UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CÂMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PAULO SERGIO SALVADOR

UMA PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM UTILIZAÇÃO DA RÉGUA "T"

PALMAS - TO
2015

PAULO SERGIO SALVADOR

UMA PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM UTILIZAÇÃO DA RÉGUA "T"

Dissertação apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz.

PALMAS - TO
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

S182p Salvador, Paulo Sergio.
UMA PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM UTILIZAÇÃO DA RÉGUA “T”. / Paulo Sergio Salvador. – Palmas, TO, 2015.
57 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2015.
Orientador: Dr. Pedro Alexandre da Cruz

1. Trigonometria. 2. Material Concreto. 3. Régua "T". 4. Ensino Médio. I. Título

CDD 510

PAULO SERGIO SALVADOR

UMA PROPOSTA DE ENSINO DA TRIGONOMETRIA COM UTILIZAÇÃO DA RÉGUA "T"

Dissertação apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre - Área de Concentração: Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Alexandre da Cruz.

Chrystian de Assis Siqueira

Dr. Chrystian de Assis Siqueira
(Presidente)
UFT

Satuf

Prof. Dr. Francisco Satuf Rezende
UFT

Lady Sakay

Prof. Dra. Lady Sakay
UNIRG

PALMAS - TO
2015

Aos meus amores: Verônica e Paloma; a minha esposa, Vera, e aos meus pais Filogônio (in memoriam) e Lourdes (in memoriam.)

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus, por ter dado a oportunidade de enriquecer meus conhecimentos científicos e por ter seguido os meus passos nessa longa caminhada, tornando-me mais humilde e vitorioso.

Aos meus pais Filogônio Salvador Augusto in memoriam e Lourdes Justino in memoriam, a minha esposa, Vera; e as minhas filhas, Verônica e Paloma.

A todos os professores do programa PROFMAT, nas pessoas do coordenador Andrés Lázaro Barraza de La Cruz e dos professores Christian José Quintana Pinedo, Gilmar Pires Novaes, Betty Clara Barraza La Cruz, Rogério Azevedo Rocha e Pedro Alexandre da Cruz pela dedicação e ensinamento que transmitiram à nossa turma ao longo desse curso.

Aos colegas de curso pelo convívio e companheirismo durante esse período, especialmente aos amigos Paulo Belizário, Edvan Gomes e João Batista.

Aos colegas de trabalho pela força e incentivo.

Ao professor orientador Dr. Pedro Alexandre da Cruz pelo incentivo recebido durante este período.

A CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

Duvidar de tudo ou crer em tudo. São duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam, ambas, de refletir.

(Poincaré)

RESUMO

Para atender à necessidade de estudos das funções trigonométricas, este trabalho apresenta uma discussão sobre as dificuldades encontradas pelos alunos do ensino médio para aprender alguns conteúdos da maneira que são abordados e também a dificuldade do professor em ensinar esses conteúdos. Será apresentado ainda um breve relato histórico sobre o surgimento da trigonometria e dos nomes das funções trigonométricas. Enfatizando a importância do uso de material concreto para o ensino da matemática, na educação básica, em particular, o uso da régua "T" no ciclo trigonométrico no ensino da trigonometria no ensino médio. Este trabalho explora o estudo das funções trigonométricas por meio da régua "T" e também aborda as etapas para construção de gráficos e conceitos trigonométricos, bem como, a forma de se trabalhar com esse material em sala de aula, com exemplos de exercícios e de atividades para explorar os conteúdos.

Palavras-chave: Trigonometria. Material Concreto. Régua T. Ensino Médio.

ABSTRACT

In order to meet the need for the studies of trigonometric functions, this paper presents a discussion about the difficulties encountered by high school students to learn some contents the way they are addressed and also the difficult teacher face in teaching these contents. It will be presented a brief historical account of the emergence of trigonometry and the names of trigonometric functions. Emphasizing the importance of using concrete material to the teachings of mathematics, basic education, in particular the use of the ruler "T" in the trigonometric cycle in the teaching of trigonometry in high school. This paper explores the study of trigonometric functions through rule "T" and also covers the steps for building graphics in trigonomical concepts, as well as the way of working with this material in the classroom, with examples of exercises and activities to explore content.

Keywords: Trigonometry. Concrete material. rule "T". High school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$cossec$	Cossecante de um ângulo
cos	Cosseno de um ângulo
$cotg$	Cotangente de um ângulo
$PCEM-TO$	Proposta Curricular do Ensino Médio-Tocantins
sec	Secante de um ângulo
sen	Seno de um ângulo
tg	Tangente de um ângulo
UFT	Universidade Federal do Tocantins

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para Libâneo (1985), o trato com o conhecimento reflete a sua direção epistemológica e informa os requisitos para selecionar, organizar e sistematizar os conteúdos de ensino. Ele considera que os conteúdos emergem de conteúdos culturais universais, constituindo-se em domínio de conhecimento relativamente autônomos, incorporados pela humanidade e redimensionados permanentemente, em face da realidade social.

> ... Os conteúdos são realidades exteriores ao aluno que devem ser assimilados e não simplesmente reinventados, eles não são fechados e refratários às realidades sociais, pois não basta que os conteúdos sejam apenas ensinados, ainda que bem ensinados é preciso que liguem de forma indissociável a sua significação humana e social. (LIBANEO, 1985, p. 39).

Ao selecionar um conteúdo com prioridade aos demais, deve-se ter em mente certos quesitos imprescindíveis para a realização do processo de ensino e aprendizagem, como a relevância social do conteúdo que implica em compreender o sentido e o significado do mesmo para a reflexão pedagógica escolar.

Segundo a Proposta Curricular do Esino Médio do Governo do Estado do Tocantins (PCEM-TO, 2007) Paulo Freire afirma:

> o confronto do saber popular (senso comum) com o conhecimento científico, selecionado pela escola, é fundamental para o aprendizado e a reflexão pedagógica, pois o aluno ultrapassa o senso comum para construir formas mais elaboradas de pensamento, ..., proporcionando um prazer matemático por meio de um processo investigativo do "aprender a aprender", "aprender a fazer" e "aprender a ser". (PCEM-TO, 2007, p.113)

Dentre os diversos conteúdos matemáticos apresentados aos alunos até o Ensino Médio, destaca-se o estudo da trigonometria, que infelizmente é trabalhado de forma superficial e muitas vezes se resume a fórmulas e conceitos abstratos.

A trigonometria é uma parte da matemática com muitas aplicações no mundo real. Através da trigonometria podemos calcular desde simples alturas a resolver problemas astronômicos.

Para compreender as diversas aplicações da trigonometria, há necessidade que o aluno aprenda muitos conceitos de física, geometria, astronomia, etc. Desta forma, sente-se o aprofundamento dos conhecimentos dos alunos nesta matriz curricular.

Como a base dessa parte da ciência matemática começa na escola, o trabalho elaborado terá o intuito de levar os alunos a compreensão da parte elementar da trigonometria e perceber a importância de dominar essa matéria.

Visto que a maioria dos estudantes costumam perguntar quais as aplicações desta matéria em seu cotidiano, devemos procurar maneiras mais concretas de mostrar sua importância e aplicabilidades para resolver problemas nas várias áreas das ciências exatas.

Neste sentido, tem-se a proposta de apresentar mais uma ferramenta, de material concreto, conhecida como “régua T”, e pode servir para enriquecer a relação entre o aluno e o cotidiano afim de beneficiar seu conhecimento trigonométrico.

1.1 Justificativa

A educação contemporânea sugere que o aluno deve estudar o que existe de mais atualizado, mantendo-o informado dos avanços da ciência e da técnica, sem menosprezar os conteúdos clássicos, que são fundamentais e que não perdem sua contemporaneidade. A trigonometria é uma das frentes matemáticas que se encaixam nestas duas vertentes (clássica e atualidade).

Pretende-se que com a utilização da régua T como ferramenta pedagógica proporcione ao aluno condições para se resolver diversos problemas trigonométricos sem a necessidade de decorar fórmulas, que muitas vezes são extensas, complicadas e de difícil compreensão.

1.2 Relevância e Contribuição

Percebe-se que a maioria dos alunos apresentam dificuldade em aprenderem assuntos envolvendo a trigonometria, até mesmo as relações mais fundamentais. Isto se deve, geralmente, à grande quantidade de regras e fórmulas que o professor trabalha em sala e sem a interação com os alunos. Desta forma, deve-se buscar metodologias e ferramentas que ajudem a sanar as dificuldades apresentadas.

A interação social observa a aprendizagem como de um processo social e o conhecimento de algo socialmente construído entre as relações professor/aluno, aluno/aluno e estratégias utilizadas.

Nos trabalhos de Macedo, Petty e Passos

> ... encontramos que o desenvolvimento e a aprendizagem são formas interdependentes de conhecimento. Que a criança desenvolve brincadeiras e aprende jogos e também aprende brincadeiras e desenvolve habilidades, sentimentos ou pensamentos. (MACEDO, PETTY e PASSOS, 2005.)

Com grandes contribuições nos ramos das geometrias (especialmente a analítica, plana e espacial), além de facilitar, através das fórmulas de adição algébrica de arcos, determinar as coordenadas de um ponto por meio de rotação do ângulo dado em torno da origem dos sistemas de eixos cartesianos, as transformações Trigonométricas representam uma necessidade no ensino médio, proporcionando aos alunos futuros profissionais capacitados, com uma interpretação matemática que atenda os parâmetros curriculares nacionais (PCNs) para o cidadão na sociedade. Cabe ao professor, procurar estratégias e ferramentas educacionais que satisfaça esta necessidade.

Para ALMOULOUD (2000) o trabalho da trigonometria pode desenvolver habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções de problemas, competências importantes na ampliação da percepção do espaço e construção do modelo para interpretar questões matemáticas.

Desta maneira, o estudo trigonométrico contribui de forma significativa para que o aluno se torne sujeito do próprio conhecimento e o professor deve buscar ferramentas de apoio para reforçar o aprendizado dentro desta tendência sócio interacionista.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

- Apresentar uma metodologia que ajude no ensino das funções trigonométricas e suas aplicações para que o ensino da trigonometria seja mais significativa, com a utilização da "régua T", de maneira atraente e prazerosa para os alunos

1.3.2 Objetivos Específicos

- Abordar os fundamentos da Trigonometria (Arcos e Funções).
- Identificar, no ciclo trigonométrico, os segmentos que representam as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.
- Utilizar a “régua T” para calcular o seno e a cossecante, o cosseno e a secante, a tangente e a cotangente dos arcos notáveis pela simetria dos pontos no ciclo trigonométrico.
- Calcular funções trigonométricas pela utilização da “régua T” no ciclo trigonométrico.

1.4 Estrutura de Apresentação desta Dissertação

Esta proposta está organizada em cinco capítulos. Este, com uma abordagem geral, desde a justificativa, discussões e sugestões metodológicos para reflexão do professor; o segundo discorre sobre a parte histórica e a importância da trigonometria; o terceiro aborda as principais relações e conceitos dos *arcos trigonométricos* e as ideias básicas das *funções trigonométricas*; o quarto apresenta a proposta de utilização da "régua T" na sala de aula, com exemplos e sugestões de uso; ao final faz-se as considerações finais do autor.

1.5 Recomendações Metodológicas

A metodologia é um conjunto de procedimentos empregados para atingir os objetivos propostos. Respeitando-se a autonomia dos docentes na transposição didática dos conhecimentos selecionados nos componentes curriculares, desta forma aplicá-la em busca de produzir anseio ao saber por parte do educando que aceita a instigação como produção do saber.

Assim afirma Libâneo a respeito da didática,

> O trabalho docente é parte integrante do processo educativo mais global pelo qual os membros da sociedade são preparados para a participação na vida social. A educação – ou seja, a prática educativa – é um fenômeno social e universal, sendo uma atividade humana necessária à existência e funcionamento de todas as sociedades. (LIBÂNEO, 1994, p.2)

As metodologias de ensino pressupõem procedimentos didático-pedagógicos que auxiliem os alunos nas suas construções intelectuais, procedimentais e atitudinais, tais como: elaborar e implementar o planejamento, o registro e a análise das aulas e das atividades realizadas; problematizar o conhecimento, sem esquecer-se de considerar os diferentes ritmos de aprendizagens e a subjetividade do aluno, incentivando-o a pesquisarem diferentes fontes; contextualizar os conhecimentos, valorizando as experiências dos alunos, sem perder de vista a (re)construção dos saberes; elaborar materiais didáticos adequados a serem trabalhados em aulas expositivas dialogadas e atividades em grupo; utilizar recursos tecnológicos adequados ao público envolvido para subsidiar as atividades pedagógicas.

De maneira inovadora a proposta pedagógica que privilegia a combinação de procedimentos didáticos próprios da educação, utilizando-se de uma metodologia diferenciada, que garante um eficiente suporte técnico e pedagógico necessário à realização do mesmo com sucesso. Cabe ao professor buscar novas técnicas metodológicas para, além de enriquecer sua aula, também aumente o interesse dos seus alunos para descobrir o novo.

É preciso ensinar aos alunos conteúdos que sejam base para sua emancipação em que possa interferir no meio, usufruindo dos benefícios adquiridos. Nesse sentido se o ensino tem a função de libertação, deve-se buscar aulas que ultrapasse o exercício exclusivo do uso de quadro e giz, segundo Luckesi (2005, p. 133) "ensinar significa criar condições para que o educando efetivamente entenda aquilo que se está querendo que ele aprenda", permitindo a construção e uso de recursos didáticos com fundamentação teórico científicas, sem fragmentação ou mesmo distante da realidade do aluno, tendo em vista a superação do fracasso escolar.

Uma das maneiras de se fazer isto é a utilização de materiais concretos, para que o aluno possa manuseá-lo, facilitando assim o aprendizado, com uma melhor compreensão. Motivar os alunos através da construção com régua T, bem como realizar as atividades comutará na exploração e construção de resultados das razões e funções trigonométricas.

A régua T pode ser usada durante as aulas de matemática para o estudo de Trigonometria, para que o aluno compreenda e crie imagens mentais sobre as funções trigonométricas.

O professor poderá sugerir que os alunos construam arcos e determinar funções trigonométricas dos mais simples para as mais elaboradas, de forma que o aluno perceba sua evolução.

> Outras propostas para que o ensino da Matemática se torne mais consistente e, consequentemente, mais significativo como:
> a) utilizar a História da Matemática como recurso didático para melhorar as aulas e torna-las mais compreensíveis, mostrando que esse conhecimento surgiu aos poucos e a partir das necessidades da humanidade e "compreender a vida contemporânea, dominada pela tecnologia de base científica";
> b) Permitir o uso adequado das calculadoras e planilhas eletrônicas, importantes ferramentas para explorar ideias e aplicações da Matemática em atividades investigativas;
> c) Proporcionar o uso de Programas de computador (softwares), que possibilitem ao aluno fazer experimentos, testar hipóteses, esboçar conjecturas e ainda criar estratégias para resolver problemas, em especial os problemas abertos;
> d) Criar um local (Laboratório matemático), para se desenvolver atividades experimentais, oportunizando ao aluno um ambiente de manipulação, investigação e formação de hipóteses.
> (PCEM-TO, 2007, p.117).

> Buscar novos métodos através do uso de material concreto propicia aulas mais dinâmicas e amplia o pensamento abstrato por um processo de retificações sucessivas que possibilita a construção de diferentes níveis de elaboração do conceito (PAIS, 2006).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+, 1997) também destacam a utilização de materiais concretos pelos professores como um recurso alternativo que pode tornar bastante significativo o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento de aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (PCN+, p. 111)

Já a Proposta Curricular do Ensino Médio - Tocantins (PCEM-TO, 2007, p.114) destaca que os conteúdos divididos em eixos temáticos devem ser trabalhados buscando uma constante articulação entre eles, algumas vezes de forma intencional, outras não. Durante o processo de aprendizagem é necessário retomar assuntos já tratados no ensino fundamental, pois este é o momento de amadurecer certos conceitos e ideias da Matemática que dependem de explicações, cuja compreensão exige uma maior maturidade dos alunos e novas investidas do professor no seu detalhamento, sempre que possível, destacando-se o valor formativo e descartando as exigências de memorização de “regras” sem a devida explicação formal, bem como o recurso aos exercícios repetitivos de fixação ou aplicação direta em fórmula.

Ainda no PCEM-TO (2007, p.115) ressalta-se a importância de não apresentar o conteúdo de forma expositiva e descritiva, mas sempre que possível, introduzindo uma atividade de contextualização e/ou problematização em que se resgata os conhecimentos prévios e os conceitos construídos pelos alunos, através de suas experiências fora do contexto escolar. No que se refere ao estudo das funções trigonométricas, pode-se inicialmente priorizar as relações métricas no triângulo retângulo como ferramentas essenciais a serem adquiridas pelos alunos no ensino médio.

Participações em eventos, estimular a busca pelo saber tanto em atividades internas quanto externas, tais como: feiras de integração, como feira de ciências e Olimpíadas de Matemática, proporcionam o resgate dos saberes populares, proporcionando a práxis discutida, em que o aluno é sujeito pensante e articulador de seu universo.

O ensino da matemática se torna mais consistente e mais significativo quando se utiliza a História da Matemática como recurso didático para melhorar as aulas tornando-as mais compreensíveis, mostrando que esse conhecimento surgiu aos poucos e a partir das necessidades da humanidade e compreender a vida contemporânea, dominada pela tecnologia de base científica e criar um local (Laboratório matemático), para se desenvolver atividades experimentais, com uso de materiais concretos oportunizando ao aluno um ambiente de manipulação, investigação, experimentos e formação de hipóteses.

Visto que a maioria dos estudantes costuma perguntar quais as aplicações da trigonometria em seu cotidiano, devemos procurar maneiras mais concretas de mostrar sua importância e aplicabilidades para resolver problemas nas várias áreas das ciências exatas. Para compreender as diversas aplicações da trigonometria há necessidade que o aluno aprenda conceitos de física, geometria, astronomia, etc. Desta forma sentimos a necessidade de aprofundar os conhecimentos dos alunos nesta área da Matemática.

Acredita-se que a diversidade de estratégias metodológicas favorece ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer Matemática, garantindo-lhe a participação no processo de construção de seus conceitos.

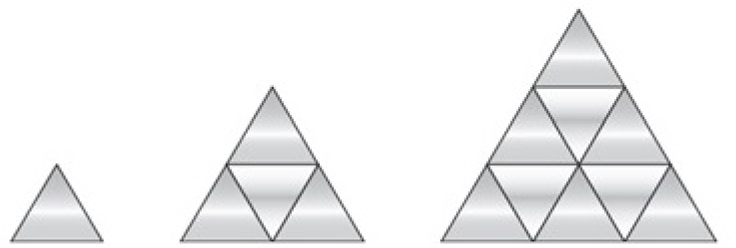
2 UM BREVE HISTÓRICO DA TRIGONOMETRIA

Imagina-se que ao menos alguns dos antigos geômetras trabalharam pela pura satisfação de fazer matemática não como auxílio prático à mensuração; mas há teorias alternativas. Uma é que a geometria, como a contagem, tivesse origem na prática de rituais primitivos. O desenvolvimento da geometria pode muito bem ter sido estimulado pela necessidade prática de construção e de demarcação de terras, ou pelo sentimento estético por design e ordem. Podemos fazer conjeturas sobre o que levou os homens da Idade da Pedra a contar, medir e desenhar. Que os começos da matemática são mais antigos que as mais antigas civilizações, é claro. Ir além e identificar categoricamente uma origem determinada no espaço e no tempo, no entanto, é confundir conjetura com história. A história da matemática, no entanto, é encontrada em documentos escritos que chegaram até nós.

Para o período pré-histórico não há documentos, sendo impossível acompanhar a evolução da matemática desde um desenho específico até um teorema familiar.

Segundo Boyer (1974), as afirmações em relação a origem da matemática, seja da aritmética como da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte da escrita. Foi nos últimos milênios, em uma carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de pôr seus pensamentos e registros em forma escrita. Na Pré-história, dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram, de evidências fornecida pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjetural, a partir dos documentos que sobreviveram.

Figura 1 – Sequência dos quadrados perfeitos em áreas dos triângulos



FONTE: História da Matemática – Carl B. Boyer, UTA C. Merzbach (2015)

Boyer ainda afirma que o homem neolítico pode ter tido pouco lazer e necessidade de medir terras, mas seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus artesanatos e tecidos mostram exemplos de congruência e simetria, que, em essência, são partes da geometria elementar e aparecem em todos os continentes. Além disso, sequências simples em desenhos como os das figuras acima sugerem uma espécie de teoria dos grupos aplicados, bem como proposições geométricas e aritméticas. O esquema torna evidente que as áreas dos triângulos estão entre si como os quadrados dos lados, ou, por contagem, que a soma dos números ímpares consecutivos, começando com a unidade, são quadrados perfeitos.

Geometria é a parte da Matemática que estuda as propriedades relativas a pontos, retas,curvas, planos, superfícies e sólidos. Os egípcios e os caldeus, segundo os historiadores, são os iniciantes da Geometria. Os caldeus (2100 a.C.) fabricavam em placas de argila fórmulas comuns da Geometria referente aos cálculos de áreas e volumes. Na mesma época, segundo estudos dos papiros de Golenishev (Moscou) e de Rhind (Londres), os egípcios calculavam áreas e volume, através de problemas, com emprego de fórmulas que, nos dias de hoje, ainda são usadas. O número irracional π mereceu atenção especial dos egípcios da época.

A Trigonometria é uma palavra formada por três radicais gregos assim: tri = três, gonos = ângulos, metron = medir, ou seja, medida dos triângulos. Significa dizer que trigonometria é a parte da Matemática que calcula as medidas dos elementos de um triângulo: lados e ângulos. Foi considerada originalmente como extensão da Geometria, pois ela procura estabelecer relações entre as medidas de ângulos e de segmentos.

Segundo vestígios de um estudo rudimentar, a trigonometria já era usada pelos babilônios para resolver problemas práticos de astronomia, navegação e agrimensura.

Os gregos e os egípcios impulsionaram o desenvolvimento da trigonometria no ramo da Astronomia.

Hiparco (190 a.C.-125a.C.), astrônomo grego considerado o pai da Astronomia, foi quem empregou, pela primeira vez, relações entre lados e ângulos de um triângulo retângulo. Daí, ser considerado o iniciador da Trigonometria.

Figura 2 – Hiparco de Nicéia

FONTE: : www.hiparccodeniceialc.blogspot.com (2015)

Já Ptolomeu (125 a.C.), o mais célebre astrônomo da Antiguidade, criou o documento mais antigo que trata da trigonometria que diz: O almagesto (que significa em árabe "A maior" = Al magest) baseado nos trabalhos de Hiparco. Ptolomeu apresenta, na Sintaxe matemática, um verdadeiro tratado de Trigonometria retilínea e esférica.

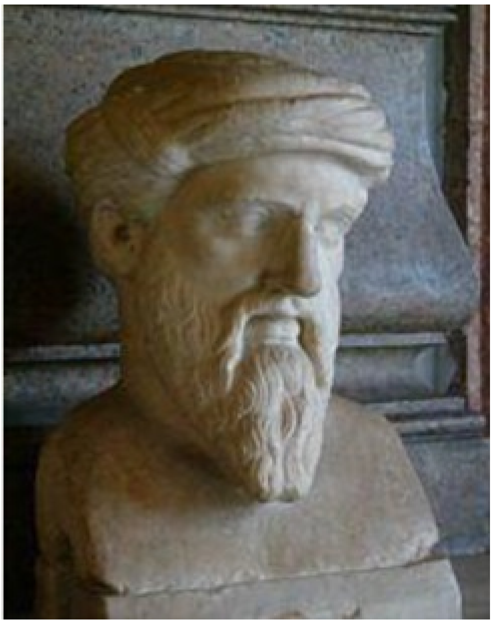
Figura 3 – Ptolomeu

FONTE: www.algosobre.com.br/biografias/Ptolomeu.html(2015)

O filósofo grego PITÁGORAS (Séc. VI a.C.), nascido na Ilha de Samos, foi o mais assíduo pesquisador de todos os homens. Em 529 a.C, por não suportar a tirania de Polícrates, senhor absoluto de Samos, emigrou de sua ilha para Crotona, colônia grega da Itália Meridional. Aí fundou uma comunidade, ao mesmo tempo religiosa, filosófica e política, que visava à reforma social e política da região. Esta agremiação dominou grande parte do sul da Itália (Magna Grécia) até que uma conspiração pôs fim à sua hegemonia, sendo Pitágoras desterrado para Metaponto, onde veio a falecer (fim do séc. VI ou começo do V - a.C.). O que existe de sua doutrina chegou até nós através de seus discípulos.

A matemática como argumento dedutivo-demonstrativo começa com Pitágoras e, nele, está ligada a uma forma peculiar de misticismo. Como se sabe, afirmou que todas as coisas são constituídas de números. Imaginava os números como pontos dispostos em forma de figuras tais como aparecem nos dados e nas cartas do baralho. Neste caso, as coisas seriam harmoniosamente compostas de pequeninas partículas ordenadas em figuras numéricas. Associou o número à música e à mística. Derivam-se desta associação de Pitágoras os termos matemáticos "média harmônica", "progressão harmônica". Parece ter deduzido várias consequências de algumas observações, em particular da observação das relações existentes entre a altura dos sons e a larguras das cordas da lira. Esta relação seria responsável pela existência da harmonia musical.

Figura 4 – Busto de Pitágoras



FONTE: www.greciantiga.org (2015)

Para os pitagóricos, a Terra era esférica, uma estrela entre as estrelas, onde todas se moviam em torno de um fogo central. Diziam que suas distâncias do fogo central coincidem com intervalos musicais, de modo que no universo ressoa uma harmonia das esferas.

O estudo das propriedades dos números pareceu aos pitagóricos tão surpreendente que passaram a buscar, em toda parte, analogias entre os números e as coisas, chegando a fundar uma espécie de mística numérica. Fórmulas como a seguinte: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ que mostra que os quadrados se podem formar como somas dos números ímpares sucessivos, apareciam-lhes como algo maravilhoso.

A maior descoberta de Pitágoras ou de seus discípulos imediatos, diz respeito à relação existente nos triângulos retângulos, que consiste em provar que a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Os egípcios já sabiam que um triângulo cujos lados são 3, 4, 5 têm ângulos reto; mas, ao que parece, os pitagóricos foram os primeiros a observar que $3^2+4^2=5^2$ e, seguindo esta sugestão, chegaram a descobrir uma prova da proposição geral.

O pitagorismo foi um movimento de reforma do culto a Dionísio, A influência deixada por Pitágoras foi uma das maiores que registra a história do pensamento antigo.

Atribui-se a Pitágoras alguns pensamentos clássicos, tais como:

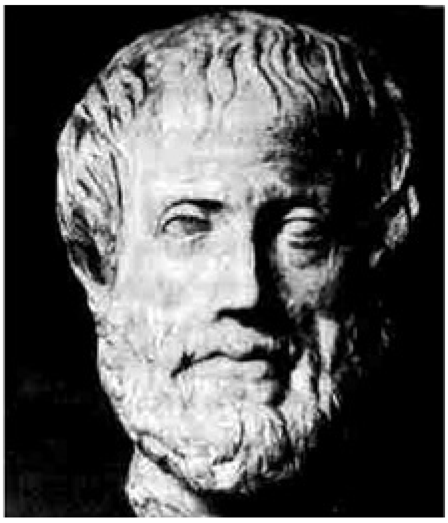
- *Não é livre quem não consegue ter domínio sobre si.*
- *Todas as coisas são números.*
- *Aquele que fala semeia; aquele que escuta recolhe.*

- *Com ordem e com tempo encontra-se o segredo de fazer tudo e tudo fazer bem.*
- *Educai as crianças e não será preciso punir os homens.*
- *A melhor maneira que o homem dispõe para se aperfeiçoar, é aproximar-se de Deus.*
- *A evolução é a lei da vida, o número é a lei do universo, a unidade é a lei de Deus.*
- *Ajuda teus semelhantes a levantar a carga, mas não a carregues.*

Aristóteles (384-322 a.C.). Nascido na Macedônia, cidade de Estagira foi um filósofo e dos maiores pensadores de todos os tempos, cuja obra abrangeu a psicologia, a lógica, a moral, a ciência política e a própria crítica literária, de que lançou os fundamentos. Filho de médico da corte macedônia e, aos 17 anos, foi para Atenas, no intuito de estudar com Platão. Foi seu discípulo até 347, quando morreu Platão. Logo após, viajou por alguns anos até que o rei da Macedônia, Felipe, o chamou para ser preceptor de seu filho Alexandre. Terminada sua missão na Macedônia, que durou 7 anos, volta a Atenas, na cidade de Liceu, onde funda uma escola de Filosofia. Aristóteles gostava de ensinar andando e, por isso, a escola ficou conhecida pela alcunha de Peripatética (do grego: peripatos, passeio). Aristóteles fez a divisão das proposições de qualquer ciência em dois tipos: primárias - aquelas aceitas sem prova, ou evidentes (axiomas) ou tomadas como verdadeiras (postulados), e secundárias - aquelas deduzidas das anteriores mediante raciocínio lógico (teoremas). Veio a falecer na Ilha de Eubéia, como fugitivo, depois de escapar à perseguição dos grupos políticos dominantes em Atenas, após a morte de Alexandre.

Segundo Bertrand Russel (1872-1970), Aristóteles chegou no fim do período criador do pensamento grego, na sua História da Filosofia Ocidental.

Figura 5 – Imagem de Aristóteles

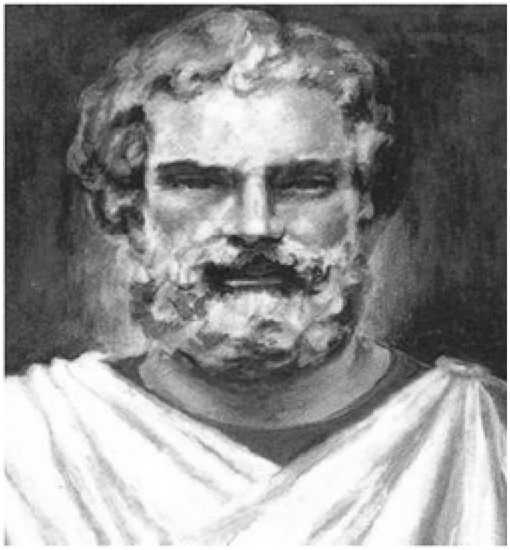


FONTE: www.mundodosfilosofos.com.br/foto4.htm (2015)

Depois da morte de Aristóteles, passaram-se dois mil anos antes que o mundo produzisse algum pensador comparado a ele.

Tales de Mileto provou que algumas propriedades das figuras geométricas podiam ser deduzidas de outras. Pitágoras, que viveu meio século após e discípulo de Tales, deu novo impulso à pesquisa de relações lógicas entre as proposições matemáticas, considerado como o pai da sistematização da Matemática. Hipócrates de Quios, Platão, Aristóteles e outros sucessores de Pitágoras, contribuíram muito para o desenvolvimento da Geometria e para sua organização como ciência. Foi marcante a inscrição que Platão mandou colocar na entrada de sua Academia: "Quem não for geômetra não entre".

Figura 6 – Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.)



FONTE: http://www.estudopratico.com.br (2015)

O gênio matemático grego, Euclides, professor da Academia de Alexandria, fundada em 332 a.C., escritor de vários trabalhos, se destaca com a obra de sua autoria: Elementos de Geometria, em 13 livros. A influência desse trabalho foi enorme no mundo inteiro, talvez só excedida pela Bíblia. Dentre estes livros, o de primeira edição: "Construções elementares, casos de igualdade e propriedades dos triângulos, das paralelas, dos paralelogramos, equivalência de triângulos e paralelogramos e teoremas de Pitágoras", é o que dá ênfase à Trigonometria.

No século VIII, importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, mostrando o quanto aquele povo estava familiarizado com esse ramo da Matemática e foram os responsáveis pelas notáveis descobertas feitas pelos matemáticos árabes.

Figura 7 – Imagem de Euclides

FONTE: www.greciantiga.org.br (2015)

Purback, no século XV, matemático nascido na Baviera, procurou restabelecer a obra de Ptolomeu, construindo a primeira tábua trigonométrica introduzindo os números seno e tangente.

Figura 8 – Purback

FONTE: www.algosobre.com.br/biografias/Purback.html (2015)

O matemático alemão Johann Müller, discípulo de Purback, escreveu o primeiro tratado de Trigonometria: triangulis ou Tratado dos triângulos.

A Trigonometria, hoje em dia não se limita a estudar apenas os triângulos, estendendo sua aplicação a diversos campos da Matemática, como a Geometria e Análise. Aplica-se a Trigonometria também em Mecânica, Eletricidade, Topografia, Acústica, Música, Engenharia Civil e outros campos que, dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

Figura 9 – Johann Muller

FONTE: $pt.wikipedia.org/wiki/Johannes_M V$ (2015)

2.1 O Surgimento dos Nomes das Funções Trigonométricas.

Segundo Lima (1991), seno é a tradução portuguesa do latin *Sinus* que é tradução latina da palavra árabe jiba que significa a corda de um arco. Já o termo tangente explica-se pelo fato de $tg\ x = \frac{t}{r}$ onde t é o segmento da tangente compreendido entre a extremidade do raio (um dos lados do Ângulo x) e o prolongamento do outro lado. O termo secante vem do latin secare (cortar), já que a secante de um ângulo x é definida por $sec\ x = \frac{s}{r}$ onde s é a hipotenusa do triangulo retângulo cujos catetos são o raio r e o segmento de tangente t e como o segmento de reta s corta o círculo, a denominação secante se justifica. E por consequência cosseno, cossecante e cotangente de um arco são respectivamente seno, secante e tangente do arco complementar.

2.2 A Importância do Estudo das Funções Trigonométricas

Segundo Dante (2011), o estudo das funções trigonométricas é de fundamental importância para compreensão de fenômenos comuns em nosso cotidiano, uma vez que todas as situações envolvendo movimentos oscilatórios (tais como relógio de ponteiros, pêndulos, todos os tipos de ondas eletromagnéticas, vibrações em instrumentos de cordas, entre outros) podem ser descritas a partir de funções trigonométricas.

A apresentação da ideia de seno, cosseno e tangente de um número real pode ser feita usando o círculo trigonométrico como referência, destacando que, para um ponto qualquer pertencente ao círculo trigonométrico, haverá um ângulo correspondente, e um triângulo, cuja altura estará relacionada ao seno desse ângulo, e a altura da base estará relacionada ao cosseno desse ângulo.

O uso de figuras e tabelas serve para representar os valores notáveis do seno e do cosseno em todos os quadrantes, destacando os sinais de cada relação em cada um dos quadrantes.

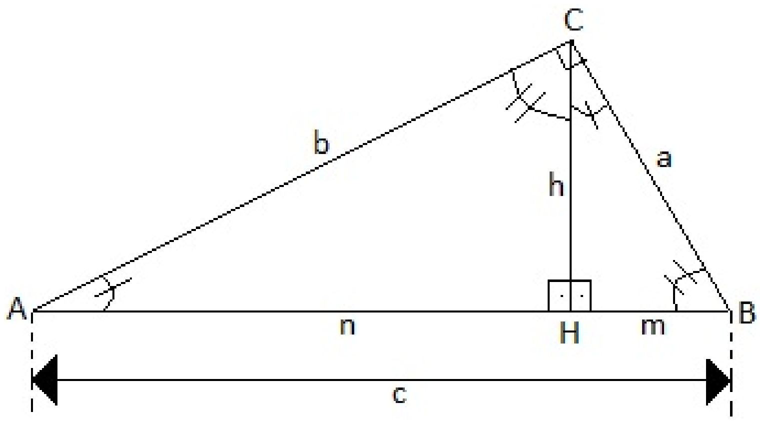
Destacar as simetrias existentes determinando o valor do seno dos ângulos: 30^o, 150^o, 210^o e 330^o e cosseno dos ângulos: 60^o, 120^o, 240^o e 300^o. Repetindo o procedimento para determinar o valor do seno dos ângulos:$\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ e cossenos dos ângulos: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. A ideia geométrica de tangente pode ser apresentada usando ângulos em diferentes quadrantes, destacando os sinais e ângulos para os quais ela se anula ou não é definida.

3 ESTUDOS TRIGONOMÉTRICOS

3.1 Relações Métricas no Triângulo Retângulo

Observe o triângulo retângulo a seguir:

Figura 10 – Triângulo retângulo ABC



Nesse triângulo, $\overline{AB}$ é a hipotenusa, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os catetos, $\overline{AH}$ é a projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa, $\overline{HB}$ é a projeção ortogonal do cateto a sobre a hipotenusa e $\overline{CH}$ é a altura relativa à hipotenusa c.

O teorema de Pitágoras diz que:

Primeira relação métrica: Em um triângulo retângulo qualquer, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. Assim, na figura acima, temos:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

e os triângulos ABC, ACH e BCH são semelhantes pelo caso de semelhança AA (ângulo-ângulo).

Pela semelhança dos triângulos ABC e BCH e a proporcionalidade que existe entre as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, podemos obter a segunda e terceira relações métricas.

Segunda relação métrica: Em um triângulo retângulo qualquer, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa. Assim, temos na afirmação acima:

$$a.b = c.h$$

Terceira relação métrica: Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre a hipotenusa. Portanto, no triângulo ABC acima, temos:

$$a^2 = c.m$$

Pela semelhança dos triângulos ABC e ACH e a proporcionalidade que existe entre as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, podemos obter a próxima relação métrica.

Quarta relação métrica: Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção ortogonal desse cateto sobre a hipotenusa. Ou seja, no triângulo ABC acima, temos:

$$b^2 = c.n$$

Pela semelhança dos triângulos ACH e BCH a proporcionalidade que existe entre as medidas dos lados correspondentes desses triângulos, podemos obter a relação métrica.

Quinta relação métrica: Em um triângulo retângulo qualquer, o quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Portanto, no triângulo ABC acima, temos:

$$h^2 = m.n$$

Sexta relação métrica: Em um triângulo retângulo qualquer, a medida da relativa à hipotenusa é igual à soma das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. Portanto, no triângulo ABC acima, temos:

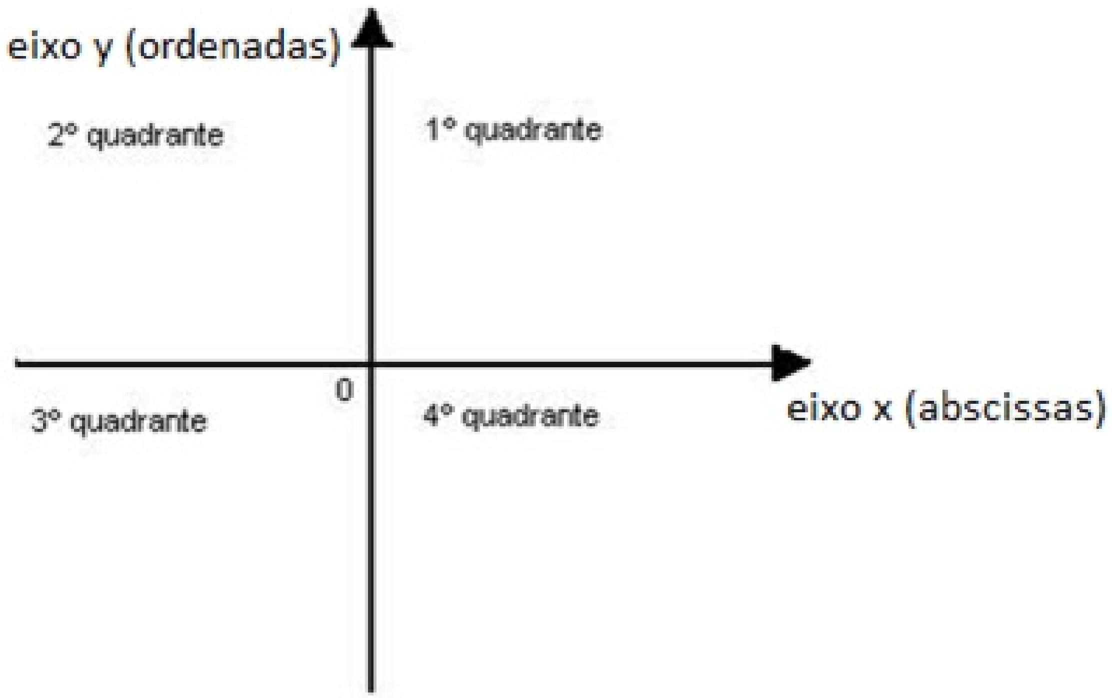
$$c = m + n$$

3.1.1 Plano Cartesiano ou R^2

Segundo René Descartes (1596-1650), criador do plano cartesiano, este consiste em dois eixos perpendiculares, sendo o horizontal chamado de eixo das abscissas e o vertical de eixo das ordenadas. O encontro dos dois eixos é chamado origem e cada ponto do plano cartesiano é formado por um par ordenado (x, y) onde x: abscissa e y: ordenada.

O plano cartesiano foi desenvolvido por Descartes no intuito de localizar pontos num determinado espaço. As disposições dos eixos no plano formam quatro quadrantes mostrados na Figura 11 a seguir:

Figura 11 – Plano cartesiano

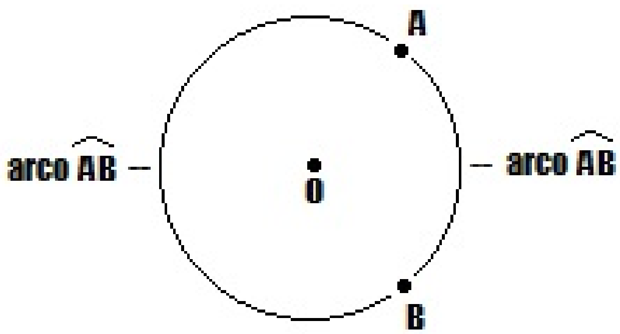


3.2 Arcos Trigonométricos

3.2.1 Arcos da circunferência

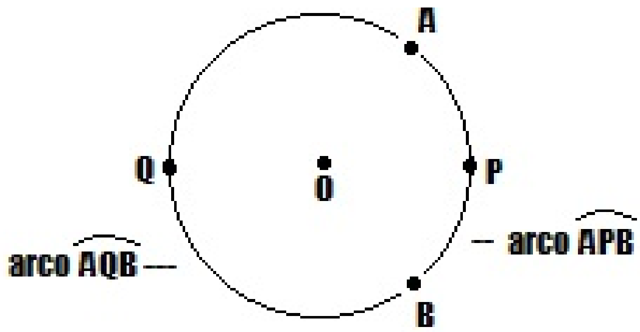
Considere uma circunferência de centro O, como apresentado na Figura 12. Nela, pode-se destacar os pontos A e B, que a dividem em duas partes chamadas arcos da circunferência.

Figura 12 – Arcos da circunferência



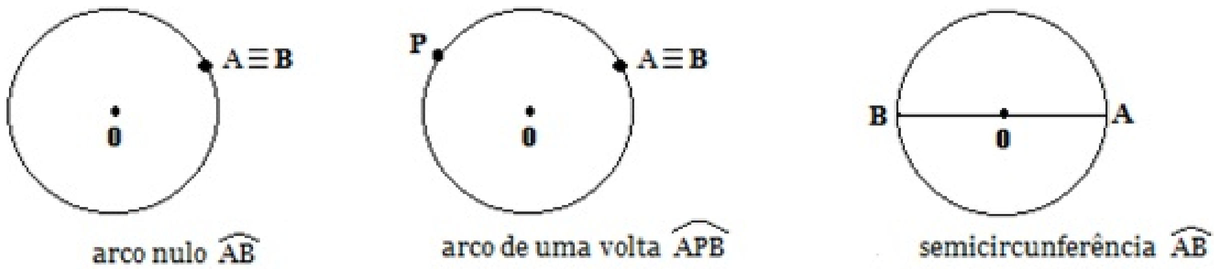
Os pontos A e B determinam dois arcos que podem ser indicados por $\widehat{AB}$.
Nos casos em que não esteja evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos destacar um ponto entre as extremidades do arco e utilizar a notação conforme a figura a seguir:

Figura 13 – Notação de arcos da circunferência



Quando são coincidentes as extremidades de um arco, este arco pode ser: nulo ou corresponder a um arco de volta completa. E quando as extremidades de um arco correspondem às extremidades de um diâmetro, dizemos que esse arco é uma semicircunferência.

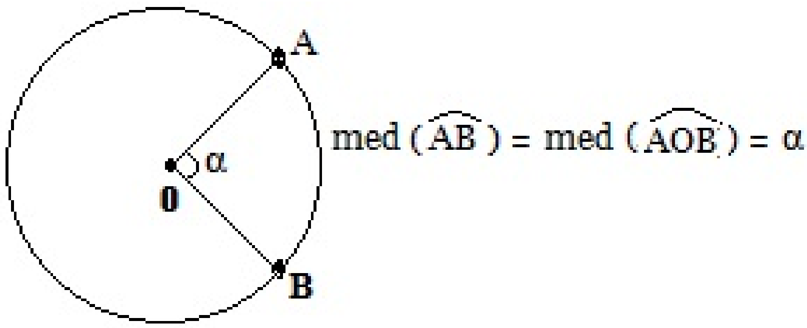
Figura 14 – Notação de arcos



3.2.2 Medida de um arco de circunferência

A medida angular de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente a esse arco.

Figura 15 – Medida angular ou central de um arco



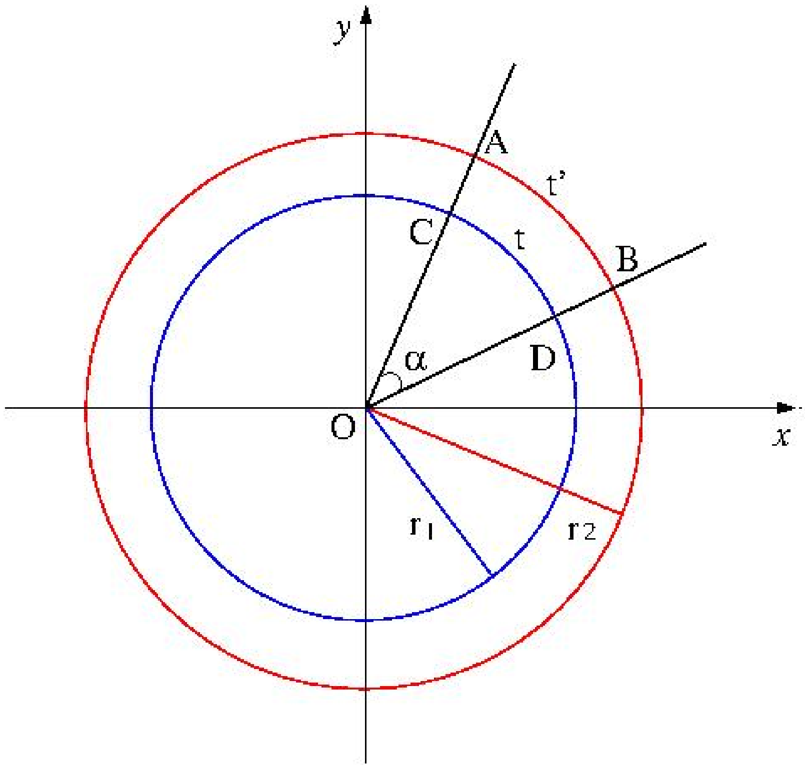
A medida angular de um arco não é o mesmo que o comprimento de um arco. Enquanto a medida depende exclusivamente do ângulo central correspondente, o comprimento de um arco equivale a sua medida linear, dependendo do comprimento do raio da circunferência (Carmo; 2005).

Nas circunferências concêntricas observadas na Figura 16, os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ têm a mesma medida, pois correspondem ao mesmo ângulo central α. Porém, esses arcos têm comprimentos diferentes, pois as circunferências que os contêm têm raios diferentes. Arcos de círculos que subtendem o mesmo ângulo central são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios. (Uma demonstração pode ser encontrada em Lima; 1991).

Sejam t e t' os comprimentos dos arcos $\widehat{CD}$ e $\widehat{AB}$, subtendidos pelo mesmo ângulo central α, dos círculos de raios r_1 e r_2, respectivamente (Figura 16). Assim,

$$\frac{t}{t'} = \frac{r_1}{r_2} \text{ ou } \frac{t}{r_1} = \frac{t'}{r_2} \ .$$

Figura 16 – Medida de um arco e seu comprimento.



3.2.3 Unidade de medida de arco

- O Grau (^{o})

  É atribuída a primeira contribuição grega para a trigonometria a Hipsícles (em 180 a.C) quando dividiu o círculo do zodíaco em 360 partes congruentes e correspondente a um arco de medida 1 grau (1^o) (Kennedy; 1992). Contudo, Hipsícles absorveu essa ideia da cultura babilônica, porém não usou essa divisão em 360 partes para outros círculos.

De acordo com Kennedy (1992), os babilônicos por volta de 300 a.C., optaram por dividir o ângulo total subtendido de uma circunferência em 360 partes, ou 360 graus (um múltiplo de 60, base do sistema de numeração usado pelos babilônicos), e definiram as subdivisões do grau, o minuto, 1/60 de grau, e o segundo, 1/60 de minuto. Hiparco, ao inaugurar a Trigonometria, adotou o sistema babilônico de medidas. É atribuído a Hiparco a construção da primeira tabela trigonométrica, o que o levou a ser conhecido como "O Pai da Trigonometria".

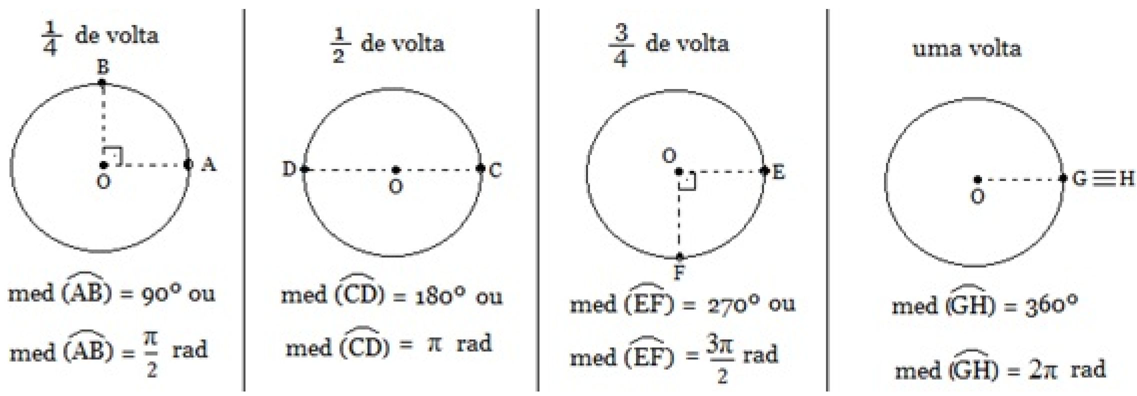
- O Radiano

  Segundo Kennedy (1992) o termo radiano aparece impresso pela primeira vez em 1873, em um exame escrito pelo físico James Thonson. O termo radian (radiano) provavelmente foi inspirado pela palavra radius (raio).

  Um arco que mede um radiano tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência que o contém, ou seja, ao considerarmos, em uma circunferência de raio r, um arco de comprimento r, temos que esse arco mede $1rad$.

  Observe na Figura 17 alguns arcos com medidas em graus e em radianos.

Figura 17 – Arcos com medida em graus e em radianos



Como pode-se perceber, 360^o corresponde a $2\pi rad$. Para transformar a medida de um arco, na unidade de graus para radianos, ou vice-versa podemos utilizar a regra de três. De forma mais simples, para transformar um arco em graus para radiano, basta dividi-lo por 180 e, logicamente, passar de radiano para graus basta multiplicar por 180.

Exemplo 3.2.3.1 Vamos escrever $42^o45'$ em radianos.

solução:
Inicialmente, convertemos $42^o45'$ e πrad em minutos. Como $1^o = 60'$, temos: $42^o45' = 2.565'$ e $\pi rad = 180^o = 10.800'$ temos então, $42^o45' = \dfrac{2.565}{10.800} = \dfrac{19\pi}{80} rad$.

Exemplo 3.2.3.2 Vamos agora expressar $\dfrac{139\pi}{360} rad$ em graus.

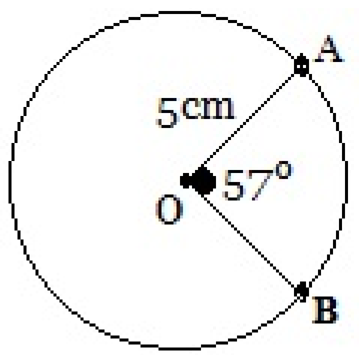
solução:

$$\frac{39\pi}{360} = \frac{139.180}{360} = \frac{25020}{360} = 69,5^o = 69^o30'.$$

Exemplo 3.2.3.3 . Na circunferência de centro O, apresentada na Figura 18, determine o comprimento do arco AB, considerando o menor arco para este exemplo.

(Considere $\pi = 3,14$.)

Figura 18 – Comprimento de um arco



solução:
Utilizando a regra de três, temos a igualdade,
$\frac{360}{57} = \frac{2\pi r}{x} \Longrightarrow \frac{360}{57} = \frac{2x3,14.5}{x} \Longrightarrow$ x=4,972.
Portanto, o comprimento do arco é $4,972cm$.

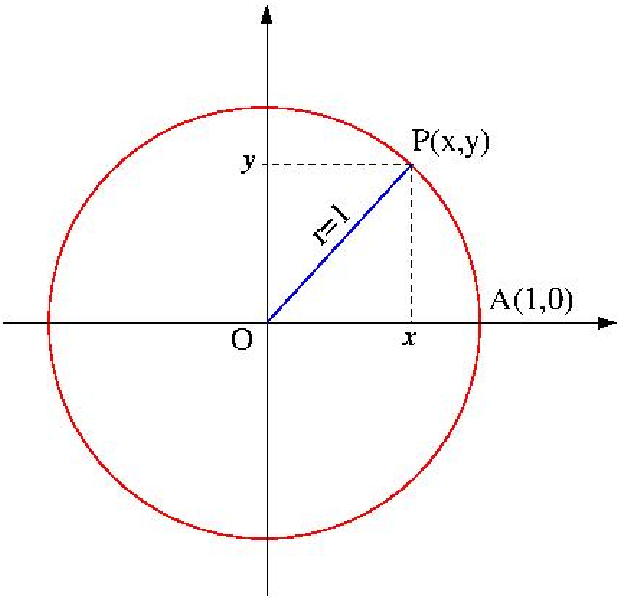
3.3 Circunferência trigonométrica ou Círculo Trigonométrico

Uma circunferência ou círculo trigonométrico é um círculo orientado unitário (círculo de raio 1), com orientação anti-horária, cuja origem dos arcos é o ponto A.

Podemos associar a circunferência trigonométrica de centro O um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais cuja origem é o centro da circunferência trigonométrica. Os arcos nesta circunferência tem origem no ponto A(1,0), tendo como sentido positivo o anti-horário, e negativo, o horário, e o sistema de eixos cartesianos a divide em quatro quadrantes, como pode ser observado na Figura 19.

Tomando um ponto P(x,y) da circunferência (Figura 19), as coordenadas do ponto P são:
- x=abscissa de P.
- y=ordenada de P.

Figura 19 – Circunferência trigonométrica de raio unitário.



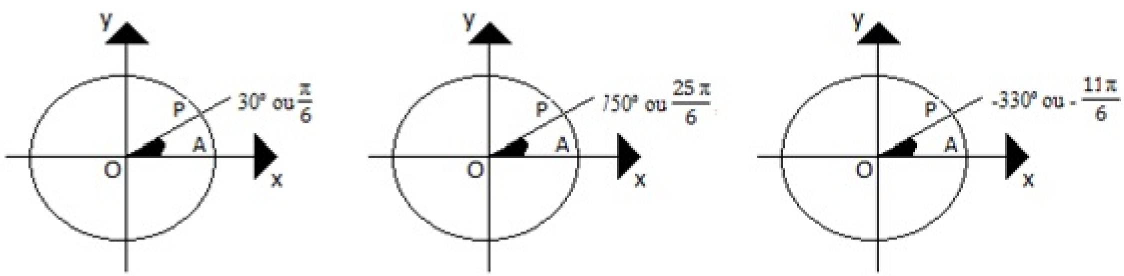
Observação: Como a circunferência trigonométrica tem raio igual a um, o comprimento e a medida de um arco, dada em radianos, são numericamente iguais. Para simplificar a notação, denotaremos a medida do arco em radianos sem a indicação "rad". Um arco de $\frac{3\pi}{4}rad$, por exemplo, será denotado por $\frac{3\pi}{4}$.

Em uma circunferência trigonométrica também podemos ter arcos maiores que uma volta ou arcos negativos, como por exemplo: $480^o = 120^o + 360^o$ e $-\frac{8\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi$

3.3.1 Arcos côngruos

Um mesmo ponto P, em uma circunferência trigonométrica, está associado a infinitos arcos. Os arcos de 30^o ou $\frac{\pi}{6}$, 750^o ou $\frac{25\pi}{6}$, e -330^o ou $-\frac{11\pi}{6}$ têm as mesmas extremidades P. Diz-se assim que esses são **arcos côngruos**. Observe a Figura 20 abaixo.

Figura 20 – Arcos côngruos a 30^o



De maneira geral, dado um arco $\widehat{AP}$ de medida β, com $0^o \leq \beta < 360^o$ ou $0 \leq \beta < 2\pi$, as medidas dos arcos côngruos a $\widehat{AP}$ podem ser escrita como: $\beta + k.2\pi$ ou $\beta + k.360^o$, com $k \in \mathbb{Z}$.

O arco $\widehat{AP}$ de medida β é denominado $1^{\underline{a}}$ determinação positiva dos arcos côngruos a ele.

Nas circunferências trigonométricas mostradas anteriormente, a $1^{\underline{a}}$ determinação positiva do arco $\widehat{AP}$ tem 30^o ou $\frac{\pi}{6}$. Os dois arcos côngruos a ele que foram apresentados podem ser escritos da seguinte forma: $750^o = 30^o + 2x360^o$ ou $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2x2\pi$ e $-330^o = 30^o - 360^o$ ou $-\frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - 2\pi$.

Exemplo 3.3.1. *A primeira determinação positiva do arco 1470^o é 30^o e o número de voltas completas no círculo trigonométrico é 4 no sentido anti-horário. A expressão geral é dada por $1470^o = 30^o + k.360^o$, sendo $k = 4$.*

A primeira determinação positiva do arco $-\frac{27\pi}{4}$ é $\frac{5\pi}{4}$ e o número de voltas completas no círculo trigonométrico é 3 no sentido horário. a expressão geral é dada por: $-\frac{27\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k.2\pi$, sendo $k = -3$.

3.4 Arcos Complementares, Suplementares, Explementares e Replementares

- Dois arcos, de medidas α e β, são complementares se: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ + k.2.π, $k \in \mathbb{Z}$. O complemento de x é $\frac{\pi}{2}$ - x.

- Dois arcos, de medidas α e β, são suplementares se: $\alpha + \beta = \pi$ + k.2.π, $k \in \mathbb{Z}$. O suplemento de x é π - x.

- Dois arcos, de medidas α e β, são explementares se: α - $\beta = \pi$ + k . 2π, $k \in \mathbb{Z}$. O explemento de $\frac{7\pi}{6}$ é $\frac{\pi}{6}$

- Dois arcos, de medidas α e β, são replementares se: $\alpha + \beta = 2\pi$ + k.2.π, $k \in \mathbb{Z}$. O replemento de x é 2π- x.

Exemplos:

a) $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{13\pi}{4}$ são medidas de arcos complementares, pois:

$\frac{5\pi}{4} + \frac{13\pi}{4} = \frac{18\pi}{4} = \frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\pi.$

b) Os arcos de medidas 1650^o e - 30^o são suplementares, pois:

1650^o + (-30^o) = 1620^o = 180^o +4. 360^o.

Vamos analisar o que ocorre com os valores das funções trigonométricas. De $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ + k.2.π, vem $\alpha = (\frac{\pi}{2}$ -$\beta)$ + k.2.π, ou seja, os arcos de medidas α e $\frac{\pi}{2}$ - β são côngruos; então: sen α = sen $(\frac{\pi}{2}$ -$\beta) \Longrightarrow$ sen α = cos β.

cos α = cos ($\frac{\pi}{2}$ -β) $\Longrightarrow$ cos α = sen β.

Então, temos que:

"O seno de um arco é igual ao cosseno do seu complemento e vice-versa."

De $\alpha + \beta = \pi$ + k.2.π, vem α = (π - β) + k.2.π, ou seja, os arcos de medidas α e (π - β) são côngruos. Então:

sen α = sen (π - β) $\Longrightarrow$ sen α = sen β.

cos α = cos (π - β) $\Longrightarrow$ cos α = - cos β.

Portanto, podemos registrar que:

"Os senos de dois arcos suplementares são iguais, e os cossenos de dois arcos suplementares são opostos."

Exemplos:

a) sen 4600^o = cos 5210^o e cos 4600^o= sen 5210^o.

b) sen $\frac{3\pi}{5}$ = sen $\frac{12\pi}{5}$ e cos $\frac{3\pi}{5}$ = - cos $\frac{3\pi}{5}$.

3.4.1 Paridade das Funções Trigonométricas

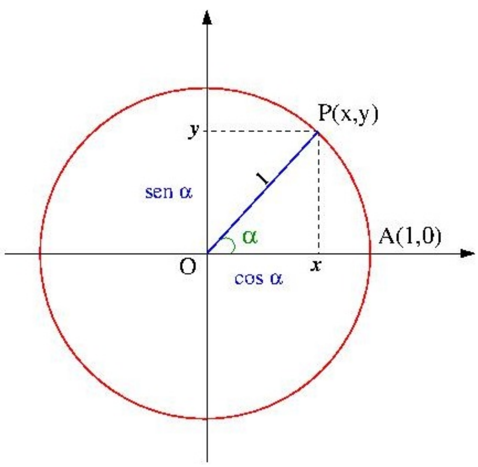
Seja f: R $\rightarrow$ R dizemos que f é:

- Par, se para todo x $\in \mathbb{R}$, f(x) = f(-x).
- Ímpar, se para todo $\in \mathbb{R}$, f(x) = -f(-x).

3.5 Estudo das Funções Trigonométricas

Como visto na seção 3.3, podemos associar a circunferência trigonométrica de centro O um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cuja origem é o centro da circunferência e o ponto A(1,0).

Figura 21 – Circunferência Trigonométrica.



Nesta circunferência podemos tomar um ponto P(x,y) (Figura 21) e obtermos o triângulo retângulo OxP, e assim as coordenadas do ponto P podem ser dadas em função do ângulo α como:

- x= abscissa de P = cos α.
- y= ordenada de P = sen α.
- A tangente do ângulo α é a razão do $\dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$.

Como todos os pontos da circunferência trigonométrica estão à distância 1 da origem, pela relação de Pitágoras, temos:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Assim, essa definição, estendida agora para qualquer número real, mantém as relações fundamentais. A tangente de um ângulo α não é definida para $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k.2.\pi$ e $\alpha = \dfrac{3\pi}{2} = +k.2.\pi$, em que $cos\ \alpha = 0$.

Observe a tabela de ângulos notáveis abaixo:

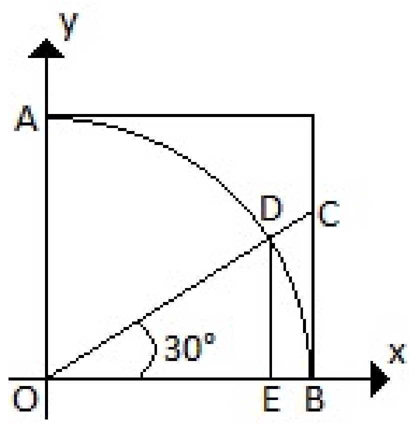
Tabela 1 – Valores notáveis do seno, cosseno e tangente dos ângulos em graus

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o	360^o
$sen\ \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos\ \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Conhecendo esses valores e usando a simetria dos pontos da circunferência, podemos obter valores de seno e cosseno de arcos em todos os quadrantes.

Exemplo 3.5.1. *Determine a área do quadrilátero na Figura 22, sabendo que o raio do arco* $\widehat{AB}$ *vale* 1.

Figura 22 – Trapézio inscrito em um quadrilátero $\widehat{AB}$



Solução:

Da Figura 22, sabe-se que os valores dos segmentos: $\overline{DE} = sen\ 30^o$, $\overline{OE} = cos\ 30^o$, $\overline{BC} = tg\ 30^o$. Ainda na figura 23, temos que $\overline{BE} = \overline{OB} - \overline{OE} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, Logo, a área A do quadrilátero é:

$A = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2\sqrt{6}+3}{6}\right).\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{24}$ u .a.

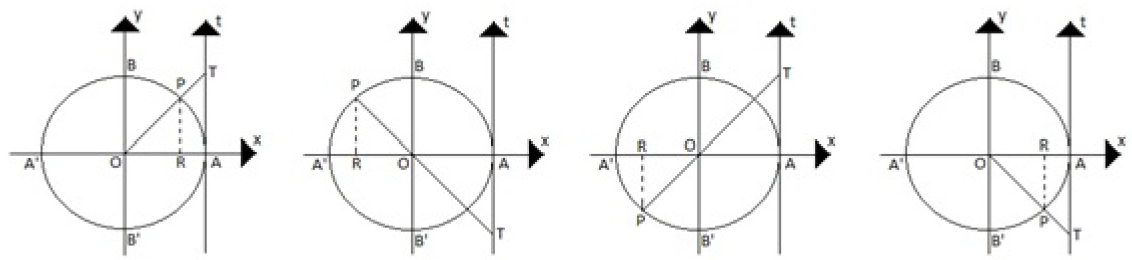
3.5.1 A ideia geométrica de tangente

Considere o arco $\widehat{AP}$ de medida x na circunferência, o $cos\ x$ é a abscissa de P, e o $sen\ x$ é a ordenada de P.

Vejamos o significado geométrico de $tg\ x$.

Vamos considerar na circunferência trigonométrica a reta t, tangente à circunferência no ponto A, com a mesma orientação do eixo y. Observe a figura 24 com ponto P em cada um dos quadrantes:

Figura 23 – A tangente de um arco



Em todos os casos, ΔORP e ΔOAT são semelhantes. Dessa semelhança vem:

$$\frac{PR}{OR} = \frac{AT}{OA} \text{ ou } \frac{sen\ x}{cos\ x} = \frac{AT}{1}$$

Como $\dfrac{sen\ x}{cos\ x} = tg\ x$ (com $cos\ x \neq 0$) e $tg\ x = \dfrac{AT}{OA} = AT$, então temos $tg\ x = AT$, ou seja, geometricamente a $tg\ x$ é AT.

Observação: Se T é o encontro das retas $\overleftrightarrow{OP}$ e t, no caso de essas retas serem paralelas, não existe AT e por isso não existe $tg\ x$.

1. $f(x) = tg\ x$ é positiva no 1º e 3º quadrantes (produto da ordenada pela abscissa positiva).

2. $f(x) = tg\ x$ é negativa no 2º e 4º quadrantes (produto da ordenada pela abscissa negativa).

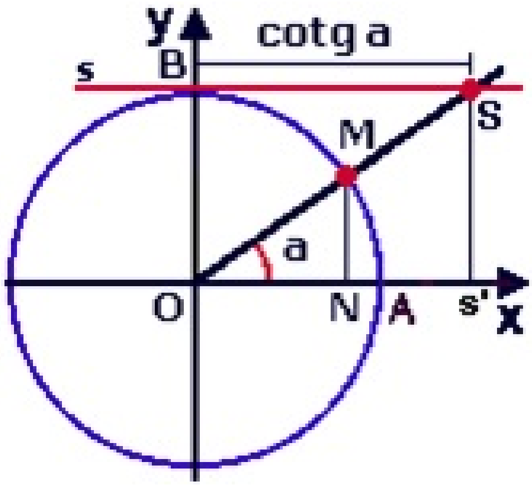
3. É uma função ímpar, pois $tg(-x) = -tg\ x$ e de período $P = \pi rad$.

Conhecendo o sinal da tangente em cada quadrante, basta reduzir cada arco desejado ao 1º quadrante para saber o valor da tangente desse arco, de maneira análoga a redução ao 1º quadrante do seno e do cosseno.

3.5.2 A ideia geométrica de cotangente

Seja a reta tangente à circunferência trigonométrica no ponto $B = (0,1)$, conforme Figura 24.

Figura 24 – Eixo da função cotangente



Esta reta é perpendicular ao eixo OY. A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência intersecta a reta tangente s no ponto $S = (s', 1)$. A abscissa s' deste ponto, é definida como a cotangente do arco $\widehat{AM}$ correspondente ao ângulo a.

Assim a cotangente do ângulo a é dada pelas suas várias determinações:

$$cotg(AM) = cotg(a) = cotg(a + 2k\pi) = c = s'$$

Os triângulos ΔOBS e ΔONM são semelhantes, logo:

$$\frac{BS}{OB} = \frac{ON}{MN}.$$

Como a circunferência é unitária $|OB| = 1$

$$cotg\ a = \frac{cos\ a}{sen\ a},$$

que equivale a

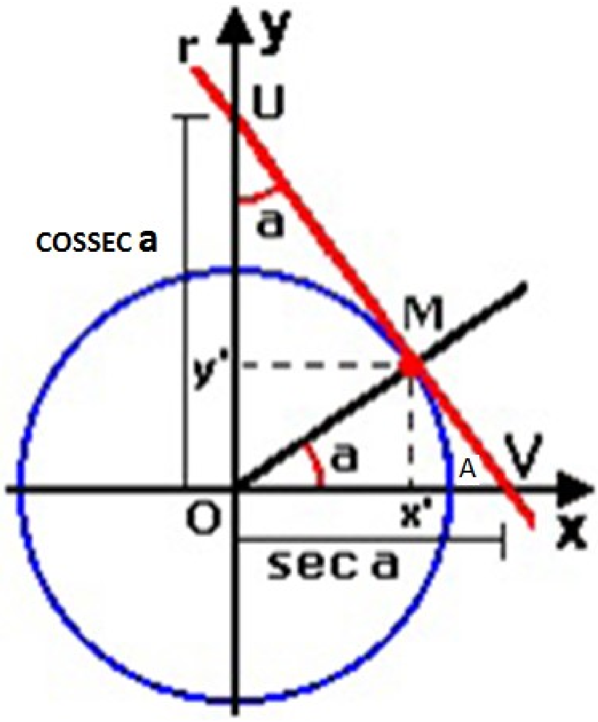
$$cotg\ a = \frac{1}{tg\ a}.$$

A cotangente de ângulos do primeiro quadrante é positiva. Quando $a = 0$, a cotangente não existe, pois as retas s e OM são paralelas.

3.5.3 A ideia geométrica de secante e cossecante

Seja a reta r tangente à circunferência trigonométrica no ponto $M = (x', y')$. Esta reta é perpendicular à reta que contém o segmento OM. A interseção da reta r com o eixo OX determina o ponto $V = (v, 0)$. A abscissa do ponto V, é definida como a secante do arco AM correspondente ao ângulo a, conforme Figura 25.

Figura 25 – Eixos das funções secantes e cossecantes



Assim a secante do ângulo a é dada pelas suas várias determinações:

$$sec(AM) = sec(a) = sec(a + 2k\pi) = v$$

A interseção da reta r com o eixo OU é o ponto $U = (0, u)$. A ordenada do ponto U, é definida como a cossecante do arco AM correspondente ao ângulo a. Então a cossecante do ângulo a é dada pelas suas várias determinações:

$$cossec(AM) = cossec(a) = cossec(a + 2k\pi) = u$$

Os triângulos ΔOMV e $\Delta Ox'M$ são semelhantes, deste modo,

$$\frac{OV}{OM} = \frac{OM}{Ox'}$$

que pode ser escrito como:

$$sec\ a = \frac{1}{cos\ a}$$

se $cos\ a$ é diferente de zero.

Os triângulos ΔOMU e $\Delta Ox'M$ são semelhantes, deste modo,

$$\frac{OU}{OM} = \frac{OM}{x'M}$$

que pode ser escrito como:

$$cossec\ a = \frac{1}{sen\ a}$$

desde que $sen\ a$ seja diferente de zero.

4 UTILIZANDO A *"RÉGUA T"* NO ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

4.1 Ferramentas Pedagógicas

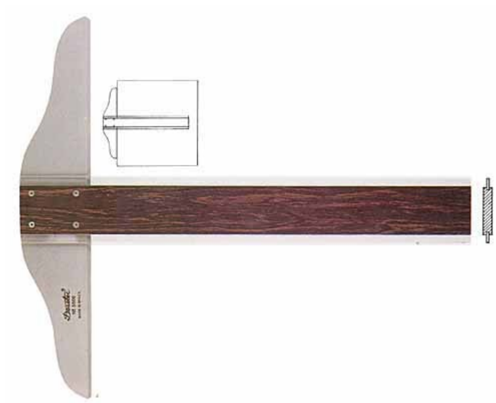
Para atender a esta proposta pedagógica, utiliza-se algumas ferramentas, relacionadas a seguir:

- Uma régua T de cabeçote móvel;
- Régua convencional,
- Quadro
- Pincel para quadro branco (ou giz para lousa)
- Esquadros
- Circunferência trigonométrica confeccionada a mão com auxílio da régua T.

4.1.1 Definindo a régua T

A régua T é um instrumento próprio para desenho técnico, de madeira com bordas de acrílico e cabeçote móvel de plástico resistente. Como o seu nome indica, tem a forma de um T e é um instrumento constituído por duas partes fundamentais: O cabeçote e a travessa, conforme Figura 26. Ela é Utilizada principalmente para traçar linhas horizontais e paralelas.

Figura 26 – Régua T



FONTE: www.oprojetista.com.br

4.1.2 Como Utilizar a régua T

Para utilizar a régua T deve manter-se o cabeçote da régua geralmente a esquerda. Junto ao bordo da prancheta ou mesa de desenho, pressionando firmemente a régua contra o papel na posição desejada.

As Figuras 27, 28, 29 e 30 apresentam a metodologia utilizada na construção do material pretendido. A circunferência foi construída utilizando a régua T como compasso, firmando a régua pelo seu orifício na base da travessa (régua) e fazendo a mesma girar por uma volta completa.

Figura 27 – Foto: O cabeçote é paralelo ao eixo x para construir a função seno

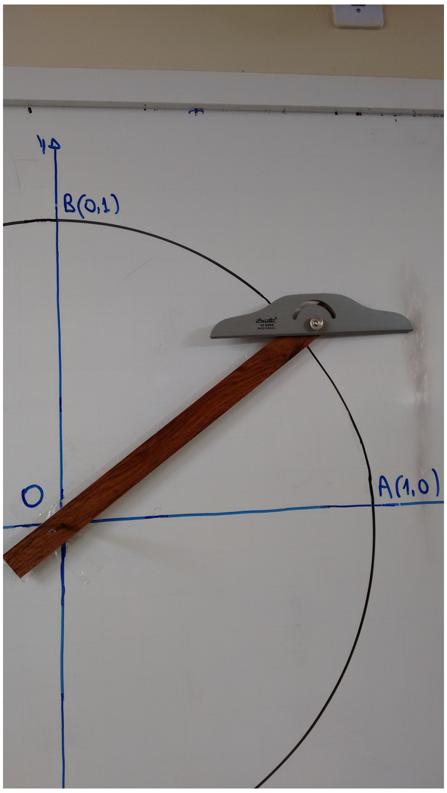


Figura 28 – Foto: O cabeçote é paralelo ao eixo y para construir a função cosseno

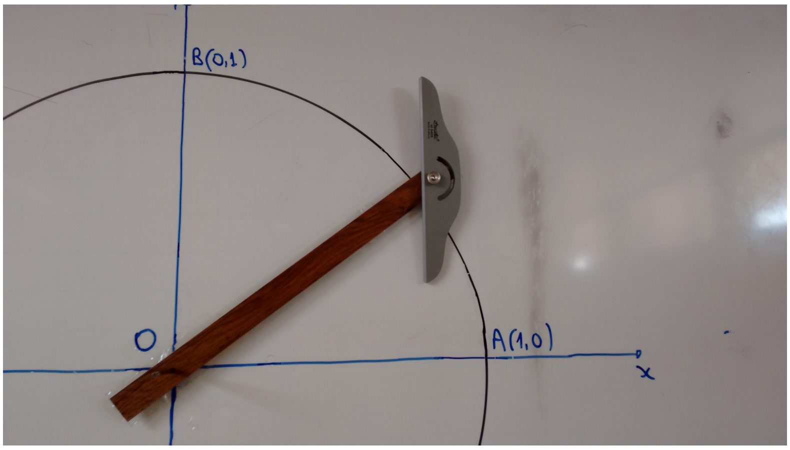


Figura 29 – Foto: O cabeçote é alinhado à travessa para construir a funções tangente e cotangente

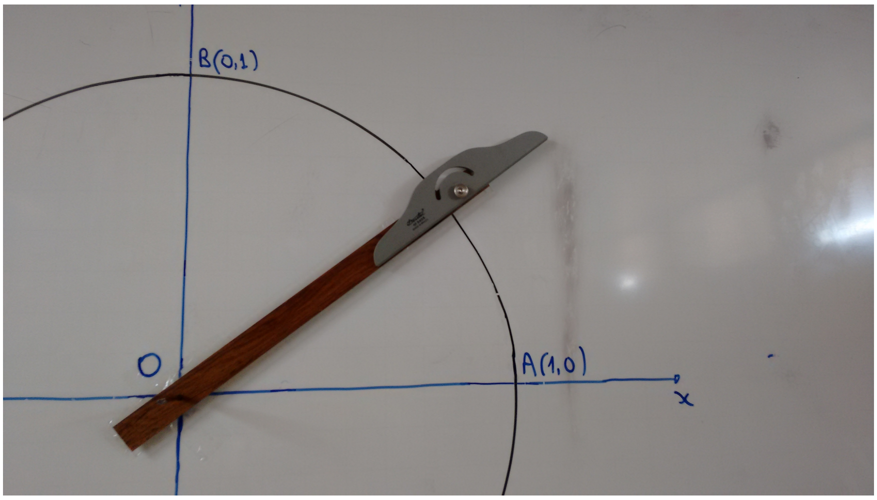
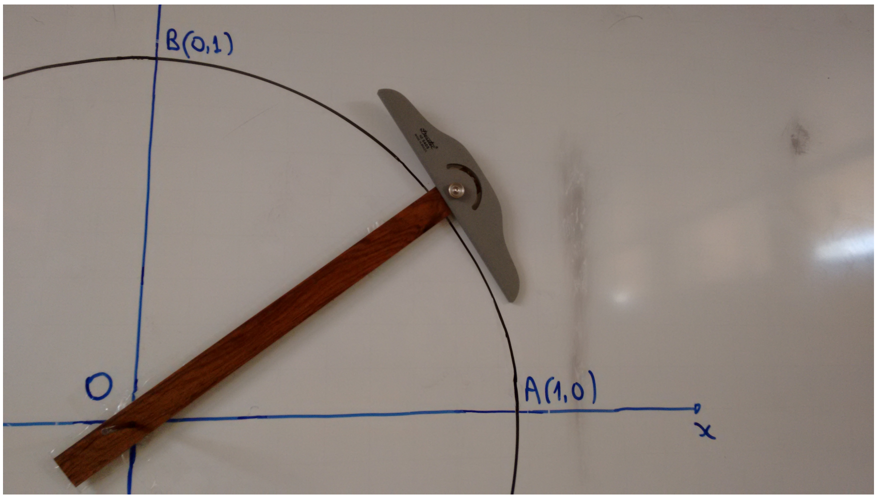


Figura 30 – Foto: O cabeçote é tangente à circunferência para construir a funções secante e cossecante



4.2 Trabalho com a circunferência trigonométrica

Para que o aluno possa fazer os exercícios propostos é necessário conhecer alguns conceitos importantes tais como:

- A transformação de unidades de ângulos: graus para radianos e vice-versa;
- Os ângulos notáveis, múltiplos de 30^o e 45^o;
- Os arcos côngruos;
- As relações fundamentais: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante;
- As funções: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, bem como seus respectivos eixos no ciclo trigonométrico;

- Os sinais das funções trigonométricas nos quadrantes dos ciclos trigonométricos em positivo ou negativo;
- Domínio, imagem e período das funções trigonométricas;
- O que são ângulos complementares, suplementares, explementares e replementares;
- Paridade das funções trigonométricas.

4.3 Confecção das funções trigonométricas com uso da régua "T"

Para confeccionar as funções trigonométricas com uso da régua T, segue as etapas seguintes:

i. A travessa da régua T será definida como raio unitário;

ii. O cabeçote móvel da régua T será utilizado para obter o valor numérico de cada ângulo sobre o eixo de cada função trigonométrica.

4.4 Função seno

Segue as etapas:

i. Faça um sistema de coordenadas cartesianas no quadro;

ii. Fixe o orifício da base da travessa da régua T na origem do sistema de coordenadas cartesianas com um fixador;

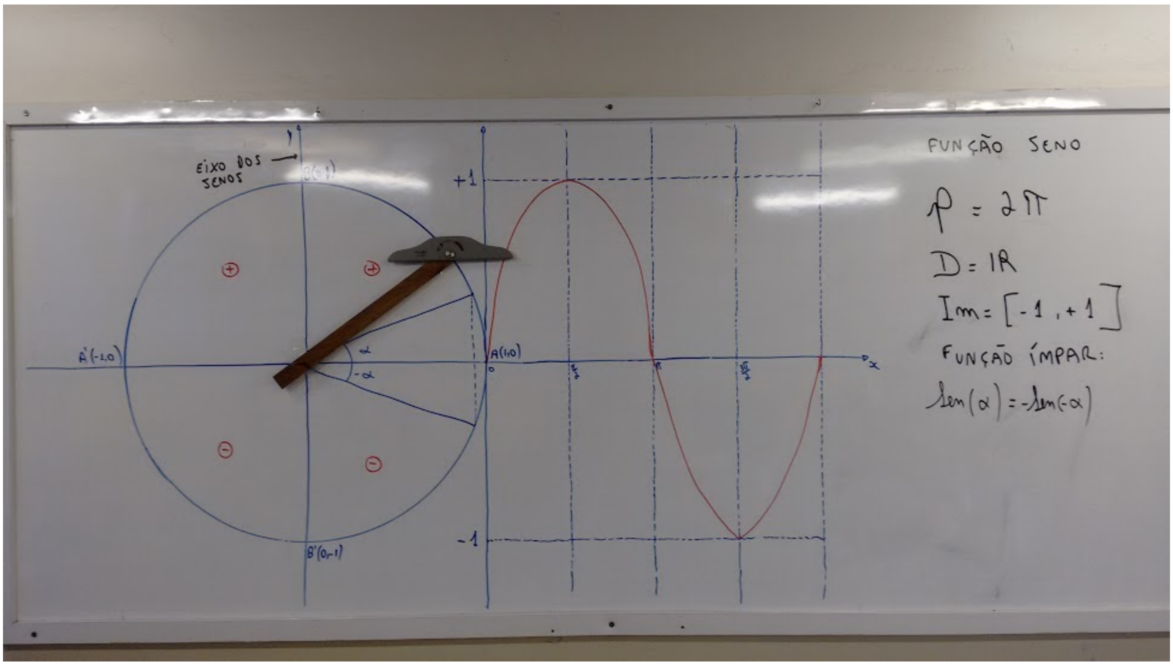
iii. Dê uma volta completa com a régua T em torno do plano cartesiano, firmando o giz ou pincel atômico no cabeçote da régua T, dando uma volta completa, formando o ciclo trigonométrico de raio unitário;

iv. Projete o eixo x para a direita, a partir do ponto $A = (1,0)$, traçando neste ponto um eixo paralelo ao eixo y (eixo dos senos);

v. Gire a régua T, no sentido positivo (anti-horário), deixando o cabeçote da régua T sempre paralelo ao eixo x. A medida que a régua T vai girando, a projeção do cabeçote da régua T sobre o eixo y (eixo dos senos) varia de 0 para 1, no 1^o quadrante; de 1 para 0, no 2^o quadrante; de 0 para -1, no 3^o quadrante e de -1 para 0 no 4^o quadrante, completando a volta no ciclo trigonométrico e formando uma curva chamada senoide, que é o gráfico da função seno de período 2π, domínio $\mathbb{R}$, imagem $[-1,1]$ e função ímpar, pois $sen(-x) = -sen(x)$.

Veja na figura 31 a seguir como determinar a função seno

Figura 31 – Foto: Função seno



Por meio da Figura 31 pode-se observar que os arcos suplementares do primeiro e segundo quadrantes têm o mesmo valor para o seno. Exemplo: $(sen\ 45^o = sen\ 135^o,\ sen\ 30^o = sen\ 150^o)$.

4.5 Função cosseno

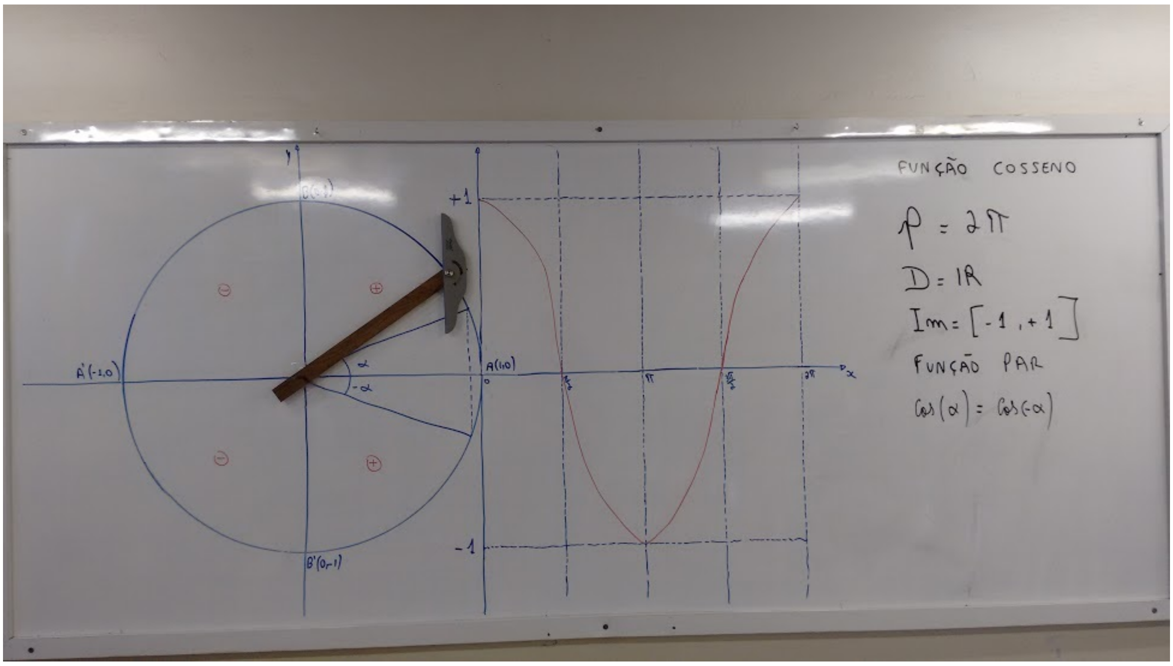
Repita o mesmo procedimento das etapas: $1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}}$ da seção anterior e mais as seguintes etapas;

i. Projete o eixo x (eixo dos cossenos) para a direita, a partir do ponto de coordenadas (1,0), traçando neste ponto um eixo paralelo ao eixo y;

ii. Gire a régua T, no sentido positivo (anti-horário), deixando o cabeçote da régua T sempre paralelo ao eixo y. A medida que a régua T vai girando, a projeção do cabeçote da régua T sobre o eixo x (eixo dos cossenos) varia de 1 para 0, no 1^o quadrante; de 0 para -1, no 2^o quadrante; de -1 para 0, no 3^o quadrante e de 0 para 1 no 4^o quadrante, completando a volta no ciclo trigonométrico e formando uma curva chamada cossenoide, que é o gráfico da função cosseno de período 2π, domínio $\mathbb{R}$, imagem $[-1,1]$ e função par, pois $cos(-x) = cos(x)$.

Veja na Figura 32 como determinar a função cosseno.

Figura 32 – Foto: Função cosseno



Por meio da Figura 32 pode-se observar que os arcos replementares do primeiro e quarto quadrantes têm o mesmo valor para o cosseno positivo. Exemplo: ($cos\ 30^o = cos\ 330^o$, $cos\ 60^o = cos\ 300^o$) e os arcos replementares do segundo e terceiro quadrantes têm o mesmo valor para o cosseno negativo ($cos\ 120^o = cos\ 240^o$, $cos\ 150^o = cos\ 210^o$).

4.6 Função tangente

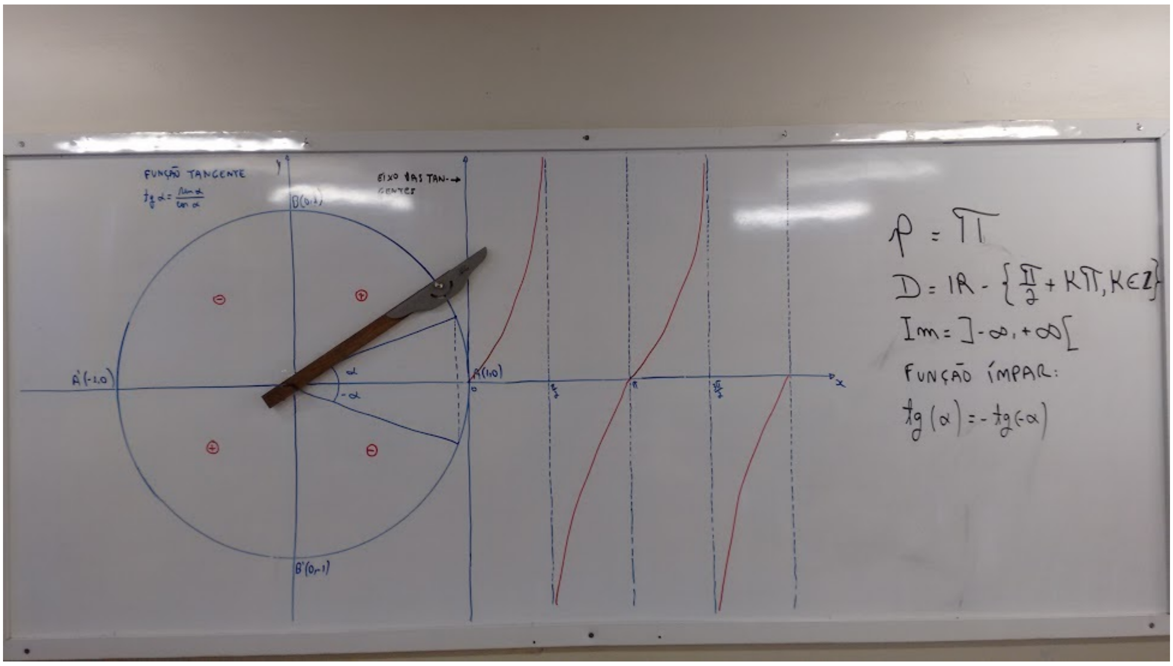
Repita o mesmo procedimento das etapas: $1^{\underline{a}}, 2^{\underline{a}}, 3^{\underline{a}}$;

i. Projete o eixo x para a direita, a partir do ponto de coordenadas (1,0), traçando neste ponto um eixo paralelo ao eixo y (eixo das tangentes);

ii. Gire a régua T, no sentido positivo (anti-horário), deixando o cabeçote alinhado à própria régua T. A medida que a régua T vai girando, a projeção do cabeçote da régua T sobre o eixo das tangentes varia de 0 para $+\infty$, no 1^o quadrante; de $-\infty$ para 0, no 2^o quadrante; de 0 para $+\infty$, no 3^o quadrante e de $-\infty$ para 0 no 4^o quadrante, completando a volta no ciclo trigonométrico e formando curvas chamada tangentoide, que é o gráfico da função tangente de período: π, domínio: $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$., imagem: $]-\infty, +\infty[$ e função: ímpar, pois $tg(-x) = -tg(x)$.

Veja na Figura 33 como determinar a função tangente

Figura 33 – Foto: Função tangente



Por meio da figura 33 pode-se observar que os arcos explementares do primeiro e terceiro quadrantes têm o mesmo valor para a tangente positiva ($tg\ 210^o\ = tg\ 30^o$, $tg\ 240^o = tg\ 60^o$) e os arcos explementares do segundo e quarto quadrantes têm o mesmo valor para a tangente negativa ($tg\ 135^o\ = tg\ 315^o$, $tg\ 120^o\ = tg\ 300^o$).

4.7 Função cotangente

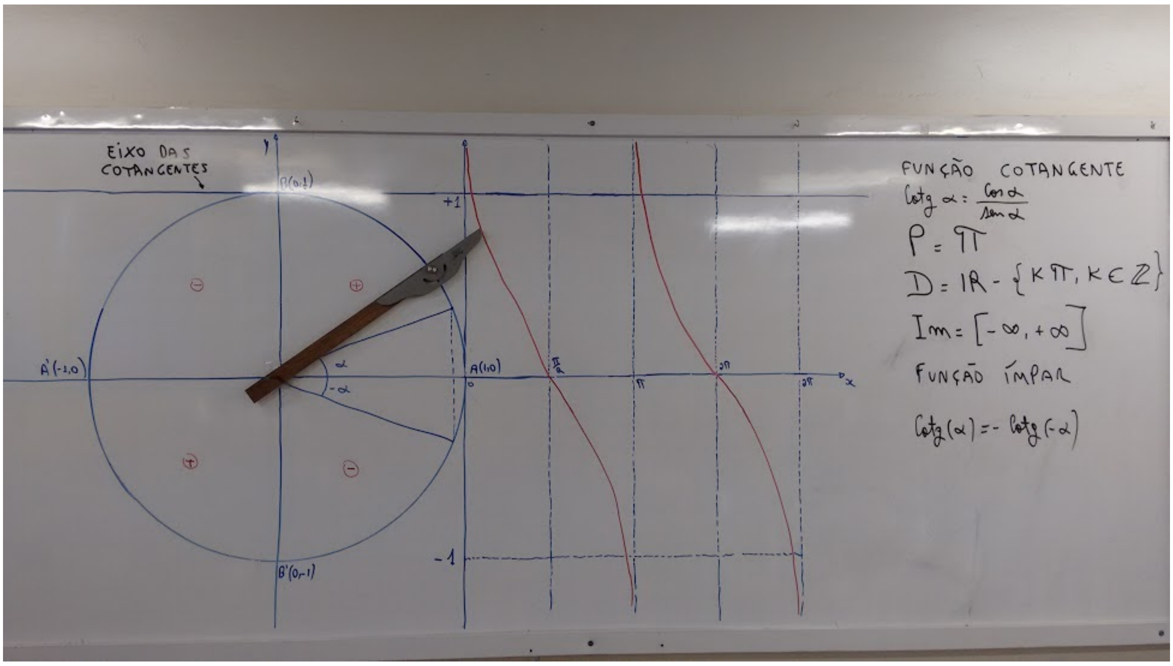
Repita o mesmo procedimento das etapas: 1ª, 2ª, 3ª;

i. Projete o eixo x para a direita, a partir do ponto de coordenadas $(1,0)$ e outro eixo paralelo a este (eixo das cotangentes), a partir do ponto de coordenadas $(0,1)$, para à esquerda e para à direita;

ii. Gire a régua T, no sentido positivo (anti-horário), deixando o cabeçote alinhado à própria régua T. A medida que a régua T vai girando, a projeção do cabeçote da régua T sobre o eixo das cotangentes varia de $+\infty$ para 0, no 1^o quadrante; de 0 para $-\infty$, no 2^o quadrante; de $+\infty$ para 0, no 3^o quadrante; de 0 para $-\infty$, no 4^o quadrante, completando a volta no ciclo trigonométrico e formando curvas chamada cotangentoidee, que é o gráfico da função cotangente de período: π, domínio: $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, imagem: $]-\infty, +\infty[$ e função: ímpar, pois $cotg(-x) = -cotg(x)$.

Veja na Figura 34 como determinar a função cotangente

Figura 34 – Foto: Função cotangente



Como a função cotangente é o inverso da função tangente e por meio da Figura 34, pode-se observar que os arcos explementares do 1^o e 3^o quadrantes têm o mesmo valor para ambas as funções. Exemplo: ($cotg\ 210^o\ = cotg\ 30^o$, $cotg\ 240^o\ = cotg\ 60^o$) e os arcos explementares do 2^o e 4^o quadrantes têm também o mesmo valor. Exemplo: ($cotg\ 135^o\ = cotg\ 315^o$, $cotg\ 120^o\ = cotg\ 300^o$). Observa-se também que as funções possuem a mesma paridade.

4.8 Função secante

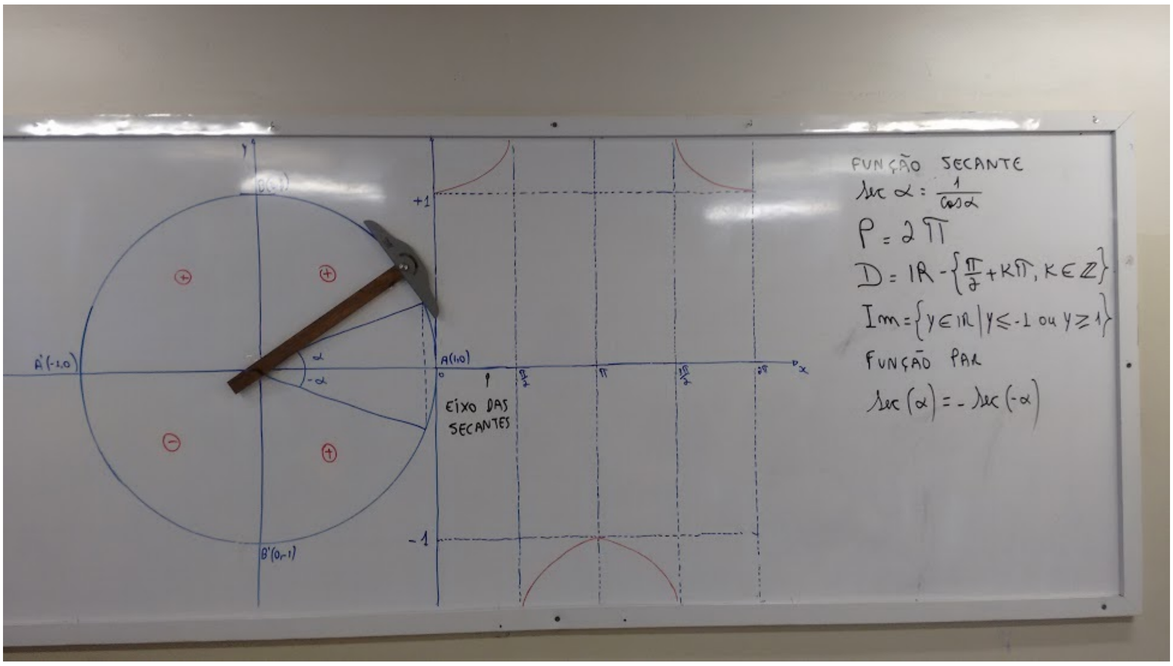
Repita o mesmo procedimento das etapas: 1ª, 2ª, 3ª;

i. Projete o eixo x (eixo d as secantes) para a direita, a partir do ponto de coordenadas $(1,0)$ traçando neste ponto um eixo paralelo ao eixo y;

ii. Gire a régua T, no sentido positivo (anti-horário), deixando o cabeçote perpendicular à própria régua T. A medida que a régua T vai girando, a projeção do cabeçote da régua T sobre o eixo das secantes varia de $+1$ para $+\infty$, no 1^o quadrante; de $-\infty$ para -1, no 2^o quadrante; de -1 para $-\infty$, no 3^o quadrante; de $+\infty$ para $+1$, no 4^o quadrante. completando a volta no ciclo trigonométrico e formando curvas chamada secantoide, que é o gráfico da função secante de período: 2π, domínio: $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, imagem: $\{y \in \mathbb{R} | y \leq -1\ ou\ y \geq 1\}$ e função: par, pois $sec(-x) = sec(x)$.

Veja na Figura 35 como determinar a função secante

Figura 35 – Foto: Função secante



Como a função secante é o inverso da função cosseno e por meio da Figura 35, pode-se observar que os arcos replementares do 1^o e 4^o quadrantes têm o mesmo valor para ambas as funções. Exemplo: ($sec\ 30^o\ = sec\ 330^o,\ sec\ 60^o\ = sec\ 300^o$) e os arcos replementares do 2^o e 3^o quadrantes têm também o mesmo valor. Exemplo: ($sec\ 120^o\ = sec\ 240^o,\ sec\ 135^o\ = sec\ 225^o$). Observa-se também que as funções possuem a mesma paridade.

4.9 Função Cossecante

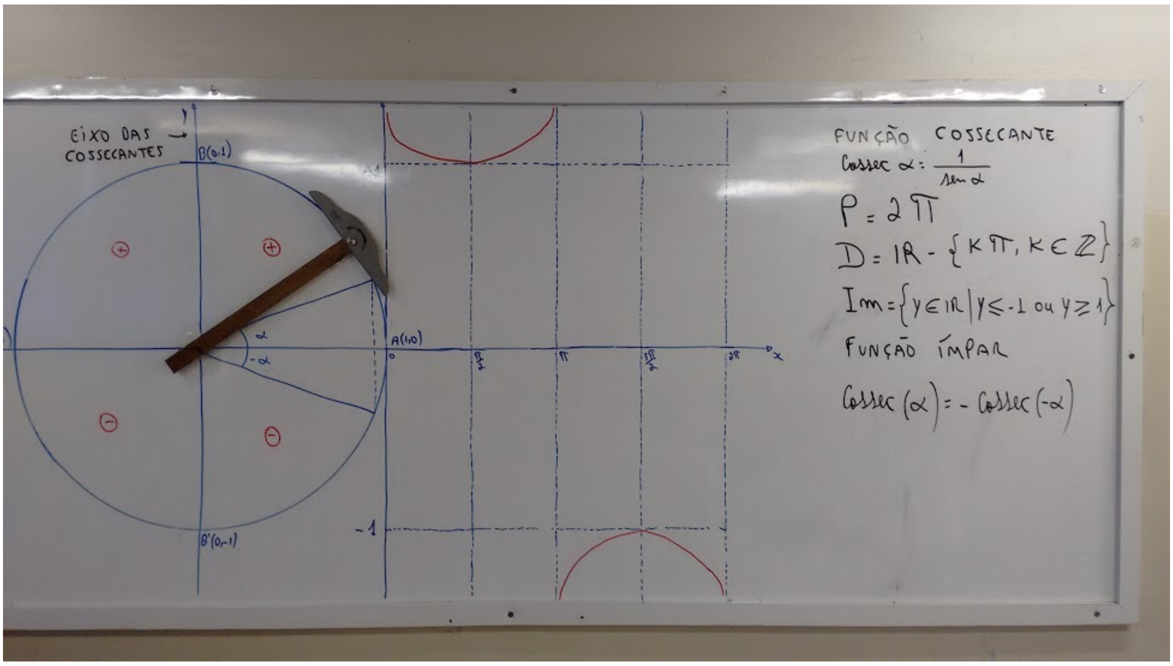
Repita o mesmo procedimento das etapas: 1ª, 2ª, 3ª;

i. Projete o eixo x para a direita, a partir do ponto de coordenadas (1,0) e o eixo y (eixo das cossecantes), para cima e para baixo;

ii. Gire a régua T, no sentido positivo (anti-horário), deixando o cabeçote perpendicular à própria régua T. A medida que a régua T vai girando, a projeção do cabeçote da régua T sobre o eixo das cossecantes varia de $+\infty$ para $+1$, no 1^o quadrante; de $+1$ para $+\infty$, no 2^o quadrante; de $-\infty$ para -1, no 3^o quadrante; de -1 para $-\infty$, no 4^o quadrante. completando a volta no ciclo trigonométrico e formando curva chamada cossecantoide, que é o gráfico da função cossecante de período: 2π, domínio: $\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, imagem: $\{y \in \mathbb{R} | y \leq -1,\ ou\ y \geq 1\}$ e função: ímpar, pois $cossec(-x) = -cossec(x)$.

Veja na Figura 36 como determinar a função cossecante

Figura 36 – Foto: Função cossecante



Como a função cossecante é o inverso da função seno e por meio da Figura 36, pode-se observar que os arcos suplementares do 1^o e 2^o quadrantes têm o mesmo valor para ambas as funções. Exemplo: ($cossec\ 30^o = cossec\ 150^o$, $cossec\ 60^o = cossec\ 120^o$). Observa-se também que as funções possuem a mesma paridade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vê-se que, em razão de sua complexa dinâmica de estudos, envolvendo inúmeras leis trigonométricas, como uma das responsáveis pelo desinteresse de boa parte dos alunos. Isto projeta altos dados percentuais de desistência e desmotivação dos mesmos.

A Trigonometria é uma área de grande valia para o desenvolvimento da sociedade, pois além de seu uso na Matemática, também é utilizada no estudo de fenômenos físicos, como Eletricidade, Mecânica, Música, Topografia, Engenharia entre outros.

Uma mudança importante no ensino da trigonometria, é a forma que o professor aborda estes assuntos. De regra geral, o aluno não consegue associa-la à sua vivência e realidade. Daí a relevância de utilizar materiais concretos e a Tecnologia que dispomos, de forma que o aluno perceba a sua aplicabilidade e utilidade.

De forma inovadora, esta proposta pedagógica, que privilegia a combinação de procedimentos didáticos próprios da educação, utilizando-se de uma metodologia diferenciada, que garante um eficiente suporte técnico e pedagógico necessário à realização do mesmo com sucesso.

O uso desse material concreto, a *régua T*, com frequência conseguirá cumprir o objetivo, pois o aluno ao manuseá-lo aprenderá as informações nele contida. Com o passar do tempo esse material deixará de ser necessário porque manipulando várias vezes, o aluno conseguirá construir imagens mentais para serem utilizadas quando precisar.

É de grande importância o uso desse material para o aluno na sua aprendizagem e no trabalho do professor. A Trigonometria é muitas vezes um terror na vida do aluno, mas quando ele tiver a oportunidade de usar este material concreto, acredita-se que proporcionará uma melhor fixação de imagem e assim enriquecer de forma surpreendente no seu aprendizado.

Neste trabalho, buscamos apresentar mais uma Ferramenta Metodológica de ensino ao professor, a *régua T* que, além de proporcionar aulas mais dinâmicas e significativas para alunos, trabalha os conceitos das relações e funções trigonométricas, de maneira geométrica e algébrica, desperta o interesse, favorece a discussão, os questionamentos, trocas de ideias e levantamento de hipóteses por parte dos alunos. O interesse visual e manipulativo desse material concreto enriquecerá a aprendizagem dos alunos e ajudará os mesmos a interagirem com a Trigonometria.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.; MELLO E. G. S. Iniciação à demonstração aprendendo conceitos Geométricos. 23 ed. reunião anual da ANPED, 2000.

BARSA – Enciclopédia Britânia do Brasil - Volumes: 02, 07 e 11 - 2005.

BOYER, Carl B. – História da Matemática – Editora Edgard Blücher – São Paulo – 1996.

CARMO, Manfredo Perdigão do, et. al. Trigonometria e Números Complexos, 3ª edição, Coleção Professor de Matemática. SBM, 2005

CASTRO, Isis Prado Meirelles de - Proposta Curricular – Ensino Médio – Versão preliminar – Secretaria da Educação e Cultura – Tocantins, 2007.

DANTE, L. R. Didática nas resoluções de problemas de matemática.São Paulo: Ática.1997.

DANTE, Luiz Roberto – Contexto & Aplicações – Editora Ática S.A. – Matemática, vol.2 - São Paulo – 2011.

IEZZI, Gelson et. al. Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 3, Ed. Atual. São Paulo, 1977.

KENNEDY, E. S. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula, volume 5: Trigonometria, trad. De Hygino H. Domingues – Ed. Atual Ltda, 1992.

LEONARDO, Fábio Martins de - Projeto Araribá: Matemática (Ensino Fundamental) – Editora Moderna – 3ª ed. – São Paulo,2010.

LIBÂNEO, José Carlos. Didática. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, Elon Lages; Meu professor de matemática. Rio de Janeiro 2ª Ed. SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages. Medida e Forma em Geometria. IMPA/VITAE, Rio de Janeiro, 1991.

LIMA E. L, et al. A Matemática do Ensino Médio.*Coleção do Professor de Matemática, v. 1 e 2*. Rio de Janeiro, SBM, 1997.

LUCKESI, Cipriano Carlos. Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições. 17ª Ed. São Paulo: Cortez, 2005.https://pt.sharelatex.com/project/

MACEDO, L., PETTY, A., PASSOS, N. Os Jogos e o Lúdico na Aprendizagem Escolar. Porto Alegre: Artmed. 2005.

PAIS, Luis Carlos. Ensinar e Aprender Matemática. São Paulo: Autêntica, 1º. Ed. 2006.

PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

PIAGET, Jean. A Construção do Real na Criança. Rio de Janeiro: Zahar. 1979.

SMOLE, K. C. Stocco. SMOLE, Maria I. S. V. Diniz – Matemática – Ensino Médio – 2ª Série– 5. ed. – São Paulo: Saraiva, 2005.

SOUZA, Joamir Roberto de/Patrícia Rosana Moreno Patara – Vontade de Saber Matemática – Editora FTD – São Paulo – 2009.

Matemática Essencial: Alegria Financeira Fundamental Médio Geometria Trigonometria Superior Cálculos. Disponível em: $http://www.google.com.br$

TOCANTINS: Proposta Curricular – Ensino Médio (PCEM-TO)– versão preliminar – Governo do Estado do Tocantins – Secretaria da Educação e Cultura, 2007.

$https://www.youtube.com/watch?v=Jy2Aajc4pJI$ Trigonometria$paridadedasFun$ções.

$http://www.oprojetista.com.br/produto/161/Regua-T$.