Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

A Circunferência Trigonométrica Numa Abordagem Concreta

Marconi Silveira Camera

Salvador - Bahia

Salvador 04 de dezembro de 2015

A Circunferência Trigonométrica Numa Abordagem Concreta

Marconi Silveira Camera

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos.

Salvador - Bahia

Salvador 04 de dezembro de 2015

Sistema de Bibliotecas da UFBA

Camera, Marconi Silveira.
A circunferência trigonométrica numa abordagem concreta / Marconi Silveira Camera. - 2016.
117 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. José Nelson Bastos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática, Salvador, 2015.

1. Trigonometria. 2. Trigonometria esférica. 3. Material didático. 4. Ensino - Meio auxiliares. I. Bastos, José Nelson. II. Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática. III. Título.

CDD - 516.24
CDU - 514.116

A Circunferência Trigonométrica Numa Abordagem Concreta

Marconi Silveira Camera

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, aprovada em de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. José Nelson Bastos (Orientador)
UFBA

Prof. Dr.Kleyber Mota da Cunha
UFBA

Prof.Dr. Antônio Teófilo Ataíde do Nascimemto
UNEB

A Deus, à minha família e aos amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha esposa por me apoiar nos dias em que tive que abrir mão da sua companhia para dedicar-me ao curso e ao trabalho de conclusão do mesmo. Aos colegas de curso, em destaque a Fábio Pinto e Rubens Gualberto de Oliveira, pela ajuda, apoio e incentivo nos momentos de estudos.

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou construção".(Freire ,1996).

Resumo

Neste material, é apresentado um resumo teórico sobre trigonometria, aspectos teóricos pedagógicos sobre o uso de materiais concreto em sala de aula e um relato de uma experimentação realizada com alunos de segundo ano do Ensino Médio, em aulas, sobre conteúdos de Trigonometria basicamente círculo trigonométrico. No trabalho, objetivou-se analisar o uso de material manipulável como ferramenta de apoio a professores para conteúdos matemáticos, na compreensão no círculo trigonométrico e resolução de problemas relacionados ao mesmo. Como instrumentos de pesquisa, foram empregados um questionário e observações das atividades desenvolvidas pelos estudantes.

Foram escolhidos, para apresentação neste material, os dados do questionário aplicado aos alunos e a análise dos resultados da aplicação de uma das atividades, denominada **A Circunferência Trigonométrica Numa Abordagem Concreta**, na qual foi construido uma circunferência trigonométrica, utilizando uma placa de madeira de dimensão 45cm por 45cm, pregos e borrachas elásticas. O uso de tal ferramenta, efetivamente, propiciou a compreensão dos enunciados e a resolução das questões apresentadas aos alunos. O objetivo deste estudo é mostrar que através do manuseio da Circunferência Trigonométrica o aluno adquira interesse, motivação e seja capaz de desenvolver as seguintes habilidades matemáticas:

- Familiarizar com a circunferência trigonométrica;
- Identifcar o seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente de arcos na circunferência trigonométrica;
- Estudar o comportamento das razões trigonométricas nos quadrantes;
- Relacionar as razões trigonométricas.

Palavras chaves: Trigonometria,Ciclo Trigonométrico , material manipulável, apoio aos professores.

Abstract

This material presents a theoretical overview of trigonometry and an account of a trial conducted with students of 2nd year of high school, lessons on Trigonometry content basically trigonometric circle. At work aimed to analyze the use of welding materials in support of profesores tool for mathematical content, understanding the trigonometric circle and solving the same problems. As research instruments were used a questionnaire and observations of the activities developed by the students. The analysis of the resolutions of the issues proposed in the instrument showed that students have many difficulties in relation to Trigonometry content.

Were chosen for presentation in this material, questionnaire data applied to the students and analysis of the results of the application of one of the activities called textbf The Circumference Trigonometric a Concrete Approach, which was built a trigonometric circumference, using nails and elastic rubbers. The use of such a tool effectively led to the understanding of the statements and the resolution of the issues presented to students.

- Familiar with the trigonometric circumference;
- Identify the sine, cosine, tangent, cosecant, secant and cotangent arcs on the circumference trigonometric;
- Identify the sine, cosine, tangent, cosecant, secant and cotangent arcs on the circumference trigonometric;
- Study the behavior of trigonometric ratios in quadrants

Key words: Trigonometry,Trigonometric Cycle, welding materials, teacher support.

Sumário

1 Introdução p. 13

1.1 Materiais concretos . . . p. 14

2 Historiando a Trigonometria p. 16

3 O Triângulo Retângulo p. 23

3.1 Pitágoras . . . p. 23

3.2 O teorema de pitagóricas . . . p. 25

3.3 Razões Trigonométricas . . . p. 26

3.4 Arcos notáveis . . . p. 28

4 A circunferência trigonométrica p. 30

4.1 Arcos e ângulos . . . p. 30

4.2 Arco orientado . . . p. 31

4.3 Unidades usuais de medidas de um arco . . . p. 31

4.4 Circunferência trigonométrica . . . p. 34

4.5 Seno de um Arco . . . p. 36

4.6 Cosseno de um arco . . . p. 37

4.7 Tangente de um Arco . . . p. 38

4.8 Secante de um Arco . . . p. 39

4.9 Cossecante de um Arco . . . p. 40

4.10 Cotangente de um Arco . . . p. 41

5 Relações trigonométricas p. 43

5.1 A relação fundamental e suas derivadas . . . . p. 43

5.2 Mudança de sinal do arco (ou Ângulo) . . . . p. 44

5.3 Soma de arcos . . . . p. 46

5.4 Redução ao primeiro quadrante . . . . p. 48

6 Funções trigonométricas p. 51

6.1 introdução . . . . p. 51

6.2 Função seno . . . . p. 53

6.3 Gráfico da função seno . . . . p. 54

6.4 Função cosseno . . . . p. 55

6.5 Grafico da função cosseno . . . . p. 57

6.6 Função tangente . . . . p. 58

6.7 Gráfico da função tangente . . . . p. 59

6.8 Função cotangente . . . . p. 60

6.9 Gráfico da função cotangente . . . . p. 61

6.10 Função secante . . . . p. 61

6.11 Gráfico da função secante . . . . p. 62

6.12 Função cossecante . . . . p. 63

6.13 Gráfico da função cossecante . . . . p. 63

6.14 Paridade das funções trigonométricas . . . . p. 64

7 Considerações pedagógicas do uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemáticas p. 66

8 A Circunferência Trigonométrica numa abordagem concreta p. 71

8.0.1 A Utilização da Circunferência Trigonométrica Concreta . . . . p. 72

8.0.2 Manipulando o seno no primeiro quadrante . . . . p. 72

Manipulando o seno no segundo quadrante . . . . p. 74

Manipulando o seno no terceiro quadrante . . . . p. 77
Manipulando o seno no quarto quadrante . . . . p. 80
Manipulando o cosseno no primeiro quadrante . . . . p. 84
Manipulando o cosseno no segundo quadrante . . . . p. 85
Manipulando o cosseno no terceiro quadrante . . . . p. 88
Manipulando o cosseno no quarto quadrante . . . . p. 91
Manipulando a tangente no primeiro quadrante . . . . p. 94
Manipulando a tangente no segundo quadrante . . . . p. 96
Manipulando a tangente no terceiro quadrante . . . . p. 98
Manipulando a tangente no quarto quadrante . . . . p. 100
8.1 Trabalhando em sala com a circunferência trigonométrica concreta . . p. 102
Atividades em sala . . . . p. 102
Considerações em sala . . . . p. 111
Considerações finais . . . . p. 114
Referências p. 116

1 *Introdução*

As Diretrizes Curriculares enfatizam a necessidade de se tornar o ensino de matemática mais dinâmico, contextualizado, interdisciplinar. Para tanto, indicam também a necessidade de educadores criativos, com visão histórica e crítica, comprometidos com a educação e que apresentem uma atitude investigativa sobre sua área de atuação, fundamentada em teorias pedagógicas e científicas; professores que sejam capazes de construir conhecimento pedagógico, de analisar várias formas de abordar os diferentes conteúdos de modo a solucionar os problemas que surgirem em sala de aula e de proporcionar aos seus alunos um ensino interessante da matemática com significado.

As Diretrizes têm procurado mostrar que um processo ensino-aprendizagem bem sucedido é aquele que possibilita ao aluno vivenciar experiências que lhe permitam participar, de forma dinâmica e com significado, na sua elaboração de conteúdos escolares.

O uso de material didático proporciona aos alunos participar de atividades manipulativas e visuais que podem servir de suporte para sua atividade cognitiva, bem como podem ser de grande importância no processo de ensino e promover a compreensão de conceitos e propriedades matemáticas. Mas não basta a escola ter vários se os professores, por não terem tido, em sua formação inicial a oportunidade de vivenciar atividades com esses materiais e não souberem como utilizá-los. Ou se não existir, na escola, um local apropriado para guardar esse material e para que os professores possam nele realizar seu trabalho com esses materiais.

É por este motivo que educadores, consideram a importância de existir, na escola um Laboratório de Ensino e Aprendizagem da Matemática, um espaço que venha a propiciar ao educador um ambiente adequado para o acesso e a reflexão sobre formas de ensinar e aprender Matemática com o auxílio de materiais didáticos diversos.

1.1 Materiais concretos

Os materiais manipuláveis são recursos didáticos que podem interferir fortemente no processo ensino-aprendizagem da matemática. Por certo seu uso depende do conteúdo a ser estudado, dos objetivos a serem atingidos, do tipo de aprendizagem que se espera alcançar e da filosofia e política escolar. Enfim, o material didático não está solto no contexto escolar: na opção e na forma como será utilizado está implícita a concepção que cada educador tem de ensino e de educação.

Muitas vezes, o professor desconhece a importância de utilizar certo material manipulável ou ainda não percebeu que conceitos e propriedades tanto ele como os alunos poderiam explorar. Daí ser fundamental que os professores tenham oportunidades de refletir sobre a sua utilização, analisando o que pode ser com ele trabalhado, sua efetividade pedagógica e como ele poderá despertar o interesse e a curiosidade do aluno.

Antes de utilizar um material manipulativo é importante que o professor o conheça bem e tenha claro o(s) objetivo(s) de seu uso: com este material as aulas serão mais atraentes? Com ele, o aluno terá mais facilidade de compreender o conteúdo? Ele oferece possibilidades ao aluno de relacionar, levantar conjecturas, pensar matematicamente, discutir e concluir?

Esta reflexão vai permitir que os professores se compreendam a necessidade de considerar que, para a aprendizagem de certo conteúdo, pode não bastar apenas o uso de um material, uma vez que este permite apenas uma visão parcial do objeto matemático em questão. Por outro lado, um mesmo material pode servir para a aprendizagem de diferentes conteúdos desde que sirva de suporte para o aluno pensar sobre diferentes questões.

Ao utilizar materiais manipuláveis, o professor deve tomar alguns cuidados, levando em conta que o mau uso deste instrumento poderá ser contrário ao objetivo que pretende com ele alcançar e, portanto, não contribuir em nada com o aprendizado de seu aluno.

> A solução para evitar o ensino das técnicas matemáticas tem sido o uso de material pedagógico. O aluno manuseia um material que propicia o desenvolvimento de conceitos matemáticos, mas apesar disso nem sempre ocorre uma formalização do conceito, onde ele tem a chance de sintetizar suas idéias, colocá-las no papel, compará-las com outras soluções para verificar sua validade (VALENTE, 1991, p.31).

Valente está querendo dizer com isso é que o educando não aprende matemática apenas "manipulando" os objetos, pois o conhecimento não está no material em si, mas é elaborado a partir das relações que o material o ajuda a estabelecer. Assim, cabe ao professor formular questões adequadas, que permitam o aluno observar aspectos importantes para a construção do conceito em questão.

Por melhor que seja, material manipulativo deve ser considerado apenas como uma "ferramenta" que auxilia aluno e professor no processo ensino aprendizagem. No entanto, seu potencial educativo depende menos do próprio material e mais do professor, das questões que ele formula para levar o aluno a pensar, a analisar.

O material e as atividades a serem com ele realizadas devem passar por um criterioso processo de seleção para que se possa alcançar o objetivo proposto e que sua manipulação se adequem à representação interna dos conceitos envolvidos. Por isso, a exploração de todas as possibilidades do material escolhido deve ser feita antes da aplicação da atividade, para que não aconteçam imprevistos na sua aplicação. Além disso, se as atividades não estiverem bem preparadas, corre-se o risco do material utilizado se transformar apenas em brinquedo para o aluno.

2 Historiando a Trigonometria

A origem da trigonometria não esta datada nos livros por isso podemos considerá-la incerta. No entanto, pode-se dizer que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.c., com os egípcios e babilônios.

A palavra **trigonometria** significa medida das partes de um triângulo. Não se sabe ao certo se o conceito da medida de ângulo surgiu com os gregos ou se eles, por contato com a civilização babilônica, adotaram suas frações sexagesimais. Mas os gregos fizeram um estudo sistemático das relações entre ângulos - ou arcos - numa circunferência e os comprimentos de suas cordas.

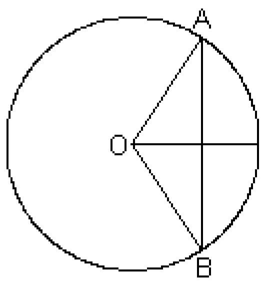
Os primeiros vestígios de elementos de trigonometria apareceram no Egito, em aproximadamente 1650 a.c. observou-se no Papiro Rhind quatro problemas envolvendo seqt de um ângulo que foram utilizados nas mediações das pirâmides, e foi também no Egito que surgiu a idéia de agregar sombras projetadas por uma vara na posição vertical para relacionar seu comprimento com as horas(relógio do sol) que mais tarde na Grécia, passaria a chamar gnômon.

Existem também vestígios de um estudo rudimentar entre os babilônios, que usavam a Trigonometria para resolver problemas práticos de navegação, de agrimensura (medição de terras) e de Astronomia. Sabemos hoje, que a Astronomia foi a grande impulsionadora do desenvolvimento da Trigonometria, principalmente entre os gregos e os egípcios.

O astrônomo Hiparco de Nicéia, por volta de 180 a 125 a.C., é considerado "o pai da Trigonometria"pois, na segunda metade do século II a.c., fez um tratado em doze livros em que se ocupou da construção do que provavelmente deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, incluindo uma tábua de cordas.

Fica claro que Hiparco fez esses cálculos com o proposito de usá-los em seus estudos de Astronomia. Hiparco foi uma figura que fez a diferença entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. As fundamentais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na construção de um catálogo estrelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes – tempo de duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclítica - e, por fim, a descoberta da precessão dos equinócios.

A "Trigonometria"era, portanto baseada no estudo da relação entre um arco arbitrário e sua corda. Hiparco escreve a respeito de sua descoberta do cálculo de comprimentos das cordas. Apesar da corda de um arco não ser o seno, uma vez conhecido o valor do seu comprimento, pode-se calcular o seno da metade do arco, pois a metade do comprimento da corda dividido pelo comprimento do raio do círculo é justamente esse valor, ou seja, para um círculo de raio unitário, o comprimento da corda subtendida por um ângulo x é $2.sen(\frac{x}{2})$ conforme figura 2.1 :



$A\hat{O}B = x$, $OB = r$ e $sen(\frac{x}{2}) = \frac{AB}{2r}$

Figura 1

A palavra **cosseno** nasceu somente no século XVII, como sendo o seno do complemento de um ângulo. A definição de seno e cosseno se originaram pela necessidade de resolver problemas relativos à Astronomia, no entanto o conceito de **tangente**, ao que tudo indica, surgiu da necessidade de calcular alturas e distâncias.

O matemático grego, **Menelau de Alexandria**, por volta de 100 d.c., construiu um tratado sobre cordas num círculo, em seis livros, porém vários deles se perderam no tempo. No entanto para felicidade geral o seu tratado *Sphaerica* , em três livros, se preservou numa versão árabe esse é o trabalho mais antigo conhecido sobre trigonometria esférica.

Porém, a mais influente e significativa obra trigonométrica da Antiguidade foi a *Syntaxis mathematica* , obra escrita por **Ptolomeu de Alexandria** que contém 13 livros. Este tratado ficou muito conhecido por sua compacidade e elegância, e para distinguí-lo de outros foi associado a ele o superior magiste ou "o maior". E no futuro Arábia o chamaram de o maior , e a partir de então a obra passou a ser conhecida por esse nome. Provando ter sofrido a mesma influência babilônica apresentada por Hiparco, Ptolomeu dividiu a circunferência em 360 partes e o diâmetro em 120 partes. Uso $\frac{377}{120}$ como aproximação para o número π . Apesar de não ter feito uso dos termos **seno** e **cosseno**, mas das cordas, utilizou o que pode ser considerado um prognostico da conhecida relação fundamental $sen^2x + cos^2x = 1$. Semelhante, em termos de cordas, Ptolomeu também conhecia as propriedades que, em linguagem que esta sendo usada atualmente, são:

- $sen(x + y) = senx.cosy + seny.cosy$
- $sen(x - y) = senx.cosy - seny.cosx$
- $cos(x + y) = cosx.cosy - senx.seny$
- $cos(x - y) = cosx.cosy + senx.seny$
- $\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$

De poder do equivalente dessas fórmulas, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0º e 180º. Calculou comprimentos de cordas, inscrevendo polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 10 lados num círculo. Isso lhe propiciou encontrar a corda subentendida por ângulos de 36º, 60º, 72º, 90º e 120º. Descobriu então, um método para localizar a corda subentendida pela metade do arco de uma corda conhecida. Esse fato que, em nossa simbologia, é o mesmo que $sen(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}}$, juntamente com interpolação, permitiu-lhe calcular cordas com um bom grau de precisão.

Posteriormente, surgiu a necessidade de uma nova unidade de medida para os ângulos. Foi quando apareceu o radiano, nomeado *radian*, pois os estudiosos discutiam uma "expressão"do ângulo em termos de π que inicialmente foi chamada "$\pi - medida$""circular"ou "medida arcual".O termo radiano (radian) aparece impresso pela primeira vez no dia 5 de junho de 1873, em exames de James Thonson na faculdade de Queens, nos Estados Unidos. Em 1871, Thomas Muir da Universidade de Andrew, também nos Estados Unidos, já tinha hesitado entre rad, radial e radian (radiano). Em 1874, Muir adotou radian depois de uma consulta a Thonson. Nenhum autor explica por que fizeram uso dessa unidade, mas o seu uso tornou mais simplificado várias fórmulas de matemática e física.

Porém no século VIII é que os cientistas voltariam a sua atenção para as obras trigonométricas de um povo, que sempre surpreendera o mundo com sua Matemática original e criativa, os Hindus.A mais antiga tábua de senos foi descoberta na Índia, onde essas tábuas sem dúvida teve origem.

Seus inventores, desconhecidos, conheciam as idéias matemáticas gregas e babilônias transmitidas como subprodutos de um florescente comércio romano com o sul da Índia, via Mar Vermelho e Oceano Índico. O *Surya Siddhanta*, cujo significado é sistemas de Astronomia, era um conjunto de textos matemáticos e regras enigmáticas de Astronomia, redigido em versos, em sânscrito, com poucas explicações e nenhuma prova. Foi composto no século IV ou V d.C., mas a versão que resta foi revista tantas vezes que é difícil dizer que partes estão em sua forma original.O mais notável aparecimento real do **seno de um ângulo** se deu no trabalho dos hindus. **Aryabhata**, por volta do ano 500, elaborou tabelas envolvendo metade de cordas que atualmente são tabelas de senos e usou jiva no lugar de seno. Esta mesma tabela foi reproduzida no trabalho de **Brahmagupta**, em 628, e um método particularizado para construção de uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara em 1150.

Durante algum tempo os matemáticos árabes oscilaram entre o Almajesto e a Trigonometria de jiva - de origem hindu - o desentendimento chegou ao final quando, entre 850 e 929, o matemático árabe **al-Battani** escolheu a Trigonometria hindu, incorporando uma preciosa inovação - o círculo de raio unitário - surgiu o nome da função seno. A palavra hindu jiva - meia corda, dada ao seno foi traduzida para o árabe que chamou o seno de jiba, uma palavra que tem o mesmo som que jiva.

O nome **seno** vem do latim sinus que significa seio, volta, curva, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, sinus é a tradução latina da palavra árabe jaib, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes em latim, eles traduziram jaib na palavra sinus.Em particular, o uso de **Fibonacci** do termo sinus rectus arcus rapidamente encorajou o uso universal de **seno**.

A razão para esse erro de interpretação seria o fato de que em árabe, como em hebraico, é acontece escrever-se apenas as consoantes das palavras, cabendo ao leitor a colocação das vogais. Além de jiba e jaib terem as mesmas consoantes, a primeira dessas palavras era pouco comum, pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito.

O termo seno certamente não foi aceito imediatamente como a notação padrão por todos os autores em tempos, quando a notação matemática era por si mesma uma nova concepção, muitos usaram a sua própria notação. **Edmund Gunter** foi o primeiro a usar a abreviação **sen** em 1624 em um desenho. O primeiro uso de sen em um livro foi em 1634 pelo matemático francês **Hérigone**, enquanto Cavalieri usava **Si** e Oughtred **S**.
Por sua vez, o **cosseno** seguiu um curso identico no que diz respeito ao desenvolvimento da notação. Viète usou o termo sinus residuae para o cosseno, **Gunter** em 1620, sugeriu co-sinus. A notação **Si.2** foi usada por Cavalieri, **s co arc** por Oughtred e **S** por Wallis.

A função **tangente** era a antiga função sombra, que tinha idéias unir a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação na elevação do Sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara e, portanto alterava o tamanho da sombra (figura 2).

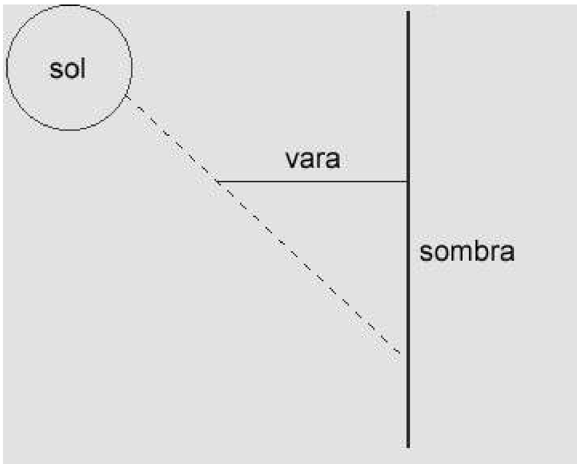


Figura 2

Assim, a **tangente** e a **cotangente** vieram por um caminho diferente daquele das cordas que geraram o **seno**. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram primeiramente associados a ângulos, sendo importantes para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto. O comprimento das sombras foi também de importância no relógio de sol. **Tales** usou os comprimentos das sombras para calcular as alturas das pirâmides através da semelhança de triângulos. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860. O nome **tangente** foi primeiro usado por **Thomas Fincke**, em 1583. O termo cotangente foi primeiro usado por **Edmund Gunter**, em 1620.

As notações para a **tangente** e a **cotangente** seguiram um desenvolvimento semelhante àquele do **sen** e **cos**. Cavalieri usou **Ta** e **Ta.2**, Oughtred usou **t arc** e **co arc**, enquanto Wallis usou **T** e **t**. A abreviação comum usada hoje é tan (ou tg) sendo que a primeira ocorrência desta abreviação é devida a **Albert Girard** em 1626, com **tan** escrito por cima do ângulo; **cot** foi primeiro usada por **Jonas Moore** em 1674.

A **secante** e a **cossecante** não foram usadas pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas surgiram quando os navegadores por volta do século XV começaram a preparar tabelas. **Copérnico** sabia da **secante** que ele chamou a hipotenusa.As Designações representativas usadas por vários autores foram semelhantes para as funções trigonométricas já discutidas.

O século XVIII viu as funções trigonométricas de uma variável complexa sendo estudadas. **Johann Bernoulli** achou a relação entre $sen^{-1}z$ e $logz$ em 1702. De **Moivre** publicou seu famoso teorema $(senx + cosx)^n = sennx + cosnx$ em 1722, enquanto **Euler**, em 1748, forneceu a fórmula $e^{ix} = cosx + isenx$

Logo após veio outros povos e outros estudiosos, alguns aprimorando as idéias já existentes e outros criando definições novas sobre a trigonometria, como: sistematização da trigonometria (Tratado dos triângulos), métodos para resolver triângulos, dentre outros.

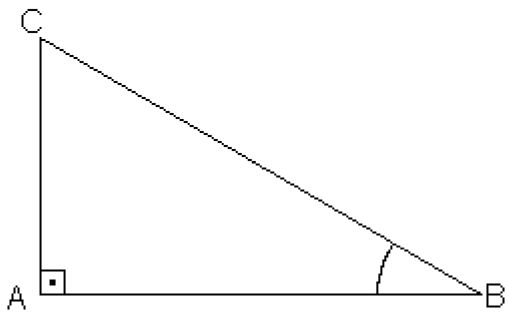
Assim, ela foi evoluindo, conforme a necessidade da sociedade. E hoje, no ensino médio, estudamos alguns dos vários conhecimentos da trigonometria, como:

- Trigonometria no triângulo retângulo;
- Circunferência trigonométrica;
- Funções Circulares;
- Relações trigonométricas;
- Mudança de quadrantes;
- Fórmulas de transformações;
- Equações trigonométricas;
- Inequações trigonométricas;
- Resolução de triângulo quaisquer.

3 O Triângulo Retângulo

Um triângulo é uma figura geométrica plana, constituída por três lados e três ângulos internos. Esses ângulos, tradicionalmente, são medidos numa unidade de medida, denominada grau e, cada um deles tem medida entre 0^0 e180^0, de modo que, em qualquer triângulo, a soma dessas medidas é 180^0. Um triângulo é dito retângulo quando um de seus ângulos é reto, isto é, tem medida igual a 90^0. Os outros dois ângulos, evidentemente, são agudos.

No triângulo retângulo ABC abaixo, consideremos, por exemplo, o ângulo que tem vértice em B, cuja medida x, em graus, é um número real que está no intervalo $]0^0,90^0[$.



3.1 Pitágoras

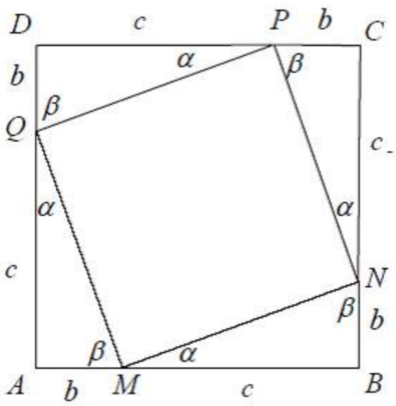
Ao triângulo retângulo esta associado o nome de um grande matemático grego Pitágoras.

Pitágoras nasceu na ilha de Samos, nas costas da Ásia Menor, por volta do ano 572 a.C. Nessa época Samos era uma rica cidade-estado mercantil, mas, talvez justamente por isso, sua vida intelectual era muito limitada, apesar de viverem ali muitos homens de talento. Esse fato, aliado ao duro regime político sob o qual Samos vivia, deve ter sido o motivo que levou Pitágoras, que sempre revelara pendores místicos e filosóficos, a deixar a cidade. Assim, aos 18 anos de idade ele mudou para a ilha de Lesbos, onde por dois anos estudou filosofia. Depois disso seguiu para Mileto, possivelmente para usufruir os ensinamentos de Tales, que era mais velho do que ele cerca de cinquenta anos. Talvez aconselhado por Tales, rumou então para o Egito, para tentar aprender o saber local, concentrado nas mãos das ordens sacerdotais. Depois de vencer duras provas acabou sendo aceito como aluno em Tebas, na Grécia, onde permaneceu por cerca de vinte anos. Depois disso Pitágoras voltou a Samos, onde pretendia se dedicar ao ensino. Mas, confirmando talvez o desinteresse dos sâmios pelo saber, Pitágoras só conseguiu um aluno e, assim mesmo, tendo de pagar-lhe para que ele assistisse às suas aulas. Esse fato, somado à situação da política de Samos, levou-o a emigrar mais uma vez, indo estabelecer-se agora na colônia grega de Crotona, no sul da Itália. Nessa cidade fundou uma escola que, apesar de seu misticismo, iria ter uma influência muito grande nos rumos da filosofia e da ciência, especialmente da matemática. Pitágoras é considerado o pai da matemática e da música, e é considerado também um dos mais importantes filósofos daquela época, como menciona o filósofo Bertrand Russel, que classificou Pitágoras como "um dos homens mais importantes de todos os tempos no plano intelectual". Por volta do ano 500 a.C., quando a escola estava no auge de seu esplendor, foi fechada sob a acusação de apoiar a aristocracia, contrária ao governo. Pitágoras teve então de se refugiar em Metaponto, cidade em que ficaria até morrer, por volta do ano 497 a.C. Mas durante quase dois séculos seus ensinamentos continuaram a serem transmitidos por seus discípulos, que se espalharam por diversas regiões.

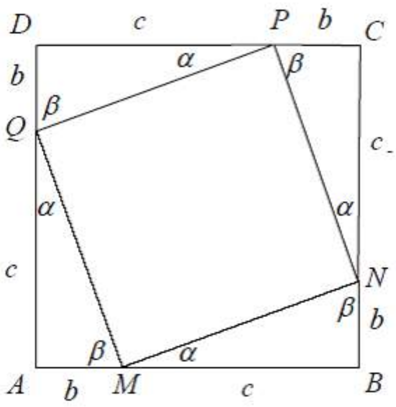
Uma das grandes contribuições da escola pitagórica à matemática foi organizar algumas partes da geometria, como a teoria das paralelas, por meio do método demonstrativo. Ou seja, por meio de teoremas. Diga-se, a bem da verdade, porém, que nenhum escrito da escola pitagórica sobreviveu até hoje e, portanto, informações como essa derivam de fontes indiretas muito posteriores. Assim, por exemplo, com base em alguns depoimentos posteriores, acredita-se que os pitagóricos tenham sido o primeiro a fazer a demonstração daquilo que se tornaria conhecido como o Teorema de Pitágoras. Atualmente esse teorema costuma ser enunciado assim: **"O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos"** .

3.2 O teorema de pitagóricas

Considere um quadrado ABCD de lado l. Sobre os lados desse quadrado marque pontos Q,P,N,M como na figura a seguir, de modo que:AM = BN = CP = DQ = b e MB = NC = PD = QA = c



Pelo caso de congruência LAL os triângulos PDQ e NCP, MBN, QAM, retângulos são congruentes ao triângulo retângulo da hipótese. Daí segue que QM =PQ =NP= MN =a. Isso implica que o quadrilátero MNPQ é um losango. Vamos mostrar que, de fato, ele é um quadrado. Suponhamos que os ângulos agudos do triângulo de hipótese sejam: α e β

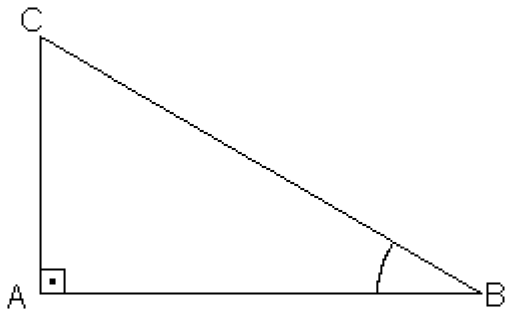


Pela congruência dos triângulos QAM, MBN, NCP e PDQ descritos acima, os ângulos agudos destes triângulos retângulos medem α e β, de acordo com a figura acima.

Como $\alpha + \beta = 90^0$ segue que cada ângulo interno do quadrilátero MNPQ deve ser reto. Isso demonstra que MNPQ é um quadrado de lado a. Daí a área do quadrado de lado b + c é igual a soma da área do quadrado de lado a com a área de quatro triângulos retângulos de catetos b e c . Isto é: $(b+c)^2 = 4.\frac{bc}{2}+a^2 \Longrightarrow b^2+2b.c+c^2$
$\Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$ como queríamos demonstrar.

3.3 Razões Trigonométricas

No triângulo ABC abaixo

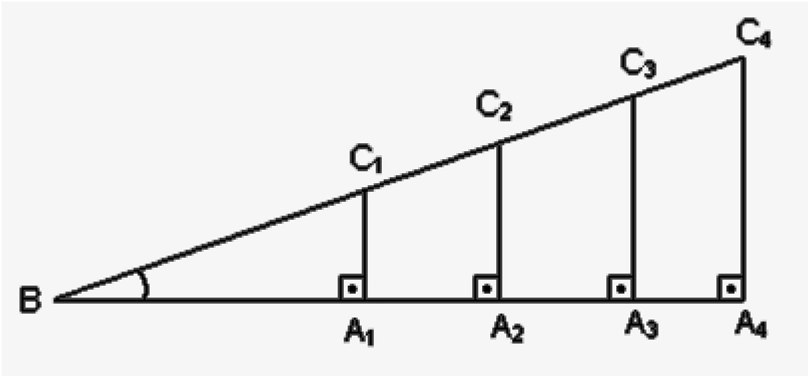


temos como Seno de $\hat{B}$ é a razão entre o comprimento do cateto oposto ao ângulo e o comprimento da hipotenusa do triângulo. Indicando o Seno de $\hat{B}$ por Sen$\hat{B}$, temos: $sen\hat{B} = \frac{AC}{BC}$.

E como cosseno de x é a razão entre o comprimento do cateto adjacente ao ângulo e o comprimento da hipotenusa do triângulo. Indicando o Cosseno de $\hat{B}$ por Cos$\hat{B}$, temos: $cos\hat{B} = \frac{AB}{BC}$.

A tangente de $\hat{B}$ é a razão entre os comprimentos do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo . Indicando a Tangente de $\hat{B}$ por Tg $\hat{B}$, temos : $tg\hat{B} = \frac{AC}{AB}$.

Um fato interessante é que, como pode ser observado na figura abaixo, usando o fato de que os triângulos BA_1C_1, BA_2C_2, BA_3C_3, BA_4C_4, são semelhantes, imediatamente concluímos que:



$sen\hat{B} = \dfrac{A_1C_1}{BC_1} = \dfrac{A_2C_2}{BC_2} = \dfrac{A_3C_3}{BC_3} = \dfrac{A_4C_4}{BC_4}$.

Assim como ,

$$cos\hat{B} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \frac{BA_4}{BC_4}.$$

e ,

$tg\hat{B} = \dfrac{A_1C_1}{BA_1} = \dfrac{A_2C_2}{BA_2} = \dfrac{A_3C_3}{BA_3} = \dfrac{A_4C_4}{BA_4}$.Ou seja, sen $\hat{B}$, Cos $\hat{B}$, tg $\hat{B}$ não dependem do particular triângulo retângulo ABC, mas apenas do ângulo $\hat{B}$, cuja medida é dada em graus.

Por outro lado podemos observar que :

$sen\ \hat{C_4} = \dfrac{BA_1}{BC_1} = \dfrac{BA_2}{BC_2} = \dfrac{BA_3}{BC_3} = \dfrac{BA_4}{CA_4}$.

Assim como ,

$cos\ \hat{C_4} = \dfrac{A_1C_1}{BC_1} = \dfrac{A_2C_2}{BC_2} = \dfrac{A_3C_3}{BC_3} = \dfrac{A_4C_4}{BC_4}$.Logo podemos notar que :

$sen\hat{B} = cos\ \hat{C_4}$

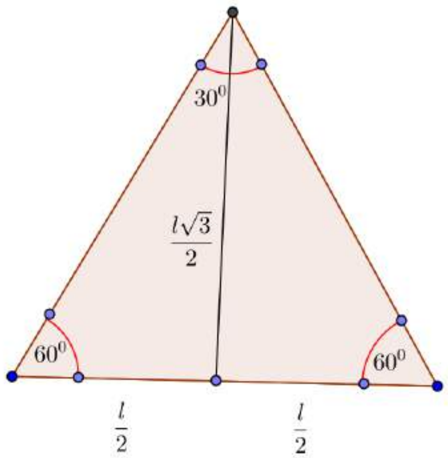
pois , $\hat{B} + \hat{C_4} = 90^0$.O que nos leva a concluir que :

Se dois ângulos são complementares ,então possuem seno igual a cosseno , ou seja $sen\hat{B} = cos(90^0 - \hat{B})$.

Observação : De acordo com a definição, é fácil verificar que, para todo $\hat{B}$ e $\hat{C}_4$ variando no intervalo]0,90^0[temos :
tg $\hat{B}$ =$\dfrac{Sen\hat{B}}{cos\hat{B}}$ e tg $\hat{C}_4$ =$\dfrac{Sen\ \hat{C}_4}{Cos\ \hat{C}_4}$.

3.4 Arcos notáveis

Vamos agora obter as razões trigonométricas de alguns ângulos notáveis. Começaremos com os ângulos de 30^0 e 60^0 .Dado um triângulo equilátero ABC de lado l conforme figura abaixo. Traçando a altura AH, obtemos o segmento HC =$\dfrac{l}{2}$ (já que a altura de qualquer triângulo equilátero também é a mediana). Pelo Teorema de Pitágoras sabemos que l^2 = AH^2+$(\dfrac{l}{2})^2$, isto é , $(AH)^2$ = l^2 - $\dfrac{l^2}{2}$ = 3 $\dfrac{l^2}{4}$, logo AH = $l\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Do triângulo retângulo AHC os ângulos $H\hat{A}C$ = 30^0 e $H\hat{C}A$= 60^0 temos :



- $sen\ 30^0$ = $\dfrac{\frac{l}{2}}{l}$ =$\dfrac{1}{2}$
- $cos\ 30^0$ = $\dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l}$ = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $tg\ 30^0$ = $\dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}}$ = $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

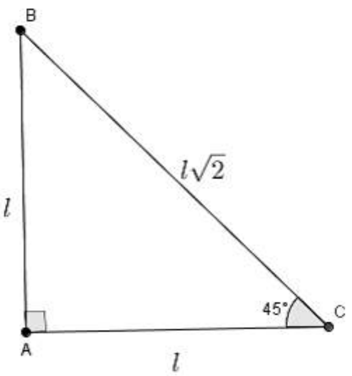
E ainda ,

- $sen\ 60^0 = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

- $cos\ 60^0 = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} = \dfrac{1}{2}$

- $tg\ 60^0 = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}}. = \sqrt{3}$

Considere agora um triângulo retângulo isósceles ABC da figura a seguir. Pelo teorema de Pitágoras a hipotenusa é igual a $l\sqrt{2}$, então:



- $sen\,45^0{=}\dfrac{l}{l\sqrt{2}}{=}\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

- $cos\,45^0{=}\dfrac{l}{l\sqrt{2}}{=}\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

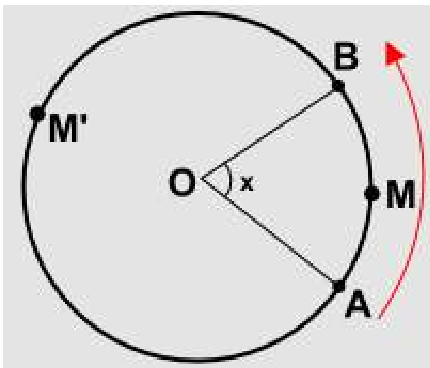
- $tg\ 45^0 = \dfrac{l}{l}{=}\ 1$

4 A circunferência trigonométrica

4.1 Arcos e ângulos

Seja uma circunferência de centro O sobre a qual tomamos dois pontos distintos, A e B. A seguir, ainda sobre a circunferência, tomemos um terceiro ponto M, distinto dos anteriores. A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um arco de circunferência:

- Arco de circunferência AMB, e
- Arco de circunferência AM'B.



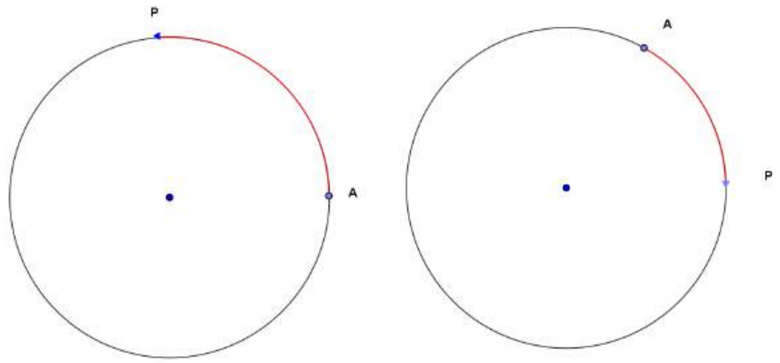
A e B são as extremidades do arco. É importante lembrar que:

A cada arco tomado corresponde um ângulo central(ângulo cujo vértice se localiza no centro da circunferência) e a medida de um arco equivale à medida do ângulo central correspondente.
Assim , por exemplo, se, na figura, x é a medida do ângulo central AÔB então m(AMB) = x. Analogamente se y é a medida do outro ângulo central então m(AM'B) = y.

Se não houver dúvida quando ao arco a que nos referimos, podemos escrever apenas AB ao invés de AMB.

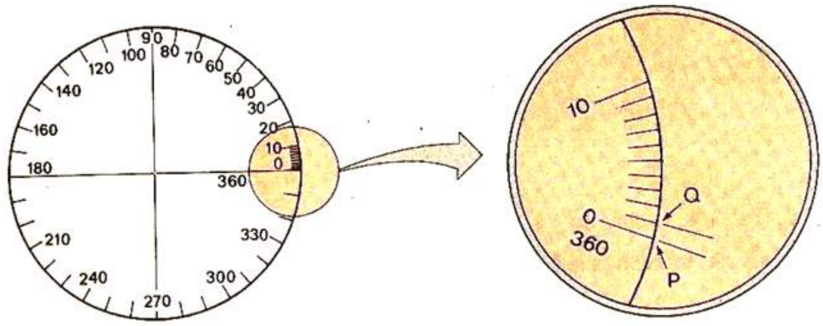
4.2 Arco orientado

Um arco de circunferência **AP** admite dois sentidos de percurso: de **A** para **P** e de **P** para **A** ; escolhido um dos sentidos , tem-se um **arco orientado** se o sentido adotado for de **A** para **P** , o ponto **A** é a origem e **P**, extremidade; nesse caso , o arco será indicado por **AP** e será considerado positivo. , **PA** indicará o arco orientado de **P** para A (origem de **P** e extremidade **A**)



4.3 Unidades usuais de medidas de um arco

GRAU
É um arco unitário cuja medida é igual a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência



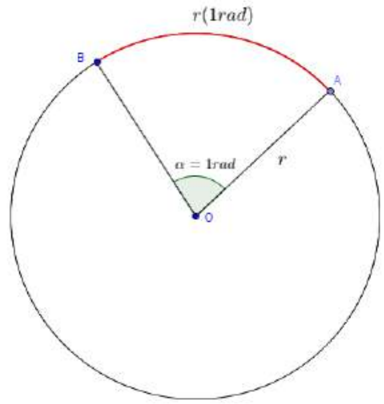
O grau admite como subdivisões o minuto ($'$) e o segundo ($''$), de forma que :

- $1^0 = 60'$

- $1' = 60''$
- $1^0 = 60' = 3600''$

RADIANO

É um arco cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência , α vale um radiano e representamos por rad .



Sabemos que o comprimento de uma circunferência é dado pela equação C = 2π r. Como 1rad é o arco cujo o comprimento é igual ao raio r, então o arco de uma volta de circunferência corresponde a 2πrad, ou seja 1π rad = 180^0. E ainda $1rad = \dfrac{180^0}{\pi} \simeq 57,3^0$.

O número π : Uma razão geométrica

Um problema que interessou matemáticos de todas as idades da civilização foi o cálculo da razão entre o comprimento (C) e o diâmetro ($2r$) de uma circunferência .

Sabe-se que qualquer que seja a circunferência , a razão $\dfrac{C}{2r}$ é constante , dando um número irracional representado por π ; disso resulta a conhecida expressão do comprimento da circunferência em função do raio : $\dfrac{C}{2r} = \pi \Rightarrow$ C = $2\pi\ r$.

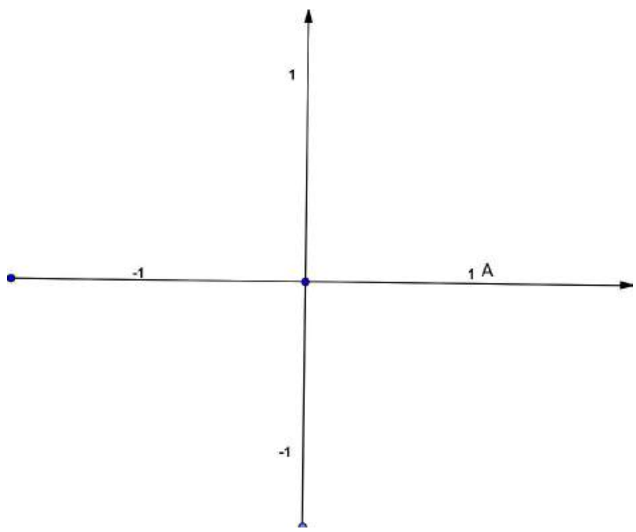
> Utilizando áreas ou perímetros regulares inscritos ou circunscritos à circunferência, matemáticos egípcios (cerca de 1800 a.C) babilónicos ,gregos chegaram a valores com aproximação apreciável do que hoje representamos por π.Arquimedes ,por exemplo "cercou "o valor de π fazendo a razão entre os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência ,começando com o hexágono regular e dobrando ,sucessivamente , o numero de lados , até chegar a 96 lados ".(Cal B.Boyer,**A History of Matematics)**

Observando a tabela a seguir, é interessante comparar algumas aproximações de π obtidas por matemáticos da Antiguidade com aproximação atual com , digamos 7 casas decimais

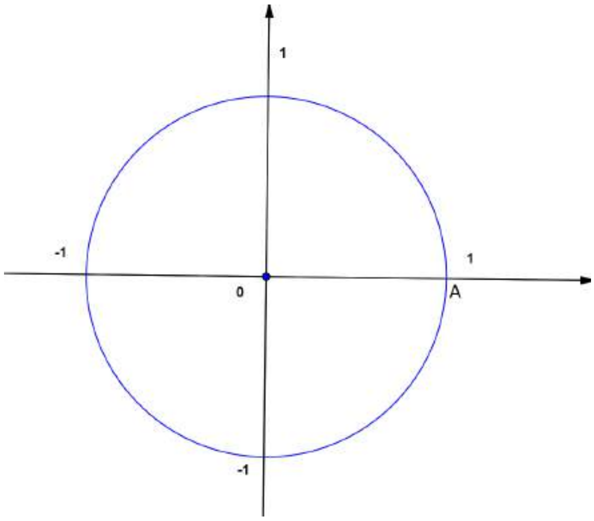
	$\frac{C}{2r}$	expressão decimal
Egípcios	$\frac{19}{6}$	3,666667
Babilônicos	$\frac{25}{8}$	3,1250000
Gregos (Arquimedes)	$\frac{223}{71} < \frac{C}{2r} < \frac{22}{7}$	entre 3,14408451 e 3,1428571

4.4 Circunferência trigonométrica

Num sistema cartesiano ortogonal , consideremos o ponto A do eixo Ox, de abcissa igual a (1,0)



Construimos, então, com centro na origem O o sistema do sistema , uma circunferência que passa por A e que possua, raio unitário.

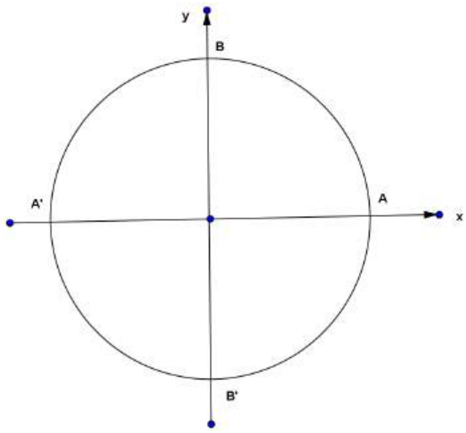


Vamos convencionar que o ponto A será a origem dos arcos orientados dessa circunferência, isto é, que para percorrer esses arcos, A será sempre *o ponto de partida.* Vamos também adotar o sentido **anti - horário** como **sentido positivo**e o sentido **horário**como negativo de percurso. Assim, essa circunferência (de raio unitário, origem no ponto A,), damos o nome de **ciclo trigonométrico** ou **circunferência trigonométrica .** Como a partir do ponto A cada arco trigonométrico tem como extremidade um único ponto na circunferência, é comum indicar o arco por esse ponto. Os arcos que têm a mesma extremidade e diferem apenas pelo número de voltas inteiras são chamados de arcos côngruos. Assim os arcos de 40^0,400^0,760^0 e -320^0 são arcos côngruos . (Representamos $40^0 \equiv 400^0 \equiv 760^0 \equiv -320^0$).Podemos escrever uma expressão que representa os arcos côngruos a α das seguintes maneiras:

- $\alpha + 360^0 k$ (quando α medido em graus) para todo $k \in Z$
- $\alpha + 2k\pi$(quandoα medindo em radianos)para todo $k \in Z$

Algumas extremidades importantes

Pelo uso que teremos ao longo da Trigonometria, devemos conhecer expressões dos arcos com extremidades nas interseções da trigonométrica com os eixos coordenados . A figura a seguir mostra os pontos A, B, A' e B' e a tabela a seguir fornece as expressões

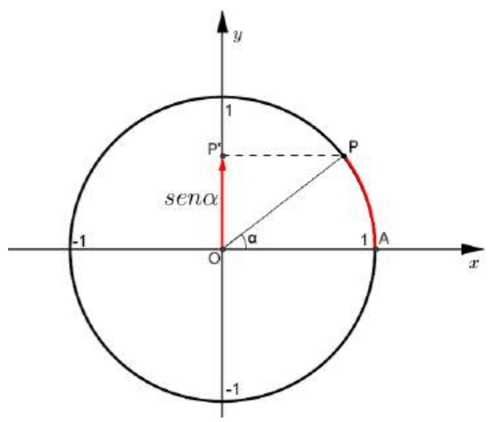


Extremidade	Expressão
A	$2k\pi$
B	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
A’	$\pi + 2k\pi$
B’	$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

(subintende-se que $k \in Z$)

4.5 Seno de um Arco

Definição: Considere, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP no sentido anti-horário cujo ângulo central é α. Define-se como Seno do arco AP ou do ângulo α ($sen\alpha$) a ordenada do ponto P, ou seja , $sen(\alpha) = \overline{OP'}$



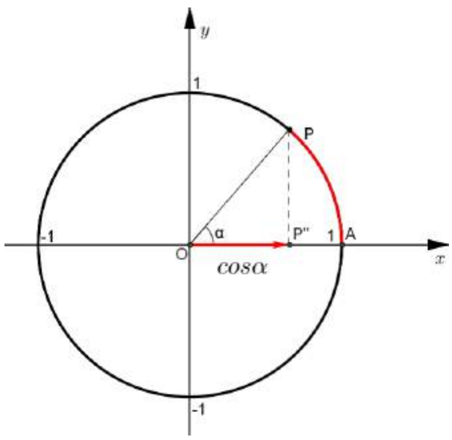
Analisando o Seno

- O Seno do ângulo α é positivo no primeiro e segundo quadrantes ($sen(\alpha) > 0$);

- O Seno do ângulo α é negativo no terceiro e quarto quadrantes ($sen(\alpha) < 0$);
- $sen(0) = 0, sen(\frac{\pi}{2}) = 1, sen(\pi) = 0, sen(\frac{3\pi}{2}) = -1$ e $sen(2\pi) = 0$;
- A medida que α aumenta no primeiro ou no quarto quadrante, o seno de α cresce;
- A medida que α aumenta no segundo ou no terceiro quadrante, o seno de α decresce;
- O valor máximo para o seno de um arco é 1 e o mínimo é -1. Portanto, o seno varia de 1 a -1 ($-1 \leq sen\alpha \leq 1$).

4.6 Cosseno de um arco

Definição: Considere, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α. Define-se como cosseno do arco AP ou do ângulo α ($cos\alpha$) a abcissa do ponto P, ou seja , $cos(\alpha) = \overline{OP''}$



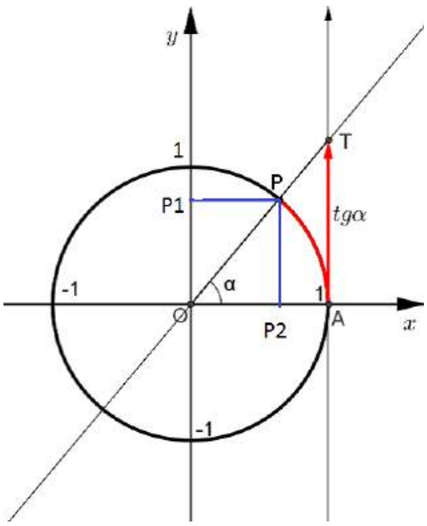
Analisando o Cosseno

- O Cosseno do ângulo α é positivo no primeiro e quarto quadrantes ($cos(\alpha) > 0$);
- O Cosseno do ângulo α é negativo no segundo e terceiro quadrantes($cos(\alpha) < 0$);
- $cos(0) = 1, cos(\frac{\pi}{2}) = 0, cos(\pi) = -1, cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$ e $cos(2\pi) = 1$
- A medida que α aumenta no terceiro ou no quarto quadrante, o cosseno de α cresce;
- A medida que α aumenta no primeiro ou no segundo quadrante, o cosseno de α decresce;

- O valor máximo para o cosseno de um arco é 1 e o mínimo é -1. Portanto, o cosseno varia de 1 a -1 (-1$\leq$ cos α $\leq$ 1)

4.7 Tangente de um Arco

Definição: Dado, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α. Para obter a tangente de um arco devemos traçar um novo eixo (chamaremos de eixo das tangentes) paralelo ao eixo das ordenadas e que tangencia a circunferência trigonométrica no ponto A.
Consideremos a reta OP e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes.
Denominamos tangente de α (para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$) e indicamos tg($\alpha$) a medida algébrica do segmento de reta AT ver figura a seguir.



Na figura acima observamos que a noção de tangente ,definida dessa forma ,coincide com aquela que já conhecíamos .Basta vermos o triângulo retângulo OAT da figura ,onde temos :

$$tg(\alpha)=\frac{cateto.oposto}{cateto.adjacente}=\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AT}}{1}=\overline{AT}$$

Por outro lado,para o triângulo OP_2P também podemos escrever

$$tg\alpha=\frac{cateto.oposto}{cateto.adjacente}=\frac{\overline{P_2P}}{\overline{OP_2}}=\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

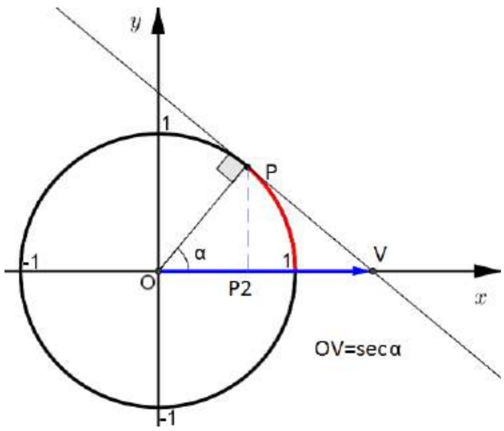
O que mostra que a conhecida relação fundamental $tg(\alpha)=\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$ continua valendo.

Analisando a Tangente

- tg(0) = tg(π) = tg(2π) = 0;
- Se α pertence ao primeiro ou terceiro quadrante, então a tangente de α é positiva (tg (α) > 0));
- Se α pertence ao segundo ou quarto quadrante, então a tangente de α é negativa (tg (α) < 0);
- A medida que α cresce, a tangente de α também cresce;
- A tangente de α pode assumir qualquer valor real.

4.8 Secante de um Arco

Definição: Seja, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α.
Consideremos a reta tangente a circunferência trigonométrica passando pelo ponto P e seja V sua intersecção com o eixo das abscissas (eixo dos cossenos). Denominamos secante de α (para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo k $\in$ Z) e indicamos sec(α) a medida algébrica do segmento de reta OV (ver Figura).



Para confirmar este fato, basta ver os triângulos retângulos :

$\triangle$ ABC $\sim \triangle\ OP_2P$

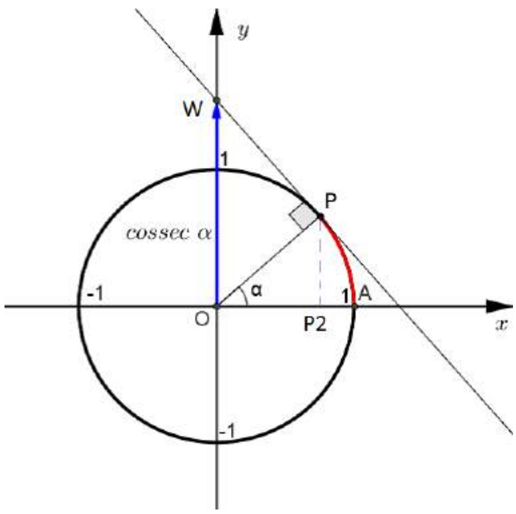
$$\frac{\overline{OV}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OP_2}}\ \text{, donde}\ \overline{OV} = \frac{1}{\overline{Op_2}} = \frac{1}{cos(\alpha)}\ \text{e assim ,}\ \overline{OV} = sec(\alpha)$$

Analisando a Secante

- sec(0) = 1, sec(π) = -1 e sec(2π) = 1;
- Se α pertence ao primeiro ou quarto quadrante, então a secante de é positiva (sec (α) > 0);
- A medida que α aumenta no terceiro ou quarto quadrante, a secante de α decresce;
- A medida que α aumenta no primeiro ou segundo quadrante, a secante de α cresce;
- A secante de α pode assumir qualquer valor real que não pertença ao intervalo] - 1; 1[.

4.9 Cossecante de um Arco

Defnição: Dado, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α.
Consideremos a reta tangente a circunferência trigonométrica passando pelo ponto P e seja W sua intersecção com o eixo das ordenadas (eixo dos senos). Denominamos cossecante de α para $\alpha \neq k\pi$ (sendo $k \in Z$) e indicamos cossec(α) a medida algébrica do segmento de reta OW (ver Figura).



$\triangle$ OPW $\sim \triangle\ OP_2P$

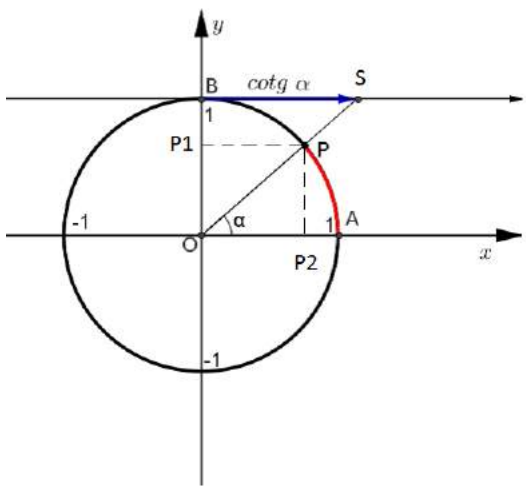
$\dfrac{\overline{OW}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{P_2P}}$, donde $\overline{OW} = \dfrac{1}{\overline{P_2P}} = \dfrac{1}{sen(\alpha)}$, e assim , $\overline{OW} = cossec(\alpha)$

Analisando a Cossecante

- Cossec($\frac{\pi}{2}$) $= 1$ e $Cossec(\frac{3\pi}{2}) = -1$;
- Se α pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então a cossecante de α é positiva (cossec ($\alpha > 0$));
- Se α pertence ao terceiro ou quarto quadrante, então a cossecante de α é negativa (cossec ($\alpha < 0$));
- A medida que α aumenta no primeiro ou quarto quadrante, a cossecante de α decresce;
- A medida que α aumenta no segundo ou terceiro quadrante, a cossecante de α cresce;
- A cossecante de α pode assumir qualquer valor real que não pertença ao intervalo] - 1; 1[.

4.10 Cotangente de um Arco

Defnição: Dado, no círculo trigonométrico, um ponto P formando um arco AP cujo ângulo central é α. Para obter a cotangente de um arco devemos traçar mais um eixo (chamaremos de eixo das cotangentes) paralelo ao eixo das abscissas e que tangencia a circunferência trigonométrica passando pelo ponto B.
Consideremos a reta OP e seja S sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de α para $\alpha \neq \pi$,(sendo $k \in Z$) e indicamos cotg(α) a medida algébrica do segmento de reta BS (ver Figura).



Observando que os triângulos OBS e OP_2 *são semelhantes* , podemos escrever a proporção

$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{P_2P}}$ donde resulta (lembrando que $\overline{OB} = 1$):

$$cotg(\alpha){=}\frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$$

Analisando a Cotangente

- $cotg(\frac{\pi}{2}) = cotg(\frac{\pi}{2}) = 0;$
- Se α pertence ao primeiro ou terceiro quadrante, então a cotangente de α é positiva $(cotg(\alpha) > 0)$;
- Se α pertence ao segundo ou quarto quadrante, então a cotangente de α é negativa $(cotg(\alpha) < 0)$;
- A medida que α cresce, a cotangente de α decresce;
- A cotangente de α pode assumir qualquer valor real.

5 *Relações trigonométricas*

5.1 A relação fundamental e suas derivadas

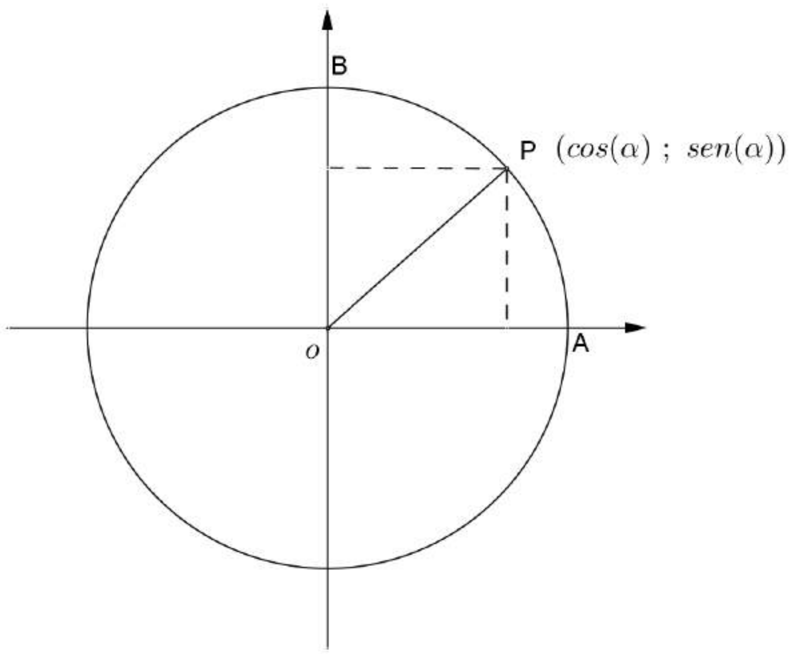
Noções básicas de Geometria Analítica:distância entre dois pontos.

A distância entre dois pontos **A** e **B** é indicada pelo símbolo $\delta_{\mathbf{AB}}$. Se os pontos têm coordenadas cartesianas $(x_A; y_B)$,a distância entre eles é dada pela *fórmula*:

$$\delta_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Podemos mostrar facilmente que a *primeira relação fundamental*,já conhecida,vale ainda após a generalização que fizermos .

Para isso , basta observar que a distancia do ponto **P**ao centro **O** da circunferência trigonométrica é igual a 1.



Escrevemos $\delta_{OP} = 1$. Mas as coordenadas cartesianas desses são **P** =$(cos(\alpha), sen(\alpha))$ e **O** (0;0).Assim, escrevemos $\delta_{OP} = \sqrt{(cos(\alpha) - 0)^2 + (sen(\alpha) - 0)^2} = \sqrt{cos^2\alpha + sen^2(\alpha)}$ = 1.

Então é imediato que :

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$$

Dividindo -se $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ por $cos^2(\alpha)$ obten-se $\dfrac{sen^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} + \dfrac{cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)} = \dfrac{1}{cos^2(\alpha)}$ $\Longrightarrow tg^2(\alpha) + 1 = sec^2(\alpha)$.

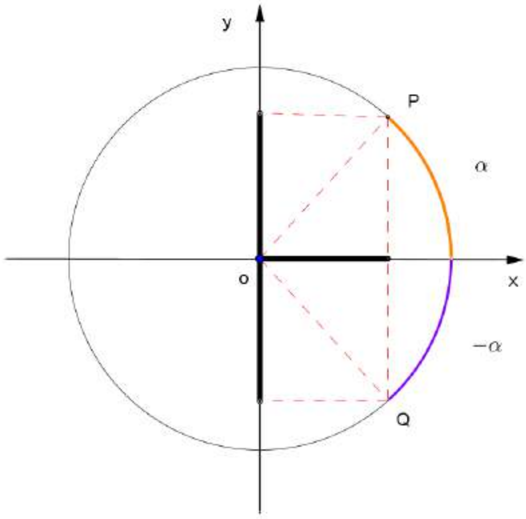
Podemos fazer o mesmo com $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ por $sen^2(\alpha)$ e encontramos $\dfrac{sen^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} + \dfrac{cos^2(\alpha)}{sen^2(\alpha)} = \dfrac{1}{sen^2(\alpha)} \Longrightarrow 1 + cotg^2(\alpha) = cossec^2(\alpha)$

5.2 Mudança de sinal do arco (ou Ângulo)

Aqui pretendemos estabelecer a comparação entre as expressões trigonométricas de um arco de medida α,$(sen(-\alpha), cos(-\alpha)$ etc.).Os arcos de medidas α e $-\alpha$ são chamados

ARCOS OPOSTOS.

Se o ponto **P** (figura abaixo) é extremidade do arco de medida α, é imediato que a extremidade **Q** do arco de medida $-\alpha$ ocupa *uma posição simétrica de* ***P*** *em relação ao eixo* Ox, já que ambos têm a mesma origem **A** . Resulta portanto que os pontos **P** e **Q** tem a mesma abscissa e ordenadas opostas,o que equivale a dizer que arcos de medidas α e $-\alpha$ têm o mesmo cosseno e senos opostos , isto é : $\boldsymbol{cos(-\alpha) = cos(\alpha)}$ e $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$



A partir dessas conclusões , deduzimos as relações correspondentes às demais razões trigonométricas :

a) $tg(-\alpha) = \dfrac{sen(-\alpha)}{cos(-\alpha)} = -tg(\alpha)$

b) $cotg(-\alpha) = \dfrac{1}{tg(-\alpha)} = -\dfrac{1}{tg(\alpha)} = -cot(\alpha)$

c) $sec(-\alpha) = \dfrac{1}{cos(-\alpha)} = \dfrac{1}{cos(\alpha)} = sec(\alpha)$

d) $cossec(-\alpha) = \dfrac{1}{sen(-\alpha)} = \dfrac{1}{-sen(\alpha)} = -cossec(\alpha)$

Obtemos , assim , a seguinte tabela de relações :

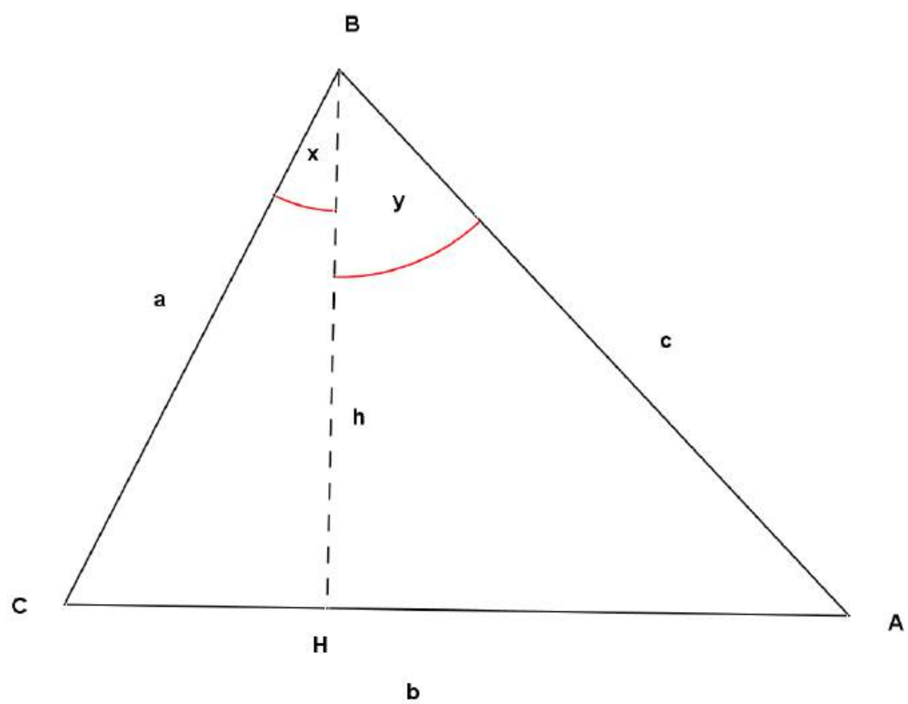
$sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$	$cos(-\alpha) = cos(\alpha)$
$tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$	$cotg(-\alpha) = -cotg(\alpha)$
$sec(-\alpha) = sec(\alpha)$	$cossec(-\alpha) = -cossec(\alpha)$

5.3 Soma de arcos

Nesta secção, vamos deduzir as formulas que calculam as relações trigonométricas da soma e da diferença de dois arcos. Para obter a primeira delas devemos lembrar que dado um triângulo ABC de lados **a,b,c** e altura **h** temos que a sua área vale o produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo entre eles.

Obtendo o seno da soma

Observe que na figura a área do triângulo ABC ($S\triangle_{ABC}$) é igual a área do triângulo BCH ($S\triangle_{BCH}$) mais a área do triângulo HAB ($S\triangle_{HAB}$).



Portanto no triângulo ABC temos que :

- I $S\triangle_{ABC}$=$S\triangle_{BCH}$+$S\triangle_{HAB}$.

- II $S\triangle_{ABC} = \frac{1}{2}a.c.sen(x+y)$
- III $S\triangle_{BCH} = \frac{1}{2}a.h.sen(x)$
- IV$S\triangle_{HAB} = \frac{1}{2}c.h.sen(y)$

Substituindo II,III,e IV em I obtemos : $\frac{1}{2}a.c.sen(x+y) = \frac{1}{2}a.h.sen(x) + \frac{1}{2}c.h.sen(y)$, dividindo-se toda a equação por $\frac{1}{2}.a.c$ temos: $sen(x+y) = \frac{h}{c}sen(x) + \frac{h}{a}sen(y)$, mas como $\frac{h}{c} = cos(y)$ e $\frac{h}{a} = cos(x)$ temos que $sen(x+y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)$.Como queríamos demonstrar.

Obtendo o seno da diferença

Lembrando que $sen(-y) = -sen(y)$ e $cos(-y) = cos(y)$ e substituindo y por $-y$ em $sen(x+y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x)$,temos que $sen[x+(-y)] = sen(x)cos(-y) + sen(-y)cos(x)$ e finalmente $sen(x-y) = sen(x)cos(y) - sen(y)cos(x)$.

Obtendo o cosseno da soma

Sabendo que $cos(x+y) = sen[(90^0 - (x+y)]$,pois são arcos complementares temos :
$cos(x+y) = sen[(90^0 - (x+y)] = sen[(90^0 - x) - y] = sen(90^0 - x)cos(y) - sen(y)cos(90^0 - x)$ logo $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(y)sen(x)$.

Obtendo o cosseno diferença

Substituindo y por$-y$ em $cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y)$ e sabendo que $sen(-y) = -sen(y)$ e $cos(-y) = cos(y)$ encontramos $cos(x-y) = cos(x)cos(-y) - sen(x)sen(-y)$ e que por sua vez obtemos $cos(x-y) = cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y)$.

Obtendo a tangente da soma

Finalmente , para calcular a tangente de $x+y$,dividimos as formulas de $sen(x+y)$

por $cos(x+y)$

$$tg(x+y) = \frac{sen(x)cos(y)+sen(y)cos(x)}{cos(x)cos(y)-sen(x)cos(y)} = \frac{\frac{sen(x)}{cos(x)}+\frac{sen(y)}{cos(y)}}{1-\frac{sen(x)}{cos(x)}.\frac{sen(y)}{cos(y)}},$$

ou $tg(x+y)= \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x).tg(y)}$,onde na segunda igualdade dividimos ambos os membros da fração por cos(x)cos(y),que supomos diferente de zero.

Obtendo a tangente da diferença

Mais uma vez ,substituindo na fórmula $tg(x+y)= \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x).tg(y)}$, y por $-y$ e sabendo que $tg(-y) = -tg(y)$, encontramos
$tg(x-y)= \frac{tg(x)-tg(y)}{1+tg(x).tg(y)}$.

É também conveniente obter as fórmulas que calculam as relações trigonométricas de um arco que é o dobro de um arco cujas relações já são conhecidas .Basta fazer y = x em :

$$sen(x+y) = sen(x)cos(y) + sen(y)cos(x) \Rightarrow sen(2x) = 2sen(x).cos(x)$$

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(y)sen(x) \Rightarrow cos(2x) = cos^2 - sen(x)^2$$

$$tg(x+y)= \frac{tg(x)+tg(y)}{1-tg(x).tg(y)} \Rightarrow tg(2x)= \frac{2tg(x)}{1-tg^2(x)}.$$

5.4 Redução ao primeiro quadrante

Ao estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo, usamos apenas ângulos agudos. Estudaremos agora essas razões para ângulos maiores que 90^0. Dado um arco de medida α(de qualquer quadrante) , podemos sempre determinar um arco de medida α^*entre 0^0 e 90^0 que tem *as mesmas razões trigonométricas do arco dado , em valor absoluto* (isto é com exceção do sinal que pode não ser o mesmo). Se $\alpha_1$indica a primeira determinação positiva correspondente à medida dada , então o valor de α^* pode ser encontrado conforme a tabela seguinte , ilustrada claramente através das figuras.

Se α_1 está no	α^* vale
$2^0 quadrante$	$180^0 - \alpha_1$
$3^0 quadrante$	$\alpha_1 - 180^0$
$4^0 quadrante$	$360^0 - \alpha_1$

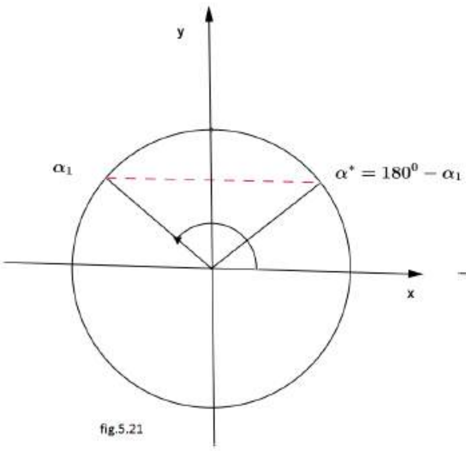


fig.5.21

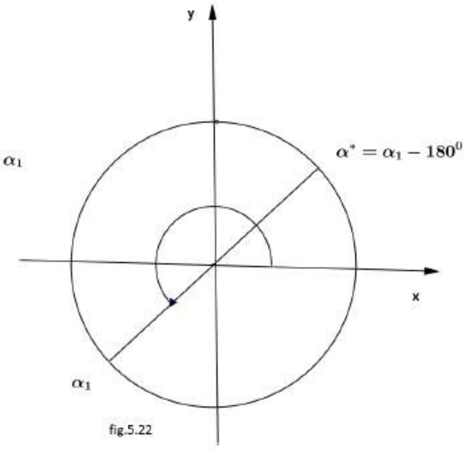


fig.5.22

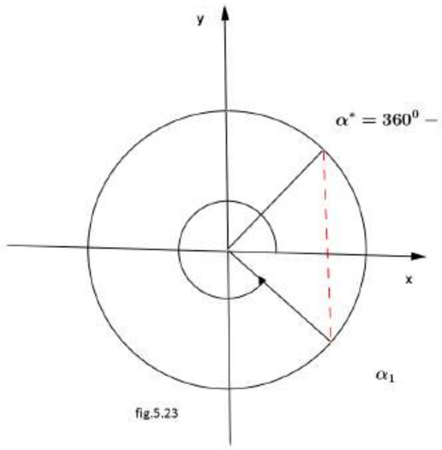


fig.5.23

Analizando a redução

Redução do 2^0 quadrante para o primeiro

- $sen(\alpha_1)= sen(180^0 - \alpha_1)$
- $cos(\alpha_1)= -cos(180^0 - \alpha_1)$
- $tg(\alpha_1)=-tg(180^0 - \alpha_1)$
- $cotg(\alpha_1= -cotg(180^0 - \alpha_1)$
- $sec(\alpha_1)= -sec(180^0 - \alpha_1)$
- $cossec(\alpha_1)=cossec(180^0 - \alpha_1)$

Demonstraremos apenas a segunda relação $cos(\alpha_1)= -cos(180^0 - \alpha_1)$. Utilizando a relação $cos(x-y) = cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y)$, fazendo $x = 180^0$ e $y = \alpha_1$ temos: $cos(x-y) \Longrightarrow cos(180^0-\alpha_1) \Longrightarrow cos(180^0)cos(\alpha_1)+sen(180^0)sen(\alpha_1)=-1cos(\alpha_1)+ 0sen(\alpha_1) = -cos(\alpha_1)$.

Redução do 3^0 quadrante para o primeiro

- $sen(\alpha_1) = -sen(\alpha_1 - 180^0)$
- $cos(\alpha_1) =-cos(\alpha_1 - 180^0)$
- $tg(\alpha_1) = tg(\alpha_1 - 180^0)$
- $cotg(\alpha_1) = cotg(\alpha_1 - 180^0)$
- $sec(\alpha_1) = -sec(\alpha_1 - 180^0)$
- $cossec(\alpha_1) = -cossec(\alpha_1 - 180^0)$

Redução do 4^0 quadrante para o primeiro

- $sen(\alpha_1)= -sen(360^0 - \alpha_1)$
- $cos(\alpha_1)= cos(360^0 - \alpha_1)$
- $tg(\alpha_1)=-tg(360^0 - \alpha_1)$
- $cotg(\alpha_1= -cotg(360^0 - \alpha_1)$
- $sec(\alpha_1)= sec(360^0 - \alpha_1)$
- $cossec(\alpha_1)=-cossec(360^0 - \alpha_1)$

6 Funções trigonométricas

6.1 introdução

Neste capitulo, serão retomadas as seis razões trigonométricas −seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, e cossecante−para que sejam estudadas do ponto de vista da *teoria de funções.*Para um bom entendimento, devemos ter um conhecimento razoável das definições e propriedades que caracterizam essa teoria; vamos, então, incluir paralelamente ao texto especifico das funções trigonométricas, os conceitos fundamentais que regem as *funções reais de variável real.*

O conceito de função

Dados dois conjuntos **A** e **B**, diferentes do conjunto vazio, uma função **f** de **A** em **B**, é uma correspondência que associa *a cada elemento de A um único elemento de B.*

O conjunto **A** denominado **domínio de f**, o conjunto **B** é denominado **Contra-domínio de f**; se x é um elemento qualquer de **A**, então o único y de **B**, associado a x, é denominado **imagem de x pela função f** e é indicado por:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{f(x)}$$

O conjunto de todos os elementos de **B** que são imagem de algum elemento de **A** é denominado **conjunto−imagem de f** e é indicado por $\boldsymbol{I_m(f)}$

Função real de variável real

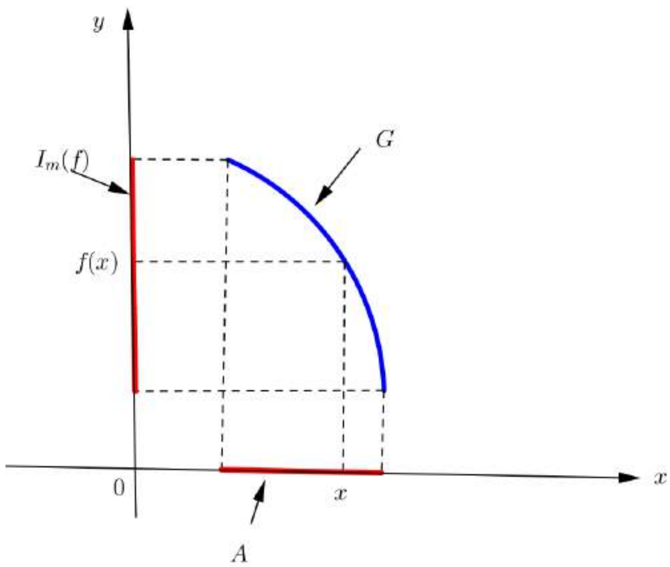
Uma função **f** de **A** em **B**, diz-se **função real de variável real** se $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

Gráfico de uma função real de variável real

Considere uma função **f**, real de variável real:

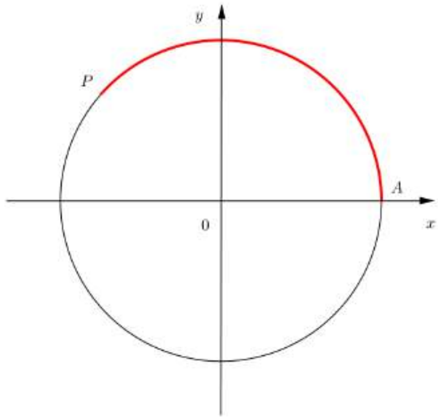
$$\text{f} : \text{A} \longrightarrow \text{B}$$

Fixado um sistema de coordenadas xOy, o conjunto **G** de todos os pontos $(x; f(x))$, com $x \in A$, é o **gráfico de f** .



Correspondência entre um número real e um ponto da circunferência trigonométrica

Consideremos a circunferência trigonométrica da figura abaixo. Já sabemos que, dado um número real x, **existe sempre um arco orientado** $\widehat{AP}$, *cuja medida algébrica é* x *radianos.*



Portanto, é claro que, dado x, fica determinado um único ponto **P** da circunferência trigonométrica, extremidade do arco $\widehat{AP}$. Temos, então a seguinte correspondência:

A todo número real x está associado um único ponto P da circunferência trigonométrica.

6.2 Função seno

Na circunferência trigonométrica da figura a seguir, seja **P** o ponto associado a um número real x; $\boldsymbol{P_1}$ é a projeção ortogonal de **P** em Oy. Sabemos que a **Ordenada** $\overline{OP_1}$ do ponto **P** é o *seno do arco de medida algébrica* x, cuja extremidade é **P**.

Escrevemos, então, que: A ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto **P** denomina-se **Seno do número real x**. Deve-se ser observado que, **ao número real x**, associamos o ponto **P**, extremidade de um arco $\widehat{AP}$; por sua vez, ao arco $\widehat{AP}$ está associado um número real $\overline{OP_1}$ que é o seno de $\widehat{AP}$; assim, definida uma função **f** de R em R para qual :

$$\mathbf{f(x) = sen(x)}$$

que, é denominada **função seno**, cujo domínio da função é R.

Para todo x real $-1 \leq sen(x) \leq 1$, logo temos que sua imagem é $[-1, 1]$.

Definição de função periódica

Uma função f, de domínio $A \subset$ R, diz-se**Periódica**se existe um real **T**, não nulo, tal que :

$$f(x + T) = f(x), \forall\ x \in A$$

Período de uma função f é o menor **T** positivo que satisfaz a condição acima.

Definição de função limitada

Uma função **f**, de domínio A $\subset$ R, diz-se **Limitada** se existe um **M**, positivo, tal que :

$$\boxed{- M \leq f(x) \leq M\ ,\ \forall\ x \in A}$$

6.3 Gráfico da função seno

Se inicialmente , observarmos que para todo x real $sen(x) = sen(x + 2\pi) = sen(x + 4\pi) = ... = sen(x + 2k\pi)$, $k \in$ Z, veremos que a função seno é periódica e seu período é 2π.

Podemos provar esse fato fazendo

$$sen(x + 2k\pi){=}sen(x).cos(2k\pi){+}sen(2k\pi).cos(x).$$

e como, para $k \in Z$, temos $cos(2k\pi) = 1$ e $sen(2k\pi) = 0$, vem :

$$sen(x + 2k\pi){=}sen(x).(1){+}(0).cos(x) = \text{sen(x)}.$$

Comparando agora com a definição de função periódica, temos **T** $=2k\pi$, menor valor de **T**, positivo, é obtido fazendo k = 1; temos, assim,o período 2π da função seno.

Sendo assim, para a construção do gráfico de $f(x) = sen(x)$, vamos considerar alguns valores particulares para x no intervalo $[0;2\pi]$, já previamente sabendo que a "figura "obtida nesse trecho será repetida à esquerda de 0 e à direita de 2π.

temos portanto :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

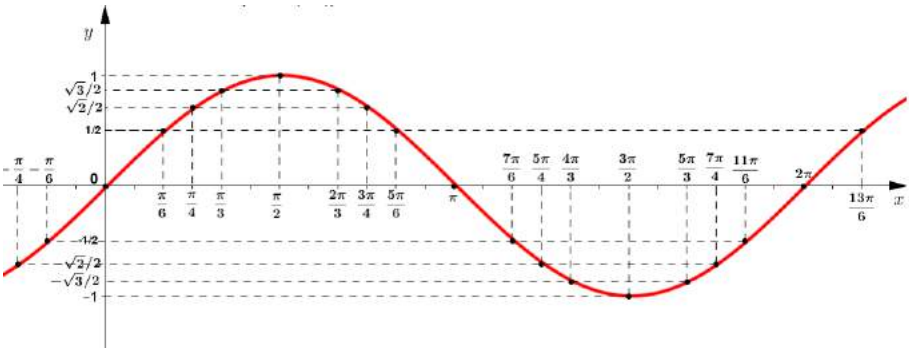


Gráfico da função seno

Devemos observar que a função seno é crescente no intervalo $[0;\frac{\pi}{2}]$ e decrescente no intervalo $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$, voltando a ser crescente no intervalo $[\frac{3\pi}{2};2\pi]$.

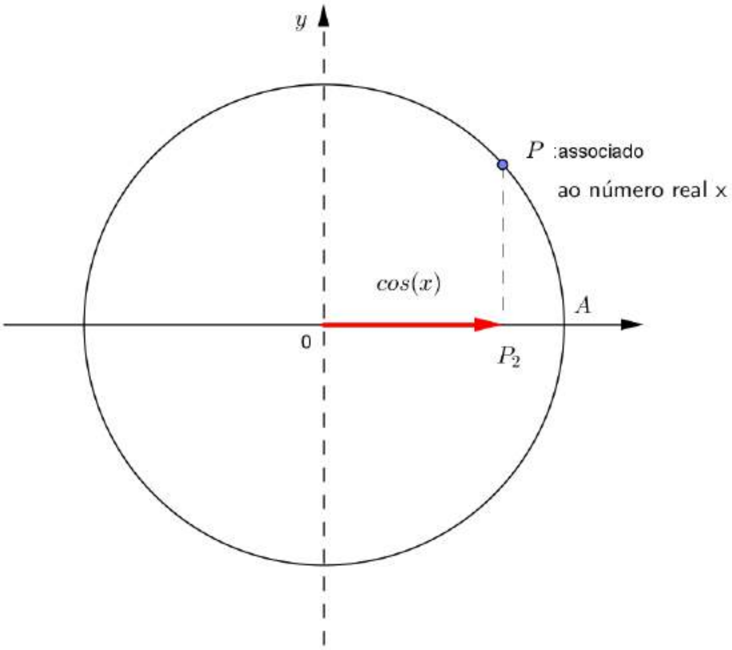
Também é preciso notar que o gráfico do seno está inteiramente situada na faixa do plano limitada pelas retas horizontais que passam pelos pontos (0;1) e (0;-1), obtendo assim, ao fato já conhecido de que para todo x real,

$$-1 \leq sen(x) \leq 1$$

Portanto, seno é uma **função limitada**.

6.4 Função cosseno

Na circunferência trigonométrica da figura a seguir, seja **P** o ponto associado a um número real x; $\boldsymbol{P_2}$ é a projeção ortogonal de **P** em Ox. Sabemos que a **abscissa** $\overline{OP_2}$ do ponto **P** é o *cosseno do arco de medida algébrica* x, cuja extremidade é **P**.



Escrevemos,então, que: A abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto **P** denomina-se **cosseno do número real x**.

Fica assim estabelecido que **ao número real x** associamos **um único número real** $\overline{OP_2}$, que é o cosseno de x; está, então, definida uma *função f de* R em R denominada *função cosseno* para qual :

f(x)= cos (x)

O domínio da função cosseno é R.Para todo x real $-1 \leq cos(x) \leq 1$ .Temos que $I_m = [-1; 1]$.

6.5 Grafico da função cosseno

Se inicialmente, observarmos que para todo x real $cos(x) = cos(x + 2\pi) = cos(x + 4\pi) = ... = cos(x + 2k\pi)$, $k \in$ Z, veremos que a função cosseno é periódica e seu período é 2π.

Podemos provar esse fato fazendo

$$cos(x + 2k\pi) = cos(x).cos(2k\pi) - sen(2k\pi).sen(x).$$

e como, para $k \in Z$, temos $cos(2k\pi) = 1$ e $sen(2k\pi) = 0$, vem :

$$sen(x + 2k\pi) = cos(x).(1) + (0).sen(x) = \text{cos(x)}.$$

Comparando agora com a definição de função periódica , temos **T** $=2k\pi$, menor valor de **T**, positivo, é obtido fazendo k = 1; temos, assim,o período 2π da função cosseno.

Sendo assim, para a construção do gráfico de $f(x) = cos(x)$, vamos considerar alguns valores particulares para x no intervalo $[0;2\pi]$, já previamente sabendo que a "figura "obtida nesse trecho será repetida à esquerda de 0 e à direita de 2π.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

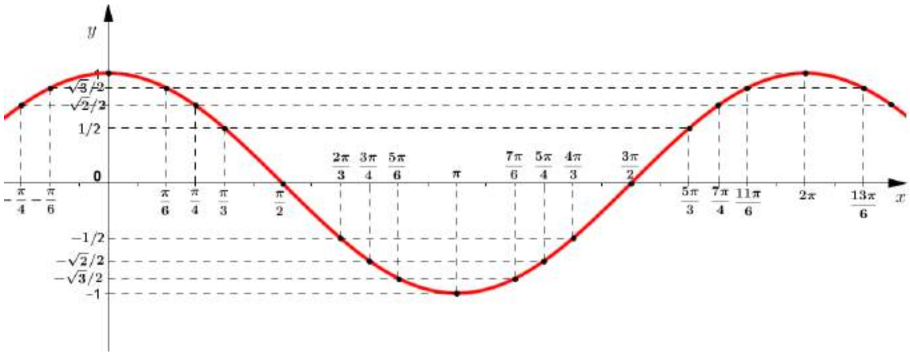


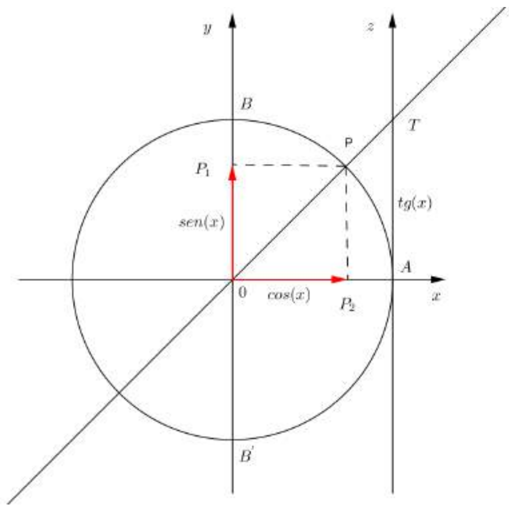
Gráfico da função cosseno

Observe que a função cosseno é decrescente no intervalo $[0;\pi]$ e crescente no intervalo $[\pi;2\pi]$.Note também que o cosseno é uma **função limitada** , pois $-1 \leq cos(x) \leq 1$

para todo x real.

6.6 Função tangente

Na circunferência trigonométrica da figura a seguir, seja **P** o ponto associado a um número real x; **T** é o ponto de interseção da reta **OP** com o eixo **AP**. Sabemos que a $ordenada\overline{AT}$, do ponto **T**, é a **tangente do arco de medida algébrica x** enquanto que $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ são, respectivamente, o seno e o cosseno desse arco.



Lembrando que, se o ponto **P** coincidir com **B** ou B', isto é, se x = $\frac{\pi}{2} + k\pi$, **não existe a tangente** , *excluindo esses pontos*, temos , associado ao número real tg(x), que por semelhança entre triângulos, sabemos ser igual ao quociente entre sen(x) e cos(x).Fica, então, definida uma **função** :

$$f: R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\} \longrightarrow R$$

Para qual :$f(x) = tg(x)$ e $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{cos(x)}$.

Deve ser notado que o domínio da **função tangente** é : A $= \{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$ onde estão excluídos os reais x para os quais cos(x) = 0 .

Vimos também, no item **(4.7)**, que a tangente pode assumir qualquer *valor real*; assim, $I_m = \mathrm{R}$.

6.7 Gráfico da função tangente

Observando, inicialmente , que para todo x do domínio **A** da função $tg(x) = tg(x+\pi) = tg(x+\pi) = ... = tg(x+k\pi)$, $k \in \mathrm{Z}$, veremos que a função tangente é periódica e seu período é π. Vamos verificar isto, fazendo:

$$tg(x+k\pi) = \frac{tg(x)+tg(k\pi)}{1-tg(x).tg(k\pi)} = \frac{tg(x)+0}{1-tg(x).0} = tg(x)$$

Pela definição, temos **T**$= k\pi$, de onde tiramos. para k = 1, período π da função tangente.

Construiremos, então, o gráfico de $f(x) = tg(x)$ em seu domínio **A**

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$

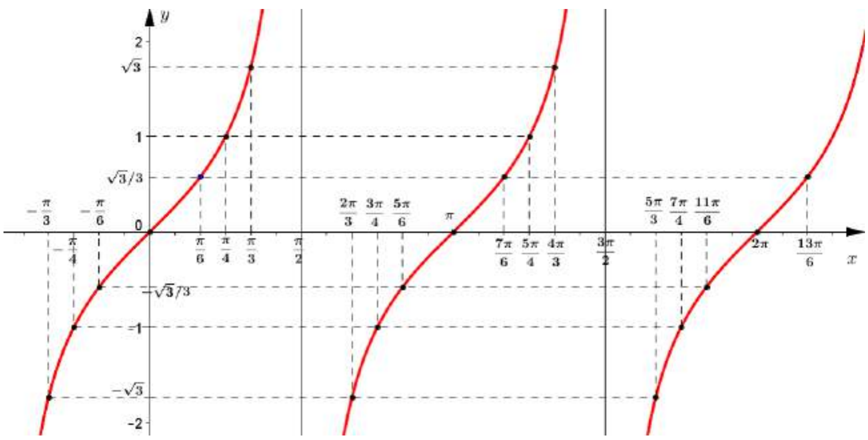
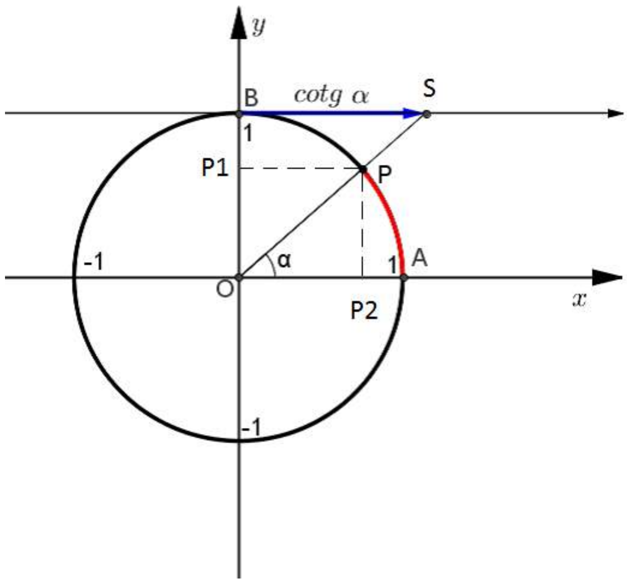


Gráfico da função tangente

Observe que quando x percorre o intervalo $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, a tangente cresce indefinidamente, percorrendo todo o conjunto-imagem R, de$-\infty$ a $+\infty$.
A função tangente não é limitada.

6.8 Função cotangente

Na circunferência trigonométrica da figura a seguir, seja **P** o ponto associado a um número real x; **S** é o ponto de interseção da reta **OP** com o eixo **BS**. Sabemos que a $abscissa\overline{BS}$, do ponto **S**, é a **cotangente do arco de medida algébrica x** enquanto que $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ são, respectivamente, o seno e o cosseno desse arco.



Lembrando que, se o ponto **P** coincidir com **B** ou A', isto é, se x $= k\pi$, **não existe a cotangente** , *excluindo esses pontos*, temos, associado ao número real cotg(x), que sabemos ser igual ao quociente entre cos(x) e sen(x).Fica, então, definida uma **função** :

$$f: \text{R} - \{k\pi, k \in Z\} \longrightarrow \text{R}$$

Para qual $f(x) = cot(x)$ e $cot(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$
Deve ser notado que o domínio da *função cotangente* é A $= \{x \neq k\pi, k \in Z\} \longrightarrow$ R onde são **excluídos**os reais x quais sen(x)= 0.

Vimos, também, no item **(4.1)**,que a cotangente pode assumir *qualquer valor real*;assim , $I_m =$ R

6.9 Gráfico da função cotangente

Observando, inicialmente, que para todo x do domínio **A** da função $cotg(x) = cotg(x+\pi) = cotg(x+\pi) = ... = cotg(x+k\pi)$, $k \in$ Z, veremos que a função cotangente é periódica e seu período é π.

A função cotangente é *periódica* e seu período é p $= \pi$

Vamos, portanto construir o gráfico de $f(x) = cot(x)$ no se conjunto domínio A

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	$\nexists$	1	0	-1	$\nexists$

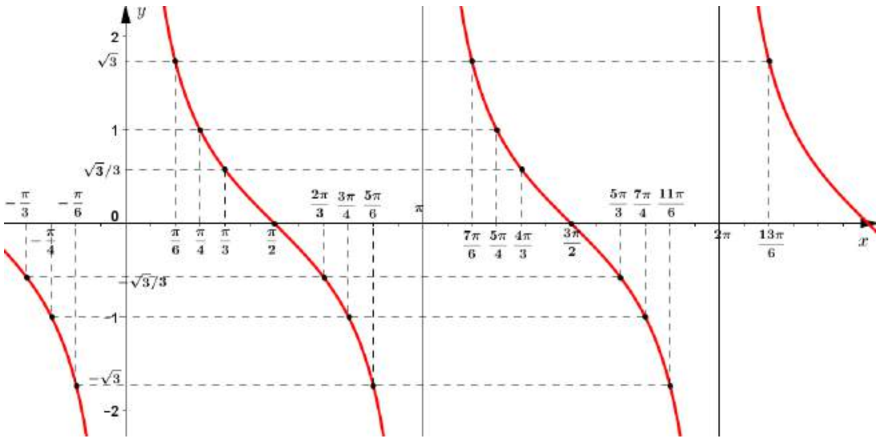


Gráfico da função cotangente.

Deve-se perceber que,quando x percorre o intervalo $]0;\pi[$, a cotangente decresce,percorrendo todo o conjunto - imagem R, de - ∞ a + ∞.

6.10 Função secante

Já vimos que, a todo número real x está associado um único número real $cos(x)$.Se $cos(x) \neq 0$, isto é, se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, existe, e é único, o seu inverso $\frac{1}{cos(x)} = sec(x)$. Definimos, então, **função secante** como sendo uma **função f de** R - $\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$ em R. Dada por:

$$f(x) = sec(x) = \frac{1}{cos(x)}.$$

O domínio da função secante é

$$\text{A} = \{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \text{Z}\}$$

Como para todo $x \in A$, temos $sec(x) \leq -1 ou sec(x) \geq 1$, a imagem de f(x) é

$$I_m = \{y \in \text{R} | y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$$

6.11 Gráfico da função secante

É claro que,se $x \in$A, $sec(x) = sec(x + 2\pi) = sec(x + 4\pi) = ... = sec(x + 2k\pi)$

e por isso, a função secante é *periódica* e seu período é **p**= 2π. Vamos construir, o gráfico de $f(x) = sec(x)$ em todo o seu domínio A.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\sqrt{2}$	$\nexists$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\nexists$	$\sqrt{2}$	1

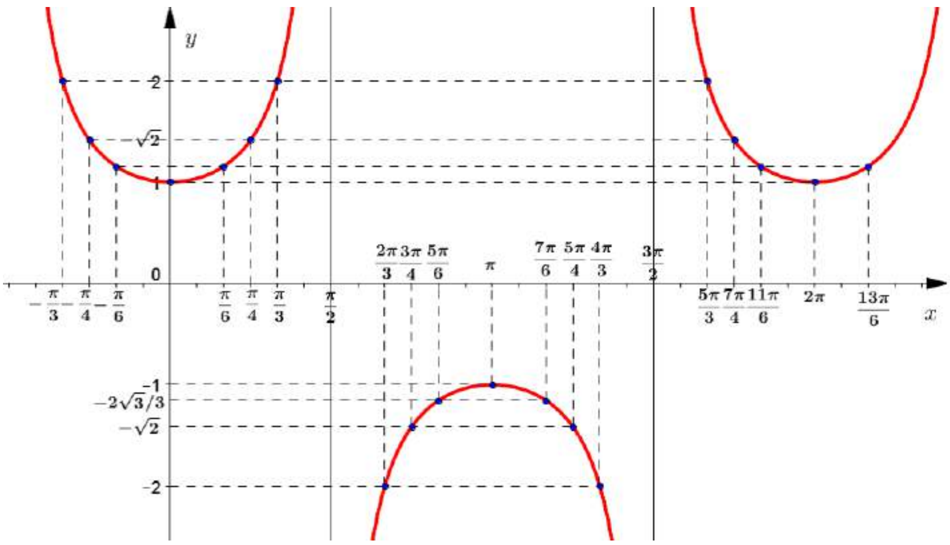


Gráfico da função secante

É preciso perceber que, quando x assume valores próximos de $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, *cos(x) se aproxima de zero*; *portanto, o valor absoluto* da fração $\frac{1}{cos(x)} = sec(x)$ tende ao infinito.

6.12 Função cossecante

já vimos que, a todo número real x, está associado um único número real $sen(x)$. Se $sen(x) \neq 0$, isto é, se $x \neq k\pi$, existe, e é único, o seu inverso $\dfrac{1}{sen(x)} = cossec(x)$.Definimos, então, **função cossecante** como sendo uma **função f de** R - $\{k\pi, k \in$ Z$\}$ em R.Dada por:

$$f(x) = cossec(x) = \frac{1}{sen(x)}.$$

O domínio da função cossecante é

$$\text{A} = \{x \neq k\pi, k \in \text{Z}\}$$

Como para todo $x \in A$, temos $cossec(x) \leq -1$ ou $cossec(x) \geq 1$, a imagem de f(x) é

$$I_m = \{y \in \text{R} | y \leqslant -1 \text{ ou } y \geqslant 1\}$$

6.13 Gráfico da função cossecante

Como para todo, se $x \in$A,

$cossec(x) = cossec(x + 2\pi) = cossec(x + 4\pi) = ... = cossec(x + 2k\pi)$
e por isso, a função cossecante é *periódica* e seu período é **p**= 2π. A exemplo do que fizemos anteriormente, vamos construir, o gráfico de $f(x) = cossec(x)$ em todo o seu domínio A.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	$\nexists$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\nexists$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\nexists$

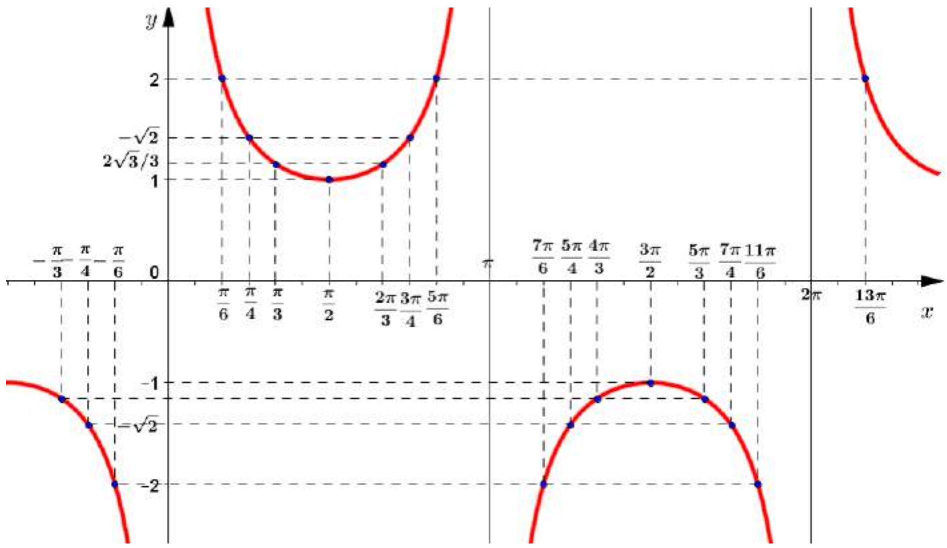


Gráfico da função cossecante

É preciso perceber que, quando x assume valores próximos de 0 , π ou 2π, *sen(x) se aproxima de zero*; *portanto, o valor absoluto* da fração $\frac{1}{sen(x)} = cossec(x)$ tende ao infinito. **Função par e função ímpar** Seja f uma função de domínio A,tal que : se $x \in A$, então -x $\in$ A

Se para todo $x \in A$ se tem f(-x) = f(x), f diz-se par

Se para todo $x \in A$ se tem f(-x) = - f(x), f diz-se

6.14 Paridade das funções trigonométricas

Vimos no item **(5.2)** as seguintes fórmulas de mudança de sinal:

- sen(-x) = - sen(x)
- cos(-x) = cos(x)
- tg(-x) = -tg(x)
- cot(-x) = -cot(x)
- sec(-x) = sec(x)
- cossec(-x) = cossec(x)

Sendo x um número real dos domínios das funções trigonométricas, vemos que as funções f(x)=cos (x) e f(x)= sec(x) são tais que f(-x)=f(x); todas as demais são tais que f(-x)= -f(x). Temos, assim, que as **funções cosseno e secante são pares.** enquanto as **fuções seno,tangente,cotangente e cossecante são ímpares**.

7 Considerações pedagógicas do uso de materiais manipuláveis nas aulas de matemáticas

A expressão "material manipulável", segundo Hartshor e Boren (1990), refere-se a objetos que podem ser tocados e movidos pelos estudantes, para introduzir ou reforçar um conceito matemático.

A introdução de materiais manipuláveis no ensino se deve a Pestalozzi e Froebel, no século XIX, e a Montessori e Decroly, no começo do século XX. No Brasil, a utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920, no bojo da tendência empírico-ativista (FIORENTINI; MIORIM, 1990), que tem como pressuposto básico a ideia de que o aluno "aprende fazendo". Assim, "a partir da manipulação e visualização de objetos ou de atividades práticas envolvendo medições, contagens, levantamento e comparações de dados" (FIORENTINI, 1995, p. 11), os alunos abstraem os conceitos e propriedades dos entes matemáticos.

A partir dos anos de 1990, vários recursos didáticos vêm sendo introduzidos no ensino da Matemática, tais como calculadoras e computadores. Devido ao surgimento de novas produções na área de Educação Matemática, envolvendo abordagens metodológicas como a resolução de problemas, a modelagem e o uso de tecnologias, talvez os materiais manipuláveis tenham ficado em segundo plano (NACARATO, 2004-2005).
No entanto, o professor em sua prática de sala de aula, muitas vezes utiliza somente o livro didático como ferramenta de trabalho; os livros, mesmo sendo ilustrados com figuras de materiais manipuláveis, não substituem os próprios materiais, visto que, com eles, em um laboratório de Matemática, os alunos poderiam visualizar as situações propostas em determinado problema.

O desenvolvimento dos processos de visualização depende da exploração de modelos ou materiais que possibilitem ao aluno, com o decorrer do tempo, a construção de imagens mentais. Leivas (2009) considera que a visualização é “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (p. 22). O autor ainda cita Fischbein, que diz:

> Representações visuais não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto-evidência e imediatez. Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma 16 solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios. (1987, apud LEIVAS, 2009, p. 22).

Entre o conhecimento matemático e sua aprendizagem, existe um processo a ser vivenciado, que pode ser iniciado com o uso de materiais manipuláveis. Esses materiais são, de fato, essenciais para auxiliar o professor no desenvolvimento da percepção espacial, numérica e de medidas, permitindo que os alunos criem seus primeiros conhecimentos matemáticos sobre um determinado assunto utilizando o tato e a visão.

Essa asserção é mostrada por Lorenzato (2006), com a utilização de material manipulável para demonstrar o Teorema de Pitágoras, da forma a seguir descrita. Tomam-se duas placas de acrílicos transparentes, representando um triângulo retângulo e os três quadrados construídos sobre seus lados; as duas placas são coladas uma sobre a outra, deixando entre elas um espaço que possa ser preenchido com um líquido colorido. Conforme o material didático for movimentado, todo o liquido que estiver colorindo a parte que representa o quadrado da hipotenusa passará a preencher as duas partes menores, que representam os quadrados dos dois catetos. (LORENZATO, 2006, p. 21).

Essa experiência mostra que o ensinar muitas vezes pode começar pelo concreto, ou seja, evidenciando o potencial do "ver e tocar", e que as palavras ou teorias não alcançam o mesmo efeito dos objetos e imagens; elas são importantes sim, mas não são suficientes para a aprendizagem do aluno.
A experiência de construir materiais para trabalhar com o teorema de Pitágoras é apresentada em muitos textos, brasileiros ou estrangeiros, inclusive com construções virtuais. No site português da RedeMacTic[1] , encontramos sugestões para a generalização do teorema de Pitágoras, com figuras construídas por computador, que são aplicadas aos lados de um triângulo retângulo.

Em outro site, em língua inglesa[2] , são apresentadas 90 demonstrações para o teorema de Pitágoras e, entre elas, é apontada uma formulação mais geral: a área da figura sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma das áreas das figuras semelhantes construídas sobre os outros dois lados. Em um site brasileiro que apresenta materiais para o ensino de Matemática,[3] é questionada a proposição e, para mostrar que é verdadeira, são mostradas atividades em que o aluno pode construir jogos, chamados Tangrans pitagóricos, para entendê-la. Em uma apostila para as Olimpíadas Brasileiras de Matemática[4] , é apresentada e demonstrada essa generalização do teorema de Pitágoras, com proposta de vários exercícios sobre o tema. Esses exercícios, que nessa apostila pressupõem demonstrações teóricas, podem ser ilustrados com materiais manipuláveis, tais como os Tangrans. A asserção colocada por Lorenzato (2006), de que os materiais manipuláveis são essenciais para auxiliar o professor no desenvolvimento da percepção espacial, sugere que, antes de trabalharem com objetos matemáticos, as pessoas precisam lidar com os objetos físicos. Para Kamii e Declark (1991), o conhecimento físico é "o conhecimento dos objetos na realidade externa" e é diferente do conhecimento lógico-matemático, pois esse consiste "de relacionamentos feitos por cada indivíduo" (p. 28-29). Geralmente os professores de Matemática utilizam material manipulável como suporte para as dificuldades de aprendizagem do aluno em um determinado assunto, o que evidencia a forte influência do movimento Escola Nova, que envolvia o uso desse tipo de material com o objetivo de que o aluno possa aprender fazendo. Serrazina (1990), ao analisar a utilização de materiais didáticos no ensino da Matemática, observa que deve haver um cuidado especial quando se pretende fazer uso desse recurso e que, nesse as-

[1] http://www.malhatlantica.pt/mat/Arease.htm

[2] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/euclid.shtml
[3] htpp:www.uff.br/cdme/tragran_pitagoricos/
[4] http://miltonborba.org/OBMEP/APOST_6−Pitag_Areas.pdf

pecto, o professor tem um papel fundamental. Assim sendo, deve-se investir para que a formação de professores de Matemática, tanto inicial quanto continuada, contemple essas questões. Os recursos didáticos nas aulas de Matemática envolvem uma variedade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem. Com isso, pode-se considerar que esses recursos podem servir como mediadores para facilitar a linguagem entre o professor e o aluno, criando um elo com o conhecimento, no momento em que um saber matemático está sendo construído.

Muitas vezes, quando o professor utiliza materiais manipuláveis para ministrar sua aula, os alunos não conseguem relacionar essa experiência com a Matemática do seu cotidiano. Por isso, é importante lembrar que o professor deve ter cuidado na escolha do material manipulável que vai utilizar, pois nem sempre essa escolha é realizada com a devida clareza quanto a sua fundamentação teórica. Um determinado material didático pode trazer resultados negativos em sua utilização, ou seja, pode ocorrer uma distância entre esse material e as relações matemáticas que pretende-se que sejam construídas pelos alunos. Para Lorenzato (2006), conforme a intenção do professor e a forma com que são utilizados, os materiais manipuláveis podem desempenhar inúmeras funções em sala de aula e por isso o professor deve questionar-se antes de apresentá-los a classe, procurando responder porque vai utilizá-los. Por exemplo, o docente deve se questionar se aquele material é apropriado para aquele tipo de conteúdo, para aquela determinada turma, pois pode acontecer que os estudantes apenas gostem de brincar com um determinado material manipulável, mas não compreendam os conceitos que a ele são relacionados e que devem ser construídos. Conforme Lorenzato (2006, p. 18), o professor deve perguntar para que vai usar o material:

> [...] para apresentar assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD [material didático] mais conveniente à aula.

Em sala de aula, é comum existirem alunos que ficam isolados da turma, não participam das atividades propostas e muitas vezes nem revelam suas dúvidas. Nesse caso, a utilização de materiais manipuláveis contribui para a interação desses alunos com os demais, criando uma integração e a participação ativa nas atividades propostas, favorecendo, com isso, a socialização e as condições de aprendizagem.

A utilização de materiais manipuláveis em aulas de Matemática é justificada por seu valor e sua importância na dinâmica das aulas, porém nem sempre os benefícios do emprego desses recursos didáticos são reconhecidos por professores, que consideram estar a atividade do aluno relacionada somente com a manipulação do material, sem com isso levar em consideração que ele pode ser ativo também em reflexões interiores e abstratas, que não são observáveis de imediato.

No desenvolvimento das aulas, o professor assume a função de mediador; durante o trabalho, os alunos são instigados a pensar, a estabelecer relações entre as ações desenvolvidas, a encontrar soluções para os desafios encontrados ou lançados pelo próprio professor. Por isso, os alunos precisam ser desafiados a expressar a sua forma de entendimento, a socializar as ideias pensadas por eles e a esclarecer dúvidas existentes, quer seja por meio frases ou de desenhos, quer seja pelo uso da linguagem matemática. Assim, certamente terão mais facilidade na organização do conhecimento.

A utilização de materiais manipuláveis propicia, além do envolvimento do aluno com os materiais e a aprendizagem, o fortalecimento da relação dos estudantes entre si e deles com o professor, criando elos de amizade e respeito entre todos na sala de aula.

As situações-problema que surgem no decorrer da exploração dos materiais e na realização das atividades possibilitam a reflexão e o aperfeiçoamento de esquemas cognitivos dos alunos, aprofundado vários saberes, como saber fazer, saber questionar, saber dizer, saber argumentar, bem como, saber conviver e trabalhar coletivamente. Essas aprendizagens, sem dúvida, contribuem para a construção de conhecimentos e da autonomia para fazer escolhas e tomar decisões, gerando, também, ações de cidadania.

8 A Circunferência Trigonométrica numa abordagem concreta

Para essa etapa foram construidos nove materiais, um para o professor e os demais para serem utilizados pelos alunos em equipe.

O objetivo é criar condições para que o aprendizado aconteça através da participação ativa dos alunos na construção de ideias. Os alunos terão a oportunidade de levantar hipóteses, verificar sua veracidade, tirar conclusões, elaborar conceitos, e principalmente, criar modelos mentais, a partir da visualização, de conceitos trigonométricos.

Os itens utilizados para a construção da circunferência trigonométrica concreta foram :

- Placa em madeira de 45cm X 45cm
- pregos n^o 01
- borrachas elásticas
- plástico adesivo

A construção do material foi efetivado seguindo os seguintes passos :

1. elaborou-se uma circunferência trigonométrica utilizando o programa Core-Draw
2. imprimiu-se em, nove folhas adesivas com a referida imagem citada no item anterior
3. em uma marcenaria foram produzidas seis placas de madeira medindo 45cm por 45cm

4. anexou-se a folha adesiva nas placas de madeira
5. com o uso de um martelo prendemos os pregos na circunferência nos pontos da circunferência.

8.0.1 A Utilização da Circunferência Trigonométrica Concreta

Nessa secção do trabalho apresentaremos de forma prática, o passo a passo da manipulação do desenvolvimento de algumas utilizações da Circunferência Trigonométrica Concreta. Considere a figura 8.01, a qual apresentamos uma circunferência trigonometria com raio unitário e contendo os arco de: $0^0, 30^0, 45^0$, 60^0,120^0, $135^0, 150^0$, 180^0,210^0, 235^0,240^0, 270^0, $300^0, 315^0$, 330^0 e 360^0.

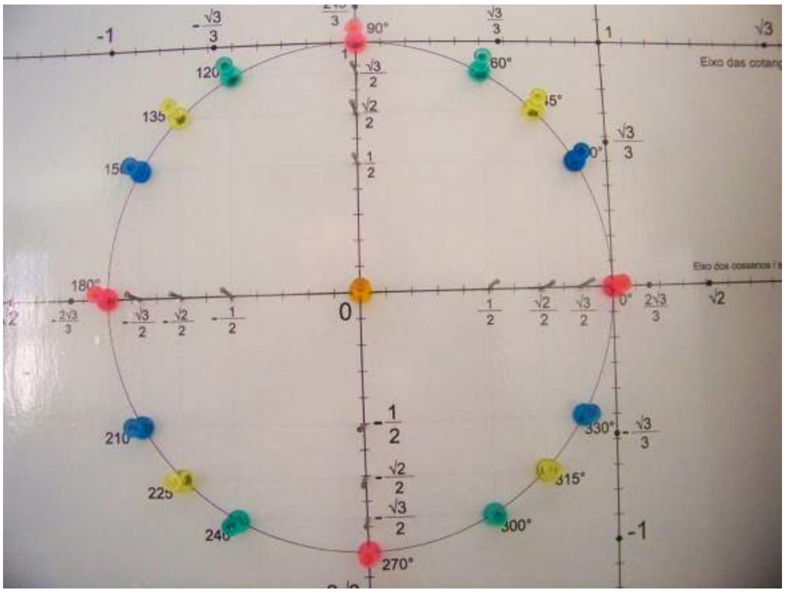


figura 8.01

8.0.2 Manipulando o seno no primeiro quadrante

Observamos na figura 8.02 onde foi inserida uma borracha elástica nos pinos anexados à circunferência trigonométrica. Notamos, que o triângulo formado pela borracha elástica de cor lilás é retângulo e delimita o ângulo central de 30^0.Como o raio da circunferência trigonométrica vale um, podemos, então considerar, o segmento vertical oposto ao ângulo de 30^0, formado por esse triângulo, a representação do seno de 30^0, cujo valor esta associado ao número $\frac{1}{2}$.

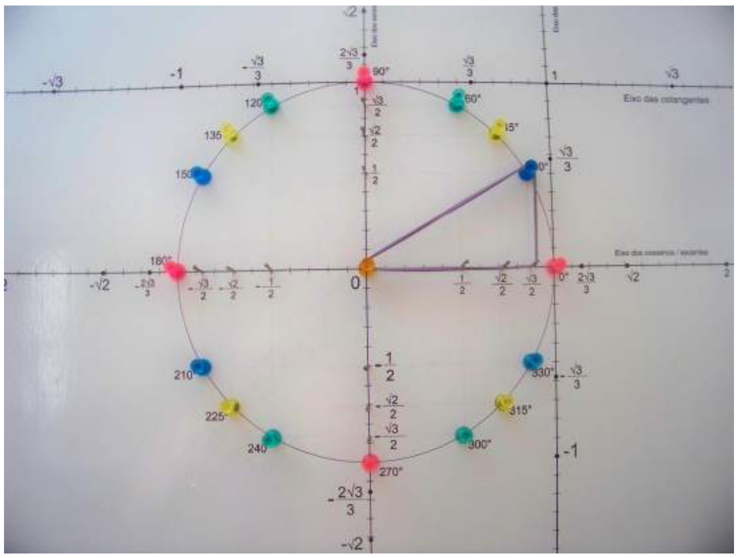


figura 8.02

Na figura 8.03 podemos observar que o ângulo central utilizado é o de 45^0, e da mesma forma que a situação anterior, o segmento vertical oposto ao ângulo central de 45^0, representa o seu seno, cujo valor esta associado ao número $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

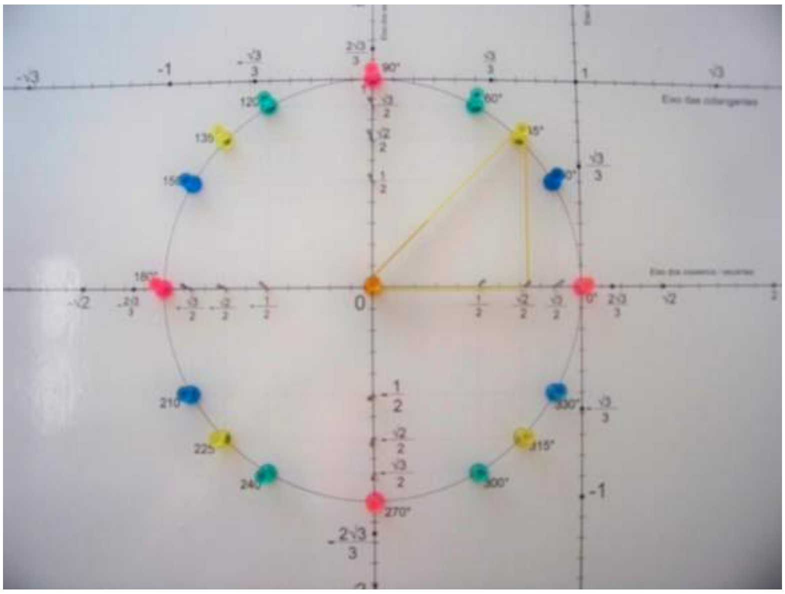


figura 8.03

Trabalhando, ainda, no primeiro quadrante, e agora utilizando o ângulo central de 60^0, temos de forma análoga, as situações anteriores, o segmento vertical, do triângulo retângulo verde, representando o seno do ângulo de 60^0, cuja medida é $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ver figura 8.04).

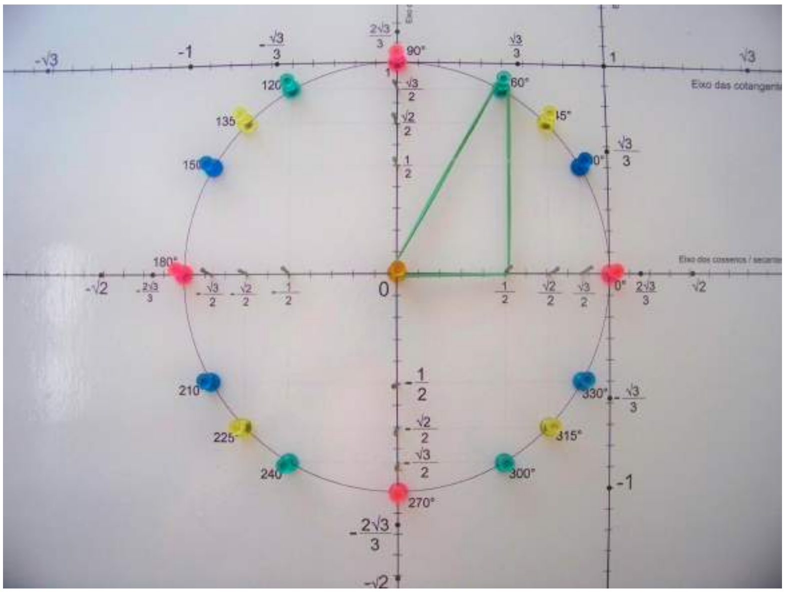


figura 8.04

Variando os arcos na circunferência trigonométrica no primeiro quadrante (figura 8.05), podemos perceber que os segmentos ,verticais, formados pelos triângulos aumentam de tamanho e dessa forma ,coincidirá com o raio , assumindo o valor do mesmo. Nesse instante podemos afirmar que em 90^0 o seu seno de vale 1, ou seja $sen(90^0) = 1$

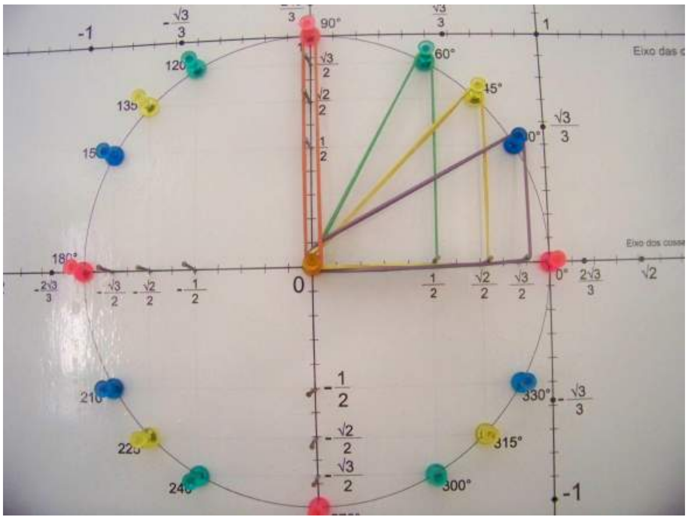


figura 8.05

Manipulando o seno no segundo quadrante

Observe que na figura 8.06 temos o ângulo central de 120^0 e o triângulo, formado pelo elástico de cor verde , cujo o segmento vertical representa o seu seno, apresentando valor $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

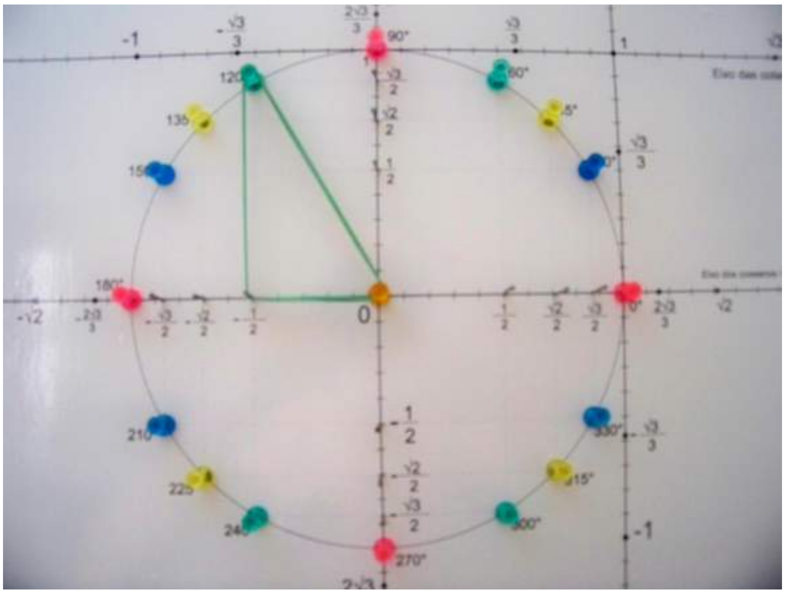


figura 8.06

Na ilustração 8.07 podemos notar a presença do ângulo central de 145^0, que possui valor $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

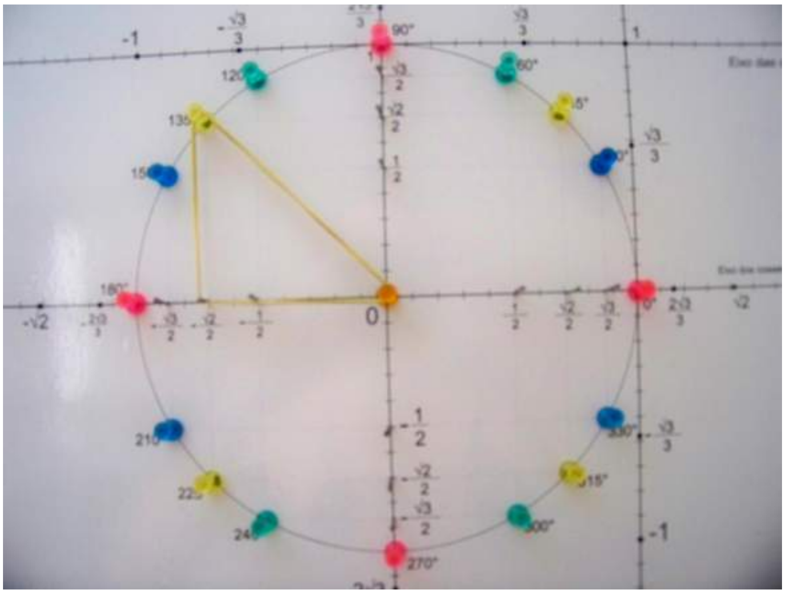


figura 8.07

Observando a figura 8.08, temos um arco de150^0 , e como na ilustração anterior mostra no segmento vertical o seno de 150^0, cujo valor é $\dfrac{1}{2}$.

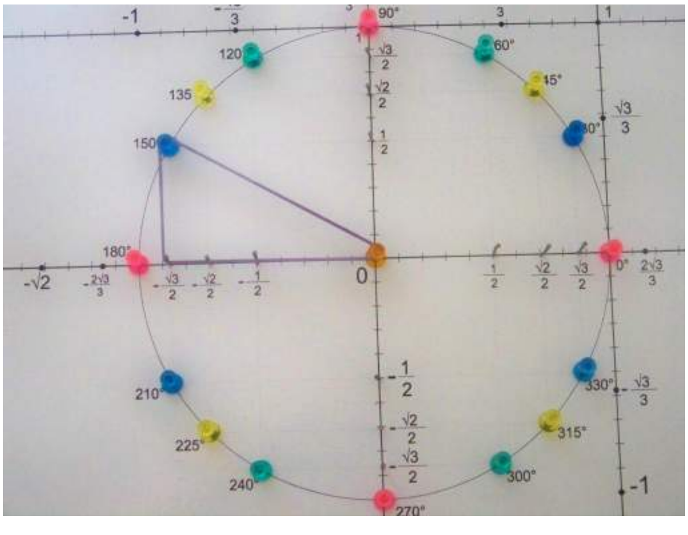


figura 8.08

A medida que variamos os arcos na circunferência trigonométrica, no sentido anti-horário,vemos nas figuras 8.9 e 8.10, que o segmento vertical, que representa o seno, tende a diminuir de tamanho e diminuir de valor, dessa maneira, podemos observar que o seno de 180^0 vale 0.

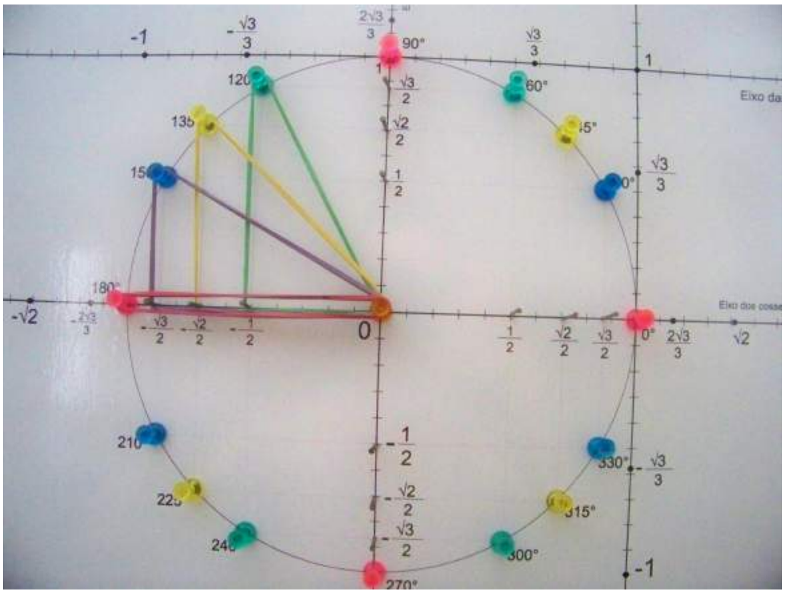


figura 8.09

Durante a análise do estudo do seno no segundo quadrante, é interessante que o professor chame a atenção o estudo da variação do seno e o estudo do seu sinal no segundo quadrante, e vide figura 8.1 concluir ,que o seno possui valores positivos e que suas medidas diminuem, quando variamos os seus arcos, no sentido anti-horário no segundo quadrante, podendo ser no máximo 1 e no mínimo 0, ou seja $1 \leq senx \leq 0$

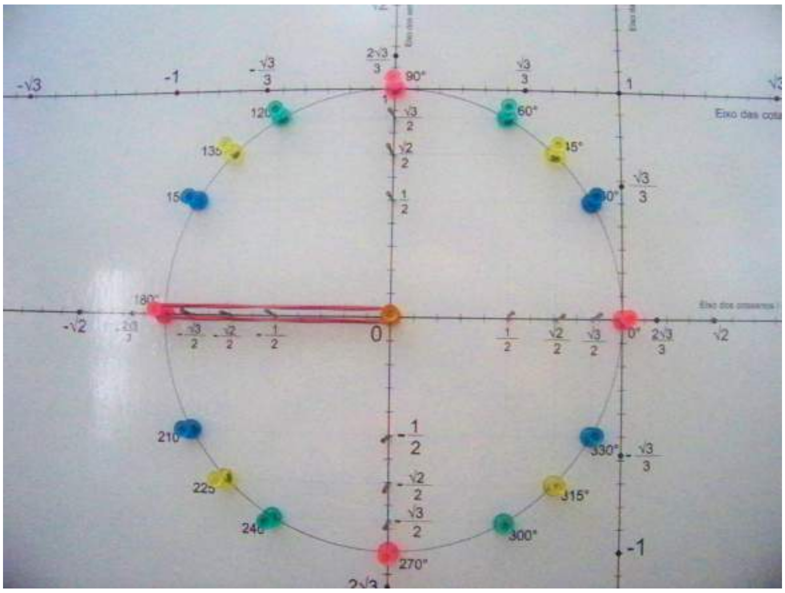


figura 8.10

Ainda é importante, chamarmos a atenção, observando a figura 8.11, que o seno de 120^0 é o mesmo de 60^0, pois na figura os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

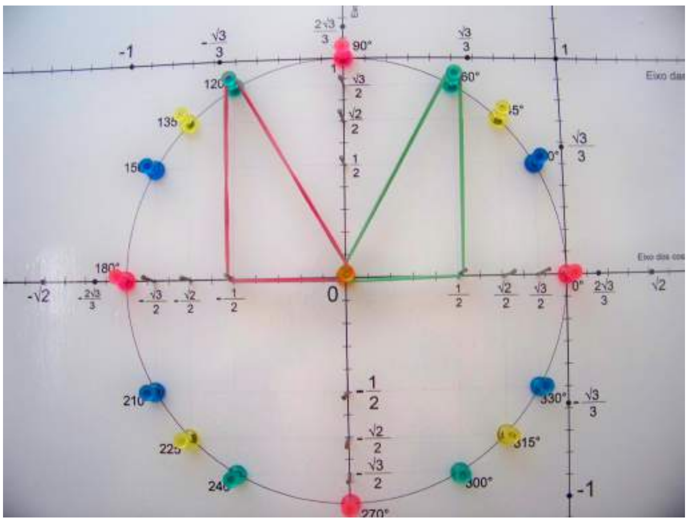


figura 8.11

De forma análoga a situação anterior, percebemos que o seno de 135^0 é o mesmo de 45^0, pois observa-se na figura 8.12 que os dois triângulos vermelho e amarelo, apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

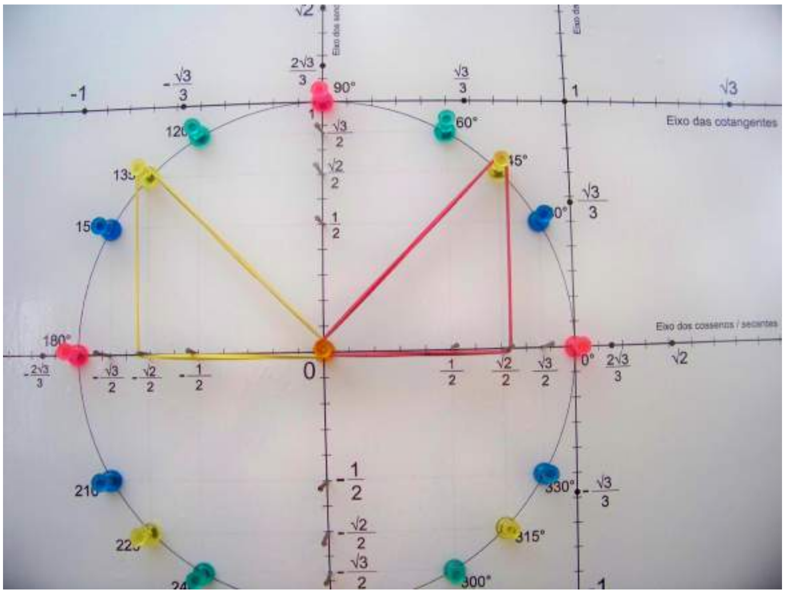


figura8.12

Temos que o seno de 150^0 é o mesmo de 30^0, pois na figura 8.13 os dois triângulos lilás e verde , apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

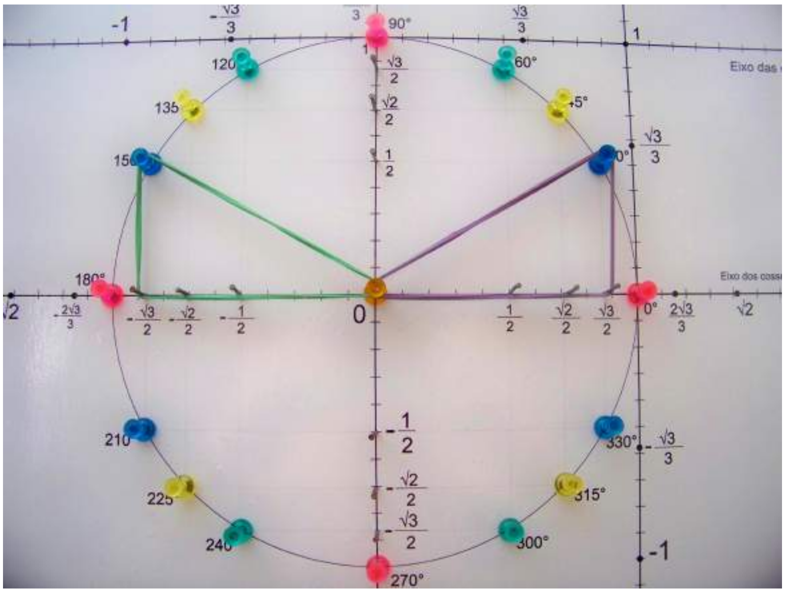


figura8.13

O estudo feito no segundo quadrante com os ângulos, 120^0, $135^0, 150^0$, pode ser bastante útil, um pouco mais adiante, no momento em que o professor estiver ensinado redução ao primeiro quadrante, generalizando que:

$$sen(180^0 - x) = sen(x).$$

Manipulando o seno no terceiro quadrante

Observe na figura 8.14 que, tomando o ângulo central de 210^0 tem-se o triângulo, formado pelo elástico de cor lilás, o segmento vertical representando o seu seno,cuja medida esta associado ao valor $-\dfrac{1}{2}$.

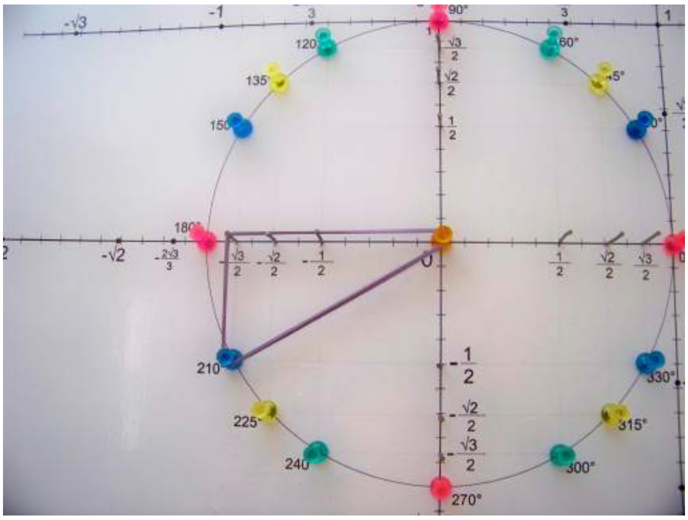


figura 8.14

Na ilustração 8.15 podemos notar a presença do ângulo central de 225^0, possui valor $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

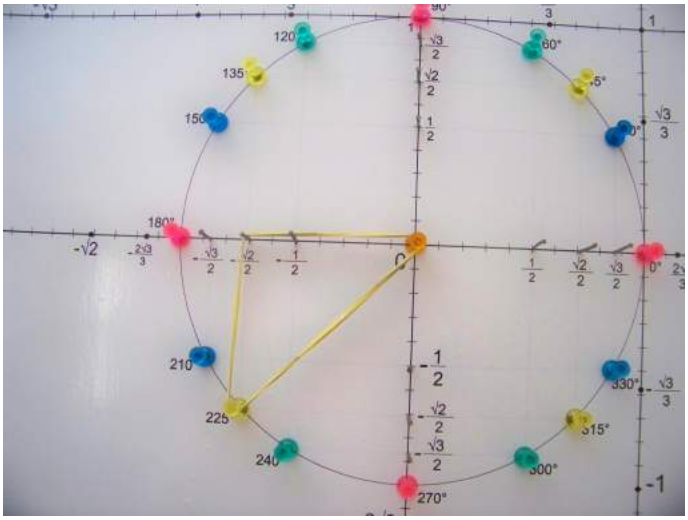
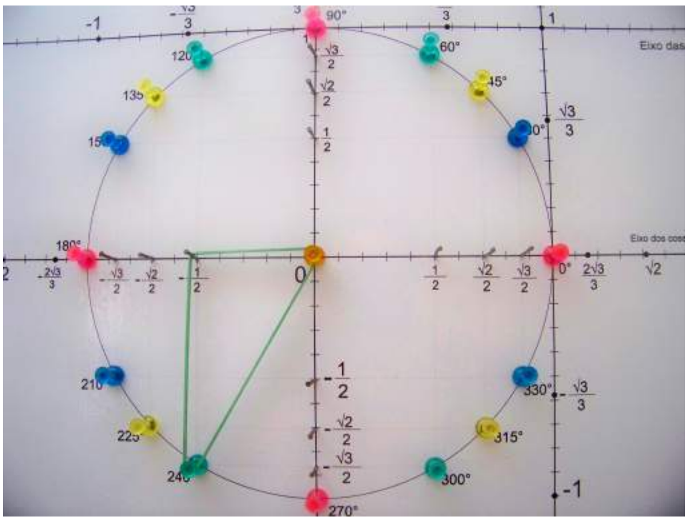


figura 8.15

Observando a figura 8.16, temos um arco de 240^0 , e como na ilustração anterior mostra no segmento vertical o seno de 240^0, cujo valor é $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



8.16

A medida que variamos os arcos na circunferência trigonométrica, no sentido anti-horário,(fig.8.17), notamos que o segmento vertical, que representa o seno, tende a aumentar de tamanho, no entanto o seu valor tende a diminuir chegando a -1, dessa forma, podemos afirmar que o seno de 270^0 vale -1.

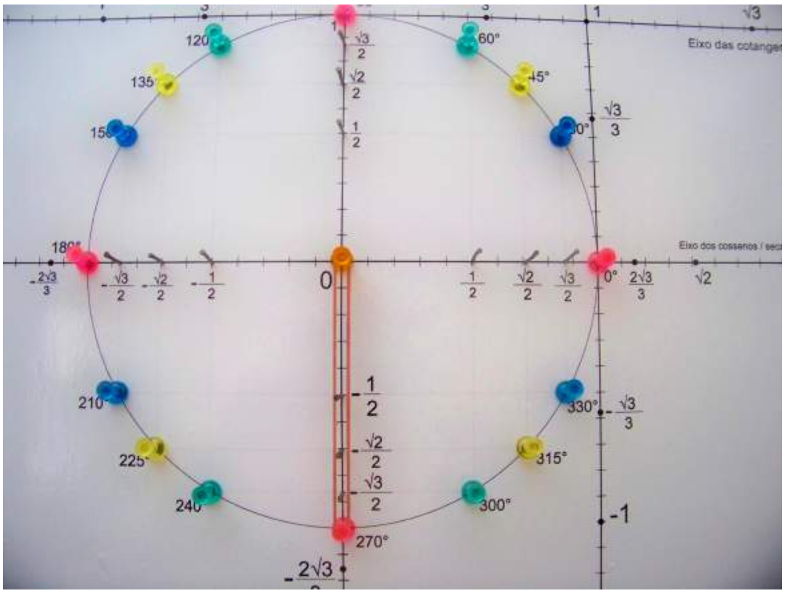


figura 8.17

Durante a analise do estudo do seno no terceiro quadrante, é interessante que o professor socialize , junto com os alunos, o estudo da variação do seno e o estudo do seu sinal , no terceiro quadrante, e vide figura 8.18, concluir de maneira coletiva, que o seno possui valores negativos e cada vez menores, quando variamos os seus arcos, no sentido anti-horário no terceiro quadrante.

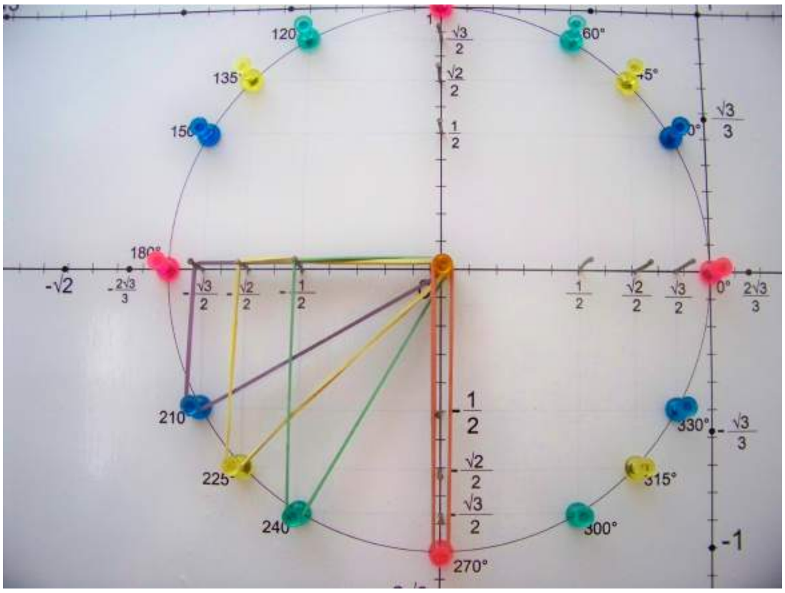


figura 8.18

Vale salientar, observando a figura 8.19, que o seno de 210^0 é o oposto ao de 30^0, pois na figura os dois triângulos lilás e verde, apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação a origem.

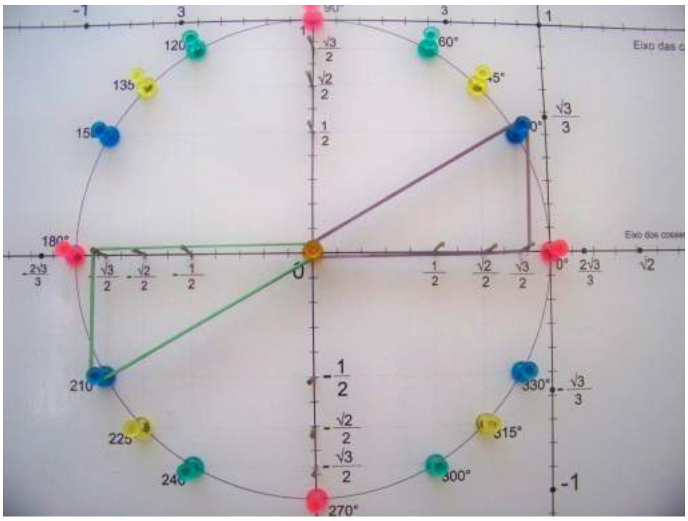


figura 8.19

Já a figura 8.20 representa o seno de 225^0 que é o mesmo de 45^0 com o sinal trocado, pois os dois triângulos verde e amarelo, apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação a origem.

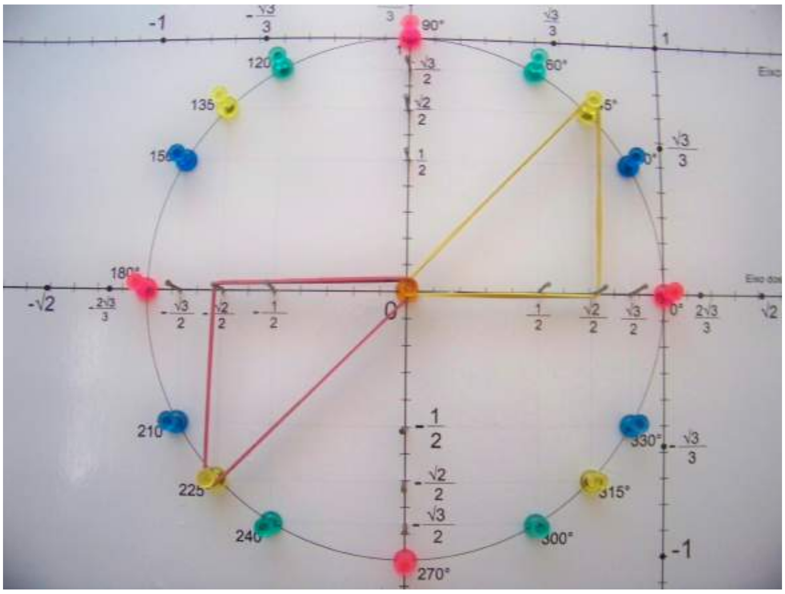
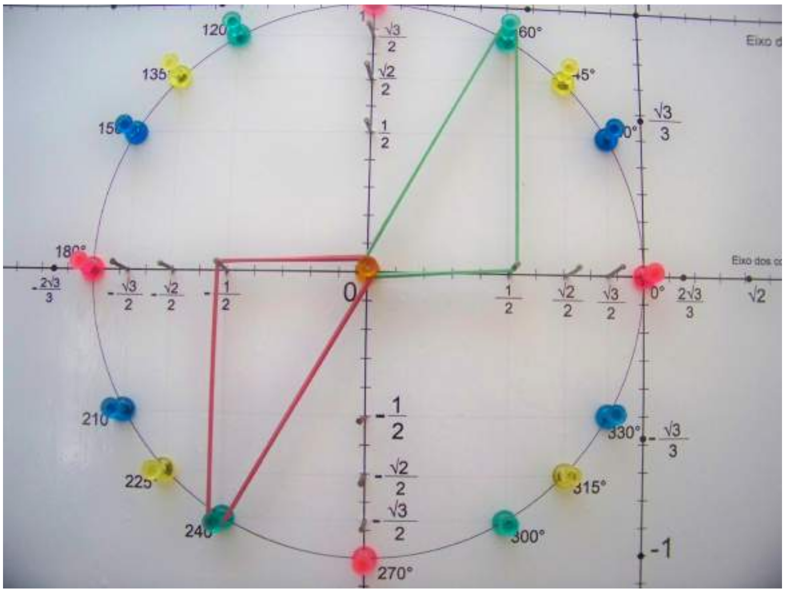


figura8.20

Na ilustração 8.21 temos que o seno de 240^0 é o mesmo de 60^0 com o sinal trocado, pois os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação a origem,



8.21

Observe também, que podemos utilizar tal experiência do estudo, para apresentarmos a redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante, ou seja ;

$$sen(180 + x) = -sen(x).$$

Manipulando o seno no quarto quadrante

Observando a figura 8.22 temos, o ângulo central de 300^0 e o triângulo formado pelo elástico de cor verde, cujo o segmento vertical representa o seu seno, esta associado ao valor $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

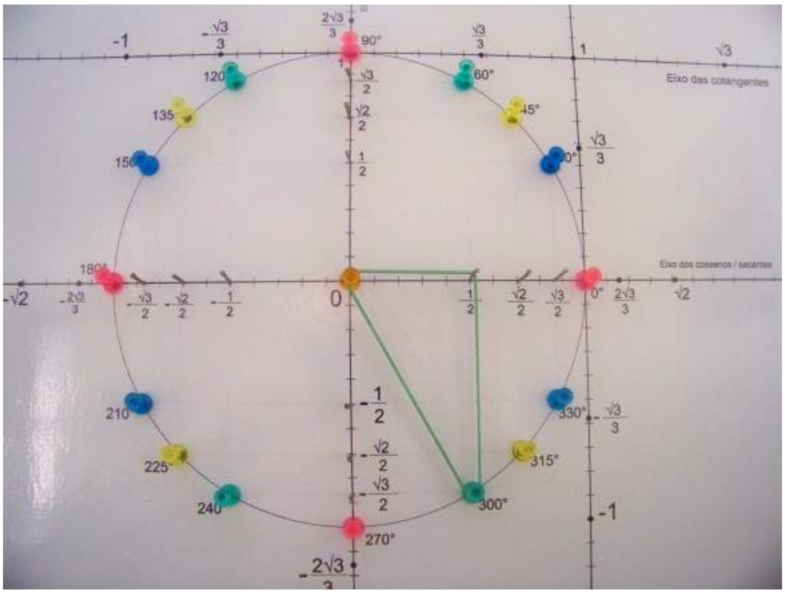


figura 8.22

Observando a figura 8.23, temos um arco de 345^0 , e como na ilustração anterior, mostra no segmento vertical o seno de 345^0, cujo valor é $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

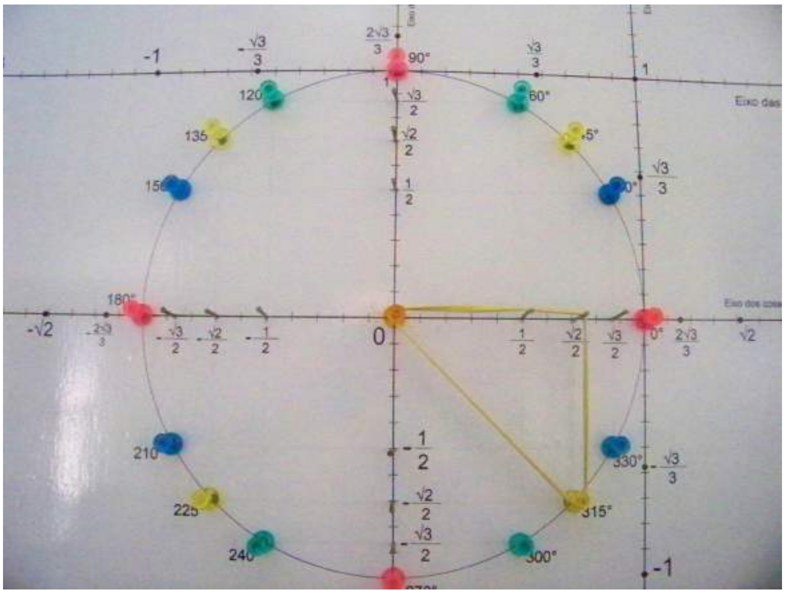
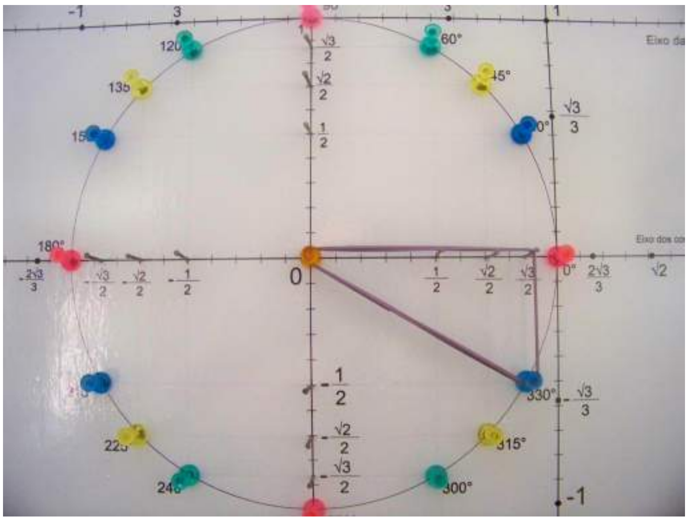


figura 8.23

Na ilustração 8.24 podemos notar a presença do ângulo central de 330^0, cujo seno possui valor $-\dfrac{1}{2}$.



8.24

Ainda notamos, que na figura 8.25 apresenta-se o seno de 360^0 com valor 0.

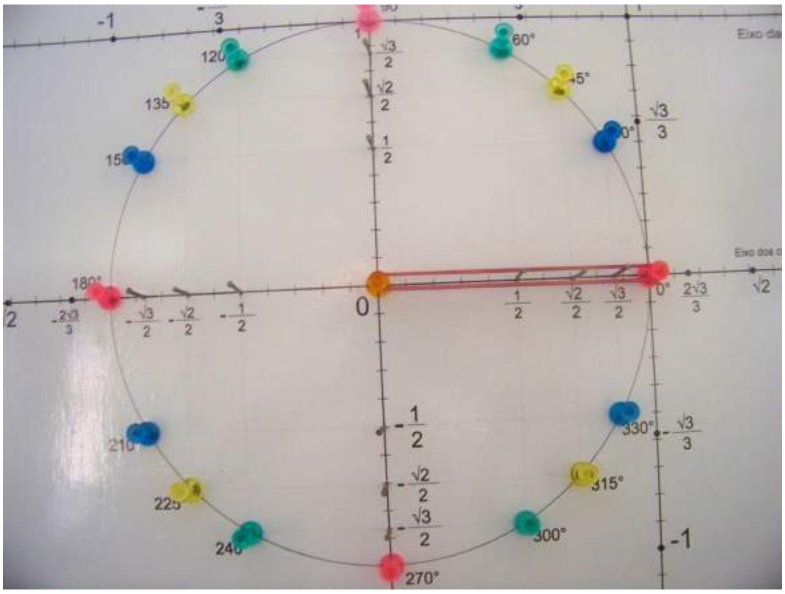


figura 8.25

Durante a análise do estudo do seno no quarto quadrante , é interessante que o professor conclua , junto com os alunos, o estudo da variação do seno e o estudo do sinal do seno, no quarto quadrante e, vide figura 8.26, concluir que, o seno possui valores negativos e que seus valores aumentam, quando variamos os seu arcos, no sentido anti-horário, no quarto quadrante.

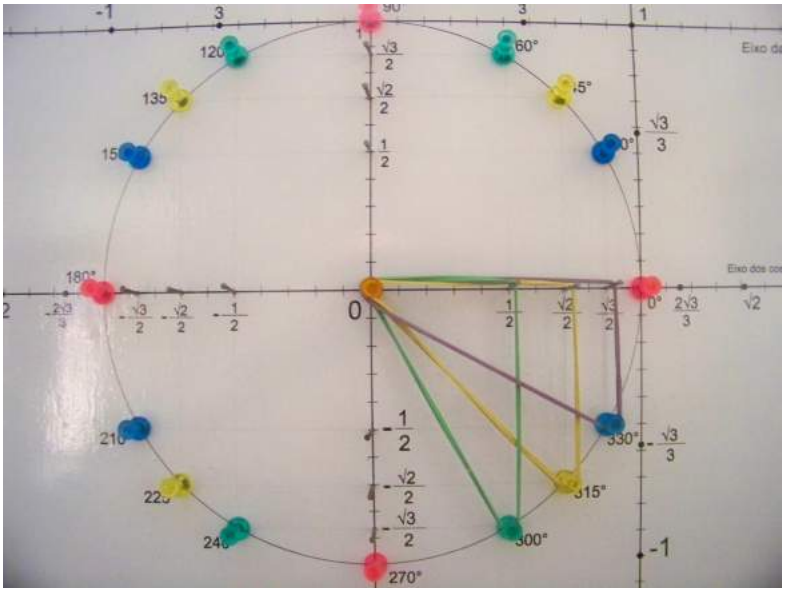


figura 8.26

Vale salientar observando a figura 8.27, que o seno de 300^0 é o mesmo de 60^0, com o sinal trocado, pois os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos verticais de mesma medida e simétricos em relação ao eixo das abcissas

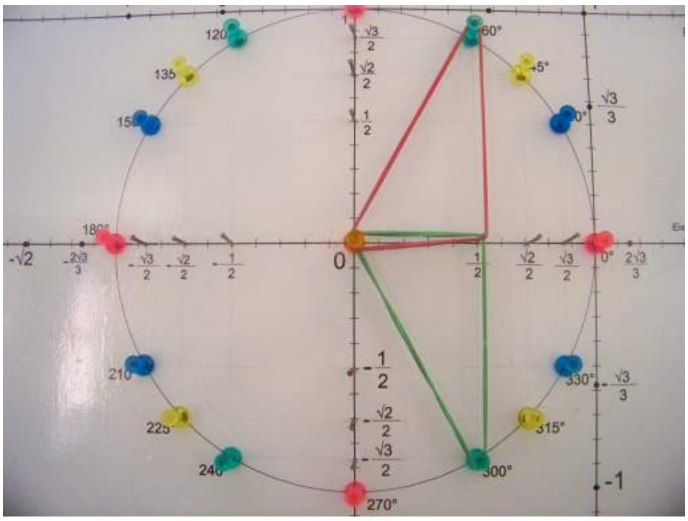


figura 8.27

Já a figura 8.28 temos que o seno de 345^0 é o mesmo de 45^0 com o sinal trocado, pois os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das abcissas.

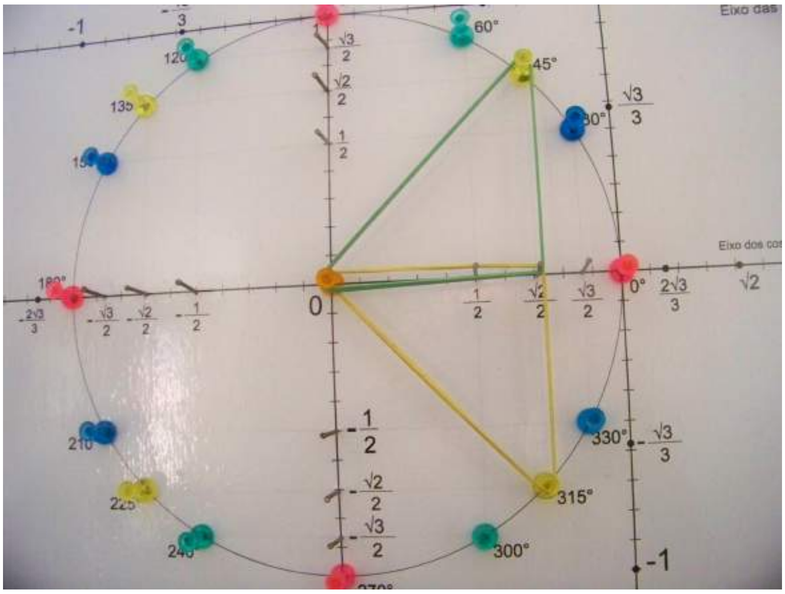
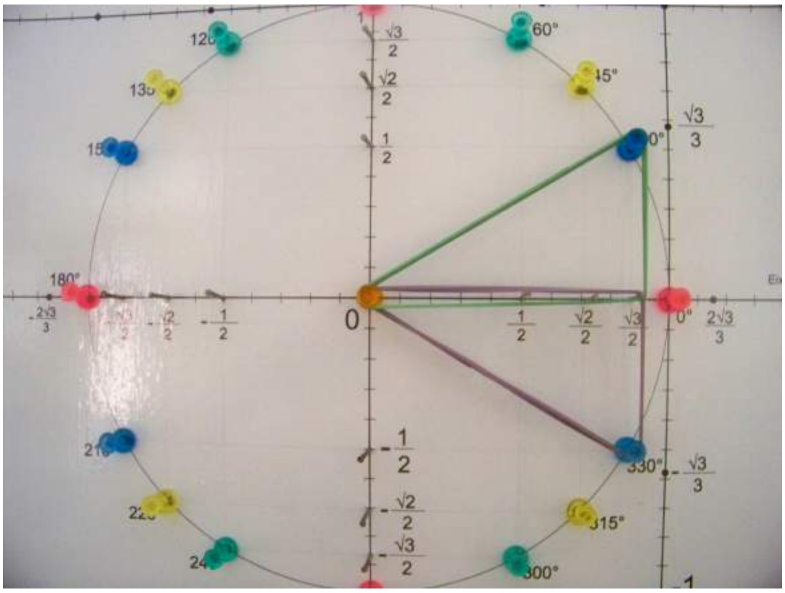


figura 8.28



E que que o seno de 330^0 é o mesmo de 30^0 com o sinal trocado, pois na figura 8.29 os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos verticais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das abcissas.

figura 8.29

Mais uma vez, podemos utilizar tal experiência, no estudo da redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante, chamando a atenção, do aluno, que:

$$\boldsymbol{sen(360 - x) = -sen(x).}$$

Vale a pena ,observando as figuras, 8.29, 8.27 e 8.28, chamar a atenção dos alunos, que $sen(-30) = -sen(30)$, $sen(-45) = -sen(45)$ e que $sen(-60) = -sen(60)$, ou seja

$$\boldsymbol{sen(-x) = -sen(x)}.$$

A partir dos estudos efetuados sobre o seno, nos quatro quadrantes, o professor nessa etapa, deve estimular o aluno para a percepção do maior valor e do menor valor do seno, fazendo que o mesmo perceba que o seno possui valor máximo 1 e mínimo -1, isto é $-1 \leq sen(x) \leq 1$.

Manipulando o cosseno no primeiro quadrante

Observamos na figura 8.30 que foi inserido borrachas elásticas nos pinos anexados à circunferência, notamos ainda, que o triângulo formado pela borracha elástica de cor lilás é retângulo e delimita o ângulo central de 30^0, como o raio da circunferência trigonométrica vale um, consideremos, então o segmento horizontal adjacente ao ângulo central de 30^0, formado por esse triângulo, a representação do cosseno de 30^0, que possui valor associado ao número $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

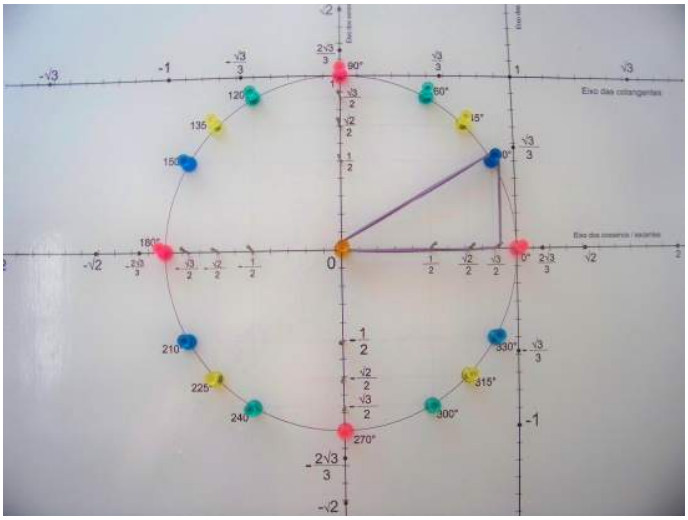


figura 8.30

Na figura 8.31 observa-se, que o ângulo central utilizado é o de 45^0, e da mesma forma que a ilustração anterior, o segmento horizontal adjacente ao ângulo central de 45^0, representa o seu cosseno, cujo valor esta associado ao número $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

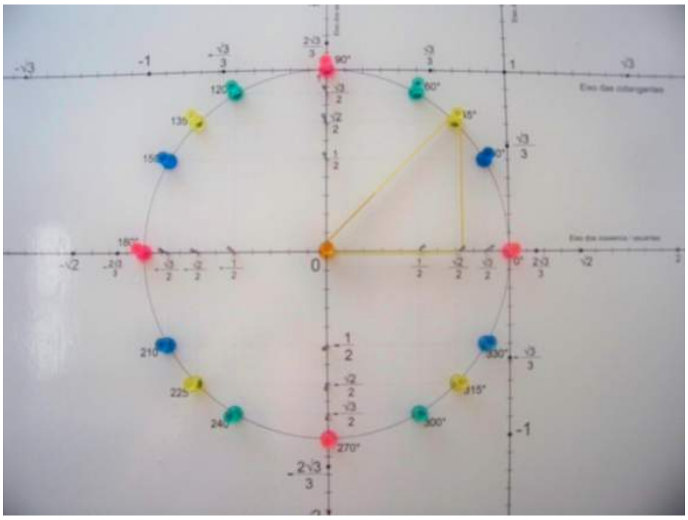


figura 8.31

Trabalhando-se ainda no primeiro quadrante, e agora utilizando-se o ângulo central de 60^0, temos de forma análoga, a situações anteriores, que o segmento horizontal do triângulo verde, representa o cosseno do ângulo central de 60^0, cuja medida é $\dfrac{1}{2}$(ver figura 8.32).

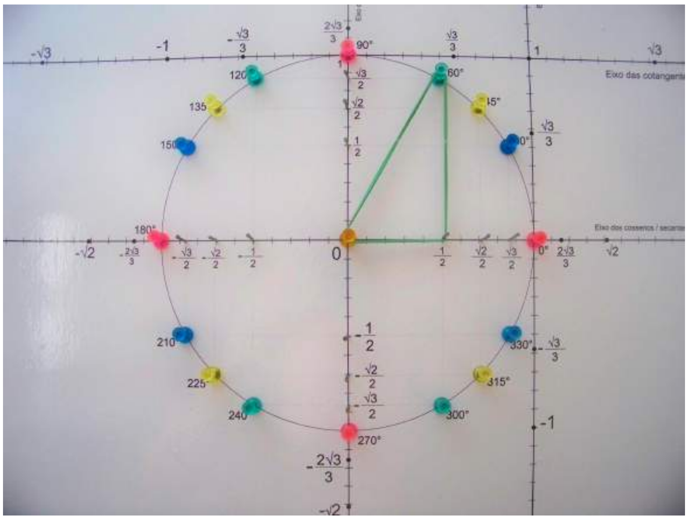


figura 8.32

Manipulando o cosseno no segundo quadrante

Tomando-se, então na circunferência trigonométrica o ângulo central de medida 90^0 (figura 8.33), podemos observar que o segmento horizontal do triângulo retângulo diminui tornando -se um ponto, e coincidindo com a origem do plano cartesiano, o que nos leva a concluir que o valor do cosseno possui medida 0, ou seja o cosseno de 90^0 vale 0.

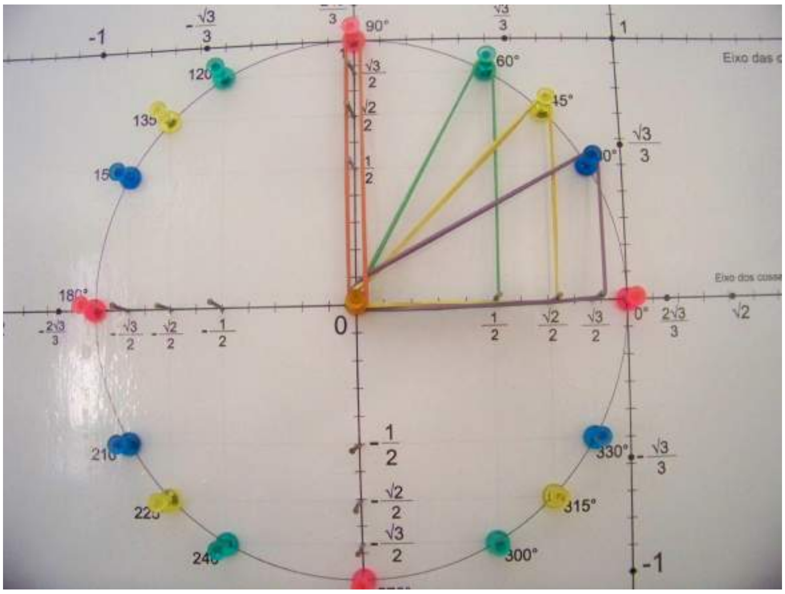


figura 8.33

Observe na figura 8.34, onde temos o ângulo central de 120^0 no triângulo retângulo , formado pelo elástico de cor verde, cujo o segmento horizontal representa o seu cosseno, que esta associado ao número $-\frac{1}{2}$.

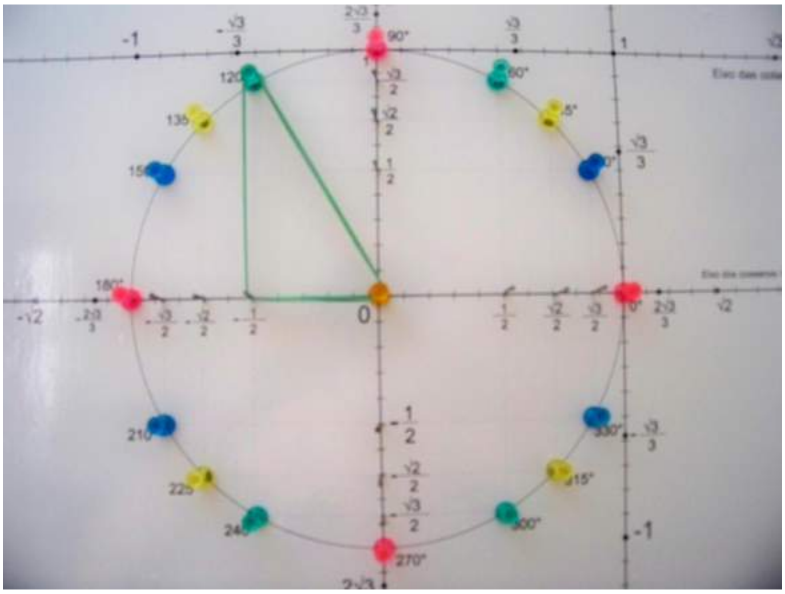


figura 8.34

Na ilustração 8.35 podemos notar a presença do ângulo central de 145^0,no triângulo retângulo, formado pelo elástico de cor amarela, cujo segmento horizontal representa o seu cosseno,que esta associado o seu cosseno ao número $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

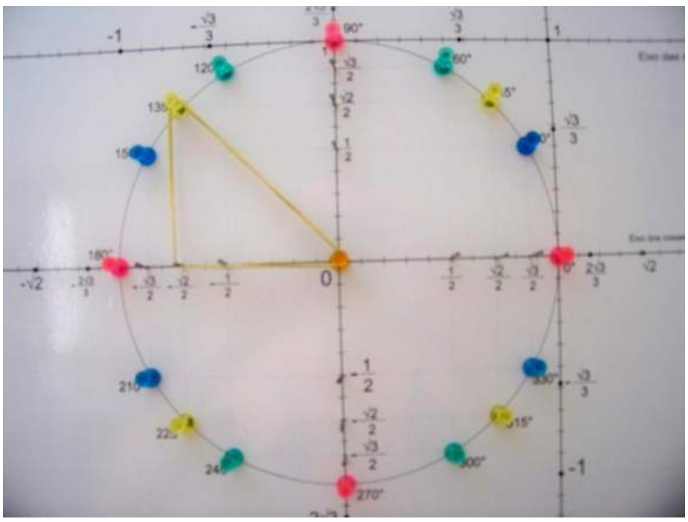


figura 8.35

Observando a figura 8.36, temos um arco de 150^0 , e como na ilustração anterior, mostra no segmento horizontal o cosseno de 150^0, associado ao número $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

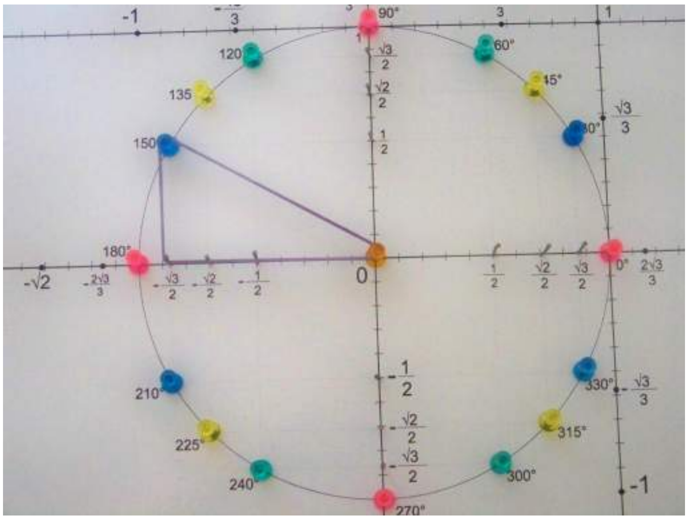


figura8.36

Ainda notamos que a medida do segmento horizontal tende a aumentar de tamanho e diminuir de valor,quando aumentamos os seus arcos, no sentido anti-horário, tendendo assim a assumir o valor do raio da circunferência e dessa maneira valer um (ver figuras 8.37 e 8.38).Desse modo podemos associar o cosseno de 180^0 ao valor -1.

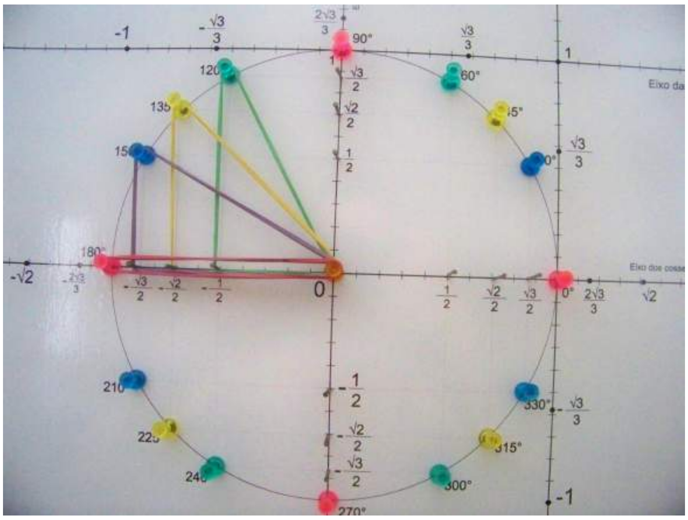


figura 8.37

Durante a analise do estudo do cosseno no segundo quadrante, é interessante que o professor chame a atenção, junto aos alunos, o estudo da variação do cosseno e o estudo do sinal do cosseno, no segundo quadrante e, vide figura 8.37,e concluir de maneira coletiva, que o cosseno possui valores negativos e que suas medidas diminuem, quando variamos os seus arcos, no sentido anti-horário, no segundo quadrante.

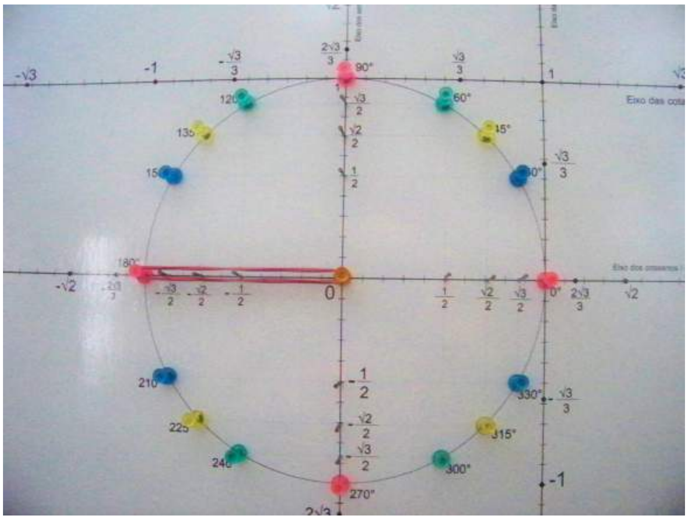


figura 8.38

Observando a ilustração 8.39 temos que o cosseno de 150^0 é o oposto ao cosseno de 30^0,visto que na figura os dois triângulos verde e lilás, apresentam segmentos horizontais adjacentes ao ângulo de 30^0 de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

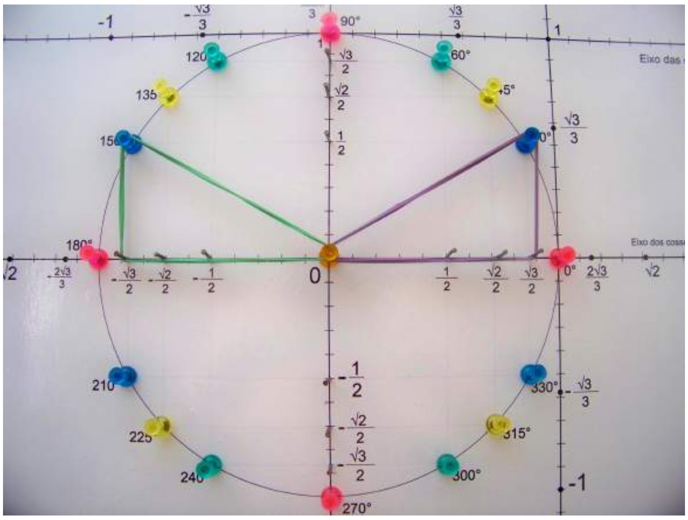


figura 8.39

O mesmo percebemos na ilustração 8.40 onde o cosseno de 135^0 é o oposto ao de 45^0, pois da mesma forma que a situação anterior, os dois triângulos amarelo e vermelho, apresentam segmentos horizontais congruentes e simétricos em relação ao eixo das ordenadas.

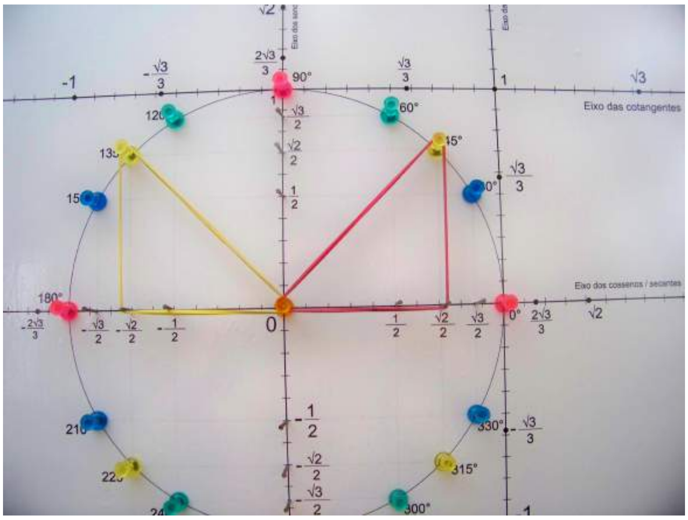


figura 8.40

Ainda é importante, chamarmos a atenção, que observando a figura 8.41, o cosseno de 120^0 é o mesmo de 60^0 com o sinal trocado, pois os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos horizontais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das ordenadas. Esta observação pode ser bastante útil, um pouco mais adiante, no momento em que o professor estiver ensinado redução ao primeiro quadrante, onde temos:

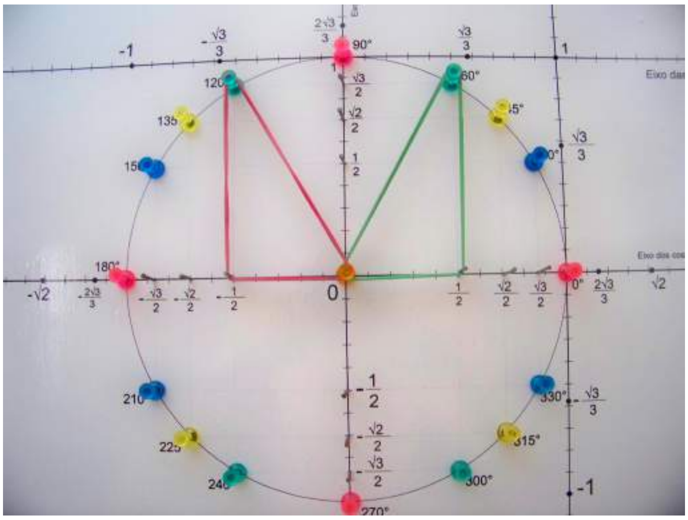


figura 8.41

$$cos(180^0 - x) = -cos(x)$$

Manipulando o cosseno no terceiro quadrante

Observe na figura 8.42, que tomando o ângulo central de 210^0 tem-se o triângulo retângulo, formado pelo elástico de cor lilás, cujo o segmento horizontal representa o seu cosseno, que possui valor associado ao número $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

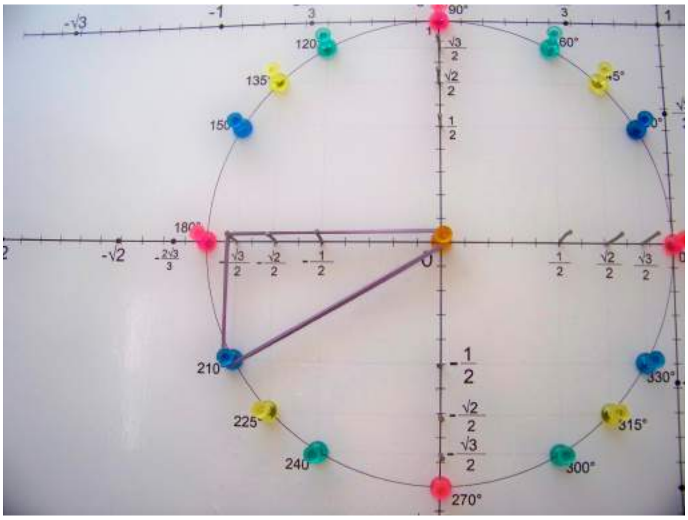


figura 8.42

Na ilustração 8.43 podemos notar a presença do ângulo central de 245^0, que possui valor para o seu cosseno $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

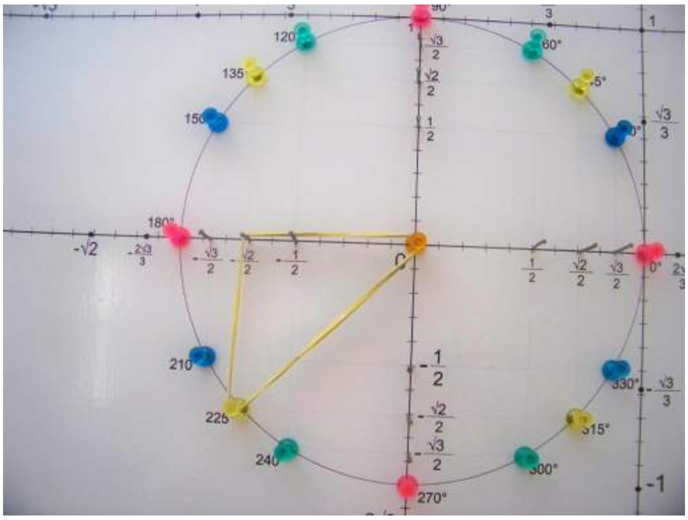


figura 8.43

Variando um pouco mais, na figura 8.44, temos um arco de 240^0, e como na ilustração anterior mostra no segmento horizontal o cosseno de 240^0, cujo valor é $-\dfrac{1}{2}$.

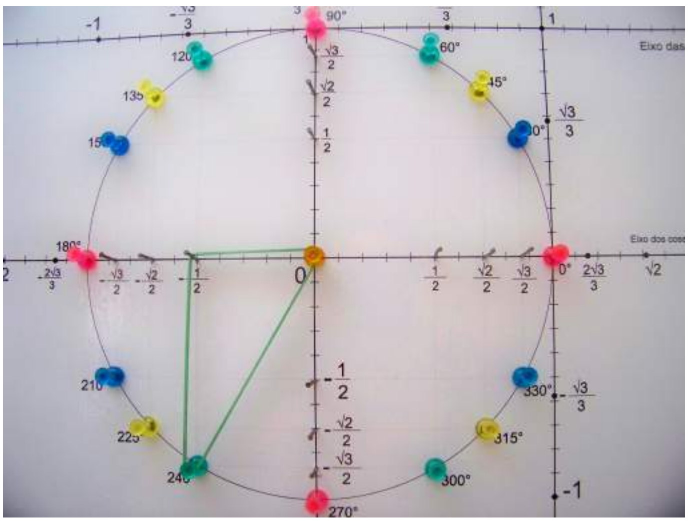


figura 8.44

A medida que variamos os arcos na circunferência trigonométrica, no sentido anti-horário,(fig.8.45 e 8.46), notamos que o segmento horizontal, que representa o cosseno, tende a diminuir de tamanho, porém o seu valor tende a aumentar chegando a 0, e dessa forma, podemos afirmar que o cosseno de 270^0 esta associado ao número 0.

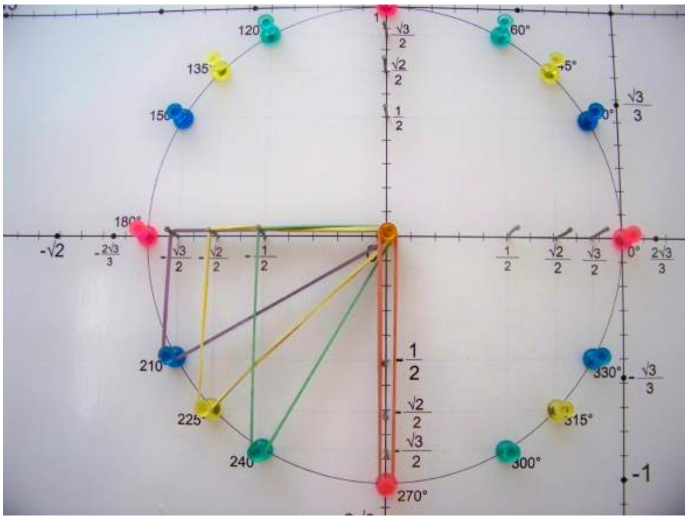
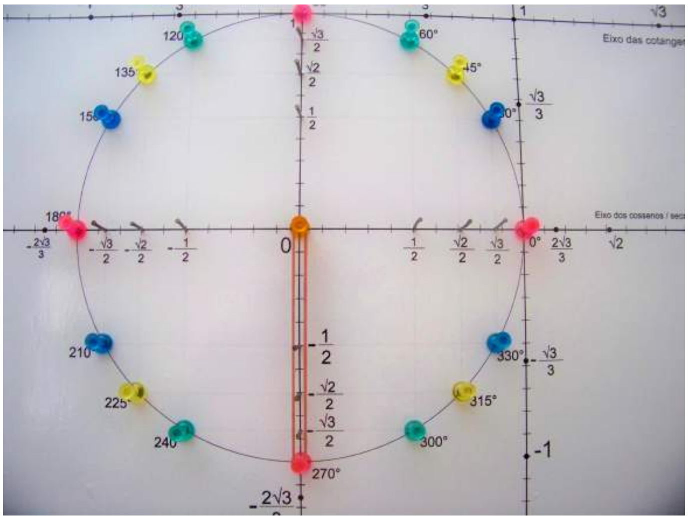
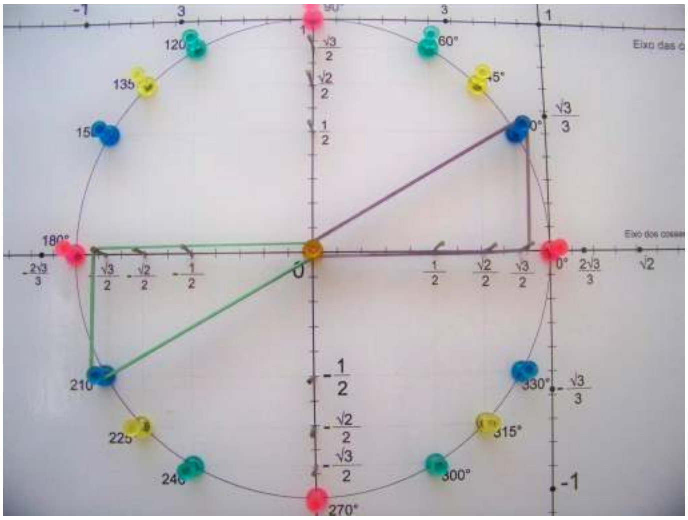


figura 8.45



8.46

Vale salientar que observando a figura 8.47, que o cosseno de 210^0 é o mesmo de 30^0, com o sinal trocado, pois na ilustração os dois triângulos verde e lilás, apresentam segmentos horizontais congruentes e simétricos em relação a origem



8.47

Observando a ilustração 8.48 temos que o cosseno de 235^0 é o oposto ao de 45^0 , pois, na figura os dois triângulos amarelo e vermelho, apresentam segmentos horizontais de medidas congruentes e simétricos em relação a origem

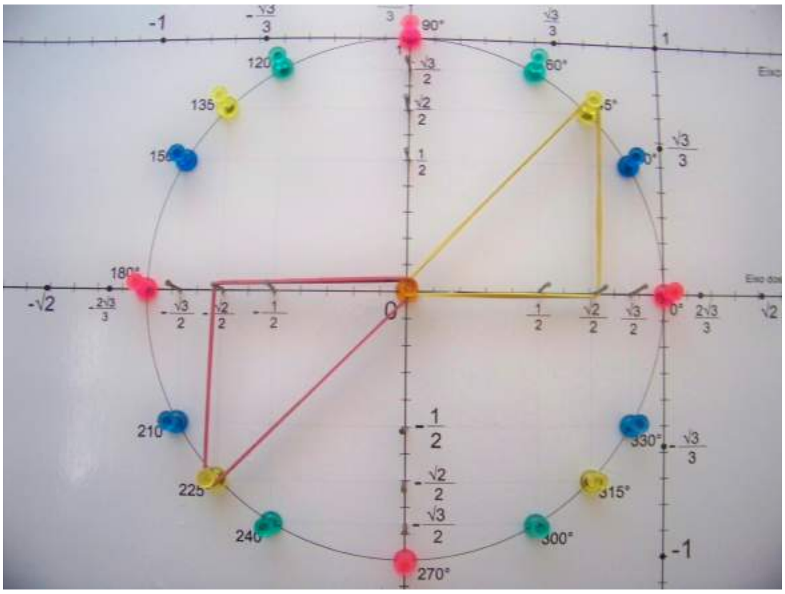
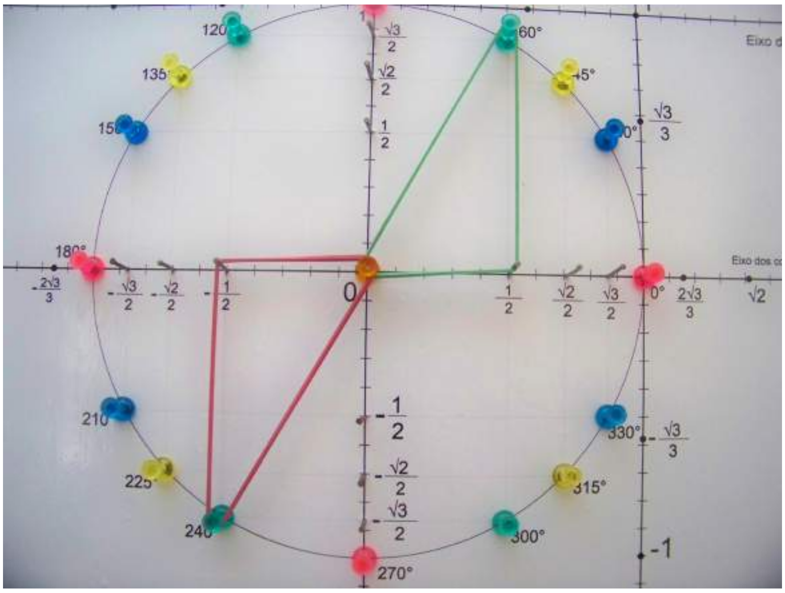


figura 8.48

Observamos na figura 8.49 que o cosseno de 240^0 é o mesmo de 60^0 com o sinal trocado, uma vez que os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos horizontais de mesma medida e são simétricos em relação a origem.



8.49

Na manipulação do cosseno no terceiro quadrante , é oportuno que o professor socialize , junto aos alunos, o estudo da variação do cosseno e o estudo do seu sinal e vide figura 8.45, concluir de maneira coletiva, que o cosseno possui valores negativos e suas medidas aumentam em tamanho e diminuem em valor, quando variamos os seus arcos, atingindo um mínimo -1 e um máximo 0.

Observe também, que podemos utilizar tal experiência no estudo da redução do terceiro quadrante para o primeiro quadrante, chamando a atenção,do aluno, que:

$$cos(180 + x) = -cos(x).$$

Manipulando o cosseno no quarto quadrante

Observando a figura 8.50 temos, o ângulo central de 300^0 e o triângulo formado pelo elástico de cor verde , cujo o segmento horizontal representa o seu cosseno, que esta associado ao valor $\frac{1}{2}$.

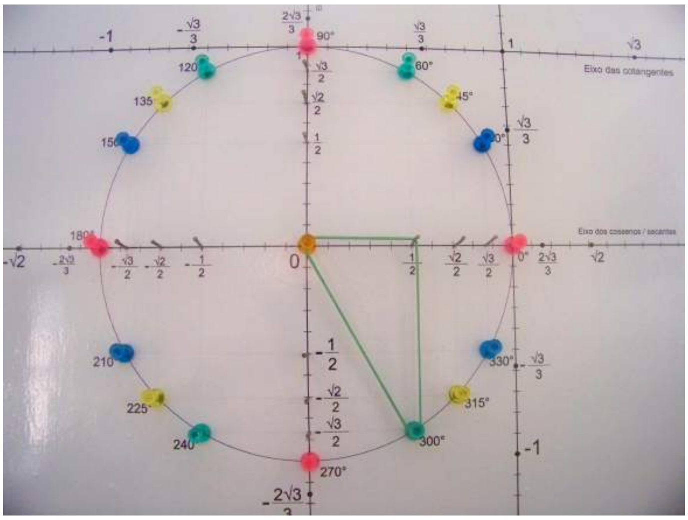


figura 8.50

Na figura 8.51 observamos o arco de 345^0, e como na ilustração anterior mostra, no segmento horizontal, o cosseno de 345^0, cujo valor esta associado ao número $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

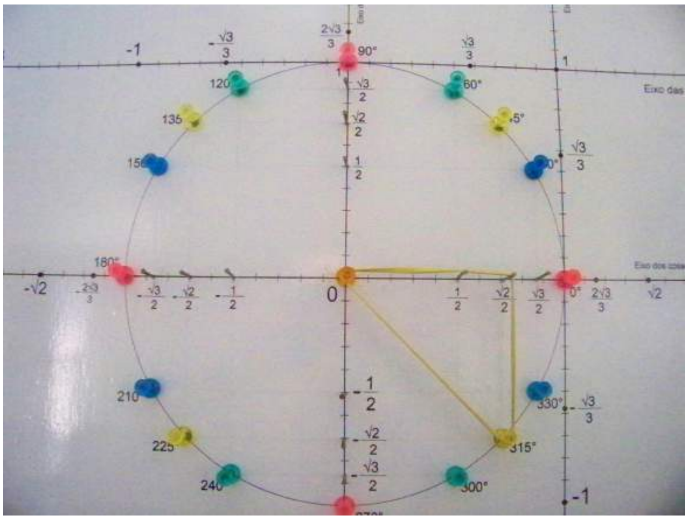


figura 8.51

Na ilustração 8.52 temos a presença do triângulo elástico, de cor lilás, onde podemos notar a presença do ângulo central de 330^0, que possui valor associado ao número $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

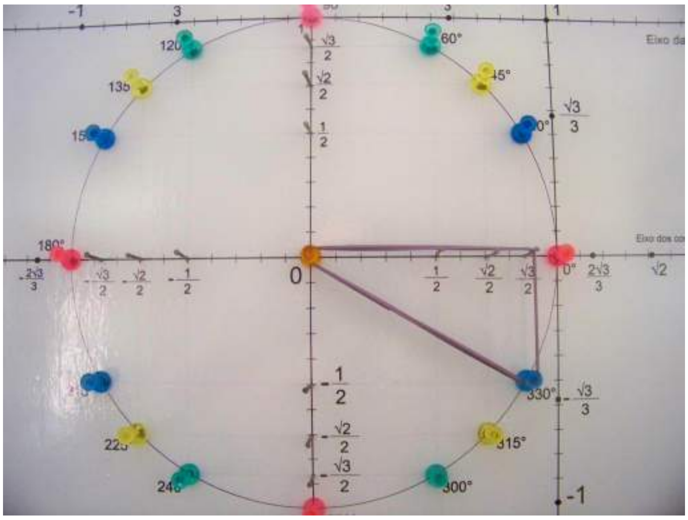


figura 8.52

A medida que manipulamos o cosseno no quarto quadrante, podemos perceber que a medida do segmento horizontal em cada triângulo da ilustração 8.53 aumenta de tamanho, de modo a assumir o valor do raio da circunferência trigonométrica .

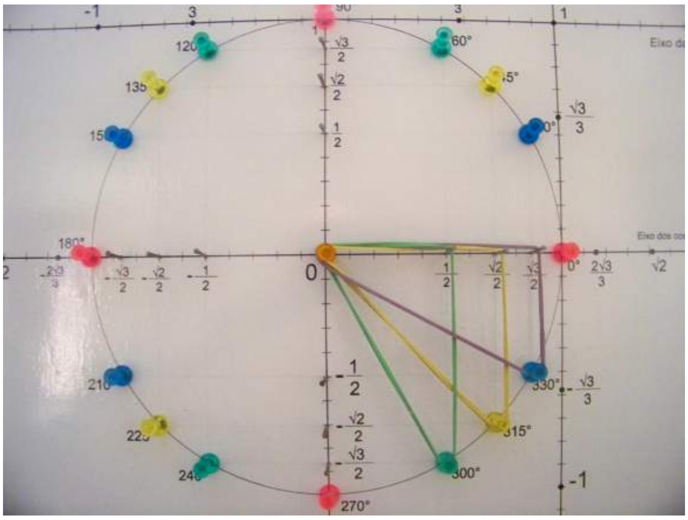


figura 8.53

Dessa forma podemos afirmar (figura8.54) que o cosseno de 360^0 ,bem como o de 0^0, esta associado ao valor 1.

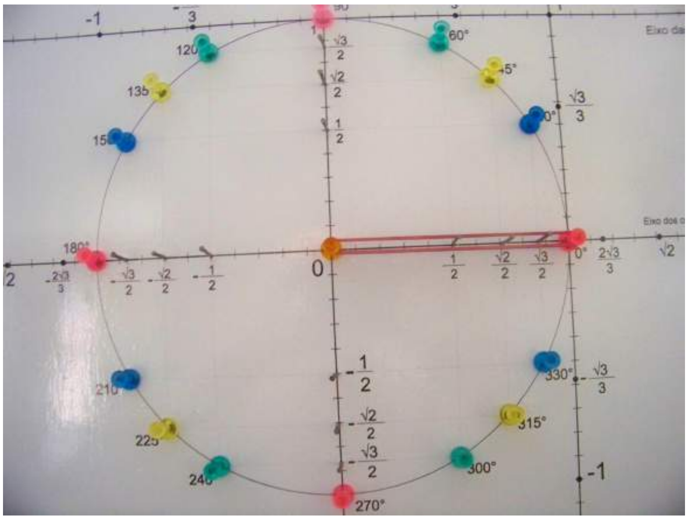


figura 8.54

Observando a figura 8.55,temos o cosseno de 300^0 que é o mesmo de 60^0, pois na figura os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos horizontais de medidas coincidentes e simétricos em relação ao eixo das abcissas.

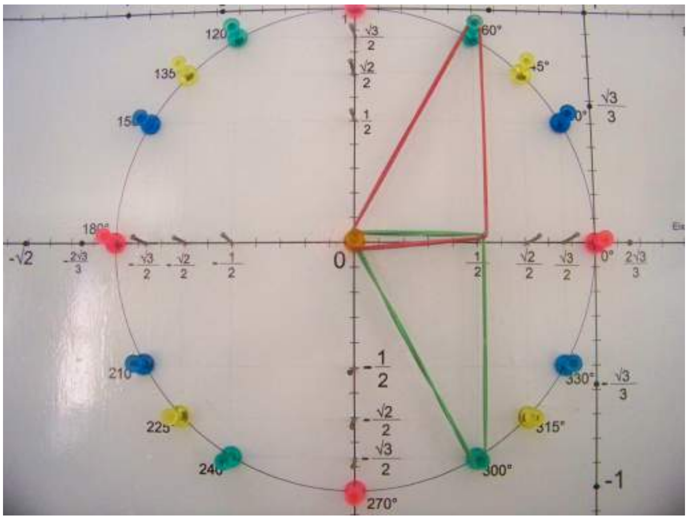


figura 8.55

Já na afigura 8.56, temos que o cosseno de 345^0 é o mesmo de 45^0 , pois os dois triângulos verde e amarelo, apresentam segmentos horizontais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das abscissas

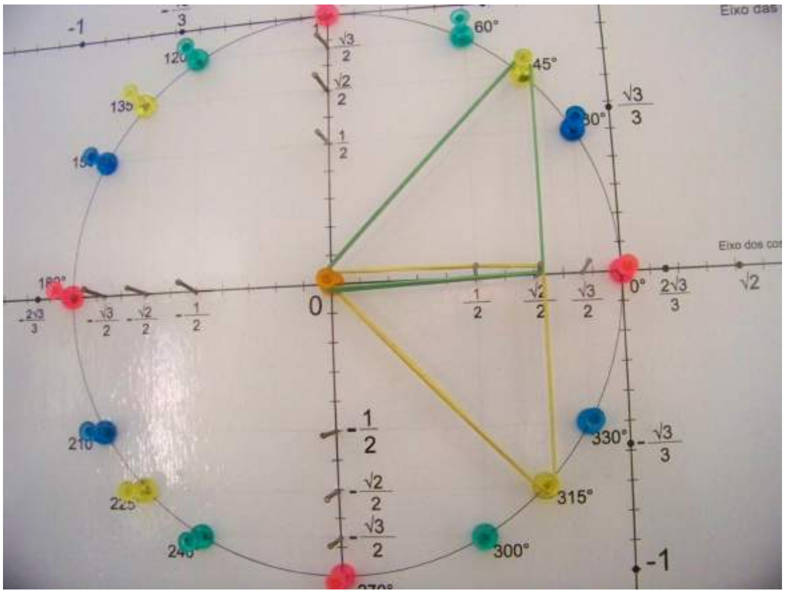


figura 8.56

Observe na figura 8.57 que o cosseno de 330^0 é o mesmo de 30^0 , pois os dois triângulos verde e vermelho, apresentam segmentos horizontais de mesma medida e são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

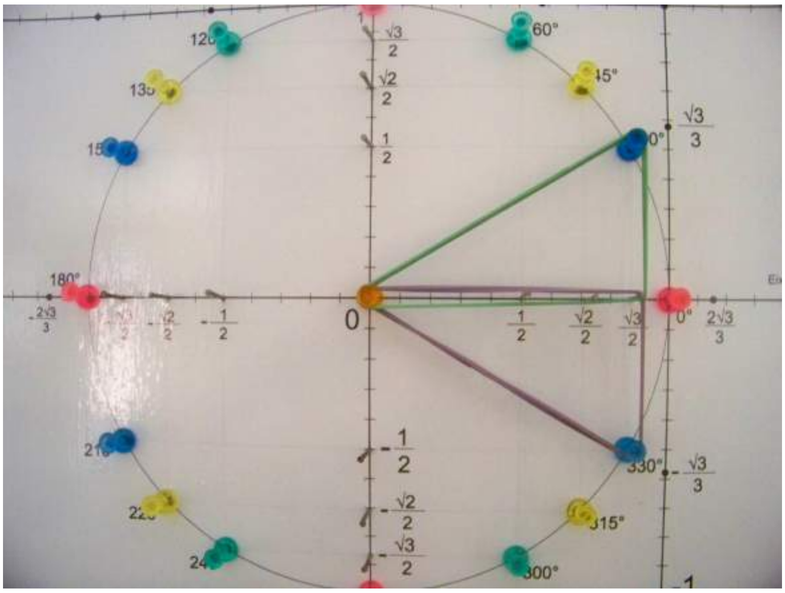


figura 8.57

Durante a analise do estudo do cosseno no quarto quadrante, é interessante que o professor conclua, junto aos alunos, o estudo da variação do cosseno e o estudo do seu sinal. Concluindo que o cosseno possui valores negativos e que suas medidas aumentam, quando variamos os seu arcos, no sentido anti-horário. Mais uma vez, podemos utilizar tal experiência no estudo da redução do quarto quadrante para o primeiro quadrante,chamando a atenção, do aluno, que:

$$cos(360 - x) = cos(x).$$

A partir dos estudos efetuados sobre o cosseno, nos quatro quadrantes, o professor ,nessa etapa do estudo,deve estimular o aluno para a percepção do maior valor e do menor valor do cosseno, fazendo que o mesmo perceba que o cosseno possui valor máximo 1 e mínimo -1, ou seja:$-1 \leq cos(x) \leq 1$.

Manipulando a tangente no primeiro quadrante

Notamos na figura 8.58, que o triângulo formado pela borracha elástica de cor lilás é retângulo e delimita o ângulo central de 30^0.Como o raio da circunferência trigonométrica vale um, podemos então considerar, o segmento vertical oposto ao ângulo de 30^0, formado por esse triângulo, a representação da tangente de 30^0, cujo valor esta associado ao número $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

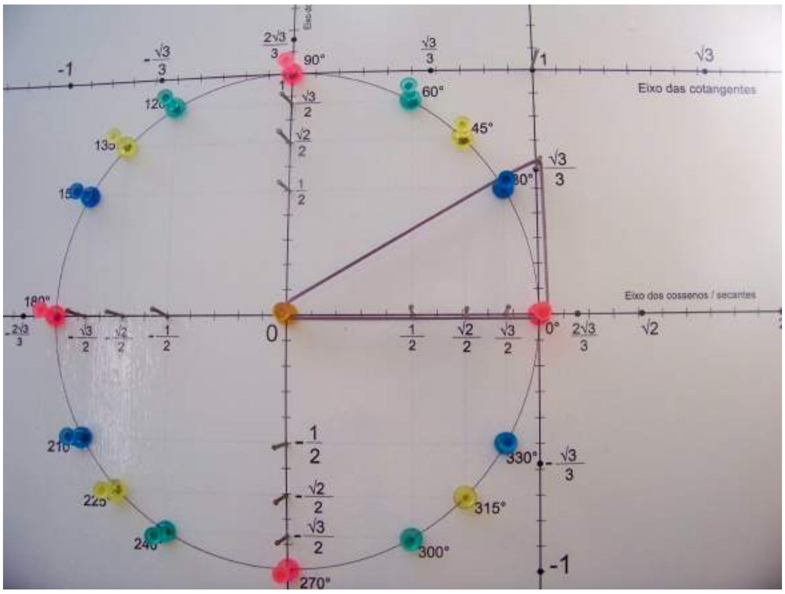


figura 8.58

Temos na figura 8.59 o triângulo formado pela borracha elástica de cor amarela que é retângulo e delimita o ângulo central de 45^0.Como o raio da circunferência trigonométrica vale um, podemos, então considerar, o segmento vertical oposto ao ângulo de 45^0, formado por esse triângulo, a representação da tangente de 45^0, cujo valor esta associado ao número 1.

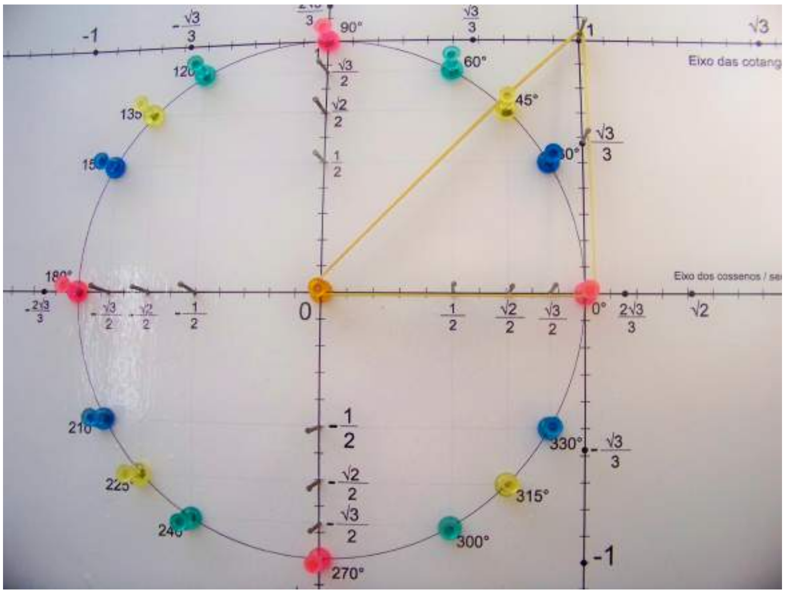


figura 8.59

Podemos observar na figura 8.60, que o triângulo formado pela borracha elástica de cor verde é retângulo e delimita o ângulo central de 60^0.De forma análoga as situações anteriores, o segmento vertical oposto ao ângulo de 60^0, formado por esse triângulo,é a representação da tangente de 60^0, cujo valor esta associado ao número $\sqrt{3}$.

Variando os arcos na circunferência trigonométrica no primeiro quadrante (figura 8.61), podemos perceber que os segmentos ,verticais, formados pelos triângulos lilás ,amarelo e verde aumentam de tamanho e valem respectivamente $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 1, $\sqrt{3}$. Ao tomarmos o arco de 90^0 (fig.8.62) percebemos que não temos a representação da tangente no eixo das tangentes. Nesse instante podemos afirmar $tg90^0$ é inexistente.

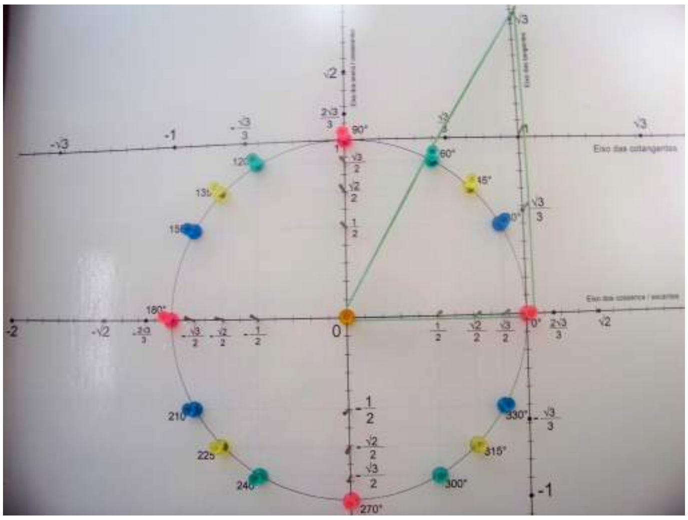


Figura 3: figura 8.60

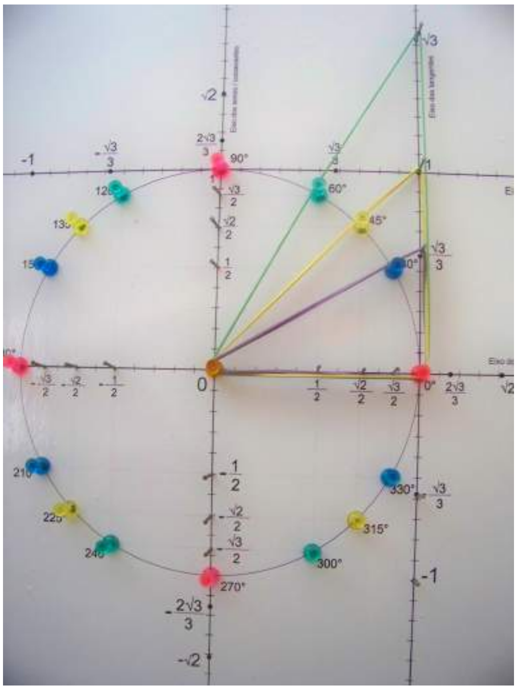


Figura 4: figura 8.61

É interessante chamar a atenção dos alunos sobre a variação e o sinal da tangente, identificando a como crescente e positiva, sendo uma relação ilimitada, variando de 0 a $+\infty$, no primeiro quadrante, vide figura 8.62.

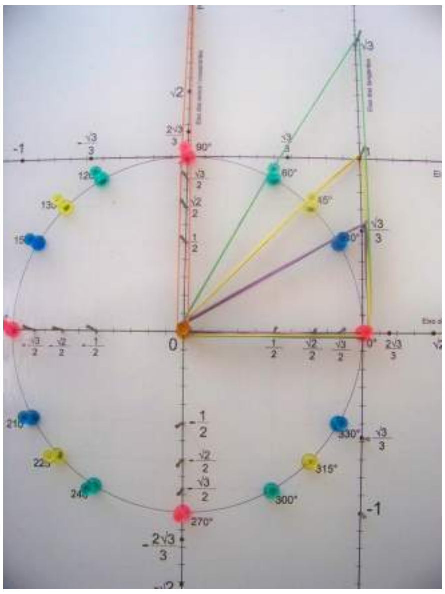


Figura 5: figura 8.62

Manipulando a tangente no segundo quadrante

Vimos no capitulo 4, secção 4.7 a definição da tangente de um arco. Podemos observar na figura 8.63 a representação da tangente de 120^0, cujo valor esta associado ao número $-\sqrt{3}$.

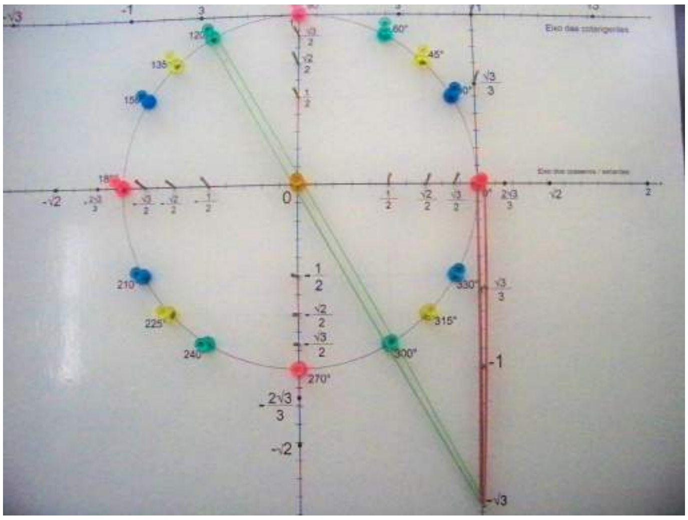


figura 8.63

Na figura 8.64 podemos observar a tangente 135^0 representada no eixo das tangentes e que esta associado ao número - 1

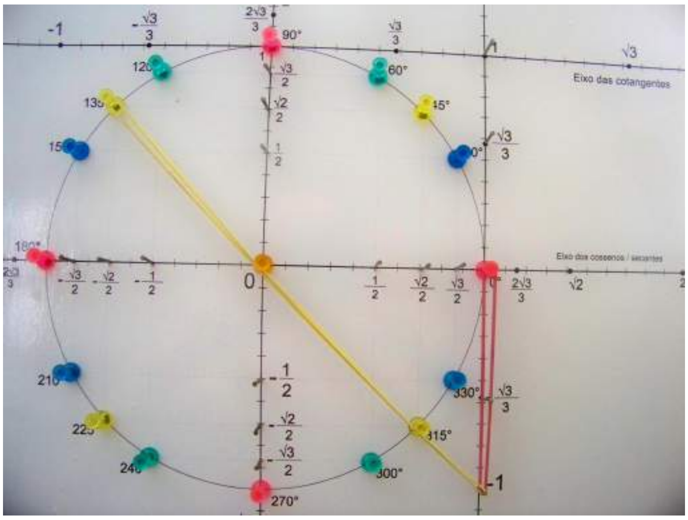


figura 8.64

Observamos na figura 8.65 a representação da tangente de 150^0, cujo valor esta associado ao número $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

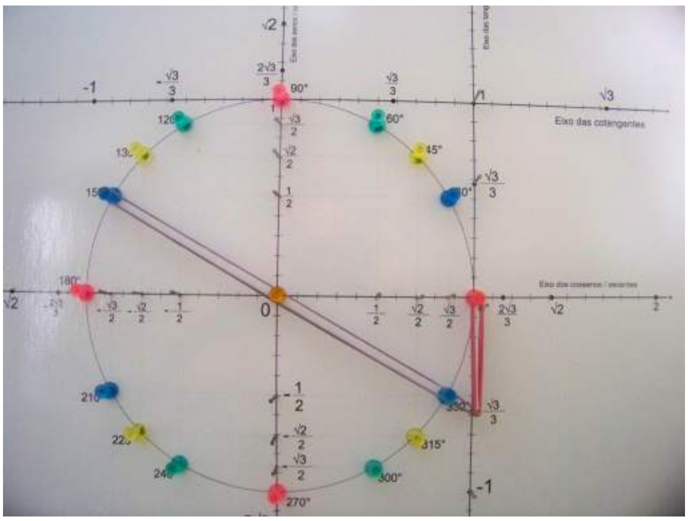


figura 8.65

Variando os arcos na circunferência trigonométrica no segundo quadrante (figura 8.66), podemos perceber que os segmentos verticais valem respectivamente: $-\sqrt{3}$, -1,$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ao tomarmos o arco de 180^0 (fig.8.67) percebemos que o valor da $tg180^0$ esta associado ao número 0.

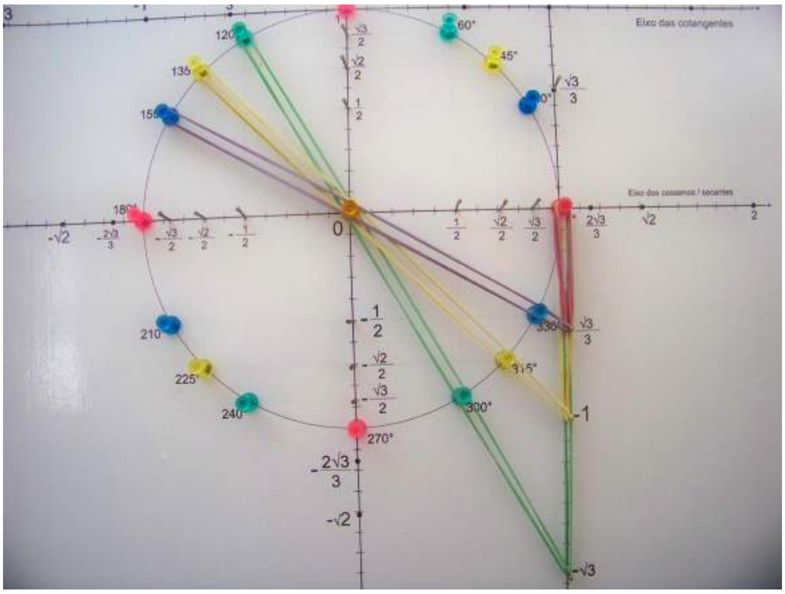


figura 8.66

É interessante chamar a atenção dos alunos sobre o sinal e a variação da tangente, identificando o como negativo e crescente, sendo uma relação ilimitada, variando de $-\infty$ a 0, no segundo quadrante, vide figura 8.67.

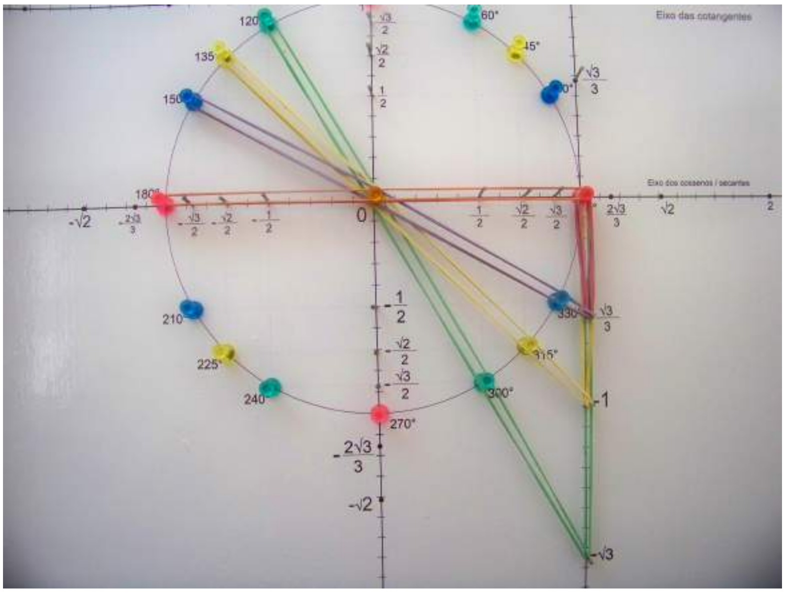


figura 8.67

Manipulando a tangente no terceiro quadrante

De acordo com a definição da tangente de um arco. Podemos observar na figura 8.68 a representação da tangente de 210^0, cujo valor esta associado ao número $\frac{\sqrt{3}}{3}$

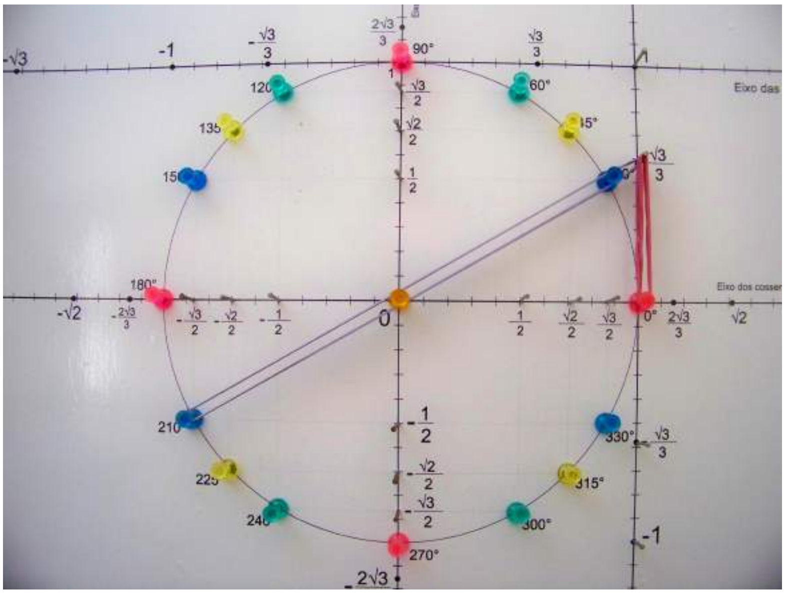


figura 8.68

Na figura 8.69 podemos observar a tangente 225^0 representada no eixo das tangentes e que esta associado ao número 1

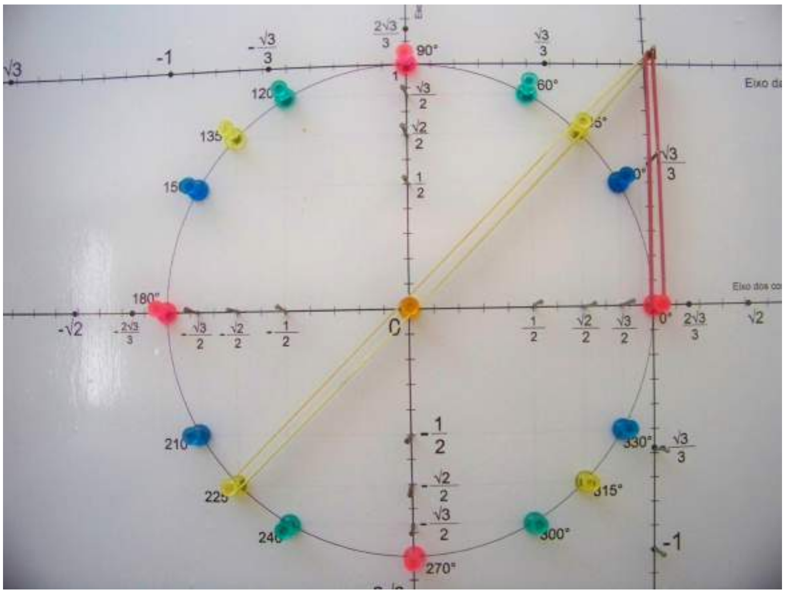


figura 8.69

Observamos na figura 8.70 a representação da tangente de 150^0, cujo valor esta associado ao número $\sqrt{3}$.

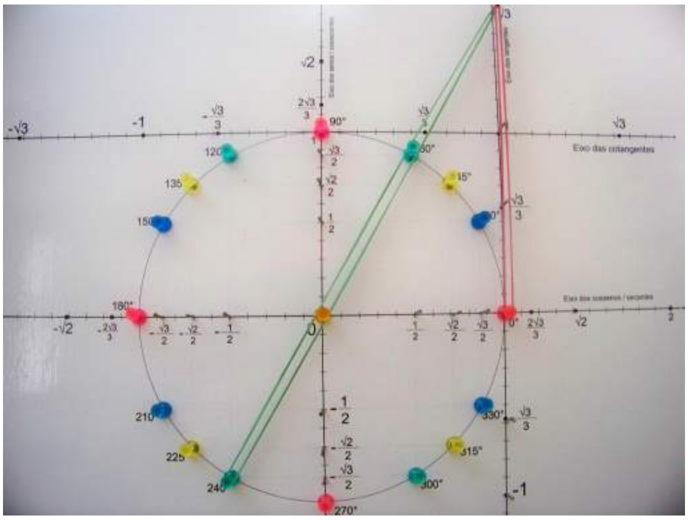


figura 8.70

Variando os arcos na circunferência trigonométrica no terceiro quadrante (figura 8.71), podemos perceber que os segmentos verticais valem respectivamente: $\sqrt{3}$, 1, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ao tomarmos o arco de 270^0 (fig.8.72) percebemos que o valor da $tg270^0$ é inexistente.

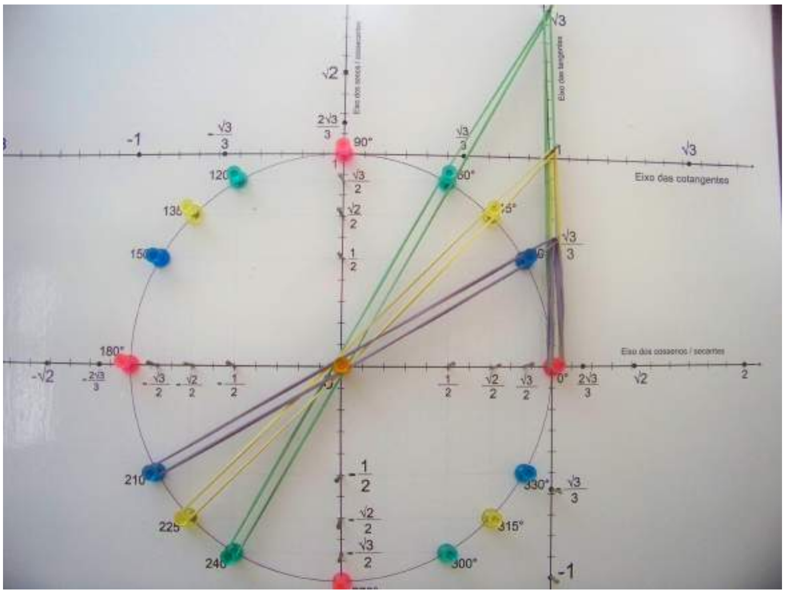


figura 8.71

É interessante chamar a atenção dos alunos sobre o sinal e a variação da tangente, identificando o como positivo e crescente, sendo uma relação ilimitada, variando de 0 a $+\infty$, no terceiro quadrante, vide figura 8.72.

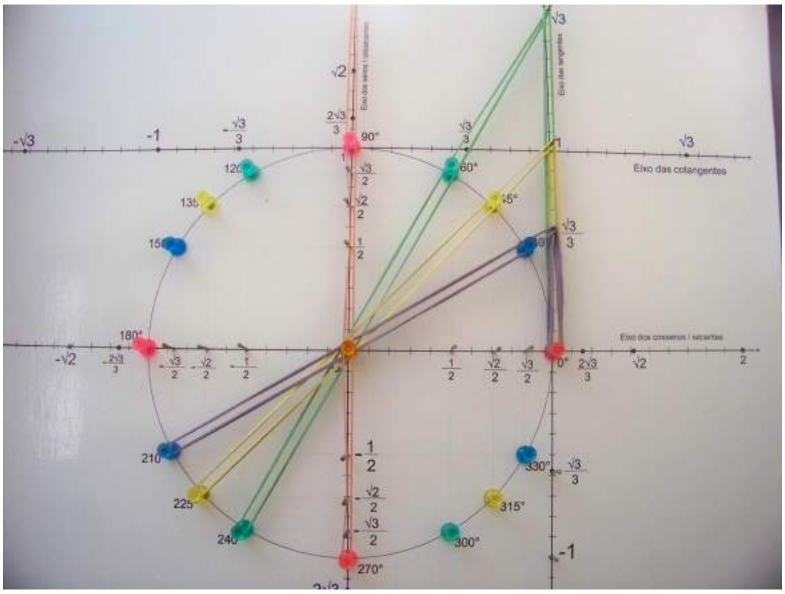


figura 8.72

Manipulando a tangente no quarto quadrante

Vimos no capitulo 4, secção 4.7 a definição da tangente de um arco. Podemos observar na figura 8.73 a representação da tangente de 300^0, cujo valor esta associado ao número $-\sqrt{3}$.

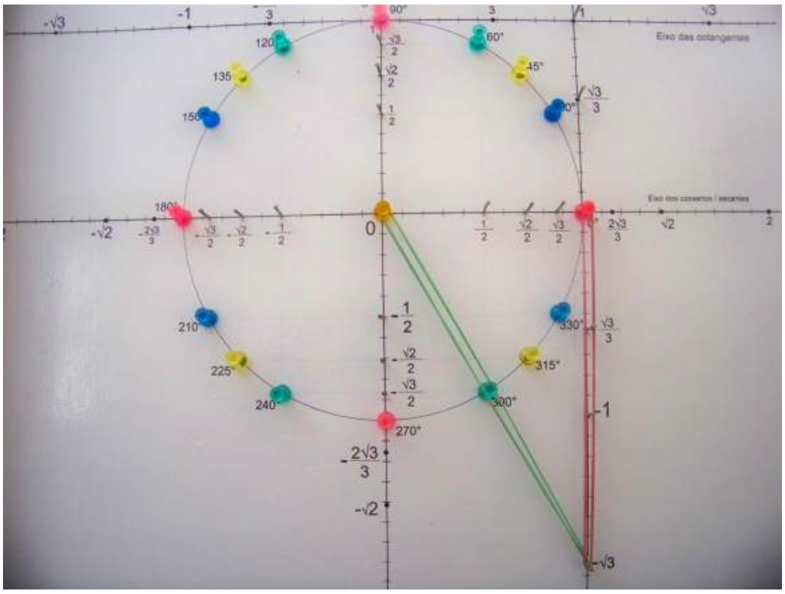


figura 8.73

Na figura 8.74 podemos observar a tangente 315^0 representada no eixo das tangentes e associada ao número - 1

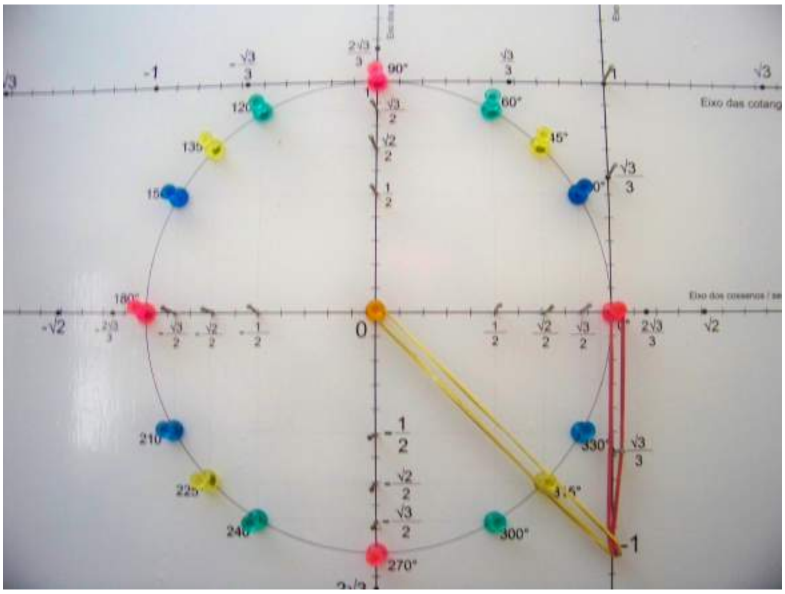


figura 8.74

Observamos na figura 8.75 a representação da tangente de 330^0, cujo valor esta associado ao número $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

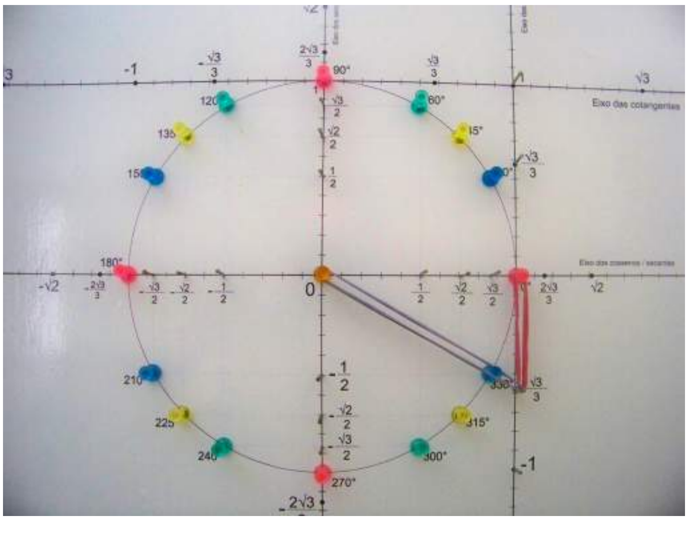


figura 8.75

Variando os arcos na circunferência trigonométrica no quarto quadrante (figura 8.76), podemos perceber que os segmentos verticais estão aumentando e valem : $-\sqrt{3}$, -1,$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ao tomarmos o arco de 360^0 na figura 8.77 percebemos o valor da $tg360^0$ que esta associado ao número 0.

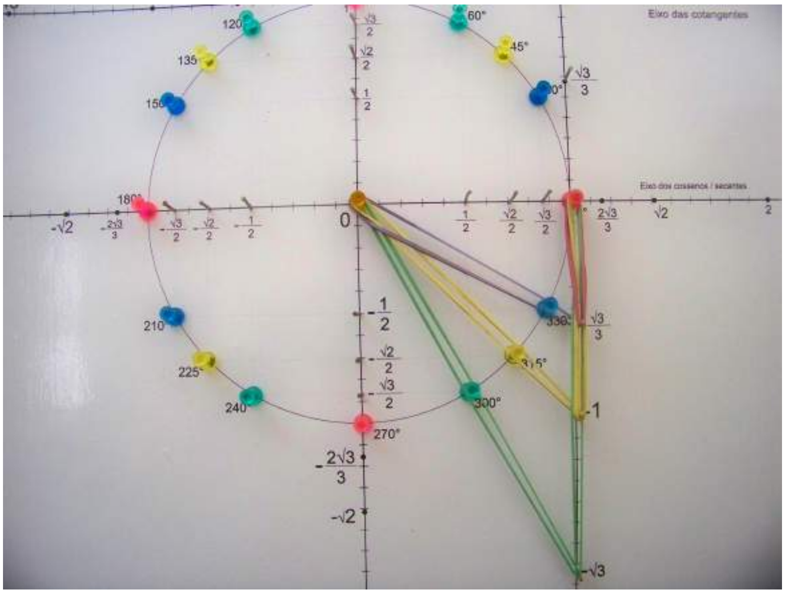


figura 8.76

É interessante chamar a atenção dos alunos sobre o sinal e a variação da tangente, identificando a como negativa e crescente, sendo uma relação ilimitada, variando de $-\infty$ a 0, no quarto quadrante. A partir dos estudos efetuados sobre a tangente, nos quatro quadrantes, o professor nessa etapa ,deve estimular o aluno para a percepção do maior valor e do menor valor da tangente, fazendo que o mesmo perceba que a tangente não possui valor máximo ou mínimo , isto é $tg(x) \in]-\infty, \infty+[$

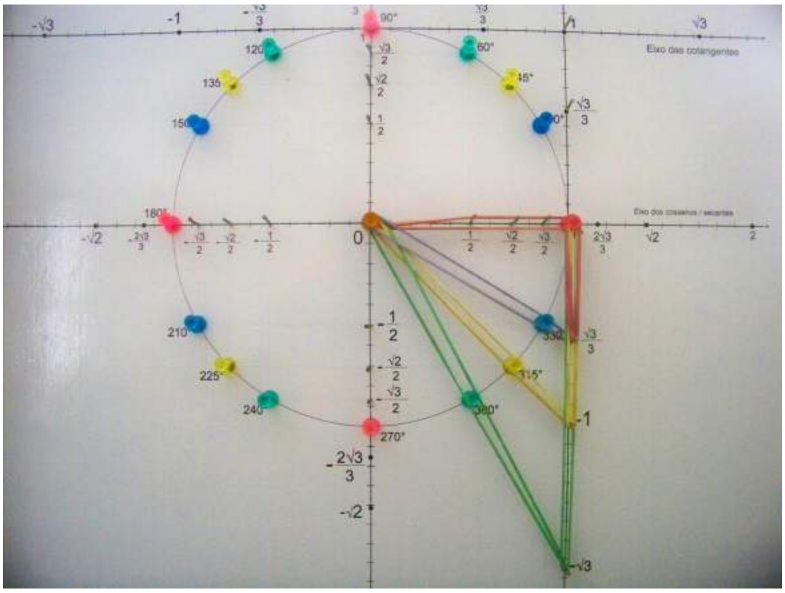


figura 8.77

8.1 Trabalhando em sala com a circunferência trigonométrica concreta

A circunferência trigonométrica concreta foi aplicada pela professora Carolina Silva Bitencout para turma do 2^0 ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Duque de Caxias, localizada em Salvador no bairro da Liberdade, no estado da Bahia no período matutino.

De posse do material, criamos atividades, para orientar o trabalho do professor. As atividades estão bem próximas das sugeridas por livros didáticos, pois, o material será um auxiliar nas aulas do professor. As atividades foram elaboradas para serem realizadas em grupo sob orientação do professor. Elas devem ser realizadas gradativamente, à medida que os alunos forem avançando na aprendizagem.O professor deve mediar à ação do aluno, resgatando e elaborando conceitos matemáticos para uma posterior compreensão e sistematização. O aluno deve ser sujeito ativo no desenvolvimento do conteúdo proposto. A seguir temos as atividades propostas e desenvolvida em sala pelos alunos e orientadas pelo professor.

Atividades em sala

Atividade 1

Questão 01

Complete a tabela com as medidas dos arcos: (Considere o raio da circunferência igual a 1 unidade)

	em graus	*em radianos*	*Comprimento aproximado*
uma volta			
meia volta			
1/4 de volta			
3/4 de volta			

Questão 02

Observando a circunferência trigonométrica, complete a tabela:

$\alpha(em\ radianos)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\alpha(em\ graus)$									
$sen(\alpha)$									

$\alpha(em\ radianos)$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$\alpha(em\ graus)$									
$sen(\alpha)$									

Questão 03

a) Qual é o valor máximo do seno?

b) Qual é o valor mínimo do seno?

c) Podemos dizer que o seno pertence ao intervalo [-1; 1]?

d) Qual é a variação do seno no 1^0 quadrante?

e) Qual é a variação do seno no 2^0 quadrante?

f) Qual é a variação do seno no 3^0 quadrante?

g) Qual é a variação do seno no 4^0 quadrante?

Questão 04

Determine os sinais do seno no:

a) 1^0 Quadrante

b) 2^0 Quadrante

c) 3^0 Quadrante

d) 4^0 Quadrante

COMENTÁRIOS ATIVIDADE 01: Na questão 01 os alunos apresentam dificuldades em associar grau e radiano. Quando a medida está em radiano não sabem se o valor do π é 180^0 ou aproximadamente 3,14. Muitas vezes não conseguem perceber que são formas diferentes para medir o mesmo arco. Ao calcular o comprimento dos arcos esperamos que utilizem 3,14 como uma aproximação decimal do valor de π , entretanto com as intervenções do professor tais dificuldades foram debeladas .

Esta é uma ótima atividade para associar números reais a pontos do círculo trigonométrico e falar sobre imagem de um número. Estamos adotando imagem de um número como a localização da extremidade de um arco.

O objetivo das questões 02, 03 e 04 é associar cada arco definido na tabela aos seus quadrantes e corresponde-los ao seu seno, bem como analisar o seno de um arco ,identificando o seu valor máximo mínimo, estudar a sua variação e sinal . No desenvolvimento dessa atividade 90 % dos alunos obtiveram aproveitamento positivo na sua resolução.

Atividade 2

Questão 01

Observando a circunferência trigonométrica, complete a tabela:

$\alpha(em\ radianos)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\alpha(em\ graus)$									
$cos(\alpha)$									

$\alpha(em\ radianos)$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$\alpha(em\ graus)$									
$cos(\alpha)$									

Questão 02

a) Qual é o valor máximo do cosseno?

b) Qual é o valor mínimo do cosseno?

c) Podemos dizer que o cosseno pertence ao intervalo [-1; 1]?

d) Qual é a variação do cosseno no 1^0 quadrante?

e) Qual é a variação do cosseno no 2^0 quadrante?

f) Qual é a variação do cosseno no 3^0 quadrante?

g) Qual é a variação do cosseno no 4^0 quadrante?

Questão 03

Determine os sinais do cosseno no:

a) 1^0 Quadrante

b) 2^0 Quadrante

c) 3^0 Quadrante

d) 4^0 Quadrante

COMENTÁRIOS ATIVIDADE 02: O professor pode manter, na atividade 02, o mesmo objetivo da atividade 01, agora analisando a relação do cosseno de um arco .

Percebe-se que os alunos têm muita dificuldade em compreender as idéias contidas nas relações , e por isso, optam por decorá-las. Ao manipular o material mais uma vez , o aluno terá a oportunidade de visualizar facilmente as características do estudo do cosseno de um arco.Após a resolução dessa atividade cerca de 95% dos alunos atingiram o aproveitamento desejado.

Atividade 3

Questão 01

Observando a circunferência trigonométrica, complete a tabela:

$\alpha(em\ radianos)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\alpha(em\ graus)$									
$tg(\alpha)$									

$\alpha(em\ radianos)$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$\alpha(em\ graus)$									
$tg(\alpha)$									

Questão 02

Responda :

a) Por que não está definido, ou seja, não existe $tg90^0$ e $tg270^0$?

b) A tangente de um arco pode assumir qualquer valor real ?

c) A tangente de um arco possui máximo? E mínimo ?

Questão 03

Determine os sinais da tangente no:

a) 1^0 Quadrante

b) 2^0 Quadrante

c) 3^0 Quadrante

d) 4^0 Quadrante

Questão 04

A tangente é crescente ou decrescente no:

a) Primeiro quadrante ?

b) Segundo quadrante ?

c) Terceiro quadrante ?

d) Quarto quadrante ?

COMENTÁRIOS ATIVIDADE 03: O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos identifiquem a tangente de um arco na circunferência trigonométrica nos quatro quadrantes .Uma curiosidade da atividade foi a descoberta, de forma quase unânime, que a tangente de um arco não é uma relação limitada como o seno e o cosseno estudado anteriormente. A dificuldade encontrada foi analisar o estudo da variação da tangente ,nessa etapa os alunos encontravam dificuldades de associar de forma crescente os números no eixo das tangentes. Apesar das dificuldades encontradas e superadas a atividade obteve um sucesso de 70 %.

Atividade 4

Questão 01

Observando a circunferência trigonométrica, complete a tabela:

$\alpha(em\ radianos)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\alpha(em\ graus)$									
$cotg(\alpha)$									

$\alpha(em\ radianos)$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$\alpha(em\ graus)$									
$cotg(\alpha)$									

Questão 02

Responda :

a) Por que não está definido, ou seja, não existe $cotg0^0$, $cotg180^0$ e$cot360^0$?

b) A cotangente de um arco pode assumir qualquer valor real ?

c) A cotangente de um arco possui máximo? E mínimo ?

Questão 03

Determine os sinais da cotangente no:

a) 1^0 Quadrante

b) 2^0 Quadrante

c) 3^0 Quadrante

d) 4^0 Quadrante

Questão 04

A cotangente é crescente ou decrescente no:

a) Primeiro quadrante ?

b) Segundo quadrante ?

c) Terceiro quadrante ?

d) Quarto quadrante ?

Atividade 05

Questão 01

Analisando a circunferência trigonométrica, responda:

a)Determine o valor aproximado da $sec30^0$

b) Para quais valores de x temos a $secx = cosx$?

c) A secante de um arco pode assumir qualquer valor real?

d)Por que não está definido, ou seja, não existe $sec90^0$ e $sec270^0$?

Questão 02

Determine os sinais da secante no:

a) Primeiro Quadrante

b) Segundo Quadrante

c) Terceiro Quadrante

d) Quarto Quadrante

Questão 03

A secante é crescente ou decrescente no:

a) primeiro Quadrante?

b) segundo Quadrante?

c) terceiro Quadrante?

d) quarto Quadrante ?

Atividade 06

Questão 01

Analisando a circunferência trigonométrica, responda:

a) Determine o valor do cossec 60^0:

b) Para quais valores de x temos a cossecx = senx ?

c) A cossecante de um arco pode assumir qualquer valor real?

d) Por que não está definido, ou seja, não existe cossec 0^0, cossec 180^0 e cossec360^0?

questão 02

Determine os sinais da cossecante no:

a) 1^0 Quadrante:

b) 2^0 Quadrante:

c) 3^0 Quadrante:

d) 4^0 Quadrante:

Questão 03

A cossecante é crescente ou decrescente no:

a) 1^0 Quadrante?

b) 2^0 Quadrante?

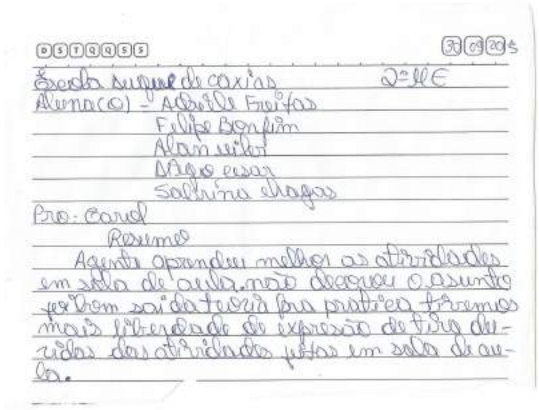
c) 3^0 Quadrante?

d) 4^0 Quadrante?

Considerações em sala

No próximo parágrafo temos um relato da professora Carolina da Silva Bitencourt sobre o desenvolvimento das atividades em sala de aula .
"Após apresentar aos alunos a circunferência trigonométrica e as relações definidas na mesma, com uma aula tradicional, foi proposto o uso do material,levado pelo professor Marconi. No dia 18 de setembro, os estudantes do segundo ano, turma 2ME, turno matutino, foram divididos em 7 grupos de 5 pessoas e cada grupo ficou com uma tábua que continha uma circunferência trigonométrica, com o eixo dos senos, cossenos, tangente, secante, cossecante e cotangente, e alguns arcos trigonométricos. A atividade foi distribuída e explicada para eles, bem como o seu objetivo. No primeiro dia, foi um pouco complicado, pois era uma situação completamente nova. Assim, eles precisaram de muita ajuda para compreender o que e como fazer. Nas outras aulas, a análise das informações obtidas com a tábua e o preenchimento da atividade já foram realizados com menos dificuldade pela maioria das equipes. A aplicação desta atividade teve duração de 5 aulas de 50 minutos, sendo que, na primeira aula, eles responderam a perguntas referentes ao seno, dando continuidade na aula seguinte e iniciando as atividades referentes ao cosseno; na terceira aula, os estudantes trabalharam com a tangente; na quarta, com secante e cossecante; na quinta aula, com cotangente. Pude perceber que, com esta proposta atípica

e completamente diferente da rotina escolar, um interesse foi despertado até pelos alunos mais indisciplinados. Eles ficaram curiosos, contribuíram com o grupo, interagiram, questionaram. Este foi um fator bastante positivo! Com a realização da atividade e posterior discussão da mesma, os alunos tiveram uma maior facilidade em responder os exercícios e, consequentemente, em geral, tiveram um melhor desempenho nas avaliações (teste e prova). Além disso, ao perguntar sobre essas aulas, as respostas que ouvia eram: "Pró, tô entendendo!", "Tô gostando!", "É massa!", "A aula devia ser assim!". Opiniões como essas me fazem rever e repensar as minhas práticas pedagógicas."



D S T Q Q S S 30 09 2015

Escola duque de caxias 2º II E

Aluno(a) - Adrielle Freitas

Felipe Bonfim

Alan wiler

Diego cesar

Sabrina chagas

Pro: Carol

Resumo

Agente aprendeu melhor as atividades em sala de aula. não deccou o asunto porquem sai da teoria pra pratica tivemos mais liberdade de expresão de tira duvidas das atividades feitas em sala de aula.

29/09/15

Escola - Duque de Caxias
Aluna - Stephanie Almeida - Turma/série - 2ME

- Eu achei interessante e bastante interativa a aula com a ajuda das tabelas. Me ajudou a compreender como resolver os assuntos, e a posição de cada um.
Foi interativa e de fácil entendimento.

29/09/15
Colégio Duque de Caxias
Turma: 2ºME Matutino
Aluna: Eduarda Gomes

Achei ótimo ter trabalhado com a tábua, assim houve melhor entendimento do assunto.

Considerações finais

O ensino da matemática envolve muitas questões problemas, dentre eles destacamos a didática de sala de aula. Percebemos que a maioria das aulas de matemática se baseiam no método tradicional, a maioria dos docentes não se preocupa em modificar sua metodologia de ensino, aperfeiçoando sua prática.

As Diretrizes Curriculares enfatizam a necessidade de se tornar o ensino de matemática mais dinâmico, contextualizado, interdisciplinar. Para tanto, indicam também a necessidade de educadores criativos, com visão histórica e crítica, comprometidos com a educação e que apresentem uma atitude investigativa sobre sua área de atuação, fundamentada em teorias pedagógicas e científicas; professores que sejam capazes de construir conhecimento pedagógico, de analisar várias formas de abordar os diferentes conteúdos de modo a solucionar os problemas que surgirem em sala de aula e de proporcionar aos seus alunos um ensino da matemática com significado.

Analisando os resultados das aulas e das atividades aplicadas foi possível observar que a Circunferência Trigonométrica Concreta, enquanto recurso mediador no processo de ensino e aprendizagem se mostrou fundamental para conquistar o interesse dos alunos pelo querer aprender. O uso do material tornou as aulas mais envolventes,dinâmicas, significativas e prazerosas, facilitando a visualização das propriedades referentes as razões trigonométricas e as demonstrações das relações trigonométricas. Dessa forma, o aluno participou ativamente na construção do conhecimento e não apenas decorou macetes e as intermináveis fórmulas como acontece nas aulas tradicionais.

Concluímos assim que o uso de materiais didáticos manipuláveis proporciona vantagens no desenvolvimento cognitivo dos alunos, assim como no campo afetivo e psicomotor. As atividades desenvolvidas permitem mais autoconfiança e autosegurança, e a matemática torna-se mais prazerosa, com isso justifica-se o uso de materiais didáticos.Neste trabalho enfatizo a necessidade de buscarmos novas técnicas de ensino da matemática valorizando a capacidade do aluno de buscar o conhecimento através da manipulação e discussão juntamente com os seus colegas e professores. Acredito que o uso de materiais didáticos manipuláveis desde as séries iniciais levem o aluno a desenvolver o senso crítico, o que propicia análises, investigações, resolução de problemas mais complexos, argumentações e compreensão da realidade.

Referências

[1] Bertol ,Vaneila .Elcio Schuhmacher Artigo. RETROSPECTIVA HISTÓRICA SOBRE A TRIGONOMETRIA: CONSIDERAÇÕES IMPORTANTES NO ENSINO DA MATEMÁTICA 2013.

[2] CARMO, Manfredo Perdigão. MORGADO, Augusto César. WAGNER, Eduardo.Trigonometria Números Complexos, 3a ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005. (Coleção do professor de matemática).

[3] Guelli,Oscar.CONTANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA (Dando corda na trigonometria)2013 Editora àtica

[4] Lima,Elon Lages A Matemática do Ensino Médio Coleção do Professor de Matematica SBM 2001 Vol. 01

[5] Morgado, Augusto Cezar TEMAS E PROBLEMAS ELEMENTARES SBM 2012

[6] Neto,Aref Antar Trigonometria (Noções de Matemática Vol. 03)

[7] Ottesbach Rosângela ,Cristina Regina Maria Pavanello .LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA APRECIAÇÃO DE PROFESSORES

[8] Ribeiro,Erika da Costa MATERIAL CONCRETO PARA O ENSINO DE TRIGONOMETRIA,Dissertação de Mestrado.UFMG 2011.

[9] Rusciolelli Danilo .Porto Circunferência Trigonométrica,Manipulável,Dissertação de Mestrado,DCET - UESC 2014.

[10] `http://www.revistas.ufg.br/index.php/ritref/article/view/24344`

[11] `http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/.../historia_triogono.pdf`

[12] `http://www.revistas.ufg.br/index.php/ritref/article/view/24344`

[13] `http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2188-8.pdf`

[14] `http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/284`

[15] `http.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.../GT_02_18_2010`

[16] `www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Juliane`