

# TÓPICOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES: EQUIVALÊNCIA

Wagner Rohr Garcez

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2013

Trabalho de conclusão de curso do Profmat

# TÓPICOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES: EQUIVALÊNCIA

Discente: Wagner Rohr Garcez

Orientador: Marcelo Viana

Co-orientadora: Letícia Rangel

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática.

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2013

## Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus. A Ele seja toda a glória.

*“Ao Rei eterno, imortal e invisível o único Deus - a Ele sejam dadas a honra e a glória,  
para todo o sempre!”*

1Timóteo 1:17

Agradeço à minha esposa Tatiane, por seu amor e companheirismo.

*“Como um lírio entre os espinhos, assim é a minha amada entre as outras mulheres.”*

Cantares 2:2

Agradeço à minha filha Camile, pela alegria que me dá a cada dia.

*“Eis que os filhos são herança do Senhor...”*

Salmos 127:3a

Agradeço aos meus orientadores, Marcelo Viana e Letícia Rangel, pelo esforço e dedicação na orientação deste trabalho.

*“Os ensinamentos das pessoas sábias são uma fonte de vida.”*

Provérbios 13:14a

Agradeço aos amigos Michael e Sandro, ao grupo de professores do Projeto Fundão, aos professores e colegas do Profmat e a todos que direta ou indiretamente tornaram-se cooperadores na realização deste trabalho.

*“E que a graça do Senhor Jesus esteja com todos.”*

Apocalipse 22:21

# Conteúdo

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>1 Fundamentação Teórica</b>	<b>12</b>
<b>2 O Ensino de Frações</b>	<b>19</b>
2.1 A Multiplicidade de interpretações das frações . . . . .	21
2.1.1 Medida . . . . .	23
2.1.2 Relação parte/todo . . . . .	23
2.1.3 Razão entre duas partes de um mesmo todo . . . . .	23
2.1.4 Quociente entre dois números inteiros . . . . .	24
2.1.5 Operador partitivo multiplicativo . . . . .	24
2.2 Concepção de unidade . . . . .	24
2.3 O Uso de regras e de algoritmos . . . . .	25
<b>3 Considerações Teóricas:</b>	
<b>O que são frações equivalentes?</b>	<b>28</b>
<b>4 O Ensino de Frações Equivalentes nos Livros Didáticos</b>	<b>32</b>
<b>5 Atividades para Ensinar Frações Equivalentes</b>	<b>39</b>
5.1 Atividade: Dobraduras . . . . .	41

5.2	Atividade: Equivalência nas malhas . . . . .	43
5.3	Atividade: Bandeiras . . . . .	45
5.4	Atividade: Multiplicando e Dividindo . . . . .	46
5.5	Atividade: A planta do escritório . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Aplicação das Atividades</b>	<b>54</b>
	<b>Conclusão</b>	<b>62</b>
	<b>Anexos</b>	<b>65</b>
	Atividade: Dobraduras . . . . .	66
	Atividade: Equivalência nas malhas . . . . .	67
	Atividade: Bandeiras . . . . .	68
	Atividade: Multiplicando e dividindo . . . . .	69
	Atividade: A planta do escritório . . . . .	70
	<b>Bibliografia</b>	<b>75</b>

# Introdução

O foco do presente estudo é o ensino de frações, tema fundamental dado a sua importância na concepção dos números racionais. É um assunto de extrema relevância na formação do cidadão, devido ao seu caráter elementar, constando nos currículos escolares desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, permeando toda a matemática da educação básica, em conteúdos como razão, proporção, probabilidade entre outros.

De fato, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, um dos objetivos do ensino da matemática para o segundo ciclo do Ensino Fundamental (atuais 4<sup>o</sup> e 5<sup>o</sup> anos) é:

*construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social (MEC [1], 2001, p. 80).*

Sendo assim, a aprendizagem do tema se torna imprescindível, não só para a matemática da escola básica, mas para o desenvolvimento intelectual do estudante, pois segundo BEHR et al. ([2], 1983, p. 91):

*Os conceitos associados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas.*

Reconhecidamente, é um tema considerado difícil de ser ensinado por muitos docentes. Nessas dificuldades, podemos destacar dois aspectos: a complexidade do tema em si, que envolve a passagem da contagem para a medida e o fato de que, na formação acadêmica do professor, os números racionais são tratados de forma abstrata, totalmente diferente do contexto da Educação Básica. Segundo MOREIRA ([3], 2004, p. 94), em seu trabalho sobre a abordagem dos números racionais na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG):

*Do ponto de vista da preparação do futuro professor para o trabalho pedagógico de construção dos racionais positivos nas salas de aula da escola, a abordagem que se desenvolve na licenciatura pode ser, também, submetida a fortes questionamentos. Ao longo de todo o processo de formação na licenciatura, o conjunto dos números racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da*

*matemática escolar.*

Ensinar frações envolve diversos desafios. Um deles certamente é o conceito de medida. No âmbito do ensino dos números naturais (conjunto a que os estudantes estão familiarizados), ou seja, em relação à contagem, a identificação da unidade não oferece um desafio maior, com forte referência intuitiva e concreta.

*O problema da contagem consiste em controlar a quantidade de um conjunto finito de objetos. Uma primeira estratégia para tratar este problema é estabelecer uma correspondência um a um com um conjunto de referência. [...] Um número natural é um rótulo dado a todos os conjuntos de objetos que podem ser postos em correspondência um a um entre si. [...] Desta forma, o conceito matemático de número natural é uma abstração que emerge da contagem por meio de correspondências um a um. O problema da medida consiste em comparar o tamanho de uma grandeza com o de uma unidade, isto é, uma grandeza  $u$  de referência, de mesma espécie da grandeza a ser medida  $a$ . Neste sentido, medir é verificar quantos vezes a unidade “cabe” na grandeza a ser medida. [...] No caso particular de grandezas comensuráveis, o problema da medida pode ser resolvido por contagem [...]. O valor da medida pode [...] ser representado por uma comparação, ou razão de números naturais. Desta forma, o conceito matemático de número racional emerge do problema concreto da medida, no caso particular de grandezas comensuráveis.(GIRALDO et al. [4], 2012, p.13)*

Outro desafio para o ensino e a aprendizagem de números racionais se apresenta na própria escrita das frações. Não é tão trivial a associação de uma quantidade a dois números (inteiros) “separados” por um pequeno traço e escritos na vertical.



*a introdução de números fracionários nas séries iniciais pelo procedimento da dupla contagem das partes, em superfícies totalmente divididas em partes congruentes, conduz a criança a entender os fracionários, como se fossem dois números naturais: um que se coloca em cima e outro abaixo de um traço.*(SILVA [5],2005, p.15)

Tentando facilitar o entendimento por parte dos alunos, muitos professores limitam o ensino dos racionais à memorização de regras, alcançando justamente o contrário do pretendido, comprometendo a compreensão do assunto. Ao tratar o tópico de comparação de frações, por exemplo, muitos professores e livros didáticos tratam o assunto apenas como uma sequência mecânica, reduzindo as frações envolvidas a um denominador comum, sem explicitar que, para tal procedimento, está sendo utilizado o conceito de frações equivalentes. Por exemplo, para se comparar  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{4}$ , primeiro se reduz a um denominador comum:

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

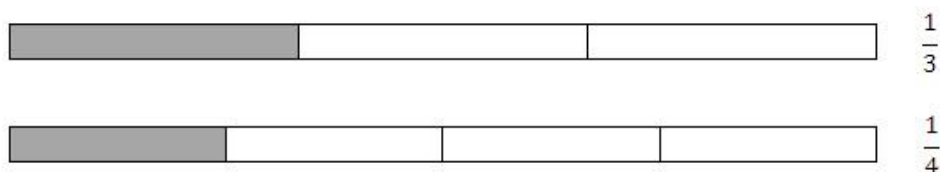
(multiplica-se numerador e denominador por quatro, pois este é o denominador da outra fração) e, de maneira análoga,

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}.$$

Como o 4 é maior que 3, conclui-se que  $\frac{4}{12}$  é maior que  $\frac{3}{12}$ , ou seja,  $\frac{1}{3}$  é maior que  $\frac{1}{4}$ .

Neste caso mais simples, poderíamos comparar a quantidade de partes em que a unidade foi dividida. Comparando a terça parte com a quarta parte, é possível perceber que  $\frac{1}{3}$  é

maior que  $\frac{1}{4}$ , pois quanto mais dividirmos a unidade, menor será o tamanho de cada parte, conforme pode ser visualizado na figura a seguir.



Ao optar pelo ensino por meio de regras, o professor faz o aluno pular várias etapas, como a experimentação, a manipulação de materiais concretos, a formulação e a verificação de conjecturas num ambiente em que o professor e aluno passam a discutir sobre o assunto abordado, que são importantes e conduzem à compreensão do conceito. Segundo MONTEIRO & COSTA ([6], 1996, p.62):

*A utilização prematura das regras no estudo das frações e decimais, tem sido detectado como outro fator que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática.*

O grupo composto pelos professores Michael Cristian Soares dos Santos, Sandro da Costa Loyola e Wagner Rohr Garcez, desenvolveu em parceria e colaboração a reflexão sobre os Números Racionais e o ensino do assunto no ensino fundamental. Assim, os trabalhos de conclusão de curso desses professores têm interseção não vazia. Nos três trabalhos, o Capítulo 1 trata dos números racionais e o Capítulo 2, do ensino de frações na escola básica, compondo juntos a parte comum. Como temas de atenção específica de cada autor foram eleitos os tópicos **Unidade, Equivalência e Divisão de Frações**, que mereceram investigação de cada membro para compor três trabalhos individuais. Os

critérios adotados para a escolha dos temas foram a relevância para a fundamentação do assunto e a dificuldade do ensino. Certamente, a Unidade e a Equivalência são elementares para a compreensão dos conceitos de fração e de número racional. E o conceito de divisão é um dos que mais oferece dificuldade para o ensino e a aprendizagem do tema no ensino básico.

Com objetivo de investigar o ensino das Frações, foram elaboradas seqüências didáticas contendo orientações ao professor que se interessar em sua aplicação. Estas atividades foram aplicadas em turmas do ensino fundamental com o objetivo de avaliar o seu desenvolvimento como recurso didático para o ensino do tema.

Certamente, não é objetivo deste trabalho propor um caminho conclusivo para o ensino dos tópicos em atenção, mas sim propor um debate sobre o tema, buscando contribuir para a reflexão sobre esse conteúdo e o seu ensino.

# Capítulo 1

## Fundamentação Teórica

No ensino básico, a ideia de número aparece, inicialmente, como era usada desde a pré-história, a partir da contagem. Mesmo antes da representação simbólica dos números, o pastor já contava suas ovelhas comparando com um punhado de pedras, para conferir se não havia perdido alguma. Dessa maneira, estabelecia a noção concreta da contagem que funda e sustenta o conceito de número natural.

O conceito de número natural é uma abstração da ideia e da ação concreta de contagem. O número é uma propriedade abstrata, uma ideia, não existe concretamente e sim, representa uma classe de elementos com uma mesma característica.

*“O número 5, por exemplo, é uma propriedade (abstrata) que têm em comum cinco cadeiras, cinco pessoas, cinco quadrados, ou qualquer conjunto com cinco objetos; que independe das características particulares e da organização mútua desses objetos. Entretanto, o número 5 não é nem as cinco cadeiras, nem as cinco pessoas nem os cinco quadrados. Não podemos ver, nem sentir, nem*

*ouvir o número 5 no mundo concreto, apenas abstraí-lo como uma propriedade abstrata da qual certos conjuntos compartilham.” (GIRALDO, [7],p.2)*

Com o passar do tempo, surgiu a necessidade de novos números, decorrente do aparecimento de problemas associados a medição. Para medir, comparamos uma grandeza a uma unidade de mesma espécie estabelecida como referência. Por exemplo, dado um segmento  $AB$ , para determinarmos a medida deste segmento, é preciso determinar quantas vezes um segmento  $u$ , de mesma espécie, que por definição tem medida igual a 1, cabe dentro de  $AB$ .

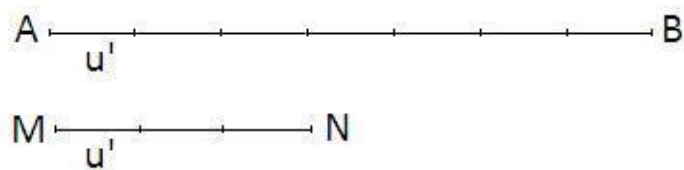
Quando o segmento  $AB$  pode ser subdividido em uma quantidade inteira  $n$  de segmentos congruentes a  $u$ , a medida de  $AB$  em relação a  $u$  é igual ao número  $n \in \mathbb{N}$ .

Considerando o segmento  $AB$  e  $u = MN$ , conforme a figura a seguir, temos que  $AB = 3u$ .



Quando o segmento  $AB$  não pode ser subdividido em partes congruentes a  $u$  então verificamos se existe  $u'$  tal que  $AB$  e  $u$  possam ser divididos em partes congruentes a  $u'$ . Desta forma,  $AB = n.u'$ , como  $u = k.u'$  então  $AB = \frac{n}{k}u$ . Neste caso, os números naturais não são suficientes para este registro.

Neste caso, temos  $AB = 7u'$  e  $MN = 3u'$ , conforme a figura a seguir. Então,  $AB = \frac{7}{3}MN$ :



Nos dois exemplos anteriores, dizemos que  $AB$  e  $MN$  são comensuráveis, pois existe uma sub-unidade comum entre eles. No primeiro, a sub-unidade considerada foi  $u$  e no segundo,  $u'$ . Quando isto acontece, a medida do segmento  $AB$  fica determinada por um número racional.

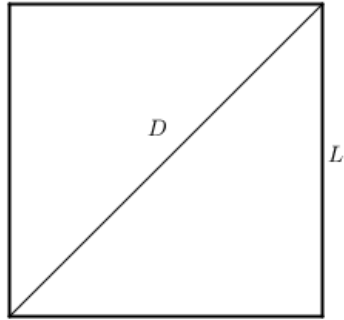
O conjunto dos números racionais pode ser formalizado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \text{ e } b \text{ inteiros e } b \neq 0 \right\}.$$

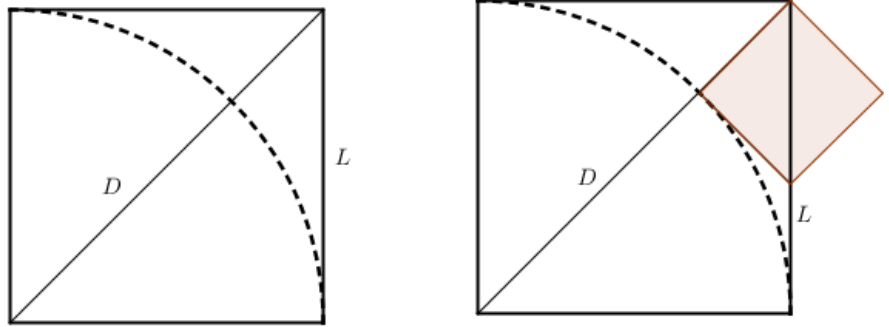
Nem sempre, quando fixamos uma unidade para medir um segmento  $AB$ , é possível determinar uma subdivisão  $u'$  de  $u$ , tal que  $AB$  e  $u$  sejam comensuráveis e possam ser representadas como a razão entre dois números naturais.

Desde a Grécia antiga, já se sabia que a diagonal e o lado de um quadrado são medidas incomensuráveis, isto é, que não podem ser simultaneamente expressos como múltiplos inteiros de nenhuma unidade comum. Surge assim uma nova ideia de números: números irracionais.

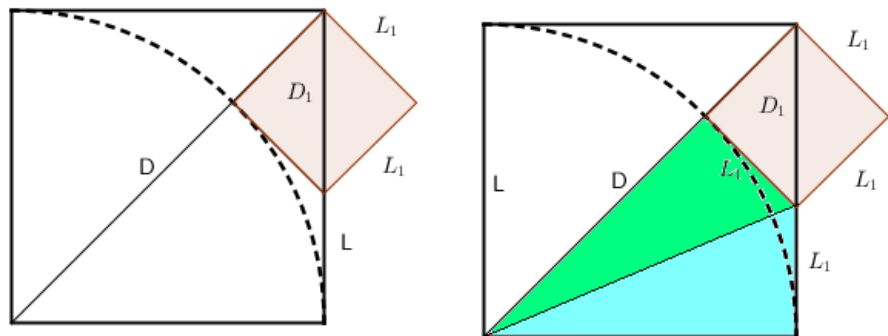
Dado um quadrado de lado  $L$  e a sua diagonal  $D$ , vamos demonstrar que os segmentos  $L$  e  $D$  são incomensuráveis. Supondo por absurdo, que os segmentos  $D$  e  $L$  são comensuráveis, isto é, que exista uma medida  $u$  tal que  $D = nu$  e  $L = mu$ , para  $m$  e  $n$  inteiros positivos.



Com o auxílio de um compasso, vamos marcar na diagonal  $D$ , um segmento congruente a  $L$ , formando um novo quadrado de lado  $D - L$ .

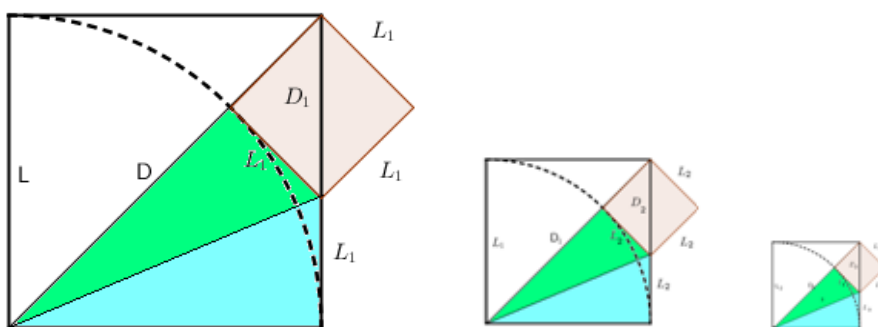


Considere  $L_1 = D - L$ . Como supomos  $D$  e  $L$  comensuráveis, dizemos que  $L_1 = nu - mu$ , então  $L_1 = (n - m)u$ , e, finalmente, chamando  $n - m$  de  $m_1$ , temos  $L_1 = m_1 u$ , onde  $m_1$  é um número inteiro positivo.



A diagonal  $D_1$  do novo quadrado é igual a  $D_1 = L - L_1$ , devido à congruência dos triângulos em destaque. Então  $D_1 = mu - m_1u$ , e  $D_1 = n_1u$ , onde  $n_1 = m - m_1$  é um número inteiro positivo.

Repetindo este processo infinitamente, obtemos uma sequência infinita de quadrados, cujos lados  $L_i, i = 1, 2, 3, \dots$ , tendem a zero, isto é,  $L_i \rightarrow 0$ .



Como todos os lados podem ser expressos na forma  $L_i = m_iu$ , com  $m_i$ , inteiro positivo, neste caso, para  $i$  suficientemente grande,  $m_i$  seria menor que  $u$ , contradizendo o fato de ser seu múltiplo inteiro, logo, concluímos que  $D$  e  $L$  são incomensuráveis.

Essa demonstração, fundamentalmente geométrica, certamente não é a mais adequada para a abordagem do assunto no ensino fundamental, uma vez que envolve a noção de limite. No entanto, a verificação de que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não é um número racional é possível nesta etapa do ensino a partir de argumentos algébricos e aritméticos.

Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado é  $\sqrt{2}$ . De fato, considerando um quadrado de lado  $l$  e diagonal  $d$ , temos:



$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$

Demonstraremos que  $\sqrt{2}$  não pode ser escrito como o quociente de dois números inteiros. Para isso, suponhamos por absurdo que existem  $m$  e  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , tais que  $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$ , em que  $m$  e  $n$  são primos entre si, isto é,  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Dessa forma, teríamos:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

Como  $m^2$  é par,  $m$  também é par, logo, podemos escrevê-lo como  $m = 2p$ , em que  $p \in \mathbb{Z}^*$ . Fazendo a substituição:

$$(2p)^2 = 2n^2$$

$$4p^2 = 2n^2$$

$$2p^2 = n^2$$

Como  $n^2$  é par,  $n$  também é par, logo, podemos escrevê-lo como  $n = 2q$ , em que  $q \in \mathbb{Z}^*$ .

Dessa forma, concluímos que  $m$  e  $n$  são números pares, chegando a um absurdo, pois supomos que  $m$  e  $n$  são primos entre si. Não é possível escrever a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado como um número racional. Temos que  $m$  e  $n$  são segmentos incomensuráveis .

## Capítulo 2

# O Ensino de Frações

É consenso entre os professores que a aprendizagem de frações representa uma grande dificuldade para o aluno. Na sala de aula, mesmo após o tema já ter sido apresentado de maneira exaustiva, ainda é possível observar as mais variadas dúvidas, inclusive em anos mais avançados da educação básica, etapa em que se supõe que o conceito já está compreendido. Tal fator também revela a dificuldade que os professores encontram ao abordar o tema. Segundo FAVERO & NEVES ([8], 2012, p. 36):

*Os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de 1980 e 1990: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo [...]*

De fato, este assunto tem levado um grande número de educadores a pesquisarem o tema sem que seja apontado um caminho conclusivo. No entanto, é consenso que realmente este não é um tema cujo aprendizado é simples nem trivial. Outro ponto de concordância é que existem alguns fatores que ressaltam tal dificuldade. Abaixo, fazemos referência a três artigos em que os autores destacam alguns destes obstáculos.

Segundo MONTEIRO e COSTA ([6],1996), são três os fatores relacionados à dificuldade dos alunos em trabalhar com os números racionais, e conseqüentemente às frações: A multiplicidade de significados dos números racionais, a concepção da unidade em vários problemas ou situações envolvendo números racionais e a utilização precoce de regras e algoritmos no estudo dos números racionais e frações.

Segundo LOPES ([9],2008), um grave problema é “a prescrição de regras e macetes para realizar operações” (p. 4). O mesmo autor também aponta para o fato de que “a palavra fração esta relacionada a muitas ideias e constructos” (p. 7). Quando o autor utiliza a palavra constructo, ele faz menção às diferentes intepretações da fração.

MONTEIRO et al.([10],2005) salientam que os significados das frações são dificuldades inerentes ao estudo deste tema e explicam:

*“Analisemos, por exemplo, os diversos significados que uma fracção pode ter dependendo do contexto onde se insere.  $\frac{3}{5}$  pode referir-se a uma parte de um todo,  $\frac{3}{5}$  de um bolo,  $\frac{3}{5}$  da superfície da terra, etc., ou pode representar o quociente entre dois números naturais. Se tivermos 3 pizzas a partilhar por 5 pessoas,  $\frac{3}{5}$  representa o quociente que resulta de dividir 3 por 5 e que é a parte de pizza que cabe a cada um. Por outro lado,  $\frac{3}{5}$  representa também, neste contexto, a razão entre o número de pizzas e o número de pessoas: 3 pizzas para 5 pessoas*

*equivale a 6 pizzas para 10 pessoas. Uma fração pode ainda representar a razão entre duas partes de um mesmo todo: a relação entre o número de raparigas e o número de rapazes num conjunto de 8 jovens numa festa, por exemplo. No caso de querermos saber quanto é  $\frac{3}{5}$  de meio milhão de euros, por exemplo, ou  $\frac{3}{5}$  de meia piza, a fração funciona como um operador aplicado a um conjunto discreto ou contínuo” (p. 47).*

Assim, destacamos dentre as dificuldades para o ensino e a aprendizagem de frações os seguintes pontos:

- a) A multiplicidade de interpretações das frações;
- b) concepção de unidade (reconhecimento da unidade);
- c) a utilização de regras e de algoritmos;

Com certeza, esta lista não se encontra completa, mas acreditamos que os três pontos citados acima destacam de maneira objetiva as questões que nos afligem em relação ao ensino de frações, os quais serão percorridos.

## **2.1 A Multiplicidade de interpretações das frações**

É comum os autores fazerem menção aos múltiplos significados das frações. Em nosso trabalho, optamos tratar como múltiplas interpretações, pois entendemos que uma fração não possui diversos significados, mas interpretações distintas de acordo com o contexto a que estão atreladas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais ([11], 1998, p.66), o ensino de frações, *”deve requerer atenção especial no 3º ciclo (6º e 7º ano), partindo da exploração dos seus significados: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador”*. Os PCN sinalizam que as frações, dependendo do contexto em que se encontram, se apresentam como registro numérico de diversas situações, que precisam ser consideradas pelos professores no momento em que estes se propõem a ensinar.

MOREIRA & FERREIRA ([12] 2008, p.105), dizem que a literatura matemática sobre o ensino de racionais, entre os anos de 1975 e 1995, se destacou por apresentar *“um grande conjunto de trabalhos que partem de uma premissa comum: para que desenvolva uma compreensão efetiva desse sistema numérico, a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros (essas interpretações constituem os chamados subconstrutos da noção de número racional)”*.

Esta lista das diferentes interpretações das frações, chamados por BEHR et al. ([2], 1983), ROMANATTO ([13], 1997) e MOREIRA & FERREIRA ([12], 2008) de subconstrutos, foi constantemente alterada ao longo dos anos. Estes educadores matemáticos, baseados nos estudos realizados por KIEREN ([14], 1980), declaram a existência de cinco subconstrutos básicos: relação parte/todo, razão, quociente, medida e operador, os mesmos citados nos PCN, sendo estes suficientes para esclarecer o sentido de número racional.

Diante de tantas situações envolvendo um único conceito, é inevitável que haja dúvida sobre o que, de fato, é esse conceito. Afinal, o que são frações? Frações representam quantidades/números, e precisam ser compreendidas como tal.

### 2.1.1 Medida

Quando medimos, realizamos uma comparação de uma grandeza com uma unidade de mesma espécie. Por exemplo, quando medimos um comprimento, podemos utilizar como referência o passo, o palmo ou uma unidade pré estabelecida como o metro. Se tomarmos o metro como unidade de medida, podemos dizer que a distância entre determinados dois pontos é de 50 metros de comprimento, isto é, a unidade metro cabe 50 vezes dentro da distância dada.

Generalizando, quando medimos um dado comprimento AB, precisamos tomar como unidade um segmento CD verificando quantas vezes este cabe no comprimento dado, podendo chegar a algo do tipo  $AB = \frac{2}{3} CD$ .

### 2.1.2 Relação parte/todo

Neste caso, a unidade deve ser dividido em partes congruentes em que, na representação fracionária, o denominador representa o total de partes em que a unidade foi dividida e o numerador representa o número de partes consideradas. Podemos utilizar como unidade uma barra de chocolate ou um saco de bola de gudes, que serão divididos em partes iguais. Dessa forma, se um todo for dividido em três partes e uma destas partes for destacada, temos a representação da fração  $\frac{1}{3}$ .

### 2.1.3 Razão entre duas partes de um mesmo todo

Razão é uma relação de comparação entre duas quantidades ou medidas de mesmo tipo. Elas podem expressar comparações entre uma parte de um todo à outra parte do mesmo

todo, como por exemplo, a razão entre o número de meninas e o número de meninos em uma sala de aula.

#### **2.1.4 Quociente entre dois números inteiros**

Nesta situação, um objeto, ou alguns destes, devem ser divididos de maneira igual a um grupo de receptores. Podemos tomar como exemplo três pizzas a serem distribuídas entre duas pessoas em que a quantidade de pizzas é representada no numerador e o número de pessoas no denominador. O quociente representa a relação entre a quantidade de pizzas e o número de crianças, assim como o resultado da divisão das pizzas para as crianças.

#### **2.1.5 Operador partitivo multiplicativo**

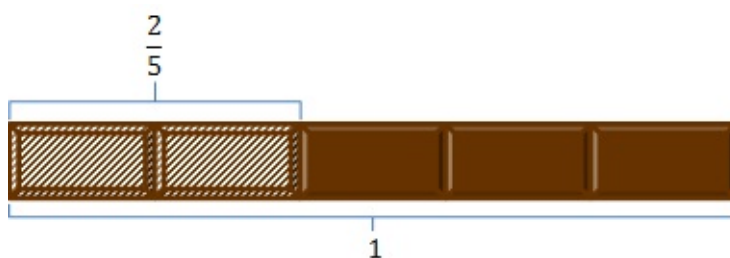
Neste caso, a fração torna-se um multiplicador de uma determinada quantidade, sendo vista como uma sucessão de operações. Por exemplo, se queremos encontrar  $\frac{2}{3}$  de 30, devemos multiplicar  $\frac{2}{3}$  por 30, obtendo 20 como resultado.

### **2.2 Concepção de unidade**

No contexto do ensino de frações na escola básica, a compreensão do conceito de unidade é fundamental e é pré-requisito para o bom entendimento das frações. Para realizar a comparação que determina a medida, faz-se um dupla contagem a partir de uma unidade pertinente, que viabilize a comparação. A contagem a partir desta unidade determina os termos da fração, numerador e denominador. No entanto, observando a medida realizada,



esta unidade não é, de maneira geral, associada ao número 1. Por exemplo, na divisão de uma barra de chocolate em 5 pedaços equivalentes dos quais 2 foram comidos, a fração  $\frac{2}{5}$  identifica a quantidade de chocolate comida. O números 2 e 5 são obtidos por contagem de “pedaços”. Portanto, o pedaço tem o papel de unidade nessa contagem. No entanto, não correspondem, no contexto geral da medida realizada, ao número 1. Nesse caso, o número 1 corresponde à barra de chocolate inteira, ou seja, ao todo.



No caso acima, a quinta parte da barra de chocolate é usada como unidade na comparação entre parte/todo, mas é a barra de chocolate que é associada ao número 1. Para o aluno, identificar a unidade correspondente ao número 1 não é intuitivo, cabendo ao professor orientá-lo explorando este conceito em diversas situações em sala de aula.

## 2.3 O Uso de regras e de algoritmos

Durante o ensino de alguns tópicos da Matemática, muitas vezes, nós professores, tomamos o caminho errado ao apresentarmos a aplicação de algoritmos aos nossos alunos sem que antes estes compreendam o sentido dos passos que estão prestes a tomar. A princípio, mecanizar o procedimento pode parecer o caminho mais prático e rápido, mas nem todo atalho é viável, podendo trazer prejuízo à aprendizagem do aluno.

Quando falamos de algoritmos, estamos nos referindo a passos ordenados que, seguidos sistematicamente, conduzem para a resolução de um problema. Na Matemática, não são poucas as situações em que somos apresentados a eles. Não que sejam errados, mas em muitos casos eles são apresentados antes do momento certo. Como exemplo, podemos citar o algoritmo para a soma ou a subtração de frações, que geralmente é apresentado aos alunos da seguinte maneira:

- a) Calcule o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores das frações a serem somadas e/ou subtraídas.
- b) Divida o MMC pelo denominador de cada fração.
- c) Tome o resultado de cada divisão e multiplique pelo numerador de sua respectiva fração.
- d) Coloque os resultados obtidos como numeradores de uma fração cujo denominador é o MMC
- e) Efetue as operações solicitadas.

Vamos aplicar esse procedimento para calcular, por exemplo,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ .

- a)  $\text{MMC}(2,3) = 6$
- b)  $6 : 2 = 3$  e  $6 : 3 = 2$
- c)  $3 \times 1 = 3$  e  $2 \times 1 = 2$
- d)  $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

$$e) \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

A despeito de sua funcionalidade, casos como a mecanização vista acima podem ser prejudiciais aos alunos. Segundo uma pesquisa realizada por DAMICO ([15] 2007), aproximadamente metade dos alunos avaliados, quando questionados sobre o porquê de se calcular o MMC para resolver uma determinada adição de frações, não souberam responder ou deram respostas erradas ou confusas. MONTEIRO & COSTA ([6] 1996), comentando outra pesquisa semelhante, afirmam que “uma possível explicação para este fato poderá ser que a memorização da regra impeça a interiorização do conceito” (p.62).

A memorização de regras, não obstante a limitação que determina no processo de aprendizagem, acaba ganhando a preferência de alunos e professores, que buscam evitar os desafios e as dificuldades inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem. De igual modo, muitos professores, esquivando-se da árdua tarefa de mostrar o porquê, incentivam a memorização e a aplicação dos algoritmos. Conforme destaca DAMICO ([15] 2007, p.90):

*O objetivo destas observações é ressaltar a ideia de que no processo de ensino o algoritmo seja o resultado final, a síntese da evolução das estratégias pessoais conquistadas a partir da resolução de problemas contextualizados e significativos para os alunos. Além disso, estes algoritmos não podem ficar só como sínteses de procedimentos vinculados a situações mais ou menos concretas, mas devem fazer parte de um repertório de estratégias conquistadas com o objetivo de serem reinvestidas em outras situações.*

Mais uma vez destacamos que a valorização da memorização e da aplicação de regras em detrimento da compreensão do conceito matemático pode ser um forte obstáculo à aprendizagem.

## Capítulo 3

### Considerações Teóricas:

### O que são frações equivalentes?

Tendo como referência COUTINHO ([16], 2005, p.69-72), RIPOLL et al([17], 2010, p. 103-104) e MILIES & COELHO ([18], 1997, p.151-160), vamos compreender o conceito de relação de equivalência e de classe de equivalência antes de abordarmos a equivalência de frações.

Consideremos um determinado conjunto  $X$  em que está definida uma relação que chamaremos de  $R$ . Esta relação será de equivalência quando, para quaisquer que sejam os elementos  $a, b$  e  $c \in X$ , as propriedades a seguir são satisfeitas:

1.  $aRa$ .
2. Se  $aRb$  então  $bRa$ .
3. Se  $aRb$  e  $bRc$  então  $aRc$ .

A primeira propriedade é a reflexiva, a segunda chama-se simétrica e a terceira, transitiva. Uma relação em um conjunto  $X$  é de equivalência quando ela apresenta estas três propriedades, e utilizaremos o símbolo  $\equiv$  para indicá-la.

Logo, definimos uma relação de equivalência em  $X$ , para qualquer  $a, b$  e  $c \in X$ , temos que:

1.  $a \equiv a$
2.  $a \equiv b$  implica  $b \equiv a$
3.  $a \equiv b$  e  $b \equiv c$  implica  $a \equiv c$

Podemos dizer que as relações de equivalência são usadas para classificar os elementos de um conjunto em subconjuntos cujos elementos possuem propriedades comuns. Por exemplo, suponhamos que se tenha uma caixa com diversas bolas de cores variadas. Nesse conjunto de bolas, podemos ter a relação "ter a mesma cor que".

Para o nosso estudo sobre frações, vamos considerar uma relação entre dois elementos  $(a,b)$  e  $(c,d)$  do conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Diremos que  $(a,b) \equiv (c,d)$ , se e somente se  $ad = bc$ . Como exemplo, podemos ver que  $(2,4) \equiv (3,6)$ , pois  $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3$ .

Esta relação no conjunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , é uma relação de equivalência pois ela é reflexiva, simétrica e transitiva. Para provar, considere qualquer  $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{Z}$ .

1. Para todo par  $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ , temos que  $(a,b) \equiv (a,b)$ , pois  $ab = ba$ .
2. Considerando  $(a,b)$  e  $(c,d)$  pares tais que  $(a,b) \equiv (c,d)$ , temos que  $ad = bc$ . Esta igualdade pode ser reescrita como  $cb = da$ , pela propriedade comutativa da multiplicação em  $\mathbb{Z}$ . Dessa forma, temos que  $(c,d) \equiv (a,b)$ .
3. Sejam  $(a,b)$ ,  $(c,d)$  e  $(e,f)$  pares onde  $(a,b) \equiv (c,d)$  e  $(c,d) \equiv (e,f)$ . Temos que  $ad = bc$  e  $cf = de$ . Ao multiplicarmos a primeira igualdade por  $f$  e a segunda por  $b$ , teremos:
 
$$adf = bcf,$$

$$bcf = bde,$$
 sendo assim,  $adf = bde$ .  
 Pela propriedade cancelativa, como  $d \neq 0$ , obtemos  $af = be$ , o que implica que  $(a,b) \equiv (e,f)$ .

Quando uma subdivisão de um conjunto é produzida por uma relação de equivalência, temos, dessa forma, uma classe de equivalência. É importante destacar que qualquer elemento de uma classe de equivalência é um representante de toda a classe, isto é, ao observarmos um elemento da classe, podemos reconstruir a classe inteira.

Vimos que há uma relação de equivalência no conjunto  $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Considerando o par  $(a,b)$  como uma classe de equivalência, vamos representá-lo com o símbolo  $\frac{a}{b}$ , logo,

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x,y) \equiv (a,b)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid xb = ya\}$$

O símbolo  $\frac{a}{b}$  chama-se fração, em que  $a$  é o numerador e  $b$  é o denominador. A classe deste par é a mesma que a de outro par  $(c,d)$ , se e somente se, estes pares são equivalentes. Dessa forma, como visto anteriormente, temos que os pares  $(a,b)$  e  $(c,d)$ , representados na forma  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  respectivamente, são iguais se e somente se  $ad = bc$ .

Como  $(1,2) \equiv (3,6)$ ,  $(1,2) \equiv (4,8)$  e  $(1,2) \equiv (5,10)$ , temos que  $(3,6)$ ,  $(4,8)$  e  $(5,10)$  são elementos que pertencem à classe do par  $(1,2)$ , logo, podemos dizer que  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{6}$ ,  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{5}{10}$  são equivalentes, isto é, são representações do mesmo número racional. Como o sinal de igualdade também caracteriza uma relação de equivalência (reflexividade, simetria e transitividade), podemos dizer que  $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$ .

## Capítulo 4

# O Ensino de Frações Equivalentes nos Livros Didáticos

Uma das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o segundo ciclo, atuais 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, é que o ensino de Matemática deve ter como objetivo levar o aluno a “*construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir dos seus diferentes usos no contexto social*” ([19],1997, p.55), observando alguns conteúdos, que dentre os quais destacamos “*a identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas*” ([19],1997, p.56-59).

Nos PCN voltados para o terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental, isto é, do 6º ao 9º ano, o conceito de frações equivalentes e a construção de procedimentos para construir tais frações são vistas como “*fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números*” ([11],1998, p.67).



Dessa maneira, dada a importância do assunto, o professor deve preparar suas aulas de modo que seja possível a construção desse conhecimento de maneira eficiente visando alcançar tais objetivos. É comum que o professor utilize o livro didático como um dos principais recursos para o preparo das aulas ao longo do período letivo, de modo a facilitar o planejamento e o trabalho. Infelizmente, nem todos os livros didáticos podem ser considerados como fontes confiáveis, tratando este tópico de maneira impecável, o que pode acarretar na apresentação do conceito de modo equivocado.

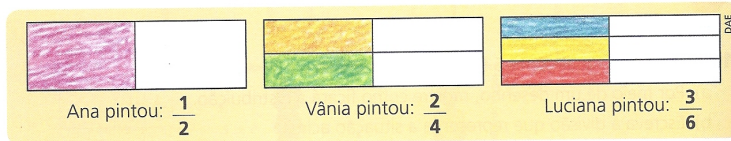
Atualmente, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia Nacional do Programa do Livro Didático (PNLD), em que se encontram resenhas de coleções consideradas aprovadas para a utilização nas escolas, sendo recomendado ao professor que, ao escolher uma coleção para uso, o faça baseado neste guia.

Para este capítulo, foi feita uma análise quanto ao ensino de frações equivalentes de três livros aprovados pelo PNLD: BORDEAUX et al ([20],2011), CENTURIÓN et al ([21], 2008) e DANTE ([22],2009). Ao término, foi possível concluir que a abordagem do tema é feita de modo semelhante em alguns pontos, mas nem sempre de maneira satisfatória. Constatamos a necessidade de maior quantidade de exercícios que estimulem a compreensão do conceito de equivalência ao invés da utilização de regras de maneira imediata, logo após os exercícios introdutórios.

Nos três livros, a abordagem introdutória é feita, em geral, através de representações gráficas, conforme destacamos no exemplo a seguir, extraído do livro de BORDEAUX et al ([20] 2011, p.142). Os demais livros utilizam exemplos semelhantes, procurando situações em que uma parte do todo, normalmente a metade, é representada de maneiras diferentes como  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$  e  $\frac{4}{8}$ .

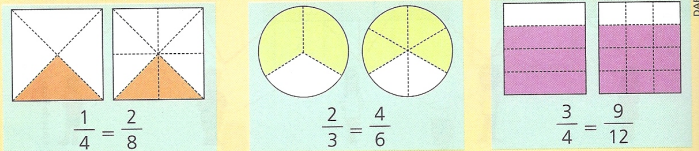
## Frações equivalentes

Dona Vanda distribuiu três folhas do mesmo tamanho, uma para cada aluna, e pediu que elas pintassem metade da folha. Veja as partes que cada criança pintou e responda:



Quem pintou mais? Justifique. *Ninguém. Todas pintaram a metade da folha.*

As frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$  e  $\frac{3}{6}$  representam a mesma parte da folha. Por isso são chamadas **frações equivalentes**. Veja outros exemplos de frações equivalentes:



Utilizamos o sinal = para indicar a equivalência, ou seja, frações que representam a mesma quantidade.

Figura 4.1: BORDEAUX et al[20], 2011, p.142

Geralmente, após esta introdução, é comum seguir-se a apresentação de um algoritmo, em que, ao se multiplicar ou dividir os termos da fração por um mesmo número, diferente de zero, é encontrada uma fração equivalente à inicial.

## UMA PROPRIEDADE IMPORTANTE DAS FRAÇÕES EQUIVALENTES

Observe o que acontece com as frações equivalentes analisando estes exemplos já vistos:

$$\frac{2}{4} \begin{matrix} \times 2 \\ \times 2 \end{matrix} = \frac{4}{8} \quad \frac{5}{10} \begin{matrix} : 5 \\ : 5 \end{matrix} = \frac{1}{2} \quad \frac{2}{10} \begin{matrix} : 2 \times 3 \\ : 2 \times 3 \end{matrix} = \frac{3}{15} \quad \frac{1}{2} \begin{matrix} \times 2 \\ \times 2 \end{matrix} = \frac{2}{4} \begin{matrix} : 2 \times 3 \\ : 2 \times 3 \end{matrix} = \frac{3}{6}$$

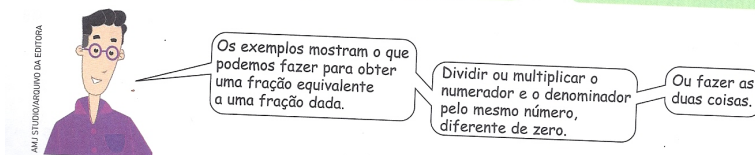
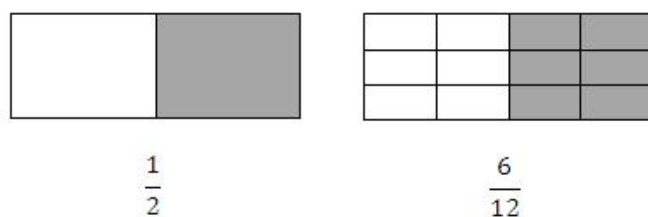


Figura 4.2: DANTE[22], 2009, p.164

Como DANTE ([22] 2009), CENTURIÓN et al ([21], 2008) também opta de imediato por apresentar e aplicar a regra de que, sejam duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$ , temos que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se e só se existe  $k \in \mathbb{Z}$ , tal que  $c = ak$  e  $d = bk$ , explorando-a em seguida nos exercícios de fixação, em detrimento da abordagem do conceito em outros contextos e situações. Destacamos que todos os três livros analisados a apresentam, mas como o conceito de número inteiro

ainda não foi abordado para o ano do qual a publicação é destinada, temos que neles  $k \in \mathbb{N}$ .

De acordo com WALLE ([23] 2009, p.338), uma maneira de ajudar os alunos a construir uma compreensão de frações equivalentes é “fazer com que usem modelos para encontrar diferentes nomes para uma fração”. Quando o autor faz menção a “diferentes nomes”, ele refere-se ao fato de que uma mesma fração pode ter representações diferentes, como por exemplo, a fração  $\frac{1}{2}$  que também pode ser escrita como  $\frac{6}{12}$ .

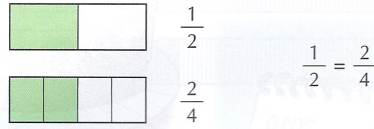


Vale fazer uma observação neste ponto, pois embora  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{6}{12}$  representem o mesmo número, dividir um bolo em duas partes e pegar um pedaço não é o mesmo que dividir o mesmo bolo em doze pedaços e pegar seis partes iguais. O que é igual é a quantidade de bolo servida, o que reflete que duas frações são equivalentes quando expressam a mesma quantidade. Esta noção de relação de equivalência não é trivial para o aluno

O que observamos é que nem sempre diferentes modelos são utilizados, restringindo-se, na maior parte das vezes, a exemplos semelhantes abordados na introdução, sobre algo a ser dividido de maneiras diferentes, tendo como resultado frações equivalentes, como no exemplo de CENTURIÓN et al ([21] 2008, p.140).

Com base nisso, é importante, antes de estabelecer qualquer tipo de regra, explorar através de variadas atividades a construção do conceito. Alguns autores, como SANTOS & REZENDE, ([24] (1996, p.15) sugerem que as noções de frações podem ser descobertas pelos alunos enquanto estes experimentam novas situações e lidam com materiais concretos.

Observe que  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$  representam a mesma porção do retângulo.



Dizemos então que  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$  são **frações equivalentes** (*equi* significa *igual*; *equivalente* quer dizer *de igual valor*).

Duas ou mais frações são equivalentes quando representam a mesma porção do todo.

Por exemplo:

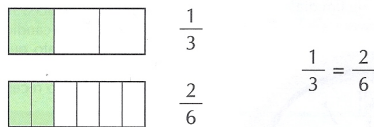


Figura 4.3: CENTURIÓN et al[21] 2008, p.140

De fato, a exploração de materiais concretos e manipuláveis como motivação para desenvolver o conceito de frações é uma importante ferramenta, cabendo ao professor a tarefa de melhor utilizá-los em aula, mas é preciso ficar atento para um detalhe importante, pois segundo os PCN's (2007) “... *elas precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade matemática.*”(pág.19).

Um exemplo positivo que destacamos a seguir foi extraído de BORDEAUX et al ([20] 2011, p.143 e 144). Nele, antes da apresentação do algoritmo, são propostas atividades de representação gráfica e um jogo intitulado “Jogo das partes”.

Este jogo é composto de dois cartões brancos representando um inteiro cada um, quatro cartões amarelos representando  $\frac{1}{2}$  do cartão branco cada um, oito cartões verdes representando cada um a fração  $\frac{1}{4}$  do cartão branco e dezesseis cartões vermelhos representando  $\frac{1}{8}$  do cartão branco cada um. Um modelo dos cartões coloridos que devem ser recortados para formar as peças do jogo encontra-se a seguir.

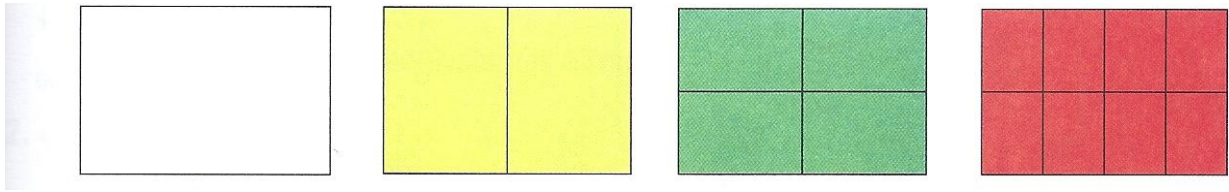


Figura 4.4: modelo do cartão do jogo das partes extraído de [20], 2011, p.143

Utilizando um dado montado com as frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{2}{8}$  e  $\frac{4}{8}$  em suas faces e os cartões empilhados de acordo com a fração que representam, o jogador deve lançar o dado. De acordo com a fração que o dado indicar, o aluno deve pegar um ou mais cartões, podendo realizar trocas de peças equivalentes com um outro jogador ou com os outros cartões que se encontram na mesa. O vencedor é aquele que conseguir formar três inteiros.

Uma carência que observamos nas três publicações foi a falta da apresentação do algoritmo que diz que, dados  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , com  $b$  e  $d \neq 0$ , as frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são equivalentes se e só se  $ad = bc$ , o que é fundamental para a compreensão do conceito de equivalência de frações.

Reconhecemos que os livros didáticos facilitam o trabalho para o professor, apresentando o conteúdo de forma organizada além de uma série de exercícios. Ainda assim, estimulamos os professores a não se limitarem ao ensino do tema baseado apenas no livro adotado, pois apesar do Ministério da Educação (MEC) ter estabelecido rigorosos critérios para que um livro seja aprovado, ainda existem algumas limitações na forma de abordagem de alguns temas.

Com o objetivo de contribuir para a reflexão nesse sentido, no próximo capítulo, apresentaremos algumas atividades que funcionam como material complementar para o professor, para que, através dos diferentes exercícios propostos, o aluno possa ser conduzido à

compreensão deste assunto.

# Capítulo 5

## Atividades para Ensinar Frações

### Equivalentes

Neste capítulo, apresentaremos algumas atividades que foram elaboradas e desenvolvidas em conjunto pelo autor e seus orientadores, assim como inspiradas e/ou adaptadas dos livros de SANTOS ([25] 1995), SANTOS & REZENDE ([24] 1996) e WALLE ([23] 2009), sobre o ensino de frações equivalentes.

Cada atividade preparada possui objetivos específicos dentro do ensino de frações equivalentes que são destacados na introdução de cada uma delas. Como objetivo geral, a sequência dos exercícios apresentados procura conduzir o aluno a:

- identificar frações equivalentes
- compreender que frações equivalentes são maneiras diferentes de representar uma mesma quantidade

- determinar outras frações equivalentes a uma fração dada, de acordo com as condições estabelecidas

Quanto à aplicação das atividades, nossa orientação é que o professor seja um mediador do conhecimento, questionando cada pensamento e insistindo para que seus alunos argumentem de maneira clara cada descoberta, ficando livre para intervir quando necessário. Cada atividade pode ser realizada individualmente ou em grupo, ficando a critério do professor a maneira de aplicá-las. Qualquer alteração ou adaptação pode ser feita livremente de acordo com a necessidade.

As atividades são voltadas para atender as necessidades de turmas de 5<sup>o</sup>, 6<sup>o</sup> e 7<sup>o</sup> ano, mas também podem servir a qualquer turma em que haja a necessidade de abordar o conceito de fração equivalente, independente do ano que o aluno estiver cursando.

A seguir, apresentamos uma sequência para a construção do conceito de equivalência baseados nas atividades propostas neste trabalho.

1. Dobraduras
2. Equivalência nas malhas
3. Bandeiras
4. Multiplicando e dividindo
5. Planta do escritório



## 5.1 Atividade: Dobraduras

Utilizando figuras geométricas como circunferência, retângulo ou triângulo retângulo, abordaremos frações equivalentes através de representação gráfica, levando o aluno a observar a relação de equivalência  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ .

**Tempo médio para aplicação da atividade:** 25 minutos

**Material necessário:**

1. Figuras geométricas impressas em papel
2. lápis para colorir
3. tesoura
4. folha com instruções

### APLICANDO A ATIVIDADE: COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR

O professor deve entregar a cada aluno uma das opções a seguir: três circunferências ou três retângulos ou três triângulos retângulos isósceles. Estas três figuras que serão entregues devem ser todas congruentes entre si. A escolha delas deve-se ao fato de possibilitarem que as dobraduras que serão feitas as dividam em partes congruentes.



Na primeira figura, os alunos devem dobrá-la de modo que fique dividida em duas partes iguais, pintando uma das partes e destacando-a. Em seguida, devem nomear a fração que a parte destacada representa com relação ao todo, isto é,  $\frac{1}{2}$ . Um questionamento interessante nesta primeira parte é indagar se o objeto fosse dividido em duas partes, não necessariamente iguais, se ainda assim teríamos a representação da fração  $\frac{1}{2}$ .

Com uma outra figura congruente a anterior em mãos, os alunos devem fazer duas dobras, dividindo-a em quatro partes iguais. Em seguida, devem pintar duas partes e destacá-las, observando que estas representam a fração  $\frac{2}{4}$  com relação ao todo.

Novamente, com uma terceira figura congruente a anterior, os alunos devem fazer quatro dobras, dividindo-a em oito partes iguais, destacando em seguida quatro destas partes e concluindo que estavam separando  $\frac{4}{8}$  da figura inicial.

Na parte final, ao sobrepor os pedaços retirados das três figuras geométricas congruentes, os alunos devem concluir que as três frações encontradas:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$  e  $\frac{4}{8}$ , representavam a mesma parte da figura.

Uma importante observação para o professor é que o ato de sobrepor as figuras não comprova rigorosamente que elas representem a mesma quantidade, podendo na verdade representar apenas uma aproximação. Caso o professor que estiver aplicando a atividade opte por um rigor matemático maior, de modo que possa assegurar matematicamente a equivalência, o ideal é que utilize apenas uma figura e observe as dobraduras feitas nela.

As figuras geométricas diferentes são importantes para que os alunos enxerguem que a fração  $\frac{1}{2}$  representa a metade, independente da forma que o objeto dado como unidade tenha.

Esta atividade com dobraduras, com certeza, pode ser explorada de algumas outras maneiras que não fizeram parte desta aplicação e que enriquecerão este momento, reforçando a construção do conceito.

## 5.2 Atividade: Equivalência nas malhas

Os alunos devem fazer diferentes representações para a fração  $\frac{1}{3}$ .

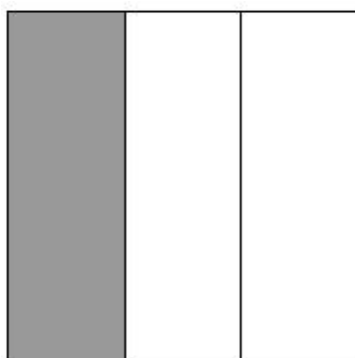
**Tempo médio para aplicação da atividade:** 25 minutos

**Material necessário:**

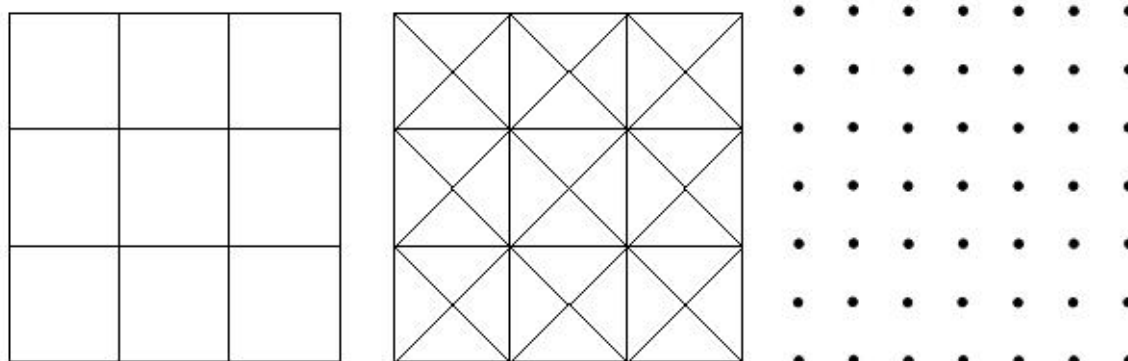
1. folha com instruções
2. papel quadriculado (opcional)

### APLICANDO A ATIVIDADE: COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR

Esta atividade apresenta um retângulo dividido em três partes iguais, tendo uma destas partes hachuradas, representando assim o racional  $\frac{1}{3}$ .



Logo abaixo deste primeiro retângulo, encontramos três retângulos congruentes ao anterior, cada um preenchido por uma malha diferente. O primeiro com uma malha quadrangular, o segundo com um malha triangular e o terceiro com uma malha pontilhada.



Utilizando estas malhas como unidade, os alunos devem encontrar outras representações equivalentes a  $\frac{1}{3}$ . É importante observar com os alunos que existem variadas maneiras de preencher cada malha, não sendo restrito apenas a um determinado padrão, conforme os exemplos a seguir, representados na malha quadrangular.

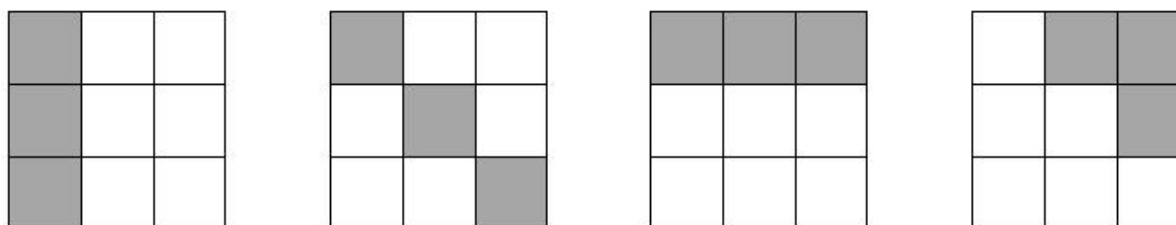


Figura 5.1: diferentes representações para  $\frac{1}{3}$

Uma sugestão a ser acrescentada é a utilização de papel quadriculado para que sejam construídas outras representações gráficas para frações equivalentes a  $\frac{1}{3}$ .

## 5.3 Atividade: Bandeiras

Observando oito retângulos preenchidos de modos diferentes, representando bandeiras, os alunos devem observar a fração correspondente de acordo com a área pintada em cada uma delas. Dentre as oito, encontramos algumas representações para a fração  $\frac{1}{2}$ . Em outro momento, devem representar a fração  $\frac{1}{2}$ , pintando uma folha de papel avulsa.

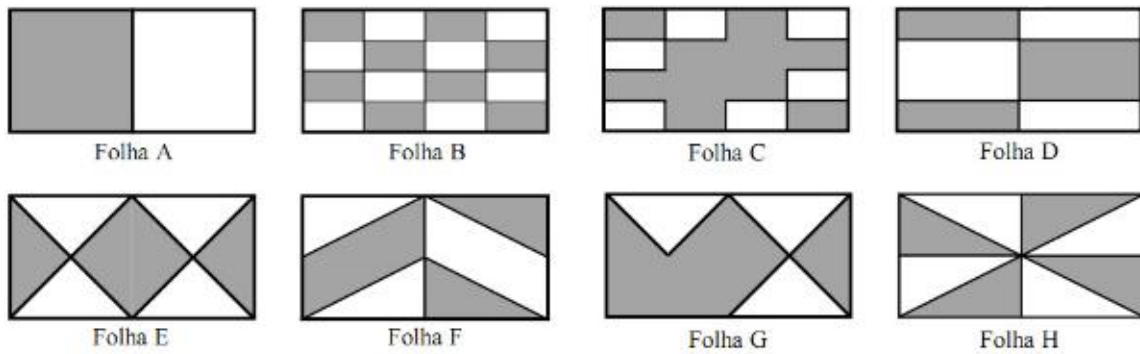
**Tempo médio para aplicação da atividade:** 50 minutos

**Material necessário:**

1. folha com o desenho das bandeiras
2. lápis de cor
3. folha de papel em branco
4. tesoura

### **APLICANDO A ATIVIDADE: COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR**

As bandeiras B, D, E, F e H representam a fração  $\frac{1}{2}$ . É importante que o professor auxilie os alunos na percepção de que, embora os pedaços pintados não estejam juntos, eles representam a metade do retângulo.



No caso da bandeira B, a visualização torna-se aparentemente mais simples, pois temos uma divisão em dezesseis pedaços iguais, tendo sido pintados oito destes pedaços, ou seja, metade deles, logo, temos a fração  $\frac{8}{16}$  que também representa a metade do desenho, sendo uma maneira diferente de representar  $\frac{1}{2}$ .

Quanto aos demais casos (bandeiras D, E, F e H), para uma melhor visualização, é interessante que o professor faça um trabalho de recorte e colagem com o seus alunos, reagrupando as partes, permitindo que o objetivo seja alcançado.

Com relação às bandeiras C e G, que representam  $\frac{5}{8}$ , assim como também em D, E e F, que representam  $\frac{1}{2}$  os alunos devem definir uma unidade para que cheguem a esta observação.

## 5.4 Atividade: Multiplicando e Dividindo

O aluno deve verificar que, ao multiplicar, dividir os termos de uma fração por um número inteiro, diferente de zero, ou realizar ambas operações, encontrará uma fração equivalente à inicial.

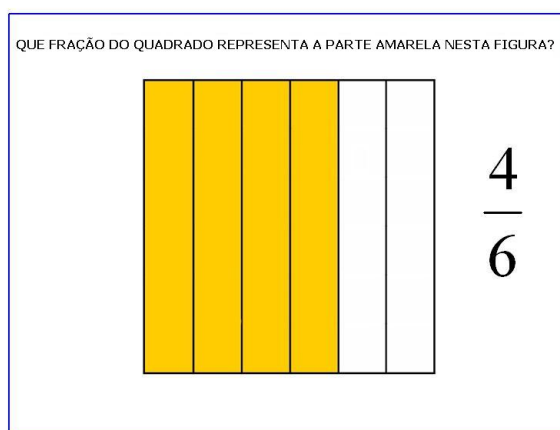
**Tempo médio para aplicação da atividade:** Dois tempos de 50 minutos

### Material necessário:

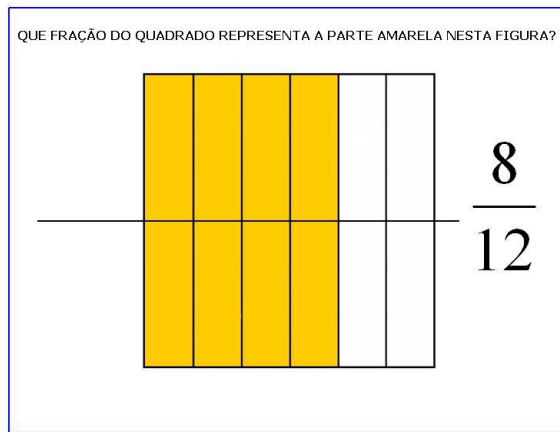
1. folha com instruções
2. computador com projetor
3. papel quadriculado

### APLICANDO A ATIVIDADE: COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR

Esta atividade começa com a projeção de slides, nos quais são apresentadas representações visuais de frações, como na figura a seguir.

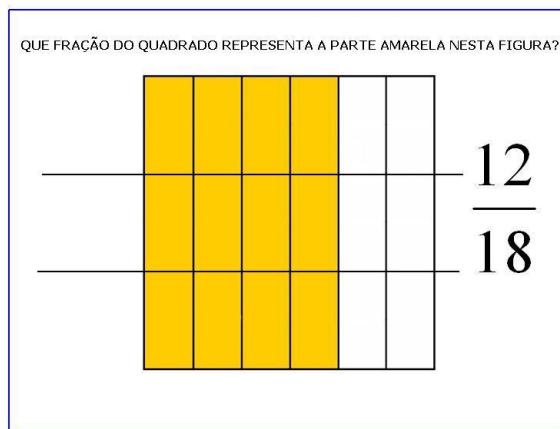


Em seguida, após o acréscimo de uma linha horizontal que divide a figura em duas partes, o aluno deve observar que tanto o todo quanto as partes destacadas de amarelo tiveram as quantidades dobradas, isto é, foram multiplicados por dois.



$$\frac{4 \times 2}{6 \times 2} = \frac{8}{12}$$

Desta vez, na mesma figura inicial, são acrescentadas duas barras horizontais que dividindo-as em três partes iguais, triplicaram o número de partes, conforme a figura a seguir.

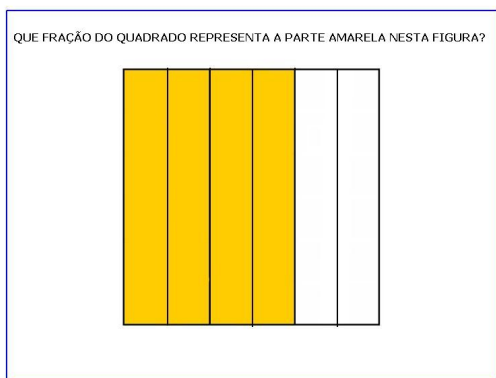


$$\frac{4 \times 3}{6 \times 3} = \frac{12}{18}$$

Nas duas situações anteriores, o aluno deve enxergar visualmente que, ao se multiplicar ambas as partes de uma fração por um mesmo número, podemos encontrar uma outra representação para a mesma fração inicial.



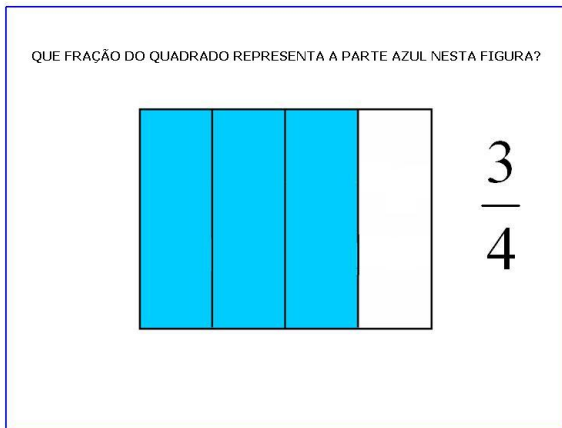
No exemplo a seguir, ao invés de acrescentarmos barras horizontais, retiraremos duas barras verticais. Nesta situação, teremos que o todo, ao invés de estar dividido em seis partes congruentes, passa a ficar dividido em três partes congruentes. O mesmo pode ser visualizado nas partes destacadas em amarelo, pois estas quatro partes congruentes tornaram-se duas, isto é, foram reduzidas à metade.



Neste caso, temos:

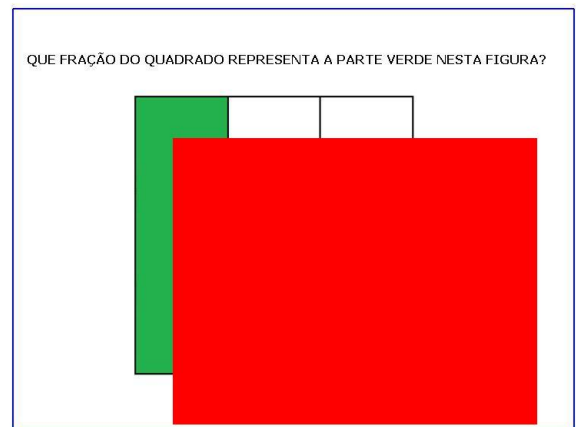
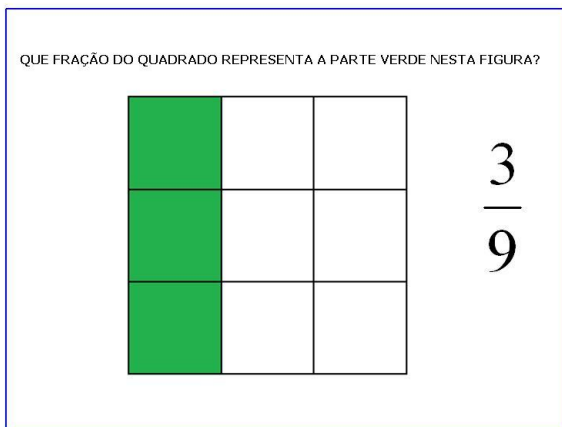
$$\frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$$

Logo após, o professor deve apresentar aos alunos as figuras a seguir, em que na fração representada ocorre o acréscimo de linhas horizontais. A imagem completa é coberta, ficando aparente apenas uma parte. Isto é importante para que o aluno observe visualmente que, neste caso, ele tem  $3 \times 4$  parte do todo e  $3 \times 3$  partes sombreadas, isto é,  $\frac{9}{12}$ . Tanto o numerador como o denominador da fração foram multiplicados por três.



$$\frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12}$$

Em seguida, um outro exemplo semelhante, em que linhas horizontais são retiradas e a figura é encoberta. O aluno deve observar que houve uma divisão por três de ambas as partes da fração.



$$\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

Após a apresentação e discussão dos slides, o aluno pode concluir que uma maneira de encontrar frações equivalentes é multiplicando e/ou dividindo as partes da fração por números inteiros diferente de zero.

Em seguida, é importante estabelecer a compreensão de que ao multiplicarmos o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda obteremos um valor igual ao produto do denominador da primeira fração pelo numerador da segunda, isto é, considerando  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , com  $b$  e  $d \neq 0$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se e só se  $ad = bc$ .

A maneira como fazer esta apresentação, a princípio, pode ser feita partindo da observação de que como  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{4}{10}$  são equivalentes, isto é  $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ , temos que  $\frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 10} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{4 \cdot 5}{10 \cdot 5}$ . Dessa forma,  $\frac{2 \cdot 10}{5 \cdot 10} = \frac{4 \cdot 5}{10 \cdot 5}$ . Como temos uma igualdade de frações com o mesmo denominador, podemos concluir que  $2 \cdot 10 = 4 \cdot 5$ . O mesmo pode ser feito observando outras equivalências.

Generalizando, considere  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Temos que  $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b}$  e  $\frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$ . Dessa forma,  $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$ , logo,  $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$ , o que nos leva a concluir que  $a \cdot d = b \cdot c$ . Por outro lado, se  $a \cdot d = b \cdot c$ , teremos que  $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$ . Como  $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b}$  e  $\frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$ , temos que  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c}{d}$ , assim,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

Na sequência da atividade, uma folha com atividades é entregue contendo exercícios que levam o aluno a encontrar frações equivalentes às frações dadas e a verificar se os pares de frações apresentadas são equivalentes ou não. Para as turmas de 5<sup>o</sup> ano, é interessante utilizar o quadriculado da folha para justificar as afirmações. Sugerimos ainda que outros exercícios sejam acrescentados reforçando esta descoberta, mas que ao mesmo tempo estimulem a reflexão e a investigação como nos exercícios 2 e 3.

## 5.5 Atividade: A planta do escritório

Usando diferentes padrões de unidade de medida, o aluno deve escrever a fração correspondente a cada cômodo, observando a equivalência das frações existentes, visto que, independente da unidade de medida adotada, o tamanho dos cômodos permanece o mesmo.

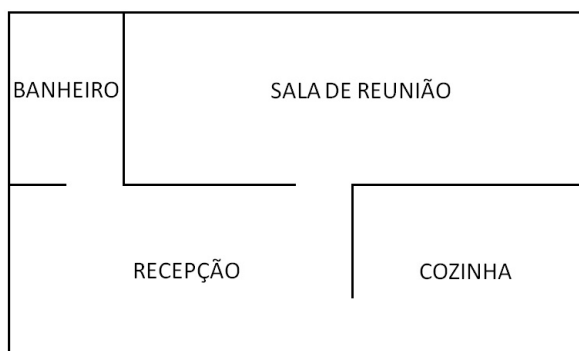
**Tempo médio para aplicação da atividade:** 50 minutos

**Material necessário:**

1. folha com questões da atividade impressa
2. papel quadriculado (opcional)

### APLICANDO A ATIVIDADE: COMENTÁRIOS PARA O PROFESSOR

O professor deve conduzir o aluno no preenchimento das tabelas de acordo com a unidade de área adotada em cada item. Ao término, explique aos alunos que as frações de cada cômodo encontradas são equivalentes pois são representações da mesma área.



BANHEIRO						SALA DE REUNIÃO			
						RECEPÇÃO			

É importante que o professor, no final da atividade, incentive o aluno a estabelecer uma unidade de área diferente das anteriores e novamente verificar a equivalência. Também é

interessante utilizar o papel quadriculado, sendo esta parte opcional, e fazer uma planta com escala diferente, para que seja observada ainda a equivalência existente.

# Capítulo 6

## Aplicação das Atividades

As atividades foram aplicadas em turmas de 6<sup>o</sup> e 7<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental, com alunos de faixa etária entre 11 e 13 anos, de escolas públicas e particulares do estado do Rio de Janeiro. A aplicação serviu para que as atividades fossem reformuladas à medida que novos questionamentos e ideias fossem surgindo. Também foi importante para que pudéssemos apresentar informações como o tempo médio para a aplicação em aula, o material necessário para a sua realização e algumas orientações ao professor que desejar aplicá-las.

Cada atividade foi aplicada com o intuito de analisarmos a sua funcionalidade para o ensino de frações equivalentes. Neste capítulo faremos um breve relato da aplicação das atividades, destacando algumas respostas interessantes dos alunos.

Em todas as turmas em que as atividades foram aplicadas, o estudo de frações já havia sido formalizado anteriormente, por fazer parte da grade curricular do 5<sup>o</sup> ano. Dessa forma, falar sobre frações equivalentes não foi considerado como novidade para os alunos do 6<sup>o</sup>

e 7º anos, embora fosse possível observar algumas dificuldades para resolver os exercícios. Sendo assim, as atividades foram de grande importância para diagnosticar as possíveis deficiências e sanar dúvidas, servindo como revisão do assunto.

Algumas atividades, como a das bandeiras, foram modificadas após a aplicação. Isto ocorreu pois foi observado que tal atividade poderia ainda ser explorada de outros modos, propiciando maior reflexão, contribuindo para a formação do conceito de equivalência.

Quanto à participação dos alunos, podemos dizer que em todas as turmas a maioria mostrou-se participativa, resolvendo os exercícios e solicitando o auxílio do professor em casos de dúvidas.

## **ATIVIDADE 1: DOBRADURAS**

**Local da aplicação:** Instituto Loide Martha - Duque de Caxias - RJ

**Turma:** 6º ano do Ensino Fundamental

**Quantidade de alunos presentes:** 42

Para realizar a atividade, os alunos foram divididos em grupos de três. Cada grupo recebeu as três figuras geométricas congruentes e a folha de atividades.

Procedendo conforme orientação do professor, a primeira dobradura foi realizada corretamente, sendo pintada e destacada uma das partes. Todos os alunos concordaram que a fração destacada era  $\frac{1}{2}$  do todo.

A segunda figura deveria ser dobrada em quatro partes congruentes, sendo realizada sem maiores dificuldades. Um ponto a se destacar é que alguns alunos disseram que a parte pintada com relação ao todo representava  $\frac{4}{2}$ , sendo corrigidos por outros colegas que

afirmaram que se tratava da fração  $\frac{2}{4}$ .

A terceira figura foi dobrada e pintada corretamente. De modo praticamente unânime, os alunos afirmaram que se tratava de  $\frac{4}{8}$  da figura inicial.

No final, ao sobrepor as partes destacadas, todos concordaram que  $\frac{1}{2}$  era a fração que a representava, independente da figura geométrica utilizada, escrevendo ao final da folha que  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ .

Novamente reforçamos para o professor que, como dito na apresentação desta atividade no capítulo anterior, ao sobrepormos as figuras, estamos agindo de um modo experimental, sem obedecer um maior rigor matemático. O fato de sobrepormos as figuras não garante a igualdade, por isso, pode-se considerar a realização desta atividade apenas realizando as dobraduras em um única figura, observando as equivalências.

Abaixo, destacamos alguns trabalhos realizados pelos alunos.



Figura 6.1: dobradura com o retângulo



Figura 6.2: dobradura com a circunferência



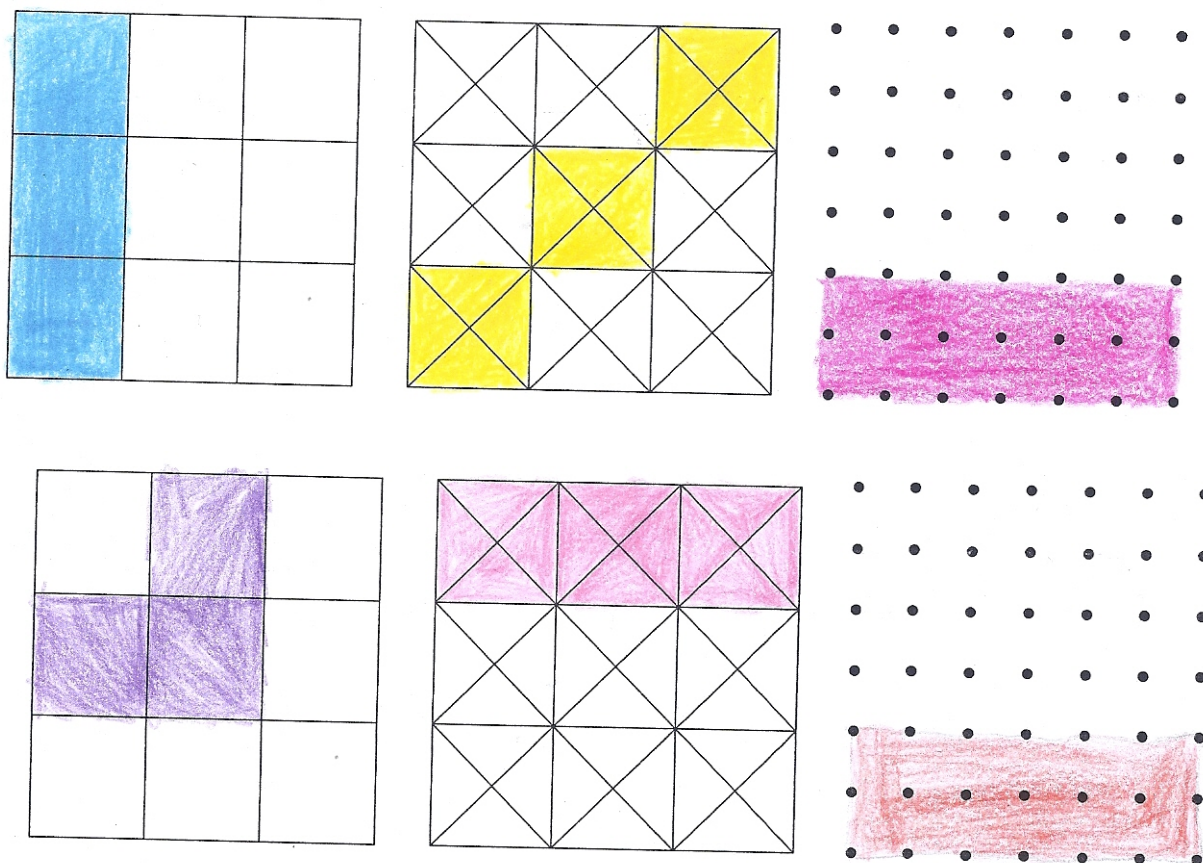
## ATIVIDADE 2: EQUIVALÊNCIA NAS MALHAS

**Local da aplicação:** Instituto Loide Martha - Duque de Caxias - RJ

**Turma:** 6º ano do Ensino Fundamental

**Quantidade de alunos presentes:** 42

Esta atividade foi bastante proveitosa e gerou uma boa discussão em sala sobre a forma de representar  $\frac{1}{3}$  em cada retângulo. Alguns alunos fugiram do padrão estabelecido pela figura inicial e pintaram de maneira diferente da dos seus colegas.



Uma outra discussão ocorreu quando tiveram que preencher a malha pontilhada. Cada aluno deveria, em seguida, estabelecer uma unidade de medida a ser feita com os pontos

para determinar que fração equivalente a  $\frac{1}{3}$  estava representada. Esta última foi a que os alunos tiveram maior dificuldade, sendo necessário a intervenção do professor para auxiliá-los.

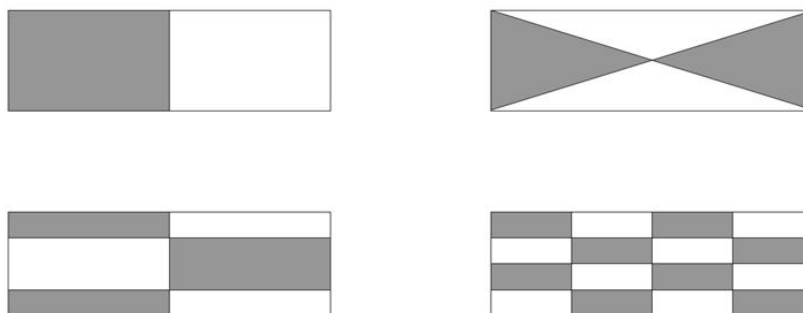
### ATIVIDADE 3: BANDEIRAS

**Local da aplicação:** Escola Municipal Vereador Hécio Chambarelli - Nova Iguaçu - RJ

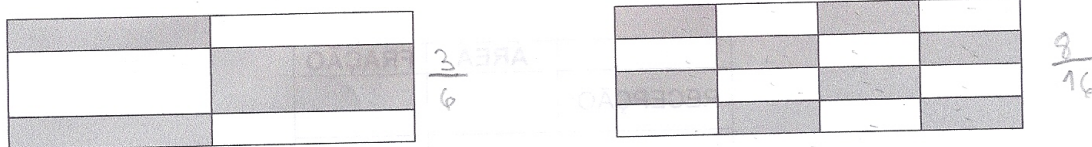
**Turma:** 7º ano do Ensino Fundamental

**Quantidade de alunos presentes:** 25

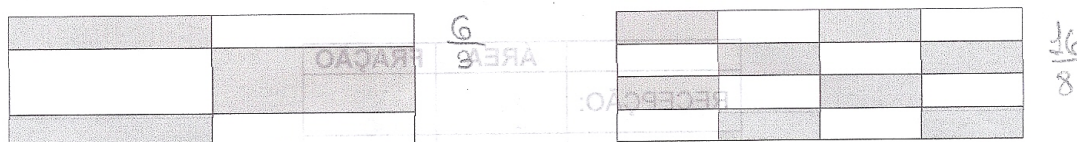
Esta atividade foi inicialmente aplicada apenas com quatro bandeiras conforme a figura a seguir. Posteriormente, acrescentamos outras quatro bandeiras segundo consta no anexo deste trabalho.



Nela foi possível notar com clareza um erro cometido por todos os alunos com respeito a bandeira que representa  $\frac{4}{8}$ . Como ela apresenta três partes sombreadas, sendo que a maior das partes equivale a duas das outras, o que poderia ser visualizado ao se traçar um linha horizontal cortando ao meio a figura, os alunos escreveram que era  $\frac{3}{6}$ . Embora saibamos que  $\frac{3}{6}$  e  $\frac{4}{8}$  são equivalentes,  $\frac{3}{6}$  era a resposta esperada, o que nos mostra deficiência em reconhecer a relação parte-todo envolvida e a questão da unidade.



Outro erro comum foi inverter o numerador com o denominador, dizendo que a fração, no caso  $\frac{8}{16}$  era  $\frac{16}{8}$ .



Nesta atividade também foi solicitado que respondessem se havia alguma bandeira com área maior preenchida. Alguns responderam que a maior área era  $\frac{1}{2}$  e outros  $\frac{8}{16}$ . Nenhum respondeu que todas as bandeiras possuíam a mesma área, o que nota a falta de reconhecimento da equivalência entre  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{8}{16}$ .

#### ATIVIDADE 4: MULTIPLICANDO E DIVIDINDO

**Local da aplicação:** Instituto Loide Martha - Duque de Caxias - RJ

**Turma:** 6º ano do Ensino Fundamental

**Quantidade de alunos presentes:** 42

Esta atividade busca ajudar os alunos a perceberem que se multiplicarem ou dividirem o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, encontrarão frações equivalentes à fração inicial.

No momento da projeção dos slides, alguns alunos mostraram-se bastante participativos, respondendo as perguntas que foram feitas. No momento de fazer os exercícios propostos, ainda foi possível encontrar algumas dúvidas, dentre as quais, sobre como se fazer para achar frações equivalentes, não obstante termos explicado anteriormente.

É claro que isso não foi de modo geral. Foi possível notar que os alunos que mais participaram do momento da projeção resolveram corretamente os exercícios quase em sua totalidade. Os que tiveram maiores dúvidas foram os que apenas passivamente observaram no momento da explicação. Como dito ao longo do trabalho, é importante que o aluno participe da construção do conhecimento, não sendo visto apenas como um receptor do conteúdo. Quando existe essa possibilidade, o processo de assimilação parece ser mais eficiente.

Dessa maneira, acreditamos que é necessário explorar esta parte com mais algumas atividades que o levem a concluir que ao se multiplicar e/ou dividir os termos de uma fração pelo mesmo número, diferente de zero, encontramos uma fração equivalente à fração inicial. Quanto a isso, fizemos alguns acréscimos à atividade, solicitando que o aluno preencha a malha quadriculada para confirmar as equivalências encontradas. Ainda assim, estimulamos o professor a buscar meios que possam dinamizar este ensino, sempre lembrando que a memorização da regra não é necessariamente um mal, exceto quando se opta por ela em detrimento da interiorização do conceito. Sugerimos a utilização de um dominó de equivalência ou de um bingo com frações equivalentes.

No momento de encontrar frações equivalentes a  $\frac{2}{6}$ , todos praticamente o fizeram multiplicando por um outro número. Houve uma exceção que o fez dividindo por 2. Sugerimos que o professor observe isso e chame a atenção do aluno para o fato de que também é possível dividir pelo mesmo número.

Foi possível perceber uma maior dificuldade para verificar se  $\frac{4}{10}$  e  $\frac{6}{15}$  são equivalentes. Praticamente todos os alunos que realizaram a atividade concluíram que não eram, pois não encontraram um número inteiro que multiplicando uma das frações desse origem à outra. Neste momento vê-se a importância de formalizar o conceito, caracterizando que

duas frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são equivalentes se e só se  $ad = bc$ .

### ATIVIDADE 5: PLANTA DO ESCRITÓRIO

**Local da aplicação:** Escola Estadual de Ensino Fundamental República - Rio de Janeiro - RJ

**Turma:** 7<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental

**Quantidade de alunos presentes:** 10

Esta atividade foi aplicada a um número reduzido de alunos, pois ocorreu no término do ano letivo, após o período de provas. Ainda assim, os que estavam presentes participaram ativamente da atividade e a grande maioria preencheu as tabelas sem cometerem muitos erros. Novamente, como em algumas atividades anteriores, foi possível observar a inversão dos termos da fração, isto é, o numerador no lugar do denominador e vice-versa.

A seguir, apresentamos duas tabelas preenchidas pelos alunos.

UNIDADE DE ÁREA: "quadrado"	COLUNA 1 ÁREA	COLUNA 2 FRAÇÃO DA ÁREA DO ESCRITÓRIO
RECEPÇÃO	18	$\frac{18}{60}$
COZINHA	12	$\frac{12}{60}$
BANHEIRO	6	$\frac{6}{60}$
SALA DE REUNIÃO	24	$\frac{24}{60}$

UNIDADE DE ÁREA: "BANHEIRO"	COLUNA 1 ÁREA	COLUNA 2 FRAÇÃO DA ÁREA DO ESCRITÓRIO
RECEPÇÃO	3	$\frac{3}{30}$
COZINHA	2	$\frac{2}{30}$
BANHEIRO	1	$\frac{1}{30}$
SALA DE REUNIÃO	4	$\frac{4}{30}$

Após a aplicação viu-se a necessidade de fazer alguns ajustes nas tabelas e no final da atividade, de modo que fique claro para o aluno as equivalências existentes.

# Conclusão

Para o professor, ensinar frações não é uma tarefa fácil. Em muitas salas de aula, desde o momento em que o tema é abordado até o último ano do Ensino Médio, há uma constante luta para, de alguma forma, explicar a seus alunos a importância do assunto e o que ele representa dentro do universo matemático. Para isso, fazem desenhos, ensinam fórmulas, apresentam exemplos, praticam vários exercícios, mas a cada ano, ao olhar para a classe e ver que muitas dúvidas ainda permanecem, a sensação é a de que o trabalho foi em vão.

Para o aluno, aprender frações não é uma tarefa fácil. Associar uma quantidade a dois números escritos na vertical separados por uma barra horizontal não é trivial, mas sabendo que o conteúdo será cobrado em alguma avaliação, tratam de decorar um processo para resolução dos problemas apresentados sem compreender o porquê.

A realidade do professor e do aluno acima descritas, nos levam a refletir sobre como tão importante conceito precisa ser revisto quanto a sua forma de abordagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais tentam apontar uma direção a ser tomada, devendo os professores e os livros didáticos caminharem por ela na busca de tornarem a aprendizagem do aluno mais eficiente.

Dentro do assunto, encontramos o conceito de equivalência, cuja importância pode

ser vista na sua utilização para se comparar e ordenar frações, e também para realizar operações. Compreender frações equivalentes a uma fração dada, em alguns casos, é a chave para o sucesso na resolução de inúmeros problemas.

Devido a sua importância, não é possível permitir que a sua abordagem perca o seu significado reduzindo-se a uma exploração mecanizada de algum algoritmo. Como dito em capítulos anteriores, correr rapidamente em direção a regra não é o melhor caminho a ser tomado inicialmente. A compreensão do conceito deve ser priorizada em detrimento à memorização do algoritmo.

Com relação ao assunto, destacamos três pontos que acreditamos serem fundamentais tanto para o professor quanto para o aluno sobre a compreensão do conceito de equivalência:

1. Compreender que duas frações são equivalentes quando representam a mesma quantidade, isto é, se forem o mesmo número. Para isso, apresentamos as atividades 1, 3 e 5, em que, de modo informal pela sobreposição das partes das figuras, ou de um modo matematicamente mais criterioso, apenas observando as dobraduras realizadas em uma única figura, é possível chegar a essa conclusão.
2. Compreender que ao se multiplicar e/ou dividir os termos da fração por um mesmo número, diferente de zero, podemos encontrar uma fração equivalente à inicial. Esta ideia é explorada nas atividades 2 e 4 deste trabalho.
3. Compreender a propriedade principal que nos leva a reconhecer se duas frações são equivalentes quando dados  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , com  $b$  e  $d \neq 0$ , as frações  $\frac{a}{b}$  e  $\frac{c}{d}$  são equivalentes se e só se  $ad = bc$ . Esta propriedade é abordada durante a atividade 4.

Em nossa análise de livros didáticos, foi possível observar que nem todos os autores compreendem a importância dos três pontos apresentados anteriormente, principalmente

quanto ao último item que é a definição que sustenta o conceito de equivalência. Isto nos leva a concluir que a abordagem do assunto na maioria dos livros é realizada de modo insatisfatório, o que acarreta em um ensino deficiente nas salas de aula visto que os professores geralmente utilizam estes livros para preparar suas aulas.

O nosso trabalho tenta cooperar apresentando algumas atividades para auxiliar na construção deste saber. Estas cinco atividades propostas buscam preencher uma lacuna relacionada à carência de exercícios diferenciados sobre o assunto, mas não esgotam o tema, cabendo ao professor a tarefa de pesquisar novos meios que possam proporcionar um aprendizado mais efetivo.

Nossa breve experiência relatada neste trabalho nos conduz a crer que se o professor optar por um ensino que leve o aluno a refletir sobre o conteúdo que está estudando, antes de lançar mão de possíveis fórmulas, poderá colher bons frutos, resultado de seu trabalho e esforço, com o objetivo de ver o progresso de seus alunos.



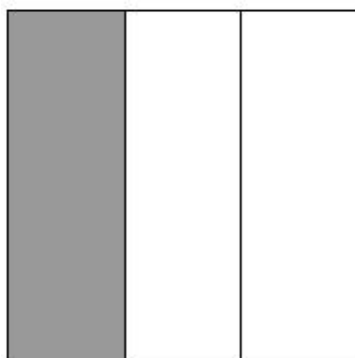
# Anexos

## Atividade: Dobraduras

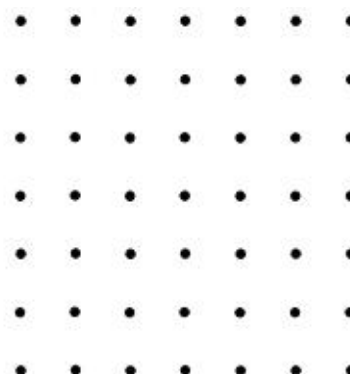
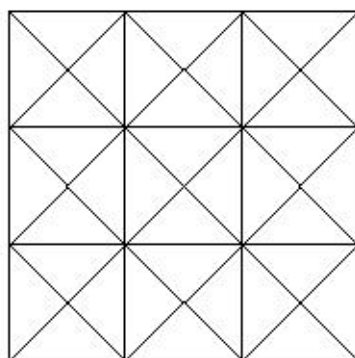
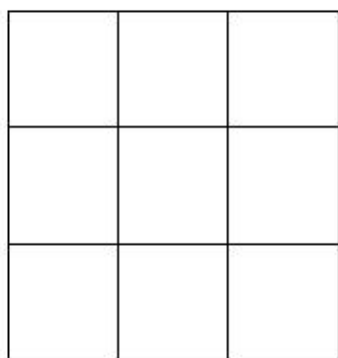
1. Pegue uma figura e dobre-a em duas partes iguais. Pinte uma das partes.
  - a) Que fração da figura você pintou?.....
  - b) Recorte a parte pintada e separe-a.
2. Pegue uma outra figura, congruente a anterior e dobre-a em quatro partes iguais. Pinte duas dessas partes.
  - a) Que fração da figura você pintou?.....
  - b) Recorte as partes pintadas e separe-as.
3. Pegue uma outra figura congruente a anterior e dobre-a em oito partes iguais. Pinte quatro dessas partes.
  - a) Que fração da figura você pintou?.....
  - b) Recorte a parte pintada e separe-a.
4. Coloque as partes da figura que foram pintadas no exercício 2 sobre a parte pintada do exercício 1. O que você conclui?
5. Coloque as partes pintadas do exercício 3 sobre as partes pintadas do exercício 2. O que você conclui?
6. Leia a frase abaixo e complete com as informações obtidas dos exercícios anteriores:  
Como cada parte da figura pintada equivale à mesma parte da figura, podemos afirmar que as frações\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ são frações \_\_\_\_\_

## Atividade: Equivalência nas malhas

Considerando o retângulo a seguir como unidade, que fração representa a parte pintada de cinza?



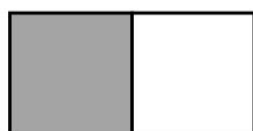
Utilizando as malhas a seguir, de mesmas dimensões que o retângulo anterior, faça representações diferentes para a fração  $\frac{1}{3}$ .



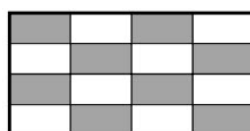
Dessa forma podemos afirmar que  $\frac{1}{3} = \text{-----} = \text{-----} = \text{-----}$

## Atividade: Bandeiras

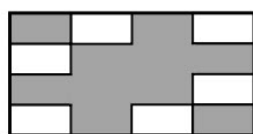
Considere que oito folhas de mesmo tamanho foram pintadas das seguintes formas:



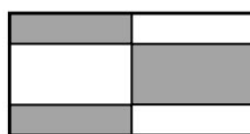
Folha A



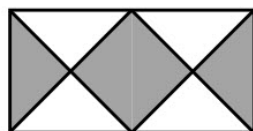
Folha B



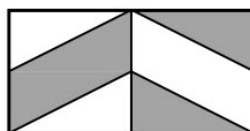
Folha C



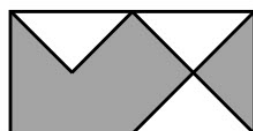
Folha D



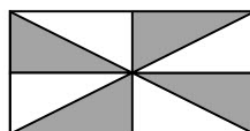
Folha E



Folha F



Folha G



Folha H

- Em cada caso, como você indicaria, usando frações, a parte pintada?
- Todas as folhas têm a mesma área pintada? Explique como chegou a essa conclusão.
- Agora é a sua vez, pinte a  $\frac{1}{2}$  de uma folha de papel. Seja criativo, não vale repetir os padrões observados.

## Atividade: Multiplicando e dividindo

1. Determine três frações equivalentes a  $\frac{2}{6}$ , explicando que operações você realizou para obtê-las.

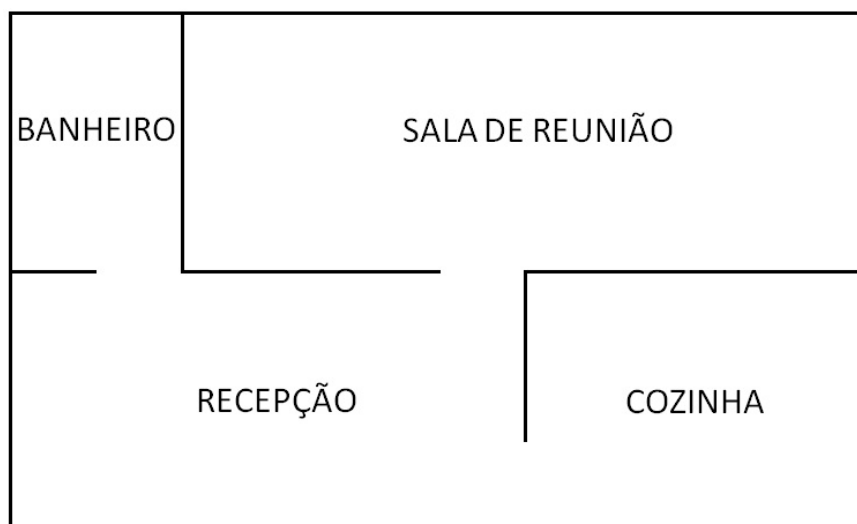
2. Responda as perguntas abaixo, justificando-as.

a) As frações  $\frac{4}{5}$  e  $\frac{16}{25}$  são equivalentes?

b) As frações  $\frac{4}{10}$  e  $\frac{6}{15}$  são equivalentes?

## Atividade: A planta do escritório

A figura a seguir representa a planta baixa de um escritório.



Considere a representação da mesma sala feita em papel quadriculado.



a) Considerando um “quadrado” do papel quadriculado como unidade de área, preencha a tabela a seguir indicando:

(a) na coluna 1: a medida da área de cada cômodo.

(b) na coluna 2: a fração da área do escritório que corresponde a cada cômodo.

Área total do escritório: \_\_\_\_\_ “quadrados”

UNIDADE DE ÁREA “quadrado”	COLUNA 1 Área	COLUNA 2 Fração da área do escritório
RECEPÇÃO		
COZINHA		
BANHEIRO		
SALA DE REUNIÃO		

- b) A proposta agora é repetir a atividade do item (a), usando a região do banheiro no lugar do quadradinho, ou seja, considerando a área do banheiro como unidade.

Área total do escritório: \_\_\_\_\_ “Banheiros”

UNIDADE DE ÁREA “Banheiro”	COLUNA 1 Área	COLUNA 2 Fração da área do escritório
RECEPÇÃO		
COZINHA		
BANHEIRO		
SALA DE REUNIÃO		



c) Agora é com você! Escolha, dentre as duas imagens abaixo, uma para usar como unidade de área e preencha mais uma vez a tabela.



Imagem A

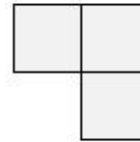
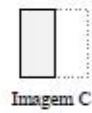


Imagem B

Área total do escritório: ----- “-----”

UNIDADE DE ÁREA “-----”	COLUNA 1 Área	COLUNA 2 Fração da área do escritório
RECEPÇÃO		
COZINHA		
BANHEIRO		
SALA DE REUNIÃO		

d) Faça como no item (c), mas agora escolha a unidade de medida dentre as opções a seguir. Observem que cada uma corresponde à metade de um quadradinho.



Área total do escritório: \_\_\_\_\_ “\_\_\_\_\_”

UNIDADE DE ÁREA “_____”	COLUNA 1 Área	COLUNA 2 Fração da área do escritório
RECEPÇÃO		
COZINHA		
BANHEIRO		
SALA DE REUNIÃO		

# Bibliografia

- [1] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** - 3. ed. - Brasília: Secretaria da Educação Fundamental, 2001.
- [2] BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R. & SILVER, Edward A. Rational-Number Concepts. In LESH, R.; LANDAU, M. (eds) Acquisition of Mathematical Concepts and Processes. p.91-126. New York: Academic Press, 1983. **Disponível em:** <https://gismodb.fi.ncsu.edu/gismodb/files/articles/e69810947cbdb9a788e72b100bd87b46.pdf>.  
Acesso em: 23 de janeiro de 2013.
- [3] Moreira, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática Docente na escola básica** (Tese de Doutorado).  
Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2004. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/EABA-6ABMUH/2000000078.pdf;jsessionid=618DB190C0897D69E8ABE64FD755B3EE?sequence=1>. Acesso em: 22 de janeiro de 2013.
- [4] GIRALDO, Victor; RIPOLL, Cydara; PITOMBEIRA, João Bosco; RANGEL, Letícia. **Livro companheiro do professor de matemática** Volume 1 - Números Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

- [5] SILVA, Maria José Ferreira da. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série** (Tese de Doutorado).  
PUC-SP, 2005. Disponível em: [http://www4.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/maria\\_jose\\_ferreira\\_silva.pdf](http://www4.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/maria_jose_ferreira_silva.pdf). Acesso em 23 de janeiro de 2013.
- [6] MONTEIRO, Cecília & COSTA, Cristolinda **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais**.  
IN: Revista Educação e Matemática, nº40, p.60-63. APM: Portugal, 4º trimestre de 1996.
- [7] GIRALDO, Victor. **O Desenvolvimento do Conceito de Número na Escola Básica** 24ª Semana de Matemática da UFRN.
- [8] FAVERO, Maria Helena; NEVES, Regina da Silva Pina. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. In Revista Zetetiké. v.20, n. 37, p.35-71. São Paulo: FE/Unicamp, jan/jun 2012.
- [9] LOPES, Antônio José. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**  
IN: Revista Bolema, Ano 21, nº31, p.01-22. UNESP: Rio Claro, 2008.
- [10] MONTEIRO, Cecília & COSTA, Cristolinda & FIGUEIREDO, Nisa. **As frações e o desenvolvimento do sentido de número racional**.  
IN: Revista Educação e Matemática, nº84, p. 47-51. APM: Portugal, Setembro e Outubro de 2005. Disponível em: [http://arquivo.e.se.ips.pt/seprojectossentidonumeroFraccoes\\_EM.pdf](http://arquivo.e.se.ips.pt/seprojectossentidonumeroFraccoes_EM.pdf).  
Acesso em 20 de março de 2013.
- [11] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série)**. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

- [12] MOREIRA, Plínio Cavalcanti & FERREIRA, Maria Cristina Costa. **A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas**  
IN: Revista Bolema, Ano 21, nº31, p.103-127. UNESP: Rio Claro, 2008.
- [13] ROMANATTO, Mauro Carlos. **Número Racional: Relações Necessárias à sua Compreensão** (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1997.
- [14] KIEREN, T. E. **The rational number construct – its elements and mechanisms** In: KIEREN, T. (ed.) Recent Research on Number Learning. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.
- [15] DAMICO, Alécio. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental** (Tese de Doutorado). PUC/SP, 2007
- [16] COUTINHO, S.C. **Números Inteiros e Criptografia RSA**  
Rio de Janeiro, IMPA, 2005
- [17] RIPOLL, Jaime Bruck; RIPOLL, Cydara Cavedon; SILVEIRA, José Francisco Porto da. **Números Racionais, Reais e Complexos**  
Editora da UFRGS, segunda edição 2010.
- [18] MILIES, Francisco César Polcino; COELHO, Sônia Pitta; **Números: Uma Introdução à Matemática**  
São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1997
- [19] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** - Brasília: Secretaria da Educação Fundamental, 1997.
- [20] BORDEAUX, Ana Lúcia; RUBINSTEIN, Cléa; FRANÇA, Elizabeth; OGLIARI, Elizabeth; MIGUEL, Vânia. **Novo bem-me-quer matemática 5º ano**

- São Paulo, Editora do Brasil, 2011.
- [21] CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Novo Matemática na Medida Certa 5ª série**  
São Paulo, Scipione, 2003.
- [22] DANTE, Luis Roberto. **Tudo é Matemática 6º ano**  
São Paulo, Ática, 2009.
- [23] WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**  
Porto Alegre, Artmed, 2009.
- [24] SANTOS, Vânia Maria Pereira dos; REZENDE, Jovana Ferreira de. **Números: Linguagem Universal**  
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/UFRJ, Projeto Fundação, 1996.
- [25] SANTOS, Vânia Maria Pereira dos. **Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática: Métodos Alternativos**  
Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/UFRJ, Projeto Fundação, 1996.