UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

YGOR FRANZOTTI DE BARROS GOMES

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA JOGOS COMBINATÓRIOS

VITÓRIA
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
PROFMAT

YGOR FRANZOTTI DE BARROS GOMES

UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA JOGOS COMBINATÓRIOS

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

VITÓRIA
2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família (em especial minha mãe Rosilene Lopes de Barros) pelo imenso apoio que tem me dado durante todos esses anos na minha vida acadêmica.

A todo o corpo docente do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, em especial aos professores da Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho, Prof. Dr. Moacir Rosado Filho e Prof. Valmecir Antônio dos Santos Bayer, pelos conhecimentos transmitidos que me fizeram ter mais amor pela Matemática.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Moacir Rosado Filho, pela confiança, paciência e sua simplicidade que contribuiu para este trabalho da melhor forma possível.

À OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), por ter me dado a rica oportunidade de trabalhar como monitor em seu Programa de Inciação Científica, ocasião em que aprendi grande parte do que é apresentado neste trabalho.

Aos colegas do mestrado pelos dois anos de convivência e enriquecimento intelectual.

Aos meus amigos Euzebio Glauder Zandonadi, Juniano Vergna Vieira e Marcelo Bragatto Dal Piaz que me incentivaram bastante em meio às dificuldades.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma sequência didática sobre jogos combinatórios para estudantes de Matemática do Ensino Regular. Os temas abordados são “Jogos”, “Sistema de Numeração”, “Divisibilidade”, “Simetria” e “Problemas”. Cada capítulo contém um desenvolvimento teórico contextualizado e problemas resolvidos e propostos, além das devidas respostas e dicas para solução.

ABSTRACT

This work presents a didactic sequence about combinatorial games for Regular School. The topics are "Games", "Numbering System", "Divisibility", “Symmetry" and "Problems" .Each chapter contains a contextualized theoretical development, solved problems and proposed ones, containing the appropriate answers and tips for solutions.

Lista de Figuras

Sumário

I. INTRODUÇÃO

Da experiência que tenho como professor de Matemática e do que converso com colegas de profissão, há um consenso: o público com o qual nos deparamos considera a Matemática um tanto desmotivante. A *priori*, o público (neste caso, alunos) não vê utilidade em alguns dos assuntos que são abordados, e talvez por isto questionem bastante a necessidade de estudá-los. Uma outra experiência que tive foi trabalhar como monitor no PIC da OBMEP (Programa de Iniciação Científica da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), que é um projeto voltado para os alunos medalhistas naquela olimpíada de Matemática. Nesse programa, são trabalhados vários temas de Matemática, sendo que um deles é sobre jogos. Esse trabalho que desenvolvi junto ao PIC da OBMEP foi extremamente enriquecedor e foi o principal inspirador do presente trabalho.

O ato de jogar é uma atividade lúdica, geralmente usada para o tempo livre. Com isso, frequentemente interpretamos que os jogos são inimigos do trabalho. Mas, os alunos gostam de jogar, pois o jogo está envolvido com a interação social.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de abordagem de jogos em sala de aula, visando estimular o aprendizado matemático dos alunos e oferecer uma alternativa para ampliar o interesse deles pelos conteúdos de Matemática.

Este trabalho apresenta uma sequência didática dividida em várias aulas, sendo que cada aula apresenta vários problemas sobre temas referentes a vários tipos de jogos, que são: pseudo-jogos, jogos envolvendo simetria, jogos em que são analisadas posições vencedoras e jogos em que são analisadas o final do jogo. Em cada jogo analisado, o objetivo é procurar uma estratégia vencedora para cada situação e justificar porque ela funciona.

II. JOGOS

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e pré-requisitos básicos para o desenvolvimento deste trabalho.

Jogos são atividades estruturadas, praticadas com fins recreativos e em alguns casos fazem parte de instrumentos educacionais. A arqueologia registra a presença de competições e jogos desde 2600 a.C.. Os jogos são elementos universais em todas as culturas humanas.

Os principais elementos utilizados na categorização dos jogos são: **Ferramentas** e **regras**.

- **Ferramentas**: são os materiais utilizados durante o jogo e podem incluir: cartas, bolas, tabuleiros, peças, computador, etc.
- **Regras**: são os elementos que definem sua coerência e estrutura.

Estes elementos definem a categorização de cada jogo em:

- Jogos de Perícia
- Jogos de Estratégia
- Jogos de Azar

Nosso foco é trabalhar com jogos estratégicos, jogados por dois jogadores. Há várias classificações para jogos, algumas delas são:

- Simétricos e Assimétricos
- Soma zero e soma diferente de zero
- Simultâneos e sequencial
- Informação perfeita e informação imperfeita
- Jogos infinitamente longos

Dentre as classificações existentes, iremos trabalhar com os denominados **Jogos Combinatórios**, que são tipos de jogos classificados como jogos de soma zero.

II.1. Jogos Combinatórios

Os jogos combinatórios são os tipos de jogos que satisfazem algumas condições:

- Há dois jogadores.
- Os jogadores jogam alternadamente, isso é, não existem jogadas simultâneas.
- Os jogadores sabem exatamente qual a situação presente do jogo, ou seja, têm informação completa.
- Não são utilizados no jogo dados ou outros dispositivos aleatórios.
- A qualquer momento o conjunto de jogadas permitidas a um jogador está bem definido, sendo do conhecimento de todos - cabe ao jogador escolher sua jogada.
- Há um critério bem definido e previamente conhecido pelos jogadores para determinar quando o jogo acabou.
- Ao final do jogo há um resultado bem definido segundo um critério previamente conhecido dos jogadores. Em geral, este resultado será a vitória de um ou outro jogador, podendo em alguns jogos haver empate.

Alguns exemplos populares de jogos satisfazendo essas condições são o xadrez e o jogo da velha. Mas, neste trabalho, não teremos a situação de empate. Procuraremos métodos (estratégias) para vencer em cada jogo (situação-problemas que enfrentaremos).

II.2. Estratégia

Segundo [6],

> "**Estratégia** é uma palavra com origem no termo grego *strategia*, que significa **plano**, **método**, **manobras ou estratagemas** usados para **alcançar um objetivo** ou **resultado** específico."

Um jogo estratégico é um modelo de tomada de decisão interativa, em que cada tomador de decisão escolhe seu plano de ação, e essas escolhas são feitas simultaneamente. Em geral, a habilidade dos jogadores em tomar decisões estratégicas supera a sorte como um fator de determinação do jogador vencer. Os planos podem se alterar constantemente dependendo do jogo (ou situação) em questão.

Estratégias são fundamentais em vários aspectos, não somente em jogos, como por exemplo, nas guerras, nas empresas (economistas consideram as decisões que as empresas podem tomar referente a diversas situações é um jogo), nos estudos e etc.

Como já mencionado antes, nosso objetivo neste trabalho, é procurar estratégias para jogos combinatórios.

III. PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A proposta desta sequência didática é dividir o tema “jogos combinatórios” em um curso com várias aulas, em que cada aula terá a duração de 100 minutos. Para cada aula é interessante dividir os alunos em duplas para amadurecer a ideia do problema e vivenciá-lo, ou seja, jogar o jogo. A partir da quarta aula, é interessante usar como material o tabuleiro de xadrez (juntamente com as peças) para cada dupla, pois será usado na maioria dos problemas.

Apesar dos vários problemas de jogos propostos, não será preciso jogar todos eles, mas pelo menos alguns, para que os alunos procurem a estratégia vencedora (em todos os problemas propostos vai existir uma estratégia vencedora). Em cada aula, teremos um tipo de problema e exemplos do mesmo, seguindo assim com os problemas daquele tipo.

III.1. Aula 1 – Jogo de Nim

Nesta aula estudaremos o jogo de Nim, de origem ancestral, para dois jogadores. Foi o primeiro jogo a ser estudado matematicamente e seu registro são atribuídos ao matemático Charles L. Bouton, não se sabe a origem correta do jogo, mas existe uma suposição que esta palavra tem origem chinesa.

O jogo de Nim é um jogo de raciocínio jogado com peças (palitos) por dois jogadores. Há algumas variações deste jogo, em geral,separamos em grupos com uma quantidade qualquer de palitos em cada, e estipulamos uma quantidade máxima de palitos que possa ser retirado de cada grupo, e para vencer, ou ganha quem retira o último palito ou perde quem retira o último palito.

Vamos discutir algumas variantes para esse jogo, mas antes disso, para entender a estratégia vencedora do jogo, será necessário conhecer a divisão euclidiana.

Divisão Euclidiana

A divisão euclidiana será usada para determinar as posições vencedoras nas variantes 1 e 2 do Jogo de Nim.

Definição 1.1: Se a e b são inteiros com $a \neq 0$, dizemos que a divide b se existe um inteiro c tal que $b = a \cdot c$. Quando a divide b dizemos que a é um divisor de b e que b é um múltiplo de a. a│b denota a divide b.

Exemplo 1.1: $3 \mid 12$, pois $12 = 4 \cdot 3$

Teorema (da divisão euclidiana) 1.1: Sejam a e b dois números inteiros com $a \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$b = a \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < |a|.$$

Nas condições do teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão de b por a.

Demonstração: Dados r e s inteiros, com $r < s$, define-se o *intervalo* $[r, s)$ como sendo o conjunto dos inteiros x tais que $r \leq x < s$.

Observe que $\mathbb{Z} = \cdots \cup [-3|a|, -2|a|) \cup [-2|a|, -|a|) \cup [-|a|, 0) \cup [0, |a|) \cup [|a|, 2|a|) \cup [2|a|, 3|a|) \cup \cdots$, onde $|a| = a$, se $a > 0$, e $|a| = -a$, se $a < 0$, sendo que os intervalos nesta reunião são dois a dois sem elementos em comum. Portanto, o inteiro b está em um, e apenas um, desses intervalos. Digamos que b pertença ao intervalo $[\tilde{q}|a|, (\tilde{q} + 1)|a|)$, para algum inteiro $\tilde{q}$. Assim, existem inteiros $\tilde{q}$ e r, unicamente determinados, tais que $b = |a|\tilde{q} + r$, com $0 \leq r < |a|$. Defina $q = \tilde{q}$, se $a > 0$, e $q = -\tilde{q}$, se $a < 0$. Então, $b = aq + r$, com $0 \leq r < |a|$, e sendo os inteiros q e r unicamente determinados por essas condições.□

Exemplo 1.2: Efetuando a divisão de 37 por 5, encontramos o quociente $q = 7$ e $r = 2$, ou seja, $37 = 7 \cdot 5 + 2$.

Problemas

1.1) Ache o quociente e o resto da divisão:

a) de 45 por 6.

b) de 56 por 4.

1.2) Utilizando uma calculadora que só realiza as quatro operações, como podemos encontrar o quociente e o resto da divisão entre dois números? Aplique este método da divisão de 456787 por 1234.

1.3) Divida sucessivamente o número 73 por 2 até encontrar o quociente nulo. É possível escrever este número em soma de potências de 2 ? Esta maneira é única?

O Jogo de Nim

Variante 1

Dispomos sobre uma mesa um certo número N de palitos. Estipulamos que cada jogador, na sua vez, possa retirar, no mínimo, 1 palito e, no máximo, n palitos, com $n > 1$. Perde o jogador que retirar o último palito.

Vamos exemplificar com $N = 34$ e $n = 3$.

Para encontrarmos uma estratégia vencedora, procuraremos uma situação (posição) vencedora. Para isso, vamos analisar a posição final do jogo, ou seja, quando está restando apenas um palito.

Ao final do jogo (antes da última jogada), queremos que reste apenas 1 palito. A posição vencedora após a jogada anterior à antepenúltima jogada deverá resultar em 5 palitos no total, sendo que o vencedor deverá retirar na penúltima jogada um número de palitos igual a 3, 2 ou 1, caso o oponente retire na antepenútima jogada 1, 2 ou 3 palitos, respectivamente.

Como $34 = 8 \times 4 + 2 = 8 \times 4 + 1 + 1$, para que o primeiro jogador vença o jogo, ele deve retirar inicialmente apenas 1 palito, e em suas jogadas posteriores a quantidade de palitos por ele retirados deve resultar em 4 quando somada à quantidade de palitos retirados pelo segundo jogador. Nesse caso, as posições vencedoras correspondem à quantidade de palitos na forma $4q + 1$, ou seja, $1, 5, 9, \ldots, 33$ palitos. O primeiro jogador vencerá seguindo essa estratégia.

Problemas:

1.4) Quem vence e qual a estratégia vencedora para $N = 22$ e $n = 4$ do jogo do NIM para variante 1.

1.5) Temos dois jogadores, Pedro e Maria. Considerando que os dois jogadores conheçam a estratégia vencedora do jogo NIM, Maria foi a primeira a jogar. Após ocorridas 31 jogadas, sobraram 1741 palitos e podendo retirar até 11 palitos. Responda:

a) Quem vencerá?

b) Qual será a próxima jogada do jogador vencedor?

c) Qual será o número máximo de jogadas sem se preocupar com a estratégia vencedora, e seguindo a estratégia vencedora?

1.6) Generalize a estratégia vencedora para esta variante.

Solução: Sejam q o quociente e r o resto da divisão euclidiana de N por $n + 1$. Temos que $N = q(n + 1) + r$, com $0 \leq r \leq n$. Divida mentalmente os palitos em q grupos de $n + 1$ palitos mais um grupo com r palitos. Há três casos para r.

- Se $r > 1$, o primeiro jogador vence com a seguinte estratégia. O primeiro jogador retira $r - 1$ palitos do grupo de r palitos, restando q grupos de $n + 1$ palitos mais 1 palito. O segundo jogador, ao retirar de 1 a n palitos, deixará o primeiro jogador em situação confortável de retirar o que sobra no primeiro grupo $n + 1$ palitos. Isto se repete para cada grupo de $n + 1$ palitos, fazendo com que, no final, sobre 1 palito na vez do segundo jogador, provocando sua derrota.
- Se $r = 1$, o segundo jogador vence com a seguinte estratégia. O primeiro jogador está em uma posição desfavorável, pois ao retirar de 1 a n palitos, deixará o segundo jogador em situação confortável de retirar o que sobra no primeiro grupo $n + 1$. Isto se repete para cada grupo de $n + 1$ palitos, fazendo com que, no final, sobre 1 palito na vez do primeiro jogador, provocando sua derrota.

- Se $r = 0$, o primeiro jogador vence com a seguinte estratégia. O primeiro jogador retirar n palitos de um dos grupos de $n + 1$ palitos, restando $q - 1$ grupos de $n + 1$ palitos mais 1 palito. O segundo jogador, ao retirar de 1 a n palitos, deixará o primeiro jogador em situação confortável de retirar o que sobra no primeiro grupo $n + 1$ palitos. Isto se repete para cada grupo de $n + 1$ palitos, fazendo com que, no final, sobre 1 palito na vez do segundo jogador, provocando sua derrota.

III.2. AULA 2 – Jogo de Nim Variante II

Dando sequência ao jogo de Nim, estudaremos outra variante, em que a estratégia será bem parecida.

Variante 2 do Jogo de Nim:

Da mesma forma que na variante anterior, dispomos sobre uma mesa um certo número N de palitos e estipulamos que cada jogador, na sua vez, possa retirar, no mínimo 1 palito, e no máximo, um número n pré-fixado de palitos, com $n > 1$. Ganha o jogador que retirar o último palito.

Façamos o mesmo exemplo para $N = 34$ e $n = 3$.

Ao final do jogo, queremos que não reste nenhum palito. A posição vencedora após a antepenúltima jogada deverá resultar em 4 palitos no total, sendo que o vencedor deverá retirar na penúltima jogada um número de palitos igual a 3, 2 ou 1, caso o oponente retire na antepenútima jogada 1, 2 ou 3 palitos, respectivamente.

Como $34 = 8 \times 4 + 2$, para que o primeiro jogador vença o jogo, ele deve retirar inicialmente apenas 2 palitos, e em suas jogadas posteriores a quantidade de palitos por ele retirados deve resultar em 4 quando somada à quantidade de palitos retirados pelo segundo jogador. Nesse caso, as posições vencedoras correspondem à quantidade de palitos na forma $4q$, ou seja, $0, 4, 8, \ldots, 32$ palitos. O primeiro jogador vencerá seguindo essa estratégia.

Problemas:

2.1) Quem vence e qual a estratégia vencedora para $N = 21$ e $n = 4$ do jogo do NIM para variante 2?

2.2) Temos dois jogadores, Pedro e Maria. Considerando que os dois jogadores conheçam a estratégia vencedora do jogo NIM, Maria foi a primeira a jogar. Após 31 jogadas, sobraram 1740 palitos, podendo-se retirar até 11 palitos. Responda:

a) Quem vencerá?

b) Qual será a próxima jogada?

2.3) Generalize a estratégia vencedora para esta variante.

Solução: Sejam q o quociente e r o resto da divisão euclidiana de N por $n + 1$. Temos que $N = q(n + 1) + r$, com $0 \leq r \leq n$. Divida mentalmente os palitos em q grupos de $n + 1$ palitos mais um grupo com r palitos. Há dois casos para r.

- Se $r \geq 1$, o primeiro jogador vence com a seguinte estratégia. O primeiro jogador retira os r palitos do grupo de r palitos, restando q grupos de $n + 1$ palitos. O segundo jogador, ao retirar de 1 a n palitos, deixará o primeiro jogador na situação confortável de retirar o que sobra no primeiro grupo de $n + 1$ palitos. Isto se repete para cada grupo de $n + 1$ palitos, fazendo sempre com que, depois do segundo jogador realizar sua jogada, sobre no grupo um número tal de palitos que possam ser retirados de uma só vez pelo primeiro jogador, levando-o à vitória.
- Se $r = 0$, o segundo jogador vence com a seguinte estratégia. O primeiro jogador está numa posição desfavorável, pois ao retirar de 1 a n palitos, deixará o segundo jogador em posição confortável de retirar o que sobra no primeiro grupo de $n + 1$ palitos. Isto se repete para cada grupo de $n + 1$ palitos, fazendo sempre com que, depois do primeiro jogador realizar sua jogada, sobre no grupo um número tal de palitos que possam ser retirados de uma só vez pelo segundo jogador, levando-o à vitória.

III.3. AULA 3 – Jogo de Nim Variante III

Estudaremos a seguir a principal variante do jogo de Nim, pois a partir dele foram feitos vários estudos nos quais se resolviam alguns problemas matemáticos. Para isso, será necessário o entendimento sobre sistema de numeração, principalmente na base dois, para compreender a estratégia vencedora deste jogo.

Teorema 3.1: Dados $a, b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$, existem números naturais $c_{0,} c_1, \dots, c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1 \cdot b + c_2 \cdot b^2 + \cdots + c_n \cdot b^n$.

Na representação $a = c_0 + c_1 \cdot b + c_2 \cdot b^2 + \cdots + c_n \cdot b^n$ diz-se que b é a base.

Demonstração: Usaremos Indução em a.

Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$. Supondo o resultado válido para todo número natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, existem números naturais n' e $d_{0,} d_1, \dots, d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_0 + d_1 \cdot b + d_2 \cdot b^2 + \cdots + d_{n'} \cdot b^{n'}.$$

Portanto,

$$a = bq + r = b\left(d_0 + d_1 \cdot b + d_2 \cdot b^2 + \cdots + d_{n'} \cdot b^{n'}\right) + r.$$

Logo, o resultado segue pondo $c_0 = r, n = n' + 1 \; e \; c_j = d_{j-1}$, para $j = 1, \dots, n$.

A unicidade vem da unicidade do quociente e resto na divisão euclidiana.

Quando $a = c_0 + c_1 \cdot b + c_2 \cdot b^2 + \cdots + c_n \cdot b^n$, com $0 \leq c_{0,} c_1, \dots, c_n < b$, escreveremos $a = (c_0 \, c_1 c_2 \dots \, c_n)_b$. □

A proposição seguinte é consequência imediata do teorema acima, e será usada para determinar as posições vencedoras na variante 3 do Jogo de Nim.

Proposição 3.1: Todo número natural se escreve de modo único como soma de potências distintas de 2.

Exemplo 3.1: O número que na base 10 se escreve 45 é representado como 110001 na base 2, pois $45 = 4 \cdot 10 + 5 = 2^5 + 2^4 + 2^0 = 1 \cdot\ 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1$, ou seja, $45 = (110001)_2$.

Problemas:

3.1) Represente cada número abaixo na base 2.

a) 1

b) 2

c) 25

d) 1234

3.2) Os números abaixo estão na base 2, passe para base 10.

a) 1001

b) 11

c) 100

d) 1010

3.3) (Olimpíada de Leningrado, 1988) Uma pilha de 500 pedras é dada. Dois jogadores jogam o seguinte jogo: Em cada turno, o jogador pode retirar $1,2,4,8,\ldots$. (qualquer potência de 2) pedras da pilha. O jogador que não puder mais jogar perde. Quem possui estratégia vencedora?

Variante 3 do Jogo de NIM

Dispomos uma mesa com N palitos separados em m grupos. Cada jogador, na sua vez, deve retirar um número qualquer de palitos de um, e apenas um, dos grupos. Os jogadores se alternam e quem retirar o último palito ganha o jogo.

A estratégia vencedora para este jogo pode ser expressa usando o sistema binário. Vamos usar a paridade dos números da base binária: em cada coluna será denotado P pela soma Par e I pela soma ímpar.

Considere as pilhas 101, 60 e 47.

Observamos primeiramente que

$$101 = (1100101)_2$$

$$60 = (111100)_2$$

$$47 = (101111)_2$$

Considere a soma feita em colunas, respeitando sua unidade em cada coluna.

	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
$\mathbf{101} =$	1	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{60} =$		1	1	1	1	0	0
$\mathbf{47} =$	$+$	1	0	1	1	1	1
	I	**I**	**I**	**P**	**I**	**I**	**P**

Afirmamos que uma posição é vencedora se, e somente se, o número de algarismos iguais a 1 em qualquer coluna for sempre par; ou seja, todas as letras na linha de baixo são iguais a P (de modo que a posição ilustrada acima, presumimos que é perdedora). Chamamos tais posições de “pares” e quaisquer outras de “ímpares”.

Generalização: Afirmamos que uma posição é vencedora se, e somente se, o número de algarismos iguais a 1 em qualquer coluna da soma for par, caso contrário é uma posição perdedora. Para provar esta afirmação vamos separar em três partes.

(I) A posição final do jogo é par.

(II) Qualquer jogada a partir de uma posição com soma par leva a uma posição com soma ímpar.

(III) De qualquer posição ímpar você pode mudar para alguma posição par em uma jogada.

Parte (I):

O jogo termina quando cada pilha tem 0 palitos e 0 é par.

Parte (II):

Observamos que, depois de cada jogada, o número de palitos em alguma pilha muda e, portanto, algum algarismo em sua representação binária muda. Isto significa que o número de algarismos iguais a 1 na coluna correspondente varia de 1. Como nenhuma outra linha pode mudar (os palitos só podem ser removidos de uma pilha de cada vez), a paridade daquela coluna também muda.

Parte (III)

Precisamos retirar diversos palitos de uma pilha de modo que a paridade do número de algarismos iguais a 1 nas colunas mude em todas as colunas que tenham um número ímpar de algarismos iguais a 1 (e só nessas colunas!). Considere a coluna mais à esquerda, que tem um número ímpar de algarismos iguais a 1, e escolha uma pilha que tenha algarismo 1 nesta coluna. Esta é a pilha de onde retiramos os palitos.

Observe que podemos retirar da pilha que tem 101 palitos, pois a partir dele tem-se o maior termo com soma ímpar. Basta transformar 1100101 em 0010011, ou seja, de 101 retire 82 palitos para ficar 19.

Problemas:

3.4) Determine em cada caso abaixo se a posição é vencedora ou não no jogo do NIM na variante 3.

a) Três grupos com 2 palitos cada.

b) Três grupos com dois deles com 2 palitos e 1 deles com 3 palitos.

c) Três grupos um com 1 palito, outro com 2 palitos e outro com 3 palitos.

d) Três grupos um com 160 palitos, outro com 71 e outro com 37.

3.5) Oito peões brancos estão na primeira fila de um tabuleiro de xadrez e oito peões pretos estão na oitava fila. Dois jogadores se revezam movendo verticalmente um de seus peões na direção da outra extremidade do tabuleiro por um número arbitrário de casas. Não é permitido pular sobre um peão de cor oposta. Perde o jogador que não pode jogar.

III.4. AULA 4 – Pseudo-jogos

Pseudo-jogos

São os tipos de jogos em que, independentemente das jogadas efetuadas, o primeiro ou o segundo jogador vai sempre vencer. Neste tipo de jogo não existe uma estratégia vencedora. Mas nosso objetivo aqui é mostrar porque o primeiro ou segundo jogador vai vencer, independentemente das jogadas. Vale lembrar que, apesar desta seção não precisar ter uma estratégia vencedora, o objetivo é argumentar o fato de sempre acontecer do primeiro ou segundo jogador sempre vencer.

Os estudantes aqui não têm a preocupação de procurar vencer o jogo, mas sim de justificar o porquê do resultado que sempre vão encontrar.

Vamos fazer alguns exemplos e, em seguida, apresentar problemas para os estudantes resolverem.

Exemplo 4.1: Temos três montes de pedras: um com 10 pedras, outro com 15 e o último com 20. Em cada jogada, o jogador da vez escolhe um dos montes e divide em dois montes menores. O jogador que não pode fazer isto perde. Quem ganha e como?

Solução: Após cada jogada, a quantidade de montes aumenta em 1. Como já temos 3 montes com um total de 45 pedras, ao final teremos 45 montes de 1. Portanto, ocorreram mais 42 jogadas e, logo, o segundo jogador vai vencer, pois como todas as jogadas em posição ímpar foram feitas pelo primeiro jogador, a jogada da posição 43 não será possível de ser feita pelo primeiro jogador.

Exemplo 4.2: Os números de 1 a 30 estão escritos em uma linha. Dois jogadores se revezam colocando sinais de mais e de menos entre os números. Depois de colocados todos os sinais, a expressão resultante é calculada (isto é, são efetuadas as somas e subtrações). O primeiro jogador vence se o resultado for par e o segundo vence se for ímpar. Quem vai vencer e como?

Solução: Primeiramente, observamos que a soma de 1 a 30 resulta em 465. Como não conseguimos separar em dois grupos iguais, então o resultado sempre será ímpar. Logo, o segundo jogador sempre vai vencer, independentemente das jogadas.

Problemas:

4.1) Duas crianças se revezam quebrando uma barra de chocolate retangular com 6 quadrados de largura e 8 de comprimento. Elas só podem quebrar a barra ao longo das divisões entre os quadrados. Se a barra quebra em vários pedaços, elas continuam quebrando até só restarem quadrados individuais. O jogador que não pode mais quebrar perde. Quem vai vencer?

4.2) Dois jogadores se revezam colocando torres em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se capturar mutuamente. Perde o jogador que não consegue colocar uma torre. Quem vai vencer?

4.3) Estão escritos em um quadro negro dez algarismos iguais a 1 e dez algarismos iguais a 2. Em cada jogada, o jogador da vez pode apagar dois algarismos quaisquer. Se os dois algarismos apagados forem iguais, eles serão substituídos por um 2. Se forem diferentes, serão substituídos por um 1. Se, no final, sobrar um 1, vence o primeiro jogador; se sobrar um 2, vence o segundo jogador.

Exemplo 4.3: Os números 25 e 36 estão escritos em um quadro negro. Em cada jogada, o jogador da vez escreve no quadro negro a diferença (positiva) entre dois números já escritos no quadro, se este número ainda não estiver no quadro. Perde o jogador que não puder escrever um número.

Para o professor:

Nesse jogo não é trivial encontrar a estratégia vencedora para quaisquer dois números arbitrários. Aproveite o jogo para abordar o conteúdo de Máximo Divisor Comum, que servirá para a solução do mesmo.

Máximo Divisor Comum (MDC)

Dados dois números inteiros a e b, não simultaneamente nulos, diremos que o número inteiro d é um divisor comum de a e b quando d divide a e d divide b.

Diremos que um número natural d é um máximo divisor comum (MDC) de a e b, não simultaneamente nulos, se possuir as seguintes propriedades:

(i) d é um divisor comum de a e b, e

(ii) d é múltiplo de todo divisor comum de a e b.

Usaremos a notação $\mathrm{MDC}(a,b) = d$.

Para encontrar o MDC de dois números, basta seguir dois passos:

(i) decompor os números a e b em fatores primos;

(ii) o MDC é o produto dos fatores primos comuns.

Exemplo 4.4: Vamos encontrar um número d, que é o máximo divisor comum entre 36 e 90, ou seja, $\mathrm{MDC}(36{,}90) = d$.

Observe que $36 = 2^2 \cdot 3^2$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ e, portanto, temos um fator 2 e dois fatores 3 em comum. Logo, $d = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Outra maneira de encontrar o MDC é utilizando o chamado algoritmo de Euclides, que envolve divisões sucessivas. Este método, em geral, é mais eficiente, pois quando trabalharmos com números grandes teremos dificuldade em decompor os números em fatores primos.

Como

$$90 = 2 \cdot 36 + 18$$

$$36 = 18 \cdot 2 + 0,$$

então $\mathrm{MDC}(36{,}90) = 18$.

Solução do Exemplo 4.3: Durante o jogo, o MDC dos dois números iniciais deve aparecer (pois subtrações sucessivas, podemos interpretar como o algoritmo de Euclides). Portanto, todos os múltiplos do MDC que não forem maiores do que os números originais também irão aparecer. No caso em pauta, o MDC dos números originais é 1, logo todos os número de 1 a 36 terão que aparecer. Teremos, então, 34 jogadas e o segundo jogador sempre vai vencer.

Problemas:

4.4) Encontre o máximo divisor entre os números a seguir.

a) $42\ e\ 60$

b) $112\ e\ 560$

c) $1124\ e\ 380$

d) $42280\ e\ 3248000$

e) $220, 360\ e\ 520$.

4.5) Três peças de tecido medem respectivamente, $180m$, $252m$ e $324m$. Pretende-se dividir em retalhos de igual comprimento. Qual deverá ser esse comprimento de modo que o número de retalhos seja o menor possível? Em quantos pedaços cada peça será dividida e qual o total de retalhos obtidos?

4.6) Os números 480 e 1200 estão escritos em um quadro negro. Em cada jogada, o jogador da vez escreve no quadro negro a diferença (positiva) entre dois números já escritos no quadro, se este número ainda não estiver no quadro. Perde o jogador que não puder escrever um número.

4.7) É dado um tabuleiro como o de xadrez, mas com dimensões (a) 9×10; (b)10×12; (c) 9×11. Em cada jogada, o jogador da vez pode eliminar uma linha ou uma coluna, desde que, no início da jogada, esta linha ou coluna tenha pelo menos um quadrado remanescente. O jogador que não pode jogar na sua vez perde.

III.5. AULA 5 – Simetria

Simetria

Nos problemas que serão apresentados neste tópico, iremos procurar simetrias, em que cada jogada anterior não afeta a jogada atual - ou seja, cada jogada efetuada não poderá destruir a estratégia escolhida.

Exemplo 5.1: Temos duas pilhas, cada uma delas com 50 pedras. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar quantas pedras quiser, mas só de uma das pilhas. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Solução: O segundo jogador pode vencer esse jogo se jogar de forma simétrica, ou seja, em cada jogada que o primeiro jogador efetuar, ele vai repetir retirando a mesma quantidade na outra pilha. Assim, se o primeiro jogador consegue jogar, o segundo também consegue.

Exemplo 5.2: Dois jogadores se revezam colocando moedas de um centavo em uma mesa redonda, sem empilhar uma moeda em cima da outra. O jogador que não puder colocar uma moeda perde.

Solução: Neste jogo, o primeiro jogador pode vencer, independentemente do tamanho da mesa! Para isso, ele precisa colocar a primeira moeda de modo que seu centro coincida com o dentro da mesa. Depois disso, ele coloca sua moeda sempre em uma posição simétrica à da moeda colocada por seu adversário em relação ao centro da mesa. Note que, com esta estratégia, as posições das moedas dos dois jogadores ficam simétricas depois de cada jogada do primeiro jogador. Segue que, se existir a possibilidade do segundo jogador colocar sua moeda, então também existirá um local para o primeiro jogador colocar sua moeda e, portanto, o primeiro jogador vence.

Problemas:

5.1) Dois jogadores se revezam colocando bispos em um tabuleiro de xadrez, de modo que não possam se capturar mutuamente (os bispos podem ser colocados em quadrados de qualquer cor). Perde o jogador que não puder fazer sua jogada.

5.2) Temos duas pilhas, cada uma delas com 7 pedras. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar quantas pedras quiser, mas só uma das pilhas. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

5.3) Dois jogadores se revezam colocando reis em tabuleiro 9×9 de modo que não possam se atacar mutuamente. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

5.4) Dois jogadores se revezam colocando cavalos em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se atacar mutuamente. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

5.5) Dois jogadores se revezam colocando bispos em um tabuleiro de xadrez. Em cada jogada, o bispo colocado tem que atacar pelo menos uma posição que não está sendo sob o ataque de outro bispo. Estamos supondo que um bispo "ataca" o quadrado onde ele está. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

5.6) Dois jogadores se revezam colocando torres em um tabuleiro de xadrez. Em cada jogada, a torre colocada tem que atacar pelo menos uma posição que não está sob o ataque da outra torre. Estamos supondo que uma torre "ataca" o quadrado onde ele está. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

5.7) Dado um tabuleiro 10×10 com cores alternadas, dois jogadores se revezam cobrindo pares de quadrados em dominó. Cada dominó consiste em um retângulo com 1 quadrado de largura e 2 quadrados de comprimento (que podem ser colocados na posição horizontal ou vertical). Um dominó não pode ser colocado com um quadrado em cima de outro dominó. Perde o jogador que não conseguir colocar seu dominó.

5.8) Colocamos uma peça em cada quadrado de um tabuleiro de damas 11×11. Os jogadores se revezam retirando um número arbitrário de peças vizinhas ao longo de uma linha ou de uma coluna. Vence o jogador que retirar a última peça.

5.9) Temos dois montes de pedras. Um tem 30 pedras e outro tem 20. Os jogadores se revezam removendo quantas pedras quiserem, mas só de um dos montes. Vence o jogador que remover a última pedra.

5.10) São colocados 20 pontos em um círculo. Os jogadores se revezam unindo dois pontos com um segmento de reta que não cruza outro segmento já desenhado. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

5.11) Uma margarida tem (a) 12 pétalas; (b) 11 pétalas. Os jogadores se revezam retirando uma única pétala ou duas que estejam uma do lado da outra. Perde jogador que não puder jogar na sua vez.

5.12) Dado um paralelepípedo retangular com dimensões (a) $4 \times 4 \times 4$; (b) $4 \times 4 \times 3$; (c) $4 \times 3 \times 3$, construído de cubos unitários, os jogadores se revezam colocando um espeto através de uma linha de cubos (paralelos às arestas do paralelepípedo), desde que exista pelo menos um cubo na linha que ainda não tenha sido espetado. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

5.13) Dois jogadores se revezam retirando pedaços de um chocolate consistindo em 5×10 quadradinhos. Em cada jogada eles quebram ao longo das divisões dos quadradinhos. Vence o primeiro jogador que obtiver primeiro um único quadradinho de chocolate.

5.14) Dois jogadores se revezam escrevendo ***X*** e ***O*** em um papel quadrilátero 9×9. O primeiro jogador escreve ***X*** e o segundo, ***O***. Ao final do jogo, o primeiro jogador ganha um ponto por cada linha ou coluna que contém mais ***X*** do que ***O***, enquanto o segundo ganha um ponto por cada linha ou coluna que contém mais ***O*** do que ***X***. Vence o jogador que fizer mais pontos.

III.6. AULA 6 – Posição vencedora

Posições vencedoras

Como já mencionamos neste trabalho, neste tópico vamos especificamente trabalhar com **posição vencedora**. Em geral, vamos encontrar uma estratégia e mostrar que esta estratégia satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 1

A posição final do jogo é uma posição vencedora.

Propriedade 2

Um jogador nunca pode mover de uma posição vencedora para outra vencedora em uma única jogada.

Propriedade 3

Um jogador sempre pode mover de uma posição não vencedora para uma vencedora em uma única jogada.

Exemplo 6.1: Em um tabuleiro de xadrez, uma torre está na posição $a1$. Dois jogadores se revezam movendo a torre de quantos quadrados que quiserem, horizontalmente para a direita ou verticalmente para cima. Vence o jogador que colocar a torre na posição $h8$.

Solução: Considere a estratégia de sempre mover a peça para a diagonal do tabuleiro. Note que a propriedade 1 é satisfeita, pois a última posição da diagonal ($h8$) é uma posição vencedora. A propriedade 2 também é satisfeita. Como mover de uma casa que pertence a diagonal para uma outra casa da mesma diagonal é uma jogada ilegal, não temos como passar de uma posição vencedora para uma outra vencedora em uma única jogada. Evidentemente, a propriedade 3 é satisfeita, já que qualquer posição fora da diagonal do tabuleiro é uma posição não vencedora, pois sempre na jogada seguinte conseguimos jogar para diagonal. Portanto, o primeiro jogador vence.

No jogo do próximo exemplo, admite-se que existe uma estratégia vencedora.

Exemplo 6.2: (Olimpíada de Leningrado, 1989) Duas pessoas jogam um jogo. O número 2 está inicialmente escrito num quadro. Cada jogador, na sua vez, muda o número atual N no quadro negro pelo número $N + d$, onde d é um divisor de N, com $d < N$. O jogador que escrever um número maior do que 19891988 perde o jogo. Qual deles irá vencer se ambos os jogadores são perfeitos.

Solução: Dizer que ambos os jogadores são perfeitos significa que ambos são capazes de implementar uma estratégia vencedora. Assim, basta determinar quem consegue implementar uma estratégia vencedora. Note que o início do jogo é estritamente determinado: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ (as setas $\rightarrow$ indicam as próximas jogadas). Afirmamos que o primeiro jogador vence o jogo. De fato, suponha, por contradição, que o segundo jogador vence o jogo. Neste caso, o segundo jogador sempre joga colocando o jogo em uma posição vencedora e o primeiro jogador, qualquer que seja a jogada que fizer, sempre coloca o jogo em uma posição perdedora. Se o primeiro jogador fizer a jogada $4 \to 5$, o segundo jogador só pode jogar $5 \to 6$. Logo, 6 é necessariamente uma posição vencedora. Mas, o primeiro jogador poderia obter a posição vencedora 6, jogando $4 \to 6$, e logo, 6 não poderia ser posição vencedora, o que é uma contradição.

Exemplo 6.3: (Olimpíada de Leningrado) Duas pilhas de palitos sobre uma mesa contêm 100 e 252 palitos, respectivamente. Dois jogadores jogam o seguinte jogo: cada jogador, na sua vez, pode remover alguns palitos de uma das pilhas de modo que o número de palitos retirados seja um divisor do número de palitos da outra pilha. O jogador que fizer o último movimento vence. Qual dos dois jogadores vencerá, se ambos são perfeitos?

Solução: O primeiro jogador perde. De fato, em cada momento do jogo, podemos registrar o expoente da maior potência de 2 que divide os números de palitos de cada pilha. Por exemplo, no início do jogo os números são $(2,2)$. A estratégia do segundo jogador consiste em manter esses números sempre iguais.

Suponha que, em um dado momento, a primeira pilha e a segunda pilha possuem $2^m a$ e $2^m b$ palitos, respectivamente, sendo a e b ímpares. O par registrado será (m,m).

Vejamos o que ocorre se retiramos um número de palitos da primeira pilha igual a um divisor d do número de palitos da segunda pilha. Como d divide $2^m b$, então $d = 2^k c$, com c ímpar e $k \leq m$. Se $k = m$, então o número de palitos que restará na primeira pilha será igual a $2^m a - d = 2^m a - 2^m c = 2^m (a - c)$, que é divisível por 2^{m+1}, já que $a - c$ é par. Assim, nesse caso, o par registrado passará a ter números diferentes. Se $k < m$, então o número de palitos que restará na primeira pilha será igual a $2^m a - d = 2^m a - 2^k c = 2^k (2^{m-k} a - c)$, sendo que $2^{m-k} a - c$ é ímpar e, logo, 2^k será a maior potência de 2 que divide o número de palitos que restará na primeira pilha.

Assim, também nesse caso, o par registrado, que é o par (k, m), passará a ter números diferentes. Assim, sempre que um jogador receber pilhas com quantidades de palitos que correspondam a um par registrado com números iguais, ele necessariamente passará para o outro jogador pilhas com quantidades de palitos que correspondam a um par registrado com números diferentes.

Suponha, agora, que na sua vez, um jogador receba as pilhas com quantidades de palitos que correspondam a um par registrado com números diferentes.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que a primeira pilha e a segunda pilha recebidas possuem $2^m a$ e $2^n b$ palitos, respectivamente, sendo a e b ímpares, e $m < n$. Nesse caso, basta o jogador retirar 2^m palitos da segunda pilha, restando assim na segunda pilha uma quantidade de palitos igual a $2^n b - 2^m = 2^m(2^{n-m}b - 1)$, sendo que $2^{n-m}b - 1$ é ímpar e, logo, 2^m será a maior potência de 2 que divide o número de palitos que restará na segunda pilha, resultando em um par registrado (m, m), com números iguais. Como inicialmente as quantidades de palitos nas pilhas correspondem a um par registrado com números iguais (o par $(2, 2)$), o primeiro jogador necessariamente passará, ao segundo jogador, as pilhas com quantidades de palitos correspondendo a um par registrado com números diferentes e o segundo jogador sempre pode (usando a estratégia vencedora descrita) passar, ao primeiro jogador, as pilhas com quantidades de palitos correspondendo a um par registrado com números iguais.

Dessa forma, apenas o primeiro jogador pode passar uma pilha com zero palito pela primeira vez, sendo que, na jogada seguinte, o segundo jogador retira todos os palitos da outra pilha, fazendo assim o último movimento e, portanto, vencendo o jogo.

A seguir, mostraremos as regras em relação a movimentação das peças de xadrez, para facilitar no entendimento dos problemas a respeito das movimentações com as peças.

Regras a respeito dos movimentos das peças do Jogo de Xadrez

Nenhuma peça pode se mover a uma casa ocupada por outra peça de sua cor. Se uma peça é movida para uma casa ocupada por uma peça adversária, esta é capturada e retirada do tabuleiro (isso faz parte do mesmo lance). Diz-se estar uma peça atacando uma casa se puder capturar naquela casa, de acordo com cada peça: Dama, Torre, Bispo, Cavalo, Peão e Rei.

Dama

A dama pode ser movida para qualquer casa ao longo da coluna, fileira ou diagonal que ocupa.

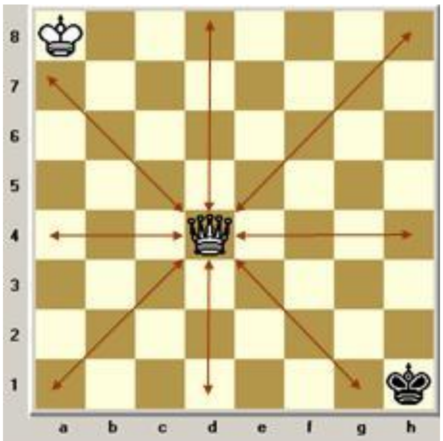

Figura 1: Movimento Dama

Torre

A torre pode ser movida para qualquer casa ao longo da coluna ou fileira que ocupa.

Figura 2 : Movimento Torre

Bispo

O bispo pode ser movido para qualquer casa ao longo de uma diagonal que ocupa.

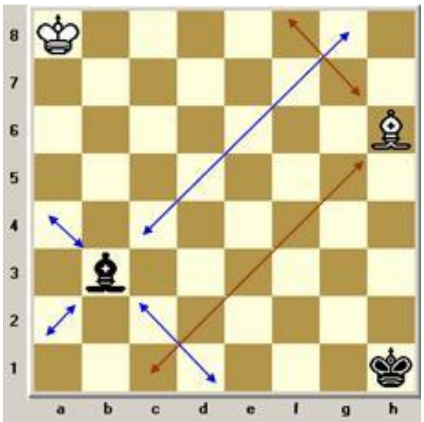

Figura 3 : Movimento Bispo

Cavalo

O cavalo pode ser movido para a casa mais próxima em relação à que ocupa, mas não na mesma coluna, fileira ou diagonal. Considera-se que ele “não passa” pelas casas adjacentes. É popularmente conhecido como movimento em “L”.

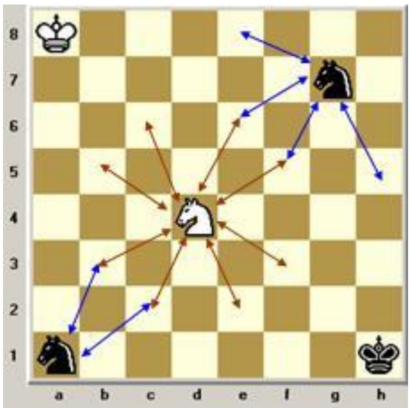

Figura 4: Movimento Cavalo

Rei

O rei movimenta-se apenas uma casa em qualquer direção. O Rei nunca pode se movimentar para uma casa que esteja sob ataque ou capturar uma peça que esteja defendida por uma peça adversária. No diagrama o rei preto só pode ir para cima, pois indo para a esquerda ou em diagonal estará sob ataque da torre branca. Quando estudarmos os movimentos especiais, veremos que existe uma situação em que o rei pode andar duas casas.

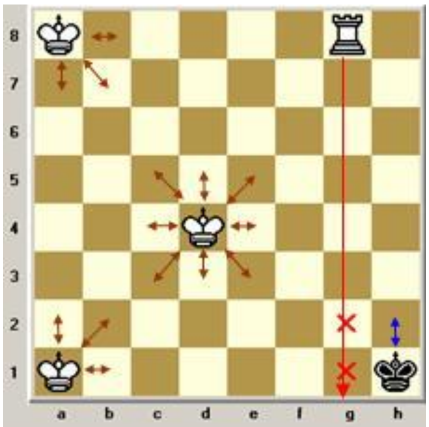

Figura 5: Movimento Rei

Peão

O peão só se movimenta para frente, sendo a única peça que não se move para trás. No primeiro lance de cada peão ele pode avançar uma ou duas casas. A partir do segundo lance de cada peão, ele movimenta-se apenas uma casa.

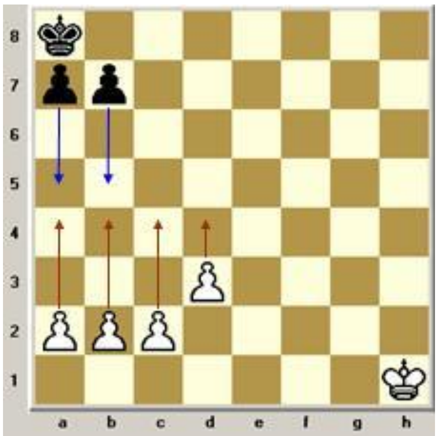

Figura 6: Movimento Peão

Problemas:

6.1) Colocamos um rei na posição $a1$ de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo o rei para cima, para a direita ou ao longo de uma diagonal indo para cima e para a direita. Vence o jogador que colocar o rei em h8.

6.2) Temos dois montes de doces. Um contém 20 peças e o outro, 21. Dois jogadores se revezam comendo todos os doces em um dos montes e separando o doce remanescente em dois montes não vazios (não necessariamente iguais). Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

6.3) Uma peça é colocada em cada uma das extremidades de uma tira de quadrados 1×20. Dois jogadores se revezam movendo as peças uma na direção da outra por um ou dois quadrados. Uma peça não pode pular sobre outra. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

6.4) Uma caixa contém 300 fósforos. Dois jogadores se revezam removendo não mais do que metade dos fósforos na caixa. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

6.5) Temos três montes de pedras. O primeiro contém 50 pedras, o segundo, 60 e o terceiro, 70. Uma jogada consiste na divisão de cada um dos montes contendo mais de uma pedra em dois montes menores. Vence o jogador que deixar todos os montes com apenas uma pedra.

6.6) O número 60 está escrito em um quadro negro. Dois jogadores se revezam subtraindo do número no quadro qualquer de seus divisores e substituindo o número original com o resultado desta subtração. Perde o jogador que escrever o número 0.

6.7) Temos dois montes de fósforos:

a) um monte com 101 fósforos e outro com 201 fósforos;

b) um monte com 100 fósforos e outro com 201 fósforos.

Dois jogadores se revezam movendo um número de fósforos de monte igual a um dos divisores do número de fósforos no outro monte. Vence o jogador que remover o último fósforo.

III.7. AULA 7 – Final de jogo

Análise a partir do final do jogo: um método para encontrar posições vencedoras

Até o momento, trabalhamos com jogos que se baseiam em intuição. Vamos descrever um método geral que nos permite encontrar um conjunto de posições vencedoras em muitos jogos.

Considere o problema 6.1 visto na **AULA 6**:

Exemplo 7.1: Colocamos um rei na posição $a1$ de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo o rei para cima, para a direita ou ao longo de uma diagonal indo para cima e para a direita. Vence o jogador que colocar o rei em h8.

Temos que a posição final do jogo é em h8, que é uma posição vencedora. Vamos usar as simbologias + e – para indicar posições vencedoras e perdedoras respectivamente. Observe a figura 1, onde se encontra um + indicando que é uma posição vencedora.

							+

Figura 7 : Posição vencedora final

Como as posições a partir dos quais o rei pode ser movido para uma posição vencedora em uma única jogada são posições perdedoras, daí temos a figura 2.

							-	+
							-	-

Figura 8 : Posição perdedora final

Utilizando as propriedades vistas na Aula 6, temos a figura 3, ou seja, prosseguindo a ideia da figura 2 adiante.

-	+		-	+	-	+	-	+
-	-		-	-	-	-	-	-
-	+		-	+	-	+	-	+
-	-		-	-	-	-	-	-
-	+		-	+	-	+	-	+
-	-		-	-	-	-	-	-
-	+		-	+	-	+	-	+
-	-		-	-	-	-	-	-

Figura 9 : Posição completa jogo do rei

Aplicando o mesmo método para o jogo da torre visto na Aula 6.

Exemplo 7.2: Em um tabuleiro de xadrez, uma torre está na posição $a1$. Dois jogadores se revezam movendo a torre de quantos quadrados que quiserem, horizontalmente para a direita ou verticalmente para cima. Vence o jogador que colocar a torre na posição $h8$.

Como já foi solucionado, bastar comparar a solução com a figura 4 abaixo:

-	-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	-	+	-
-	-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	-	+	-	-	-
-	-	-	+	-	-	-	-
-	-	+	-	-	-	-	-
-	+	-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-

Figura 10 : Posição completa jogo da torre

Exemplo 7.3: Temos duas pilhas de pedras, uma com 7 e outra com 5 pedras. Dois jogadores se revezam retirando um número arbitrário de pedras de uma das pilhas ou o mesmo número de cada pilha. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

Solução: Podemos enunciar a situação neste problema de outra forma, como uma que ocorre no tabuleiro de xadrez usual. Primeiro atribuímos coordenadas a cada quadrado do tabuleiro, numerando as linhas de 0 a 7, começando no topo, e as colunas de 0 a 7, começando à direita. Cada posição no jogo original é caracterizada por um par ordenado de números: o número de pedras de cada pilha seguido pelo número de pedras na segunda. Associamos a cada uma dessas posições o quadrado cujas coordenadas são esses números. Agora observamos que uma jogada no jogo original corresponde ao movimento de uma rainha no tabuleiro de xadrez: verticalmente para cima, horizontalmente para a direita ou ao longo de uma diagonal para cima e para direita. Portanto temos a figura 5 indicando as posições vencedores (+) e as posições perdedoras(-).

7	6	5	4	3	2	1	0	
-	-	-	-	-	-	-	+	0
-	-	-	-	-	+	-	-	1
-	-	-	-	-	-	+	-	2
-	-	+	-	-	-	-	-	3
+	-	-	-	-	-	-	-	4
-	-	-	-	+	-	-	-	5
								6
								7

Figura 11 : Posição jogo das pedras

Problemas:

8.1) Uma rainha está no quadrado $c1$ de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo a rainha para cima, para a direita ou ao longo de uma diagonal indo para cima e para direita. Vence o jogador que colocar a rainha em $h8$.

8.2) Um cavalo está na posição $a1$ de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo o cavalo dois quadrados para a direita e um para cima ou para baixo, ou dois quadrados para cima e um para a direita ou para a esquerda (os movimentos usais de um cavalo, mas em direções restritas). Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

8.3) **(a)** Temos duas pilhas, cada uma com 7 pedras. Em cada jogada, um jogador pode retirar uma única pedra de uma das pilhas ou uma pedra de cada pilha. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

(b) Além dos movimentos descritos acima, os jogadores podem retirar uma pedra da primeira pilha e colocá-la na segunda. As outras regras permanecem iguais.

8.4) Temos dois montes de fósforos, cada um com 11 fósforos. Em cada jogada, um jogador precisa retirar dois fósforos de um dos montes e um fósforo do outro. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

8.5) Este jogo começa com o número 0. Em cada jogada, um jogador pode somar o número atual a qualquer número natural de 1 a 9. Vence o jogador que chegar ao número 100.

8.6) Este jogo começa com o número 1. Em cada jogada, um jogador pode multiplicar o número atual por qualquer número natural de 2 a 9. Vence o jogador que chegar primeiro a um número maior do que 1000.

8.7) Este jogo começa com o número 2. Em cada jogada, um jogador pode somar ao número atual qualquer número natural menor do que ele. Vence o jogador que chegar ao número 1000.

8.8) Este jogo começa com o número 1000. Em cada jogada, um jogador pode subtrair do número atual qualquer número natural menor do que ele que seja uma potência de 2 (note que $1 = 2^0$). Vence o jogador que chegar ao número 0.

IV. SOLUÇÕES DE PROBLEMAS

1.1)a) Como $45 = 6 \cdot 7 + 3$, portanto $q = 7$ e $r = 3$.

b) Como $56 = 4 \cdot 14$, portanto $q = 14$ e $r = 0$.

1.2) Basta dividir o número 456787 por 1234, o número antes da vírgula será o quociente e para determinar o resto basta pegar o número 456787 e subtrair pelo produto do quociente por 1234, o resultado será o resto. Ou seja, obtemos $q = 370$ e $r = 207$.

1.3) A maneira é única e obtemos $73 = 2^6 + 2^3 + 2^0$.

1.4) Divida mentalmente 22 por 5, obtemos $q = 4$ e $r = 2$. Portanto divida em quatro grupos de 5 palitos, um grupo com 1 palito e outro também com 1 palito , logo o primeiro jogador tem essa estratégia vencedora, pois ele retira um grupo com 1 palito, após qualquer jogada do segundo jogador, retire uma quantidade de maneira que some 5 com a retirada do outro jogador, sendo assim, no final sobrará 1 palito.

1.5)a) Note que $1741 = 12 \cdot 145 + 1$, como a ideia é sempre deixar resto 1, não importa a jogada do Pedro, pois este é um formato de posição vencedora, portanto Maria detém a jogada vencedora.

b) Se Pedro retirar x, Maria retirará $12 - x$.

c) O número máximo será cada jogador retirar 1 palito, totalizando 1741. Mas considerando a estratégia vencedora, terá um total de 146 jogadas.

2.1) Dvida mentalmente os 21 palitos em grupos de 5, ou seja, $21 = 5 \cdot 4 + 1$. Neste caso o segundo jogador perde, pois o primeiro jogador, na primeira jogada retira 1 palito, em seguida, qualquer quantidade que o jogador retirar (dentre os grupos que você dividiu mentalmente), retire de maneira que some 5.

2.2)a) Divida 1740 por 12, note que o resto é zero, logo quem possui a estratégia vencedora é a Maria que foi a primeira jogar.

b) Não importa a jogada, pois ele está em uma posição perdedora.

3.1)a) 1

b) 10

c) 11001

d)10000001010

3.2)a) 9

b) 3

c) 4

d) 10

3.3) Dica: faça uma análise do jogo a partir do final e note que as posições perdedoras são os múltiplos de 3.

3.4)a) É vencedora pois quem joga recebeu uma posição com I (ímpar) e passa para o outro uma posição só com P (par)

	2^1	2^0
2=	1	0
2=	1	0
2=	1	0
	I	**P**

b) É vencedora pois quem joga recebeu uma posição com I e passa para o outro uma posição só com P.

	2^1	2^0
2=	1	0
2=	1	0
3=	1	1
	I	**I**

c) É uma posição perdedora, pois quando jogar, aparecerar uma posição I.

	2^1	2^0
1=	0	1
2=	1	0
3=	1	1
	P	**P**

d) É vencedora pois quem joga recebeu uma posição com I e passa para o outro uma posição só com P.

	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
$\mathbf{160} =$	1	0	1	0	0	0	0	0
$\mathbf{71} =$	0	1	0	0	0	1	1	1
$\mathbf{37} =$	0	0	1	0	0	1	0	1
	I	**I**	**P**	**P**	**P**	**P**	**I**	**P**

3.5) Após cada jogada do primeiro jogador, basta o segundo jogador repetir a jogada de forma simétrica, ou seja, se o primeiro jogador consegue jogar, o segundo também. Portanto o primeiro jogador perde.

4.1) Depois de cada jogada, o número de peças aumenta de um. No ínicio do jogo, só existe uma peça. No final do jogo, quando não há mais jogadas possíveis, o chocolate está dividido em 48 pequenos quadrados. Então tem que ter havido 47 jogadas, a última das quais, assim como todas as jogadas ímpares, foi feita pelo primeiro jogador. Portanto, o primeiro jogador sempre vence, independente de ccomo é quebrado o chocolate.

4.2) Depois de cada jogada, o número de linhas nas quais é possível colocar uma torre diminui de 1, assim como o número de colunas. Portanto, só podem ser feitas 8 jogadas ao todo e o segundo jogador fará a última jogada (vencedora).

4.3) A paridade do número de algarismos iguais a 1 no quadro permanece constante depois de cada jogada. Como o jogo começa com um número par de algarismos iguais a 1, não pode ficar um único algarismo igual a 1 no final do jogo (pois 1 é um número ímpar!). Portanto, o segundo jogador sempre vai vencer.

4.4) a) Utilizando o algoritmo de Euclides temos:

$60 = 1 \cdot 42 + 18$

$42 = 2 \cdot 18 + 6$

$18 = 3 \cdot 6 + 0$

Logo, $MDC(42{,}60) = 6$

b) $560 = 5 \cdot 112 + 0$

Logo, $MDC(112{,}560) = 112$

c) $1124 = 2 \cdot 380 + 364$

$380 = 1 \cdot 364 + 16$

$364 = 22 \cdot 16 + 12$

$16 = 1 \cdot 12 + 4$

$12 = 3 \cdot 4 + 0$

Logo, $MDC(1124{,}380) = 4$

d) $3248000 = 76 \cdot 42280 + 34720$

$42280 = 1 \cdot 32720 + 7560$

$32720 = 4 \cdot 7560 + 2480$

$7560 = 3 \cdot 2480 + 120$

$2480 = 20 \cdot 120 + 80$

$120 = 1 \cdot 80 + 40$

$80 = 2 \cdot 40 + 0$

Logo, $MDC(3248000{,}42280) = 40$

e) Para encontrar o MDC desses três números, podemos escolher dois deles, e o resultado fazer com o terceiro número, então temos:

$520 = 1 \cdot 360 + 160$

$360 = 2 \cdot 160 + 40$

$160 = 4 \cdot 40 + 0$

Logo, $MDC(520{,}360) = 40$

Vamos calcular $MDC(220{,}40)$

$220 = 5 \cdot 40 + 20$

$40 = 2 \cdot 20 + 0$

Daí temos que,

$MDC(220{,}360{,}520) = 20$

4.5) Como queremos retalhos de igual comprimento e o menor, basta calcular o $MDC(180{,}252{,}324)$. Então temos:

$324 = 1 \cdot 252 + 72$

$252 = 3 \cdot 72 + 36$

$72 = 2 \cdot 36 + 0$

Logo, $MDC(324{,}252) = 36$

$180 = 5 \cdot 36 + 0$

Logo, $MDC(180{,}252{,}324) = 36$

Como $180 = 5 \cdot 36$

$252 = 7 \cdot 36$

$324 = 9 \cdot 36$

Concluimos que temos $5{,}7$ e 9 a quantidade de retalhos que cada um será dividido, com um total de $5 + 7 + 9 = 21$ retalhos.

4.6) Temos que o $MDC(480{,}1200) = 240$, como irá aparecer todos os múltiplos de 240, logo aparecerá toda esta lista $240, 480, 720, 960$ e 1240. Portanto haverá mais três jogadas, sendo assim o segundo jogador perde, pois, não poderá efetuar sua jogada.

4.7) O jogador que deveria ganhar pode, de fato, cometer um erro e perder sua vantagem. O erro consiste em jogador de modo que os quadrados vazios ramanescentes estejam todos em uma coluna ou uma linha, permitindo que o oponente vença na próxima jogada. De fato, o perdedor neste jogo é o jogador que faz esta jogada infeliz. Note que, depois de eliminar uma linha em um tabuleiro mxn, podemos considerar os quadrados remanescentes como sendo um tabuleiro $(m-1) \times n$. Analogamente, ao eliminar uma coluna de um tabuleiro $m \times n$, formamos um tabuleiro $m \times (n-1)$. A única situação na qual cada jogada é "infeliz" é o caso do tabuleiro 2×2. Portanto, o jogador que deixar esta posição para seu opononente vencerá. Entretanto, como vimos, depois de cada jogada, a soma do número de linhas com o de colunas diminui de 1. Logo, a paridade deta soma no início do jogo vai determinar o vencedor. No caso (a) o vencedor vai ser o primeiro jogador, mas nos outros será o segundo.

5.1) Procure o eixo de simetria do tabuleiro. Podemos escolher, por exemplo, a reta entre a quarta e quinta linhas como eixo de simetria. Posições simétricas em relação a este eixo terão cores diferentes e, portanto, um bispo em uma posição não pode comer um bispo na posição simétrica. Logo, o segundo jogador pode vencer este jogo.

5.2) O segundo jogador pode vencer este jogo usando uma estratégia simétrica. Em cada jogada, ele tem que retirar tantas pedras quanto o primeiro jogador acabou de retirar, mas da outra pilha. Assim, o segundo jogador sempre pode fazer sua jogada.

5.3) O primeiro jogador vai vencer se colocar seu primeiro rei no centro do tabuleiro e depois adotar uma estratégia simétrica.

5.4) Como o cavalo sempre se movimenta de um quadrado preto para um branco ou vice-versa, o segundo jogador pode vencer usando simetria em relação a um ponto ou em relação a uma reta.

5.5) O segundo jogador ganha, usando simetria em relação a uma reta. O segundo jogador só mantém a simetria colocando seu bispo no quadrado simétrico à jogada anterior do primeiro jogador em relação à reta entre a quarta e quinta linha do tabuleiro. Como dois quadrados simétricos em relação a esta reta sempre têm cores diferentes, não podemos encontrar a situação em que a jogada do primeiro jogador impede a jogada simétrica do segundo.

5.6) O segundo jogador vence, é uma ideia semelhante ao exercício anterior.

5.7) O segundo jogador vence usando uma estratégia de simetria em relação a um ponto.

5.8) O primeiro jogador vence se começar removendo a peça no centro do tabuleiro e depois seguir uma estratégia de simetria em relação a um ponto.

5.9) O primeiro jogador vence, se começar tornando os dois montes iguais e depois adotar uma estratégia de repetir as jogadas do outro.

5.10) O primeiro jogador vence. Ele primeiro tem que desenhar uma corda que separa os pontos em dois grupos de 9. Depois ele replica simetricamente cada jogada de seu oponente. Note que esta estratégia não depende de como os pontos estão distribuídos no círculo.

5.11) O segundo vence em ambos os casos. Independente de como o primeiro jogador começa. O segundo jogador pode responder de modo a deixar duas fileiras idênticas de pétalas na flor. Depois ele seguir uma estratégia simétrica.

5.12) Nos casos (a) e (b) o segundo jogador vence seguindo uma estratégia de simetria em relação a um ponto. No caso (c), o primeiro jogador vencerá. Em sua primeira jogada, ele deve colocar seu espeto na linha contendo os cubos centrais das quatro camadas 3×3. Depois disso, ele deve jogar simetricamente em relação ao ponto central da figura.

5.13) Quem perde é o jogador que retira um retângulo de largura 1. O primeiro jogador vai vencer se começar cortando a barra de chocolate em dois pedaços $5x5$. Depois disso, ele joga simetricamente.

5.14) O primeiro jogador vencerá se colocar seu primeiro x no quadrado central e depois responder a cada jogada do segundo jogador com um x colocado simetricamente em relação ao quadrado central.

6.1) O primeiro jogador vence. Numeramos as linhas e colunas do tabuleiro de xadrez da maneira usual, de modo que as coordenadas do quadrado a1 sejam $(1,1)$ e as do quadrado h8 sejam $(8,8)$. As posições vencedoras são aquelas nas quais o rei ocupa um quadrado com ambas coordenadas pares. A primeira jogada consiste em mover o rei para b2.

6.2) O primeiro jogador vence. As posições vencedoras são aquelas nas quais ambos os montes têm um número ímpar de doces. A primeira jogada é comer o monte com 21 doces e dividir a pilha com 20 em dois montes com um número ímpar de doces.

6.3) O segundo jogador vence. As posições vencedoras são aquelas nas quais o número de quadrados desocupados entre as peças é divisível por 3.

6.4) O primeiro jogador vence. As posições vencedoras são aquelas nas quais a caixa contém $2^n - 1$ fósforos. A primeira jogada deia 255 fósforos na caixa.

6.5) O primeiro jogador vence. As posições vencedoras são aquelas nas quais o monte que contém mais pedras tem $2^n - 1$ pedras. A primeira jogada consiste em dividir os dois primeiros montes de qualquer jeito e dividir o terceiro em duas pilhas de 63 e 7 pedras, respectivamente.

6.6) Neste jogo, o jogador que obtiver um 1 vencerá. Será o primeiro jogador se ele reconhecer que escrever um número ímpar é uma posição vencedora.

6.7) No caso (a) o segundo jogador vence e, no caso (b), é o primeiro que vence. As posições vencedoras são aquelas nas quais cada monte contém um número ímpar de fósforos.

7.1) Analisando a partir do final do jogo, obtemos a configuração de sinais de mais e de menos da figura abaixo. O primeiro jogador vai vencer; de fato, ele pode escolher três movimentos iniciais: ir para c5, e3 ou d1.

-	-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	-	-	-	+	-
-	-	+	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	+	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	+	-	-	-	-

Figura 12 : Posição jogo da rainha

7.2) O segundo jogador vencerá, veja a distribuição de sinais abaixo:

-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-

Figura 13 : Posição jogo do cavalo

7.3) Dica: reformule o jogo em termos de tabuleiro e veja que é equivalente o jogo do exemplo (6.1).

7.4) Vence o primeiro jogador. Depois de uma reformulação em tabuleiro de xadrez, considere a distribuição de sinais da figura abaixo:

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
+	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+
+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+

Figura 14 : Posição jogo dos fósforos

7.5) Vence o segundo jogador. Basta analisar de trás para frente e perceber que os múltiplos de 10 são as posições vencedoras.

7.6) As posições vencedoras são os números de 56 a 111, ou de 4 a 6. Logo o primeiro jogador vence obtendo qualquer dos números $4{,}5$ ou 6.

7.7) As posições vencedoras são $500, 250, 125, 62, 31{,}15, 7$ e 3. Vence o primeiro jogador.

7.8) As posições vencedoras são os múltiplos de 3. O primeiro jogador vence subtraindo , por exemplo, $1, 4$ ou 16 na primeira jogada.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notório que diversos jogos estão ligados à matemática, e que podem ser aplicados a vários níveis de estudo. Neste trabalho, foram estudadas estratégias para resolver problemas de jogos combinatórios. Em *Teoria de Jogos*, estudamos com mais aprofundamento e mostramos que tem muitas aplicações, principalmente na economia. A ideia básica deste trabalho foi aproximar a matemática tradicional de uma matemática lúdica através da diversão que os jogos podem proporcionar.

Vale ressaltar que, para aplicar jogos em sala de aula, o professor deve ter um certo cuidado para não se distanciar do nosso objetivo principal, que é desenvolver a matemática. O jogo, nesse âmbito, está sendo usado para o aluno ter prazer em aprender matemática e não somente para diversão.

Existem vários outros tipos de jogos que são bastante interessantes para desenvolver matemática de maneira prazerosa, mas consideramos os tipos de jogos abordados no presente trabalho essenciais para o aluno começar a abstrair e entender bem o que é uma posição considerada vencedora.

VI. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] FOMIN, Dimitri & GENKIN, Sergey & ITENBERG, Ilia. **Círculos Matemáticos (A Experiência Russa)** . Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[2] POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2006.

[3] ZANETTI, F. **Uma proposta de sequência didática para treinamento olímpico em matemática.** 2013. 95f. Dissertação – Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal do Espiríto Santo, Vitória 2013.

[4] CARVALHO, J. **Jogos de subtração e outros jogos combinatórios**. 2013. 80 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade de Aveiro, Portugal 2013.

[5] HEFEZ, ABRAMO. **Elementos de Aritmética (Texto Universitário)**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro : SBM, 2012

[6] <**http://www.significados.com.br/**> Acessado em: 27 de Maio de 2015 às 15:35.