras páginas de internet sobre o mesmo conteúdo/temática.

## 5.3 Possibilidades em outros campos da matemática

Após esta experiência no *Geogebra* foi aberto um leque de possibilidades de uso em outros ramos da Matemática. Agora com a nova versão 5.0 usual, os recursos de computação algébrica (CAS), as janelas geométricas 2D e 3D, planilhas e plotagem gráfica do mesmo torna possível utilizá-lo para o ensino de conjuntos e números reais, funções

e gráficos, polinômios e equações algébricas, trigonometria, estatística, matrizes, determinantes, sistemas lineares, números complexos e geometria analítica no plano e no espaço, limites, derivadas e integrais, superfícies, sequências e séries, fractais, números i-terados. Com poucas exceções, pode-se construir *applets* para praticamente todos os conteúdos do ensino médio e alguns do ensino superior.

E para se produzir os materiais com botões acionáveis e interatividade para com o usuário se faz útil recorrer aos passos das construções aqui trabalhados. Sem dúvida, a potencialidade do software foi bastante ampliada nesta versão com a janela 3D.



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Produzir este trabalho foi muito gratificante. Fortaleceu e lapidou conhecimentos desde a Matemática ao *Geogebra*. Este trabalho foi elaborado com muita dedicação e empenho com o intuito de incorporar efetivamente o software no espaço da sala de aula. Pretende-se continuar desenvolvendo e verificando sua eficiência e funcionalidade e, se necessário, será aprimorado. Ao mesmo tempo, desejo que este trabalho sirva de inspiração para outros educadores matemáticos utilizarem este software para se produzir "aulas de geometria dinâmica".

Aos pesquisadores em Matemática e/ou Educação Matemática que tem afinidade com matemática computacional e geometria dinâmica, penso e acredito que ao desenvolver este trabalho o software *Geogebra* foi mais uma vez colocado à prova e passou no teste de praticidade, funcionalidade, eficiência e portabilidade de seus comandos e ferramentas o que só corrobora esta ferramenta computacional como um excelente programa de Matemática ainda mais potente com as novas janelas 3D e de visualização 2, janela CAS e janela de Probabilidade.

Este trabalho foi a todo o momento desafiador e trabalhoso. Criar *applets* de interação dinâmica na forma de capítulos, que são ao mesmo tempo uma síntese: pois trazem a essência das ideias presentes no material impresso; e extensão, pois ultrapassa as barreiras impostas pela estática dos livros didáticos do ensino médio possibilitando assim criar uma versão alternativa do livro na forma digital que tem autonomia e independência. E, ao mesmo tempo, imbuir e incrementar no software mais textos e definições de modo a fazer com que os objetos construídos alcançassem o aspecto instrucional e didático da dinâmica presente em uma sala de aula: abordagem de conteúdos, explanação de exemplos, demonstração de fórmulas, resolução de exercícios etc.

Ao explorar as potencialidades do *Geogebra* o que se buscou foi fazer com que o conteúdo presente no livro didático assumia uma abordagem moldável, ajustável, tátil, interativa, diversificada e ilimitada neste *software* ao ofertar ferramentas, comandos e botões de interação e intervenção do aluno/operador de modo a produzir múltiplos resultados.

Fica o desejo de se continuar construindo os *applets* para os demais capítulos do livro e sobre os demais conteúdos de Matemática do ensino médio. E, com certeza,

frutos deste trabalho serão muito bem colhidos e aproveitados para a melhoria da Educação Matemática e da aprendizagem em Matemática dos estudantes.

O ato de educar é transformador e emancipador de cidadãos que atuam e participam do mundo e da sociedade em que vivem e que para melhorar o mundo é preciso melhorar a realidade em que vivemos. Estas são as ideias motivadoras que propiciaram produzir este trabalho. Por fim algumas coisas a considerar: tudo o que fora produzido chegar até aqui não foi fácil, todo esforço valeu a pena e busquei fazer o melhor deste trabalho. Reitero os agradecimentos a Deus por ter me concedido chegar ao fim deste trabalho e ao meu orientador Júlio César dos Reis que me apoiou durante toda o trabalho e possibilitou que eu o realizasse como tinha idealizado desde o princípio.

# REFERÊNCIAS

- [1] IEZZI, G. et al. *Matemática: ciências e aplicações*. 7<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.
- [2] NETO, A. C. M. *Fundamentos de Cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [3] GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: aO, V. S. B. de Informática na E. (Ed.). [s.n.], 1996. Disponível em: <<http://penta.ufrgs.br/Edu/telelab/mundomat/curcom2/artigo.htm>>.
- [4] PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. *O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional In FIORENTINI, D. (Ed.). Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares*. Campinas: Mercado de Letras, 2003. 159-192 p.
- [5] GIRALDO, V.; MATTOS, F. R. P.; CAETANO, P. A. S. *Recursos Computacionais no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2014. 67-126 p.
- [6] PAPERT, S. *Logo: Computadores e Educação*. São Paulo: Brasiliense, 1985.
- [7] VILCHES, M. A.; CORRÊA, M. L. *CÁLCULO: VOLUME III*. Rio de Janeiro: UERJ, 2011.



# A Instalação do *Geogebra* offline

Para instalar o *Geogebra* é necessário baixá-lo via web pelo endereço da internet <https://www.geogebra.org/download> através de um navegador (e.g. *Mozilla Firefox*, *Internet Explorer* etc) conforme a Figura A.1

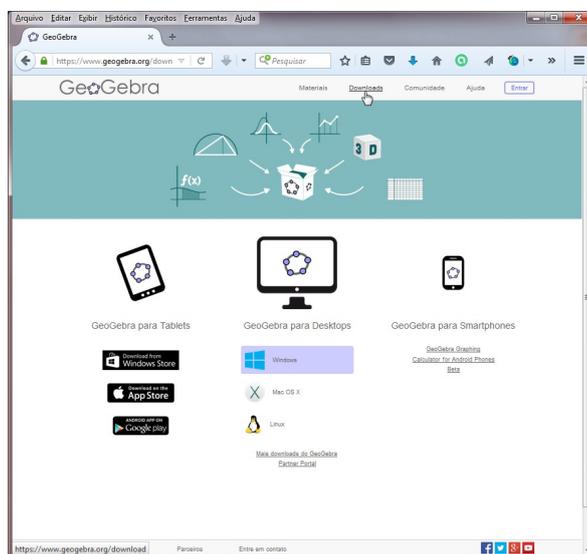


Figura A.1: Tela do sítio do Geogebra para download: do autor, 2015.

Em seguida selecionar o sistema operacional *Windows* conforme indica a Figura A.2

Ao final do *download* clica-se sobre o instalador e executa-o. Na tela exibida clicar em "Próximo", como mostra a Figura A.3 .

A Figura A.4 exibe a tela seguinte do processo de instalação, então clicar em "Eu concordo".

Em seguida clicar no botão "Avançar" conforme indica a Figura A.5.

Após a barra de progresso de instalação encher, finalmente clicar no botão "Terminar", ver Figura A.6. Desta forma o *Geogebra* iniciará automaticamente, encerrando esta etapa.

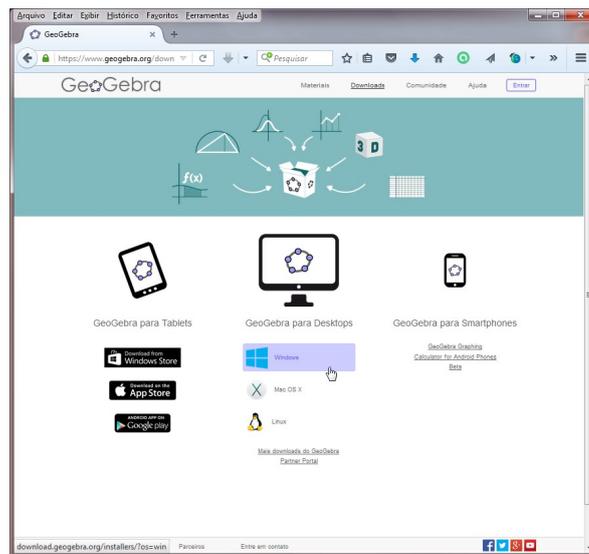


Figura A.2: Tela de download do Geogebra para Windows: do autor, 2015.

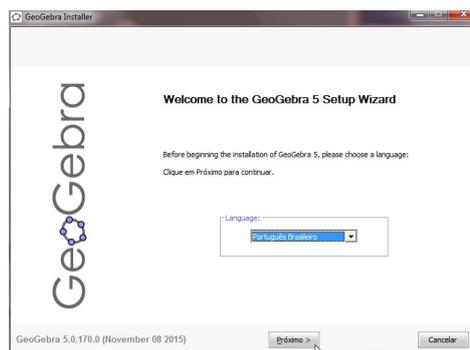


Figura A.3: Etapa inicial de instalação do Geogebra: do autor, 2015.

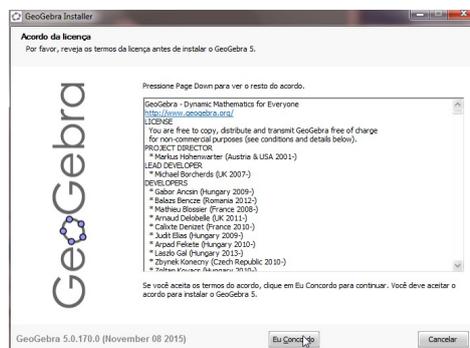


Figura A.4: Segunda etapa da instalação do Geogebra: do autor, 2015.



Figura A.5: Terceira etapa instalação do Geogebra: do autor, 2015.

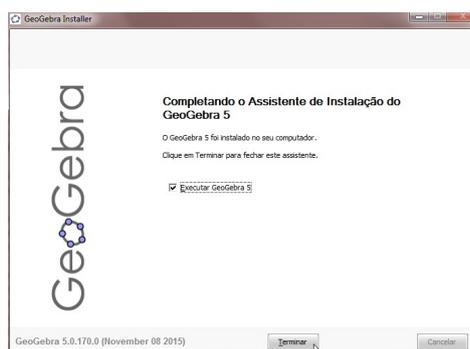


Figura A.6: Etapa final de instalação do Geogebra: do autor, 2015.



# B Instalação do *Java Runtime Environment - JRE*

O Java Runtime Environment (JRE) ou simplesmente Java é a máquina virtual que dá condições ao Geogebra ser executado como aplicativo e/ou *applet*. Então para instalar o Java é necessário baixá-lo via web pelo endereço da internet [https://www.java.com/pt\\_BR](https://www.java.com/pt_BR) através de um navegador (e.g. *Mozilla Firefox, Internet Explorer* etc) conforme a Figura B.1



Figura B.1: Tela do sítio do Java para download: do autor, 2015.

Em seguida clicar em "Download gratuito do Java" conforme indica a Figura B.2. A figura B.3 mostra a tela seguinte do processo de instalação, sendo assim clicar em "Concordar e Iniciar Download Gratuito"

Ao final do *download* clica-se sobre o instalador e executa-o. Na tela exibida clicar em "Instalar", como mostra a Figura B.4.

Quando solicitado na tela seguinte clicar em "Avançar" como na Figura B.5.

Após a barra de progresso de instalação encher, finalmente clicar no botão "Fechar", ver Figura B.6. Desta forma o *Java* está instalado, encerrando o processo.



Figura B.2: Tela de download do Java para Windows: do autor, 2015.



Figura B.3: Tela de download do Java para Windows: do autor, 2015.

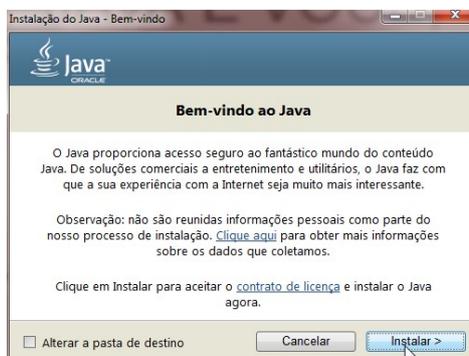


Figura B.4: Etapa inicial de instalação do Java: do autor, 2015.

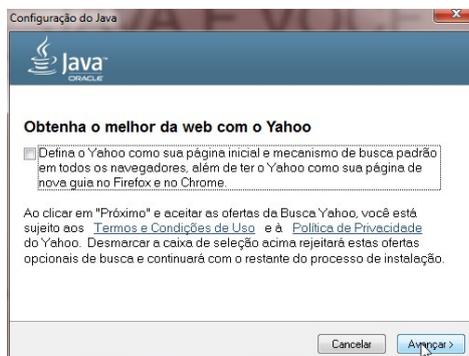


Figura B.5: Segunda etapa da instalação do Java: do autor, 2015.

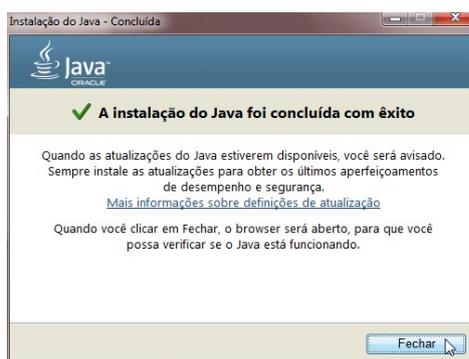


Figura B.6: Etapa final de instalação do Java: do autor, 2015.



# C Protocolos de construção de dois *applets*

## C.1 Protocolos de construção

O protocolo de construção é um recurso do *Geogebra* que exhibe todos os comandos realizados no mesmo para a elaboração de um *applet*, de forma ordenada, apresentando as ações realizadas e os resultados delas na construção dos elementos (pontos, retas, planos, botões, imagens, ângulos, valores booleanos, textos e outros) que o compõem. Esta opção é acessada no menu exibir através do comando mostrado na figura a seguir:

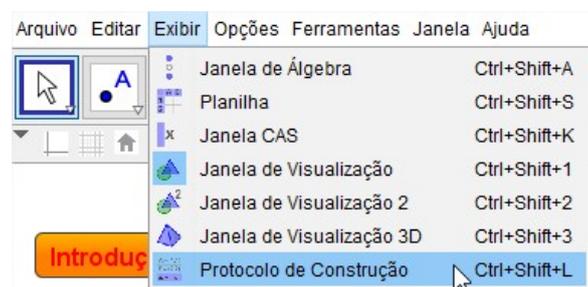


Figura C.1: Menu de acesso ao Protocolo de construção: do autor, 2015.

Nesta seção deste apêndice serão apresentados dois protocolos de construção referente a dois *applets* elaborados. Para não deixar dúvida do trabalho e esforço aqui realizados, as figuras a seguir mostram os o protocolo de construção dos capítulos 8 e 10 (passos 3.8 e 4.3).

# C.1.1 Protocolo de construção do Capítulo 8 - Área de figuras planas

### Capítulo 8 - Área de figuras planas

#### Área de figuras planas

Prof. Antônio

Introdução Retângulo Quadrado Paralelogramo Triângulo Losango

Polígono regular Círculo Setor circular Coroa circular Segmento circular

Frequentemente usamos a geometria de objetos do nosso cotidiano para compreender conceitos matemáticos. A visualização e a medição desses objetos são estratégias para a descoberta e compreensão de propriedades. Em situações tais como calcular as dimensões de um terreno, o custo para envolverizar a superfície de uma porta, o custo envolvido na confecção de um quadro, as quantidades envolvidas dependem do cálculo de áreas de superfícies. As imagens a seguir são exemplos de aplicações destes cálculos.

Neste capítulo, vamos revisar alguns conteúdos estudados no ensino fundamental que serão úteis para a resolução de Geometria Métrica Espacial: áreas de superfícies planas delimitadas. De modo geral, área é a medida da extensão de uma superfície, expressa em uma unidade padrão preestabelecida (a unidade de área é um quadrado de lado 1). Mas, como são definidos os padrões de medida? É o Sistema Internacional de Unidades (SI) que estabelece as unidades básicas de medidas e as unidades derivadas, e as unidades dela derivadas, conforme mostrado na tabela abaixo:

Grandeza	Nome	Símbolo (SI)
comprimento	metro	m
área	metro quadrado	m <sup>2</sup>
volume	metro cúbico	m <sup>3</sup>

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A:			A <sub>1</sub> = (8,5, -0,76)	
2	Ponto Z			Z = (3,38, 1,36)	
3	Ponto W			W = (-0,76, -0,7)	
4	Reta j:		Reta WA <sub>1</sub>	$j: 0,00x + 9,56y = -6,74$	
5	Triângulo pol5		Polígono W, Z, A <sub>1</sub>	pol5 = 6,97	
6	Segmento a:		Segmento [W, Z] de Triângulo pol5	a <sub>1</sub> = 4,62	
7	Segmento w:		Segmento [Z, A <sub>1</sub> ] de Triângulo pol5	w = 5,82	
8	Segmento z:		Segmento [A <sub>1</sub> , W] de Triângulo pol5	z <sub>1</sub> = 9,56	
9	Reta d:		Reta passando por Z e perpendicular a z:	$d: 9,56x - 0,06y = 32,23$	
10	Botão bt1			bt1	Introdução
11	Botão bt4			bt4	Paralelogramo
12	Botão bt2			bt2	Quadrado
13	Botão bt7			bt7	Losango
14	Botão bt3			bt3	Retângulo
15	Botão bt6			bt6	Círculo
16	Botão bt8			bt8	Polígono regular
17	Botão bt5			bt5	Trapézio

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto A:			A <sub>1</sub> = (8,5, -0,76)	
2	Ponto Z			Z = (3,38, 1,36)	
3	Ponto W			W = (-0,76, -0,7)	
4	Reta j:		Reta WA <sub>1</sub>	$j: 0,00x + 9,56y = -6,74$	
5	Triângulo pol5		Polígono W, Z, A <sub>1</sub>	pol5 = 6,97	
6	Segmento a:		Segmento [W, Z] de Triângulo pol5	a <sub>1</sub> = 4,62	
7	Segmento w:		Segmento [Z, A <sub>1</sub> ] de Triângulo pol5	w = 5,82	
8	Segmento z:		Segmento [A <sub>1</sub> , W] de Triângulo pol5	z <sub>1</sub> = 9,56	
9	Reta d:		Reta passando por Z e perpendicular a z:	$d: 9,56x - 0,06y = 32,23$	
10	Botão bt1			bt1	Introdução
11	Botão bt4			bt4	Paralelogramo
12	Botão bt2			bt2	Quadrado
13	Botão bt7			bt7	Losango
14	Botão bt3			bt3	Retângulo
15	Botão bt6			bt6	Círculo
16	Botão bt8			bt8	Polígono regular
17	Botão bt5			bt5	Trapézio
18	Botão bt9			bt9	Círculo
19	Botão bt11			bt11	Segmento circular
20	Botão bt12			bt12	Coroa circular
21	Valor Booleano intro			intro = true	
22	Valor Booleano ret			ret = false	
23	Valor Booleano quad			quad = false	
24	Valor Booleano para			para = false	
25	Valor Booleano tria			tria = false	
26	Valor Booleano losa			losa = false	
27	Valor Booleano trap			trap = false	
28	Valor Booleano poli			poli = false	
29	Valor Booleano circ			circ = false	

29	Valor Booleano seto			seto = false	
30	Valor Booleano coro			coro = false	
31	Valor Booleano segm			segm = false	
32	Texto texto2	ABC			Frequentemente usamos a geometria de objetos do nosso cotidiano para compreender conceitos matemáticos. A visualização e a medição desses objetos são estratégias para a descoberta e compreensão de propriedades geométricas. Em situações tais como calcular as dimensões de um terreno, o custo para envolverizar a superfície de uma porta, ou ainda, o custo envolvido na confecção de um quadro, as quantidades envolvidas dependem do cálculo de áreas de superfícies. As imagens a seguir são exemplos de aplicações destes cálculos.
33	Ponto A			A = (-1,74, -1,99)	
34	Ponto B			B = (0,76, -2,02)	
35	Imagem fig1			fig1	
36	Texto texto3	ABC			Neste capítulo, vamos revisar alguns conteúdos estudados no ensino fundamental que serão úteis para a resolução de problemas de Geometria Métrica Espacial: áreas de superfícies planas delimitadas. De modo geral, área é a medida da extensão de uma superfície, expressa em uma unidade padrão preestabelecida (a unidade de área é um quadrado de lado 1). Mas, como são definidos os padrões de medida? É o Sistema Internacional de Unidades (SI) que estabelece as unidades básicas de medidas e as unidades derivadas, as quais podem ser expressas a partir das unidades de base. Particularmente, estaremos nos referindo à unidade básica de comprimento — o metro — e às unidades dela derivadas, conforme mostrado na tabela abaixo.
37	Ponto C			C = (1, -7,96)	
38	Ponto D			D = (0, -8,02)	



126	Texto texto24	ABC		paralelogramo ABCD, ou seja, A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura.	
130	Texto texto29	ABC	$3A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2}$ $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} + \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} + \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2}$	$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = \frac{9 \cdot 5 \cdot \sin(60^\circ)}{2} = 9.75 \text{ u.s.}$	
131	Texto texto24	ABC	$b = \frac{2A}{a \cdot \sin(\theta)}$	$b = 9.56 \text{ u.c.}$	
132	Texto texto24	ABC	$h = \frac{2A}{a}$	$h = 2.09 \text{ u.c.}$	
133	Botão bt13	OK		bt13	Área pelos lados e raio da circunferência inscrita
134	Texto texto24	ABC		b	
135	Botão bt14	OK		bt14	Área pelos lados e raio da circunferência inscrita
136	Valor Booleano areasseno			areasseno = false	
137	Valor Booleano arearaios			arearaios = false	area raios
138	Texto texto30	ABC		Seja o triângulo ABC representado na figura ao lado, em que a, b e c são as respectivas medidas dos lados BC, AC e AB (na medida do raio da circunferência de centro O, inscrita nesse triângulo. Como os lados de ABC são tangentes a circunferência, então OP, OQ e OR são perpendiculares a AB, BC e AC, respectivamente, ou seja: • OP = r (medida da altura do triângulo AOB, relativa ao lado AB). • OQ = r (medida da altura do triângulo BOC, relativa ao lado BC). • OR = r (medida da altura do triângulo AOC, relativa ao lado AC). Chamando A a área de ABC, A <sub>1</sub> a área de AOB, A <sub>2</sub> a área de BOC e A <sub>3</sub> a área de AOC, então como A = A <sub>1</sub> + A <sub>2</sub> + A <sub>3</sub> , temos: G = (7.74, -0.66)	A'

139	Ponto G			G = (7.74, -0.66)	A'
140	Ponto H			H = (10.74, 2.44)	B'
141	Ponto I			I = (13.2, -1.88)	C'
142	Triângulo pol7			Polígono G, H, I, pol7 = 9.99	
142	Segmento i <sub>1</sub>			Segmento [G, H] de Triângulo pol7 i <sub>1</sub> = 4.31	
142	Segmento g <sub>1</sub>			Segmento [H, I] de Triângulo pol7 g <sub>1</sub> = 4.8	
142	Segmento h <sub>1</sub>			Segmento [I, G] de Triângulo pol7 h <sub>1</sub> = 5.55	
143	Reta q <sub>1</sub>			Bissetriz de I, G, H, q <sub>1</sub> : -0.3x + 0.95y = -2.98	
144	Reta r <sub>1</sub>			Bissetriz de H, I, G, r <sub>1</sub> : -0.57x - 0.82y = -6.17	
145	Ponto J <sub>1</sub>			Ponto de interseção de q <sub>1</sub> , r <sub>1</sub> J <sub>1</sub> = (10.48, 0.21)	O
146	Reta s <sub>1</sub>			Reta passando por J <sub>1</sub> e perpendicular a g <sub>1</sub> s <sub>1</sub> : -1.95x + 3.27y = -19.77	
147	Ponto K <sub>1</sub>			Ponto de interseção de s <sub>1</sub> , g <sub>1</sub> K <sub>1</sub> = (11.65, 0.91)	Q
148	Círculo t <sub>1</sub>			Círculo por K <sub>1</sub> com centro J <sub>1</sub> t <sub>1</sub> : (x - 10.49) <sup>2</sup> + (y - 0.21) <sup>2</sup> = 1.86	
149	Ponto L <sub>1</sub>			Ponto de interseção de t <sub>1</sub> , i <sub>1</sub> L <sub>1</sub> = (9.5, 1.16)	P
149	Ponto O <sub>1</sub>			Ponto de interseção de t <sub>1</sub> , h <sub>1</sub> O <sub>1</sub> = (9.5, 1.16)	
150	Ponto M <sub>1</sub>			Ponto de interseção de t <sub>1</sub> , g <sub>1</sub> M <sub>1</sub> = (10.23, -1.13)	R
150	Ponto N <sub>1</sub>			Ponto de interseção de t <sub>1</sub> , h <sub>1</sub> N <sub>1</sub> = (10.23, -1.13)	
151	Segmento b <sub>1</sub>			Segmento [L <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> ] b <sub>1</sub> = 1.39	
152	Segmento c <sub>1</sub>			Segmento [K <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> ] c <sub>1</sub> = 1.39	
153	Segmento e <sub>1</sub>			Segmento [J <sub>1</sub> , M <sub>1</sub> ] e <sub>1</sub> = 1.39	
154	Segmento j <sub>1</sub>			Segmento [G <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> ] j <sub>1</sub> = 2.88	
155	Segmento k <sub>1</sub>			Segmento [J <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ] k <sub>1</sub> = 2.24	
156	Segmento l <sub>1</sub>			Segmento [I <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> ] l <sub>1</sub> = 3.31	
157	Ângulo i			Ângulo entre J <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> , I <sub>1</sub> i = 90°	
158	Ângulo x			Ângulo entre G <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> x = 90°	
159	Ângulo y			Ângulo entre I <sub>1</sub> , M <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> y = 90°	
160	Texto texto33	ABC			
161	Texto texto34	ABC			
162	Texto texto35	ABC			
163	Círculo p <sub>1</sub>			Círculo por H <sub>1</sub> , I <sub>1</sub> , G <sub>1</sub> p <sub>1</sub> : (x - 10.61) <sup>2</sup> + (y + 0.43) <sup>2</sup> = 8.27	
164	Reta m <sub>1</sub>			Mediatriz de H <sub>1</sub> G <sub>1</sub> m <sub>1</sub> : 2x + 3.1y = 30.46	
165	Reta n <sub>1</sub>			Mediatriz de H <sub>1</sub> I <sub>1</sub> n <sub>1</sub> : -2.45x + 4.12y = -27.88	
166	Ponto T			Ponto de interseção de m <sub>1</sub> , n <sub>1</sub> T = (10.91, -0.43)	
167	Texto texto36	ABC			
168	Segmento o <sub>1</sub>			Segmento [T, G <sub>1</sub> ] o <sub>1</sub> = 2.88	
169	Segmento r <sub>1</sub>			Segmento [T, H <sub>1</sub> ] r <sub>1</sub> = 2.88	
170	Segmento s <sub>1</sub>			Segmento [T, I <sub>1</sub> ] s <sub>1</sub> = 2.88	
171	Texto texto37	ABC		Seja o triângulo ABC' inscrito na circunferência X de centro O e	

172	Ponto U			U = (9.49, -3.08)	
173	Vector v <sub>1</sub>			v <sub>1</sub> = (-1.12, -2.65)	
174	Texto texto32	ABC	$c = \frac{2A}{b \cdot \sin(\theta)}$	$c = 4.31$	
175	Texto texto32	ABC	$a = \frac{2A}{b \cdot \sin(\theta)}$	$a = 4.8$	
176	Texto texto32	ABC	$b = \frac{2A}{a \cdot \sin(\theta)}$	$b = 5.55$	
177	Texto texto31	ABC	$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = \frac{4.31 \cdot 5.55 \cdot \sin(60^\circ)}{2} = 10.12$ Nai figura! ao lado temos: $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} + \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} + \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = \frac{4.31 \cdot 5.55 \cdot \sin(60^\circ)}{2} + \frac{4.31 \cdot 5.55 \cdot \sin(60^\circ)}{2} + \frac{4.31 \cdot 5.55 \cdot \sin(60^\circ)}{2} = 10.12$	$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = \frac{4.31 \cdot 5.55 \cdot \sin(60^\circ)}{2} = 10.12$	
178	Texto texto39	ABC	$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ Usando ai lei dos senos, podemos escrever: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$ Ei substituíndo na equação anterior: $a = 2R \sin(A)$ Nai figura! temos: $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = \frac{4.31 \cdot 5.55 \cdot \sin(60^\circ)}{2} = 10.12$	$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$ Usando ai lei dos senos, podemos escrever: $\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2R$ Ei substituíndo na equação anterior: $a = 2R \sin(A)$ Nai figura! temos: $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\theta)}{2} = \frac{4.31 \cdot 5.55 \cdot \sin(60^\circ)}{2} = 10.12$	
179	Texto texto38	ABC	$R = \frac{a}{2 \sin(A)}$	$R = 2.88$	
180	Texto texto40	ABC		A área de um triângulo é a metade do produto do perímetro pelo raio da circunferência inscrita.	
181	Texto texto41	ABC		A área de um triângulo é o quíntuplo do produto dos seus lados e o quádruplo do raio da circunferência inscrita.	
182	Texto texto42	ABC		Considerando que o losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si, observe na figura que ele pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes e sua área é a soma das áreas desses triângulos. Assim sendo, no losango PQRS, se m é a medida da diagonal maior e n é a medida da diagonal menor, a área A de sua superfície é tal que:	

183	Ponto S			S = (8.72, -2.98)	
184	Ponto P <sub>1</sub>			P <sub>1</sub> = (8.72, 0.6)	
185	Segmento t <sub>1</sub>			Segmento [S, P <sub>1</sub> ] t <sub>1</sub> = 3.78	
186	Reta a <sub>1</sub>			Mediatriz de SP <sub>1</sub> a <sub>1</sub> : y = -1.09	
187	Ponto Q <sub>1</sub>			Ponto de interseção de a <sub>1</sub> , t <sub>1</sub> Q <sub>1</sub> = (8.72, -1.09)	
188	Ponto R <sub>1</sub>			Ponto sobre a <sub>1</sub> R <sub>1</sub> = (11.52, -1.09)	
189	Círculo c <sub>1</sub>			Círculo por R <sub>1</sub> com centro Q <sub>1</sub> c <sub>1</sub> : (x - 8.72) <sup>2</sup> + (y + 1.09) <sup>2</sup> = 7.84	
190	Ponto S <sub>1</sub>			Ponto de interseção de c <sub>1</sub> , a <sub>1</sub> S <sub>1</sub> = (6.92, -1.09)	
191	Quadrilátero pol8			Polígono S, R <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> pol8 = 10.58	
191	Segmento s <sub>1</sub>			Segmento [S, R <sub>1</sub> ] de Quadrilátero pol8 s <sub>1</sub> = 3.38	
191	Segmento r <sub>1</sub>			Segmento [R <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ] de Quadrilátero pol8 r <sub>1</sub> = 3.38	
191	Segmento p <sub>1</sub>			Segmento [P <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ] de Quadrilátero pol8 p <sub>1</sub> = 3.38	
191	Segmento s <sub>1</sub>			Segmento [S, S <sub>1</sub> ] de Quadrilátero pol8 s <sub>1</sub> = 3.38	
192	Ângulo y			Ângulo entre R <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> y = 90°	
193	Segmento b <sub>1</sub>			Segmento [S, R <sub>1</sub> ] b <sub>1</sub> = 5.6	
194	Reta e <sub>1</sub>			Reta passando por P <sub>1</sub> e paralela a b <sub>1</sub> e <sub>1</sub> : y = 0.8	
195	Reta f <sub>1</sub>			Reta passando por S e paralela a b <sub>1</sub> f <sub>1</sub> : y = -2.88	
196	Reta g <sub>1</sub>			Reta passando por R <sub>1</sub> e paralela a t <sub>1</sub> g <sub>1</sub> : x = 11.52	
197	Ponto T <sub>1</sub>			Ponto de interseção de e <sub>1</sub> , g <sub>1</sub> T <sub>1</sub> = (11.52, 0.8)	
198	Ponto U <sub>1</sub>			Ponto de interseção de f <sub>1</sub> , g <sub>1</sub> U <sub>1</sub> = (11.52, -2.98)	
199	Vector w <sub>1</sub>			Vector [R <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> ] w <sub>1</sub> = (0, 1.89)	
200	Vector u <sub>1</sub>			Vector [R <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> ] u <sub>1</sub> = (0, -1.89)	
201	Reta h <sub>1</sub>			Reta passando por S <sub>1</sub> e paralela a t <sub>1</sub> h <sub>1</sub> : x = 5.92	
202	Ponto W <sub>1</sub>			Ponto de interseção de f <sub>1</sub> , h <sub>1</sub> W <sub>1</sub> = (5.92, -2.98)	
203	Vector v <sub>1</sub>			Vector [S, W <sub>1</sub> ] v <sub>1</sub> = (-2.8, 0)	
204	Vector w <sub>1</sub>			Vector [S, U <sub>1</sub> ] w <sub>1</sub> = (2.8, 0)	
205	Segmento i <sub>1</sub>			Segmento [S, W <sub>1</sub> ] i <sub>1</sub> = 1.89	
206	Segmento j <sub>1</sub>			Segmento [P <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> ] j <sub>1</sub> = 2.8	
207	Texto texto43	ABC		P	
208	Texto texto44	ABC		Q	
209	Texto texto45	ABC		A área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.	
210	Texto texto46	ABC		R	
211	Texto texto46	ABC		S	
212	Texto texto46	ABC		M	

213	Texto texto46	ABC	$m = a + b_1 + c$	$m = 5.6$	
214	Texto texto47	ABC	$n = a + b_2 + c$	$n = 3.78$	
215	Texto texto51	ABC	$A = 4 A_{MNPO} = 4 \cdot \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \text{frac}(mn)(2)$ Na! figurai ao lado! temos: $A = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2}$ Na! figurai ao lado! temos: $A = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2}$	$A = 4 A_{MNPO} = 4 \cdot \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \text{frac}(mn)(2)$ Na! figurai ao lado! temos: $A = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2}$ Na! figurai ao lado! temos: $A = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(mn)(2)}{2}$	
216	Texto texto52	ABC			Considere o trapézio MNPO da figura, no qual as bases MQ e NP medem m e n, respectivamente. Observe, na figura, que esse trapézio pode ser decomposto em dois triângulos T e T', de mesma altura e tais que a soma de suas áreas é igual à área A de MNPO.
217	Ponto V			$V_x = (-1.82, -1.72)$	
218	Ponto Z			$Z_x = (3.78, -1.72)$	
219	Reta k		Reta V.Z.	$k_x: y = -1.72$	
220	Ponto A <sub>1</sub>			$A_{1x} = (-0.08, 1)$	
221	Reta l <sub>1</sub>		Reta passando por A <sub>1</sub> e paralela a k <sub>1</sub>	$l_{1x}: y = 1$	
222	Ponto B <sub>1</sub>		Ponto sobre l <sub>1</sub>	$B_{1x} = (3.06, 1)$	
223	Quadrilátero pol9		Polígono A <sub>1</sub> , V, Z, B <sub>1</sub>	$pol9 = 11.89$	
223	Segmento a <sub>1</sub>		Segmento [A <sub>1</sub> , V] de Quadrilátero pol9	$a_{1x} = 3.23$	
223	Segmento v <sub>1</sub>		Segmento [V, Z] de Quadrilátero pol9	$v_{1x} = 5.6$	
223	Segmento z <sub>1</sub>		Segmento [Z, B <sub>1</sub> ] de Quadrilátero pol9	$z_{1x} = 2.81$	
223	Segmento b <sub>1</sub>		Segmento [B <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> ] de Quadrilátero pol9	$b_{1x} = 3.14$	
224	Reta m <sub>1</sub>		Reta passando por A <sub>1</sub> e perpendicular a k <sub>1</sub>	$m_{1x}: x = -0.08$	
225	Ponto C <sub>1</sub>		Ponto de interseção de k <sub>1</sub> , m <sub>1</sub>	$C_{1x} = (-0.08, -1.72)$	
226	Segmento n <sub>1</sub>		Segmento [V, C <sub>1</sub> ]	$n_{1x} = 1.74$	
227	Segmento q <sub>1</sub>		Segmento [C <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> ]	$q_{1x} = 2.72$	
228	Triângulo pol10		Polígono V, A, Z	$pol10 = 7.62$	
228	Segmento z <sub>1</sub>		Segmento [V, A] de Triângulo pol10	$z_{1x} = 3.23$	
228	Segmento v <sub>1</sub>		Segmento [A, Z] de Triângulo pol10	$v_{1x} = 4.72$	
228	Segmento a <sub>1</sub>		Segmento [Z, V] de Triângulo pol10	$a_{1x} = 5.6$	
229	Ponto D <sub>1</sub>			$D_{1x} = (11.74, -1.8)$	
230	Vetor u <sub>1</sub>		Vetor [Z, D <sub>1</sub> ]	$u_{1x} = (7.96, -0.08)$	
231	Ponto E <sub>1</sub>		Translação de V, por u <sub>1</sub>	$E_{1x} = (6.14, -1.8)$	
232	Ponto F <sub>1</sub>		Translação de A <sub>1</sub> , por u <sub>1</sub>	$F_{1x} = (7.88, 0.92)$	
233	Ponto G <sub>1</sub>		Translação de Z, por u <sub>1</sub>	$G_{1x} = (11.74, -1.8)$	
234	Triângulo pol10		Polígono E, F, G	$pol10 = 7.62$	
234	Segmento e <sub>1</sub>		Segmento [E, F] de Triângulo pol10	$e_{1x} = 3.23$	
234	Segmento f <sub>1</sub>		Segmento [F, G] de Triângulo pol10	$f_{1x} = 4.72$	
234	Segmento g <sub>1</sub>		Segmento [G, E] de Triângulo pol10	$g_{1x} = 5.6$	
235	Triângulo pol11		Polígono A, B, Z	$pol11 = 4.27$	
235	Segmento z <sub>1</sub>		Segmento [A, B] de Triângulo pol11	$z_{1x} = 3.14$	
235	Segmento a <sub>1</sub>		Segmento [B, Z] de Triângulo pol11	$a_{1x} = 2.81$	
235	Segmento b <sub>1</sub>		Segmento [Z, A] de Triângulo pol11	$b_{1x} = 4.72$	
236	Ponto H <sub>1</sub>			$H_{1x} = (11.18, 1.18)$	
237	Vetor w <sub>1</sub>		Vetor [B <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ]	$w_{1x} = (8.12, 0.18)$	
238	Ponto I <sub>1</sub>		Translação de A <sub>1</sub> , por w <sub>1</sub>	$I_{1x} = (8.04, 1.18)$	
239	Ponto J <sub>1</sub>		Translação de B <sub>1</sub> , por w <sub>1</sub>	$J_{1x} = (11.18, 1.18)$	
240	Ponto K <sub>1</sub>		Translação de Z, por w <sub>1</sub>	$K_{1x} = (11.9, -1.54)$	
241	Triângulo pol11		Polígono I, J, K	$pol11 = 4.27$	
241	Segmento i <sub>1</sub>		Segmento [I, J] de Triângulo pol11	$i_{1x} = 3.14$	
241	Segmento j <sub>1</sub>		Segmento [J, K] de Triângulo pol11	$j_{1x} = 2.81$	
241	Segmento k <sub>1</sub>		Segmento [K, I] de Triângulo pol11	$k_{1x} = 4.72$	
242	Vetor t <sub>1</sub>		Vetor [A <sub>1</sub> , F <sub>1</sub> ]	$t_{1x} = (7.96, -0.08)$	
243	Ponto L <sub>1</sub>		Translação de C <sub>1</sub> , por t <sub>1</sub>	$L_{1x} = (7.88, -1.8)$	
244	Ponto M <sub>1</sub>		Translação de A <sub>1</sub> , por t <sub>1</sub>	$M_{1x} = (7.88, 0.92)$	
245	Segmento c <sub>1</sub>		Segmento [L <sub>1</sub> , M <sub>1</sub> ]	$c_{1x} = 2.72$	
246	Reta d <sub>1</sub>		Reta [L <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ]	$d_{1x}: y = 1.18$	
247	Reta h <sub>1</sub>		Reta passando por K <sub>1</sub> e perpendicular a d <sub>1</sub>	$h_{1x}: x = 11.9$	
248	Ponto N <sub>1</sub>		Ponto de interseção de d <sub>1</sub> , h <sub>1</sub>	$N_{1x} = (11.9, 1.18)$	
249	Segmento l <sub>1</sub>		Segmento [N <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> ]	$l_{1x} = 2.72$	
250	Segmento m <sub>1</sub>		Segmento [H <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> ]	$m_{1x} = 0.72$	
251	Texto texto53	ABC			h
252	Texto texto56	ABC			T <sub>1</sub>
253	Texto texto57	ABC			T <sub>2</sub>
254	Ângulo v		Ângulo entre A <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> , V <sub>1</sub>	$v = 60^\circ$	
255	Ângulo ζ		Ângulo entre c <sub>1</sub> , f <sub>1</sub>	$\zeta = 60^\circ$	
256	Ângulo o		Ângulo entre H <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> , K <sub>1</sub>	$o = 60^\circ$	
257	Texto texto58	ABC	Assim, temos: $A = \frac{\text{frac}(mh)(2) + \text{frac}(nh)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(m+h)(2)}{2}$ ou seja: $A = \frac{\text{frac}(m+n)(2)}{2}$ Na! figurai acima! temos: $A = \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) + \text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(m+n)(2)}{2}$ Assim, temos: $A = \frac{\text{frac}(mh)(2) + \text{frac}(nh)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(m+h)(2)}{2}$ ou seja: $A = \frac{\text{frac}(m+n)(2)}{2}$ Na! figurai acima! temos: $A = \frac{\text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(m)(2) + \text{frac}(1)(2) \cdot \text{frac}(n)(2)}{2} = \frac{\text{frac}(m+n)(2)}{2}$		
258	Texto texto61	ABC			M
259	Segmento l <sub>1</sub>		Segmento [N <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> ] de Polígono pol13	l <sub>1</sub> indefinido	
276	Segmento u <sub>1</sub>		Segmento [W <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ] de Polígono pol13	u <sub>1</sub> indefinido	
277	Ponto Z <sub>1</sub>		Ponto médio de p <sub>1</sub>	$Z_{1x} = (10.22, -4.66)$	
278	Segmento k <sub>1</sub>		Segmento [Z <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$k_{1x} = 1.51$	
279	Texto texto65	ABC			O
280	Ângulo p		Ângulo entre S <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> , P <sub>1</sub>	$p = 90^\circ$	
281	Segmento l <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ]	$l_{1x} = 3.02$	
282	Segmento m <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ]	$m_{1x} = 3.02$	
283	Texto texto70	ABC			A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema.
284	Segmento n <sub>1</sub>		Segmento [T <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$n_{1x} = 3.02$	
285	Segmento p <sub>1</sub>		Segmento [U <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$p_{1x}$ indefinido	
286	Segmento q <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> ]	$q_{1x}$ indefinido	
287	Segmento r <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> ]	$r_{1x}$ indefinido	
288	Segmento s <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> ]	$s_{1x}$ indefinido	
289	Segmento t <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> ]	$t_{1x}$ indefinido	
290	Segmento a <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> ]	$a_{1x}$ indefinido	
291	Segmento b <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ]	$b_{1x}$ indefinido	
292	Segmento c <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> ]	$c_{1x}$ indefinido	
293	Segmento d <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , E <sub>1</sub> ]	$d_{1x}$ indefinido	
294	Segmento e <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , F <sub>1</sub> ]	$e_{1x}$ indefinido	
295	Segmento f <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , G <sub>1</sub> ]	$f_{1x}$ indefinido	
296	Segmento g <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ]	$g_{1x}$ indefinido	
297	Segmento h <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , I <sub>1</sub> ]	$h_{1x}$ indefinido	
298	Segmento i <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> ]	$i_{1x}$ indefinido	
299	Segmento j <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> ]	$j_{1x}$ indefinido	
300	Segmento k <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$k_{1x}$ indefinido	
301	Segmento l <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , M <sub>1</sub> ]	$l_{1x}$ indefinido	
302	Segmento m <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> ]	$m_{1x}$ indefinido	
303	Segmento n <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ]	$n_{1x}$ indefinido	
304	Segmento p <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$p_{1x}$ indefinido	
305	Segmento q <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> ]	$q_{1x}$ indefinido	
306	Segmento r <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , R <sub>1</sub> ]	$r_{1x}$ indefinido	
307	Segmento s <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ]	$s_{1x}$ indefinido	
308	Segmento t <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> ]	$t_{1x}$ indefinido	
309	Segmento u <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> ]	$u_{1x}$ indefinido	
310	Segmento v <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> ]	$v_{1x}$ indefinido	
258	Texto texto61	ABC			M
259	Segmento l <sub>1</sub>		Segmento [N <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> ] de Polígono pol13	l <sub>1</sub> indefinido	
276	Segmento u <sub>1</sub>		Segmento [W <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ] de Polígono pol13	u <sub>1</sub> indefinido	
277	Ponto Z <sub>1</sub>		Ponto médio de p <sub>1</sub>	$Z_{1x} = (10.22, -4.66)$	
278	Segmento k <sub>1</sub>		Segmento [Z <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$k_{1x} = 1.51$	
279	Texto texto65	ABC			O
280	Ângulo p		Ângulo entre S <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> , P <sub>1</sub>	$p = 90^\circ$	
281	Segmento l <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ]	$l_{1x} = 3.02$	
282	Segmento m <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ]	$m_{1x} = 3.02$	
283	Texto texto70	ABC			A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema.
284	Segmento n <sub>1</sub>		Segmento [T <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$n_{1x} = 3.02$	
285	Segmento p <sub>1</sub>		Segmento [U <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$p_{1x}$ indefinido	
286	Segmento q <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> ]	$q_{1x}$ indefinido	
287	Segmento r <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> ]	$r_{1x}$ indefinido	
288	Segmento s <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> ]	$s_{1x}$ indefinido	
289	Segmento t <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> ]	$t_{1x}$ indefinido	
290	Segmento a <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> ]	$a_{1x}$ indefinido	
291	Segmento b <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ]	$b_{1x}$ indefinido	
292	Segmento c <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> ]	$c_{1x}$ indefinido	
293	Segmento d <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , E <sub>1</sub> ]	$d_{1x}$ indefinido	
294	Segmento e <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , F <sub>1</sub> ]	$e_{1x}$ indefinido	
295	Segmento f <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , G <sub>1</sub> ]	$f_{1x}$ indefinido	
296	Segmento g <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ]	$g_{1x}$ indefinido	
297	Segmento h <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , I <sub>1</sub> ]	$h_{1x}$ indefinido	
298	Segmento i <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> ]	$i_{1x}$ indefinido	
299	Segmento j <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , J <sub>1</sub> ]	$j_{1x}$ indefinido	
300	Segmento k <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$k_{1x}$ indefinido	
301	Segmento l <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , M <sub>1</sub> ]	$l_{1x}$ indefinido	
302	Segmento m <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> ]	$m_{1x}$ indefinido	
303	Segmento n <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ]	$n_{1x}$ indefinido	
304	Segmento p <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ]	$p_{1x}$ indefinido	
305	Segmento q <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> ]	$q_{1x}$ indefinido	
306	Segmento r <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , R <sub>1</sub> ]	$r_{1x}$ indefinido	
307	Segmento s <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ]	$s_{1x}$ indefinido	
308	Segmento t <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> ]	$t_{1x}$ indefinido	
309	Segmento u <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> ]	$u_{1x}$ indefinido	
310	Segmento v <sub>1</sub>		Segmento [P <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> ]	$v_{1x}$ indefinido	

310	Segmento b <sub>i</sub>	Segmento [V <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	b <sub>i</sub> indefinido	
311	Segmento c <sub>i</sub>	Segmento [W <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	c <sub>i</sub> indefinido	
312	Ângulo α	Ângulo entre O <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> , S <sub>i</sub>	α = 120°	
313	Texto texto71	$t^m = (\text{LaTeX}[p_i]) + \backslash \text{u.c.}$	m=5.23 u.c.	
314	Texto texto69	$a^n = (\text{LaTeX}[k_i]) + \backslash \text{u.c.}$	n=1.51 u.c.	
315	Texto texto67	<p>Esse polígono é regular constituído de <math>n</math> triângulos congruentes, nos quais a altura mede <math>a</math>.</p> <p>Temos:</p> $\text{left}(A^m + \text{LaTeX}[n] + \backslash \text{frac}[a](2))$ $p^m + \text{LaTeX}[n] + \backslash \text{right}(3)$ <p>Logo <math>A = \text{frac}[a](2)</math></p> $\text{Rightarrow} A = \text{frac}[p \cdot a](2)$ <p>Na figura temos: \space</p> $A = \text{frac}[3 \cdot 5.23 \cdot 1.51](2) = \text{frac}[23.7](2) = 11.85 \text{ u.c.}$	<p>Esse polígono é regular constituído de 3 triângulos congruentes, nos quais a altura mede <math>a</math>.</p> <p>Temos:</p> $\text{left}(A^3 + \text{frac}[a](2))$ $p^3 \cdot \text{right}(3)$ <p>Logo <math>A = \text{frac}[3 \cdot a](2)</math></p> $\text{Rightarrow} A = \text{frac}[p \cdot a](2)$ <p>Na figura temos: \space</p> $A = \text{frac}[3 \cdot 5.23 \cdot 1.51](2) = \text{frac}[23.7](2) = 11.85 \text{ u.c.}$	
316	Número n <sub>i</sub>		n <sub>i</sub> = 3	número de lados
317	Ponto Q <sub>i</sub>		Q <sub>i</sub> = (9.9, -3.88)	
318	Ponto P <sub>i</sub>		P <sub>i</sub> = (10.24, -0.88)	
319	Ponto Q <sub>i</sub>	Rotação de P <sub>i</sub> pelo ângulo 360° / 2 n <sub>i</sub>	Q <sub>i</sub> = (-10.24, 0.88)	
320	Ponto R <sub>i</sub>	Rotação de P <sub>i</sub> pelo ângulo 360° / 2 n <sub>i</sub>	R <sub>i</sub> = (-10.24, 0.88)	
321	Ponto S <sub>i</sub>	Rotação de O <sub>i</sub> pelo ângulo 360° / n <sub>i</sub>	S <sub>i</sub> = (13.11, 0.41)	
322	Polígono pol13	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	pol13 = 12.8	
322	Segmento p <sub>i</sub>	Segmento [O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> ] de Polígono pol13	p <sub>i</sub> = 5.44	
322	Segmento q <sub>i</sub>	Segmento [S <sub>i</sub> , T <sub>i</sub> ] de Polígono pol13	q <sub>i</sub> = 5.44	
322	Ponto T <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub> = (7.71, 0.96)	
322	Ponto U <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	U <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto V <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	V <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto W <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	W <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto Z <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	Z <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto A <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	A <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto B <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	B <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto C <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	C <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto D <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	D <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto E <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	E <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto F <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	F <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto G <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	G <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto H <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	H <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto I <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	I <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto J <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	J <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto K <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	K <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto L <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	L <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto M <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	M <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto N <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	N <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto O <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	O <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto P <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	P <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto Q <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	Q <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto R <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	R <sub>i</sub> indefinido	
322	Ponto S <sub>i</sub>	Polígono(O <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> , n <sub>i</sub> )	S <sub>i</sub> indefinido	

322	Segmento s <sub>i</sub>	Segmento [Q <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ] de Polígono pol13	s <sub>i</sub> indefinido	
322	Segmento t <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , O <sub>i</sub> ] de Polígono pol13	t <sub>i</sub> indefinido	
323	Ponto Z <sub>i</sub>	Ponto médio de p <sub>i</sub>	Z <sub>i</sub> = (11.51, -1.79)	
324	Segmento k <sub>i</sub>	Segmento [Z <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	k <sub>i</sub> = 1.57	
325	Texto texto68		O	
326	Ângulo p <sub>i</sub>	Ângulo entre S <sub>i</sub> , Z <sub>i</sub> , P <sub>i</sub>	p <sub>i</sub> = 90°	
327	Segmento l <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> ]	l <sub>i</sub> = 3.14	
328	Segmento m <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , O <sub>i</sub> ]	m <sub>i</sub> = 3.14	
329	Segmento n <sub>i</sub>	Segmento [T <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	n <sub>i</sub> = 3.14	
330	Segmento p <sub>i</sub>	Segmento [U <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	p <sub>i</sub> indefinido	
331	Segmento q <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , V <sub>i</sub> ]	q <sub>i</sub> indefinido	
332	Segmento r <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , W <sub>i</sub> ]	r <sub>i</sub> indefinido	
333	Segmento s <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , Z <sub>i</sub> ]	s <sub>i</sub> indefinido	
334	Segmento t <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , A <sub>i</sub> ]	t <sub>i</sub> indefinido	
335	Segmento a <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , B <sub>i</sub> ]	a <sub>i</sub> indefinido	
336	Segmento b <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , C <sub>i</sub> ]	b <sub>i</sub> indefinido	
337	Segmento c <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , D <sub>i</sub> ]	c <sub>i</sub> indefinido	
338	Segmento d <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , E <sub>i</sub> ]	d <sub>i</sub> indefinido	
339	Segmento e <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , F <sub>i</sub> ]	e <sub>i</sub> indefinido	
340	Segmento f <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , G <sub>i</sub> ]	f <sub>i</sub> indefinido	
341	Segmento g <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , H <sub>i</sub> ]	g <sub>i</sub> indefinido	
342	Segmento h <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , I <sub>i</sub> ]	h <sub>i</sub> indefinido	
343	Segmento i <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , K <sub>i</sub> ]	i <sub>i</sub> indefinido	
344	Segmento j <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , L <sub>i</sub> ]	j <sub>i</sub> indefinido	
345	Segmento k <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , L <sub>i</sub> ]	k <sub>i</sub> indefinido	
346	Segmento l <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , M <sub>i</sub> ]	l <sub>i</sub> indefinido	
347	Segmento m <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , N <sub>i</sub> ]	m <sub>i</sub> indefinido	
348	Segmento n <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , O <sub>i</sub> ]	n <sub>i</sub> indefinido	
349	Segmento p <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	p <sub>i</sub> indefinido	
350	Segmento q <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , Q <sub>i</sub> ]	q <sub>i</sub> indefinido	
351	Segmento r <sub>i</sub>	Segmento [P <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	r <sub>i</sub> indefinido	
352	Segmento s <sub>i</sub>	Segmento [S <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	s <sub>i</sub> indefinido	
353	Segmento t <sub>i</sub>	Segmento [T <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	t <sub>i</sub> indefinido	
354	Segmento a <sub>i</sub>	Segmento [U <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	a <sub>i</sub> indefinido	
355	Segmento b <sub>i</sub>	Segmento [V <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	b <sub>i</sub> indefinido	
356	Segmento c <sub>i</sub>	Segmento [W <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	c <sub>i</sub> indefinido	

356	Segmento c <sub>i</sub>	Segmento [W <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	c <sub>i</sub> indefinido	
357	Ângulo α	Ângulo entre O <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> , S <sub>i</sub>	α = 120°	
358	Texto texto71	$t^m = (\text{LaTeX}[p_i]) + \backslash \text{u.c.}$	m=5.44 u.c.	
359	Texto texto69	$a^n = (\text{LaTeX}[k_i]) + \backslash \text{u.c.}$	n=1.57 u.c.	
360	Círculo c <sub>i</sub>	Círculo por S <sub>i</sub> com centro P <sub>i</sub>	$c_i: (x - 10.24)^2 + (y + 0.88)^2 = 9.88$	
361	Texto texto72	$t^m = (\text{LaTeX}[l_i]) + \backslash \text{u.c.}$	m=3.14	
362	Texto texto73		Considere a seguinte sucessão de polígonos regulares inscritos em círculos de raio de medida r. (ajuste o controle deslizante número de lados)	
363	Texto texto74		Observe nessa sucessão que, se o número de lados do polígono aumenta, o comprimento do apótema também aumenta, ao passo que o comprimento do lado diminui. Dessa forma, quando o número de lados de um polígono é extremamente grande: o seu perímetro (p) é aproximadamente igual ao comprimento da circunferência do círculo (2πr); a medida do seu apótema (a) é aproximadamente igual à medida do raio do círculo (r), ou seja:	
364	Texto texto76		A área de um círculo é igual ao produto do número real π pelo quadrado da medida do seu raio.	
365	Ponto Q <sub>i</sub>		Q <sub>i</sub> = (11.06, -0.66)	
366	Ponto R <sub>i</sub>		R <sub>i</sub> = (13.36, -0.9)	
367	Círculo d <sub>i</sub>	Círculo por R <sub>i</sub> com centro Q <sub>i</sub>	$d_i: (x - 11.06)^2 + (y + 0.66)^2 = 5.35$	
368	Ponto S <sub>i</sub>	Ponto sobre d <sub>i</sub>	S <sub>i</sub> = (10.12, 1.45)	
369	Sector e <sub>i</sub>	SectorCircular(Q <sub>i</sub> , R <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> )	e <sub>i</sub> = 5.6	
370	Texto texto77		O	
371	Texto texto79			
372	Ângulo τ	Ângulo entre R <sub>i</sub> , Q <sub>i</sub> , S <sub>i</sub>	τ = 120.01°	
373	Texto texto80		Na figura ao lado temos: $\text{left}(C_1)$ círculo de centro O <sub>i</sub> e raio de medida r; $\text{right}(C_2)$ círculo de centro O <sub>i</sub> e raio de medida r; $\text{right}(C_3)$ círculo de centro O <sub>i</sub> e raio de medida r. Chama-se setor circular de centro O <sub>i</sub> o conjunto de pontos pertencentes a C <sub>1</sub> e C <sub>2</sub> .	

374	Segmento a <sub>i</sub>	Segmento [Q <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> ]	a <sub>i</sub> = 2.31	
375	Texto texto78	$t^m = (\text{LaTeX}[a_i]) + \backslash \text{u.c.}$	m=2.31	
376	Texto texto81	$a^n = (\text{LaTeX}[r_i]) + \backslash \text{u.c.}$	n=120°	
377	Texto texto82		$\text{frac}[A_i](\alpha) = \text{frac}[\pi \cdot r^2(360^\circ - \alpha)]{360^\circ} \cdot \text{right}[\alpha]$	
378	Texto texto83		Note que, se a medida do ângulo central fosse dada em radianos, teríamos:	
379	Texto texto83	Na figura acima temos: $A = \text{frac}[\pi \cdot r^2(360^\circ - \alpha)]{360^\circ} \cdot \text{right}[\alpha]$	Na figura acima temos: $A = \text{frac}[\pi \cdot r^2(120.01^\circ - \alpha)]{360^\circ} \cdot \text{right}[\alpha]$	
380	Arco f <sub>i</sub>	ArcoCircular(Q <sub>i</sub> , R <sub>i</sub> , S <sub>i</sub> )	f <sub>i</sub> = 4.84	
381	Número α	Comprimento de Arco de f <sub>i</sub>	α = 4.84	
382	Ponto Pontof(13)	Ponto em f <sub>i</sub>	Pontof(13) = (12.51, 1.14, 0)	
383	Texto Textof(13)	$x = (\text{LaTeX}[a_i]) + \backslash \text{u.c.}$	x = 4.84 u.c.	
384	Texto texto84	$\text{frac}[A_i](\alpha) = \text{frac}[\pi \cdot r^2(2(\pi - \alpha)]{4\pi} \cdot \text{right}[\alpha]$	$\text{frac}[A_i](\alpha) = \text{frac}[\pi \cdot r^2(2(\pi - \alpha)]{4\pi} \cdot \text{right}[\alpha]$	
385	Ponto T <sub>i</sub>		T <sub>i</sub> = (10.06, -2.84)	
386	Ponto U <sub>i</sub>		U <sub>i</sub> = (11.8, -0.10)	
387	Círculo g <sub>i</sub>	Círculo por U <sub>i</sub> com centro T <sub>i</sub>	$g_i: (x - 10.06)^2 + (y + 2.84)^2 = 10.21$	
388	Segmento b <sub>i</sub>	Segmento [T <sub>i</sub> , U <sub>i</sub> ]	b <sub>i</sub> = 3.2	
389	Ponto V <sub>i</sub>	Ponto sobre b <sub>i</sub>	V <sub>i</sub> = (11.15, -1.16)	
390	Círculo h <sub>i</sub>	Círculo por V <sub>i</sub> com centro T <sub>i</sub>	$h_i: (x - 10.06)^2 + (y + 2.84)^2 = 9.99$	
391	Ponto W <sub>i</sub>	Ponto sobre g <sub>i</sub>	W <sub>i</sub> = (10.35, -6.02)	
392	Segmento i <sub>i</sub>	Segmento [T <sub>i</sub> , W <sub>i</sub> ]	i <sub>i</sub> = 3.2	
393	Segmento j <sub>i</sub>	Segmento [T <sub>i</sub> , V <sub>i</sub> ]	j <sub>i</sub> = 2	
394	Texto texto87		Sejam C <sub>1</sub> e C <sub>2</sub> círculos concêntricos cujos respectivos raios medem R e r, com R > r. Chama-se coroa circular o conjunto de pontos que pertencem à região limitada pelas circunferências de C <sub>1</sub> e C <sub>2</sub> , ou seja, o conjunto dos pontos que pertencem a C <sub>1</sub> e não pertencem a C <sub>2</sub> , como mostra a figura ao lado. Observe que a área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos cujos raios medem R e r.	

394	Texto texto87	ABC		Sejam $C_1$ e $C_2$ círculos concêntricos cujos respectivos raios medem $R$ e $r$ , com $R > r$ .  Chama-se coroa circular o conjunto de pontos que pertencem à região limitada pelas circunferências de $C_1$ e $C_2$ , ou seja, o conjunto dos pontos que pertencem a $C_1$ e não pertencem a $C_2$ , como mostra a figura ao lado.  Observe que a área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos cujos raios medem $R$ e $r$ .	
396	Texto texto88	ABC	Logo, \ sendo:\\ A) a) área( da) coroa( circular.\\ A) a) área( do) círculo( maior.\\ A) a) área( do) círculo( menor) temos:\\ $A = A_1 - A_2$ \\ $\text{Rightarrow } A = \pi(R^2 - r^2)$ \\ Na( figura) temos:\\ $R^2 = (LaTeX[1]) + \text{u.c.}$ \\ $\text{Rightarrow } A = \pi((LaTeX[1]) - r^2)$ \\ $R = 3,2 \text{ u.c.}$ \\ $\text{Rightarrow } A = \pi(3,2^2 - 2^2) = 6,22 \pi \text{ u.s.}$	Logo, \ sendo:\\ A) a) área( da) coroa( circular.\\ A) a) área( do) círculo( maior.\\ A) a) área( do) círculo( menor) temos:\\ $A = A_1 - A_2$ \\ $\text{Rightarrow } A = \pi(R^2 - r^2)$ \\ Na( figura) temos:\\ $R^2 = \text{u.c.}$ \\ $\text{Rightarrow } A = \pi(r^2 - r^2)$ \\ $R = 3,2 \text{ u.c.}$ \\ $\text{Rightarrow } A = \pi(3,2^2 - 2^2) = 6,22 \pi \text{ u.s.}$	
398	Texto texto85	ABC	$R^2 = (LaTeX[1]) + \text{u.c.}$	$R = 3,2 \text{ u.c.}$	
397	Texto texto86	ABC	$r^2 = (LaTeX[1]) + \text{u.c.}$	$r = 2 \text{ u.c.}$	
398	Texto texto89	ABC		mova-me!	
399	Texto texto90	ABC		C.	
400	Texto texto91	ABC		$C_1$	
401	Texto texto92	ABC		$C_2$	
401	Texto texto92	ABC		A área da coroa circular é a diferença entre a área dos círculos concêntricos de raios maior e menor.	
402	Ponto $Z_1$			$Z_1 = (8,36, -3,72)$	
403	Ponto $A_1$			$A_1 = (11,92, -3,6)$	
404	Círculo $K_{12}$			$K_{12}: (x - 8,36)^2 + (y + 3,72)^2 = 12,69$	
405	Segmento $m_{13}$			$m_{13} = 3,56$	
406	Ponto $B_1$			$B_1 = (4,8, -3,84)$	
407	Ângulo $\alpha$			$\alpha = 180^\circ$	
408	Arco $p_{13}$			$p_{13} = 11,19$	
409	Ponto $C_1$			$C_1 = (9,77, -0,45)$	
410	Triângulo $pol12$			$pol12 = 5,74$	
410	Segmento $a_{11}$			$a_{11} = 3,56$	
410	Segmento $z_1$			$z_1 = 3,81$	
410	Segmento $z_1$			$z_1 = 3,81$	
425	Texto texto100	ABC	Como( a) área( de) um( polígono) regular( é) dada( por) $A = \frac{p \cdot a}{2}$ , então, nesse( caso), temos:\\ $A = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$ que( é) a( expressão) da( área) do( círculo) de( raio) $r$ . Assim:\\ $A = \pi r^2$ \\ Na( figura) temos:\\ $A = \pi r^2$ \\ $A = \pi(3,14^2) = 6,85\pi \text{ u.s.}$	Como( a) área( de) um( polígono) regular( é) dada( por) $A = \frac{p \cdot a}{2}$ , então, nesse( caso), temos:\\ $A = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$ que( é) a( expressão) da( área) do( círculo) de( raio) $r$ . Assim:\\ $A = \pi r^2$ \\ Na( figura) temos:\\ $A = \pi r^2$ \\ $A = \pi(3,14^2) = 6,85\pi \text{ u.s.}$	
426	Texto texto101	ABC		A área do setor circular é proporcional ao ângulo central do círculo que o contém.	
427	Texto texto102	ABC		Prof. Antônio Carlos Bastos Souza	
411	Setor $q_{11}$			Setor Circular $(Z_1, A_1, C_1)$ $q_{11} = 7,16$	
412	Segmento $l_{11}$			Segmento $(Z_1, C_1)$ $l_{11} = 3,56$	
413	Segmento $n_{11}$			Segmento $(Z_1, A_1)$ $n_{11} = 3,56$	
414	Segmento $r_{11}$			Segmento $(Z_1, B_1)$ $r_{11} = 3,56$	
415	Texto texto04			B	
416	Texto texto05	ABC		A	
417	Texto texto06	ABC		O	
418	Ângulo $\phi$			Ângulo entre $A_1, Z_1, C_1$ $\phi = 64,71^\circ$	
419	Texto texto07	ABC		$\alpha = (LaTeX[1]) + \text{u.c.}$ $\alpha = 65^\circ$	
420	Texto texto03	ABC		Seja $S_{\widehat{AB}}(AB)$ um arco de circunferência, contido em um círculo cujo raio mede $r$ .  Chama-se segmento circular o conjunto de pontos que pertencem à parte do círculo limitada pelo arco $S_{\widehat{AB}}(AB)$ e pela corda de extremidades $A$ e $B$ (destacados ao lado).  Assim, a área do segmento circular $(SA_{AB})$ é igual à diferença entre a área do setor circular $(SA_{AOB})$ e a área do triângulo $AOB$ $(SA_{AOB})$ .  $SA_{AB} = SA_{AOB} - SA_{AOB}$ . Ou seja, na figura temos:  $SA_{AB} = (LaTeX[1]) + \text{u.s.}$ $SA_{AB} = 7,16 \text{ u.s.} - 5,74 \text{ u.s.} = 1,42 \text{ u.s.}$	
421	Texto texto08	ABC		A área do segmento circular é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo.	
422	Texto texto09	ABC		$r^2 = (LaTeX[1]) + \text{u.c.}$ $r = 3,56 \text{ u.c.}$	
423	Texto texto05	ABC		Assim, se no retângulo ABCD chamamos: A: área da superfície limitada pelo retângulo ABCD ou, simplesmente, área do retângulo ABCD; b: medida da base BC; h: medida da altura AB, temos: $A = (b + h) \cdot u.c.$ ou seja, $A = (8,86 \text{ u.c.}) \cdot (2,15 \text{ u.c.}) = 12,59 \text{ u.s.}$ ou seja:	
424	Texto texto75	ABC		$\text{left}(p=2\pi r)$ $a=\text{right}(r)$ Como( a) área( de) um( polígono) regular( é)	

## C.1.2 Protocolo de construção do Capítulo 10 - Prismas

### PRISMAS

- Introdução Conceito Elementos e classificação Paralelepípedo Paralelepípedo retangular
- Diagonal paralelepípedo e Volume Cubo Aplicações Princípio de Cavalieri Áreas e volume

Observe ao lado alguns objetos encontrados em nosso cotidiano.

Eles apresentam características comuns, tais como:

- suas superfícies são constituídas de polígonos;
  - cada um deles tem pelo menos dois polígonos congruentes contidos em planos paralelos;
  - os outros polígonos são paralelogramos.
- Sólidos com essas características são chamados prismas.



N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição	Valor	Legenda
1	Ponto V <sub>i</sub>			$V_i = (1.06, -1.33, 0)$	
2	Ponto U <sub>i</sub>			$U_i = (0.92, -2.1, 0)$	
3	Ponto K <sub>i</sub>			$K_i = (0.02, -1.44, 0)$	E
4	Ponto L <sub>i</sub>			$L_i = (1.18, -2.73, 0)$	A
5	Polígono pol7		Polígono[K <sub>i</sub> , L <sub>i</sub> , 5, PlanoXOY]	pol7 = 5.17	
6	Segmento n		Segmento [K <sub>i</sub> , L <sub>i</sub> ] de Polígono pol7	n = 1.73	
7	Segmento m		Segmento [L <sub>i</sub> , M <sub>i</sub> ] de Polígono pol7	m = 1.73	
8	Ponto M <sub>i</sub>		Polígono[K <sub>i</sub> , L <sub>i</sub> , 5, PlanoXOY]	$M_i = (2.77, -2.02, 0)$	B
9	Ponto N <sub>i</sub>		Polígono[K <sub>i</sub> , L <sub>i</sub> , 5, PlanoXOY]	$N_i = (2.59, -0.3, 0)$	C
10	Ponto O <sub>i</sub>		Polígono[K <sub>i</sub> , L <sub>i</sub> , 5, PlanoXOY]	$O_i = (0.89, 0.06, 0)$	D
11	Segmento n <sub>i</sub>		Segmento [M <sub>i</sub> , N <sub>i</sub> ] de Polígono pol7	n <sub>i</sub> = 1.73	
12	Segmento p <sub>i</sub>		Segmento [N <sub>i</sub> , O <sub>i</sub> ] de Polígono pol7	p <sub>i</sub> = 1.73	
13	Segmento q <sub>i</sub>		Segmento [O <sub>i</sub> , K <sub>i</sub> ] de Polígono pol7	q <sub>i</sub> = 1.73	
14	Plano t <sub>i</sub>		Plano passando por L <sub>i</sub> , M <sub>i</sub> , N <sub>i</sub>	t: 2.802 = 0	
15	Ponto O <sub>i</sub>		Ponto em t <sub>i</sub>	$O_i = (-3.23, -2.85, 0)$	
16	Ponto P <sub>i</sub>		Ponto em Esfera[O <sub>i</sub> , 6]	$P_i = (2.77, -2.85, 0)$	
17	Segmento j <sub>i</sub>		Segmento [O <sub>i</sub> , P <sub>i</sub> ]	j <sub>i</sub> = 6	
18	Ponto Q <sub>i</sub>		Ponto sobre j <sub>i</sub>	$Q_i = (-1.13, -2.85, 0)$	move-me (lados)
19	Segmento k <sub>i</sub>		Segmento [O <sub>i</sub> , Q <sub>i</sub> ]	k <sub>i</sub> = 2.11	
20	Ponto U <sub>i</sub>			$U_i = (-2.99, -2.63, 0)$	
21	Reta g <sub>i</sub>		Reta passando por U <sub>i</sub> e perpendicular a PlanoXOY	g: X = (-2.99, -2.63, 0) + A (0, 0, 1)	
22	Ponto F <sub>i</sub>		Ponto sobre g <sub>i</sub>	$F_i = (-2.99, -2.63, -2.71)$	
23	Ponto V <sub>i</sub>		Ponto sobre g <sub>i</sub>	$V_i = (-2.99, -2.63, 1.19)$	
24	Plano w <sub>i</sub>		Plano passando por V <sub>i</sub> e paralelo a PlanoXOY	w: z = 1.19	

25	Imagem fig1		fig1		
26	Ponto A		$A = (0.56, -0.68)$		
27	Ponto B		$B = (0.96, -1.68)$		
28	Polígono pol1		Polígono[A, B, 6]	pol1 = 3.01	
29	Segmento a		Segmento [A, B] de Polígono pol1	a = 1.08	
30	Segmento b		Segmento [B, C] de Polígono pol1	b = 1.08	
31	Ponto C		Polígono[A, B, 6]	$C = (2.03, -1.83)$	
32	Ponto D		Polígono[A, B, 6]	$D = (2.69, -0.99)$	
33	Ponto E		Polígono[A, B, 6]	$E = (2.28, 0.01)$	
34	Ponto F		Polígono[A, B, 6]	$F = (1.23, 0.17)$	
35	Segmento c		Segmento [C, D] de Polígono pol1	c = 1.08	
36	Segmento d		Segmento [D, E] de Polígono pol1	d = 1.08	
37	Segmento e		Segmento [E, F] de Polígono pol1	e = 1.08	
38	Segmento f		Segmento [F, A] de Polígono pol1	f = 1.08	
39	Ponto G		$G = (-2.15, -1.55)$		
40	Ponto H		$H = (-1, -1.83)$		
41	Polígono pol2		Polígono[G, H, 4]	pol2 = 1.41	
42	Segmento g		Segmento [G, H] de Polígono pol2	g = 1.19	
43	Segmento h		Segmento [H, I] de Polígono pol2	h = 1.19	
44	Ponto I		Polígono[G, H, 4]	$I = (-0.72, -0.67)$	
45	Ponto J		Polígono[G, H, 4]	$J = (-1.88, -0.39)$	
46	Segmento i		Segmento [I, J] de Polígono pol2	i = 1.19	
47	Segmento j		Segmento [J, G] de Polígono pol2	j = 1.19	
48	Polígono pol3		Polígono[J, I, 4]	pol3 = 1.41	
49	Segmento k		Segmento [I, J] de Polígono pol3	k = 1.19	
50	Segmento l		Segmento [J, K] de Polígono pol3	l = 1.19	
51	Ponto K		Polígono[J, I, 4]	$K = (-0.44, 0.48)$	
52	Ponto L		Polígono[J, I, 4]	$L = (-1.0, 0.76)$	
53	Segmento m		Segmento [K, L] de Polígono pol3	m = 1.19	
54	Segmento n		Segmento [L, J] de Polígono pol3	n = 1.19	
55	Quadrilátero pol4		Polígono L, G, H, K	pol4 = 2.82	
56	Segmento l <sub>i</sub>		Segmento [L, G] de Quadrilátero pol4	l <sub>i</sub> = 2.37	
57	Segmento g <sub>i</sub>		Segmento [G, H] de Quadrilátero pol4	g <sub>i</sub> = 1.19	
58	Segmento h <sub>i</sub>		Segmento [H, K] de Quadrilátero pol4	h <sub>i</sub> = 2.37	
59	Segmento k <sub>i</sub>		Segmento [K, L] de Quadrilátero pol4	k <sub>i</sub> = 1.19	
60	Prisma o		Prisma[pol4, 1]	o = 2.82	
61	Ponto M		Prisma[pol4, 1]	$M = (-1.6, 0.76, 1)$	
62	Ponto N		Prisma[pol4, 1]	$N = (-2.15, -1.55, 1)$	
63	Ponto O		Prisma[pol4, 1]	$O = (-1, -1.83, 1)$	
64	Ponto P		Prisma[pol4, 1]	$P = (-0.44, 0.48, 1)$	
65	Segmento arestaGN		Segmento [G, N] de Prisma o	arestaGN = 1	
66	Segmento arestaMN		Segmento [M, N] de Prisma o	arestaMN = 2.37	
67	Segmento arestaLM		Segmento [L, M] de Prisma o	arestaLM = 1	
68	Quadrilátero faceGLMN		Polígono L, G, N, M	faceGLMN = 2.37	

10	Plano v <sub>i</sub>		Plano passando por V <sub>i</sub> e paralelo a PlanoXOY	v <sub>i</sub> : z = 1.19	
17	Plano w <sub>i</sub>		Plano passando por W <sub>i</sub> e paralelo a v <sub>i</sub>	w <sub>i</sub> : z = 0	
18	Plano o <sub>i</sub>		Plano passando por O <sub>i</sub> e paralelo a w <sub>i</sub>	o <sub>i</sub> : z = -2.71	
19	Botão bt1	OK		bt1	Introdução
20	Botão bt2	OK		bt2	Conceito
21	Botão bt3	OK		bt3	Elementos e classificação
22	Botão bt4	OK		bt4	Paralelepípedo
23	Botão bt5	OK		bt5	Paralelepípedo retangular
24	Botão bt6	OK		bt6	Diagonal paralelepípedo e Volume
25	Botão bt7	OK		bt7	Aplicações
26	Botão bt8	OK		bt8	Princípio de Cavalieri
27	Botão bt9	OK		bt9	Áreas e volume
28	Texto texto1	ABC			PRISMAS
29	Valor Booleano intro			intro = true	
30	Valor Booleano conc			conc = false	
31	Valor Booleano elem			elem = false	
32	Valor Booleano para			para = false	
33	Valor Booleano pararet			pararet = false	
34	Valor Booleano cubo			cubo = false	
35	Valor Booleano apli			apli = false	
36	Valor Booleano princ			princ = false	
37	Valor Booleano area			area = false	área
38	Texto texto2	ABC			Observe ao lado alguns objetos encontrados em nosso cotidiano.  Eles apresentam características comuns, tais como:  • suas superfícies são constituídas de polígonos;
43	Quadrilátero faceLMP		Polígono K, L, M, P	faceLMP = 1.10	
44	Quadrilátero faceMNP		Polígono M, N, O, P	faceMNP = 2.82	
45	Prisma p		Prisma[pol1, 2.34]	p = 7.05	
46	Ponto Q		Prisma[pol1, 2.34]	$Q = (0.56, -0.68, 2.34)$	
47	Ponto R		Prisma[pol1, 2.34]	$R = (0.96, -1.68, 2.34)$	
48	Ponto S		Prisma[pol1, 2.34]	$S = (2.03, -1.83, 2.34)$	
49	Ponto T		Prisma[pol1, 2.34]	$T = (2.69, -0.99, 2.34)$	
50	Ponto U		Prisma[pol1, 2.34]	$U = (2.28, 0.01, 2.34)$	
51	Ponto V		Prisma[pol1, 2.34]	$V = (1.23, 0.17, 2.34)$	
52	Segmento arestaBR		Segmento [B, R] de Prisma p	arestaBR = 2.34	
53	Segmento arestaQR		Segmento [R, Q] de Prisma p	arestaQR = 1.08	
54	Segmento arestaAQ		Segmento [Q, A] de Prisma p	arestaAQ = 2.34	
55	Quadrilátero faceABRQ		Polígono A, B, R, Q	faceABRQ = 2.82	
56	Segmento arestaCS		Segmento [C, S] de Prisma p	arestaCS = 2.34	
57	Segmento arestaRS		Segmento [S, R] de Prisma p	arestaRS = 1.08	
58	Quadrilátero faceBCSR		Polígono B, C, S, R	faceBCSR = 2.82	
59	Segmento arestaDT		Segmento [D, T] de Prisma p	arestaDT = 2.34	
60	Segmento arestaST		Segmento [T, S] de Prisma p	arestaST = 1.08	
61	Quadrilátero faceCDTS		Polígono C, D, T, S	faceCDTS = 2.82	
62	Segmento arestaEU		Segmento [E, U] de Prisma p	arestaEU = 2.34	
63	Segmento arestaTU		Segmento [U, T] de Prisma p	arestaTU = 1.08	
64	Quadrilátero faceDEUT		Polígono D, E, U, T	faceDEUT = 2.82	
65	Segmento arestaFV		Segmento [F, V] de Prisma p	arestaFV = 2.34	
66	Segmento arestaUV		Segmento [V, U] de Prisma p	arestaUV = 1.08	
67	Quadrilátero faceEFVU		Polígono E, F, V, U	faceEFVU = 2.82	
68	Segmento arestaQV		Segmento [Q, V] de Prisma p	arestaQV = 1.08	
69	Quadrilátero faceAFVQ		Polígono F, A, Q, V	faceAFVQ = 2.82	
70	Hexágono faceQRSTUV		Polígono Q, R, S, T, U, V	faceQRSTUV = 3.01	
71	Texto texto3	ABC			Consideremos dois planos α e β, distintos e paralelos entre si, um polígono convexo P, contido em α, e uma reta r que intercepta α e β nos pontos X e Y, respectivamente, conforme a figura na janela 3D.  Por todos os pontos de P, traçamos retas paralelas a r, conforme mostrado na figura ao lado.  Observe que os pontos de interseção dessas retas com α e β determinam segmentos congruentes ao segmento XY.  A reunião de todos os segmentos assim obtidos é um sólido chamado

			<p>interseção dessas retas com o <math>\alpha</math> e <math>\beta</math> determinam segmentos congruentes ao segmento XY.</p> <p>A reunião de todos os segmentos assim obtidos é um sólido chamado prisma.</p>			<p>U, E e E' A) são as arestas das bases;</p> <p>- os segmentos AA', BB', CC', DD' e EE' são as arestas laterais;</p> <p>- a distância entre os planos <math>\alpha</math> e <math>\beta</math>, que contém as bases, é a altura do prisma.</p>
61	Ponto W		$W = (0,99, -2,84)$			
62	Ponto Z		$Z = (2,21, -0,95)$			Quanto ao número de lados de cada polígono da base, os prismas são classificados em: triangular, quadrangular, pentagonal,
63	Polígono pol5	Polígono(W, Z, 5)	pol5 = 7,42			etc., conforme o polígono da base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.
63	Segmento q	Segmento(W, Z) de Polígono pol5	$q = 2,08$			
63	Segmento r	Segmento(Z, A) de Polígono pol5	$r = 2,08$			
63	Ponto A	Polígono(W, Z, 5)	$A_x = (0,99, 0,72)$			
63	Ponto D	Polígono(W, Z, 5)	$D_x = (-0,98, 0,08)$			
63	Ponto E	Polígono(W, Z, 5)	$E_x = (-0,98, -1,99)$			
63	Segmento s	Segmento(A, D) de Polígono pol5	$s = 2,08$			Quanto à inclinação das arestas laterais em relação aos planos das bases, os prismas são classificados em:
63	Segmento a	Segmento(D, E) de Polígono pol5	$a_x = 2,08$			- prisma oblíquo: se as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases (prisma azul)
63	Segmento b	Segmento(E, W) de Polígono pol5	$b_x = 2,08$			- prisma reto: se as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases. Observe que, nesse caso, as faces laterais são retângulos (prisma roxo)
64	Ponto C		$C_x = (-2,81, -1,85, 0)$	X		
65	Ponto B		$B_x = (-2,81, 0,9, 3)$	Y		
66	Reta t	Reta B, C	$t: X = (-2,81, 0,9, 3) + \lambda(0, -2,75, -3)$			Observação
67	Texto texto4	ABC	$p$			
68	Plano u	Plano passando por W, Z, A	$u: 41z = 0$			
69	Plano v	Plano passando por B e paralelo a u	$v: 41z = 12,31$			
69	Reta c <sub>1</sub>	Reta passando por W e paralela a t	$c_1: X = (0,99, -2,84, 0) + \lambda(0, -0,88, -0,74)$			
69	Reta d <sub>1</sub>	Reta passando por Z e paralela a t	$d_1: X = (2,21, -0,98, 0) + \lambda(0, -0,88, -0,74)$			
69	Reta e <sub>1</sub>	Reta passando por A e paralela a t	$e_1: X = (0,99, 0,72, 0) + \lambda(0, -0,88, -0,74)$			
69	Reta f <sub>1</sub>	Reta passando por D e paralela a t	$f_1: X = (-0,98, 0,08, 0) + \lambda(0, -0,88, -0,74)$			
69	Reta i <sub>1</sub>	Reta passando por E e paralela a t	$i_1: X = (-0,98, -1,99, 0) + \lambda(0, -0,88, -0,74)$			
65	Ponto F	Ponto de interseção de u, v	$F_x = (-0,88, 0,76, 3)$			
66	Ponto G	Ponto de interseção de c <sub>1</sub> , v	$G_x = (0,99, 0,11, 3)$			
67	Ponto H	Ponto de interseção de d <sub>1</sub> , v	$H_x = (2,21, 1,78, 3)$			
68	Ponto I	Ponto de interseção de e <sub>1</sub> , v	$I_x = (0,99, 3,47, 3)$			
69	Ponto J	Ponto de interseção de f <sub>1</sub> , v	$J_x = (-0,88, 2,83, 3)$			
70	Pentágono pol5	Polígono(F, G, H, I, J)	pol5 = 7,42			
70	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento(F, G) de Polígono pol5	$f_1 = 2,08$			
70	Segmento g <sub>1</sub>	Segmento(G, H) de Polígono pol5	$g_1 = 2,08$			
70	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento(H, I) de Polígono pol5	$h_1 = 2,08$			
70	Segmento i <sub>1</sub>	Segmento(I, J) de Polígono pol5	$i_1 = 2,08$			
70	Segmento j <sub>1</sub>	Segmento(J, F) de Polígono pol5	$j_1 = 2,08$			
71	Texto texto5	ABC	$\alpha$			
72	Texto texto6	ABC	$\beta$			
73	Texto texto7	ABC	<p>Considerando o prisma representado na janela 3D ao lado, temos:</p> <p>- os polígonos ABCDE e ABC'D'E', chamados bases do prisma, são congruentes e estão situados em planos paralelos entre si (<math>\alpha</math> e <math>\beta</math>);</p> <p>- os paralelogramos AAB'B, BB'C'C, CC'D'D, DDE'E e EE'A'A são</p>			
74	Pentágono face8	Polígono(P, Q, R, S, T)	face8 = 5,17			
75	Plano u	Plano passando por R, S, Q	$u: 286z = 14,72$			
76	Ponto K <sub>1</sub>	Ponto em u	$K_1: (-2,98, -1, 5,15)$			
77	Reta a <sub>1</sub>	Reta passando por K <sub>1</sub> e perpendicular a u	$a_1: X = (-2,98, -1, 5,15) + \lambda(0, 0, 2,86)$			
78	Ponto L <sub>1</sub>	Ponto de interseção de a <sub>1</sub> , t	$L_1: (-2,98, -1, 0)$			
79	Vetor v <sub>1</sub>	Vetor(L <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> )	$v_1 = (0, 0, 5,15)$			
80	Vetor w <sub>1</sub>	Vetor(K <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> )	$w_1 = (0, 0, -5,15)$			
81	Texto texto9	ABC	<p>Todo prisma cujas bases são paralelogramos é chamado paralelepípedo. Sua superfície total é a reunião de seis paralelogramos.</p> <p>+ Paralelepípedo reto: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases).</p> <p>+ Paralelepípedo retângulo ou ortorretângulo: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis retângulos.</p> <p>+ Cubo: é um paralelepípedo cuja superfície total é a reunião de seis quadrados. Note que o cubo é o paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.</p>			
82	Ponto M <sub>1</sub>		$M_1 = (-2,4, -1,05)$			
82	Ponto N <sub>1</sub>		$N_1 = (-1,88, -1,59)$			
84	Polígono pol8	Polígono(M <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> , 4)	pol8 = 0,88			
84	Segmento b <sub>1</sub>	Segmento(M <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> ) de Polígono pol8	$b_1 = 0,75$			
84	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento(N <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ) de Polígono pol8	$c_1 = 0,75$			
84	Ponto O <sub>1</sub>	Polígono(M <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> , 4)	$O_1: (-1,34, -1,07)$			
84	Ponto P <sub>1</sub>	Polígono(M <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> , 4)	$P_1: (-1,87, -0,54)$			
84	Segmento d <sub>1</sub>	Segmento(O <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ) de Polígono pol8	$d_1 = 0,75$			
84	Segmento e <sub>1</sub>	Segmento(P <sub>1</sub> , M <sub>1</sub> ) de Polígono pol8	$e_1 = 0,75$			
85	Ponto W <sub>1</sub>		$W_1 = (-0,14, -1,88)$			
86	Ponto Z <sub>1</sub>		$Z_1 = (1,2, -1,84)$			
87	Ponto A <sub>1</sub>		$A_1 = (0,8, -1,15)$			
88	Reta l <sub>1</sub>	Reta W <sub>1</sub> A <sub>1</sub>	$l_1: -0,89x + 0,94y = -1,88$			
89	Reta a <sub>1</sub>	Reta W <sub>1</sub> Z <sub>1</sub>	$a_1: -0,04x + 1,34y = -2,51$			
90	Reta b <sub>1</sub>	Reta passando por Z <sub>1</sub> e paralela a l <sub>1</sub>	$b_1: -0,89x + 0,94y = -2,56$			
91	Reta c <sub>1</sub>	Reta passando por A <sub>1</sub> e paralela a l <sub>1</sub>	$c_1: -0,04x + 1,34y = -1,63$			
92	Ponto B <sub>1</sub>	Ponto de interseção de b <sub>1</sub> , c <sub>1</sub>	$B_1 = (2,14, -1,15)$			
93	Quadrilátero pol11	Polígono(A <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> )	pol11 = 0,88			
93	Quadrilátero pol11	Polígono(A <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> )	pol11 = 0,88			
93	Segmento a <sub>1</sub>	Segmento(A <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol11	$a_1 = 1,17$			
93	Segmento w <sub>1</sub>	Segmento(W <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol11	$w_1 = 1,34$			
93	Segmento z <sub>1</sub>	Segmento(Z <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol11	$z_1 = 1,17$			
93	Segmento b <sub>1</sub>	Segmento(B <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol11	$b_1 = 1,34$			
94	Ponto Q <sub>1</sub>		$Q_1: (-0,15, 1,7)$			
95	Ponto R <sub>1</sub>		$R_1: (-0,15, 1,1)$			
96	Reta j <sub>1</sub>	Reta Q <sub>1</sub> R <sub>1</sub>	$j_1: 0,61x - 0,09$			
97	Reta k <sub>1</sub>	Reta passando por Q <sub>1</sub> e perpendicular a j <sub>1</sub>	$k_1: 0x + 0,61y = 1,03$			
98	Ponto S <sub>1</sub>	Ponto sobre k <sub>1</sub>	$S_1: (0,78, 1,71)$			
99	Reta l <sub>1</sub>	Reta passando por S <sub>1</sub> e perpendicular a k <sub>1</sub>	$l_1: -0,61x = -0,47$			
100	Reta m <sub>1</sub>	Reta passando por R <sub>1</sub> e perpendicular a l <sub>1</sub>	$m_1: 0x - 0,61y = -0,65$			
101	Ponto T <sub>1</sub>	Ponto de interseção de l <sub>1</sub> , m <sub>1</sub>	$T_1: (0,77, 1,1)$			
102	Quadrilátero pol9	Polígono(S <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> , R <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> )	pol9 = 0,55			
102	Segmento s <sub>1</sub>	Segmento(S <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol9	$s_1 = 0,81$			
102	Segmento t <sub>1</sub>	Segmento(T <sub>1</sub> , R <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol9	$t_1 = 0,81$			
102	Segmento r <sub>1</sub>	Segmento(R <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol9	$r_1 = 0,81$			
102	Segmento q <sub>1</sub>	Segmento(Q <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ) de Quadrilátero pol9	$q_1 = 0,81$			
103	Prisma o <sub>1</sub>	Prisma(pol11, 1)	$b_1 = 0,88$			
103	Ponto U <sub>1</sub>	Prisma(pol11, 1)	$U_1: (0,8, -1,19, 1)$			
103	Ponto V <sub>1</sub>	Prisma(pol11, 1)	$V_1: (0,14, -1,88, 1)$			
103	Ponto C <sub>1</sub>	Prisma(pol11, 1)	$C_1: (1,2, -1,84, 1)$			
103	Ponto D <sub>1</sub>	Prisma(pol11, 1)	$D_1: (2,14, -1,15, 1)$			
103	Segmento aresta32	Segmento(W <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> ) de Prisma o <sub>1</sub>	aresta32 = 1			
103	Segmento aresta38	Segmento[V <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> ] de Prisma o <sub>1</sub>	aresta38 = 1,17			
103	Segmento aresta34	Segmento[U <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> ] de Prisma o <sub>1</sub>	aresta34 = 1			
103	Quadrilátero face19	Polígono(A <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> )	face19 = 1,17			
103	Segmento aresta33	Segmento[Z <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ] de Prisma o <sub>1</sub>	aresta33 = 1			
103	Segmento aresta38	Segmento[C <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> ] de Prisma o <sub>1</sub>	aresta38 = 1,34			
103	Quadrilátero face18	Polígono(W <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> )	face18 = 1,34			
103	Segmento aresta35	Segmento[B <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> ] de Prisma o <sub>1</sub>	aresta35 = 1			
103	Segmento aresta39	Segmento[D <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ] de Prisma o <sub>1</sub>	aresta39 = 1,17			
103	Quadrilátero face20	Polígono(Z <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> )	face20 = 1,17			
103	Segmento aresta37	Segmento[U <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> ] de Prisma o <sub>1</sub>	aresta37 = 1,34			
103	Quadrilátero face21	Polígono(B <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> )	face21 = 1,34			
103	Quadrilátero face22	Polígono(U <sub>1</sub> , V <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> )	face22 = 0,88			
104	Prisma p <sub>1</sub>	Prisma(pol9, 0,88)	$b_1 = 0,37$			
104	Ponto E <sub>1</sub>	Prisma(pol9, 0,88)	$E_1: (0,78, 1,71, 0,88)$			
104	Ponto F <sub>1</sub>	Prisma(pol9, 0,88)	$F_1: (0,77, 1,1, 0,88)$			
104	Ponto G <sub>1</sub>	Prisma(pol9, 0,88)	$G_1: (-0,15, 1,1, 0,88)$			
104	Ponto H <sub>1</sub>	Prisma(pol9, 0,88)	$H_1: (-0,15, 1,7, 0,88)$			
104	Segmento aresta43	Segmento[T <sub>1</sub> , F <sub>1</sub> ] de Prisma p <sub>1</sub>	aresta43 = 0,88			

104	Quadrilátero face23	Polígono $R_1, Q_1, H_1, W_1$	face23 = 0.4	
104	Segmento aresta45	Segmento $[E_1, H_1]$ de Prisma $p_1$	aresta45 = 0.91	
104	Quadrilátero face24	Polígono $Q_1, S_1, E_1, H_1$	face24 = 0.6	
104	Quadrilátero face27	Polígono $E_1, F_1, G_1, H_1$	face27 = 0.55	
105	Ponto $I_1$	Ponto sobre Circulo $(N_1, Distância[M_1, N_1])$ Segmento $(M_1, N_1)$	$I_1 = (-1.34, -1.07, 0)$	
105	Cubo $u_1$	Cubo $(M_1, N_1, I_1)$	$I_1 = 0.42$	
105	Ponto $J_1$	Cubo $(M_1, N_1, I_1)$	$J_1 = (-1.87, -0.54, 0)$	
105	Ponto $K_1$	Cubo $(M_1, N_1, I_1)$	$K_1 = (-2.4, -1.06, 0.75)$	
105	Ponto $L_1$	Cubo $(M_1, N_1, I_1)$	$L_1 = (-1.88, -1.56, 0.75)$	
105	Ponto $M_1$	Cubo $(M_1, N_1, I_1)$	$M_1 = (-1.34, -1.07, 0.75)$	
105	Ponto $N_1$	Cubo $(M_1, N_1, I_1)$	$N_1 = (-1.87, -0.54, 0.75)$	
105	Segmento aresta49	Segmento $[J_1, M_1]$ de Cubo $u_1$	aresta49 = 0.75	
105	Segmento aresta48	Segmento $[M_1, N_1]$ de Cubo $u_1$	aresta48 = 0.75	
105	Segmento aresta51	Segmento $[N_1, I_1]$ de Cubo $u_1$	aresta51 = 0.75	
105	Segmento aresta53	Segmento $[I_1, J_1]$ de Cubo $u_1$	aresta53 = 0.75	
105	Quadrilátero face28	Polígono $J_1, M_1, N_1, I_1$	face28 = 0.56	
105	Segmento aresta50	Segmento $[K_1, M_1]$ de Cubo $u_1$	aresta50 = 0.75	
105	Segmento aresta55	Segmento $[J_1, N_1]$ de Cubo $u_1$	aresta55 = 0.75	
105	Segmento aresta57	Segmento $[N_1, K_1]$ de Cubo $u_1$	aresta57 = 0.75	
105	Quadrilátero face30	Polígono $K_1, M_1, J_1, N_1$	face30 = 0.56	
105	Segmento aresta56	Segmento $[K_1, L_1]$ de Cubo $u_1$	aresta56 = 0.75	
105	Segmento aresta52	Segmento $[L_1, N_1]$ de Cubo $u_1$	aresta52 = 0.75	
105	Quadrilátero face29	Polígono $N_1, M_1, K_1, L_1$	face29 = 0.56	
105	Segmento aresta58	Segmento $[L_1, M_1]$ de Cubo $u_1$	aresta58 = 0.75	
105	Segmento aresta54	Segmento $[M_1, I_1]$ de Cubo $u_1$	aresta54 = 0.75	
105	Quadrilátero face31	Polígono $I_1, N_1, L_1, M_1$	face31 = 0.56	
105	Segmento aresta59	Segmento $[M_1, N_1]$ de Cubo $u_1$	aresta59 = 0.75	
105	Quadrilátero face32	Polígono $J_1, I_1, M_1, N_1$	face32 = 0.56	
105	Quadrilátero face33	Polígono $K_1, N_1, M_1, L_1$	face33 = 0.56	
107	Número $v_1$		$v_1 = 0$	Paralelepípedo retângulo
108	Planificação $d_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$d_1 = 3.11$	
108	Ponto $O_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$O_1 = (0.76, 1.71, 0)$	
108	Ponto $P_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$P_1 = (0.77, 1.1, 0)$	
108	Ponto $Q_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$Q_1 = (-0.15, 1.1, 0)$	
108	Ponto $R_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$R_1 = (-0.15, 1.7, 0)$	
108	Ponto $S_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$S_1 = (0.76, 1.1, 0.66)$	
108	Ponto $T_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$T_1 = (0.77, 1.1, 0.66)$	
108	Ponto $U_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$U_1 = (0.77, 1.1, 0.66)$	
108	Ponto $V_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$V_1 = (-0.15, 1.1, 0.66)$	
108	Ponto $W_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$W_1 = (-0.15, 1.1, 0.66)$	

110	Segmento aresta111	Segmento $[B_1, W_1]$ de Planificação $h_1$	aresta111 = 0.75	
110	Quadrilátero face51	Polígono $W_1, Z_1, A_1, B_1$	face51 = 0.56	
111	Texto texto10	ABC	Planificações (arraste o controle deslizante)	
112	Número $e_1$		$e_1 = 0.77$	Paralelepípedo reto
113	Planificação $i_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$i_1 = 6.79$	
113	Ponto $J_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$J_1 = (0.8, -1.16, 0)$	
113	Ponto $K_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$K_1 = (-0.14, -1.88, 0)$	
113	Ponto $L_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$L_1 = (1.2, -1.84, 0)$	
113	Ponto $M_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$M_1 = (2.14, -1.15, 0)$	
113	Ponto $N_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$N_1 = (0.25, -0.44, 0.35)$	
113	Ponto $O_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$O_1 = (-0.66, -1.12, 0.35)$	
113	Ponto $P_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$P_1 = (1.23, -2.78, 0.35)$	
113	Ponto $Q_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$Q_1 = (1.75, -2.6, 0.35)$	
113	Ponto $R_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$R_1 = (2.66, -1.91, 0.35)$	
113	Ponto $S_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$S_1 = (2.12, -0.22, 0.35)$	
113	Ponto $T_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$T_1 = (0.78, -0.28, 0.35)$	
113	Ponto $U_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$U_1 = (-0.13, -0.01, 0.85)$	
113	Ponto $V_1$	Planificação $(o_1, e_1)$	$V_1 = (0.81, 0.67, 0.85)$	
113	Segmento aresta117	Segmento $[I_1, J_1]$ de Planificação $i_1$	aresta117 = 1.17	
113	Segmento aresta121	Segmento $[J_1, K_1]$ de Planificação $i_1$	aresta121 = 1.34	
113	Segmento aresta124	Segmento $[K_1, L_1]$ de Planificação $i_1$	aresta124 = 1.17	
113	Segmento aresta118	Segmento $[L_1, I_1]$ de Planificação $i_1$	aresta118 = 1.34	
113	Quadrilátero face52	Polígono $I_1, J_1, K_1, L_1$	face52 = 0.88	
113	Segmento aresta122	Segmento $[J_1, N_1]$ de Planificação $i_1$	aresta122 = 1	
113	Segmento aresta129	Segmento $[N_1, M_1]$ de Planificação $i_1$	aresta129 = 1.17	
113	Segmento aresta129	Segmento $[M_1, I_1]$ de Planificação $i_1$	aresta129 = 1	
113	Quadrilátero face53	Polígono $J_1, N_1, M_1$	face53 = 1.17	
113	Segmento aresta125	Segmento $[K_1, P_1]$ de Planificação $i_1$	aresta125 = 1	
113	Segmento aresta132	Segmento $[P_1, O_1]$ de Planificação $i_1$	aresta132 = 1.34	
113	Segmento aresta123	Segmento $[O_1, J_1]$ de Planificação $i_1$	aresta123 = 1	
113	Quadrilátero face55	Polígono $J_1, K_1, P_1, O_1$	face55 = 1.34	
113	Segmento aresta127	Segmento $[L_1, R_1]$ de Planificação $i_1$	aresta127 = 1	
113	Segmento aresta133	Segmento $[R_1, Q_1]$ de Planificação $i_1$	aresta133 = 1.17	
113	Segmento aresta126	Segmento $[Q_1, K_1]$ de Planificação $i_1$	aresta126 = 1	
113	Quadrilátero face56	Polígono $K_1, L_1, R_1, Q_1$	face56 = 1.17	
113	Segmento aresta120	Segmento $[I_1, T_1]$ de Planificação $i_1$	aresta120 = 1	
113	Segmento aresta134	Segmento $[T_1, S_1]$ de Planificação $i_1$	aresta134 = 1.34	
113	Segmento aresta128	Segmento $[S_1, U_1]$ de Planificação $i_1$	aresta128 = 1	
113	Polígono $T_1, U_1, V_1, S_1$		face54 = 1.34	

108	Ponto $C_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$C_1 = (-0.15, 1.1, 0.66)$	
108	Ponto $D_1$	Planificação $(p_1, v_1)$	$D_1 = (-0.15, 1.7, 0.66)$	
108	Segmento aresta44	Segmento $[O_1, P_1]$ de Planificação $d_1$	aresta44 = 0.61	
108	Segmento aresta44	Segmento $[P_1, Q_1]$ de Planificação $d_1$	aresta44 = 0.91	
108	Segmento aresta47	Segmento $[Q_1, R_1]$ de Planificação $d_1$	aresta47 = 0.61	
108	Segmento aresta61	Segmento $[R_1, O_1]$ de Planificação $d_1$	aresta61 = 0.91	
108	Quadrilátero face34	Polígono $O_1, P_1, Q_1, R_1$	face34 = 0.56	
108	Segmento aresta65	Segmento $[P_1, T_1]$ de Planificação $d_1$	aresta65 = 0.66	
108	Segmento aresta72	Segmento $[T_1, S_1]$ de Planificação $d_1$	aresta72 = 0.61	
108	Segmento aresta62	Segmento $[S_1, O_1]$ de Planificação $d_1$	aresta62 = 0.66	
109	Quadrilátero face35	Polígono $O_1, P_1, T_1, S_1$	face35 = 0.4	
108	Segmento aresta66	Segmento $[Q_1, V_1]$ de Planificação $d_1$	aresta66 = 0.61	
108	Segmento aresta75	Segmento $[V_1, U_1]$ de Planificação $d_1$	aresta75 = 0.75	
108	Segmento aresta68	Segmento $[U_1, P_1]$ de Planificação $d_1$	aresta68 = 0.66	
108	Quadrilátero face37	Polígono $P_1, Q_1, V_1, U_1$	face37 = 0.6	
108	Segmento aresta70	Segmento $[R_1, Z_1]$ de Planificação $d_1$	aresta70 = 0.66	
108	Segmento aresta76	Segmento $[Z_1, W_1]$ de Planificação $d_1$	aresta76 = 0.61	
108	Segmento aresta69	Segmento $[W_1, Q_1]$ de Planificação $d_1$	aresta69 = 0.66	
108	Quadrilátero face38	Polígono $Q_1, R_1, Z_1, W_1$	face38 = 0.4	
108	Segmento aresta63	Segmento $[O_1, B_1]$ de Planificação $d_1$	aresta63 = 0.66	
108	Segmento aresta77	Segmento $[B_1, A_1]$ de Planificação $d_1$	aresta77 = 0.61	
108	Segmento aresta71	Segmento $[A_1, R_1]$ de Planificação $d_1$	aresta71 = 0.66	
108	Quadrilátero face39	Polígono $R_1, O_1, B_1, A_1$	face39 = 0.6	
108	Segmento aresta74	Segmento $[T_1, C_1]$ de Planificação $d_1$	aresta74 = 0.91	
108	Segmento aresta78	Segmento $[C_1, D_1]$ de Planificação $d_1$	aresta78 = 0.61	
108	Segmento aresta73	Segmento $[D_1, S_1]$ de Planificação $d_1$	aresta73 = 0.91	
108	Quadrilátero face39	Polígono $S_1, T_1, C_1, D_1$	face39 = 0.56	
109	Número $g_1$		$g_1 = 0$	Cubo
110	Planificação $u_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$u_1 = 3.34$	
110	Ponto $S_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$S_1 = (-2.4, -1.06, 0)$	
110	Ponto $T_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$T_1 = (-1.88, -1.56, 0)$	
110	Ponto $U_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$U_1 = (-1.34, -1.07, 0)$	
110	Ponto $V_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$V_1 = (-1.87, -0.54, 0)$	
110	Ponto $W_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$W_1 = (-2.4, -1.06, 0.75)$	
110	Ponto $Z_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$Z_1 = (-1.87, -0.54, 0.75)$	
110	Ponto $A_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$A_1 = (-1.34, -1.07, 0.75)$	
110	Ponto $B_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$B_1 = (-1.88, -1.56, 0.75)$	
110	Ponto $C_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$C_1 = (-2.4, -1.06, 0.75)$	
110	Ponto $D_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$D_1 = (-1.88, -1.56, 0.75)$	
110	Ponto $E_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$E_1 = (-1.88, -1.56, 0.75)$	
110	Ponto $F_1$	Planificação $(u_1, g_1)$	$F_1 = (-1.34, -1.07, 0.75)$	
113	Quadrilátero face57	Polígono $M_1, N_1, U_1, V_1$	face57 = 0.88	
114	Valor Booleano cubo		cubo = false	
116	Texto texto11	ABC	<p>Considere que a carroceria do caminhão mostrado na imagem tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são:</p> <p>8 m de comprimento, 4,5 m de largura e 3 m de altura. Suponha que Onofre, dono do caminhão, contrate uma pessoa para pintar toda a superfície da carroceria. Considerando que essa pessoa cobra R\$ 4,50 para pintar uma superfície de 1 m<sup>2</sup>, que quantos Onofre terá de desembolsar para pagar pelo serviço contratado?</p> <p>Para resolver esse problema é necessário saber calcular a área total da superfície de um paralelepípedo retângulo. Por isso, apresentaremos a sua resolução logo após o desenvolvimento do item seguinte.</p> <p>A figura acima representa um paralelepípedo retângulo, em que a e b são as medidas dos lados do retângulo da base e c, a medida da altura. A figura acima representa a planificação desse paralelepípedo.</p> <p>A planificação do paralelepípedo mostra que sua superfície é a reunião de seis retângulos, dois a dois congruentes. Assim, a sua área total A é igual à soma das áreas desses seis retângulos, ou seja:</p> $A = 2 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 \Rightarrow A = 2ab + 2ac + 2bc$	
116	Imagem fig2		fig2	
117	Ponto $F_1$		$F_1 = (2.08, 1.37)$	B
118	Ponto $E_1$		$E_1 = (0.4, 1.94, 0)$	
119	Reta $r_1$	Reta $E_1F_1$	$r_1: X = (0.4, 1.94, 0) + \lambda(1.68, -0.57, 0)$	
120	Reta $s_1$	Reta passando por $E_1$ , perpendicular a $r_1$ e paralela a PlanoXOY	$s_1: X = (0.4, 1.94, 0) + \lambda(-0.57, -1.68, 0)$	
121	Ponto $D_1$	Ponto sobre $s_1$	$D_1 = (-0.3, -0.11, 0)$	
122	Reta $k_1$	Reta passando por $D_1$ perpendicular a $s_1$ e paralela a PlanoXOY	$k_1: X = (-0.3, -0.11, 0) + \lambda(1.68, 0.57, 0)$	
123	Reta $l_1$	Reta passando por $F_1$ , perpendicular a $k_1$ e paralela a PlanoXOY	$l_1: X = (2.08, 1.37, 0) + \lambda(0.57, 1.68, 0)$	
124	Ponto $I_1$	Ponto de interseção de $k_1$ e $l_1$	$I_1 = (1.37, -0.66, 0)$	A
126	Reta $m_1$	Reta passando por $E_1$ e perpendicular a PlanoXOY	$m_1: X = (0.4, 1.94, 0) + \lambda(0, 0, 1)$	
128	Ponto $J_1$	Ponto sobre $m_1$	$J_1 = (0.4, 1.94, 1.83)$	



167	Quadrilátero face85	Polígono [V, W, Z, A <sub>1</sub> ]	face85 = 5.01
168	Ponto A.O	$P_1 + k_1 / j_1 (R_1 - P_1)$	$A.O = (0.34, -4.05)$
169	Reta l <sub>1</sub>	Reta passando por U <sub>1</sub> e perpendicular a h <sub>1</sub>	$l_1: -3.71x + 0.01y = -0.35$
170	Reta m <sub>1</sub>	Reta passando por A.O e perpendicular a l <sub>1</sub>	$m_1: 0.01x + 3.71y = -15.02$
171	Ponto B <sub>1</sub>	Ponto de interseção de l <sub>1</sub> , m <sub>1</sub>	$B_1 = (1.7, -4.05)$
172	Lugar Geométrico g1	LugarGeométrico[B <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> ]	g1 = LugarGeométrico[B <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> ]
173	Segmento n <sub>1</sub>	Segmento [B <sub>1</sub> , U <sub>1</sub> ]	$n_1 = 1.35$
174	Segmento p <sub>1</sub>	Segmento [B <sub>1</sub> , A.O]	$p_1 = 1.35$ $ar = 2.24$
175	Número ar	$ar$	1.83
176	Texto texto23	$'' + (k_1 / j_1 \text{aresta148}) + ''$	V
177	Texto texto25	ABC	x
178	Texto texto26	ABC	8 17m <sup>3</sup>
179	Texto texto24	$'' + (\text{LaTeX}(k_1 / j_1 \text{aresta148}')) + ''m^3$	volumeq3 = 11.21
180	Número volumeq3	Volume[q <sub>3</sub> ]	Volume de q <sub>3</sub> = 11.21
181	Texto texto3	VVolume de '' + (Nome[q <sub>3</sub> ]) + '' = '' + volumeq3	Volume de q <sub>3</sub> = 11.21
182	Ponto Fontoq3	Ponto sobre q <sub>3</sub>	Fontoq3 = (1.48, 1.35, 1.2)
183	Número w <sub>3</sub>	Volume[q <sub>3</sub> ]	$w_3 = 11.21$
184	Texto texto27	VVolume de '' + (Nome[q <sub>3</sub> ]) + '' = '' + w <sub>3</sub>	Volume de q <sub>3</sub> = 11.21
185	Ponto Fontoq3	Ponto sobre q <sub>3</sub>	Fontoq3 = (1.16, 0.46, 2.24)
186	Texto texto28	ABC	(eixos sem escala)
187	Texto texto21	ABC	O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados congruentes. Assim, suas 12 arestas são congruentes entre si. Como já sabemos, as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um paralelepípedo retângulo são: $SA = 2ab + 2ac + 2bc$ ; $S = s \cdot d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ; $e \cdot V = a \cdot b \cdot c$ , respectivamente. Fazendo $b = c = a$ , em cada uma dessas fórmulas obtem-se as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um cubo de aresta de medida $a$ : Área A: $SA = 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 6a^2$ . No cubo da janela 3D temos $SA = 6 \cdot 2^2 = 24$ u.c.s. O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados congruentes. Assim, suas 12 arestas são congruentes entre si. Como já sabemos, as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um paralelepípedo retângulo são: $SA = 2ab + 2ac + 2bc$ ; $S = s \cdot d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ; $e \cdot V = a \cdot b \cdot c$ , respectivamente. Fazendo $b = c = a$ , em cada uma dessas fórmulas obtem-se as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um cubo de aresta de medida $a$ : Área A: $SA = 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 6a^2$ . No cubo da janela 3D temos $SA = 6 \cdot 2^2 = 24$ u.c.s.
202	Segmento l <sub>1</sub>	Segmento [F <sub>1</sub> , G <sub>1</sub> ] de Polígono pol14	$l_1 = 2.64$
202	Ponto G <sub>1</sub>	Polígono [E <sub>1</sub> , F <sub>1</sub> , 3, Plano XOY]	$G_1 = (1.2, 3.15)$
202	Segmento a <sub>1</sub>	Segmento [G <sub>1</sub> , E <sub>1</sub> ] de Polígono pol14	$a_1 = 2.64$
203	Ponto l <sub>1</sub>	Ponto em Esfera[H <sub>1</sub> , a <sub>1</sub> (3*(1/4)/2)]	$l_1 = (-0.21, -1.35, 0)$
204	Segmento b <sub>1</sub>	Segmento [H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ]	$b_1 = 1.74$
205	Polígono pol15	Polígono [H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , 4, Plano XOY]	pol15 = 3.01
205	Segmento c <sub>1</sub>	Segmento [H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ] de Polígono pol15	$c_1 = 1.74$
205	Segmento d <sub>1</sub>	Segmento [l <sub>1</sub> , j <sub>1</sub> ] de Polígono pol15	$d_1 = 1.74$
205	Ponto J <sub>1</sub>	Polígono [H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , 4, Plano XOY]	$J_1 = (-1.07, 0.15, 0)$
205	Ponto K <sub>1</sub>	Polígono [H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , 4, Plano XOY]	$K_1 = (-2.58, -0.72, 0)$
205	Segmento e <sub>1</sub>	Segmento [J <sub>1</sub> , K <sub>1</sub> ] de Polígono pol15	$e_1 = 1.74$
205	Segmento f <sub>1</sub>	Segmento [K <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ] de Polígono pol15	$f_1 = 1.74$
206	Ponto L <sub>1</sub>	Ponto sobre Círculo[O <sub>1</sub> , Distância[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ], Segmento[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ]]	$L_1 = (-1.07, 0.15, 0)$
207	Cubo o <sub>1</sub>	Cubo[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$o_1 = 5.23$
207	Ponto M <sub>1</sub>	Cubo[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$M_1 = (-2.58, -0.72, 0)$
207	Ponto N <sub>1</sub>	Cubo[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$N_1 = (-1.71, -2.22, 1.74)$
207	Ponto O <sub>1</sub>	Cubo[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$O_1 = (-0.21, -1.35, 1.74)$
207	Ponto P <sub>1</sub>	Cubo[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$P_1 = (-1.07, 0.15, 1.74)$
207	Ponto Q <sub>1</sub>	Cubo[H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ]	$Q_1 = (-2.58, -0.72, 1.74)$
207	Segmento aresta188	Segmento [M <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta188 = 1.74
207	Segmento aresta187	Segmento [H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta187 = 1.74
207	Segmento aresta197	Segmento [L <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta197 = 1.74
207	Segmento aresta190	Segmento [L <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta190 = 1.74
207	Segmento aresta192	Segmento [L <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta192 = 1.74
207	Quadrilátero face89	Polígono M <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , L <sub>1</sub>	face89 = 3.01
207	Segmento aresta189	Segmento [N <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta189 = 1.74
207	Segmento aresta194	Segmento [M <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta194 = 1.74
207	Segmento aresta196	Segmento [Q <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta196 = 1.74
207	Quadrilátero face88	Polígono N <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> , M <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub>	face88 = 3.01
207	Segmento aresta195	Segmento [N <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta195 = 1.74
207	Segmento aresta191	Segmento [O <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta191 = 1.74
207	Quadrilátero face87	Polígono l <sub>1</sub> , H <sub>1</sub> , N <sub>1</sub> , O <sub>1</sub>	face87 = 3.01
207	Segmento aresta197	Segmento [O <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta197 = 1.74
207	Segmento aresta193	Segmento [P <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta193 = 1.74
207	Quadrilátero face89	Polígono L <sub>1</sub> , l <sub>1</sub> , O <sub>1</sub> , P <sub>1</sub>	face89 = 3.01
207	Segmento aresta198	Segmento [P <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> ] de Cubo o <sub>1</sub>	aresta198 = 1.74
207	Quadrilátero face90	Polígono M <sub>1</sub> , L <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub>	face90 = 3.01
207	Quadrilátero face91	Polígono N <sub>1</sub> , Q <sub>1</sub> , P <sub>1</sub> , O <sub>1</sub>	face91 = 3.01
208	Prisma u <sub>1</sub>	Prisma[pol14, aresta187]	$u_1 = 5.23$
208	Ponto R <sub>1</sub>	Prisma[pol14, aresta187]	$R_1 = (0.44, 0.63, 1.74)$
208	Ponto S <sub>1</sub>	Prisma[pol14, aresta187]	$S_1 = (3.01, 1.23, 1.74)$
208	Ponto T <sub>1</sub>	Prisma[pol14, aresta187]	$T_1 = (1.2, 3.15, 1.74)$
208	Segmento aresta200	Segmento [F <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ] de Prisma u <sub>1</sub>	aresta200 = 1.74
208	Segmento aresta202	Segmento [S <sub>1</sub> , R <sub>1</sub> ] de Prisma u <sub>1</sub>	aresta202 = 2.64

			$bd = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$
		No cubo da janela 3D temos: $3d = \sqrt{3} \cdot \text{LaTeX}(\text{aresta148}) + \sqrt{3} \cdot \text{u.c.s}$	No cubo da janela 3D temos: $3d = 2.24 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \text{u.c.s}$
		Volume V: $3V = a \cdot a \cdot V = a^3 \cdot 3$ Na figura $3V = \sqrt{3} \cdot \text{LaTeX}(\text{aresta148}) + \sqrt{3} \cdot \text{u.c.s}$	Volume V: $3V = a \cdot a \cdot V = a^3 \cdot 3$ Na figura $3V = 2.24 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \text{u.c.s}$
188	Texto texto29	ABC	Consequimos estabelecer uma fórmula para o volume de um paralelepípedo retângulo de maneira intuitiva, entretanto, para determinar a expressão do volume de outros sólidos, o processo não é tão simples. Uma maneira que pode ser utilizada para a obtenção do volume de um sólido é adotar como axioma um resultado formulado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que é conhecido como princípio de Cavalieri.
189	Função q <sub>1</sub>		$q_1(x) = 2\sin^2 x + 1 \leq 4, 1.74 \sin(x - 1) + 1$
190	Ponto C <sub>1</sub>		$C_1 = (-2.76, -1.0, 0)$
191	Reta r <sub>1</sub>	Reta passando por C <sub>1</sub> e perpendicular a Plano XOY	$r_1: X = (-2.76, -1.0, 0) + \lambda(0, 0, 1)$
192	Ponto D <sub>1</sub>		$D_1 = (-2.76, -1.0, 1.01)$
193	Plano v <sub>1</sub>	Plano passando por D <sub>1</sub> e paralelo a Plano XOY	$v_1: z = 1.01$
194	Superfície u <sub>1</sub>	Superfície $q_1(t) \sin(\theta) + 2 \cdot q_1(t) \cos(\theta) - 2 \cdot t$ 0, 6, 0, 6, 2, 3	$u_1(\theta) = (q_1(t) \sin(\theta) + 2 \cdot q_1(t) \cos(\theta) - 2 \cdot t)$
195	Superfície o <sub>1</sub>	Superfície $q_1(t) \cos(\theta) - 1 \cdot q_1(t) \sin(\theta) - 1 \cdot t$ 0, 6, 0, 6, 2, 3	$o_1(\theta) = (q_1(t) \cos(\theta) - 1 \cdot q_1(t) \sin(\theta) - 1 \cdot t)$
196	Plano w <sub>1</sub>	Plano passando por C <sub>1</sub> e paralelo a v <sub>1</sub>	$w_1: z = 0$
197	Texto texto30	ABC	Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).
198	Texto texto31	ABC	De modo geral, sua aplicação deve ser feita colocando-se os dois sólidos com bases em um mesmo plano, paralelo àquele em que estarão as seções de áreas iguais. Assim, usaremos o princípio de Cavalieri para calcular o volume de um prisma.
199	Ponto E <sub>1</sub>		$E_1 = (0.44, 0.63)$
200	Ponto F <sub>1</sub>		$F_1 = (3.01, 1.23, 0)$
201	Ponto H <sub>1</sub>		$H_1 = (-1.71, -2.22, 0)$
208	Segmento aresta201	Segmento [G <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> ] de Prisma u <sub>1</sub>	aresta201 = 1.74
208	Segmento aresta204	Segmento [T <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> ] de Prisma u <sub>1</sub>	aresta204 = 2.64
208	Quadrilátero face95	Polígono F <sub>1</sub> , G <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> , S <sub>1</sub>	face95 = 4.58
208	Segmento aresta203	Segmento [R <sub>1</sub> , T <sub>1</sub> ] de Prisma u <sub>1</sub>	aresta203 = 2.64
208	Quadrilátero face94	Polígono G <sub>1</sub> , E <sub>1</sub> , R <sub>1</sub> , T <sub>1</sub>	face94 = 4.58
208	Triângulo face92	Polígono R <sub>1</sub> , S <sub>1</sub> , T <sub>1</sub>	face92 = 3.01
209	Polígono pol16	Interseção de v <sub>1</sub> , u <sub>1</sub>	pol16 = 3.01
209	Ponto W <sub>1</sub>	Interseção de v <sub>1</sub> , u <sub>1</sub>	$W_1 = (0.44, 0.63, 1.16)$
209	Ponto Z <sub>1</sub>	Interseção de v <sub>1</sub> , u <sub>1</sub>	$Z_1 = (3.01, 1.23, 1.16)$
209	Ponto A <sub>1</sub>	Interseção de v <sub>1</sub> , u <sub>1</sub>	$A_1 = (1.2, 3.15, 1.16)$
209	Segmento h <sub>1</sub>	Segmento [W <sub>1</sub> , Z <sub>1</sub> ] de Polígono pol16	$h_1 = 2.64$
209	Segmento i <sub>1</sub>	Segmento [Z <sub>1</sub> , A <sub>1</sub> ] de Polígono pol16	$i_1 = 2.64$
209	Segmento j <sub>1</sub>	Segmento [A <sub>1</sub> , W <sub>1</sub> ] de Polígono pol16	$j_1 = 2.64$
210	Polígono pol17	Interseção de v <sub>1</sub> , o <sub>1</sub>	pol17 = 3.01
210	Ponto B <sub>1</sub>	Interseção de v <sub>1</sub> , o <sub>1</sub>	$B_1 = (-1.71, -2.22, 1.16)$
210	Ponto C <sub>1</sub>	Interseção de v <sub>1</sub> , o <sub>1</sub>	$C_1 = (-2.68, -0.72, 1.16)$
210	Ponto D <sub>1</sub>	Interseção de v <sub>1</sub> , o <sub>1</sub>	$D_1 = (-1.07, 0.15, 1.16)$
210	Ponto E <sub>1</sub>	Interseção de v <sub>1</sub> , o <sub>1</sub>	$E_1 = (-0.21, -1.35, 1.16)$
210	Segmento k <sub>1</sub>	Segmento [B <sub>1</sub> , C <sub>1</sub> ] de Polígono pol17	$k_1 = 1.74$
210	Segmento l <sub>1</sub>	Segmento [C <sub>1</sub> , D <sub>1</sub> ] de Polígono pol17	$l_1 = 1.74$
210	Segmento m <sub>1</sub>	Segmento [D <sub>1</sub> , E <sub>1</sub> ] de Polígono pol17	$m_1 = 1.74$
210	Segmento n <sub>1</sub>	Segmento [E <sub>1</sub> , B <sub>1</sub> ] de Polígono pol17	$n_1 = 1.74$
211	Texto Textoface92	ABC	Área de '' + (Nome[R <sub>1</sub> ]) + Nome[T <sub>1</sub> ] + '' = '' + face92
212	Ponto Pontoface92	ABC	Ponto em face92
213	Texto texto33	ABC	B
214	Texto texto34	ABC	P <sub>2</sub>
215	Texto texto34	ABC	P <sub>1</sub>
216	Texto texto35	ABC	B
217	Texto texto36	ABC	B
218	Texto texto32	ABC	Área da base (SA <sub>S</sub> ) Como a base de um prisma é um polígono, a área da base de um prisma é a área de um polígono. Área lateral (SA <sub>L</sub> ) Como a superfície lateral de um prisma é a reunião de suas faces laterais, então a área lateral de um prisma é a soma das áreas das faces laterais. Área total (SA <sub>T</sub> ) Como a superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases, então a área total de um prisma é dada por: $SA = A + 2A_S$ Volume (SV <sub>S</sub> ) $SA = A + 2A_S$



284	Segmento aresta343		Segmento $[J_{13}, H_{13}]$ de Planificação $n_i$	aresta343 indefinido			
284	Quadrilátero face135		Polígono $H_{13}, L_{13}, K_{13}, J_{13}$	face135 indefinido			
285	Número $o_3$	$o_3 = 0$					Planificar!!
288	Planificação $d_5$		Planificação $[o_1, o_2]$	$d_5 = 39.85$			
289	Ponto $A_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$A_{13} = (0.92, -2.1, 0)$			
289	Ponto $B_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$B_{13} = (1.95, -1.33, 0)$			
289	Ponto $C_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$C_{13} = (1.54, -0.11, 0)$			
289	Ponto $D_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$D_{13} = (0.25, -0.12, 0)$			
289	Ponto $F_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$F_{13} = (-0.13, -1.36, 0)$			
289	Ponto $J_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$J_{13} = (0.37, -0.73, 5.15)$			
289	Ponto $K_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$K_{13} = (1.4, 0.04, 5.15)$			
289	Ponto $L_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$L_{13} = (1.4, 0.04, 5.15)$			
289	Ponto $M_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$M_{13} = (0.99, 1.28, 5.15)$			
289	Ponto $N_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$N_{13} = (0.99, 1.28, 5.15)$			
289	Ponto $O_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$O_{13} = (-0.3, 1.24, 5.15)$			
289	Ponto $P_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$P_{13} = (-0.3, 1.24, 5.15)$			
289	Ponto $Q_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$Q_{13} = (-0.59, 0.01, 5.15)$			
289	Ponto $R_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$R_{13} = (-0.59, 0.01, 5.15)$			
289	Ponto $S_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$S_{13} = (0.37, -0.73, 5.15)$			
289	Ponto $B_{14}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$B_{14} = (0.99, 1.28, 5.15)$			
289	Ponto $C_{14}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$C_{14} = (-0.3, 1.24, 5.15)$			
289	Ponto $D_{14}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$D_{14} = (-0.59, 0.01, 5.15)$			
289	Segmento aresta302		Segmento $[A_{13}, B_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta302 = 1.29			
289	Segmento aresta306		Segmento $[B_{13}, C_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta306 = 1.29			
289	Segmento aresta309		Segmento $[C_{13}, D_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta309 = 1.29			
289	Segmento aresta312		Segmento $[D_{13}, F_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta312 = 1.29			
289	Segmento aresta315		Segmento $[F_{13}, A_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta315 = 1.29			
289	Pentágono face133		Polígono $A_{13}, B_{13}, C_{13}, D_{13}, F_{13}$	face133 = 2.87			
289	Segmento aresta307		Segmento $[B_{13}, K_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta307 = 5.36			
289	Segmento aresta328		Segmento $[K_{13}, J_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta328 = 1.29			
289	Segmento aresta304		Segmento $[J_{13}, A_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta304 = 5.36			
289	Quadrilátero face125		Polígono $A_{13}, B_{13}, K_{13}, J_{13}$	face125 = 6.9			
289	Segmento aresta310		Segmento $[C_{13}, M_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta310 = 5.36			
289	Segmento aresta329		Segmento $[M_{13}, L_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta329 = 1.29			
289	Segmento aresta308		Segmento $[L_{13}, B_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta308 = 5.36			
289	Quadrilátero face127		Polígono $B_{13}, C_{13}, M_{13}, L_{13}$	face127 = 6.66			
289	Segmento aresta313		Segmento $[D_{13}, O_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta313 = 5.36			
289	Segmento aresta330		Segmento $[O_{13}, N_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta330 = 1.29			
289	Segmento aresta311		Segmento $[N_{13}, C_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta311 = 5.36			
289	Quadrilátero face128		Polígono $C_{13}, D_{13}, O_{13}, N_{13}$	face128 = 6.88			
289	Segmento aresta316		Segmento $[F_{13}, Q_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta316 = 5.36			
289	Segmento aresta331		Segmento $[Q_{13}, P_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta331 = 1.29			
289	Segmento aresta314		Segmento $[P_{13}, D_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta314 = 5.36			
289	Pentágono face134		Polígono $J_{13}, K_{13}, B_{13}, C_{13}, D_{13}$	face134 = 2.87			
289	Ponto $G_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$G_{13}$ indefinido			
289	Ponto $H_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$H_{13}$ indefinido			
289	Ponto $I_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$I_{13}$ indefinido			
289	Ponto $\zeta_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$\zeta_{13}$ indefinido			
289	Ponto $\epsilon_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$\epsilon_{13}$ indefinido			
289	Ponto $\eta_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$\eta_{13}$ indefinido			
289	Ponto $\theta_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$\theta_{13}$ indefinido			
289	Ponto $\mu_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$\mu_{13}$ indefinido			
289	Segmento aresta339		Segmento $[E_{13}, F_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta339 indefinido			
289	Segmento aresta340		Segmento $[F_{13}, G_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta340 indefinido			
289	Segmento aresta327		Segmento $[G_{13}, M_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta327 indefinido			
289	Segmento aresta346		Segmento $[M_{13}, J_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta346 indefinido			
289	Ponto $T_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$T_{13}$ indefinido			
289	Ponto $U_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$U_{13}$ indefinido			
289	Ponto $V_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$V_{13}$ indefinido			
289	Ponto $W_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$W_{13}$ indefinido			
289	Ponto $X_{13}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$X_{13}$ indefinido			
289	Ponto $A_{14}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$A_{14}$ indefinido			
289	Ponto $N_{14}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$N_{14}$ indefinido			
289	Ponto $O_{14}$		Planificação $[o_1, o_2]$	$O_{14}$ indefinido			
289	Segmento aresta318		Segmento $[O_{13}, H_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta318 indefinido			
289	Segmento aresta322		Segmento $[H_{13}, U_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta322 indefinido			
289	Segmento aresta333		Segmento $[U_{13}, T_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta333 indefinido			
289	Segmento aresta320		Segmento $[T_{13}, G_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta320 indefinido			
289	Quadrilátero face131		Polígono $G_{13}, H_{13}, U_{13}, T_{13}$	face131 indefinido			
289	Segmento aresta321		Segmento $[H_{13}, I_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta321 indefinido			
289	Segmento aresta324		Segmento $[I_{13}, W_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta324 indefinido			
289	Segmento aresta334		Segmento $[W_{13}, V_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta334 indefinido			
289	Segmento aresta323		Segmento $[V_{13}, H_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta323 indefinido			
289	Quadrilátero face132		Polígono $H_{13}, I_{13}, W_{13}, V_{13}$	face132 indefinido			
289	Segmento aresta303		Segmento $[I_{13}, L_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta303 indefinido			
289	Segmento aresta305		Segmento $[L_{13}, A_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta305 indefinido			
289	Segmento aresta335		Segmento $[A_{13}, Z_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta335 indefinido			
289	Segmento aresta325		Segmento $[Z_{13}, I_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta325 indefinido			
289	Quadrilátero face126		Polígono $I_{13}, L_{13}, A_{13}, Z_{13}$	face126 indefinido			
289	Segmento aresta347		Segmento $[L_{13}, A_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta347 indefinido			
289	Segmento aresta350		Segmento $[A_{13}, O_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta350 indefinido			
289	Segmento aresta349		Segmento $[O_{13}, N_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta349 indefinido			
289	Segmento aresta348		Segmento $[N_{13}, L_{13}]$ de Planificação $d_5$	aresta348 indefinido			
289	Quadrilátero face136		Polígono $L_{13}, A_{13}, O_{13}, N_{13}$	face136 indefinido			

criado com o GeoGebra

Sendo assim os protocolos acima nos dá a ideia dos conjuntos de objetos que foram construídos em cada *applet* para apresentar o conteúdo e as construções geométricas dinâmicas para elucidar interações dinâmicas.