UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

KISCINGER MUNIZ DE CARVALHO

A ÁLGEBRA DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS E SUA SOLUBILIDADE

CAMPINAS
2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

KISCINGER MUNIZ DE CARVALHO

A ÁLGEBRA DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS E SUA SOLUBILIDADE

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: RICARDO MIRANDA MARTINS

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO KISCINGER MUNIZ DE CARVALHO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RICARDO MIRANDA MARTINS.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C253a	Carvalho, Kiscinger Muniz de, 1978- A álgebra das equações polinomiais e sua solubilidade / Kiscinger Muniz de Carvalho. – Campinas, SP : [s.n.], 2015. Orientador: Ricardo Miranda Martins. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Polinômios. 2. Equações algébricas. 3. Teoria de Galois. I. Martins, Ricardo Miranda,1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The algebra of polynomials equations and their solubility
Palavras-chave em inglês:
Polynomials
Algebraic equations
Galois theory
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Ricardo Miranda Martins [Orientador]
Jéfferson Luiz Rocha Bastos
Diego Sebastian Ledesma
Data de defesa: 15-12-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 15 de dezembro de 2015

e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). RICARDO MIRANDA MARTINS

Prof(a). Dr(a). JÉFFERSON LUIZ ROCHA BASTOS

Prof(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus pais Damiana e Benedito.
Para minha filha Alice e minha esposa Angélica.
In memoriam à minha irmã Monique.

Agradecimentos

À Deus, por ter-me concedido a benção de estar vivo.

À minha mãe, Damiana, e à meu pai, Benedito, por todo apoio em minha vida.

À minha esposa, Angélica, pela paciência e pelo companheirismo de sempre.

À minha filha, Alice, pela pessoa que me motiva a estudar sempre mais.

Ao meu orientador, Dr Ricardo Miranda Martins, por me aceitar orientar, pelo tema proposto e pela paciência em todo o trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual esse Mestrado dificilmente seria levado a termo.

E por fim, à todos os meus colegas do curso profmat, pela interação e coleguismo.

Resumo

Os métodos para obtenção de raízes de equações polinomiais é um conteúdo que merece mais atenção em níveis escolares básico e superior. O mecanismo manipulativo, sem o devido tratamento algébrico e geométrico, torna as resoluções artificiais e sem conexões entre os conceitos que formam a estrutura algébrica básica para o entendimento significativo da resolução de raízes de polinômios e o contexto aplicado. Ainda, nesta linha metodológica, a fundamentação histórica, se ausenta, devido a falta de sua importância em meios céleres, que não perpetuam a construção necessária para as conexões conceituais. O objetivo deste projeto é fazer um estudo sobre soluções de equações polinomiais em uma e duas variáveis. Iniciaremos com um estudo histórico sobre o desenvolvimento de fórmulas fechadas para determinação de raízes de polinômios de graus 2, 3 e 4. A seguir, faremos considerações sobre a impossibilidade de existência de fórmulas fechadas, dependendo somente dos coeficientes do polinômio, que determinem as raízes de polinômios de grau maior ou igual a 5. Faremos neste segmento um tratamento mais didático sobre o Teorema de Galois e estudaremos métodos para localização e contagem de raízes de polinômios de graus arbitrários. Por fim, dedicaremos a escrever uma sequência didática por meio de pequenos projetos para o ensino de equações algébricas e polinômios usando os recursos computacionais, teoremas de grandes matemáticos e suas problematizações históricas.

Palavras-chave: Polinômios, Equações algébricas, Teoria de Galois.

Abstract

The Methods for obtaining roots of polynomial equations is a content that deserves more attention in school basic and higher levels. The manipulative mechanism, without proper algebraic and geometric treatment, makes artificial resolutions and no connections between the concepts that form the basic algebraic structure to the meaningful understanding of the resolution of polynomial roots and the applied context. Still on this methodological approach, the historical reasons, is absent due lack of their importance in rapid means which do not perpetuate the construction required for the conceptual connections. This project's goal is to make a study of polynomial equations solutions in one and two variables. We begin with a historical study of the development of closed formulas for determining degrees of polynomial roots 2, 3 and 4. Next, we will make considerations about the impossibility of closed formulas existence, depending only on the coefficients of the polynomial, determining the polynomials roots degree higher or equal to 5. We'll do this segment a more didactic treatment on the Galois's theorem and we will study location methods and polynomial roots count of arbitrary degree. Finally, we will dedicate to write a didactic sequence through small projects for teaching algebraic equations and polynomials using computing resources, great mathematical theorems and their historical problematizations.

Keywords: Polynomials, Algebraic Equations, Galois's Theory.

Lista de Ilustrações

Sumário

Introdução

Considere a equação polinomial de grau 5:

$$x^5 - 2x^4 + 6x^3 - x^2 + 9x - 12 = 0.$$

A primeira estratégia seria uma fórmula resolutiva, mas dificilmente em nosso vasto pacote de fórmulas não encontraríamos nada para esta equação e isso vamos saber mais tarde o porquê. Vem em mente os métodos de fatoração, mas tentaríamos agrupar de todas as maneiras e não chegaríamos facilmente a uma forma fatorada que nos desse as soluções.

Recorremos aos divisores inteiros de 12, pois é o termo independente da indeterminada x, desta forma, teríamos 12 possibilidades: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$, o que levaria muito tempo, mas em muitos casos este recurso é eficaz, porém trabalhoso. E se as outras raízes não forem inteiras? Mas, como eu saberia que haveria esta possibilidade? Mas, e se esta raiz que eu tanto quero encontrar pelo método do divisor, não for inteira? No entanto, para esse caso temos a certeza que pelo menos uma raiz do polinômio é inteira, pois ele tem grau ímpar e é mônico. E ainda, se encontrarmos, o que fazer depois? Será que os sinais $+$ e $-$ dizem alguma coisa? Essa é poderosa: vamos completar quadrados separando as equações em dois membros, como Ferrari fazia!

Temos a nossa frente, um vasto conjunto de métodos e teorias para que possamos conduzir da melhor maneira e aceitarmos que para este tipo de equação e outras de grau maior que 5, não existem meios algébricos que utilizam as operações básicas e suas propriedades para resolvê-las. Galois, foi o percussor desta teoria, que vamos discutir e muitas outras que nos levam a minuciar e vasculhar os coeficientes de uma equação polinomial e por fim resolvê-las por métodos mais interessantes.

O nosso estudo começará pela álgebra dos polinômios, definição de polinômio, teorema fundamental da álgebra, raízes, multiplicidade, fórmulas fechadas, raízes de polinômios de grau 2, raízes de polinômios de grau 3, raízes de polinômios de grau 4, história envolvida no desenvolvimento, polinômios de grau 5 e superiores, as ideias de Galois, história de Galois, existência de raízes, teorema de Gauss-Lucas, teorema de van der Berg, teorema de Fourier-Budan, teorema de Sturm, teorema de Sylvester e o uso de recursos computacionais.

Os conceitos, polinômios e a obtenção de raízes de equações polinomiais, são alguns dos tópicos mais importantes da Matemática e fascinam imediatamente pela sua manipulação algébrica e pelos meios intrigantes metodológicos e ainda, por ser um conjunto de expressões que tem o papel fundamental em cálculo, geometria analítica, álgebra linear e como pré requisito e modelo para as diversas áreas da ciência e tecnologia. É de suma importância para a continuidade dos estudos em faculdades nas áreas de exatas.

Capítulo 1

Polinômios

"A Álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu."
D'Lambert

Encontramos os polinômios em diversos contextos, seja na Matemática ou em outras ciências. Servindo como modelos contínuos, simples e muitas vezes tratados em situações reais, por serem expressões fáceis de manipular, seja derivando-os ou integrando-os em intervalos reais. O nosso estudo sobre os polinômios se concentrará em suas propriedades básicas em relação aos seus coeficientes e às suas operações básicas, como adição, multiplicação e divisão. Neste capítulo vamos conceituar anel, corpos e anéis de polinômios seguindo uma construção conceitual e muitos exemplos. Enfim, daremos as definições formais juntamente com as devidas proposições sem muita imersão, pois não é um trabalho específico de álgebra moderna, isto é, estamos interessados na construção dos polinômios e precisamos de conceitos que estruturam de maneira precisa seus elementos constituintes e um sistema numérico em que possamos operar e manipular segundo suas propriedades.

1.1 Anel

É um conceito relacionado diretamente aos coeficientes dos polinômios e suas raízes. Precisamos antes de tudo, saber detalhadamente algumas noções desses conjuntos numéricos.

Definição 1.1.1. Um anel é um conjunto munido de duas operações binárias, que vamos denotar pelos símbolos $\oplus$ e $\odot$, chamadas de uma adição e uma multiplicação, respectivamente ou dizemos que um anel comutativo com unidade (A,$\oplus$,$\odot$) é o conjunto A que verifica as condições a seguir.

Sejam a,b,c $\in A$, temos:

1. A operação de adição é associativa

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c).$$

2. A operação de adição é comutativa

$$a \oplus b = b \oplus a.$$

3. A operação de adição tem um elemento neutro, ou seja, existe um elemento $0 \in A$, tal que

$$a \oplus 0 = 0 \oplus a = a.$$

4. Todo elemento de A possui um simétrico, isto é, para todo $a \in A$, existe um a, tal que

$$a \oplus a = a \oplus a = 0.$$

5. A operação de multiplicação é associativa

$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c).$$

6. A operação de multiplicação é comutativa

$$a \odot b = b \odot a.$$

7. A operação de multiplicação tem um elemento neutro, isto é, existe um elemento $e \in A$, $e \neq 0$, tal que

$$a \odot e = e \odot a = a.$$

8. As operações de multiplicação e adição satisfazem as leis distributivas

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$$

e

$$(b \oplus c) \odot a = b \odot a \oplus c \odot a.$$

Exemplo 1.1.1. *O conjunto dos números inteiros.*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

O conjunto dos números inteiros, possui a estrutura de anel.

Exemplo 1.1.2. *O conjunto dos números racionais é um anel e são expressas por:*

$$\mathbb{Q} = \{a \in \mathbb{Q};\ a = \frac{b}{c};\ b, c \in \mathbb{Z}\, e\, c \neq 0\}.$$

Diferentemente dos inteiros, os racionais $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$, é um anel mais completo, ou seja, trata-se de um corpo, pois possui inversos o que não acontece com os inteiros que só têm os inversos 1 e -1. A propriedade que faz de um anel um corpo é expressa a seguir.

Seja $\mathbb{K}$ um conjunto, diremos que $\mathbb{K}$ é um corpo se possuir todas as operações já tratadas nesta seção e a seguinte propriedade:

9. Todo elemento não nulo a de $\mathbb{K}$ possui inverso multiplicativo, isto é, existe a' em $\mathbb{K}$ tal que,
$$a \odot a' = 1.$$

Desta forma, todo corpo é um anel, mas nem todo anel é um corpo. Ainda, nesta linha, podemos definir a operação de subtração, em que

$$a \ominus b = a \oplus (-b).$$

Um conceito que deteremos nossa atenção pelo seu poder algébrico será o domínio de integridade, isto é, seja um anel $\mathbb{A}$, para todo $a, b \in \mathbb{A}$, em que $\mathbb{A}$ seja comutativo é um domínio de integridade se, e somente se,

$$\forall\ a, b \in \mathbb{A},\ a \odot b = 0 \implies a = 0\ ou\ b = 0.$$

Equivale também dizer que, $\mathbb{A}$ é um domínio de integridade se, e somente se,

$$\forall\ a, b \in \mathbb{A}\backslash\{0\} \implies a \odot b \neq 0.$$

Exemplo 1.1.3. *O conjunto dos números reais é um anel comutativo com unidade e é chamado de anel de integridade. Denotamos este anel por* $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$.

Exemplo 1.1.4. *O conjunto dos números complexos é um anel comutativo com unidade e é chamado de anel de integridade. Denotamos este anel por* $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$.

Exemplo 1.1.5. *Os anéis* $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *e* $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ *são corpos.*

Observação 1.1.1. *Nos anéis* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *o elemento zero, não possui inverso.*

Agora estamos prontos para conceituar anéis de polinômios, apesar de não termos definidos subanéis, homorfismos, isomorfimos, corpos de frações e ideais. Ressaltamos, novamente que estamos interessados nos anéis de polinômios, mas trataremos paralelamente aos conceitos não vistos, dando sustentação ao nosso objetivo.

1.2 Anéis de Polinômios

Vamos considerar K um corpo infinito. Podemos definir anéis de polinômios da seguinte forma:

Definição 1.2.1. O conjunto de polinômios sobre K, em uma varável x denotado por $K[x]$ sobre o corpo K, é definido como

$$K[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n; a_i \in K \ e \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Em que os a_i são os coeficientes pertencentes a K e x, a variável ou indeterminada.

No andamento desta seção vamos mostrar que $K[x]$, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, tem realmente a estrutura de um anel, no entanto, vamos definir mais alguns detalhes importantes sobre esse anel de estudo. Cabe alertar, que denotaremos tais polinômios pelos símbolos $p(x)$,$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, entre outros, sendo elementos do anel de polinômios, ou melhor, os tais polinômios que estudaremos, assim escreveremos um polinômio da seguinte forma:

Exemplo 1.2.1. *Seja K um corpo, o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n; a_i \in K$ e $n \in \mathbb{N}$ é um elemento do anel de polinômios em $K[x]$.*

1.2.1 Adição e Multiplicação de Polinômios

Sejam K um corpo e $K[x]$ o conjunto de polinômios sobre K, vamos definir adição e multiplicação de polinômios.

Definição 1.2.2. Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$ em $K[x]$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_jx^j$ em $K[x]$. Definimos adição de polinômios como segue

$$f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j + \sum_{j=0}^{n} b_jx^j = \sum_{j=0}^{n} c_jx^j, \ em \ que \ c_j = a_j + b_j, \ para \ 0 \leqslant j \leqslant n$$

onde, $\sum_{j=0}^{n} c_jx^j$ que é o resultado da adição é chamado de soma.

Definição 1.2.3. Sejam $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$ em $K[x]$ e $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$ em $K[x]$. Definimos multiplicação de polinômios como segue

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j \cdot \sum_{j=0}^{m} b_jx^j = \sum_{j=0}^{n+m} c_jx^j$$

em que

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 \cdot b_0 \\
c_1 &= a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \\
c_2 &= a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0 \\
&\vdots \\
c_j &= a_0 \cdot b_j + a_1 \cdot b_j + \ldots + a_j \cdot b_0 = \sum_{\alpha+\beta=j} a_\alpha \cdot b_\beta \\
&\vdots \\
c_{n+m} &= a_n \cdot b_m.
\end{aligned}$$

Da multiplicação de polinômios obtemos o resultado $\sum_{j=0}^{n+m} c_j x^j$ que é chamado de produto.

Teorema 1.2.4. Dado um corpo K, o conjunto dos polinômios $K[x]$, munido das operações de adição e multiplicação de polinômios, é um anel.

Demonstração. Sejam os polinômios $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ pertencentes a $K[x]$ e supondo que K seja um anel vamos mostrar que:

1. A adição de polinômios é associativa, pois

$$\begin{aligned}
[f(x) + g(x)] + h(x) &= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n] \\
&\quad +(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n) \\
&= [(a_0 + b_0) + c_0] + [(a_1 + b_1) + c_1]x + [(a_2 + b_2) + c_2]x^2 \\
&\quad + \ldots + [(a_n + b_n) + c_n]x^n] \\
&= [a_0 + (b_0 + c_0)] + [a_1 + (b_1 + c_1)]x + [a_2 + (b_2 + c_2)]x^2 \\
&\quad + \ldots + [a_n + (b_n + c_n)]x^n] \\
&= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) + [(b_0 + c_0)] + [(b_1 + c_1)]x \\
&\quad +[(b_2 + c_2)]x^2 + \ldots + [(b_n + c_n)]x^n] \\
&= f(x) + [g(x) + h(x)].
\end{aligned}$$

2. A adição de polinômios é comutativa, pois

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n) \\ &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n \\ &= (b_0+a_0)+(b_1+a_1)x+(b_2+a_2)x^2+\ldots+(b_n+a_n)x^n \\ &= (b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n)+(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n) \\ &= g(x)+f(x). \end{aligned}$$

3. Existe um elemento neutro da adição, que chamaremos de polinômio identicamente nulo, que pode ser escrito como:

$$\eta(x)=0+0x+0x^2+\ldots+0x^n \ \in K[x].$$

Como K é um anel, temos

$$\begin{aligned} f(x)+\eta(x) &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)+(0+0x+0x^2+\ldots+0x^n) \\ &= (a_0+0)+(a_1+0)x+(a_2+0)x^2+\ldots+(a_n+0)x^n \\ &= (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Pela comutatividade, temos que é verdadeira $f(x)+\eta(x)=\eta(x)+f(x)=f(x)$.

4. Todo polinômio em $K[x]$ possui um simétrico em $K[x]$, pois

$$\begin{aligned} f(x)+(-f(x)) &= (a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)+(-a_0-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_nx^n) \\ &= (a_0-a_0)+(a_1-a_1)x+(a_2-a_2)x^2+\ldots+(a_n-a_n)x^n \\ &= 0+0x+0x^2+\ldots+0x^n \\ &= \eta(x). \end{aligned}$$

Pela comutatividade, temos que é verdadeira $f(x)+(-f(x))=(-f(x))+f(x)=\eta(x)$.

5. A multiplicação de polinômios é associativa, pois

$$\begin{aligned}
[f(x)\cdot g(x)]\cdot h(x) &= \left[\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)\right] \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} c_j x^j\right)\\
&= \left[\sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=\alpha+\beta} a_\alpha \cdot b_\beta\right) x^j\right] \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} c_j x^j\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n+m+p}\left(\sum_{j=\alpha+\beta+\gamma} a_\alpha \cdot b_\beta \cdot c_\gamma\right) x^j\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \sum_{j=0}^{m+p}\left(\sum_{j=\beta+\gamma} b_\beta \cdot c_\gamma\right) x^j\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left[\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p} c_j x^j\right)\right]\\
&= f(x)\cdot[g(x)\cdot h(x)].
\end{aligned}$$

6. A multiplicação de polinômios é comutativa, pois

$$\begin{aligned}
f(x)\cdot g(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=\alpha+\beta} a_\alpha \cdot b_\beta\right) x^j\\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=\beta+\alpha} b_\beta \cdot a_\alpha\right) x^j\\
&= \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)\\
&= g(x)\cdot f(x).
\end{aligned}$$

7. Existe um elemento neutro da multiplicação que vamos escrever como $\epsilon(x) = 1 \in K[x]$. De fato, pois

$$\begin{aligned}
f(x)\cdot \epsilon(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot 1\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Pela comutatividade, temos que é verdadeira $f(x)\cdot\epsilon(x) = \epsilon(x)\cdot f(x) = f(x)$.

8. É válida a distributividade da multiplicação em relação a adição. Supondo que

$p = m$, temos

$$\begin{aligned}
f(x)\cdot(g(x)+h(x)) &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left(\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) + \left(\sum_{j=0}^{p} c_j x^j\right)\right)\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} (b_j + c_j) x^j\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{j=\alpha+\beta} a_\alpha \cdot (b_\beta + c_\beta)\right) x^j\\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{j=\alpha+\beta} a_\alpha \cdot b_\beta + a_\alpha \cdot c_\beta\right) x^j\\
&= \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{j=\alpha+\beta} a_\alpha \cdot b_\beta\right) x^j + \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{j=\alpha+\beta} a_\alpha \cdot c_\beta\right) x^j\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) + \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} c_j x^j\right)\\
&= f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot h(x).
\end{aligned}$$

Portanto, seja um anel K, o conjunto dos polinômios $K[x]$, munidos das operações de adição e multiplicação de polinômios, é um anel. $\square$

Exemplo 1.2.2. *Sejam* $f(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$ *e* $g(x) = x^5 + 12x^3 - 7x$ *em* $K[x]$. *Vamos calcular* $f(x)+g(x)$ *e* $f(x)\cdot g(x)$. *Na adição de polinômios adicionamos os coeficientes correspondentes às variáveis(indeterminada* x*) de mesmo grau, ou seja, de mesmo expoente, assim*

$$\begin{aligned}
f(x)+g(x) &= (2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1) + (x^5 + 12x^3 - 7x)\\
&= (0+1)\cdot x^5 + (2+0)x^4 + (1+12)x^3 + (-5+0)x^2 + (0+(-7))x + 1\\
&= x^5 + 2x^4 + 13x^3 - 5x^2 - 7x + 1 \in K[x].
\end{aligned}$$

Na operação de multiplicação dos polinômios vamos utilizar a propriedade distributiva, *assim*

$$
\begin{aligned}
f(x)\cdot g(x) &= (2x^4+x^3-5x^2+1)\cdot(x^5+12x^3-7x)\\
&= 2x^4\cdot(x^5+12x^3-7x)+x^3\cdot(x^5+12x^3-7x)+\\
&\quad +(-5x^2)\cdot(x^5+12x^3-7x)+1\cdot(x^5+12x^3-7x)\\
&= (2x^9+24x^7-14x^5)+(x^8+12x^6-7x^4)+\\
&\quad +(-5x^7-60x^5+35x^3)+(x^5+12x^3-7x)\\
&= 2x^9+x^8+(24-5)x^7+12x^6+(-14-60+1)x^5-7x^4+\\
&\quad +(35+12)x^3-7x\\
&= 2x^9+x^8+19x^7+12x^6-73x^5-7x^4+47x^3-7x\in K[x].
\end{aligned}
$$

Nos próximos exemplos ficará mais notável a aplicação das propriedades operatórias dos coeficientes segundos suas variáveis (determinada x). Adotaremos uma tabela e observaremos também que os termos precisam ser completados colocando um zero para que o termo de mesmo expoente que está faltando complete a coluna, da direita para esquerda e abaixo, um do outro.

Exemplo 1.2.3. *Sejam* $f(x)=x^6+2x^5+5x^4-2x^3+x^2-7x+3$, $g(x)=6x^4+7x^3+4x^2+2x-1$, $h(x)=-2x^2+3x+4$ *e* $i(x)-3x^3+2$ *em* $K[x]$. *Calcularemos* $f(x)+g(x)+h(x)+i(x)$ *usando uma tabela e completando os termos ausentes do polinômio* $i(x)$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & x^6 & + & 2x^5 & + & 5x^4 & - & 2x^3 & + & x^2 & - & 7x & + & 3\\
 & & & & - & 6x^4 & + & 7x^3 & + & 4x^2 & + & 2x & - & 1\\
 & & & & & & & & - & 2x^2 & + & 3x & + & 4\\
(+) & & & & & & - & 3x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & + & 2\\
\hline
 & x^6 & + & 2x^5 & - & x^4 & + & 2x^3 & + & 3x^2 & - & 2x & + & 8
\end{array}
$$

Portanto, $f(x)+g(x)+h(x)+i(x)=x^6+2x^5-x^4+2x^3+3x^2-2x+8.$

Observe que o polinômio $i(x)$ possui dois termos explícitos, $-3x^3$ de expoente 3 e 2 de expoente zero. Desta forma completamos com as potências de x de expoente 2 e 1.

Exemplo 1.2.4. *Sejam* $f(x)=2x^4-x^2-1$ *e* $g(x)=x^3+3x^2+x+4$ *em* $K[x]$. *Vamos calcular* $f(x)\cdot g(x)$ *usando uma tabela.*

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrr}
 & & & & & & & 2x^4 & + & 0x^3 & - & x^2 & + & 0x & - & 1 \\
 & & & & & (\times) & & & & x^3 & + & 3x^2 & + & x & + & 4 \\
\hline
 & & & & & & & 8x^4 & + & 0x^3 & - & 4x^2 & + & 0x & - & 4 \\
 & & & & & 2x^5 & + & 0x^4 & - & x^3 & + & 0x^2 & - & x & & \\
 & & & 6x^6 & + & 0x^5 & - & 3x^4 & + & 0x^3 & - & 3x^2 & & & & \\
(+) & 2x^7 & + & 0x^6 & - & x^5 & + & 0x^4 & - & x^3 & & & & & & \\
\hline
 & 2x^7 & + & 6x^6 & + & x^5 & + & 5x^4 & - & 2x^3 & - & 7x^2 & - & x & - & 4
\end{array}
$$

Portanto, $f(x) \cdot g(x) = 2x^7 + 6x^6 + x^5 + 5x^4 - 2x^3 - 7x^2 - x - 4.$

1.2.2 Grau de um polinômio

Denotaremos o grau de um polinômio por ∂, isto é, se um polinômio f for de grau 3, então $\partial(f) = 3$.

Sejam f e g polinômios não nulos, seguem as propriedades:

- Sejam f e g polinômios não nulos em K, um corpo, temos

$$\partial(f + g) \leq max\{\partial(f),\, \partial(g)\}.$$

- Sejam f e g polinômios não nulos em K, um corpo, temos

$$\partial(f \cdot g) = \partial(f) + \partial(g).$$

Exemplo 1.2.5. *Consideremos os polinômios* $f(x) = 2x^4 - x^3 + x$ *e* $g(x) = x^3 + x^2 + 1$. *Como* $\partial(f) > \partial(g)$, *então* $\partial(f + g) = 4$.

Exemplo 1.2.6. *Sejam* K *um anel de integridade e* $f,\, g \in K[x]$ *tais que* $\partial(f + g) = 6$ *e* $\partial(f - g) = 5$. *Vamos determinar* $\partial(f \cdot g)$.

Solução: Como a soma das funções resulta em um polinômio de grau 6 e a diferença em um polinômio de grau 5, então o coeficiente da indeterminada de maior grau de ambas as funções são simétricas e mais, as funções f *e* g *possuem o mesmo grau, isto é,* $\partial(f) = \partial(g) = 6$. *Portanto,* $\partial(f \cdot g) = 6 + 6 = 12$.

Observação 1.2.1. *Não definimos o grau de um polinômio nulo,* $f(x) = 0$.

Exemplo 1.2.7. *Seja o polinômio não identicamente nulo,* $f(x) = 5$ *em* $K[x]$ *em que chamamos de polinômio constante. Seu grau é* 0*, pois não é nulo. Portanto,* $\partial(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = a \neq 0,\, a \in K$.

1.2.3 Divisão de Polinômios

Teorema 1.2.5. (Algoritmo da Divisão de Polinômios) Sejam K um corpo e $f(x)$, $g(x)$ $\in K[x]$ dois polinômios com $g(x)$ não nulo, então existem polinômios $q(x)$, $r(x) \in K[x]$ tais que $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ com $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ ou $r(x) = 0$.

A demonstração da existência pode ser encontrada com detalhes em [**4**].

Observação 1.2.2. *Sejam K um corpo e $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ não nulos, $g(x)$ divide $f(x)$ se existir $q(x)$, tal que $f(x) = g(x) \cdot q(x)$. Caso contrário, pelo algoritmo de Euclides, vai existir um $r(x) \in K[x]$, de modo que $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$.*

Observação 1.2.3. *Ao dividirmos $f(x)$ por $g(x)$, dois polinômios em $K[x]$ não nulos, quando $r(x) = 0$ dizemos que $g(x)$ divide $f(x)$ e denotamos $g \mid f$.*

A partir do teorema (Algoritmo da Divisão de Polinômios), à relação de divisibilidade entre polinômios são atribuídas as seguintes propriedades:

Sejam K um corpo e os polinômios $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$, $q(x) \in K[x]$.

1. Se $h(x) \mid f(x)$ e $f(x) \mid g(x)$, então $h(x) \mid g(x)$.
2. Se $h(x) \mid f(x)$, então $h(x) \mid f(x)g(x)$.
3. Se $h(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid g(x)$, então $h(x) \mid (f(x) + g(x))$ e $h(x) \mid (f(x) - g(x))$.
4. Se $h(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid g(x)$, então $h(x) \mid ((p(x)f(x) + q(x)g(x))$.

Demonstração. Nas demonstrações omitiremos a variável x e partiremos das definições apresentadas até agora.

1. Como $h \mid f$, tem-se que $f = qh$. Por outro lado, como $f \mid g$, tem-se que $g = pf$. Então,

$$\begin{aligned} g &= pf \\ &= p(qh) \\ &= (pq)h. \end{aligned}$$

Desta forma, concluímos que $h \mid g$.

2. Como $h \mid f$, tem-se que $f = qh$. Multiplicando ambos os membros da equação por g, temos

$$\begin{aligned} f &= qh \\ fg &= (qh)g \\ &= (qg)h. \end{aligned}$$

   Portanto, $h \mid fg$.

3. Como $h \mid f$, tem-se que $f = qh$. Por outro lado, como $h \mid g$, tem-se que $g = ph$. Então,

$$\begin{aligned} f + g &= qh + ph \\ &= (q + p)h. \end{aligned}$$

   Para $(f - g)$ a demonstração é análoga.

   Portanto, $h \mid (f \pm g)$.

4. Como $h \mid f$, tem-se que $f = qh$. Por outro lado, como $h \mid g$, tem-se que $g = ph$. Então,

$$\begin{aligned} pf + qg &= pqh + qph \\ &= (pq + qp)h. \\ &= (2pq)h. \end{aligned}$$

   Portanto, $h \mid (pf + qg)$. □

Vamos usar um dispositivo muito conhecido para fazer a divisão de dois polinômios.

Exemplo 1.2.8. *Considere os polinômios* $f(x) = x^4 - 12x^2 + 3x^3 - 6x + 20$ *e* $g(x) = x^2 + 3x - 10$*. Vamos dividir* f *por* g*.*

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr|l}
 & x^4 & + & 3x^3 & - & 12x^2 & - & 6x & + & 20 & x^2 + 3x - 10 \\ \cline{11-11}
- & x^4 & - & 3x^3 & + & 10x^2 & & & & & x^2 - 2x \\ \cline{1-6}
 & & & & - & 2x^2 & - & 6x & + & 20 & \\
 & & & & + & 2x^2 & + & 6x & - & 20 & \\ \cline{5-10}
 & & & & & & & & & 0 &
\end{array}.
$$

Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$x^4 - 12x^2 + 3x^3 - 6x + 20 = (x^2 + 3x - 10)(x^2 - 2x) + 0.$$

Assim, como $r = 0$, então $g|f$.

Exemplo 1.2.9. *Agora considere os polinômios $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 10$ e $g(x) = x - 1$. Vamos dividir f por g.*

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & x^3 & + & 2x^2 & - & 7x & + & 10 & x - 1 \\ \cline{9-9}
- & x^4 & + & x^2 & & & & & x^2 + 3x - 4 \\ \cline{1-4}
 & & & 3x^2 & - & 7x & & & \\
 & & - & 3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & - & 4x & + & 10 & \\
 & & & & & 4x & - & 4 & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 6 &
\end{array}
$$

Pelo algoritmo de Euclides, temos

$$x^3 + 2x^2 - 7x + 10 = (x - 1)(x^2 + 3x - 4) + 6.$$

Assim, como $r = 6$, então $g \nmid f$.

1.2.4 Raízes de Polinômios

Nos exemplos seguintes, nos preocupamos em explicitar o anel de polinômios para que pudéssemos fatorar e expressar as raízes dos polinômios dados. Vale ressaltar de antemão as extensões exploradas para que exista tais raízes em cada exemplo, que são

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Vamos supor um corpo K, tal que um polinômio $f(x)$ em $K[x]$ tenha extensão de acordo com a necessidade do campo numérico na obtenção das raízes.

Definição 1.2.6. Sejam K um anel e um polinômio $f(x) \in K[x]$. Chamamos $\alpha \in K$ de raíz ou zero de $f(x)$ em K se $f(\alpha) = 0$.

Exemplo 1.2.10. *Seja $f(x) = x^3 - x^2 + 4x + 6 \in \mathbb{Z}[x]$, sabemos que $\alpha = -1$ é uma raíz inteira de f, pois $f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + 6 = 0$.*

Proposição 1.2.1. *Sejam K um corpo, um polinômio $f(x) \in K[x]$ e $\alpha \in K$. Então existe um polinômio $q(x)$ tal que $f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)$.*

Demonstração. Pelo teorema (Algoritmo da Divisão de Polinômios), podemos escrever

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r(x) \text{ com } \partial(r(x)) < \partial(x - \alpha) \text{ ou } r(x) = 0.$$

Seja $r(x) < \partial(x - \alpha) = 1$, então $r(x)$ tem grau zero, assim podemos escrever $r(x) = a \in K$, logo

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + a.$$

Fazendo $x = \alpha$, temos

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= q(\alpha)(\alpha - \alpha) + a \\ &= 0 + a \\ &= a. \end{aligned}$$

Portanto, temos que $f(\alpha) = a$ e como $r(x)$ é constante, segue que $r(x) = f(\alpha) = a$, então existe um polinômio $q(x)$ tal que $f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)$. □

Corolário 1.2.1. *Sejam K um corpo, um polinômio $f(x) \in K[x]$ e $\alpha \in K$. Então α é uma raiz de $f(x)$ se e somente, se $(x - \alpha) \mid f(x)$.*

Demonstração. Da proposição 1.2.1, temos que

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha),$$

segue que α é uma raiz de $f(x) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - \alpha)q(x) \Leftrightarrow (x - \alpha) \mid f(x)$. □

Exemplo 1.2.11. *Vamos calcular o resto da divisão de* $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + 5x - 12$ *por* $g(x) = x - 3$.

Solução: A raiz de $g(x)$ *é* 3. *Fazendo,* $f(3) = 3^4 - 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 12 = 75$. *Portanto, pela preposição (1.2.1),* $r(x) = 75$.

Proposição 1.2.2. *Seja* K *um corpo e seja* $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ *um polinômio não nulo em* $K[x]$ *de grau* n. *Então, o número máximo de raízes de* $f(x)$ *em* K *é igual a* $\partial(f(x)) = n$.

Demonstração. Suponhamos $\alpha \in K$ uma raiz de $f(x)$. Pelo algoritmo da divisão, existe um $q(x)$, tal que $f(x) = q(x) \cdot (x - \alpha)$ e consequentemente $\partial(q(x)) = n - 1$. Se $n = 0$, $f(x)$ não possui raízes em K. Usando indução, sobre $\partial(f(x) = n$, $\partial(q(x)) < \partial(f(x)) = n$, logo $q(x)$ possui $n - 1$ raízes no máximo e portanto $f(x)$ possui n raízes. $\square$

Um polinômio de grau 3, terá no máximo 3 raízes e um polinômio de grau 6 terá por sua vez, no máximo 6 raízes. Mas não sabemos de imediato que tipo de raízes resultarão e mais se elas são as mesmas, ou seja, um polinômio de grau 4, por exemplo, pode ter 4 raízes iguais. Isso se chama multiplicidade de raízes e veremos sua definição agora.

Definição 1.2.7. Sejam K um corpo e $\alpha \in K$ uma raiz do polinômio $f(x)$ em $K[x]$. A multiplicidade da raiz α é o número inteiro positivo m, tal que $(x - \alpha)^m \mid f(x)$ e $(x - \alpha)^{m+1} \nmid f(x)$.

Exemplo 1.2.12. *Considere o polinômio* $p(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24$ *em* $K[x]$. *Sabemos que este polinômio possui no máximo* 5 *raízes em* K. *Vamos utilizar o aplicativo geogebra para exibir o gráfico e analisarmos suas raízes.*

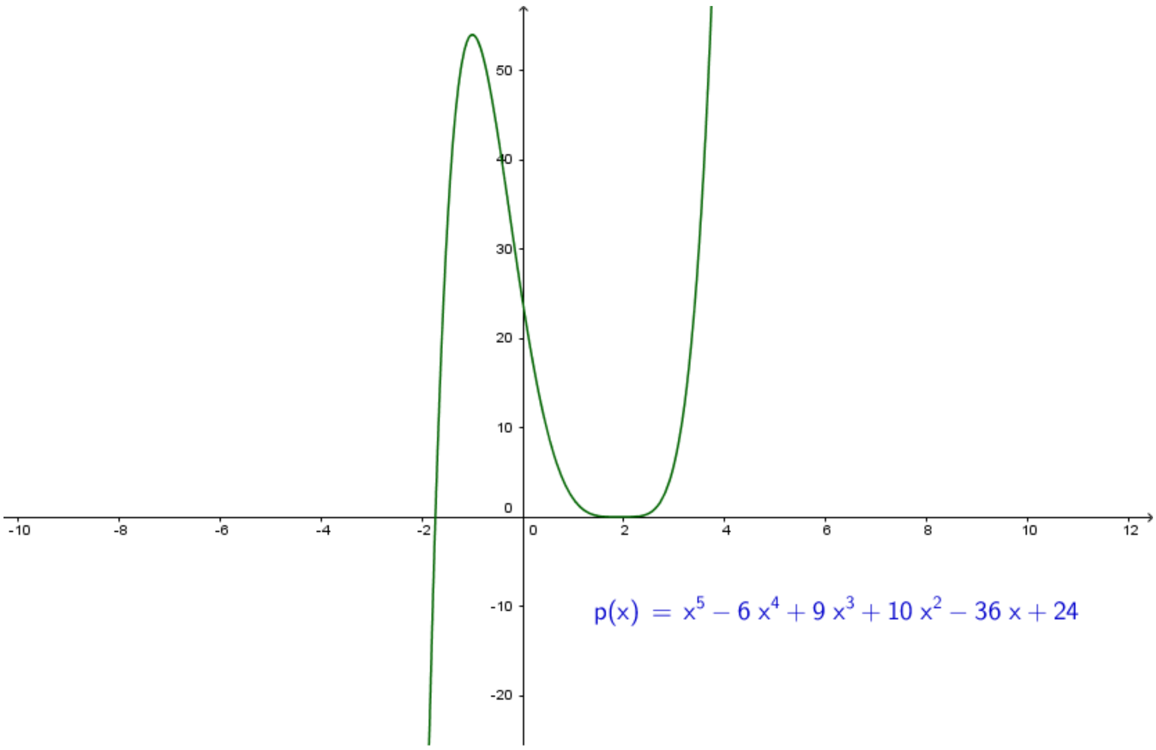

Figura 1.1: Gráfico gerado pela função polinomial $p(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24$.

Observe que no intervalo $(-2, 0)$ *temos uma raiz real, mas no intervalo* $(0, 4)$ *a curva do gráfico parece tangenciar a reta das abscissas. Vamos ampliar este intervalo para ver o que pode estar acontecendo.*

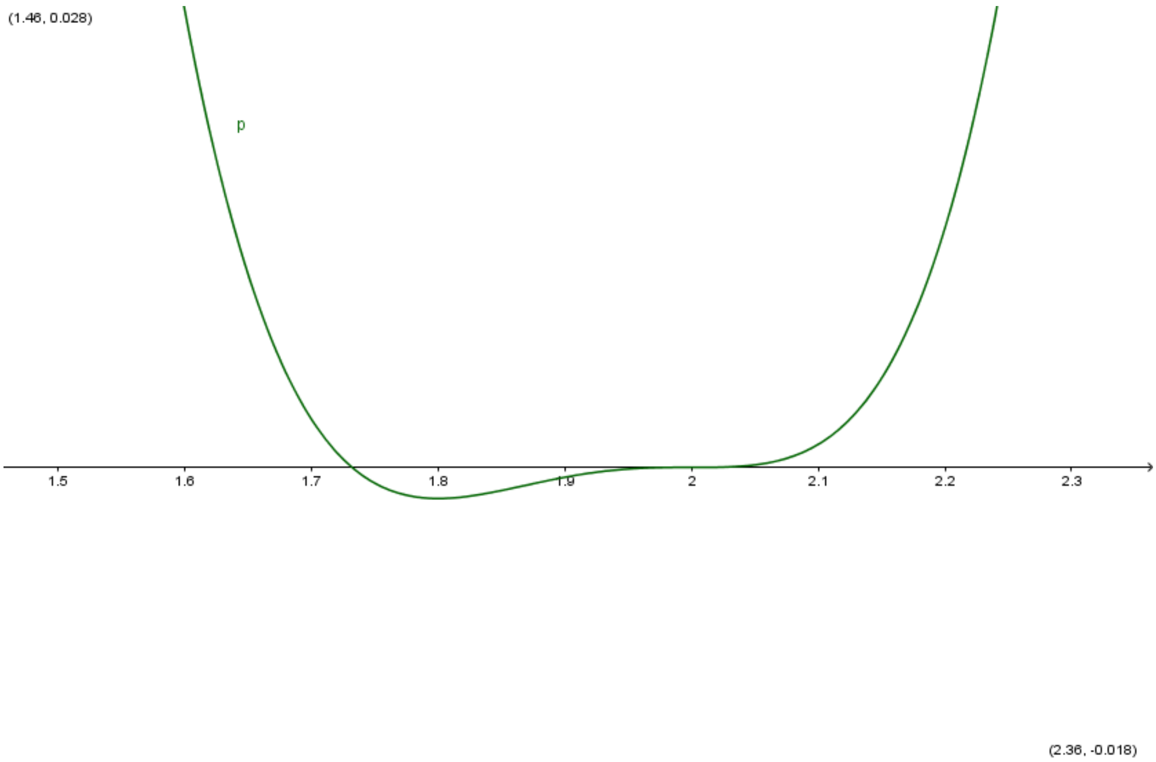

Figura 1.2: Gráfico ampliado da função polinomial $p(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 36x + 24$.

Nesta ampliação aparece mais uma raiz real no intervalo $(1.7, 1.8)$, *mas ainda há uma aparente tangencia no ponto* $(2, 0)$. *Como ainda estamos no meio da jornada da obtenção de recursos para resolver um polinômio de grau* n, *por sorte vamos testar o valor* 2 *e mostrarmos se ela é uma raiz múltipla ou não.*

Fazendo o teste da raiz, temos

$$p(2) = (2)^5 - 6(2)^4 + 9(2)^3 + 10(2)^2 - 36(2) + 24 = 32 - 96 + 72 + 40 - 72 + 24 = 0.$$

Oras, se 2 *é uma raiz de* $p(x)$ *e a curva ao cruzar a segunda raiz no intervalo* $(1.7, 1.8)$ *é crescente e vai ter que passar pelo ponto* $(2, 0)$ *podemos ter três possibilidades, que são:*

- *Duas raízes reais e a raiz* 2 *entre elas,*
- *A raiz* 2 *ter multiplicidade* 3,
- *A raiz* 2 *e duas complexas antes ou depois dela.*

Vamos arriscar a possibilidade de haver a multiplicidade da raiz, assim teremos de dividir o polinômio $p(x)$ *por* $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, *que nos dará o um quociente* $q(x)$ *de grau* 2 *e resto zero, por sorte, então*

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & x^5 & - & 6x^4 & + & 9x^3 & + & 10x^2 & - & 36x & + & 24 & x^3 \quad -6x^2 \quad +12x \quad -8 \\ \cline{13-13}
- & x^5 & + & 6x^4 & - & 12x^3 & + & 8x^2 & & & & & x^2 \ -3 \\ \cline{1-8}
 & & & & - & 3x^3 & + & 18x^2 & - & 36x & + & 24 & \\
 & & & & + & 3x^2 & - & 18x^2 & + & 36x & - & 24 & \\ \cline{5-12}
 & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}.$$

O quociente $q(x) = x^2 - 3$ *é de grau* 2 *e possui raízes reais* $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ *que são os valores entre os intervalos* $(-2, 0)$ *e* $(1.7, 1.8)$ *exibidos nos gráficos das figuras (1.1) e (1.2). A divisão garantiu a multiplicidade* 3 *da raiz* 2, *pois resultou num resto igual a zero.*

Observação 1.2.8. Uma raiz é simples quando sua multiplicidade for igual a 1 e uma raiz é múltipla quando sua multiplicidade for maior que 1.

Para um estudo mais elaborado das multiplicidades de raízes de polinômios vamos enunciar um dispositivo interessante, o Algoritmo de Briot-Ruffini que é um recurso de grande importância em sua, utilização para dividir, um polinômio $f(x)$ de grau n por $(x - \alpha)$ e consequentemente obter um quociente $q(x)$ de grau $(n - 1)$ e resto r.

1.2.5 Algoritmo de Briot-Ruffini

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ em $K[x]$, o nosso objetivo é encontrar b_0, b_1, $\ldots$, $b_{n-1} \in K$ tais que $q(x) = b_0 + a_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$ em $K[x]$ que é o quociente da divisão de $f(x)$ por $(x - \alpha)$. Indicando o resto por r e pelo princípio de identidade de polinômios, temos que

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= b_{n-1} \cdot \alpha + a_{n-1} \\
b_{n-3} &= b_{n-2} \cdot \alpha + a_{n-2} \\
&\vdots \\
b_1 &= b_2 \cdot \alpha + a_2 \\
b_0 &= b_1 \cdot \alpha + a_1 \\
r &= b_0 \cdot \alpha + a_0.
\end{aligned}$$

O algoritmo pode ser expresso por meio do seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccccc|c}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 & \alpha \\
\hline
b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_1 & b_0 & \text{r} &
\end{array}.$$

Em que o coeficiente líder a_n é repetido logo abaixo, onde podemos concluir que o coeficiente $b_{n-1} = a_n$. Em seguida, para obtermos os outros coeficientes $b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_1, b_0$ e o resto r, seguimos o seguinte procedimento:

(i) Como $b_{n-1} = a_n$, ao baixá-lo, multiplicamos por α e subtraímos por a_{n-1} que esta na linha de cima obtendo o resultado b_{n-2} que colocamos na linha de baixo, na mesma coluna do coeficiente a_{n-1}.

(ii) Para obtermos o coeficiente b_{n-3}, multiplicamos α por b_{n-2} e subtraímos por a_{n-2}, e o colocamos na linha de baixo, na mesma coluna do coeficiente a_{n-2}.

(iii) Seguimos este mesmo processo até obtermos o coeficiente b_0 e em seguida fazendo mais uma vez o processo anterior obtemos, o resto r.

Demonstração. Como $f(x) = q(x)(x-\alpha) + r$, temos

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n &= (b_0 + a_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)(x-\alpha) + r \\ &= (r - \alpha b_0) + (b_0 - \alpha b_1)x + (b_1 - \alpha b_2)x^2 + \end{aligned}$$
$$+ \ldots + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1} + b_{n-1}x^n.$$

daí, igualando os polinômios, temos

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - b_{n-1} \cdot \alpha \\ a_{n-2} &= b_{n-3} - b_{n-2} \cdot \alpha \\ &\vdots \\ a_2 &= b_1 - b_2 \cdot \alpha \\ a_1 &= b_0 - b_1 \cdot \alpha \\ a_0 &= r - b_0 \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Consequentemente, ao inverter as equações, temos

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= b_{n-1} \cdot \alpha + a_{n-1} \\ b_{n-3} &= b_{n-2} \cdot \alpha + a_{n-2} \\ &\vdots \\ b_1 &= b_2 \cdot \alpha + a_2 \\ b_0 &= b_1 \cdot \alpha + a_1 \\ r &= b_0 \cdot \alpha + a_0. \end{aligned}$$

Obtemos assim, os coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ e o resto numérico, r em função dos coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. □

Exemplo 1.2.13. *Vamos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini, para dividir o polinômio $f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 18x - 8 \in K[x]$ pelo polinômio $p(x) = x - 4 \in K[x]$.*

Solução: Vamos primeiramente coletar os coeficientes de $f(x)$ e lembrar que o número que vamos utilizar para o lugar de α é a raiz de $p(x) = x - 4$ que é o valor 4.

$$\begin{aligned} a_4 &= 2, \\ a_3 &= -9, \\ a_2 &= 0, \\ a_1 &= 18, \\ a_0 &= -8. \end{aligned}$$

Montamos o esquema com os coeficientes e o valor 4.

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -9 & 0 & 18 & -8 & 4 \\ \hline & & & & & \end{array}.$$

Baixamos o coeficiente líder para a linha de baixo, então

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -9 & 0 & 18 & -8 & 4 \\ \hline 2 & & & & & \end{array}.$$

Começamos agora o procedimento do dispositivo, que é multiplicar 4 *por* 2 *e subtrair o resultado por* -9*, que nos dá* -1*, assim*

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -9 & 0 & 18 & -8 & 4 \\ \hline 2 & -1 & & & & \end{array}.$$

Seguindo o procedimento anterior para os outros coeficientes, temos

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -9 & 0 & 18 & -8 & 4 \\ \hline 2 & -1 & -4 & & & \end{array},$$

ainda,

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -9 & 0 & 18 & -8 & 4 \\ \hline 2 & -1 & -4 & 2 & & \end{array}.$$

Nesta altura, já obtemos os coeficientes de $q(x)$ *que é o quociente da divisão de* $f(x)$ *por* $p(x)$*, o próximo passo, obtemos o resto* r *da divisão, então*

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -9 & 0 & 18 & -8 & 4 \\ \hline 2 & -1 & -4 & 2 & 0 & \end{array}.$$

Portanto, como o último resultado é 0*, logo o resto é nulo e concluímos que* 4 *é raiz de* $f(x)$ *e o quociente* $q(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$*. Terminamos o dispositivo para o valor* 4 *e podemos continuar no mesmo dispositivo para outras divisões ou até por* 4 *novamente, na qual podemos verificar multiplicidades existentes.*

Exemplo 1.2.14. *Dado o polinômio* $f(x) = x^7 - 6x^6 + 13x^5 - 10x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 9x + 2 \in \mathbb{K}[x]$*, então* 1 *é uma raiz de* $f(x)$*. Vamos determinar sua multiplicidade.*

Solução: De fato, pois $f(1) = 1^7 - 6\cdot 1^6 + 13\cdot 1^5 - 10\cdot 1^4 - 5\cdot 1^3 + 14\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 2 = 0$.

Agora, vamos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para determinar a multiplicidade da raiz 1*, assim*

$$\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -6 & 13 & -10 & -5 & 14 & -9 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -5 & 8 & -2 & -7 & 7 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -4 & 4 & 2 & -5 & 2 & 0 & & 1 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 3 & -2 & 0 & & & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & & & & 1 \\ \hline 1 & -1 & -2 & 0 & & & & & \end{array}.$$

O polinômio $f(x) = (x^2 - x - 2) \cdot (x - 1)^5 = (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)^5$ *possui uma raiz* 1 *de multiplicidade* 5 *e duas raízes simples que são* $\{-1, 2\}$.

Exemplo 1.2.15. *Sejam os polinômios* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6 \in K[x]$ *e* $g(x) = x - 2 \in K[x]$*. Sabendo que* $g \mid f$*, vamos determinar as outras raízes de* $f(x)$*.*

Solução: Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, determinaremos o polinômio quociente $q(x)$ *que é de grau* 2*, pois* $x = 2$ *é uma raiz de* $f(x)$*, então*

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -6 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 0 & \end{array}.$$

Observe que na segunda linha do dispositivo, restaram os coeficientes 1*,* 0*,* 3 *e o resto* 0*. Assim,* $q(x) = x^2 + 3$ *já que* $\partial(f(x)) - \partial(g(x)) = \partial(q(x)) = 2$*. Resolvendo* $q(x) = 0$*, temos* $x = i\sqrt{3}$ *ou* $x = -i\sqrt{3}$*. Portanto, as raízes de* $f(x)$ *são* $\{2, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$.

Exemplo 1.2.16. *Considere o polinômio* $f(x) = x^7 - 3x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 28$. *Vamos calcular* $f(7)$.

Solução: Seria inviável substituir as indeterminadas do polinômio por 7 *e calcular seu valor numérico. Vamos usar o dispositivo de Briot-Ruffini, então*

1	−3	−5	2	7	−1	0	28	7
1	4	23	163	1148	8035	56245	393743	

Portanto, pela preposição (1.2.1), $f(7) = 393743$.

Exemplo 1.2.17. *Seja o polinômio* $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 \in K[x]$. *Vamos fatorá-lo.*

Solução: Por inspeção, temos que $f(1) = 0$ *e* $f(-1) = 0$. *Vamos usar o dispositivo de Briot-Ruffini, logo*

1	0	−3	0	2	1
1	1	−2	−2	0	−1
1	0	−2	0		

O polinômio $q_2(x) = x^2 - 2$ *pode ser facilmente fatorado, pois se trata de uma diferença de quadrados, portanto*

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).$$

1.2.6 Raízes Irracionais e Complexas de um Polinômio

Teorema 1.2.9. (Teorema Fundamental da Álgebra) Sejam $\mathbb{C}$ o conjunto dos complexos e um polinômio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$. Então, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(\alpha) = 0$. Ou melhor, se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{C}$ com grau $n \geq 1$, então $f(x)$ possui n raízes complexas, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, contando suas multiplicidades, e $f(x)$ pode ser escrito sob a forma fatorada, como

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1) \cdot (x-\alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n).$$

A demonstração deste teorema foge completamente do escopo desta dissertação, pois é preciso conceitos da Análise e nossos conceitos são da Álgebra.

Mais duas proposições e seremos capazes de resolver alguns polinômios de grau elevado conhecendo poucos dados e sem recorrer a fórmulas fechadas de resolução.

Proposição 1.2.3. *Sejam* $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ *com grau* $n \geq 1$ *e raiz* $\alpha = p/q$ *racional de* $f(x)$ *com* $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ *e* $mdc(p,q) = 1$, *então* $p \mid a_0$ *e* $q \mid a_n$.

Demonstração. Temos que $f(\alpha) = 0$, então

$$0 = a_0 + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por q^n, obtemos

$$0 = a_0 q^n + a_1 p q^{n-1} + a_2 p^2 q^{n-2} + \ldots + a_n p^n.$$

Vamos por q em evidência e isolar o último termo da equação, assim

$$q(a_0 q^{n-1} + a_1 p q^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p^{n-1}) = -a_n p^n.$$

O que mostra que $q \mid a_n$ já que $mdc(p, q) = 1$. Para $p \mid a_0$ a prova é análoga. □

Corolário 1.2.2. *Seja α uma raiz inteira de $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}x$, então α é um divisor de a_0.*

Corolário 1.2.3. *Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{Z}x$, então as eventuais raízes racionais de f são números inteiros divisores de a_0.*

Demonstração. Sendo $q = \pm 1$, tem que $p/q = \pm p$, logo a raiz pertence a $\mathbb{Z}$. Pela preposição (1.2.3), $p = \alpha \mid a_0$, o que conclui a prova. □

Exemplo 1.2.18. *Vamos resolver a equação polinomial $x^6 - 5x^5 + 4x^4 + 10x^3 - 11x^2 - 5x + 6 = 0$*

Solução: Inicialmente verificamos os múltiplos inteiros de 6, que são

$$\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6\},$$

logo

$$\begin{aligned}
f(-1) &= (-1)^6 - 5(-1)^5 + 4(-1)^4 + 10(-1)^3 - 11(-1)^2 - 5(-1) + 6 = 0,\\
f(1) &= (1)^6 - 5(1)^5 + 4(1)^4 + 10(1)^3 - 11(1)^2 - 5(1) + 6 = 0,\\
f(-2) &= (-2)^6 - 5(-2)^5 + 4(-2)^4 + 10(-2)^3 - 11(-2)^2 - 5(-2) + 6 = 180,\\
f(2) &= (2)^6 - 5(2)^5 + 4(2)^4 + 10(2)^3 - 11(2)^2 - 5(2) + 6 = 0,\\
f(-3) &= (-3)^6 - 5(-3)^5 + 4(-3)^4 + 10(-3)^3 - 11(-3)^2 - 5(-3) + 6 = 1920,\\
f(3) &= (3)^6 - 5(3)^5 + 4(3)^4 + 10(3)^3 - 11(3)^2 - 5(3) + 6 = 0.
\end{aligned}$$

Por sorte encontramos 4 raízes inteiras e já podemos parar de conferir. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini chegaremos numa função quadrática, assim

$$\begin{array}{ccccccc|c}
1 & -5 & 4 & 10 & -11 & -5 & 6 & 1 \\
\hline
1 & -4 & 0 & 10 & -1 & -6 & 0 & -1 \\
1 & -5 & 5 & 5 & -6 & 0 & & 2 \\
1 & -3 & -1 & 3 & 0 & & & 3 \\
1 & 0 & -1 & 0 & & & &
\end{array}.$$

Vamos agora resolver a equação $x^2 - 1 = 0$*, em que suas raízes já foram expressas, isto é, as raízes* 1 *e* -1 *têm multiplicidade* 2*. Então, a solução da equação* $x^6 - 5x^5 + 4x^4 + 10x^3 - 11x^2 - 5x + 6 = 0$ *é*

$$\{1,\ -1,\ 2,\ 3\}.$$

Exemplo 1.2.19. *Vamos resolver a equação polinomial* $8x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 9x + 3 = 0$.

Solução: O coeficiente líder é 8*, então devemos dividir a equação por* 8 *e testar os divisores racionais de* $\frac{3}{8}$*. A equação ficará da forma*

$$x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{3}{8} = 0.$$

Os divisores racionais de $\frac{3}{8}$ *são* $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}\right\}$ *e vamos testar um a um, até achar pelo menos duas raízes. Por sorte,* $p(1) = 0$, $p(-1) = 42$ *e* $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$*. Podemos parar de testar e terminar com o dispositivo de Briot-Ruffini. Assim*

$$\begin{array}{ccccc|c}
8 & -12 & 10 & -9 & 3 & 1 \\
\hline
8 & -4 & 6 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\
8 & 0 & 6 & 0 & &
\end{array}.$$

Vamos determinar as raízes da equação $8x^2 + 6 = 0$ *que são os complexos* $\left\{\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$*. Portanto, a solução da equação* $8x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 9x + 3 = 0$ *é*

$$\left\{1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{i\sqrt{3}}{2},\ \frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Teorema 1.2.10. (Teorema das raízes irracionais) Sejam um polinômio $f(x)$ com coeficientes racionais e uma raiz do tipo $a + b\sqrt{c}$ em que $\sqrt{c}$ é um número irracional e a e b são racionais com $b \neq 0$, então $a - b\sqrt{c}$ será também uma raiz de $f(x)$.

Demonstração. Se o grau de $f(x)$ for 1, então não se trata de um polinômio de coeficientes racionais, pois como $x = a + b\sqrt{c}$ é uma raiz de $f(x)$, então $f(x) = x - a - b\sqrt{c}$.

Para $\partial(f(x)) > 1$, temos como hipótese $\alpha = a + b\sqrt{c}$, uma raiz de $f(x)$, assim

$$\begin{aligned}
\alpha &= a + b\sqrt{c} \\
\alpha - a &= b\sqrt{c} \\
\frac{\alpha}{b} - \frac{a}{b} &= \sqrt{c} \\
\left(\frac{\alpha}{b} - \frac{a}{b}\right)^2 &= c \\
\left(\frac{\alpha}{b} - \frac{a}{b}\right)^2 - c &= 0 \\
\frac{\alpha^2}{b^2} - 2\frac{\alpha a}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} - c &= 0 \\
\alpha^2 - 2\alpha a + a^2 - cb^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Nesta equação substituiremos α por $\beta = a - b\sqrt{c}$, então

$$\begin{aligned}
p(\alpha) &= \alpha^2 - 2\alpha a + a^2 - cb^2 \\
p(\beta) &= \beta^2 - 2\beta a + a^2 - cb^2 \\
&= \left(a - b\sqrt{c}\right)^2 - 2(a - b\sqrt{c})a + a^2 - cb^2 \\
&= a^2 - 2ab\sqrt{c} + b^2c - 2a^2 + 2ab\sqrt{c} + a^2 - cb^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Seja o grau de $f(x)$ maior que 2, pelo algoritmo da divisão e o fato de $f(\alpha) = 0$, seja qual for as outras raízes, $f(\beta) = 0$, pois os fatores se anulam e $r(x) = 0$. $\square$

Exemplo 1.2.20. *Vamos resolver a equação polinomial* $x^3 - x^2 - 45x + 45 = 0$ *sabendo que* $3\sqrt{5}$ *é uma raiz da equação.*

Solução: A raiz $3\sqrt{5}$ *é irracional, então* $-3\sqrt{5}$ *também é uma raiz, de fato, pelo algoritmo de Briot-Ruffini, temos*

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & -45 & 45 & 3\sqrt{5} \\
\hline
1 & 3\sqrt{5} - 1 & -3\sqrt{5} & 0 & -3\sqrt{5} \\
\hline
1 & -1 & 0 & &
\end{array}.$$

Portanto, $x^3 - x^2 - 45x + 45 = (x - 3\sqrt{5})(x + 3\sqrt{5})(x - 1)$*, logo a solução é* $S = \{1, -3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}\}$.

Exemplo 1.2.21. *Vamos resolver a equação polinomial* $x^6+x^5-5x^4-7x^3+4x^2+10x+4 = 0$ *sabendo que* $\sqrt{2}$ *é uma raiz.*

Solução: Como $\sqrt{2}$ *é uma raiz irracional e o polinômio possui todos os coeficientes racionais, então* $-\sqrt{2}$ *é raiz. Logo podemos dividir o polinômio por* $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = x^2-2$*, assim*

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr|l}
x^6 & + & x^5 & - & 5x^4 & - & 7x^3 & + & 4x^2 & + & 10x & + & 4 & x^2 \; +0x \; -2 \\ \cline{14-14}
-x^6 & - & 0x^5 & + & 2x^4 & & & & & & & & & x^4+x^3-3x^2-5x-2 \\ \cline{1-5}
 & & x^5 & - & 3x^4 & - & 7x^3 & & & & & & & \\
 & - & x^5 & - & 0x^4 & + & 2x^3 & & & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & 3x^4 & - & 5x^3 & + & 4x^2 & & & & & \\
 & & & & x^4 & + & 0x^3 & - & 6x^2 & & & & & \\ \cline{5-9}
 & & & & & - & 5x^3 & - & 2x^2 & + & 10x & & & \\
 & & & & & & 5x^3 & + & 0x^2 & - & 10x & & & \\ \cline{7-11}
 & & & & & & & - & 2x^2 & + & 0x & + & 4 & \\
 & & & & & & & & 2x^2 & + & 0x & - & 4 & \\ \cline{9-13}
 & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

O quociente da divisão é o polinômio $q(x) = x^4+x^3-3x^2-5x-2$ *e suas possíveis raízes inteiras são* $\{\pm 1, \pm 2\}$*, basta verificar, então*

$$
\begin{aligned}
q(-1) &= (-1)^4+(-1)^3-3(-1)^2-5(-1)-2 = 1-1-3+5-2 = 0, \\
q(1) &= (1)^4+(1)^3-3(1)^2-5(1)-2 = 1+1-3+5-2 = 2, \\
q(-2) &= (-2)^4+(-2)^3-3(-2)^2-5(-2)-2 = 16-8-12+10-2 = 4, \\
q(2) &= (2)^4+(2)^3-3(2)^2-5(2)-2 = 16+8-12-10-2 = 0.
\end{aligned}
$$

O polinômio $f(x)$ *possui* 6 *raízes, dentre elas as duas raízes irracionais e mais duas raízes inteiras, agora encontradas, desta forma, o polinômio* $q(x)$ *ainda tem duas raízes desconhecidas e não sabemos se elas são irracionais, inteiras ou até mesmo complexas. Usando o dispositivo para as duas raízes inteiras encontradas, podemos reduzir o polinômio para o 2º grau, portanto*

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & -5 & -2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -3 & -2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & & \end{array}.$$

O polinômio resultante da duas divisões sucessivas no dispositivo de Briot-Ruffini é um quadrado perfeito, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$*, desta forma, há mais duas raízes iguais a* -1*, portanto as raízes do polinômio* $f(x)$ *são* $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1, 2\}$ *sendo a raiz* -1 *com multiplicidade* 3*.*

O próximo teorema é semelhante ao Teorema (1.2.10), mas agora as raízes são números complexos conjugados. Precisamos das propriedades sobre números complexos.

Seja $z = a + bi$ um número complexo e $\overline{z} = a - bi$ seu conjugado, então:

(i) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

(ii) $z = w$ se, e somente se, $\overline{z} = \overline{w}$.

(iii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(iv) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Teorema 1.2.11. (Teorema das raízes complexas conjugadas) Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes reais. Se $a+bi$ é uma raiz complexa de $f(x)$, então $a-bi$ também é uma raiz de $f(x)$.

Demonstração. Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = \ldots + a_nx^n$ e por hipótese $f(z) = 0$, então

$$\begin{aligned} \overline{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n} &= \overline{a_0} + \overline{a_1x} + \overline{a_2x^2} + \ldots + \overline{a_nx^n} = \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{x} + \overline{a_2}\,\overline{x}^2 + \ldots + \overline{a_n}\,\overline{x}^n = \\ &= a_0 + a_1\overline{x} + a_2\overline{x}^2 + \ldots + a_n\overline{x}^n = \overline{0} = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f(\overline{z}) = 0$. □

Exemplo 1.2.22. *Vamos resolver a equação* $x^9-x^8+4x^7-4x^6+6x^5-6x^4+4x^3-4x^2+x-1$*, sabendo que* i *é uma das raízes e tem multiplicidade* 4*.*

Solução: Se i *é uma raiz complexa e tem multiplicidade* 4*, pelo teorema das raízes complexas conjugadas,* $-i$ *é também uma raiz de multiplicidade* 4 *da equação polinomial. Como a equação tem grau* 9*, resta uma raiz para ser encontrada, e se trata de uma raiz inteira, pois o polinômio da equação é mônico e os possíveis candidatos são* $\{\pm 1\}$*. Logo, substituindo,* 1*, na equação obtemos a nona raiz.*

1.3 Polinômios em Várias Variáveis

Nesta seção veremos uma pequena noção de polinômios em várias variáveis, mas não atentaremos ao seu conceito geral, pois o assunto fugiria do escopo de nosso trabalho. Nos atentaremos em polinômios em duas ou mais variáveis em sua forma quadrática, ou seja, nos polinômios homogêneos, que será uma base importante para o entendimento de alguns teoremas, como o de Sylvester que apresentaremos na seção 4.

Definição 1.3.1. Sejam A um anel e $A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ o anel de polinômios com coeficientes em A nas indeterminadas $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Temos que

$$A[x_1, x_2, \ldots, x_n] = (A[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}])[x_n].$$

Definida desta forma, podemos escrever o polinômio em n variáveis, como

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{0 \leqslant j_1 \leqslant s_1 \\ \vdots \\ 0 \leqslant j_n \leqslant s_n}} a_{j_1,\ldots,j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n},$$

em que $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$ e $a_{j_1,\ldots,j_n} \in A$.

Exemplo 1.3.1. *Listamos alguns polinômios em* $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$ *e* $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$.

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2], \\
g(x_1, x_2) &= 7x_1^2 + x_1x_2 - \frac{3}{5}x_2^2 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2], \\
h(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3^2 + x_1x_2x_3 - x_2^2x_3 + x_1^3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3], \\
i(x_1, x_2, x_3) &= x_1^4 + x_2^4 + 3x_3^4 - x_2^3x_3^3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2x_3^3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3].
\end{aligned}$$

Exemplo 1.3.2. *O grau dos polinômios em várias variáveis é definido pelo maior dos graus dos seus monômios não nulos. Considerando os polinômios do exemplo (1.3.1), temos*

$$\begin{aligned}
\partial(f(x_1, x_2)) &= 2, \\
\partial(g(x_1, x_2)) &= 2, \\
\partial(h(x_1, x_2, x_3)) &= 3, \\
\partial(i(x_1, x_2, x_3)) &= 4.
\end{aligned}$$

Definição 1.3.2. Um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se diz homogêneo se o grau total dos monômios, com coeficientes não nulos, têm os mesmos valores, onde o grau total é a soma dos expoentes de todas as variáveis em um monômio com coeficiente não nulo.

Exemplo 1.3.3. *Considerando os polinômios do exemplo (1.3.1), temos:*

(i) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ *é homogêneo, pois o primeiro monômio tem grau* 2*, o segundo monômio tem grau* $1 + 1 = 2$ *e o terceiro monômio tem grau* 2*.*

(ii) $g(x_1, x_2) = 7x_1^2 + x_1x_2 - \frac{3}{5}x_2^2 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ *é homogêneo, pois o primeiro monômio tem grau* 2*, o segundo monômio tem grau* $1 + 1 = 2$ *e o terceiro monômio tem grau* 2*.*

(iii) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3^2 + x_1x_2x_3 - x_2^2x_3 + x_1^3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ *não é homogêneo, pois o primeiro monômio tem grau* $1+1+2 = 4$*, o segundo monômio tem grau* $1+1+1 = 3$*, o terceiro monômio tem grau* $2 + 1 = 3$ *e o quarto monômio tem grau* 3*. Observe que o primeiro monômio tem grau total 4 e os demais tem grau total 3.*

(iv) $i(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + 3x_3^4 - x_2^3x_3^3x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2x_3^3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ *não é homogêneo, pois o primeiro, segundo e o terceiro monômio tem grau* 4 *cada, o quarto monômio tem grau* $3+3+3+2 = 8$*, o quinto monômio tem grau* $1+1 = 2$ *e o sexto monômio tem grau* $2 + 3 = 5$*.*

1.3.1 Polinômios Homogêneos na Forma Quadrática

Definição 1.3.3. Polinômios homogêneos na forma quadrática são funções cuja expressão polinomial possui monômios com grau máximo a 2. Podemos escrever um polinômio homogêneo na forma quadrática em $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ da seguinte forma:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1^2 + b_{1,2}x_1x_2 + \cdots + b_{1,n}x_1x_n + a_2x_2^2 + \cdots + b_{2,n}x_2x_n + \cdots a_nx_n^2.$$

Exemplo 1.3.4. *O polinômio* $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$ *é um polinômio homogêneo na forma quadrática, pois seus termos são quadrados e compostos do tipo* x_1x_2*, ou seja, seus monômios são todos de grau total* 2*.*

Exemplo 1.3.5. *O polinômio* $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2 - 2x_2^2$ *não é um polinômio homogêneo na forma quadrática, pois o termo do tipo* $-x_2$ *tem grau* 1*.*

A grande importância dessas funções quadráticas está no fato de serem homogêneas, ou seja, por serem lineares no espaço $\mathbb{R}^n$. Vejamos alguns gráficos destes tipos de funções polinomiais.

Exemplo 1.3.6. *O gráfico gerado pela função polinomial na forma quadrática* $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ *é uma cônica no espaço tridimensional.*

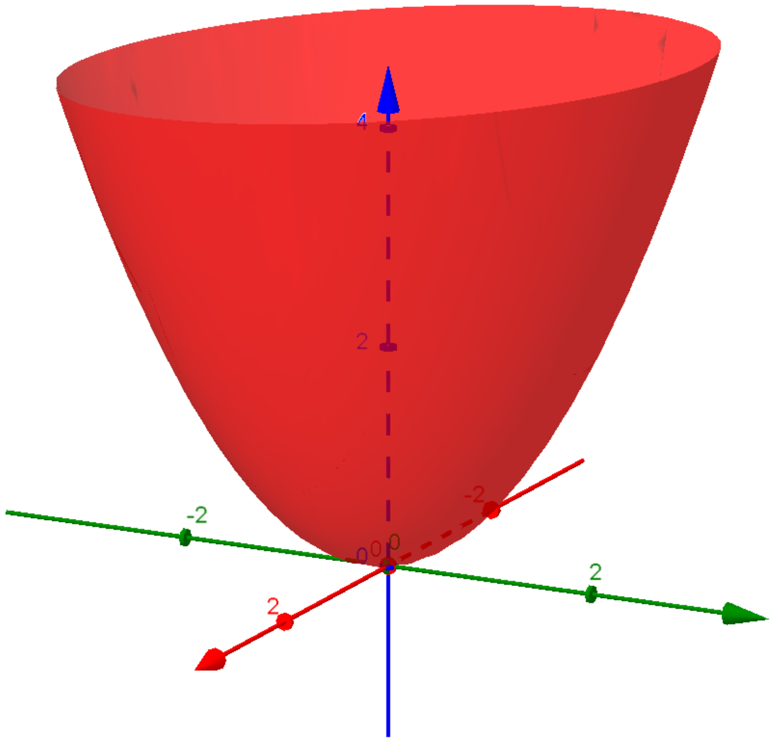

Figura 1.3: Cônica gerada pela função quadrática $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Para um $f(x, y) = c$, com $c > 0$, obteremos sempre uma elipse como curva de nível da cônica.

Exemplo 1.3.7. *O gráfico gerado pela função polinomial na forma quadrática $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ é uma cônica no espaço tridimensional.*

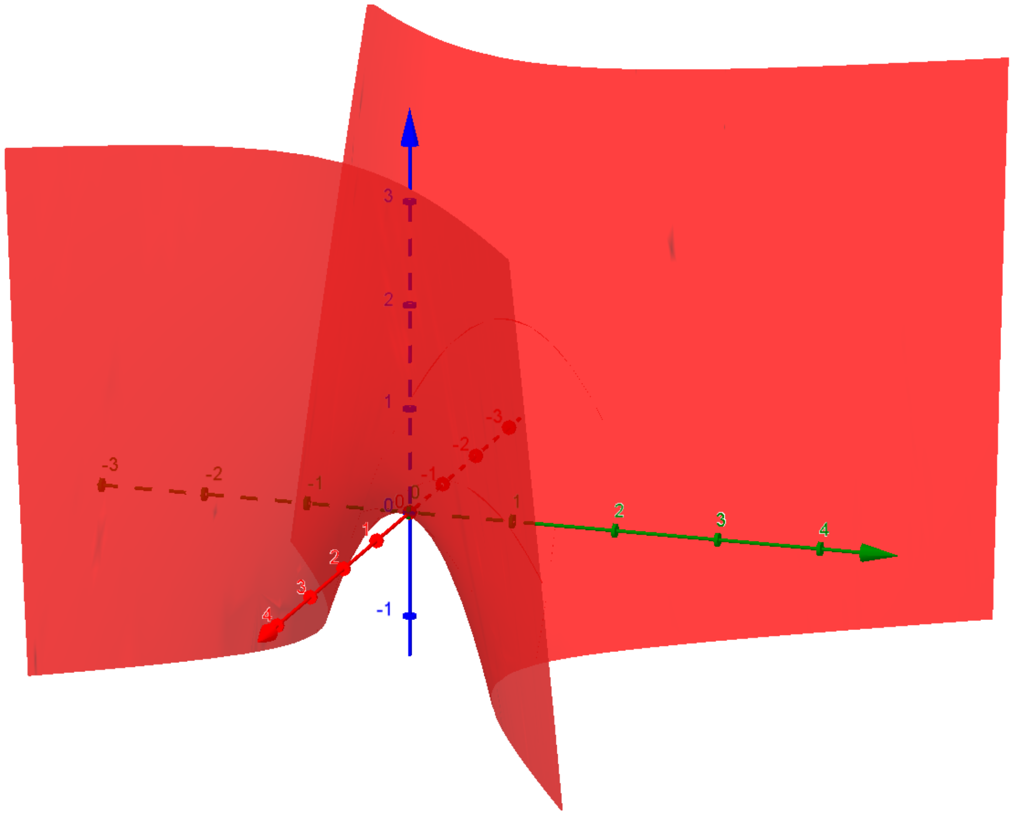

Figura 1.4: Cônica gerada pela função quadrática $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$.

Para um $f(x, y) = c$, obteremos sempre uma hipérbole como curva de nível da cônica.

1.3.2 Forma Quadrática Associada a uma Matriz Quadrada

Primeiramente vamos revisitar alguns conceitos sobre matrizes.

Definição 1.3.4. (Matriz Simétrica) Se os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal de uma matriz quadrada $S = a_{ij}$, são iguais, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, então a matriz é chamada de simétrica.

Definição 1.3.5. Uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]$ é simétrica se $M^T = M$.

Exemplo 1.3.8. *Seja* $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Sua transposta é* $M^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. *Portanto* $M^T = M$.

Exemplo 1.3.9. *O produto de uma matriz M pela sua transposta M^T é uma matriz simétrica, isto é, $M \cdot M^T = S$*

Exemplo 1.3.10. *Considere a matriz* $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. *Sua transposta é* $M^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. *Então*

$$M \cdot M^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+9 & 8+15 \\ 8+15 & 16+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 23 \\ 23 & 41 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz $S = \begin{bmatrix} 13 & 23 \\ 23 & 41 \end{bmatrix}$ *é simétrica, pois* $a_{12} = a_{21} = 23$.

Exemplo 1.3.11. *Vamos verificar que seja M uma matriz quadrada, $\frac{M+M^T}{2}$ é simétrica. Considerando as mesmas matrizes do exemplo (1.3.10), temos*

$$\frac{M+M^T}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2+2 & 3+4 \\ 4+3 & 5+5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz $S = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$ *é simétrica, pois* $a_{12} = a_{21} = \frac{7}{2}$.

Definição 1.3.6. Seja M uma matriz quadrada de ordem n. A forma quadrática associada a matriz M, é a expressão

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^T \cdot M \cdot X, \tag{1.3.1}$$

em que

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.3.1. *Toda expressão polinomial na forma quadrática está a associada a uma matriz simétrica.*

Demonstração. Temos que $X^T \cdot M \cdot X = (X^T \cdot M \cdot X)^T = X^T \cdot M^T \cdot X$.

Sabemos que $\frac{M+M^T}{2}$ é simétrica, logo

$$X^T \cdot M \cdot X = \frac{X^T \cdot M \cdot X + X^T \cdot M^T \cdot X}{2} = X^T \cdot \left[\frac{M+M^T}{2}\right] \cdot X.$$

Portanto, $Q(x) = X^T \cdot M \cdot X = X^T \cdot \frac{M+M^T}{2} \cdot X$. □

Exemplo 1.3.12. *Qualquer que seja a matriz M, M e $S = \frac{M+M^T}{2}$ definem a mesma forma quadrática $Q(x)$, sendo S única matriz simétrica que define $Q(x)$.*

Exemplo 1.3.13. *Considere a matriz simétrica* $M = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. *Vamos determinar a forma quadrática associada a* M.

Solução: Seja $Q(x_1, x_2, x_3) = X^T \cdot M \cdot X$, *temos que*

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 6x_1x_3 + 6x_3x_1 + x_3x_2 + x_2x_3 \\ &= x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_2x_1 + 12x_3x_1 + 2x_2x_3. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.14. *Considere a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. *Vamos determinar a forma quadrática associada a* A.

Solução:

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_1x_2 + 3x_2x_1 \\ &= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_1x_2. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3.15. *Vamos determinar a matriz simétrica em relação a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução: Temos que $\frac{A+A^T}{2} = S$ *é uma matriz simétrica. Então*

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2+2 & 7+3 \\ 3+7 & 4+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1.3.16. *Considere a matriz* $S = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$. *Vamos determinar a forma quadrática associada a* S.

Solução:

$$
\begin{aligned}
Q(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_1x_2 + 5x_2x_1 \\
&= 2x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_1x_2.
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

Fórmulas Fechadas

2.1 Raízes de Equações Polinomiais de Grau 1

Consideremos a equação $ax + b = 0$ com coeficientes em $\mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então, uma solução, temos que isolar x, por meio de operações básicas. Segue que

$$ax + b = 0. \tag{2.1.1}$$

Subtraindo b em ambos os membros, temos

$$\begin{aligned} ax + b - b &= 0 - b \\ ax &= -b. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os membros por a, temos

$$\begin{aligned} \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.1. *A solução da equação $3x - 7 = 2x + 3$ é obtida adicionando 7 a ambos os membros e subtraindo $2x$ a ambos os membros, como segue,*

$$\begin{aligned} 3x - 7 + 7 &= 2x + 3 + 7 \\ 3x - 2x &= 2x - 2x + 10 \\ x &= 10. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = \{10\}.$$

No exemplo (2.1.1) não mencionamos a base da equação, logo, consideraremos a base real, por conveniência. Atentamos ao próximo exemplo.

Exemplo 2.1.2. *Vamos encontrar uma solução para a equação* $x - 3 = 8x + 3$ *em* $\mathbb{Z}[x]$*.*

Solução: Por meio de operações básicas, isto é, adicionando 3 aos dois lados da igualdade e subtraindo 8x aos dois lados da igualdade, temos,

$$\begin{aligned} x - 3 + 3 &= 8x + 3 + 3 \\ x - 8x &= 8x - 8x + 6 \\ -7x &= 6. \\ x &= -\frac{6}{7} \end{aligned}$$

Como a equação possui coeficientes inteiros, a solução encontrada não pertence a $\mathbb{Z}$*. Portanto, a solução da equação em* $\mathbb{Z}[x]$ *é vazia.*

2.2 Raízes de Equações Polinomiais de Grau 2

Vamos considerar o polinômio $p(x) = x^2 + 2x + 63$ de grau dois e mônico, ou seja, o coeficiente do termo de maior grau é 1.

Fazendo $p(x) = 0$, obtemos a equação quadrática $0 = x^2 + 2x + 63$. Pois bem, por mais que tentemos isolar a variável x, não vamos conseguir uma resposta que tenha somente números, então recorreremos a regra de completar quadrados, da mesma maneira que os babilônios faziam a mais de três mil anos atrás.

Escrevemos a equação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 63 &= 0 \\ x^2 + 2x &= 63 \qquad (2.2.1) \\ x.(x+2) &= 63. \end{aligned}$$

Podemos traduzir a equação (2.2.1) da seguinte forma: *A área de um retângulo de largura desconhecida e comprimento 2 a mais que a largura possui 63 unidades.*

O retângulo pode ser decomposto de forma, que possamos transformá-lo num quadrado.

Daí,

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= 63 \\ x^2 + 2x + 1 &= 63 + 1 \\ (x+1)^2 &= 64. \end{aligned}$$

Logo, temos dois quadrados sendo igualados, e que facilmente concluímos que $x = 7$.

Vamos agora revisitar algumas ideias.

Consideremos um quadrado de lado $(a+b)$, assim sua área será $(a+b).(a+b) = (a+b)^2$. Desenvolvendo esta multiplicação termo a termo, teremos $a^2 + 2ab + b^2$. Este pequeno resultado terá um papel importante na construção de uma forma de resolver equações de 2º grau. Ainda nesta procura de uma fórmula resolutiva voltemos numa propriedade dos domínios de integridade. Sejam a e b pertencentes a um corpo , temos que

$$a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \ ou\ b = 0.$$

Considere a equação de 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$.

Devemos ajustar a equação, de modo que a área de um retângulo seja determinada, assim

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow ax^2 + bx = -c.$$

Como queremos dividir um retângulo e transformá-lo em um quadrado, dividimos a equação por a em ambos os lados da igualdade

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a}.$$

Agora temos um quadrado de lado x, mais um retângulo de lados b/a e x.

Este retângulo dividiremos em duas partes iguais deixando o lado x para unir com o quadrado.

Os novos retângulos terão lados x e $\frac{b}{2a}$, assim

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right) \cdot x = -\frac{c}{a}.$$

Teremos então, a necessidade de completar um quadrado pequeno de lado $b/2a$, então devemos adicionar em ambos os lados da igualdade, um quadrado $b^2/4a^2$, desta forma o primeiro membro definitivamente representará um quadrado e o segundo membro aumentará sua área em $b^2/4a^2$, então

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right) \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Ao completarmos o quadrado temos no primeiro membro da equação, ou seja, no lado esquerdo da igualdade, um quadrado perfeito, que podemos fatorar, logo

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Pronto, estamos a um passo para isolar a varável x. Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da igualdade e supondo que

$$-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \\ \left(x + \frac{b}{a}\right) &= \pm\sqrt{-\frac{c}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}}. \end{aligned}$$

Devemos isolar a variável x e ajustar a fórmula para que fique sintética, portanto

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{b}{a}\right) &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \\ x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2.2.2) \end{aligned}$$

A solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é

$$S = \left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}.$$

Exemplo 2.2.1. *Vamos determinar a solução da equação* $x^2 + 8x - 12 = 0$ *em* $\mathbb{R}$.

Solução: Primeiramente, adicionamos 12 *em ambos os lados da equação , assim*

$$\begin{aligned}
x^2+8x-12 &= 0\\
x^2+8x-12+12 &= 12\\
x^2+8x &= 12\\
x^2+2\cdot 4\cdot x+4^2 &= 12+4^2\\
x^2+8x+16 &= 28\\
(x+4)^2 &= 28\\
x+4 &= \pm\sqrt{28}\\
x &= -4\pm\sqrt{28}\\
x &= -4\pm 2\sqrt{7}.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução real da equação $x^2+8x-12=0$ *é*

$$S=\left\{-4-2\sqrt{7},-4+2\sqrt{7}\right\}.$$

Por outro lado, poderíamos usar a fórmula (2.2.2) para determinar as soluções da equação, a partir de seus coeficientes. Desta forma, estamos dando lugar ao fato de que a fórmula resolutiva é o meio principal para se chegar a uma resolução. A questão é que, este algoritmo se torna suficiente e sintético por usar apenas a substituição dos coeficientes pelas letras da fórmula. O que queremos ressaltar é que este método se sobressai a todos os outros por ser mais conveniente e manipulável, porém, resulta numa simples técnica de substituição o que deixa de lado o principal motivo pelo qual as soluções de equações de segundo grau são realmente obtidas. Não obstante a este conceito, na Geometria Analítica, o método de completar quadrados é de suma importância, pois é um meio de se obter equações de cônicas a partir de equações mais gerais. Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 2.2.2. *Consideremos a equação* $x^2+y^2+6x-12y-4=0$. *Vamos determinar a cônica gerada por essa equação.*

Solução: Determinaremos um quadrado perfeito com as varáveis x *e* y*, logo*

$$\begin{aligned} x^2+y^2+6x-12y-4 &= 0\\ x^2+6x+y^2-12y &= 4\\ x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2+y^2-2\cdot 6\cdot y+6^2 &= 4+3^2+6^2\\ x^2+6x+9+y^2-12y+36 &= 4+9+36\\ (x+3)^2+(y-6)^2 &= 49\\ (x+3)^2+(y-6)^2 &= 7^2. \end{aligned}$$

Portanto, trata-se de uma circunferência de raio 7 *e centro em* $(-3, 6)$.

2.3 Raízes de Equações Polinomiais de Grau 3

Em 1545 a resolução das equações de polinômios de grau 3 tornou-se conhecida pela publicação da Ars Magna de Gerônimo Cardano (1501-1576). Mas, não foi Cardano quem descobriu o problema de determinar uma fórmula para resolução de equações cúbicas. A ideia veio de Niccolo Tartaglia (cerca de 1500-1557) e ainda Cardano deixou de dizer na Ars Magna o juramento que havia feito a Tartaglia de não revelar o segredo. Scipione del Ferro (1465-1526) professor de matemática em Bolonha, também fez parte dessa história de descobertas.

Vamos ao método para a resolução de equações polinomiais de grau 3.

Considere a equação geral $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

Fazendo $x = y - b/3a$, com o intuito de eliminar o termo quadrático, e dividindo após a substituição por a, chegamos a

$$y^3+py+p=0,$$

com $p = c - b^2/3$ e $q = 2b^3/27 - bc/3 + d$.

Fazendo, $y = u+v$ com u e v, ambos não nulos, temos

$$(u+v)^3+p(u+v)+p = u^3+v^3+q+(3uv+p)(u+v).$$

Daí,

$$\begin{cases} u^3+v^3 &= -q\\ 3uv &= -p. \end{cases}$$

Fazendo $v = -p/3u$, tem-se

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

E substituindo $u^3 = t$, obtemos

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27}.$$

Por fim, ao resolvermos t, temos

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Portanto, tomando $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, uma raiz cúbica da unidade e que satisfaz $\omega^3 = 1$, teremos as fórmulas resolutivas

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v, \\ y_2 &= \omega u + \omega^2 v, \\ y_3 &= \omega^2 u + \omega v. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Portanto, para determinar as raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com $a = 1$, temos que determinar as raízes de $y^3 + py + p = 0$ pelas fórmulas de Cardano e subtrair delas $\frac{b}{3}$.

Exemplo 2.3.1. *Vamos eliminar o termo de grau 2 da equação polinomial $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$.*

Solução: Devemos substituir $x = y - b/3a$ e como $a = 1$ e $b = -1$, temos

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{1}{3}\right)^3 - \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - 3\left(y + \frac{1}{3}\right) + 3 &= 0 \\ y^3 - \frac{10}{3}y - \frac{52}{27} &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.3.2. *Vamos aplicar as fórmulas de Cardano para resolver a equação polinomial $x^3 - 4x + 3$.*

Solução: Observamos que $p = -4$ e $q = 3$, substituindo nas equações, temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3^2}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3^2}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}},\\
x_2 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3^2}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3^2}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}},\\
x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3^2}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3^2}{4}+\frac{(-4)^3}{27}}}.
\end{aligned}$$

Fazendo as contas, temos

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{13}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{13}{108}}},\\
x_2 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{13}{108}}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{13}{108}}},\\
x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{13}{108}}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{13}{108}}}.
\end{aligned}$$

Para a equação do exemplo (2.3.2), é fácil verificar que 1 é uma raiz, mas nas soluções pelas fórmulas de Cardano, não apareceu explicitamente esta raiz. Desta forma, podemos mostrar que a primeira solução é realmente igual a 1.

Exemplo 2.3.3. *Mostre que* $\sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{13}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{13}{108}}}=1.$

Solução: Sabemos que a equação que é satisfeita por

$$\sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{13}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{13}{108}}}$$

é $x^3 - 4x + 3 = 0$. E como 1 é raiz, usaremos o dispositivo de Briot-Ruffini. Assim

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\
\hline
1 & 1 & -3 & 0 &
\end{array}.$$

Portanto, $x^3 - 4x + 3 = (x-1)\cdot(x^2+x-3)$ e $x^2+x-3=0$ possui $\{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\}$ como raízes irracionais. Logo

$$\sqrt[3]{-\frac{3}{2}+\sqrt{-\frac{13}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{3}{2}-\sqrt{-\frac{13}{108}}}=1.$$

Exemplo 2.3.4. *Vamos agora resolver a equação polinomial* $x^3 - 3x^2 - x + 6 = 0$.

Solução: Substituindo $x = y + 1$, *temos*

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 - y - 1 + 6 = 0.$$

Expandindo, temos

$$y^3 - 4y + 3.$$

Observamos que $p = -4$ *e* $q = 3$, *substituindo nas equações e fazendo as contas, chegamos em*

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{13}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{13}{108}}},\\
y_2 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{13}{108}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{13}{108}}},\\
y_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{13}{108}}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{13}{108}}}.
\end{aligned}$$

A solução da equação $x^3 - 3x^2 - x + 6 = 0$ *é dada adicionando* 1 *nas soluções em termos de* y, *ou seja,* $x_1 = y_1 + 1$, $x_2 = y_2 + 1$ *e* $x_3 = y_3 + 1$, *assim*

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{13}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{13}{108}}} + 1,\\
x_2 &= \omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{13}{108}}} + \omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{13}{108}}} + 1,\\
x_3 &= \omega^2\sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \sqrt{-\frac{13}{108}}} + \omega\sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \sqrt{-\frac{13}{108}}} + 1.
\end{aligned}$$

Por curiosidade, a solução da equação pode ser escrito na forma mais simples, que é

$$\left\{2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

2.4 Raízes de Equações Polinomiais de Grau 4

Escrito na Ars Magna: "...é devida a Luigi Ferrari, que inventou a meu pedido...", por Cardano, o método de Ferrari para resolução de equações polinomiais de grau 4 será nosso objeto de estudo nesta seção.

Vamos considerar a seguinte equação

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Sem perda de generalidade, vamos assumir $a = 1$, daí

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

Deixando os dois primeiros termos no lado esquerdo, ou seja no primeiro membro e completando quadrado no primeiro membro, temos

$$\begin{aligned}
x^4 + bx^3 &= -(cx^2 + dx + e) \\
(x^2)^2 + bx^3 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 &= -(cx^2 + dx + e) + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 \\
\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b^2}{4} - c\right)x^2 - dx - e.
\end{aligned}$$

Agora sem atrapalhar o primeiro membro, devemos transformar o segundo membro também em um quadrado perfeito. Uma estratégia é adicionar em ambos os membros $y^2 + 2y(x^2 + \frac{1}{2}bx)$.

Daí

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right)^2 + y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}bx\right) &= \left(\frac{b^2}{4} - c\right)x^2 - dx - e + y^2 + 2y\left(x^2 + \frac{1}{2}bx\right) \\
\left(\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y\right)^2 &= \left(2y + \frac{b^2}{4} - c\right)x^2 + (yb - d)x + (y^2 - e).
\end{aligned}$$

Para definitivamente transformar o segundo membro em um quadrado perfeito, vamos forçar o discriminante em termos de y ser igual a zero. Daí

$$\begin{aligned}
\Delta &= 0 \\
(yb - d)^2 - 4 \cdot \left(2y + \frac{b^2}{4} - c\right) \cdot (y^2 - e) &= 0 \\
8y^3 - 4cy^2 + (2db - 8e)y + (4ec - eb^2 - d^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Ao escolher a raiz y, o segundo membro se transforma em um quadrado perfeito, pois seu discriminante é nulo, daí com α e β convenientes a equação se tornará

$$\left(\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2.$$

Por fim, a equação é resolvida mediante a resolução das duas equações de grau 2:

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y = (\alpha x + \beta)$$

e

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y = -(\alpha x + \beta).$$

Exemplo 2.4.1. *Vamos resolver a equação* $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 3 = 0.$

Solução:Vamos separar a equação em dois membros quadráticos e eliminar o termo cúbico, então

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 3 &= 0 \\ x^4 - 4x^3 &= 2x^2 - 12x + 3 \\ (x^2)^2 - 4x^3 + 4x^2 &= 2x^2 - 12x + 3 + 4x^2 \\ (x^2 - 2x)^2 &= 6x^2 - 12x + 3. \end{aligned}$$

Acrescentando $y^2 + 2y(x^2 - 2x)$ *em ambos os membros, temos*

$$\begin{aligned} y^2 + 2y(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x)^2 &= 6x^2 - 12x + 3 + y^2 + 2y(x^2 - 2x) \\ (y + x^2 - 2x)^2 &= 6x^2 + 2yx^2 - 12x - 4yx + y^2 + 3 \\ (y + x^2 - 2x)^2 &= (6 + 2y)x^2 - (12 + 4y)x + y^2 + 3. \end{aligned}$$

Fazendo o discriminante do segundo membro igual a zero, ou seja, $\Delta = 0$, *obtemos uma equação auxiliar em termos de* x, *para determinar um valor para* y, *assim*

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ (12 + 4y)^2 - 4 \cdot (6 + 2y) \cdot (y^2 + 3) &= 0 \\ -8y^3 - 8y^2 + 72y + 72 &= 0 \\ y^3 + y^2 - 9y - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Uma simples verificação concluímos que $f(-1) = 0$*, substituindo* $y = -1$ *na equação, temos*

$$\begin{aligned}(-1 + x^2 - 2x)^2 &= (6-2)x^2 - (12-4)x + 1 + 3\\ (-1 + x^2 - 2x)^2 &= 4x^2 - 8x + 4.\end{aligned}$$

Portanto, teremos que resolver duas equações, que são

$$-1 + x^2 - 2x = 2x - 2$$

ou

$$-1 + x^2 - 2x = -2x + 2.$$

Logo, a solução da equação é $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\}$.

Capítulo 3

Irredutibilidade de Polinômios e Fatoração

Nesta seção vamos discorrer sobre a polinômios irredutíveis, fatoração de polinômios, relação de Girard e alguns critérios de irredutibilidade.

3.1 Polinômios Irredutíveis

Definição 3.1.1. Sejam K um corpo, $f(x) \in K[x]$, $g(x) \in K[x]$ e $h(x) \in K[x]$. Dizemos que $f(x)$ é irredutível se, e somente se, $f(x) = g(x)h(x)$, então $g(x)$ ou $h(x)$ é polinômio constante não nulo sobre K. Caso contrário dizemos que o polinômio $f(x)$ é redutível em $K[x]$. No entanto, um polinômio $f(x)$ é redutível em $K[x]$ se, e somente se, existem polinômios $g(x)$ e $h(x)$, tais que $f(x) = g(x)h(x)$, com $0 < \partial(g(x)) < \partial(f(x))$ e $0 < \partial(h(x)) < \partial(f(x))$.

Exemplo 3.1.1. *Considere o polinômio $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Suas raízes são complexas, pois seu discriminante é negativo. Portanto, é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.*

Proposição 3.1.1. *Todo polinômio em $K[x]$ de grau 1 é irredutível.*

Demonstração. Seja $f(x)$ de grau 1 e se $f(x) = g(x)h(x)$, então $\partial(f(x)) = \partial(g(x)) + \partial(h(x))$. Pela hipótese, concluímos que $\partial(g(x)) + \partial(h(x)) = 1$. Logo, se a soma dos graus é 1, então $g(x)$ ou $h(x)$ é polinômio constante não nulo sobre K. □

A proposição seguinte é oriunda do teorema fundamental da aritmética e do fato que o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos ser algebricamente fechado, demonstrado pela primeira vez, por K. F. Gauss (1777-1855), em 1848.

Proposição 3.1.2. *Um polinômio sobre um corpo K algebricamente fechado é irredutível se, e somente se, tem grau 1.*

Demonstração. Como K é algebricamente fechado, então existe um $\alpha \in K$, tal que $f(\alpha) = 0$ e que $f(x)$ é irredutível em $K[x]$. Temos que, $(x - \alpha \mid f(x))$, desta forma, existe um $g(x) \in K$ em que $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$. Como $f(x)$ é irredutível, tem-se que $g(x) = c$, onde c é uma constante, logo $f(x) = cx - c\alpha$, concluímos que $\partial(f(x)) = 1$. A recíproca é verdadeira, pela proposição (3.1.1). □

Para entendermos melhor sobre irredutibilidade, vamos estender nossos conceitos.

Definição 3.1.2. Seja um corpo B e um corpo A, chamamos B de extensão de A se $A \subset B$.

Exemplo 3.1.2. *O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é uma extensão do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é uma extensão de $\mathbb{R}$ e também de $\mathbb{Q}$.*

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Exemplo 3.1.3. *Considere o polinômio $f(x) = x^4 - 9$. Vamos expressar o polinômio irredutível em cada extensão.*

Solução: $f(x) = x^4 - 9$ pode ser fatorado pois é uma diferença de quadrados, logo $f(x) = x^4 - 9 = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 3)$ em $\mathbb{Q}[x]$ em que os fatores são irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$.

Seguindo este raciocínio, vamos fatorar mais uma vez o primeiro fator, pois ainda se trata de uma diferença de quadrados, assim temos $f(x) = x^4 - 9 = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 3) = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x^2 + 3)$ em $\mathbb{R}[x]$ e que agora os fatores são irredutíveis sobre $\mathbb{R}$.

Por fim, fatoramos o terceiro fator sobre o corpo dos complexos, então $f(x) = x^4 - 9 = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 3) = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x^2 + 3) = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) \cdot (x - i\sqrt{3})$ em $\mathbb{C}[x]$.

Neste exemplo, vimos que $f(x)$ é redutível em $\mathbb{Q}[x]$, mas não possui raízes em $\mathbb{Q}[x]$. O mesmo vale para o corpo dos reais, mesmo tendo raízes reais, mas ainda possui raízes complexas, o que faz de $f(x) = x^4 - 9 = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 3) = (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x^2 + 3)$ ser nesta forma irredutível sobre $\mathbb{R}$. Finalmente, o polinômio pôde ser fatorado por completo, o que faz existir uma igualdade de decomposição de $f(x)$ em polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo 3.1.4. *Vamos determinar se o polinômio $f(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ é irredutível ou não sobre o corpo $\mathbb{Q}$.*

Solução: As possíveis raízes racionais são $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Fazendo o teste, temos que $f(1) = 0$ e $f(-2) = 0$. Mas, as duas raízes restantes não são racionais e pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -4 & -2 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & & \end{array}.$$

Portanto, $f(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2-2)$, *um produto de polinômios irredutíveis sobre* $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.1.3. (Teorema Fundamental da Álgebra em $\mathbb{R}[x]$) Todo polinômio $f(x)$ com coeficientes reais e grau $n \geq 1$ se escreve, a menos de ordem, como

$$f(x) = a \cdot (x-\alpha_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{r_k} \cdot p_1(x)^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_s(x)^{n_s},$$

em que $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ é o coeficiente líder de $f(x)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são as raízes reais distintas de $f(x)$, $p_j(x) = x^2 + b_j x + c_j$ são polinômios distintos com coeficientes reais, tais que $b_j^2 - 4c_j < 0$, para todo $j = 1, \ldots, s$ e por fim $r_1, \ldots r_k, n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tais que $r_1 + \ldots + r_k + 2n_1 + \ldots + 2n_s = n$.

Exemplo 3.1.5. *Vamos fatorar* $f(x) = x^4 + 2x^2 - 2$ *em polinômios mônicos irredutíveis em* $\mathbb{R}[x]$.

Solução: Chamando $x^2 = y$, *temos de resolver apenas uma equação polinomial de grau 2, assim suas raízes podem ser facilmente calculadas, então*

$$\begin{aligned} y^2 + 2y - 2 &= 0 \\ y^2 + 2y &= 2 \\ y^2 + 2y + 1 &= 3 \\ (y+1)^2 &= 3 \\ y &= -1 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Como $x^2 = y$, *temos que* $x = \pm\sqrt{y}$, *então*

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-1+\sqrt{3}}, \\ x_2 &= \sqrt{-1-\sqrt{3}}, \\ x_3 &= -\sqrt{-1+\sqrt{3}}, \\ x_4 &= -\sqrt{-1-\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Observe que temos duas raízes reais e duas raízes complexas, logo $f(x)$ *pode ser escrito como um produto de fatores polinomiais irredutíveis em* $\mathbb{R}[x]$, *então*

$$f(x) = \left(x - \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right) \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2),$$

em que $(x - z_1) \cdot (x - z_2) = (x^2 + \sqrt{3} + 1)$ *são as raízes complexas, portanto*

$$f(x) = \left(x - \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right) \cdot \left(x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right) \cdot (x^2 + \sqrt{3} + 1)$$

é a fatoração em polinômios mônicos irredutíveis sobre $\mathbb{R}$.

Proposição 3.1.3. *Seja* $f(x)$ *um polinômio de grau* $n \geq 1$ *sobre um corpo* K *algebricamente fechado em que seu coeficiente líder é denotado por* a. *Então podem ser determinados* $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \in K$ *tais que*

$$f(x) = a(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n).$$

Demonstração. Vamos usar indução sobre n, então para $n = 1$, o grau do polinômio é 1, logo $f(x) = ax + b = a(x - (-b/a))$.

Para $n \geq 1$, supomos que a proposição seja verdadeiro para todo polinômio de grau $n - 1$. Como $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \in K$, pois é algebricamente fechado, temos que $f(x) = (x - \alpha_1)q(x)$, com $q(x)$ de grau $n - 1$. Pela hipótese, $q(x) = a(x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$. Portanto, como o coeficiente líder de $q(x)$ é a que também é de $f(x)$, logo $f(x) = a(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$. □

Exemplo 3.1.6. *Vamos expandir o polinômio* f *sabendo que o coeficiente lider é* 2 *e suas raízes são* $\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

Solução: Pela preposição (3.1.3) podemos escrever o polinômio na forma

$$f(x) = 2(x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Agora é só desenvolver o produto, que será a forma expandida do polinômio $f(x)$, *então*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= (2x - 2) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3.2 Polinômios Simétricos

Definição 3.2.1. Seja K um corpo e f um polinômio em $K[x_1, \ldots, x_n]$ então f é simétrico se $f(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)})$ para qualquer permutação φ em S_n. Ou seja,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)})$$

para todas as bijeções $\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Exemplo 3.2.1. *Considere o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ em $K[x_1, x_2]$. Observe que o polinômio é simétrico, pois $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = f(x_2, x_1)$. Podemos verificar numericamente, assim $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 - 1 \cdot 2 = 1 + 4 - 2 = 3$ e $f(2, 1) = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 = 4 + 1 - 2 = 3$.*

Exemplo 3.2.2. *Considere o polinômio $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1$ em $K[x_1, x_2]$. Observe que o polinômio não é simétrico, pois $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \neq f(x_2, x_1)$.*

Exemplo 3.2.3. *Os polinômios escritos na forma*

$$\begin{aligned}
s_0 &= x_1^0 + x_2^0 + \ldots + x_n^0, \\
s_1 &= x_1^1 + x_2^1 + \ldots + x_n^1, \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \\
&\vdots \\
s_k &= x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,
\end{aligned}$$

são simétricos.

Exemplo 3.2.4. *Seja o polinômio geral*

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)$$

sua forma expandida é

$$f(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^j \sigma_j x^{n-j} + \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

Os coeficientes de f são expressões definidas como:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + \ldots + x_n \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 \cdot \ldots \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Essas funções simétricas são as elementares de Girard.

Vamos escrever os polinômios simétricos da definição (3.2.1) em duas e três variáveis em função dos coeficientes de um polinômio de grau 2 e 3 respectivamente, nos exemplos a seguir:

Exemplo 3.2.5. *Vamos considerar o polinômio de grau 2, na forma $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ com coeficiente líder $a = 1$. Expandindo, temos $f(x) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$ sendo que $\sigma_1 = x_1 + x_2$ a soma das raízes e $\sigma_2 = x_1 \cdot x_2$ o produto das raízes, segue que*

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2. \\ s_1 &= x_1^1 + x_2^1 = x_1 + x_2 = \sigma_1. \end{aligned}$$

Para $n \geqslant 2$, temos que $x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$, segue que

$$\begin{aligned} s_2 &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1^{2-1} + x_2^{2-1}) - x_1 x_2 (x_1^{2-2} + x_2^{2-2}) = \sigma_1 s_1 - \sigma_2 s_0 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2. \\ s_3 &= x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2. \\ s_4 &= x_1^4 + x_2^4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2. \\ &\vdots \\ s_n &= \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} \text{ com } n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.6. *Vamos considerar o polinômio de grau 3, na forma $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$ com coeficiente líder $a = 1$. Expandindo, temos $f(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot x^2 + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) \cdot x - x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ sendo que $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$ a soma das raízes, $\sigma_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$ a soma das raízes tomadas dois a dois e $\sigma_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ o produto das raízes, segue que*

$$\begin{aligned} s_0 &= x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 1 + 1 + 1 = 3. \\ s_1 &= x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1. \\ s_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2. \end{aligned}$$

Para $n \geqslant 3$, temos que $x_1^n + x_2^n + x_3^n = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + x_3^{n-1}) - (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + +x_2 \cdot x_3)(x_1^{n-2} + x_2^{n-2} + x_3^{n-2}) + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 (x_1^{n-3} + x_2^{n-3} + x_3^{n-3})$, segue que

$$\begin{aligned}
s_3 &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + \sigma_3 s_0 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3 = \\
&= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \\
s_4 &= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1 = \\
&= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2. \\
&\vdots \\
s_n &= \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2} + \sigma_3 s_{n-3} \textit{ com } n \geqslant 3.
\end{aligned}$$

Estes resultados serão usados na seção 4 e 6 no teorema de Sylvester. Uma aplicação interessante é dada também em problemas sobre equações polinomiais que aparecem cálculos exagerados como soma de potências de suas raízes e a solução se torna viável através dos polinômios simétricos aqui apresentados pois, não precisamos conhecer as raízes do polinômio. Vejamos um exemplo:

Exemplo 3.2.7. *Considere a equação polinomial $x^2 - 4x + 1 = 0$. Sabendo que x_1 e x_2 são raízes da equação vamos determinar $x_1^6 + x_2^6$.*

Solução: Temos que $\sigma_1 = 4$ e $\sigma_2 = 1$ e lembrando que $s_n = \sigma_1 s_{n-1} - \sigma_2 s_{n-2}$, então

$$\begin{aligned}
s_0 &= x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2. \\
s_1 &= x_1^1 + x_2^1 = x_1 + x_2 = \sigma_1 = 4. \\
s_2 &= x_1^2 + x_2^2 = \sigma_1 s_1 - \sigma_2 s_0 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 14. \\
s_3 &= x_1^3 + x_2^3 = \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 = 4 \cdot 14 - 1 \cdot 4 = 52. \\
s_4 &= x_1^4 + x_2^4 = \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 = 4 \cdot 52 - 1 \cdot 14 = 194. \\
s_5 &= x_1^5 + x_2^5 = \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 = 4 \cdot 194 - 1 \cdot 52 = 724. \\
s_6 &= x_1^6 + x_2^6 = \sigma_1 s_5 - \sigma_2 s_4 = 4 \cdot 724 - 1 \cdot 194 = 2702.
\end{aligned}$$

Portanto, $x_1^6 + x_2^6 = 2702$.

3.3 Relações de Girard

As relações de Girard é um caso particular das funções simétricas e são chamadas de polinômios simétricos elementares.

Exemplo 3.3.1. *Seja* x_1 *e* x_2 *duas raízes reais não necessariamente distintas de um polinômio quadrático. Podemos escrever o polinômio em sua forma fatorada e sem perda de generalidade consideraremos o coeficiente líder igual a* 1*. Então,*

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Desenvolvendo o produto, temos

$$p(x) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

Observe que os coeficientes do polinômio em sua forma expandida estão em termos de suas raízes, assim temos que $S = x_1 + x_2$ *e* $P = x_1x_2$*. Chamamos esta relação de soma e produto.*

Agora vamos obter as relações para o caso de um polinômio de grau 3, sendo que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Exemplo 3.3.2. *Vamos obter as relações de Girard para equação* $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ *com* $a \neq 0$*.*

Solução: Desenvolvendo o produto e igualando em sua forma geral expandida, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= a((x^3 - x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3) \\ x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

Pela igualdade de polinômios, temos

- $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2 + x_3)$
- $\frac{c}{a} = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$
- $\frac{d}{a} = -x_1x_2x_3.$

Observe que há uma permutação das raízes do polinômio e de uma forma geral e podemos escrever as relações de Girard de uma equação polinomial de grau n em que

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ como uma soma um a um, dois a dois, três a três e assim sucessivamente.

Exemplo 3.3.3. *Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$. Vamos calcular $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.*

Solução: Pelas relações de Girard, temos que

- $(x_1 + x_2 + x_3) = 8$.
- $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 17$.
- $x_1x_2x_3 = 10$.

Consideremos o quadrado da soma das três raízes, assim aparecerá a soma dos quadrados das raízes em seu desenvolvimento, logo

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2 + x_3)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\
(8)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\
64 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2 \cdot 17 \\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 64 - 34 \\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 30.
\end{aligned}$$

3.4 Um Critério de Irredutibilidade

Um critério muito útil de irredutibilidade em $\mathbb{Q}[x]$ é o de Eisenstein, por ser de fácil entendimento e por possuir uma aplicabilidade mais prática e condizente a um nível básico de ensino na Matemática.

Teorema 3.4.1. (Critério de Eisenstein) Seja o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ em $\mathbb{Z}[x]$. Se existe um número p primo tal que $p \nmid a_n$, $p \mid a_0$, ..., $p \mid a_{n-1}$ e $p^2 \nmid a_0$. Então, $p(x)$ é irredutível em $\mathbb{Q}[x]$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $f(x)$ seja fatorado, tal que $f(x) = g(x)q(x)$ sendo que $g(x)$ e $q(x)$ estejam em $\mathbb{Z}[x]$. Segue que

$$g(x) = b_r x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \ldots + b_1 + a_0$$

e

$$q(x) = c_s x^s + c_{s-1}x^{s-1} + \ldots + c_1 + a_0.$$

Ainda, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = (b_r x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \ldots + b_1 + a_0)(c_s x^s + c_{s-1}x^{s-1} + \ldots + c_1 + a_0)$. Como $a_0 = b_0c_0$ e $p \mid a_0$, então $p \mid b_0$ ou $p \mid c_0$. Suponhamos que $p \mid b_0$ e como $p \nmid b_r c_s$, então $p \nmid b_r$. Sendo que $p \nmid b_t$ pois t é o menor índice, tal que $0 < t \leq r < n$, tem-se $p \mid b_0$, $p \mid b_1$, ..., $p \mid b_{t-1}$ e $p \nmid b_t$. Desta forma, $a_t = b_0 c_s + b_1 c_{t-1} + b_2 c_{t-2} + \ldots + b_{t-1} c_1 + b_t + c_0$ e $p \mid a_t$, pois $t < n$, então $p \mid b_t c_0$. Se $p \nmid c_0$, então $p \mid b_t$, o que é um absurdo. $\square$

Exemplo 3.4.1. *Considere o polinômio* $f(x) = x^{40} + 15x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$. *Determine se* $f(x)$ *é irredutível em* $\mathbb{Q}[x]$.

Solução: Considerando o número primo $p = 3$, *temos que* $3 \mid 3$, $3 \mid 15$, $3 \nmid 1$ *e* $3^2 \nmid 3$. *Portanto, pelo critério de Eisenstein* $f(x)$ *é irredutível em* $\mathbb{Q}[x]$.

Exemplo 3.4.2. *Seja* $f(x) = x^n - p$, *com* p *primo, para todo* $n \geq 1$ *tem-se que* $f(x)$ *é irredutível em* $\mathbb{Q}[x]$.

Solução: Para $n = 1$ *é imediato. Para* $n \geq 2$, *pelo critério de Eisenstein, tem-se para* p *primo, claramente* $f(x)$ *é irredutível em* $\mathbb{Q}[x]$.

Capítulo 4

Aplicação da Derivada e a Existência de Raízes

Vamos utilizar neste capítulo um conceito do cálculo muito importante, a derivada de um polinômio. É um assunto de fácil entendimento e manipulação, pois estaremos trabalhando com polinômios em uma varável e por esse motivo, este conceito pode e deve ser empregado no ensino de polinômios para séries do Ensino Médio. Vale ressaltar, que na física, a derivada é bastante explorada em cinemática, em cálculos de distâncias, velocidade e aceleração em relação ao tempo. Vamos começar definindo a derivada, para inicialmente adotarmos um critério para decidir se uma determinada raiz do polinômio tem multiplicidade, ou seja, se as raízes se repetem para o polinômio em questão.

4.1 A Derivada de um Polinômio

Definição 4.1.1. Sejam K um corpo e $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$, sua derivada é definida como $f'(x) \in K[x]$ e escrita como o polinômio

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1}. \tag{4.1.1}$$

Observação 4.1.1. *1. Se o polinômio for identicamente nulo, definimos $f'(x) = 0$.*

2. Se o polinômio for constante, a derivada será o polinômio identicamente nulo.

3. Para grau $n \geq 1$, vale a regra definida em (4.1.1).

Exemplo 4.1.1. *Considere K um corpo e o polinômio $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 7 \in K[x]$. A sua derivada é $p'(x) = 3x^2 - 10x + 3 \in K[x]$.*

Definição 4.1.2. Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$ e pondo $f^{(1)}(x) = f'(x)$

definimos as derivadas sucessivas de f por

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})^{(1)}(x) \text{ com cada } k \in \mathbb{N}. \tag{4.1.2}$$

Exemplo 4.1.2. *Considere o polinômio* $p(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 13 \in \mathbb{C}[x]$. *As suas derivadas sucessivas são:*

- $p^{(1)}(x) = 4x^3 + 9x^2 - 14x + 9,$
- $p^{(2)}(x) = 12x^2 + 18x - 14,$
- $p^{(3)}(x) = 24x + 18,$
- $p^{(4)}(x) = 24,$
- $p^{(5)}(x) = 0.$

4.2 Raízes Múltiplas

Definição 4.2.1. Sejam K um corpo, $f(x) \in K[x]$ não nulo e α uma raiz em K de $f(x)$. Se existe um número natural positivo m tal que $f(x) = (x - \alpha)^m q(x)$ com $q(x) \in K[x]$ e $q(\alpha) \neq 0$, então α é uma raiz de multiplicidade m de $f(x)$.

Proposição 4.2.1. *Sejam K um corpo, $f(x) \in K[x]$ não nulo e α uma raiz em K de $f(x)$. Então, $f(\alpha) = 0$ e $f'(\alpha) \neq 0$ se, e somente se, α é uma raiz simples.*

Demonstração. Como α é uma raiz, então, podemos escrever

$$f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x) \text{ com } g(x) \in K[x] \text{ e } g(\alpha) \neq 0.$$

Derivando, temos

$$f'(x) = m \cdot (x - \alpha)^{m-1} \cdot g(x) + (x - \alpha)^m \cdot g'(x).$$

Pela hipótese, $g(\alpha) \neq 0$ e observe que $f'(x) \neq 0$ desde que $m = 1$, o que demonstra a proposição. □

Proposição 4.2.2. *Sejam K um corpo, $f(x) \in K[x]$ não nulo e α uma raiz em K de $f(x)$. Para que α seja raiz múltipla de $f(x)$, é necessário e suficiente que α seja também raiz de $f'(x)$.*

Demonstração. Sendo α uma raiz múltipla de $f(x)$, então existe um $g(x) \in K[x]$ com $g(\alpha) \neq 0$ tal que $f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x)$ com $m > 1$. Derivando $f(x)$, temos $f'(x) = m \cdot (x - \alpha)^{m-1} \cdot g(x) + (x - \alpha)^m \cdot g'(x)$. Como $m > 1$, então $f'(\alpha) = 0$. Por outro lado, se $f'(\alpha) = 0$ suponhamos, por absurdo, que α é raiz simples de $f(x)$, então $f'(\alpha) = g(\alpha)$, o que é um absurdo, pois $f'(\alpha) = 0$ e $g(\alpha) \neq 0$. $\square$

Exemplo 4.2.1. *Considere função $g(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)$ e sua derivada $g'(x) = 3x^2 - 6x$. Temos que $g(2) = 0$ e $g(-1) = 0$. Por outro lado, $g'(2) = 0$ e $g'(-1) = 9$. Portanto, a função derivada $g'(x)$ possui uma raiz que é a mesma da função $g(x)$, o que garante sua multiplicidade como podemos observar no gráfico da figura (4.1).*

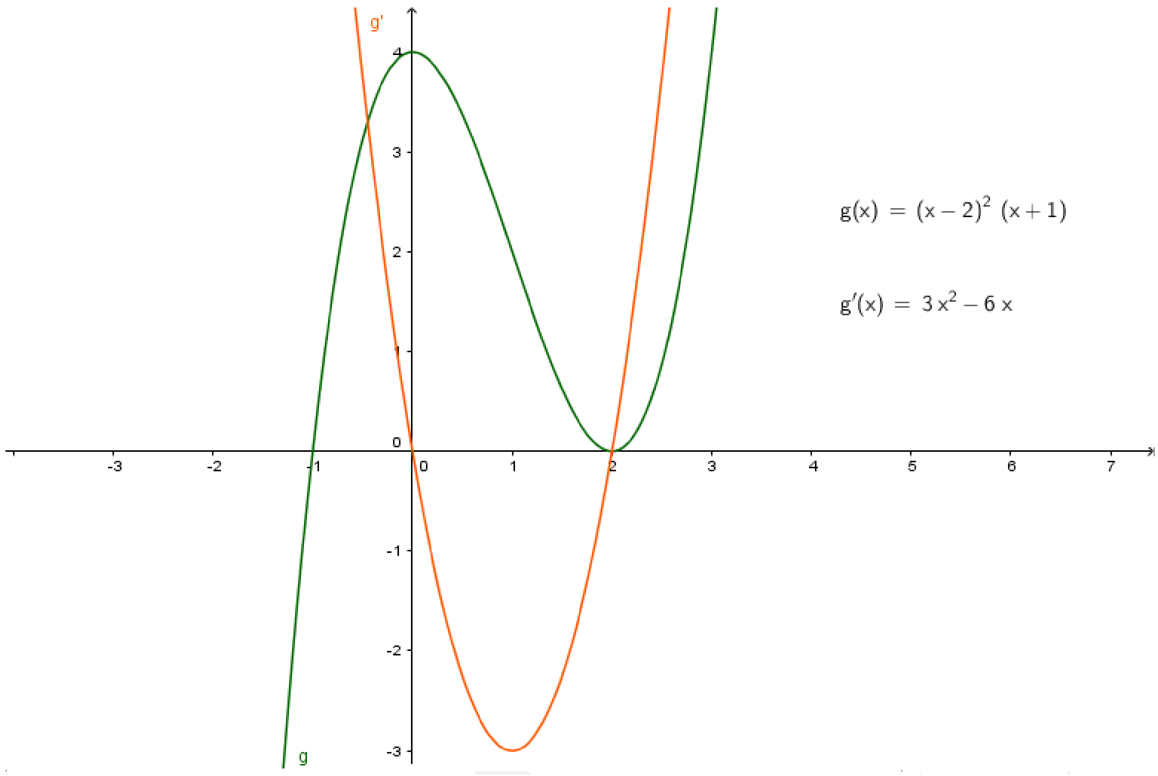

Figura 4.1: Função polinomial com raiz múltipla.

4.3 Teorema de Gauss-Lucas

Um resultado necessário para o estudo do teorema de Gauss-Lucas é o fecho convexo e que definimos como o conjunto das combinações convexas dos pontos de $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}^2$, tal que é a menor região convexa do $\mathbb{R}^2$ que contém o conjunto X.

Exemplo 4.3.1. *Seja $p(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - x - 20$. Vamos determinar o fecho convexo formado por suas raízes no plano complexo.*

Solução: As raízes de $p(x)$ são expressas por z_1, z_2, z_3 e z_4 no plano como mostra a figura:

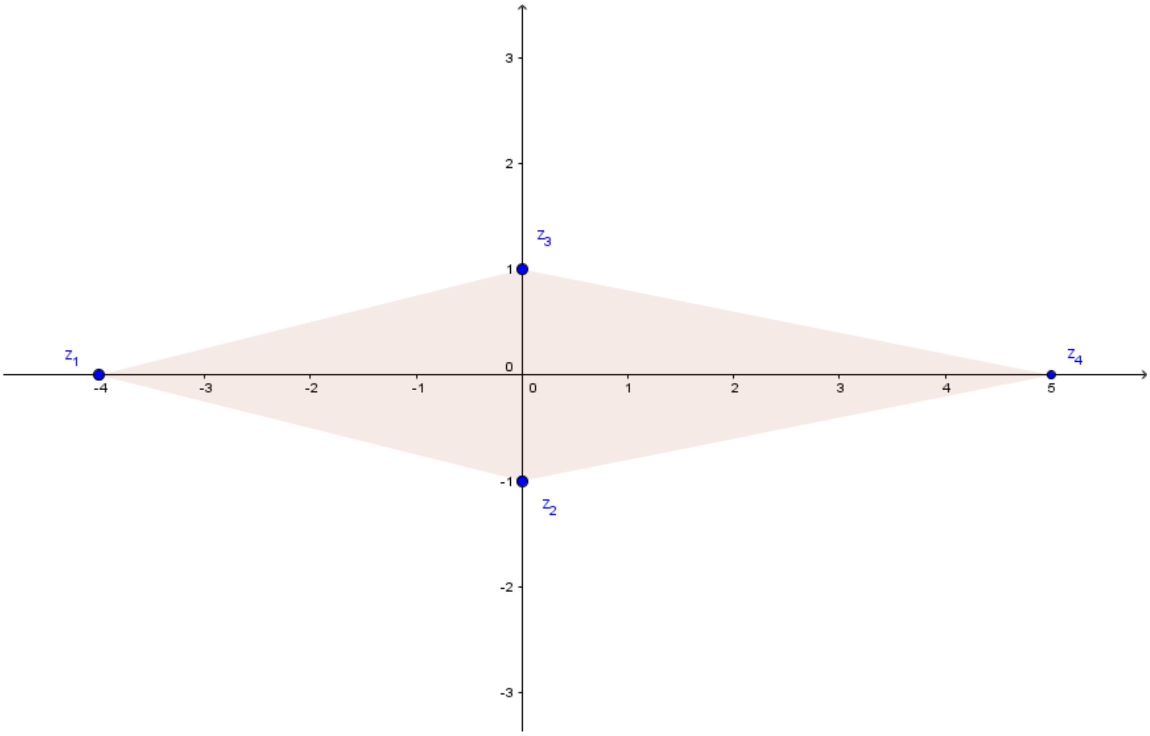

Figura 4.2: Fecho convexo das raízes complexas do polinômio $p(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - x - 20$.

As raízes de $p(x)$ formam no plano um quadrilátero convexo, ou seja o fecho convexo formado pelas raízes.

Exemplo 4.3.2. *Seja $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Esse polinômio possui as 3 raízes reais. Portanto o fecho convexo será simplesmente um segmento de reta, como mostra a figura:*

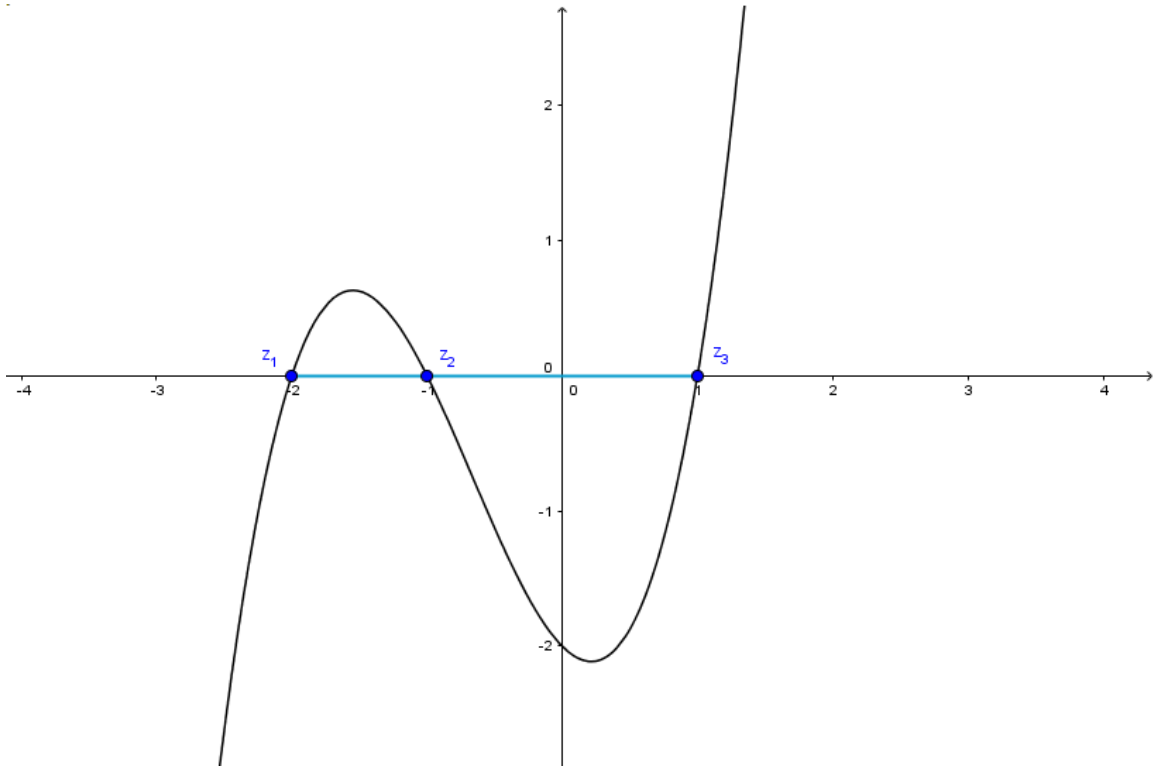

Figura 4.3: Fecho convexo das raízes reais de $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Teorema 4.3.1. (Gauss-Lucas) As raízes de p' pertencem ao fecho convexo das raízes do próprio polinômio p.

Demonstração. Seja $p(x) = (x - x_1) \cdot \ \ldots \ \cdot (x - x_n)$. Dividindo $p'(x)$ por $p(x)$, temos

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{1}{(x - x_1)} + \ \ldots \ + \frac{1}{(x - x_n)}.$$

Suponha que α seja raiz de $p'(x)$, mas não de $p(x)$. Ainda supondo por absurdo que α não pertença ao fecho convexo das raízes de $p(x)$, teremos por uma linha que passa por α e esta linha não intersecta os pontos do fecho convexo de $p(x)$, vetores $\alpha - x_1, \ldots, \alpha - x_n$ que residem no semiplano determinado. Então, os vetores

$$\frac{1}{\alpha - x_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha - x_n}$$

também residem no semiplano, pois

$$\frac{1}{x_1} = \frac{\overline{x}_1}{|x_1|^2}.$$

Consequentemente,

$$\frac{p'(\alpha)}{p(\alpha)} = \frac{1}{(\alpha - x_1)} + \ \ldots \ + \frac{1}{(\alpha - x_n)} \neq 0.$$

Como $\frac{p'(\alpha)}{p(\alpha)} \neq 0$ e isto é uma contradição, temos que α pertence ao fecho convexo de $p'(x)$. □

Exemplo 4.3.3. *Vamos mostrar o comportamento de um polinômio de grau* 3 *com raízes complexas.*

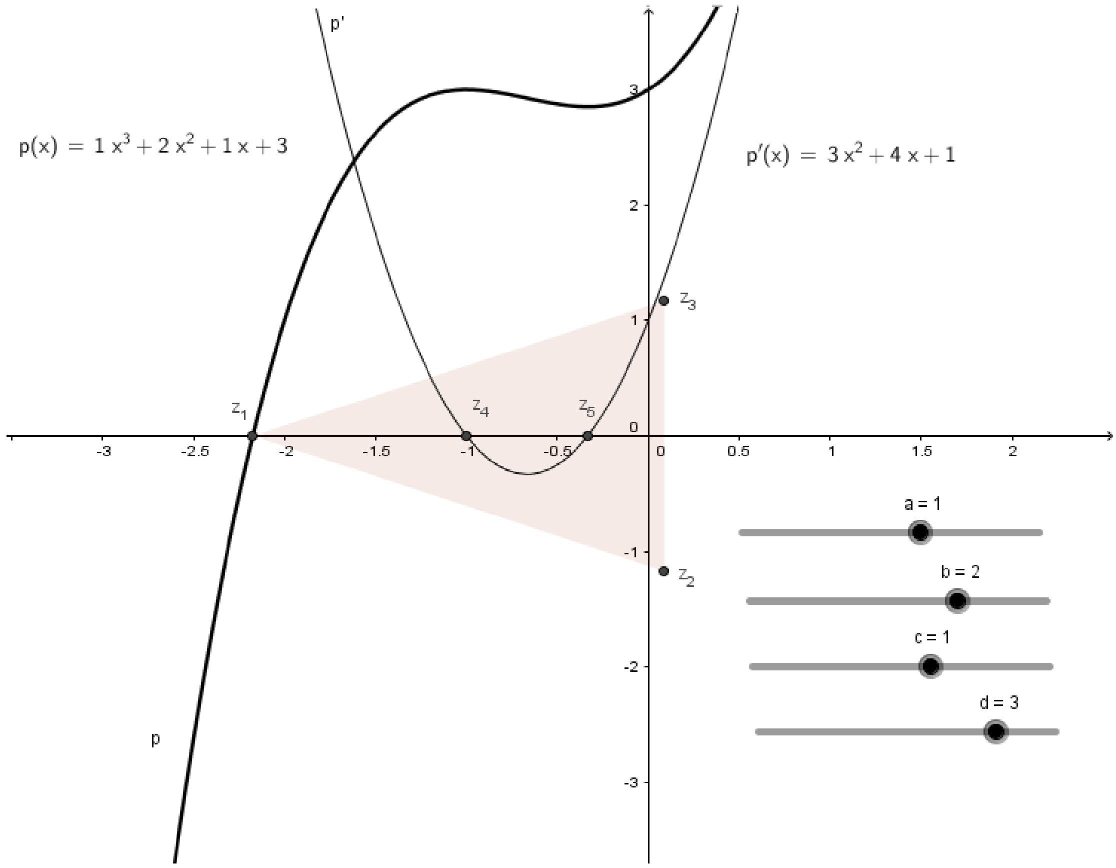

Figura 4.4: Fecho convexo das raízes complexas de um polinômio de grau 3.

A figura (4.4), ilustra o gráfico gerado pelo polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$*, cujas raízes complexas são* z_2, z_3 *e a raiz real é* z_1*. Observe que as raízes* z_4 *e* z_5 *do polinômio* $p'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ *estão dentro do polígono formado pelas raízes de* $p(x)$*, ressaltando que o plano em questão é complexo.*

Exemplo 4.3.4. *Vamos mostrar o comportamento de um polinômio de grau* 3 *com raízes reais, não complexas.*

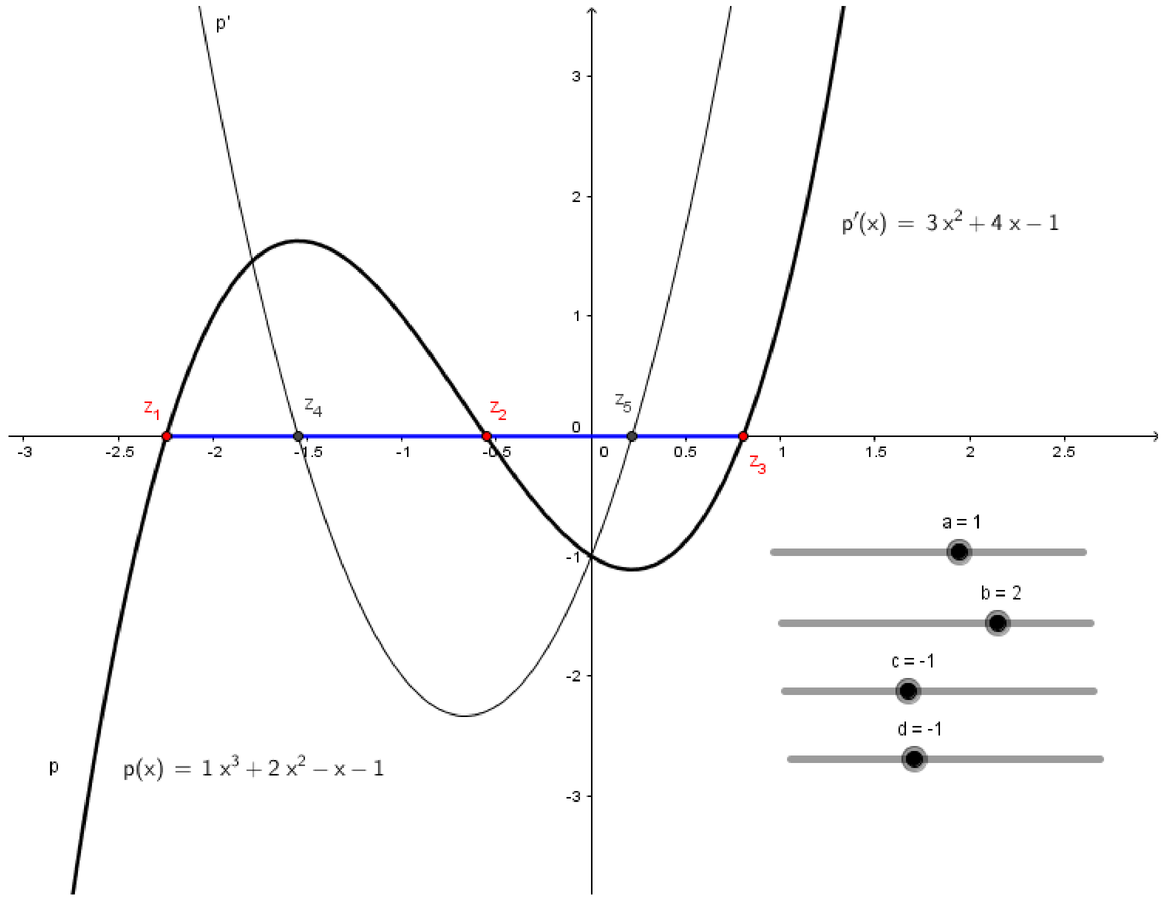

Figura 4.5: Fecho convexo das raízes reais, não complexas, de um polinômio de grau 3.

A figura (4.5), ilustra o gráfico gerado pelo polinômio $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$, *cujas raízes reais, não complexas são* $\{z_1, z_2, z_3\}$. *Observe que as raízes* z_4 *e* z_5 *do polinômio* $p'(x) = 3x^2 + 4x - 1$ *estão no mesmo segmento das raízes de* $p(x)$.

4.4 Teorema de van der Berg

Teorema 4.4.1. (van der Berg) Seja as raízes de um polinômio cúbico p que formam os vértices do triângulo ABC no plano complexo. Tem-se que, as raízes de p' são os pontos focais da elipse tangente aos lados do ABC em seus pontos médios.

Demonstração. Sejam $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ e $\{z_0,\ z_1,\ z_2\}$ as raízes do polinômio $p(x)$, selecionamos os números, ξ_0, ξ_1, ξ_2 de modo que

$$z_0 = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2\,,\ z_1 = \xi_0 + \xi_1\varepsilon + \xi_2\varepsilon^2\, e\ z_2 = \xi_0 + \xi_1\varepsilon^2 + \xi_2\varepsilon. \tag{4.4.1}$$

Na qual podemos escrever, sob a forma

$$3\xi_0 = z_0 + z_1 + z_2\,,\ 3\xi_1 = z_0 + z_1\varepsilon^2 + z_2\varepsilon\, e\ 3\xi_2 = z_0 + z_1\varepsilon + z_2\varepsilon^2. \tag{4.4.2}$$

Assumimos, que $\xi_0 = 0$.

A curva $\xi_1 e^{i\varphi} + \xi_2 e^{-i\varphi}$, com $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, é uma elipse cujo semieixos são as bissetrizes exteriores e interiores do ângulo $\xi_1 \hat{O} \xi_2$, onde O é a origem, e os comprimentos dos semi-eixos são iguais a $|\xi_1|+|\xi_2|$ e $\||\xi_1|-|\xi_2|\|$.

Observamos que, a curva considerada é a imagem do círculo unitário sob a aplicação $z \mapsto \xi_1 z + \xi_2 \overline{z}$. Além disso, se $\xi_1 = |\xi_1| e^{i\alpha}$ e $\xi |\xi_2| e^{i\beta}$, então

$$\xi_1 e^{i\varphi} + \xi_2 e^{-i\varphi} = |\xi_1| e^{i(\varphi+\alpha)} + |\xi_2| e^{i(\beta-\varphi)}.$$

O valor absoluto desta expressão atinge o seu máximo em $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2} + k\pi$ e seu mínimo em $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$. Estes valores de φ corresponde as bissetrizes indicadas anteriormente.

Seja f_1 e f_2 os pontos focais da elipse $\xi_1 e^{i\varphi} + \xi_2 e^{-i\varphi}$, tem-se que $\frac{f_1 f_2}{\xi_1 \xi_2}$ é um número positivo, logo

$$(|\xi_1|+|\xi_2|)^2 - (|\xi_1|-|\xi_2|)^2 = 4|\xi_1 \xi_2|.$$

Então, $f_1 f_2 = 4\xi_1 \xi_2$.

Considerando as equações (4.4.1) e que $\xi_0 = 0$, mostramos que os vértices z_0, z_1 e z_2 do triângulo que tangencia a elipse considerada possui possui seus pontos médios na própria elipse. Portanto, os pontos focais da elipse coincidem com a derivada da função polinomial $p(x)$. Os pontos focais da elipse satisfazem a equação $z^2 - \xi_1 \xi_2 = 0$ e as raízes de $p'(x)$ satisfazem $3z^2 + z_0 z_1 + z_0 z_2 + z_1 z_2 = 0$, i.e., $3(z^2 - \xi_1 \xi_2) = 0$. $\square$

Exemplo 4.4.1. *Determine o polinômio $p(x)$ com coeficiente líder igual a 1 em que suas raízes são os focos da elipse $44x^2 + 400y^2 = 11$.*

Solução: Escrevendo a equação da elipse na forma canônica, temos

$$\begin{aligned} 44x^2 + 400y^2 &= 11 \\ \frac{44}{11}x^2 + \frac{400}{11}y^2 &= 1 \\ \frac{x^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{11}{400}\right)} &= 1 \\ \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{11}}{20}\right)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Os focos são dados por $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$, em que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Para c, temos

$$c = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{11}}{20}\right)^2} = \frac{1}{20}\sqrt{89}.$$

Os pontos focais são

$$F_1 = \left(-\frac{1}{20}\sqrt{89},\, 0\right)$$

e

$$F_2 = \left(\frac{1}{20}\sqrt{89},\, 0\right).$$

Portanto, o polinômio $p(x)$ é escrito como

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{20}\sqrt{89}\right)\left(x + \frac{1}{20}\sqrt{89}\right).$$

Expandindo a expressão, temos

$$p(x) = x^2 - \frac{89}{400}.$$

Observe o gráfico da figura (4.6) gerado pela função e a elipse dada.

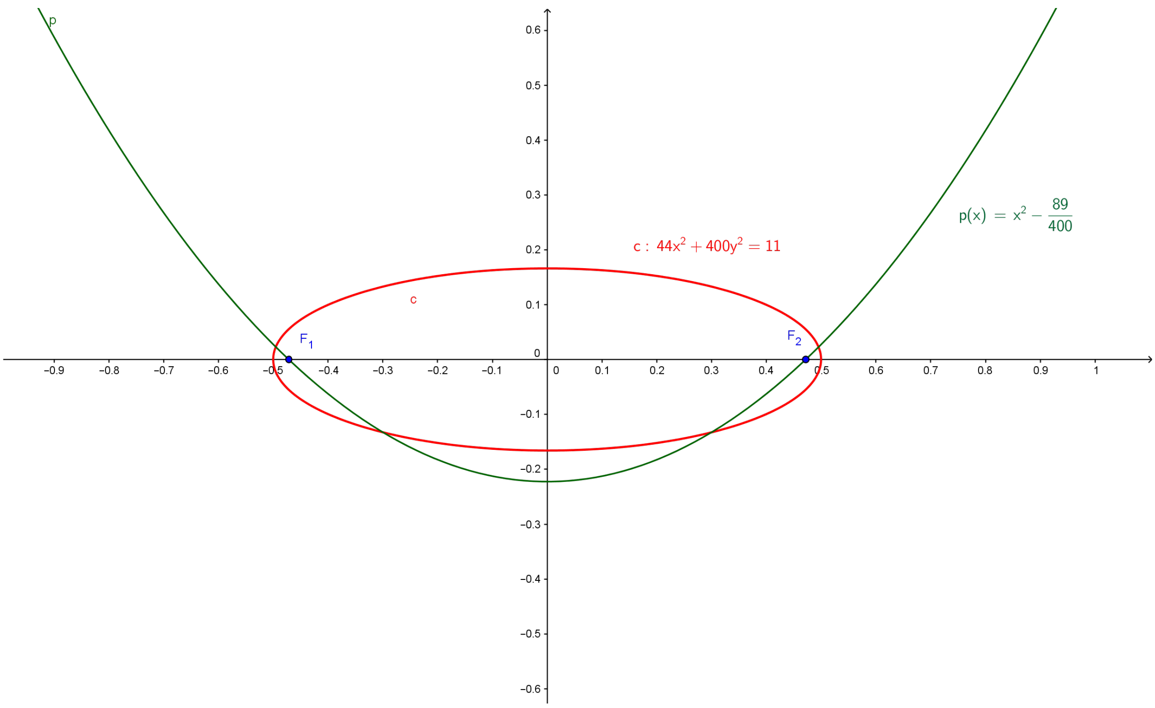

Figura 4.6: Gráfico gerado pela função $p(x) = x^2 - \frac{89}{400}$ e a elipse dada.

Exemplo 4.4.2. *Vamos determinar a equação da elipse e tal que o ponto $(0, 2) \in e$ e que tangencia internamente o triângulo em seus pontos médios, com vértices que são afixos equivalentes às raízes do polinômio $q(x) = x^3 - 9x + 28$.*

Solução: Pelo teorema (4.4.1), não é preciso determinar as raízes de $q(x)$. Basta derivá-la e determinar suas raízes, que são os pontos focais da elipse, então

$$q'(x) = 3x^2 - 9.$$

Suas raízes são $-\sqrt{3}$ *ou* $\sqrt{3}$*. Portanto, os focos da elipse são* $F_1 = -\sqrt{3}$ *e* $F_2 = \sqrt{3}$*.*

A elipse claramente está centrada na origem, pois o polinômio $q'(x)$ *tem raízes simétricas, logo os focos também são simétricos em relação ao eixo* y*. Sabendo que o ponto* $(0, 2)$ *pertence a elipse, temos os vértices das retas focais. Como* $b^2 = a^2 - c^2$*, segue que* $b^2 = a^2 - (\sqrt{3})^2$*, substituindo o valor da abcissa dada, tem-se* $b^2 = 2^2 - 3$*, logo* $b = 1$*. Temos todos os elementos para escrever a equação da elipse, assim*

$$e : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

Pelo gráfico observamos o triângulo formado.

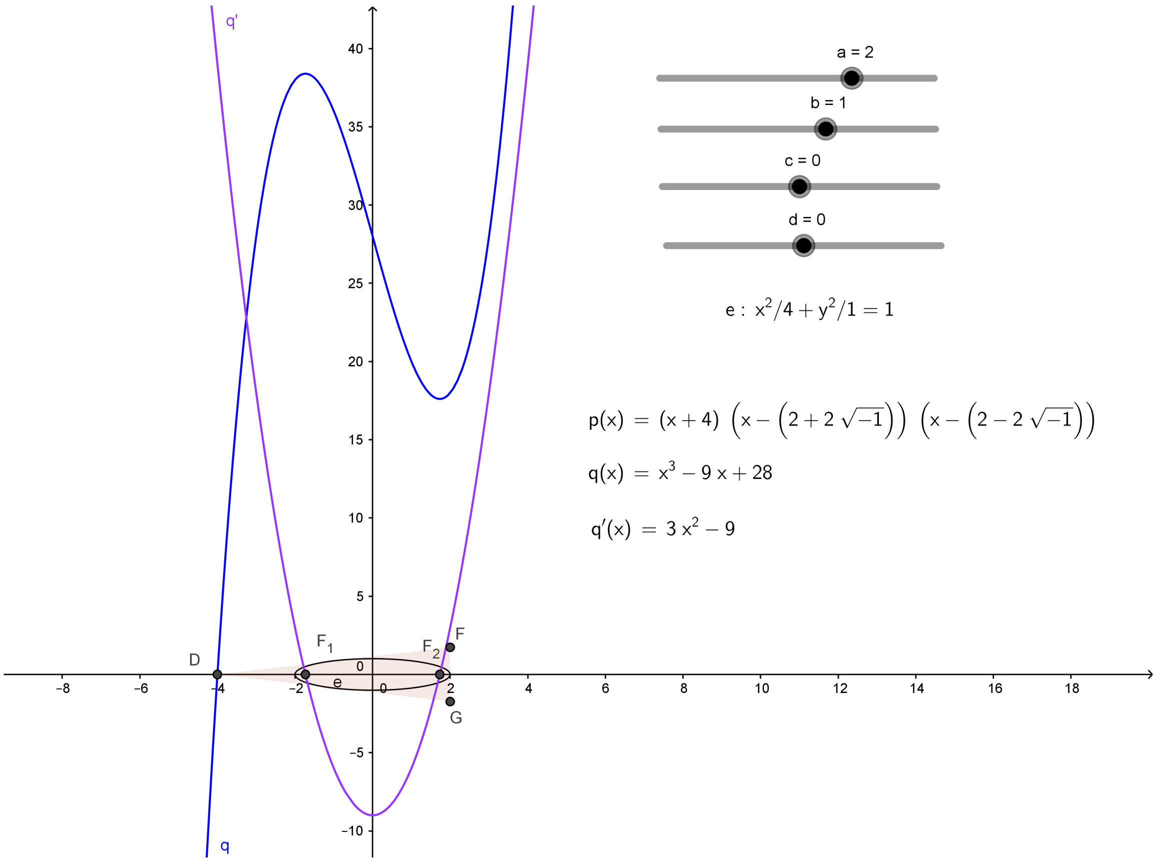

Figura 4.7: Ilustração do teorema de van der Berg por meio de gráficos.

4.5 Teorema de Fourier-Budan

Teorema 4.5.1. (Fourier-Budan) Seja $N(x)$ o número de alterações de sinal na sequência

$$f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x),$$

onde f é um polinômio de grau n. Então, o número de raízes de f (contadas as multiplicidades) entre a e b, em que $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, e $a < b$, não excede $N(a) - N(b)$. Além disso, o número de raízes pode diferir a partir de $N(a) - N(b)$ por apenas um número par.

Demonstração. Seja x um ponto que se movimenta ao longo do segmento $[a, b]$ de a para b. O número $N(x)$ varia somente se x passa por uma raiz do polinômio $f^{(m)}$ para algum $m \leq n$. Consideramos primeiro o caso em que x passa pela raiz x_0 de multiplicidade r de $f(x)$. Na vizinhança de x_0, o polinômio $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ se comporta aproximadamente como

$$(x - x_0)^r g(x_0),\ (x - x_0)^{r-1} r g(x_0),\ \ldots,\ r!\, g(x_0),$$

respectivamente. Portanto, para $x < x_0$, existe r mudanças de sinais nesta sequência e para $x > x_0$ não existem mudanças de sinais (assumindo que x é suficientemente próximo de x_0).

Agora supondo que x passa por uma raiz x_0 de multiplicidade r de $f^{(m)}$; seja x_0 não sendo uma raiz de $f^{(m-1)}$. Claro que x_0 pode ser ou não uma raiz de f. Nós temos que provar que na passagem por x_0 o número de mudanças de sinais na sequência $f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x), \ldots, f^{(m+r)}(x)$ mudam por um número inteiro par não negativo. De fato, em uma vizinhança de x_0 estes polinômios se comportar aproximadamente como

$$F(x_0),\ (x - x_0)^r G(x_0),\ (x - x_0)^{r-1} r G(x_0),\ \ldots,\ r!\, G(x_0). \tag{4.5.1}$$

Excluindo $F(x_0)$, nós vemos que o restante das expressões tem exatamente r mudanças de sinais para $x < x_0$ e nenhuma mudança de sinais para $x > x_0$. Em relação aos dois primeiros termos, $F(x_0)$ e $(x - x_0)^r G(x_0)$, da sequência (4.5.1) vemos que, se r é par, então o número de mudanças de sinal é o mesmo para $x < x_0$ e $x > x_0$ considerando que, se r é ímpar, então o número de mudanças de sinais para $x < x_0$ é 1 pelo maior ou menor que para $x > x_0$ (dependendo se $F(x_0)$ e $G(x_0)$ tem o mesmo sinal ou sinais opostos). Assim, para r par, a diferença no número de mudanças de sinais é igual a r e, para r ímpar, a diferença do número de mudanças de sinais é igual a $r \pm 1$. Em ambos os casos, esta diferença é ainda par e não-negativo. $\square$

Exemplo 4.5.1. *Considere a função*

$$f(x) = 4x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 21x + 10.$$

Vamos determinar a variação de sinais $N(a)$ *e* $N(b)$ *nos intervalos aberto* $(-3, 0)$ *e* $(0, 3)$.

Solução: Temos que $\{f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ f''''(x)\} = \{(4x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 21x + 10),\ (16x^3 - 36x^2 - 10x + 21),\ (48x^2 - 72x - 10),\ (96x - 72),\ (96)\}$, *assim*

$$\begin{aligned}
f(-3) &= 550,\\
f'(-3) &= -705,\\
f''(-3) &= 638,\\
f'''(-3) &= -360,\\
f''''(-3) &= 96.
\end{aligned}$$

Logo, $N(-3) = 4$*, pois* $\{550, -705, 638, -360, 96\} \Longrightarrow (+ - + - +)$*. Houve quatro mudanças de sinais na sequência. Para* $N(0)$*, temos*

$$\begin{aligned}
f(0) &= 10,\\
f'(0) &= 21,\\
f''(0) &= -10,\\
f'''(0) &= -72,\\
f''''(0) &= 96.
\end{aligned}$$

Logo, $N(0) = 2$ *,pois* $\{10, 21, -10, -72, 96\} \Longrightarrow (+ + - - +)$*. Houve duas mudanças de sinais.*

Pelo teorema (4.5.1), $N(-3) - N(0) = 4 - 2 = 2$*. Portanto, o polinômio* $f(x)$ *tem dois ou nenhuma raiz real no intervalo aberto* $(0, 3)$*.*

Por outro lado, ou melhor, para o intervalo $(0, 3)$*, temos*

Para $N(0)$*, temos*

$$\begin{aligned}
f(0) &= 10,\\
f'(0) &= 21,\\
f''(0) &= -10,\\
f'''(0) &= -72,\\
f''''(0) &= 96.
\end{aligned}$$

Logo, $N(0) = 2$ *,pois* $\{10, 21, -10, -72, 96\} \Longrightarrow (+ + - - +)$*.*

Houve duas mudanças de sinais.

Para $N(3)$*, temos*

$$\begin{aligned} f(3) &= 28, \\ f'(3) &= 99, \\ f''(3) &= 206, \\ f'''(3) &= 216, \\ f''''(3) &= 96. \end{aligned}$$

Logo, $N(-3) = 0$, *pois* $\{28,\ 99,\ 206,\ 216,\ 96\} \Longrightarrow (++++)$. *Não houve mudanças de sinais na sequência.*

Pelo teorema (4.5.1), $N(0) - N(3) = 2 - 0 = 2$. *Portanto, o polinômio* $f(x)$ *tem dois ou nenhuma raiz real no intervalo aberto* $(0, 3)$.

Observe a figura (4.8), as duas raízes reais no intervalo $(-3, 0)$ *e as outras duas raízes reais no intervalo* $(0, 3)$, *conforme a afirmação do teorema (4.5.1).*

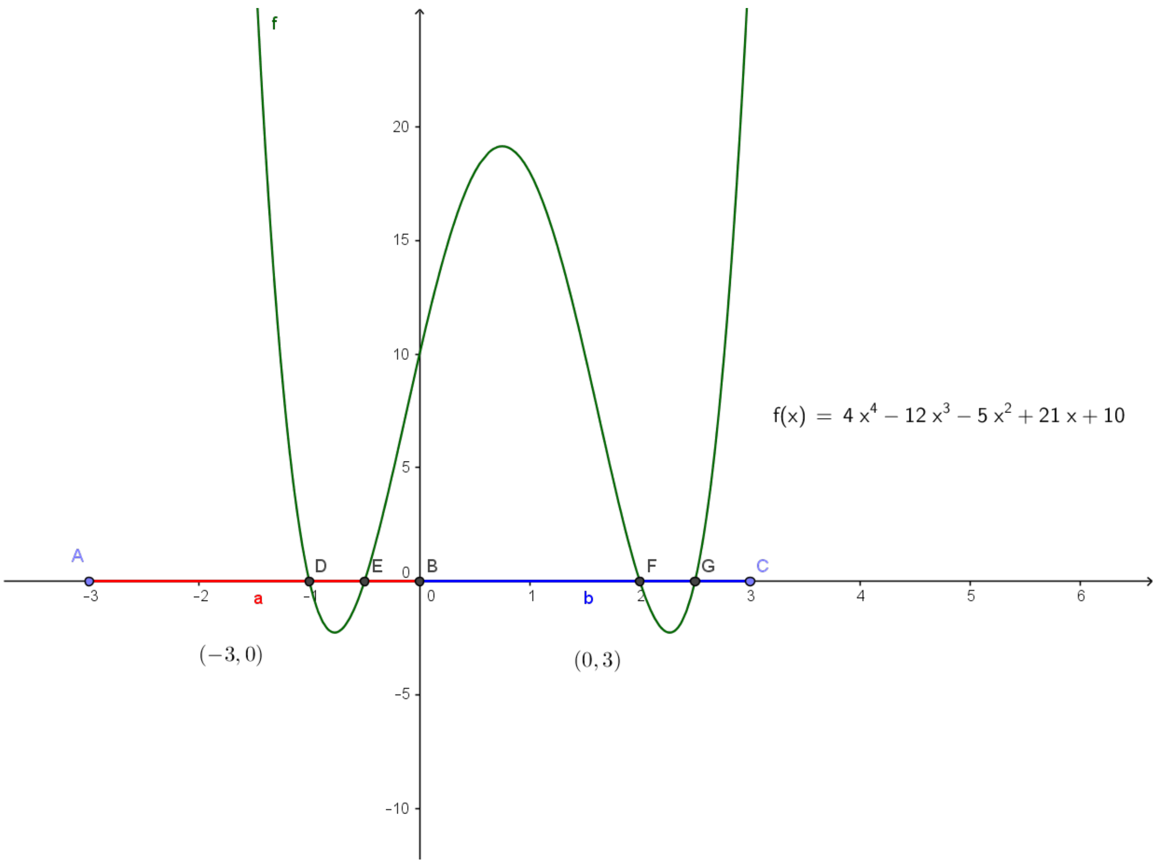

Figura 4.8: Gráfico gerado pelo polinômio $f(x) = 4x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 21x + 10$.

4.6 Teorema de Sturm

Jacques Charles François Sturm nasceu em Genebra (1803-1855) foi um matemático extraordinário. Em 1818 Sturm entrou na Academia de Genebra. Em 1819 foi para Paris, onde conseguiu um emprego na Bulletin Universel. Em 1826 Sturm e Colladon realizaram a primeira determinação experimental da velocidade do som na água. Em 1829 descobriu um teorema que diz respeito à determinação do número de raízes reais de uma equação numérica incluídas entre limites dados. Em 1930 foi indicado como professor de Mathématiques Spéciales do collège Rollin. Foi escolhido para ser membro da Académie des Sciences em 1836, preenchendo a cadeira de André-Marie Ampère. Tornou-se répétiteur em 1838, e professor da École Polytechnique em 1840 e a morte de Simeon Denis Poisson, foi indicado como professor de mecânica clássica da Faculté des Sciences de Paris. Suas obras, Cours d'analyse de l'école polytechnique (1857-1863) e Cours de mécanique de l'école polytechnique (1861) publicadas após sua morte, ocorrida em Paris, foram constantemente republicadas.

Um trabalho mais aprofundado sobre Sturm, pode ser encontrado na dissertação de mestrado `Teorema de Sturm: Uma demonstração detalhada do Teorema de Sturm com Propriedades e Aplicações. Por Fabiano Neves Nader.`

Uma sequência que vamos deter nossa atenção é a de Sturm. Consideramos um polinômio $f(x)$ não nulo e a partir dele obteremos $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Primeiramente, vamos chamar $f(x)$ de $f_0(x)$ e para obter os outros termos seguimos o seguinte procedimento:

(i) O primeiro termo é ${f_0}'(x) = f_1(x)$, ou seja a derivada de $f(x)$.

(ii) O segundo termo é $f_2(x)$ é o resto, com grau menor que $f_1(x)$ e sinais trocados, da divisão de f_0 por $f_1(x)$.

(iii) O terceiro termo é $f_3(x)$ é o resto, com grau menor que $f_2(x)$ e sinais trocados, da divisão de f_1 por $f_2(x)$.

(iv) Seguimos este procedimento até o resto da divisão de f_{n-1} por f_n resultar num polinômio constante.

Exemplo 4.6.1. *Vamos obter a sequência de Sturm do polinômio* $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$*.*

Solução: Temos $f_0(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$*. O polinômio* $f_1(x)$ *é a derivada do polinômio* $f_0(x)$*, assim*

$$f_1(x) = 3x^2 - 2x - 3.$$

Continuamos com a obtenção da sequência e para determinar $f_2(x)$*, temos que dividir* $f_0(x)$ *por* $f_1(x)$ *e considerar um resto* $r(x)$ *com grau menor que* $f_1(x)$*. Por fim, este resto multiplicamos por* -1 *e chamamos de* $f_2(x)$*. Segue que*

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
x^3 & - & x^2 & - & 3x & + & 3 & & 3x^2 - 2x - 3 \\ \cline{9-9}
-x^3 & + & \frac{2}{3}x^2 & + & x & & & & \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \\ \cline{1-5}
 & - & \frac{1}{3}x^2 & - & 2x & + & 3 & & \\
 & & \frac{1}{3}x^2 & - & \frac{2}{9}x & - & \frac{1}{3} & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & \frac{20}{9}x & + & \frac{8}{3} & &
\end{array}$$

Neste ponto da divisão dos polinômios o resto possui grau menor que o polinômio divisor, assim podemos parar a divisão e considerar $f_2 = -r(x)$, logo

$$f_2(x) = \frac{20}{9}x - \frac{8}{3}.$$

Seguindo o algoritmo, $f_3(x)$ é o polinômio oposto do resto da divisão de $f_1(x)$ por $f_2(x)$, então

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 3x^2 & - & 2x & - & 3 & \frac{20}{9}x - \frac{8}{3} \\ \cline{7-7}
- & 3x^2 & + & \frac{18}{5}x & & & \frac{27}{20}x + \frac{18}{25} \\ \cline{1-4}
 & & & \frac{8}{5}x & - & 3 & \\
 & & - & \frac{8}{5}x & + & \frac{48}{25} & \\ \cline{3-6}
 & & & & - & \frac{27}{25} &
\end{array}$$

Finalmente o último passo, pois o resto é uma constante, assim

$$f_3(x) = \frac{27}{25}.$$

Portanto, a sequência de Sturm é escrita como:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x^3 - x^2 - 3x + 3, \\
f_1(x) &= 3x^2 - 2x - 3, \\
f_2(x) &= \frac{20}{9}x - \frac{8}{3}, \\
f_3(x) &= \frac{27}{25}.
\end{aligned}$$

Teorema 4.6.1. (Sturm) Seja $w(x)$ o número de alterações do sinal na sequência

$$f(x), f_1(x), \ldots, f_n(x).$$

O número de raízes de f (sem levar em conta as multiplicidades) no intervalo (a, b) , em que $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, e $a < b$, é igual a $w(a) - w(b)$.

Demonstração. Primeiro considere o caso quando as raízes de f são simples (isto é, os polinômios f e f' não tem raízes comuns). Nesse caso f_n é uma constante diferente de zero.

Vamos verificar primeiro que quando passamos por uma das raízes dos polinômios $f_1, \ldots, f_{n-1}$, o número de mudanças de sinais não varia.

No caso considerado, o polinômio vizinho não tem raízes comuns, isto é, se $f_r(\alpha) = 0$, então $f_{r\pm1}(\alpha) \neq 0$. Aliás, a igualdade $f_{r-1} = q_{r-1}f_r - f_{r+1}$ implica que $f_r(\alpha) = -f_{r+1}(\alpha)$. Mas nesse caso o número de mudanças de sinais na sequência $f_{r-1}(\alpha)$, ε, $f_{r+1}(\alpha)$ é igual em ambos os lados, para $\varepsilon > 0$ e para $\varepsilon < 0$.

Movemos de a para b. Se passarmos por uma raiz x_0 de f_1, segue que os primeiros números $f(x)$ e $f'(x)$ são de sinais diferentes e então eles são de mesmo sinal. Portanto, o número de mudanças de sinais na sequência de Sturm diminui em 1 unidade. Todas as outras mudanças de sinais, como já mostramos, são preservados durante a passagem através de x_0.

Agora consideremos o caso em que a raiz x_0 de f tem multiplicidade m. Nesse caso f e f_1 tem um divisor comum $(x - x_0)^{m-1}$. Dividindo $f, f_1, \ldots, f_r$ por $(x - x_0)^{m-1}$ obtemos a sequência de Sturm $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ para o polinômio $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^{m-1}}$. A raiz x_0 é simples de φ, e por isso a passagem pelo x_0 aumenta por 1 o número de mudanças de sinais da sequência $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$.

Mas, para um x fixo na sequência $f, f_1, \ldots, f_r$ é obtida a partir de $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ por multiplicação por uma constante e portanto, o número de mudanças de sinais coincidem nessa sequência. □

Exemplo 4.6.2. *Vamos determinar a variação de sinais na sequência de Sturm do exemplo (4.6.1). Substituindo a variável x, por valores reais arbitrários, construindo, desta forma, uma tabela de sinais que facilitará o exame da existência e quantidade de raízes em intervalos arbitrários.*

Solução: Determinaremos a partir da sequência os valores de $\varphi(-2)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ e $\varphi(2)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varphi(-2) &= \{f_0(-2),\, f_1(-2),\, f_2(-2),\, f_3(-2)\},\\
\varphi(-1) &= \{f_0(-1),\, f_1(-1),\, f_2(-1),\, f_3(-1)\},\\
\varphi(0) &= \{f_0(0),\, f_1(0),\, f_2(0),\, f_3(0)\},\\
\varphi(1) &= \{f_0(1),\, f_1(1),\, f_2(1),\, f_3(1)\},\\
\varphi(2) &= \{f_0(2),\, f_1(2),\, f_2(2),\, f_3(2)\}.
\end{aligned}$$

Calculando cada um desses valores, obtemos

$$
\begin{aligned}
\varphi(-2) &= \left\{-3,\ 13,\ -\frac{64}{9},\ \frac{27}{25}\right\}, \\
\varphi(-1) &= \left\{4,\ 2,\ -\frac{44}{9},\ \frac{27}{25}\right\}, \\
\varphi(0) &= \left\{3,\ -3,\ -\frac{8}{3},\ \frac{27}{25}\right\}, \\
\varphi(1) &= \left\{0,\ -2,\ -\frac{4}{9},\ \frac{27}{25}\right\}, \\
\varphi(2) &= \left\{1,\ 5,\ \frac{16}{9},\ \frac{27}{25}\right\}.
\end{aligned}
$$

Construiremos a tabela de sinais com os cálculos obtidos, assim

x	f_0	f_1	f_2	f_3	$\omega(x)$
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	$+$	$+$	$-$	$+$	2
0	$+$	$-$	$-$	$+$	2
1	0	$-$	$-$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Vamos agora estudar a variação de sinais em cada intervalo real.

- *Para o intervalo* $I_2 = (-2, -1]$, *temos* $\omega(-2) - \omega(-1) = 3 - 2 = 1$. *Portanto, há 1 raiz neste intervalo para* $f(x)$.

- *Para o intervalo* $I_3 = (-1, 0]$, *temos* $\omega(-1) - \omega(0) = 2 - 2 = 0$. *Portanto, não há raiz neste intervalo para* $f(x)$.

- *Para o intervalo* $I_4 = (0, 1]$, *temos* $\omega(0) - \omega(1) = 2 - 1 = 1$. *Portanto, há 1 raiz neste intervalo para* $f(x)$.

- *Para o intervalo* $I_5 = (1, 2]$, *temos* $\omega(1) - \omega(2) = 1 - 0 = 1$. *Portanto, há uma raiz neste intervalo para* $f(x)$.

Observamos o gráfico da figura (4.9) de $f(x)$, e concluímos que realmente há uma raiz entre -2 e -1, a raiz 1 e há uma raiz entre 1 e 2.

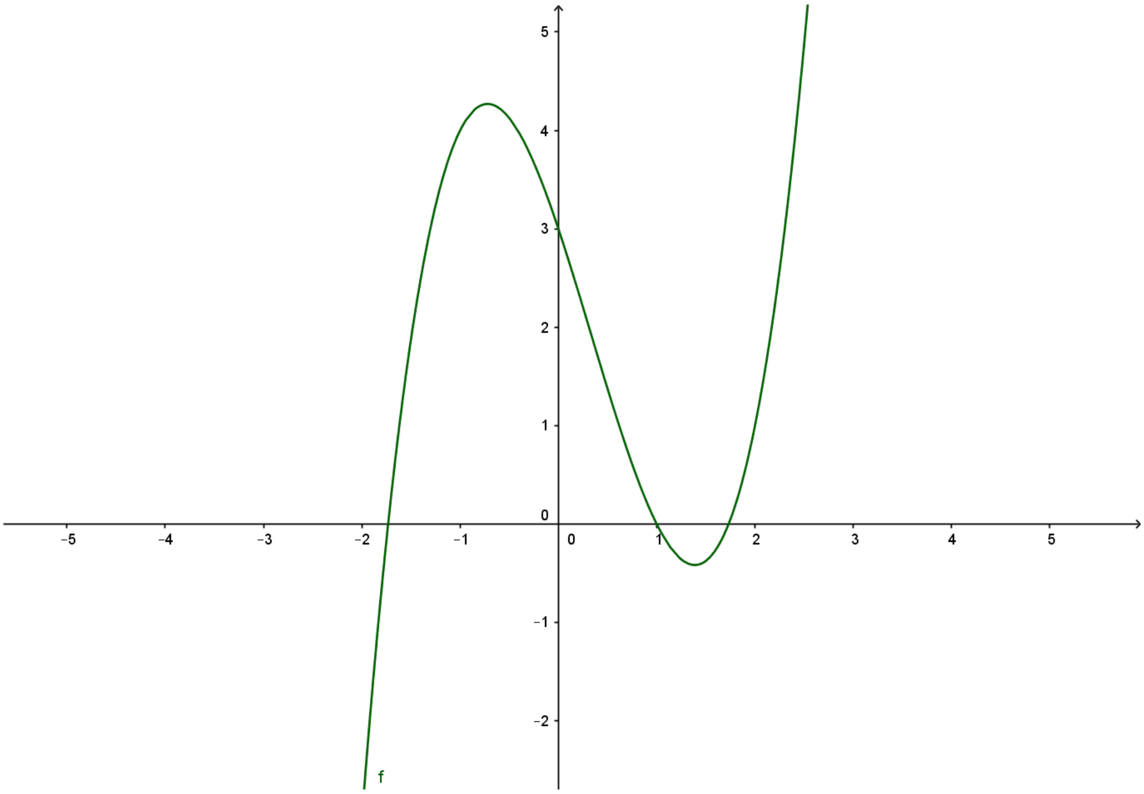

Figura 4.9: Gráfico gerado pela função polinomial $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$.

4.7 Teorema de Sylvester

4.7.1 Assinatura

Definição 4.7.1. Dada uma forma quadrática $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1^2 + b_{1,2}x_1x_2 + \cdots + b_{1,n}x_1x_n + a_2x_2^2 + \cdots + b_{2,n}x_2x_n + \cdots a_nx_n^2$, com todos os n termos completados os quadrados e multiplicados por uma constante, sua assinatura é indicada como o número de sinais positivos menos o número de sinais negativos, de seus termos.

Como a forma quadrática tem n variáveis, ao completarmos o quadrado devemos determinar n termos, o que em álgebra linear, chamamos de vetores linearmente independentes, pois se o número de termos for menor que o número de variáveis, isso significa, que há uma dependência linear entre alguns vetores, ou seja, um vetor é uma combinação linear de um outro vetor.

Exemplo 4.7.1. *Considere o polinômio em duas variáveis na forma quadrática* $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$. *Este polinômio pode ser fatorado facilmente, pois trata-se de um quadrado perfeito, logo* $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$. *Observe que ao fatorar, resultou um polinômio com um termo positivo, mas deveríamos encontrar dois termos para determinar a sua assinatura.*

Exemplo 4.7.2. *Seja a forma quadrática* $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$. *Sua assinatura só pode ser determinada se a forma quadrática estiver em termos de vetores linearmente independentes, então devemos usar uma técnica de completar quadrados, ou melhor o método de Lagrange. Assim, temos*

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2^2 + 5x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2. \end{aligned}$$

Observe que no primeiro termo, para todo $x_1 \in \mathbb{R}$ *sempre será positivo e no segundo termo para todo* $x_2 \in \mathbb{R}$ *também será positivo, logo os sinais são* $(++)$ *e a assinatura é* $2 - 0 = 2$.

Vamos classificar as formas quadráticas em relação a quantidade de termos de $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e a assinatura. Uma forma quadrática $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se diz:

- definida positiva se $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \ \forall x_n \neq 0$;
- definida semipositiva se $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \ \forall x_n$;
- definida negativa se $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0 \ \forall x_n \neq 0$;

- definida seminegativa se $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0 \; \forall x_n$;
- indefinida se existir vetores com sinais contrários, ou seja $\forall x_1, \ldots x_n \; ; Q(x_r) > 0$ e $Q(x_s) < 0$ com $r + s = n$.

Quanto a quantidade de termos ρ e a assinatura δ, temos

- definida positiva se e somente, se $\rho = \delta = n$;
- definida semipositiva se e somente, se $\rho = \delta < n$;
- definida negativa se e somente, se $\rho = -\delta = n$;
- definida seminegativa se e somente, se $\rho = -\delta < n$;
- indefinida se e somente, se $\mid \delta \mid < \rho$;

Teorema 4.7.2. (Sylverter)

(a) O número de raízes reais de f é igual a assinatura da forma quadrática , associada a matriz

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n} \end{bmatrix}.$$

(b) Todas as raízes de f são positivas se, e somente se, a matriz

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & \ldots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n+1} \end{bmatrix},$$

é definida positiva.

Demonstração. Seja ρ um parâmetro real. Considere a forma quadrática

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \frac{y_1^2}{\alpha + \rho} + \ldots + \frac{y_n^2}{\alpha_n + \rho}, \tag{4.7.1}$$

em que

$$y_r = x_1 + \alpha_r x_2 + \ldots + \alpha_r^{n-1} x_n. \tag{4.7.2}$$

Os coeficientes do polinômio F são funções simétricas das raízes de f. Em particular, isso significa que a forma F pode ser representada como

$$h_1^2 + \ldots + h_p^2 - h_{p+1}^2 - \ldots - h_n^2,$$

onde $h_1, \ldots, h_n$ são formas lineares em $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes reais.

Para cada parcela correspondente da somatória, temos

$$\frac{y_r^2}{\alpha+\rho} = \frac{(x_1+\alpha_r x_2 + \ \ldots \ + \alpha_r^{n-1}x_n)^2}{\alpha+\rho}.$$

Estas parcelas podem ser representadas na forma $\pm h_r^2$, onde o sinal positivo aparece se $\alpha_r+\rho>0$ e o sinal de menos caso contrário.

Considerando pares de raízes conjugadas α_r e α_s, segue que

$$F_{r,s} = \frac{y_r^2}{\alpha_r+\rho} + \frac{y_s^2}{\alpha_r+\rho}.$$

Seja $y_r = u+iv$ e $\frac{y}{\alpha_r+\rho} = \lambda + i\mu$, em que u, v, λ, μ são números reais. Então $y_s = u+iv$ e $\frac{y}{\alpha_s+\rho} = \lambda - i\mu$. Desta forma, $F_{r,s} = 2\lambda(u^2-v^2) - 4\mu uv$.

Para $u=0$ e $v=0$, os valores de $F_{r,s}$ tem sinais opostos. Assim, após uma mudança de variáveis podemos assumir que $F_{r,s} = u_1^2 - v_1^2$. Como resultante podemos ver que todas as raízes de f são reais e satisfazem a inequação $\alpha_r > -\rho$ se e somente, se a forma quadrática (4.7.1) é definida positiva. Os elementos da matriz desta forma são

$$a_{i,j} = \frac{\alpha_1^{i+j-2}}{\alpha_1+\rho} + \ldots + \frac{\alpha_n^{i+j-2}}{\alpha_n+\rho}.$$

A demonstração do teorema, é obtida limitando $\rho \longrightarrow +\infty$ no item (a) e $\rho = 0$ para o item (b). $\square$

Primeiramente, a matriz é simétrica e os seus elementos são expressões resultantes das funções simétricas em relação as raízes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ do polinômio f. Ressaltando que não precisamos conhecer as raízes, pois são expressas em termos dos coeficientes de f. Nos itens (a) e (b), os elementos das matrizes são

$$\begin{aligned} s_0 &= \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \ldots + \alpha_n^0 \\ s_1 &= \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \ldots + \alpha_n^1 \\ s_2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \\ &\vdots \\ s_k &= \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_n^k. \end{aligned} \tag{4.7.3}$$

A forma quadrática associada a matriz M, é a expressão

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^T \cdot M \cdot X, \tag{4.7.4}$$

em que

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

No item (b) temos o conceito de matriz positiva, nos leva a calcular os determinantes dos menores principais associada a matriz e por outro lado podemos decidir determinando a forma quadrática.

Definição 4.7.3. Seja A uma matriz quadrada de ordem n, A é definida positiva se os determinantes de seus menores principais, ou seja, os determinantes das submatrizes de A e inclusive o de A são positivos. Ou ainda, se a forma quadrática associada a matriz A é definida positiva.

Agora estamos prontos para alguns exemplos.

Exemplo 4.7.3. *Seja a matriz quadrada*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar se M é definida positiva:

(a) *Calculando os menores determinantes da Matriz M.*

(b) *Determinando os autovalores de M e verificando seus sinais.*

(c) *Usando o critério de Sylvester e o método de Lagrange.*

Solução: (a) Calcularemos os determinantes dos menores principais de M e inclusive dele, então

- $\det[1] = 1 > 0.$
- $\det[5] = 5 > 0.$
- $\det[3] = 3 > 0.$
- $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1 > 0.$
- $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2 > 0.$
- $\det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 6 > 0.$

- $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 15 + 6 + 6 - 5 - 9 - 12 = 1 > 0.$

Portanto, todos os determinantes são positivos, logo M é definida positiva.

(b) O polinômio característico da matriz M é

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 9\lambda - 1.$$

Os divisores de -1 são $\{-1, 1\}$, logo, $p(-1) \neq 0$ e $p(1) = 0$, assim 1 é uma raiz de $p(\lambda)$. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & 9 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -8 & 1 & 0 & \end{array}.$$

Temos que, $p(\lambda) = (\lambda - 1)\cdot(\lambda^2 - 8\lambda + 1) = (\lambda - 1)\cdot(\lambda - 4 - \sqrt{15})\cdot(x - 4 + \sqrt{15}) = 0$ se e somente, se $\lambda = 1$, $\lambda = 4 - \sqrt{15}$ ou $\lambda = 4 - \sqrt{15}$. Portanto, os autovalores são todos positivos e concluímos que a matriz M é definida positiva.

(c) A forma quadrática associada a matriz M é

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Usando o método de Lagrange para completar quadrados, temos

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1^2 + 2x_1(2x_2 + x_3) + (2x_2 + x_3)^2) - (2x_2 + x_3)^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (2x_2 + x_3)^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (u)^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_2x_3 \\ &= (u)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= (u)^2 + \left(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right) - x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= (u)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 \\ &= (u)^2 + (v)^2 + (t)^2. \end{aligned}$$

Observe que fizemos três mudanças de variáveis, sendo elas: $u = x_1 + 2x_2 + x_3$, $v = x_2 + x_3$ *e* $t = x_3^2$.

Como os três termos quadrados são positivos, ou seja, a assinatura é $(3, 0)$ *que equivale a* 3 *sinais positivos e* 0 *sinal negativo, a matriz é definida positiva.*

Exemplo 4.7.4. *Vamos determinar a forma quadrática associada a matriz*

$$N = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

e determinar se é definida positiva .

Solução: Temos que a forma quadrática é $Q(x_1, x_2) = X^T \cdot N \cdot X$, *pois a matriz é de ordem* 2, *logo*

$$Q(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 0x_2 & -2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + 4x_2^2. \end{aligned}$$

Claramente, a forma quadrática é positiva e a assinatura é $(2, 0)$, *logo a matriz* N *é definida positiva.*

Exemplo 4.7.5. *Seja a função polinomial* $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. *Verificaremos o teorema de Sylvester.*

Solução: Sendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *as raízes de* $f(x)$, *seus coeficientes podem ser escritos como* $\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$, $\sigma_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_3 + \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -1$ *e* $\sigma_3 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = -2$, *assim*

$$\begin{aligned}
s_0 &= \alpha_1^0 + \alpha_2^0 + \alpha_3^0 = 1 + 1 + 1 = 3, \\
s_1 &= \alpha_1^1 + \alpha_2^1 + \alpha_3^1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2, \\
s_2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 2^2 - 2(-1) = 6, \\
s_3 &= \sigma_1 s_2 - \sigma_2 s_1 + \sigma_3 s_0, = 2 \cdot 6 - (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 8, \\
s_4 &= \sigma_1 s_3 - \sigma_2 s_2 + \sigma_3 s_1 = 2 \cdot 8 - (-1) \cdot 6 + (-2) \cdot 2 = 18, \\
s_5 &= \sigma_1 s_4 - \sigma_2 s_3 + \sigma_3 s_2 = 2 \cdot 18 - (-1) \cdot 8 + (-2) \cdot 6 = 32.
\end{aligned}$$

As matrizes simétricas são escritas como

$$S_{(a)} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$$

e

$$S_{(b)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \\ 8 & 18 & 32 \end{bmatrix}.$$

As formas quadráticas associadas às matrizes $S_{(a)}$ e $S_{(b)}$ são bem simples e podem ser escritas diretamente, assim

$$Q_{(a)}(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 18x_3^2 + 4x_1x_2 + 12x_1x_3 + 16x_2x_3$$

e

$$Q_{(b)}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 8x_2^2 + 32x_3^2 + 12x_1x_2 + 16x_1x_3 + 36x_2x_3.$$

Vamos usar o método de Lagrange para completar quadrados e verificar a assinatura, então

$$\begin{aligned}
Q_{(a)}(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1^2+6x_2^2+18x_3^2+4x_1x_2+12x_1x_3+16x_2x_3\\
&= 3x_1^2+4x_1x_2+12x_1x_3+6x_2^2+18x_3^2+16x_2x_3\\
&= 3\left(x_1^2+\frac{4}{3}x_1x_2+4x_1x_3\right)+6x_2^2+18x_3^2+16x_2x_3\\
&= 3\left(x_1^2+2x_1\left(\frac{2x_2}{3}+2x_3\right)\right)+6x_2^2+18x_3^2+16x_2x_3\\
&= 3\left(x_1+\frac{2x_2}{3}+2x_3\right)^2-3\left(\frac{2x_2}{3}+2x_3\right)^2+6x_2^2+18x_3^2+16x_2x_3\\
&= 3\,(u)^2-3\left(\frac{2x_2}{3}+2x_3\right)^2+6x_2^2+18x_3^2+16x_2x_3\\
&= 3\,(u)^2-\frac{4x_2^2}{3}-8x_2x_3-12x_3^2+6x_2^2+18x_3^2+16x_2x_3\\
&= 3\,(u)^2+\frac{14x_2^2}{3}+6x_3^2+8x_3x_2\\
&= 3\,(u)^2+\frac{14}{3}\left(x_2^2+2\cdot\frac{6x_3x_2}{7}+\frac{36x_3}{49}\right)-\frac{24x_3^2}{7}+6x_3^2\\
&= 3\,(u)^2+\frac{14}{3}\,(v)^2+\frac{18}{7}x_3^2\\
&= 3\,(u)^2+\frac{14}{3}\,(v)^2+\frac{18}{7}\,(t)^2\,.
\end{aligned}$$

Observe que fizemos três mudanças de variáveis.

Como os três termos quadrados são positivos, ou seja, a assinatura é $(3,0)$ *que equivale a* 3 *sinais positivos e* 0 *sinal negativo, a matriz é definida positiva.*

Portanto, as 3 *raízes de* $f(x)$ *foram confirmadas.*

Agora com a equação $Q_{(b)}(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+8x_2^2+32x_3^2+12x_1x_2+16x_1x_3+36x_2x_3$ *vamos verificar os sinais das* 3 *raízes.*

Vamos usar o método de Lagrange para completar quadrados e verificar a assinatura, então

$$
\begin{aligned}
Q_{(b)}(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2+8x_2^2+32x_3^2+12x_1x_2+16x_1x_3+36x_2x_3\\
&= 2x_1^2+12x_1x_2+16x_1x_3+8x_2^2+32x_3^2+36x_2x_3\\
&= 2\left(x_1^2+6x_1x_2+8x_1x_3\right)+8x_2^2+32x_3^2+36x_2x_3\\
&= 2\left(x_1^2+2x_1\left(3x_2+4x_3\right)+\left(3x_2+4x_3\right)^2-\left(3x_2+4x_3\right)^2\right)+8x_2^2+\\
&\quad +32x_3^2+36x_2x_3\\
&= 2(u)^2-2\left(3x_2+4x_3\right)^2+8x_2^2+32x_3^2+36x_2x_3\\
&= 2(u)^2-2\left(9x_2^2+24x_3x_2+16x_3^2\right)+8x_2^2+32x_3^2+36x_2x_3\\
&= 2(u)^2-10x_2^2-12x_3x_2\\
&= 2(u)^2-10\left(x_2^2+\frac{12}{10}x_3x_2\right)\\
&= 2(u)^2-10\left(x_2^2+2\cdot\frac{3}{5}x_3x_2+\frac{9}{25}x_3^2-\frac{9}{25}x_3^2\right)\\
&= 2(u)^2-10\left(x_2+\frac{3}{5}x_3\right)^2+\frac{90}{25}x_3^2\\
&= 2(u)^2-10(v)^2+\frac{18}{5}(t)^2.
\end{aligned}
$$

Observe que há uma variação de sinais nos termos, isto é, a assinatura é $(+\ -\ +)$, portanto a função polinomial $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ possui duas raízes reais positivas e uma negativa de acordo com o teorema (4.7.2). O que pode ser verificado pela figura (4.10).

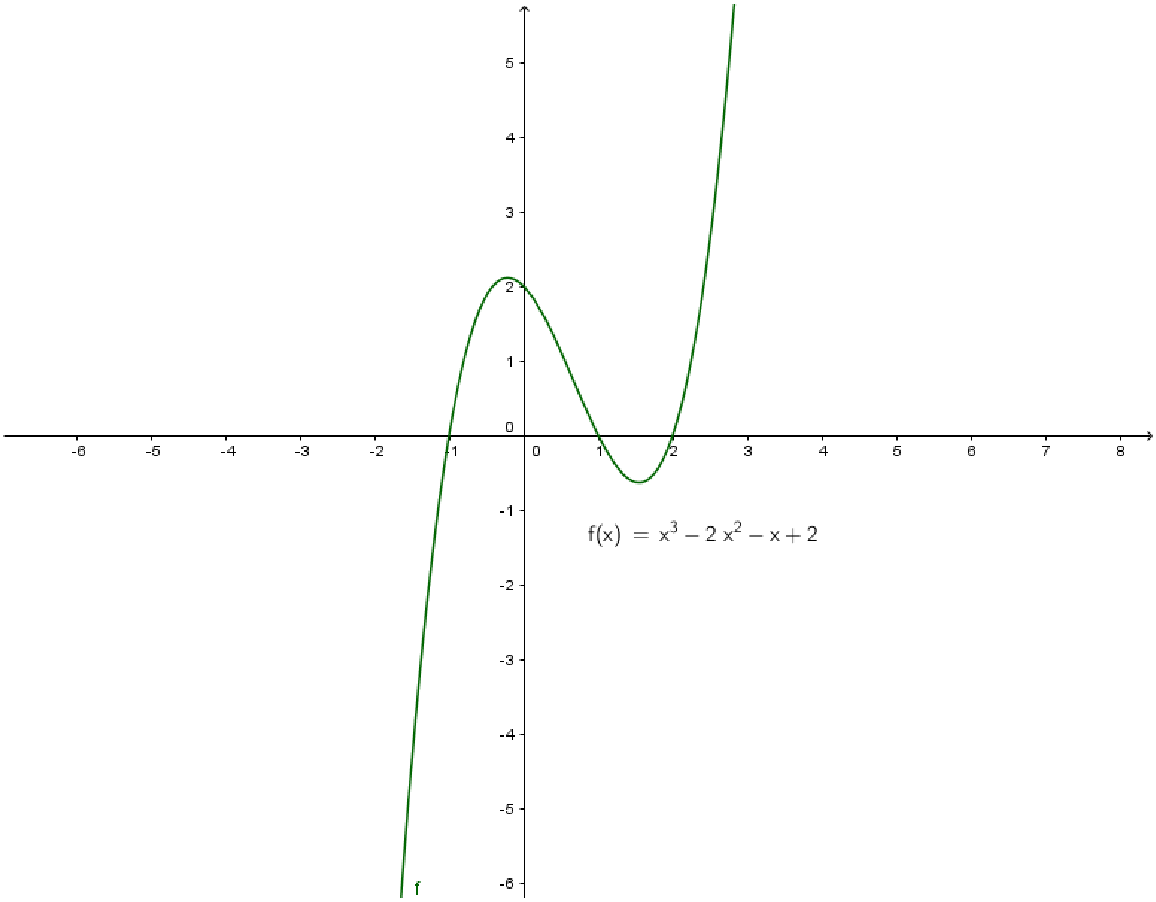

Figura 4.10: Gráfico gerado pelo polinômio $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

Capítulo 5

As Ideias de Èvariste Galois

Neste capítulo falaremos de um grande jovem gênio da Matemática, Èvariste Galois. Vamos também discorrer a sua teoria com alguns exemplos e sem muita imersão, pois fugiria completamente do escopo deste trabalho. O grande objetivo deste capítulo, além da história trágica de Galois, é responder a uma pergunta: "É possível obter fórmulas resolutivas para obtenção de raízes de polinômios de grau maior que ou igual a 5?". Pois bem, esta pergunta prevaleceu por muito tempo e intrigou muitos matemáticos. Foi Galois, com sua brilhante teoria, que pôs fim a esta dúvida. Claro que, sua teoria foi traduzida e organizada por muitos matemáticos depois de sua morte, como seu amigo Auguste Chevalier, que publicou os manuscritos, Joseph Liouville (1809-1882), que em 1846, conseguiu decifrar seus manuscritos e publicou-os sob o título de Obras Matemáticas de Èvariste Galois. Galois foi o primeiro matemático a usar a palavra Grupo em seu sentido mais amplo e esta pesquisa foi levada adiante depois da divulgação por matemáticos como Camille Jordan (1838-1902), Sophus Lie (1842-1899), Felix Klein (1849-1925), Algustin-Louis Cauchy (1789-1857), Arthur Cayley (1821-1895), Ludwig Sylow (1832-1918), Georg Frobenius (1848-1917), Henri Poincaré (1854-1912), Otto Holder (1859-1937) entre outros.

Figura 5.1: Èvariste Galois

5.1 Uma Breve História de Galois

Nascido no início do século XIX durante o reinado de Luis XVII, Èvariste Galois era filho do prefeito da cidade de Bouurg-la-Reine, uma comuna ao sul da França. Até sua adolescência Galois, teve uma boa educação.

O prestigiado Liceu de Louis-le-Grand, em Paris, foi a instituição escolhida para o início da educação formal, que logo se destacou com boas notas, contudo seu desempenho nas demais disciplinas era considerado medíocre. Rapidamente o jovem já passou a dominar os princípios e tratados matemáticos, como os "Elementos de Geometria de Euclides", as obras de Legendre, Lagrange e campos do Cálculo e da Análise. Também estudou tudo o que se conhecia sobre equações algébricas, despontava como um gênio da matemática, seus professores não conseguiam acompanhar seu rápido desenvolvimento e raciocínio por isso estudava sozinho os grandes autores . Foi premiado no concurso geral de matemática no Liceu, em 1827.

Em 1828, Galois acreditou ter encontrado a solução geral para equações de grau cinco, mas se equivocou em suas ideias, da mesma maneira que Abel. Galois queria entrar na mais prestigiada faculdade francesa do século XIX, na Ècole Polytechnique , apesar de sua genialidade para a matemática, Galois não foi aprovado. Suas ideias e escritas assim como suas soluções eram inovadoras e visionárias para a época.

Em 1829, escreve um artigo à Academie Sciences sobre a solução de equações algébricas chamado: Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo. Cauchy, propôs a Galois que fizesse um resumo para apresentá-lo a Academia de Ciências.

Em julho de 1829, o pai de Èvariste, Nicholas Galois comete suicídio. Após ao drama em sua vida, submete-se a mais um teste para entrar na Ècole Polytechnique e mais uma vez foi incompreendido devido a dificuldade em explicar suas teorias e então rejeitado e Galois sem muita escolha integrou na Ècole Normale Supérieure. Depois de muitos desencontros e decepções em sua vida acadêmica refez trabalhos que não conseguiu publicar, Galois escreve Memória sobre as condições de resolubilidade das equações por radicais.

Em 1830 seus estudos foram abandonados e novamente perdidos. Escreveu mais três artigos, Análise de uma memória sobre a resolução de equações, Resolução de equações numéricas e Teoria dos Números. Por conta da restauração da monarquia e muitas turbulências no país e transformações políticas Galois foi expulso da escola, por suas atitudes revolucionárias.

No final de 1830, Galois afilia-se a sociedade secreta Societè dês Amis du Peuple e também se alista como artilheiro na Artilharia da Guarda Nacional. Mais tarde, é detido na prisão de Sainte-Pélagie por cerca de um mês. Desafiando as autoridades mais uma vez, já em 1831, foi preso novamente na prisão de Sainte-Pélagie, onde ficaria até março de 1832. Em sua prisão ficou sabendo que seu trabalho foi reprovado por Poisson, que alegou plágio dos feitos anteriores de Abel.

Enfim escreve um trabalho "Duas memórias de Análise", Galois demonstra que as equações de grau 5 ou maior não são resolúveis por meio de radicais, com uma teoria inovadora, conhecida hoje como grupos de permutação.

Permaneceu na prisão até o final de abril de 1832. Neste período, Galois se apaixonou por uma jovem Stephanie-Felice du Motel que mais tarde o rejeitou, pois a moça já era comprometida. Decidiu marcar um duelo com seu rival, o comprometido de Stephanie, um dia antes de sua saída da prisão. Ainda, durante a noite, escreveu incessantemente suas teorias, que mais tarde seu irmão e seu melhor amigo Auguste Chevalier, publica na Revue Encyclopédique seus manuscritos.

No dia 30 de maio de 1832, Galois duela com seu rival e leva um tiro no abdômen e sofrera uma infecção devido ao ferimento e vem a falecer no dia 31 de maio de 1832, com apenas 20 anos de idade.

5.2 A Resolução de Equações por meio de Radicais

No capítulo 2, apresentamos as fórmulas fechadas para equações com polinômios de grau $n \leq 4$. Vamos repassá-las:

1. Equação com polinômio de grau 1, com $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax+b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= \frac{-b}{a}. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

2. Equação com polinômio de grau 2, com $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ x^2+\frac{b}{a}\cdot x &= -\frac{c}{a} \\ x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \\ x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}} \\ x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

3. Equação com polinômio de grau 3, com $a \neq 0$.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Fazendo $x = y - b/3a$, e dividindo após a substituição por a, chegamos a

$$y^3 + py + p = 0,$$

com $p = c - b^2/3$ e $q = 2b^3/27 - bc/3 + d$.

Fazendo, $y = u + v$ com u e v, ambos não nulos, temos

$$(u+v)^3 + p(u+v) + p = u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v).$$

Daí,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 & = -q \\ 3uv & = -p. \end{cases}$$

Fazendo $v = -p/3u$, tem-se

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

E substituindo $u^3 = t$, obtemos

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27}.$$

Por fim, ao resolvermos t, temos

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Portanto, tomando $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, uma raiz cúbica da unidade e que satisfaz $\omega^3 = 1$, teremos as fórmulas resolutivas

$$\begin{aligned}
y_1 &= u+v,\\
y_2 &= \omega u+\omega^2 v,\\
y_3 &= \omega^2 u+\omega v.
\end{aligned}$$

4. Equação com polinômio de grau 4, com $a \neq 0$.

   Vamos considerar a seguinte equação

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

   Sem perda de generalidade, vamos assumir $a=1$, daí

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

   Deixando os dois primeiros termos no lado esquerdo, ou seja no primeiro membro e completando quadrado no primeiro membro, temos

$$\begin{aligned}
x^4+bx^3 &= -(cx^2+dx+e)\\
(x^2)^2+bx^3+\left(\frac{bx}{2}\right)^2 &= -(cx^2+dx+e)+\left(\frac{bx}{2}\right)^2\\
\left(x^2+\frac{bx}{2}\right)^2 &= \left(\frac{b^2}{4}-c\right)x^2-dx-e.
\end{aligned}$$

   Agora sem atrapalhar o primeiro membro, devemos transformar o segundo membro também em um quadrado perfeito. Uma estratégia é adicionar em ambos os membros $y^2+2y(x^2+\frac{1}{2}bx)$. Daí

$$\begin{aligned}
\left(x^2+\frac{bx}{2}\right)^2+y^2+2y\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right) &= \left(\frac{b^2}{4}-c\right)x^2-dx-e+y^2+2y\left(x^2+\frac{1}{2}bx\right)\\
\left(\left(x^2+\frac{bx}{2}\right)+y\right)^2 &= \left(2y+\frac{b^2}{4}-c\right)x^2+(yb-d)x+(y^2-e).
\end{aligned}$$

   Para definitivamente transformar o segundo membro em um quadrado perfeito, vamos forçar o discriminante em termos de y ser igual a zero. Daí

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ (yb-d)^2 - 4 \cdot \left(2y + \frac{b^2}{4} - c\right) \cdot (y^2 - e) &= 0 \\ 8y^3 - 4cy^2 + (2db - 8e)y + (4ec - eb^2 - d^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ao escolher a raiz y, o segundo membro se transforma em um quadrado perfeito, pois seu discriminante é nulo, daí com α e β convenientes a equação se tornará

$$\left(\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2.$$

Por fim, a equação é resolvida mediante a resolução das duas equações de grau 2:

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y = (\alpha x + \beta)$$

e

$$\left(x^2 + \frac{bx}{2}\right) + y = -(\alpha x + \beta).$$

Essas fórmulas e soluções repassadas neste capítulo foram escritas na Ars Magna e tornaram-se um impulsionador na procura de fórmulas para resolução de equações algébricas de grau maior que 4. A procura por essas fórmulas resolventes permaneceu por mais de 300 anos, somente no século XIX que Abel e Rufini chegaram à conclusão que para uma equação do 5º grau não existe uma fórmula geral que exprima as raízes como radicais dos coeficientes da equação, mas sem conseguir um método para este fato. Galois iniciou o estudo de equações algébricas de grau arbitrário, e mostrou não só a impossibilidade de resolução da equação algébrica geral de grau maior ou igual a cinco, como deu ainda um critério para decidir se uma equação particular pode ser resolvida ou não através de um método criado por ele. Os trabalhos de Galois, apesar da sua morte prematura e dramática, foram fundamentais no estabelecimento da Álgebra, como a conhecemos hoje, e tiveram consequências além do problema inicial.

Os resultados e consequências da teoria de Abel, Ruffini, entre outros e especialmente de Galois nos deram um grande campo de estudos e pesquisas Matemáticas que se desenvolveram de uma forma que hoje tem sua importância no mundo científico, e recebe o pomposo nome, Álgebra Moderna ou Álgebra dos Grupos.

5.3 Ponto de Partida da Teoria

As fórmulas de resolução de equações polinomiais de grau menor que 5, partiram das equações polinomiais na forma expandida, manipulando-as de tal forma que o valor de x estivesse isolado e a igualdade, mostrasse o resultado esperado para satisfazer a equação. Na forma quadrática, o complemento de quadrados em ambos os lados da equação, permite a fatoração e a resolução por meio de um radical que estabelece o tipo de raiz da equação, ou seja a extensão algébrica que determinar em que conjunto está contido o conjunto das raízes da equação. Seguindo este mesmo raciocínio, as equações polinomiais de grau 3 e de grau 4 tiveram como base para a descoberta de suas fórmulas resolutivas, a sua forma expandida e por meio de métodos mais sofisticados. O grande problema é manipular as equações de grau maior do que 4, seguindo este caminho através das equações polinomiais, mas alguns matemáticos, como Abel estabeleceram as primeiras ideias sobre a impossibilidade de se obter a solução por meio de operações aritméticas, fórmulas resolutivas para equações de grau 5 ou maior. Mas, ainda faltavam sustentações e uma forma de garantir tal impossibilidade. A grande ideia de Galois foi pensar na manipulação das raízes e conhecer melhor seu comportamento por meio de equações equivalentes resultantes dessas raízes. Ele permutou as raízes e determinava através desses novos resultados funções que garantia a simetria e as condições necessárias para atributos dos conjuntos de elementos. Hoje este conceito é a teoria de grupos, estudada em álgebra de grupos. Mais tarde, descobriu novas conexões entre as raízes e as propriedades destes conjuntos operatórios, o que outros matemáticos como Richard Dedekind, Emil Artin, Leopold Kronecker entre outros, desenvolveram suas teorias e assim resultou nos critérios de Galois, homomorfismos entre os grupos e automorfismos de extensões de corpos.

Capítulo 6

Projeto de Ensino de Resolução de Polinômios e seus Recursos Computacionais

Este projeto visa oferecer planos para o ensino de equações polinomiais com algumas aplicações dos teoremas apresentados. Os recursos computacionais serão de grande auxílio para visualizar e fazer um tratamento mais analítico para futuras conjecturas.

O programa adotado é o Geogebra, um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática dos níveis básico ao universitário.

6.1 Projeto Raízes de Equações Polinomiais de Grau Menor que ou Igual a 4

6.1.1 Raízes de Equação Polinomial de Grau 1

Na tela de visualização do Geogebra inserimos dois controles deslisantes, a e b, com incremento padrão e não precisamos mudar os valores dos intervalos oferecidos. Ressaltamos que estes valores podem ser alterados a qualquer momento.

No campo "Entrada"do geogebra digite: $f(x) = a * x + b$.

Na tela de visualização, uma reta aparecerá, pois a função polinomial tem grau 1 e a reta intersectará o eixo x em um único ponto. Ao mudarmos os valores nos controles deslizantes, a reta se movimentará de acordo com a equação definida pelos coeficientes a e b como mostra a figura (6.1).

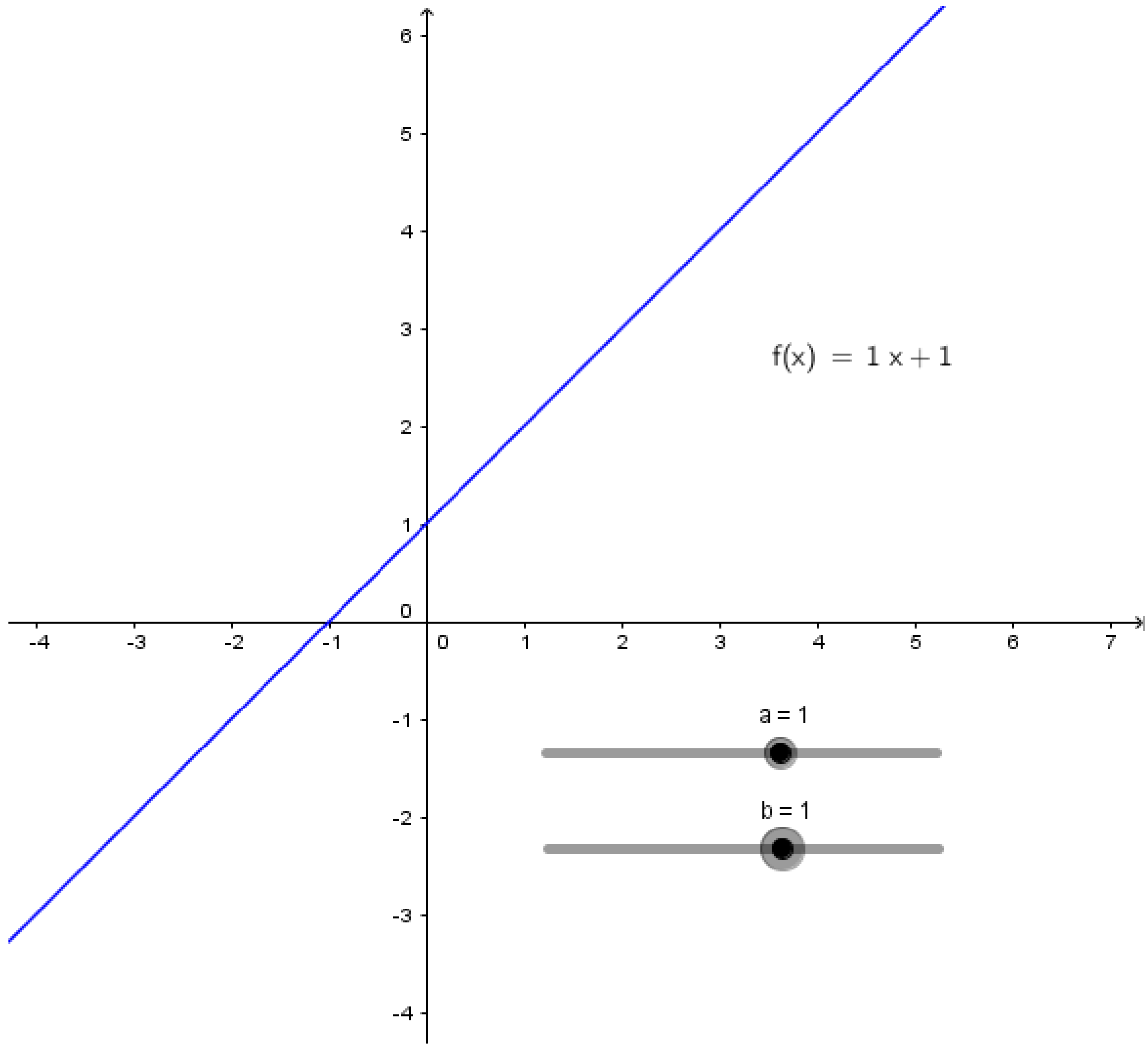

Figura 6.1: Função Polinomial de Grau 1.

Exemplo 6.1.1. *O polinômio $ax+b$ inserido no Geogebra, é bem explorado conjecturando os valores dos coeficientes pelos controles deslizantes.*

1. *Fixamos $b = 0$ e deslizamos o controle dos valores de a.*
2. *Fixamos $a = 0$ e deslizamos o controle dos valores de b.*
3. *Fixamos $b \neq 0$ e deslizamos o controle dos valores de a.*
4. *Fixamos $a \neq 0$ e deslizamos o controle dos valores de b.*

Somente no caso em que $a = 0$ e $b \neq 0$ a equação polinomial não terá raiz real.

6.1.2 Raízes de Equação Polinomial de Grau 2

A equação polinomial de grau 2, terá um controle deslizante a mais, o coeficiente c. Do mesmo modo, inserimos os três controles e digitamos no campo de entrada do Geogebra a expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$. O resultado na tela de visualização é uma parábola, como mostra a figura (6.2).

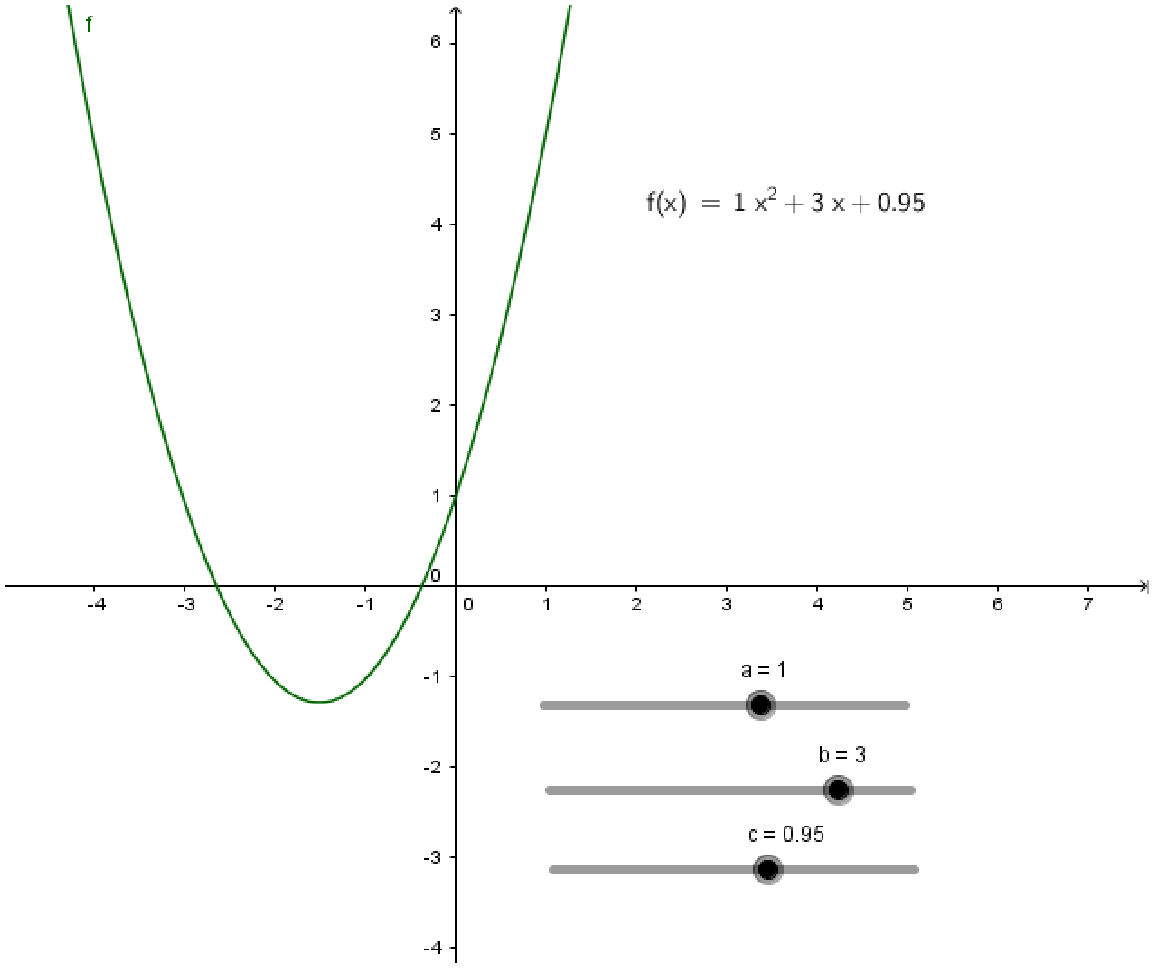

Figura 6.2: Gráfico gerado pela função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Agora façamos algumas perguntas:

1. Fixando b, c e deslizando o controle dos valores de a, o que vai acontecer com a parábola?

2. Fixando b, $a \neq 0$ e deslizando o controle dos valores de c, o que vai acontecer com a parábola?

3. Fixando c, $a \neq 0$ e deslizando o controle dos valores de b, o que vai acontecer com a parábola?

4. Fixando $b \neq 0$, $c \neq 0$ e fazendo $a = 0$, o que vai acontecer com a parábola?

As funções polinomiais de grau 2, possuem duas raízes complexas. As raízes reais puras, são visualizadas facilmente no gráfico, que são as interseções da parábola com o eixo dos valores de x. Pode acontecer da parábola somente "tocar"no eixo, desta forma, as raízes são reais idênticas. Quando a parábola não cruza e nem "toca"no eixo das abscissas dizemos que as raízes são complexas.

Mas, cabe aqui uma pergunta: Como visualizar essas raízes?

No Geogebra, há um comando, "RaízesComplexas[<Polinômio>]", que mostra o ponto afixo do número complexo no plano cartesiano, como se as ordenadas fossem os reais da parte imaginária e as abcissas os números reais da parte real do número complexo $z = x + y.i$. Observe a figura (6.3).

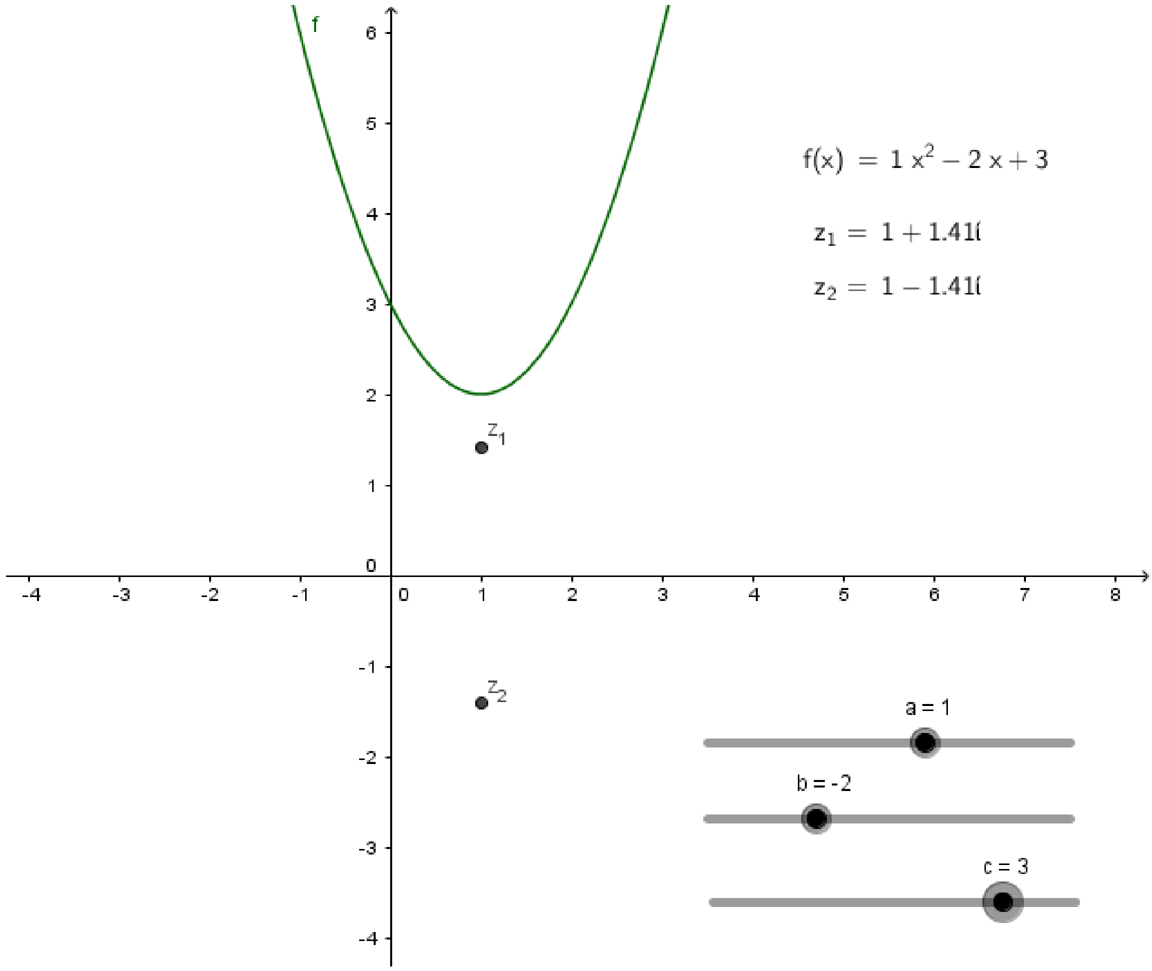

Figura 6.3: Gráfico gerado pela função geral de grau 2 e suas raízes.

Nesta mesma construção, podemos exibir a função derivada $f'(x)$ da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, e suas raízes reais, pois a função derivada de f é um polinômio de grau 1, como mostra a figura (6.4). Escrevendo simplesmente no campo de entrada $f'(x)$.

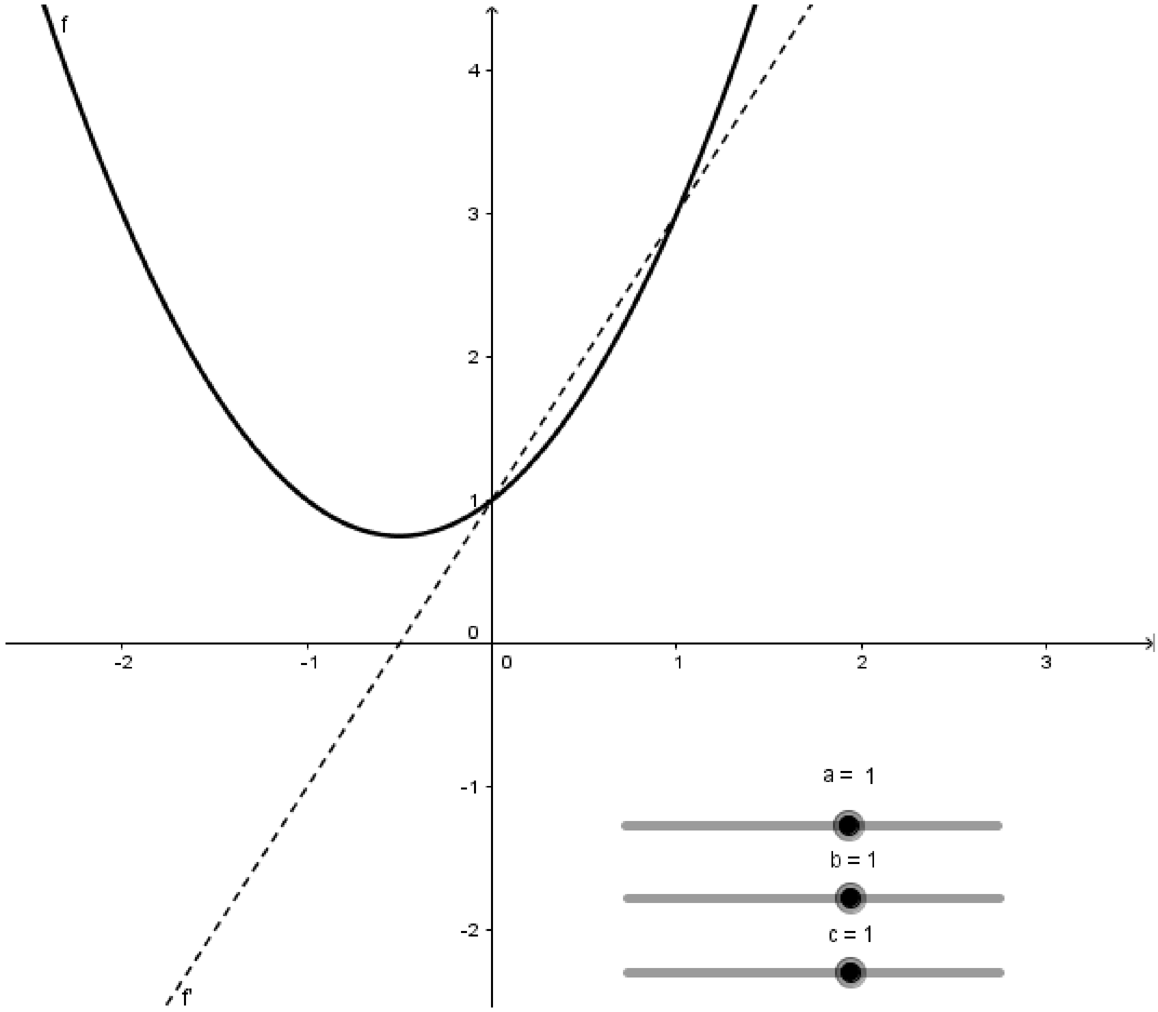

Figura 6.4: Gráfico gerado pela função geral de grau 2 e sua derivada.

Ao movermos os seletores, torna-se notável que a raiz da função derivada $f'(x)$ sempre está numa posição simétrica às raízes de $f(x)$. Vamos a uma pequena conjectura.

Conjectura 6.1.1. Seja f um polinômio de grau 2, cujas raízes se encontram numa reta do plano complexo horizontal se forem reais ou numa reta do plano complexo vertical se forem complexas. Então a raiz de $f'(x)$ é o ponto médio do segmento que tem como extremos as raízes de f.

Demonstração. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função polinomial de grau 2 e sua derivada $f'(x) = 2ax + b$, seu vértice é dado por $(-b/2a, -(b^2 - 4ac)/4a)$ em que $(-b/2a)$ é o ponto médio entre as raízes de f. Fazendo a substituição na função derivada f', temos

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{b}{2a}\right) &= 2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b \\ &= -b + b \\ &= 0. \end{aligned}$$

O que demostra que a raiz da função derivada $f'(x)$ é o ponto médio do segmento com extremos, as raízes de $f(x)$. $\square$

Este fato pode ser visualizado e discutido com muita sustentação no Geogebra, embora os cálculos passem para um segundo plano, mas se torna uma forte ferramenta para o entendimento e propulsor para novas conjecturas e descobertas.

6.1.3 Raízes de Equação Polinomial de Grau 3

Consideremos particularmente a função polinomial de grau 3 $f(x) = x(x-2)(x+1)$. É notável que as raízes de $f(x)$ é o conjunto $\{-1, 0, 2\}$, pois o polinômio está na forma fatorada. Pois bem, de agora em diante, vamos em busca das formas fatoradas dos polinômios, mas antes exploraremos as derivadas e os algoritmos para encontrar as raízes.

Exemplo 6.1.2. *Vamos construir uma função polinomial de grau 3, sua derivada primeira e sua derivada segunda juntamente com suas respectivas raízes no Geogebra.*

1. *Inserir 4 seletores, a, b, c e d.*
2. *Digitar no campo de entrada a função $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.*
3. *Digitar no campo de entrada $f'(x)$.*
4. *Digitar no campo de entrada $f''(x)$.*
5. *Escrever RaízesComplexas[$f(x)$].*
6. *Escrever RaízesComplexas[$f'(x)$].*
7. *Escrever RaízesComplexas[$f''(x)$].*
8. *Selecionar a função e mudar sua aparência.*

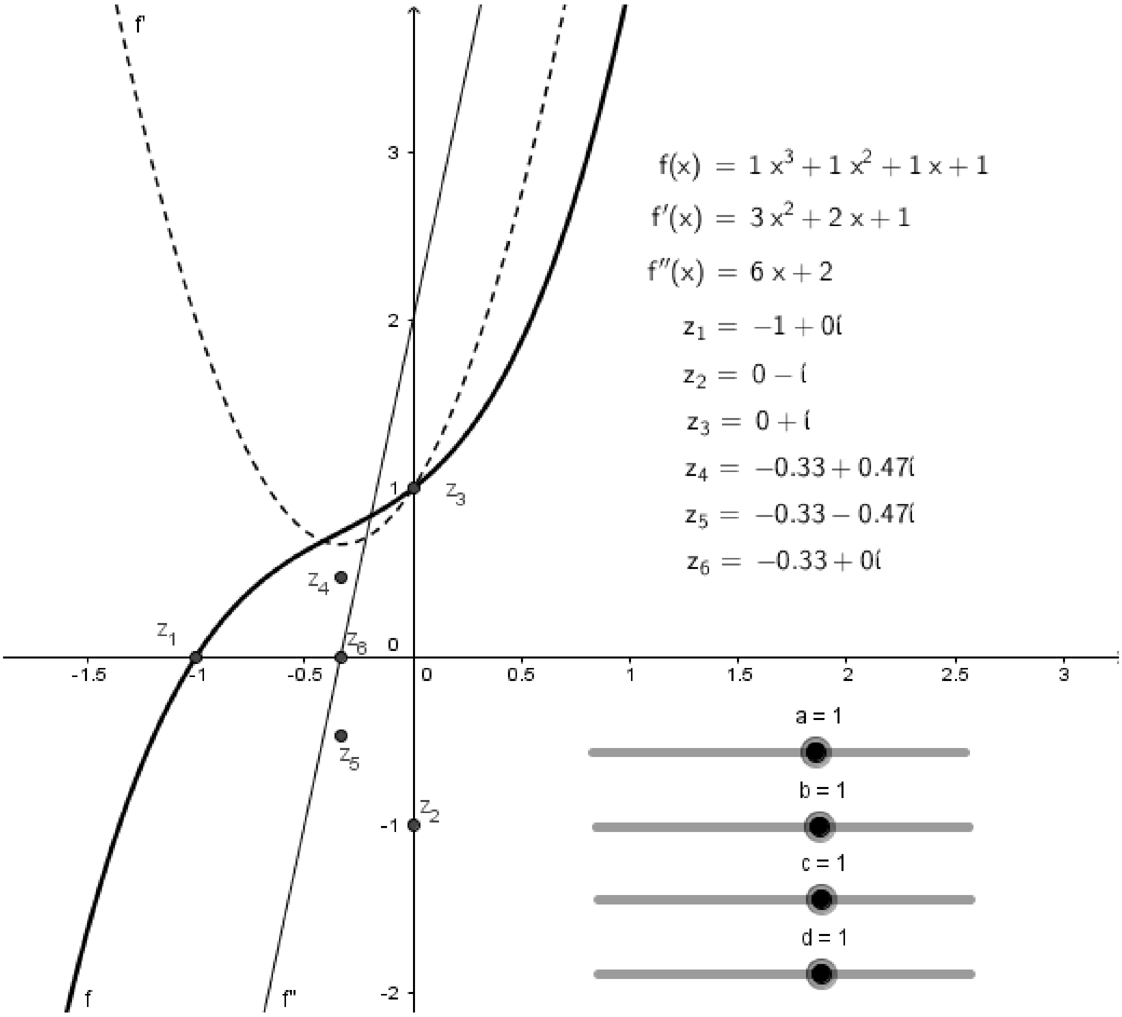

Figura 6.5: Gráfico gerado por uma função polinomial de grau 3 e suas derivadas.

Ao mudarmos os seletores dos coeficientes podemos fazer algumas perguntas e observar a variação do gráfico gerado para concluirmos mesmo de maneira informal.

1. Ao variarmos o coeficiente a podemos notar duas situações. Para $a < 0$ e para $a > 0$ o gráfico muda de que forma?

2. Os coeficiente b e c possuem características de mudanças semelhantes, que mudanças são essas?

3. O coeficiente d faz que tipo de translação?

6.2 Projeto Raízes de Equações Polinomiais de Grau n

Para resolver equações polinomiais de grau elevado, é necessário o conhecimento de algumas técnicas, além da fórmula resolutiva das equações de grau 2. Vamos listá-las:

1. Equações de grau 1 e de grau 2 incompletas, recorremos ao isolamento da indeterminada por meio de manipulações algébricas e alguns casos de fatoração simples, como quadrado perfeito, diferença de quadrados e fator comum.

2. Equações de grau 2 completas recorremos a alguns casos de fatoração, complementação de quadrados e a fórmula resolutiva.

3. Equações de grau 3 sem o termo independente, fatoramos e usamos os casos apresentados.

4. Equações de grau 3 completas, testamos os divisores do termo independente ou exploramos algum dado fornecido recorrendo ao dispositivo de Briot-Ruffini, relações de Girard e divisão de polinômios para sua redução.

5. Para equações de grau 4, em casos particulares, como as biquadradas, substituímos $x^2 = y$. Resolvemos da mesma forma que o item 2.

6. Para equações de grau maior que ou igual a 4 recorremos a ajuda dos dados fornecidos, lembrando que as raízes irracionais e complexas vem aos pares conjugados e usamos os mesmos métodos do item 4.

7. A construção dos gráficos por meio computacional é de grande ajuda e podemos explorar o comportamento e variações das equações polinomiais, além da análise de raízes irracionais e complexas por meio dos polinômios e de suas derivadas.

Apresentamos uma série de problemas de resolução de equações polinomiais dos grandes vestibulares, olimpíadas e alguns inéditos.

1. (OBM - 2015). O polinômio não constante $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $p(0) = 2015$. No máximo quantas raízes inteiras distintas tem ?

   Solução: Temos que 2015 é o termo independente do polinômio e seus divisores primos distintos, são 5, 13 e 31, os módulos de todas as raízes são divisores positivos de 2015 e queremos escrever 2015 como a maior quantidade possível de inteiros distintos. Como 2015 tem três fatores primos, e considerando os números 1 e -1, devemos ter $k \leq 5$. Por outro lado, o polinômio $P(x) = (x-1)(x+1)(x-5)(x-13)(x-31)$ possui 5 raízes inteiras distintas, tal que $P(0) = 2015$. Logo P(x) possui no máximo 5 raízes inteiras.

2. (OBM - 2014). Seja
$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \frac{3}{3+x} = 1.$$
   Qual a soma das raízes da equação?

   Solução: Primeiramente, observe que devemos ter $x \neq -1$, $x \neq -2$ e $x \neq -3$.

Vamos fatorar a equação, então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}+\frac{2}{2+x}+\frac{3}{3+x} &= 1\\
\frac{(2+x)(3+x)+2(2+x)(1+x)+3(1+x)(2+x)}{(1+x)(2+x)(3+x)} &= 1\\
(2+x)(3+x)+2(2+x)(1+x)+3(1+x)(2+x) &= (1+x)(2+x)(3+x)\\
6x^2+22x+18 &= x^3+6x^2+11x+6\\
x^3-11x-12 &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a soma das raízes é zero, pois o termo quadrático não existe.

3. (ITA - 2015) Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de $b - a$ é igual a

   (a) -36.

   (b) -12.

   (c) 6.

   (d) 12.

   (e) 24.

   Solução: Pela relação de Girard, temos

   $$x \cdot x \cdot 2 = 8.$$

   Pelo enunciado, p admite raiz dupla, logo $x = -2$.

   Escrevendo $p(x) = 2(x-2)(x+2)^2$, expandimos e obtemos os coeficientes a e b, então

   $$p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x - 16.$$

   Portanto, $b - a = -12$.

4. (ITA - 2015) Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$ com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, 15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo que i é uma raíz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ é igual a

   (a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

(b) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

(c) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

(d) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

(e) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

Solução: Pelo algoritmo de Euclides,

$$p(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x).$$

O resto da divisão é $r(x) = ax^2 + bx + c$ e como $p(i) = p(-i) = 0$ e $p(2) = 1$, temos

$$\begin{cases} -a + bi + c &= 0 \\ -a - bi + c &= 0 \\ 4a + 2b + c &= 1 \end{cases},$$

pois, $r(i) = r(-i) = 0$ e $r(2) = 1$.

Resolvendo o sistema, $a = \frac{1}{5}$, $b = 0$ e $c = \frac{1}{5}$ o que resulta $r(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

5. (UNESP - 2014) O polinômio $p(x) = ax^3 + 2x + b$ é divisível por $x - 2$ e, quando divisível por $x + 3$, deixa resto -45. Nessas condições, os valores de a e b, respectivamente são

(a) 1 e 4.

(b) 1 e 12.

(c) -1 e 12.

(d) 2 e 16.

(e) 1 e -12.

Solução: Pelo enunciado $p(2) = 0$, $p(-3) = 45$, segue que

$$a2^3 + 2 \cdot 2 + b = 0 \;\therefore\; 8a + b = -4$$

e

$$a(-3)^3 + (-3) \cdot 2 + b = 0 \;\therefore\; 27a - b = 39.$$

Portanto, $a = 1$ e $b = -12$.

6. (UNICAMP - 2014) O polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ tem três raízes: r, $-r$ e s.

(a) Determine os valores de r e s.

(b) Calcule $p(z)$ para $z = 1 + i$, onde i é a unidade imaginária.

Solução:

(a) Pela relação de Girard, temos

$$r + (-r) + s = 2 \Longrightarrow s = 2$$

e

$$r \cdot (-r) \cdot s = -18 \Longrightarrow r = -3.$$

(b) $p(z) = p(1+i) = (1+i)^3 - 2(1+i)^2 - 9(1+i) + 18$, segue que $p(1+i) = 7 - 11i$.

7. O polinômio $p(x) = x^7 - x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 30x^2 - 28x - 8$ possui $(1 - i\sqrt{3})$ e $(1 - \sqrt{3})$ como raízes. Determine todas as raízes sabendo que a raiz inteira de p tem multiplicidade 3.

Solução: Sabendo que $(1 - i\sqrt{3})$ e $(1 - \sqrt{3})$ são raízes, seus conjugados também serão, logo

$$\left(x - 1 - i\sqrt{3}\right) \cdot \left(x - 1 + i\sqrt{3}\right) \cdot \left(x - 1 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - 1 + \sqrt{3}\right) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 8.$$

O polinômio $f(x) = x^4 - 2x^2 + 12x - 8$ que é resultante da expansão da forma fatorada em termos das raízes, divide o polinômio $p(x)$, então vamos dividir e encontrar o polinômio quociente reduzido, logo

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
x^7 \; -x^6 & -3x^5 & +3x^4 & -6x^3 & -30x^2 & -28x & -8 & & x^4 \; -4x^3 \; +6x^2 \; -4x - 8 \\ \cline{9-9}
-x^7 \; +4x^6 & -6x^5 & +4x^4 & +8x^3 & & & & & x^3 \; +3x^2 \; +3x \; +1 \\ \cline{1-4}
3x^6 & -9x^5 & +7x^4 & +2x^3 & -30x^2 & & & & \\
-3x^6 & +12x^5 & -18x^4 & +12x^3 & +24x^2 & & & & \\ \cline{1-5}
 & 3x^5 & -11x^4 & +14x^3 & -6x^2 & -28x & & & \\
 & -3x^5 & +12x^4 & -18x^3 & +12x^2 & +24x & & & \\ \cline{1-6}
 & & x^4 & -4x^3 & +6x^2 & -4x & -8 & & \\
 & & -x^4 & +4x^3 & -6x^2 & +4x & +8 & & \\ \cline{1-8}
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

O polinômio quociente reduzido é $q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$. Pelo enunciado, o polinômio $p(x)$ possui uma raiz inteira com multiplicidade 3, logo, como o termo independente de $q(x)$ é 1, e todos os coeficientes de $q(x)$ é positivo, concluímos sem muitos cálculos que -1 é a raiz procurada.

Portanto, a solução da equação é $\left\{1+i\sqrt{3},\ 1-i\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3},\ -1\right\}$.

8. Resolva a equação $x^4+2x^3+x^2+4x-2=0$.

   Solução:Vamos separar a equação em dois membros quadráticos e eliminar o termo cúbico, então

$$\begin{aligned} x^4+2x^3+x^2+4x-2 &= 0 \\ x^4+2x^3+x^2 &= -4x+2 \\ (x^2+x)^2 &= -4x+2. \end{aligned}$$

   Acrescentando $y^2+2y(x^2+x)$ em ambos os membros, temos

$$\begin{aligned} y^2+2y(x^2+x)+(x^2+x)^2 &= -4x+2+y^2+2y(x^2+x) \\ (y+x^2+x)^2 &= -4x+2+y^2+2yx^2+2yx \\ (y+x^2+x)^2 &= 2yx^2+(2y-4)x+y^2+2. \end{aligned}$$

   Fazendo o discriminante do segundo membro igual a zero, ou seja, $\Delta=0$, obtemos uma equação auxiliar em termos de x, para determinar um valor para y, assim

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ (2y-4)^2-4\cdot 2y\cdot(y^2+2) &= 0 \\ y^3-\frac{1}{2}y^2+4y-2 &= 0. \end{aligned}$$

   Com uma simples verificação concluímos que $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$, substituindo $y=\frac{1}{2}$ no segundo membro equação, temos

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{1}{2}\right)+x^2+x\right)^2 &= 2\left(\frac{1}{2}\right)x^2+\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-4\right)x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+2 \\ \left(\frac{1}{2}+x^2+x\right)^2 &= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Portanto, teremos que resolver duas equações, que são

$$\frac{1}{2} + x^2 + x = x - \frac{3}{2}$$

ou

$$\frac{1}{2} + x^2 + x = -x + \frac{3}{2}.$$

Logo, a solução da equação é $\left\{\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}i,\ -1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}\right\}$.

9. Resolva a equação $x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = 0$.

Solução: Não vamos testar os divisores de -5, pois a equação é de grau par e também não vamos resolver pela fórmula resolutiva para polinômios de grau 4. Consideraremos as expressões $x^2 + ax + b$ e $x^2 - ax + c$, pois não há o termo cúbico, calculando seu produto, temos

$$\begin{aligned}(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) &= x^4 - ax^3 + cx^2 + ax^3 - a^2x^2 + acx + bx^2 - abx + bc \\ &= x^4 + (c - a^2 + b)x^2 + (ac - ab)x + bc.\end{aligned}$$

Fazendo a comparação dos coeficientes, $x^4 - 12x^2 + 24x - 5 \equiv x^4 + (c - a^2 + b)x^2 + (ac - ab)x + bc$, temos

$$\left\{\begin{aligned} c - a^2 + b &= -12 \\ ac - ab &= 24 \\ bc &= -5 \end{aligned}\right. .$$

Fazendo, $b = 5$, temos que $c = -1$, assim $a(-1) - (5)a = 24$, portanto $a = -4$. Fazendo um teste na primeira equação, temos

$$c - a^2 + b = -1 - (-4)^2 + 5 = -1 - 16 + 5 = -12.$$

Este artifício fatora a equação, como segue

$$x^4 - 12x^2 + 24x - 5 = (x^2 - 4x + 5) \cdot (x^2 + 4x - 1).$$

Fazendo $(x^2 - 4x + 5) \cdot (x^2 + 4x - 1) = 0$, completando quadrados, temos

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 &= 0 \\ x^2 - 4x &= -5 \\ x^2 - 4x + 4 &= -5 + 4 \\ (x-2)^2 &= -1 \\ x - 2 &= \pm\sqrt{-1} \\ x &= 2 \pm i \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 1 &= 0 \\ x^2 + 4x &= 1 \\ x^2 + 4x + 4 &= 1 + 4 \\ (x+2)^2 &= 5 \\ x + 2 &= \pm\sqrt{5} \\ x &= -2 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação é $\left\{-2-\sqrt{5},\, -2+\sqrt{5},\, 2-i,\, 2+i\right\}$.

10. Resolva a equação $x^3 - 5x^2 - 139x + 143 = 0$.

Solução: Nessa equação é fácil concluir que para $x = 1$, a igualdade é verdadeira, então

$$(1)^3 - 5(1)^2 - 139(1) + 143 = 1 - 5 - 139 + 143 = 144 - 144 = 0.$$

Usando o dispositivo de Briot Ruffini, temos

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -139 & 143 & 1 \\ \hline 1 & -4 & -143 & 0 & \end{array}.$$

Para a equação resultante, $x^2 - 4x - 143 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x - 143 &= 0 \\
x^2 - 4x &= 143 \\
x^2 - 4x + 4 &= 143 + 4 \\
(x-2)^2 &= 147 \\
x - 2 &= \pm\sqrt{147} \\
x &= 2 \pm 7\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação é $\left\{1,\, 2 - 7\sqrt{3},\, 2 + 7\sqrt{3}\right\}$.

11. Resolva a equação $3x^3 - 7x^2 - x + 1 = 0$.

Solução: Vamos testar os divisores racionais $\left\{\pm 1,\, \pm 3,\, \pm\frac{1}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned}
x &= 1 \Longrightarrow 3(1)^3 - 7(1)^2 - (1) + 1 = -4 \neq 0 \\
x &= -1 \Longrightarrow 3(-1)^3 - 7(-1)^2 - (-1) + 1 = -10 \neq 0 \\
x &= 3 \Longrightarrow 3(3)^3 - 7(3)^2 - (3) + 1 = 16 \neq 0 \\
x &= -3 \Longrightarrow 3(-3)^3 - 7(-3)^2 - (-3) + 1 = -140 \neq 0 \\
x &= \frac{1}{3} \Longrightarrow 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 7\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) + 1 = 0 \\
x &= -\frac{1}{3} \Longrightarrow 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{4}{9} \neq 0.
\end{aligned}$$

Concluímos que $\frac{1}{3}$ é uma raiz racional da equação, usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & -7 & -1 & 1 & \frac{1}{3} \\
\hline
3 & -6 & -3 & 0 &
\end{array}.$$

O polinômio resultante é $q(x) = 3x^2 - 6x - 3$, e fazendo $q(x) = 0$ reduzimos ainda mais os coeficientes dividindo-os por 3, que nos dá a equação $x^2 - 2x - 1 = 0$. Vamos resolver completando quadrados, assim

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ x^2 - 2x &= 1 \\ x^2 - 2x + 1 &= 1 + 1 \\ (x-1)^2 &= 2 \\ x - 1 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= 1 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução da equação é $\left\{\dfrac{1}{3}, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right\}$.

6.3 Projeto Equações Polinomiais na Forma Quadrática

Os polinômios na forma quadrática são aplicados em várias situações e contextos matemáticos. É de suma importância e de fácil manipulação algébrica e com um programa que gera gráficos em três dimensões seu estudo pode ser explorado tanto em séries iniciais de uma graduação como em turmas de Ensino Médio ou em turmas avançadas para eventuais participações em concursos de matemática mais avançados, como as Olimpíadas de Matemática Nacionais ou Internacionais.

Abrindo uma janela de visualização em 2D no geogebra, inserimos três seletores. Logo após abrimos mais uma janela em 3D e digitamos a função polinomial na forma quadrática nas variáveis x e y e em termos de a, b e c, ou seja, $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$.

Primeiramente selecionamos $a = 0$, $b = 1$ e $c = 0$, resultando na função $f(x, y) = y^2$ como mostra a Figura (6.6).

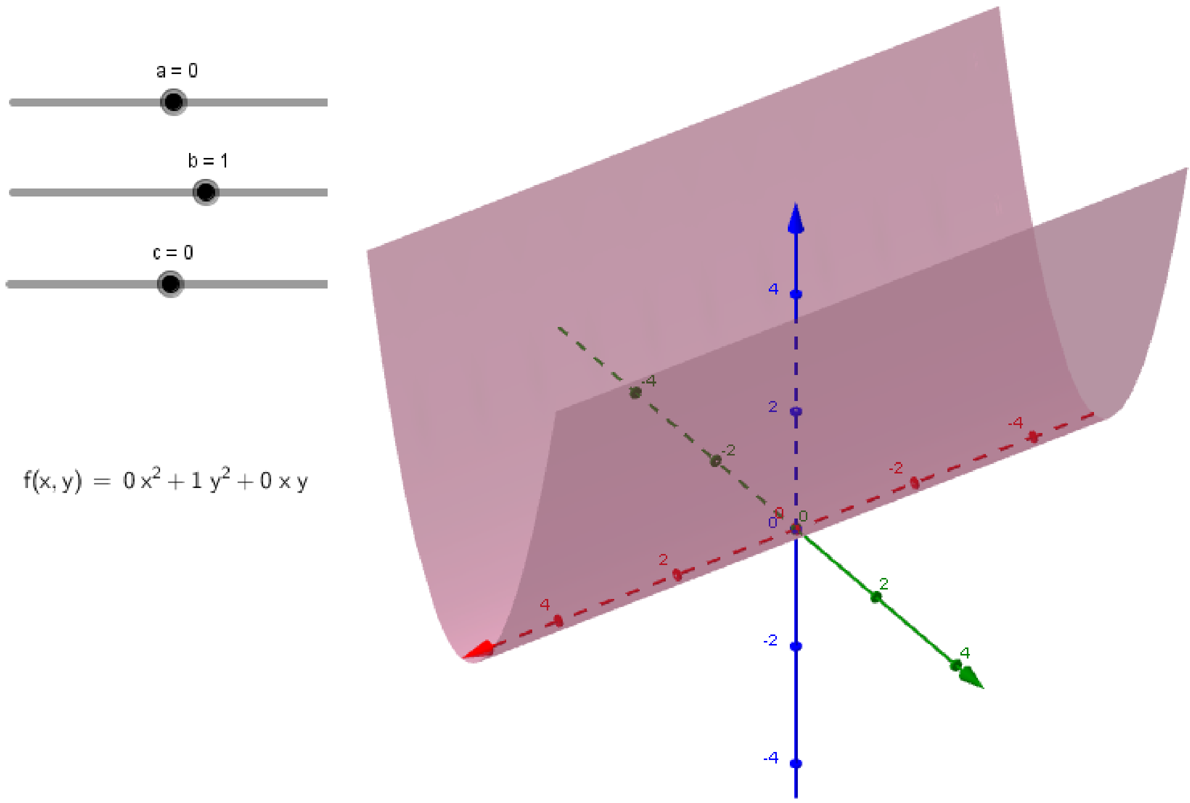

Figura 6.6: Gráfico gerado pela quadrática $f(x, y) = y^2$.

Observe que para qualquer $f(x, y) = k$ com $k \geq 0$ temos sempre duas retas paralelas. No gráfico da Figura (6.7), $f(x, y) = x^2$ e temos a mesma situação, isto é, duas retas paralelas para todo $f(x, y) = k$ com $k \geq 0$. Sua assinatura é definida como semipositiva, pois um dos vetores, isto é, um termo quadrático é nulo.

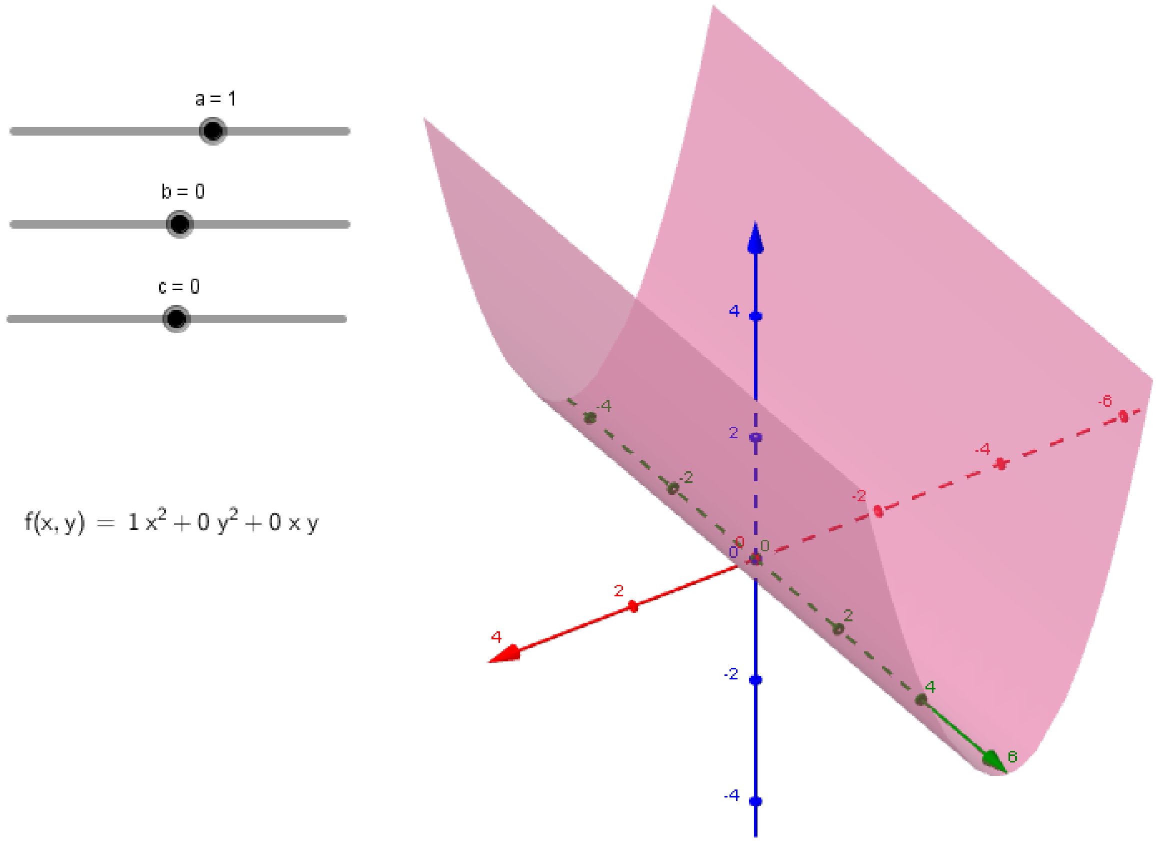

Figura 6.7: Gráfico gerado pela quadrática $f(x, y) = x^2$.

Selecionamos agora $a = 1$, $b = 3$ e $c = 0$ obtendo assim a função $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. O gráfico gerado é uma cônica chamada de elipsoide, como mostra a Figura (6.8).

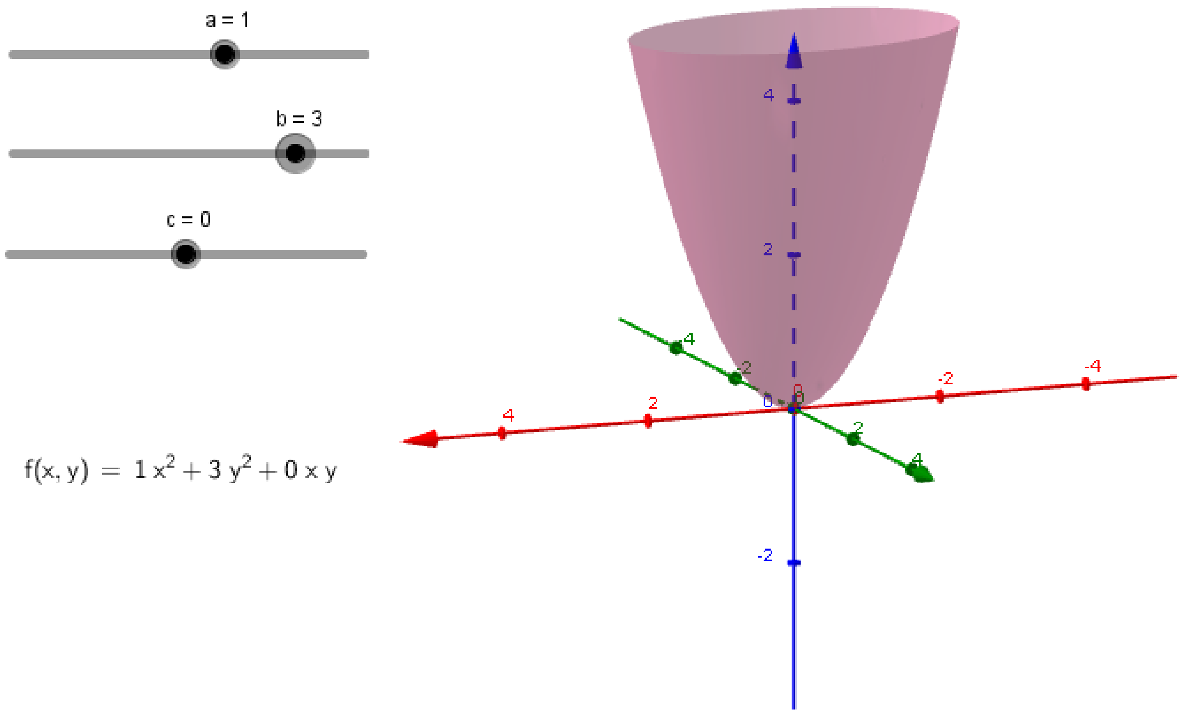

Figura 6.8: Gráfico gerado pela quadrática $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

Observe que a cônica está acima dos eixos x e y, traduzido de uma modo informal, que se trata de uma característica positiva, ou seja, a assinatura da forma quadrática é positiva.

Seguindo este mesmo raciocínio, o gráfico gerado pela função $f(x, y) = -x^2 - 2y^2$, mostrado na Figura (6.9), se trata de uma cônica com assinatura negativa.

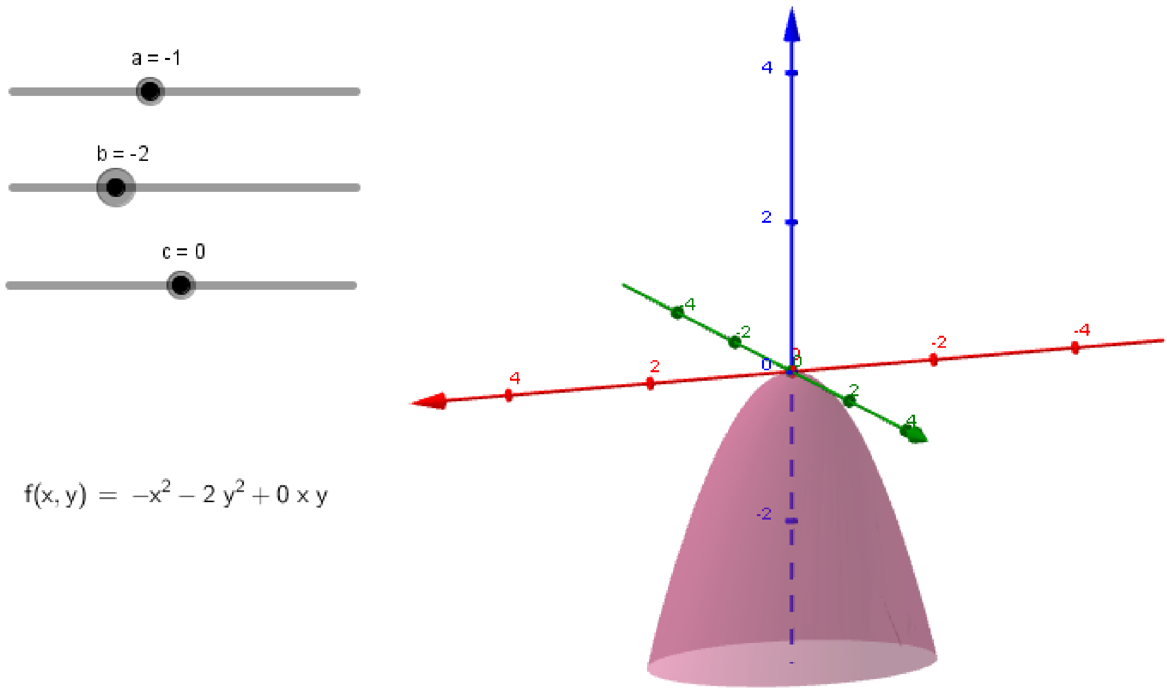

Figura 6.9: Gráfico gerado pela quadrática $f(x, y) = -x^2 - 2y^2$.

Fazendo $a < 0$, $b < 0$ e $c = 0$, a cônica ficará abaixo do eixo z, com assinatura negativa.

Nestes casos observados, as funções polinomiais na forma quadrática, não possui o termo xy, assim o estudo dos sinais dos vetores que as compões, ainda linearmente independentes, nos dá explicitamente o índice e o posto, ou seja, a assinatura. Desta forma, sabemos o comportamento da cônica no espaço sem a necessidade da manipulação algébrica. A Figura (6.10), mostra que quando os sinais são opostos, deixamos de ter a cônica positiva ou negativa. Para um $f(x, y) = k$ obtemos uma curva de nível na forma de hipérbole o que é de fácil compreensão ao observar o gráfico.

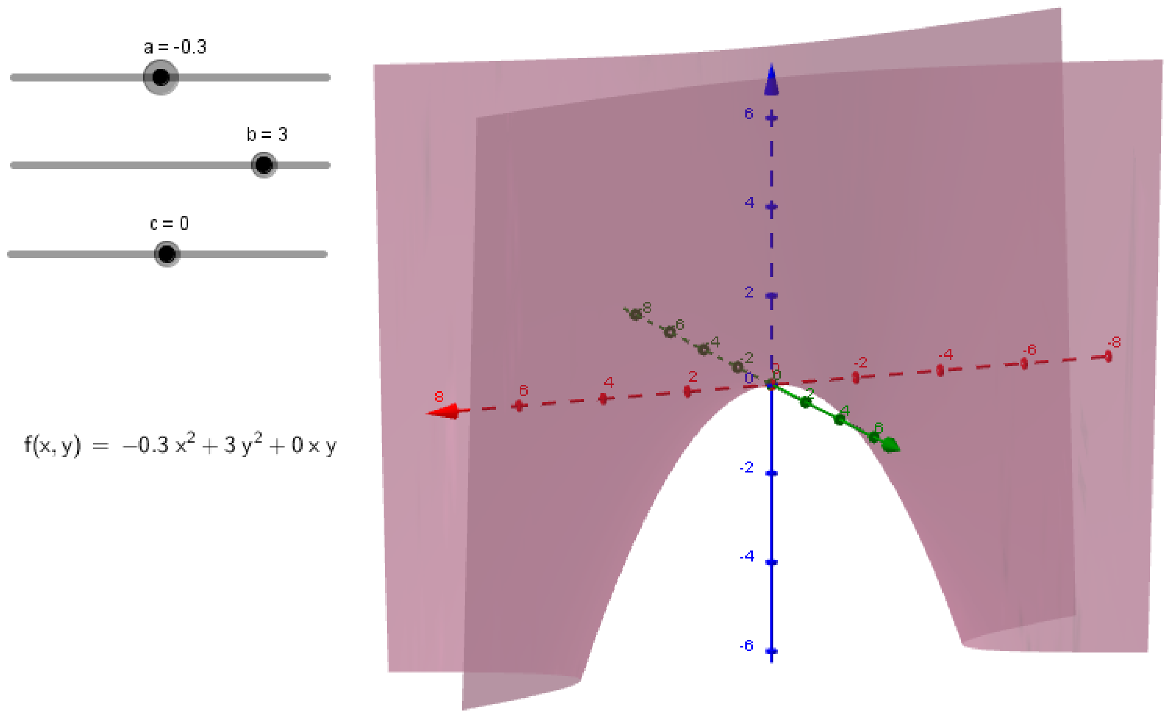

Figura 6.10: Gráfico gerado pela quadrática $f(x, y) = -(0, 3)x^2 + 3y^2$.

Com o termo xy, as funções se tornam menos compreensivas, necessitando um estudo mais algébrico, ou seja, temos que completar quadrados para que os sinais dos termos LI, sejam assim analisados.

Consideremos a função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5xy$. Mesmo que os sinais dos termos sejam todos positivos, não podemos garantir se a sua assinatura seja positiva. Vamos completar quadrados para analisar a situação, então

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + 5xy \\ &= x^2 + 5xy + \frac{25y^2}{4} - \frac{25}{4}y^2 + y^2 \\ &= \left(x + \frac{5y}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}y^2 + y^2 \\ &= \left(x + \frac{5y}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}y^2. \end{aligned}$$

Observe que os sinais dos termos quadrados são opostos, sendo assim, temos uma sua assinatura $(1, 1)$, ou melhor, indefinida. O gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5xy$ está gerado na Figura (6.11).

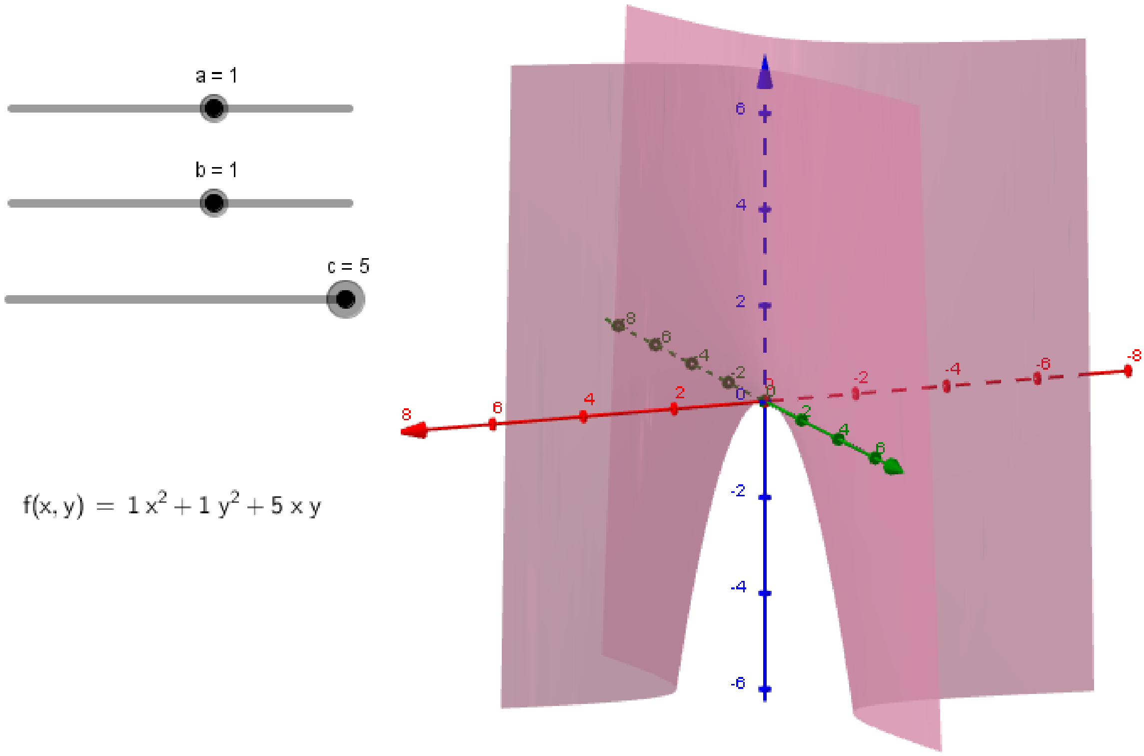

Figura 6.11: Gráfico gerado pela quadrática $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5xy$.

Neste projeto, temos como objetivo a exploração do recurso computacional na visualização dos gráficos gerados por funções polinomiais de mais de uma variável. No caso particular tratamos, de funções na forma quadrática, por gerar cônicas e curvas que podem ser facilmente entendidas e estudadas no Ensino Médio. Esperamos que, neste pequeno projeto, o aluno e o professor possa estender seus conceitos conjecturando novas ideias e assim desenvolver a habilidade da visualização e análise de expressões algébricas mais complexas sejam elas manipuladas ou em gráficos.

6.4 Projetos Avançados

6.4.1 Projeto Gauss-Lucas

(Gauss-Lucas) As raízes de p' pertencem ao fecho convexo das raízes do próprio polinômio p.

Vamos verificar este teorema através de uma função polinomial de grau 3. Assim, usando a construção da função $p(x) = ax^3 = bx^2 + cx + d$, sua derivada $p'(x) = 3x^2+2x+c$, e acionando o comando de exibição das raízes complexas, teremos a veracidade do teorema como mostra a figura (6.12).

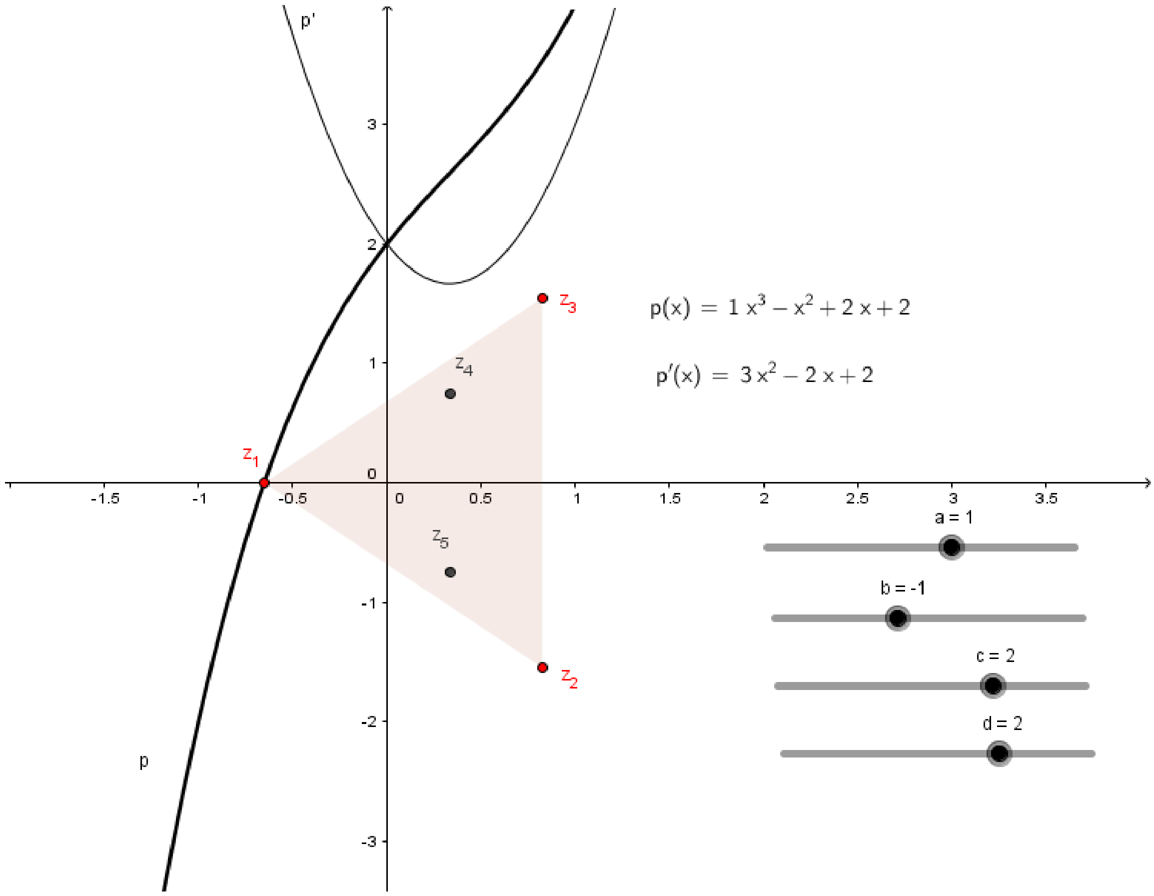

Figura 6.12: Gráfico gerado pela função polinomial particular $p(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2$.

A função particular $p(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2$ possui raízes z_1, z_2 e z_3. Sua derivada é $3x^2 - 2x + 2$ e possui raízes z_4 e z_5. O triângulo possui vértices nos afixos z_1, z_2 e z_3 que são as raízes de p.

A função acima é um exemplo particular que está interpretada em forma de gráfico na figura (6.12), mas podemos mover o seletor e garantir que em qualquer situação adotada para a função polinomial de grau 3, as raízes de p' pertencem ao fecho convexo das raízes de p, isto é, no capítulo 4, já foi provado este teorema. Na figura 6.6, as raízes de p formam um triângulo e as raízes de p' estão no interior do triângulo.

Quando todas as raízes de p são reais, as raízes de p', também serão reais, ou seja, elas pertencerão a reta real das abcissas como mostra a figura (6.13).

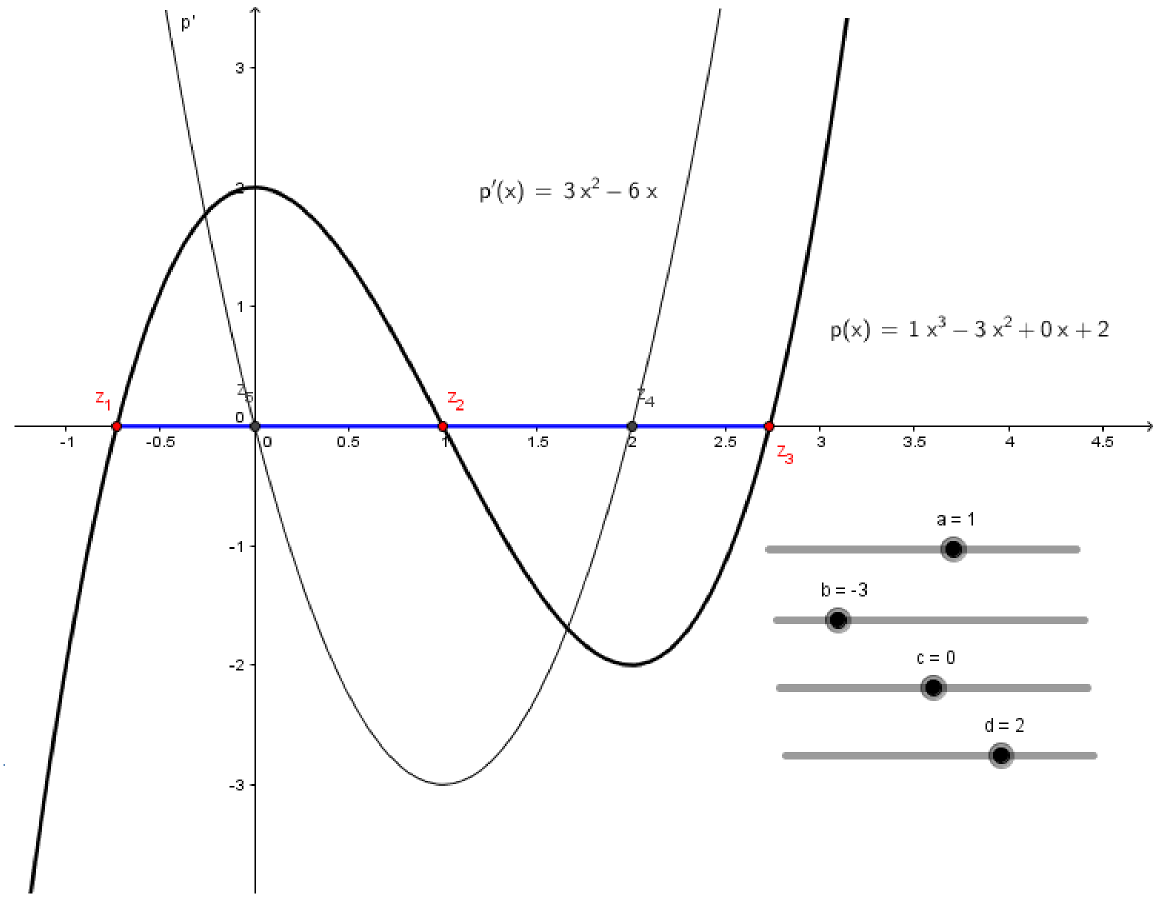

Figura 6.13: Fecho convexo sob um segmento.

Vamos explorar o teorema para polinômios de grau 4 e 5.

Exemplo 6.4.1. *Manipulando os seletores* a, b, c, d *e* e*, para a função polinomial* $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$*, recaímos numa função com* 4 *raízes complexas.*

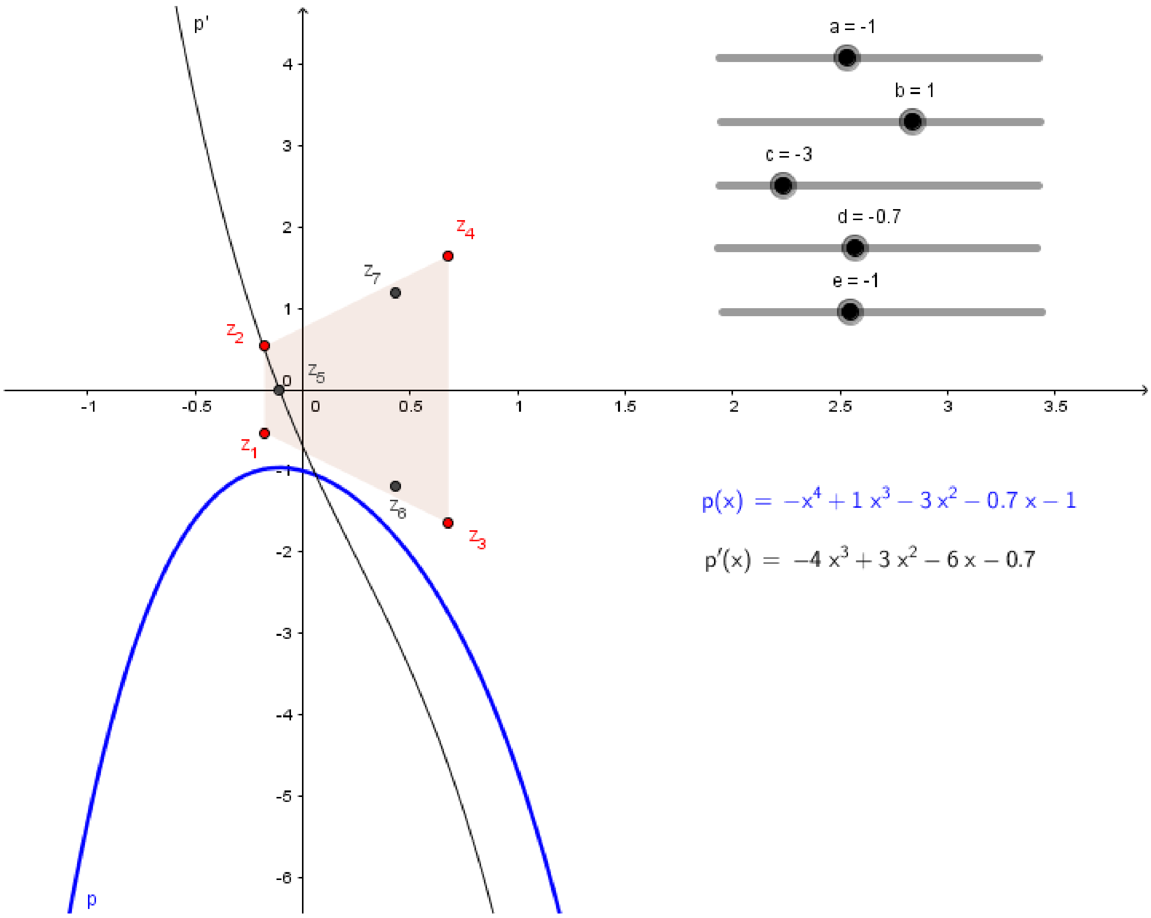

Figura 6.14: Fecho convexo na forma de um quadrilátero.

Observando a figura (6.14), as raízes z_5, z_6 *e* z_7 *do polinômio* $p'(x)$*, estão no interior do polígono formado pelas raízes de* $p(x)$*.*

Neste mesmo exemplo, podemos mover os seletores e o programa, mantém as invariantes da construção, ou seja, as condições do teorema não se alteram.

Exemplo 6.4.2. *Selecionando os seletores, de modo que as raízes sejam todas reais não complexas, notamos que o fecho convexo neste caso passa a ser um segmento,* $\overline{z_1 z_4}$ *contendo todas as raízes de* $p'(x)$*. Como mostra a figura (6.15).*

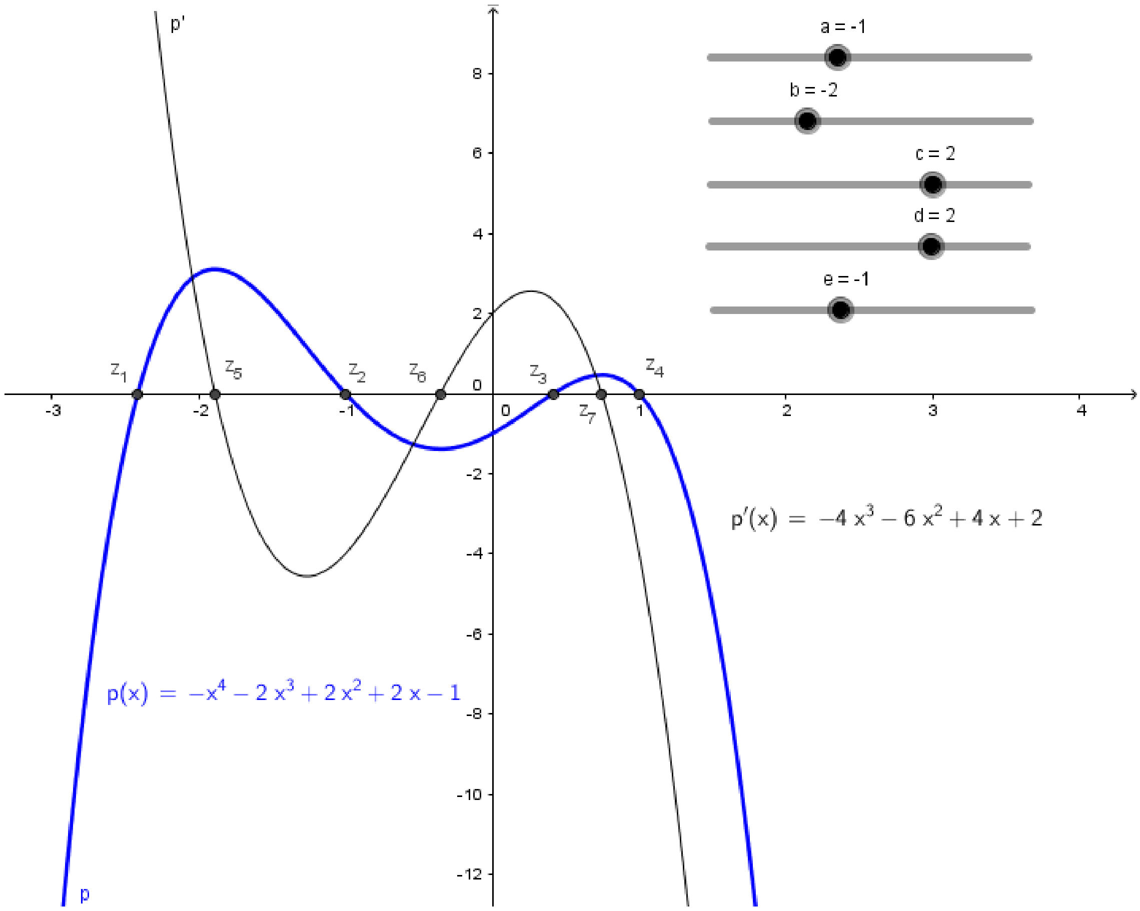

Figura 6.15: Fecho convexo na forma de um segmento.

Exemplo 6.4.3. *Vamos mostrar agora um polinômio de grau 5.*

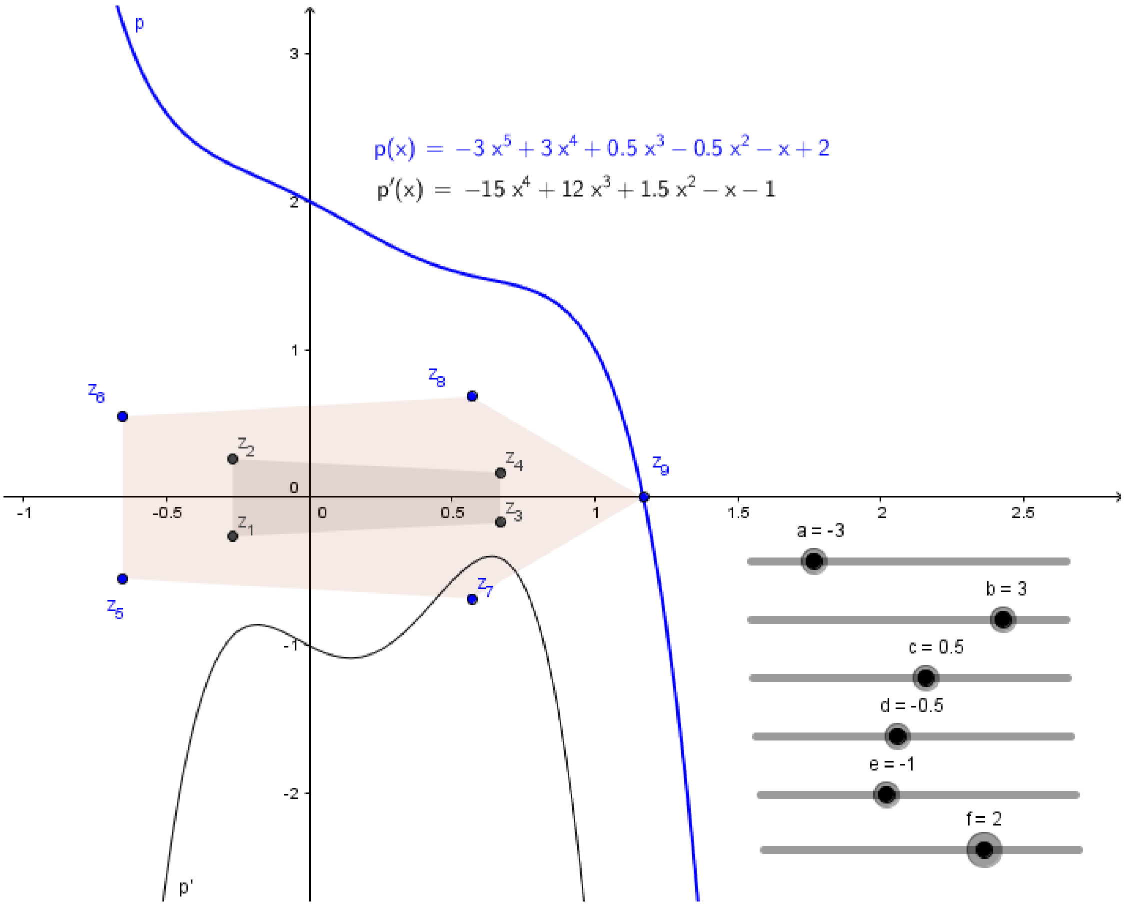

Figura 6.16: Fecho convexo na forma de um pentágono.

Vamos agora a algumas perguntas.

1. Porque o fecho formado pelas raízes deve ser convexo?

2. Quando as raízes do polinômio for todas reais, o que podemos concluir sobre o fecho?

3. Se o polinômio tem grau 7, que polígono convexo é formado por suas raízes e pelas raízes da derivada?

4. O número de raízes é sempre igual ao número de vértices do polígono convexo?

5. Vai haver a possibilidade de uma raiz da derivada do polinômio em estudo não pertencer ao fecho convexo?

6.4.2 Projeto van der Berg

(van der Berg) Seja as raízes de um polinômio cúbico p que formam os vértices do triângulo ABC no plano complexo. Tem-se que, as raízes de p' são os pontos focais da elipse tangente aos lados do ABC em seus pontos médios.

Todo polinômio cúbico admite pelo menos uma raiz real, pois seus coeficientes são reais e se houver uma raiz complexa, imediatamente teremos sua conjugada como raiz também. Não haverá a possibilidade de termos uma função polinomial de grau 3 com três raízes complexas, a não ser que seus coeficientes sejam complexos, o que não é nosso caso de estudo.

Novamente, vamos verificar este teorema através de uma função polinomial de grau 3. Assim, usando a construção da função $f(x) = ax^3 = bx^2 + cx + d$, sua derivada $f'(x) = 3x^2 + 2x + c$, e acionando o comando de exibição das raízes complexas, teremos a veracidade do teorema como mostra a figura (6.17).

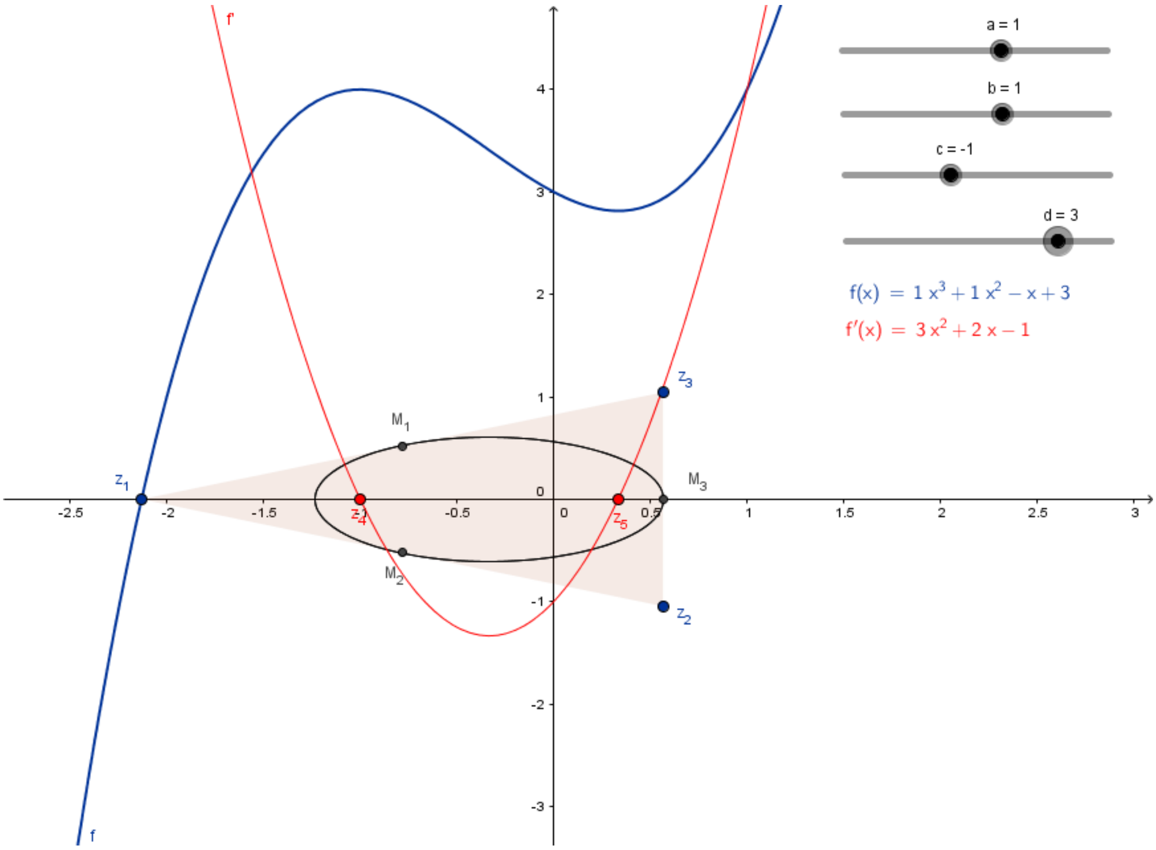

Figura 6.17: Gráfico gerado por uma função polinomial geral particular de grau 3.

Se a função polinomial admitisse três raízes reais, teríamos uma elipse e um triângulo degenerado, pois todos os pontos estariam na reta real das abscissas. Neste caso particular, temos um triângulo formado pela raízes da função polinomial e os pontos médios dos lados do triângulo e são também pontos da elipse o que faz com que os lados do triângulo sejam tangentes. Os pontos mais notáveis são as derivadas da função polinomial que são os pontos focais da elipse.

Exemplo 6.4.4. *Considerando a função polinomial* $f(x) = x^3 + x^2$, *vamos determinar os focos da elipse inscrita no triângulo formado pelas raízes de* f.

Solução: Pelo teorema de van der Berg, as raízes da derivada de f *são os pontos focais da elipse. Portanto,* $f'(x) = 3x^2 + 2x$, *e suas raízes são* $-2/3$ *ou* 0. *Mas precisamos verificar se as raízes de* f *são todas reais. Fatorando o polinômio, temos*

$f(x) = x.(3x^2 + 2)$ possui o zero como raiz real e $\pm i.\sqrt{6}/3$. Portanto, os pontos focais da elipse são $-2/3$ e 0.

Exemplo 6.4.5. *Vamos agora considerar uma função polinomial $p(x) = x^3 + 1$. Sua derivada terá raiz dupla, ou seja, o discriminante de p' é igual a zero. Desta forma, os pontos focais serão os mesmos, logo teremos uma circunferência como mostra a figura (6.18).*

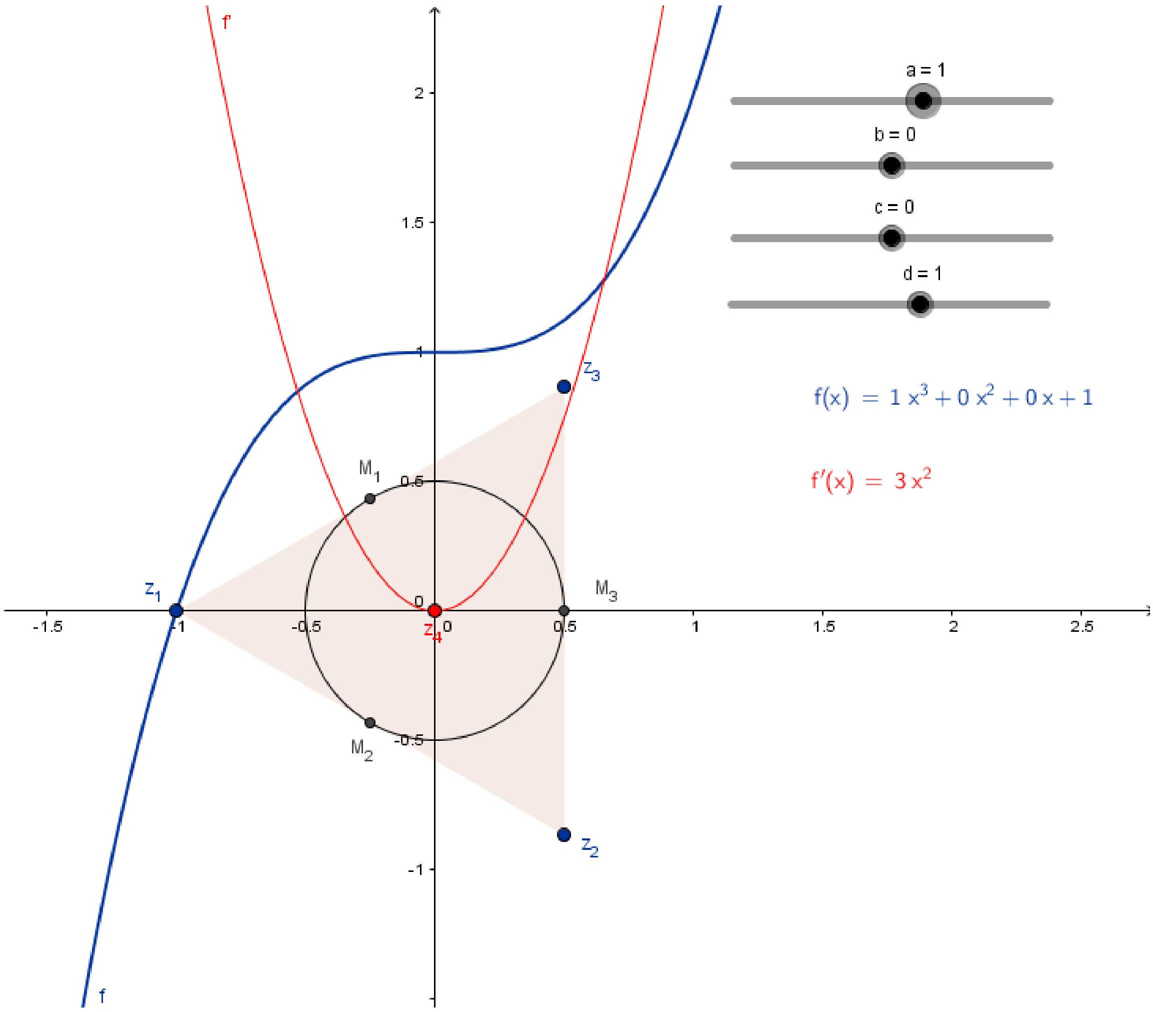

Figura 6.18: Gráfico gerado pela função polinomial $p(x) = x^3 + 1$.

Vamos a algumas perguntas.

1. No triângulo formado pelas raízes do polinômio, as cevianas do ponto médio ao vértice, determina um ponto notável. Que ponto notável é determinado pelo encontro dessas cevianas?

2. Qual a relação deste ponto notável com a elipse inscrita ao triângulo formado pelas raízes do polinômio?

3. Em que situação todos os pontos notáveis do triângulo formado pelas raízes do polinômio são os mesmos? O que podemos afirmar da derivada do polinômio em estudo?

4. O que acontece se as raízes do polinômio forem todas reais?

6.4.3 Projeto Fourier-Budan

O Teorema de Fourier-Budan, trata dos sinais dos polinômios na sequência das derivadas da função para a decisão da existência ou não de raízes de um polinômio em um intervalo aberto dado, vamos ao teorema.

(Fourier-Budan) Seja p o número de alterações de sinal na sequência

$$f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x),$$

onde f é um polinômio de grau n. Então, o número de raízes de f (contadas as multiplicidades) entre a e b, em que $f(a)$, $f(b)$, e $a < b$, não exceda $N(a) - N(b)$. Além disso, o número de raízes pode diferir a partir de $N(a) - N(b)$ por apenas um número par.

Exemplo 6.4.6. *Considere a função $f(x) = x^3-6x^2+5x-1$. Vamos calcular a sequência de Fourier.*

Solução: $\{f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)\} = \{x^3 - 6x^2 + 5x - 1, 3x^2 - 12x + 5, 6x - 12, 6\}$.

Exemplo 6.4.7. *Considerando ainda a função $f(x) = x^3-6x^2+5x-1$. Vamos determinar a variação de sinais $N(a)$ e $N(b)$ no intervalo aberto $(0, 3)$, sendo $a = 0$ e $b = 3$.*

Solução: Temos que $\{f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)\} = \{x^3 - 6x^2 + 5x - 1, 3x^2 - 12x + 5, 6x - 12, 6\}$, *assim*

$$\begin{aligned} f(0) &= -1, \\ f'(0) &= 5, \\ f''(0) &= -12, \\ f'''(0) &= 6. \end{aligned}$$

Logo, $N(0) = 3$, *pois* $\{-1, 5, -12, 6\} \Longrightarrow (- + -+)$. *Houve três mudanças de sinais na sequência.*

$$\begin{aligned} f(3) &= -13, \\ f'(3) &= -4, \\ f''(3) &= 18, \\ f'''(3) &= 6. \end{aligned}$$

Logo, $N(3) = 1$, *pois* $\{-13, -4, 18, 6\} \Longrightarrow (- - ++)$. *Houve somente uma mudança de sinal.*

Pelo Teorema (4.5.1), $N(0) - N(3) = 3 - 1 = 2$. *Portanto, o polinômio* $f(x)$ *tem dois ou nenhuma raiz real no intervalo aberto* $(0, 3)$.

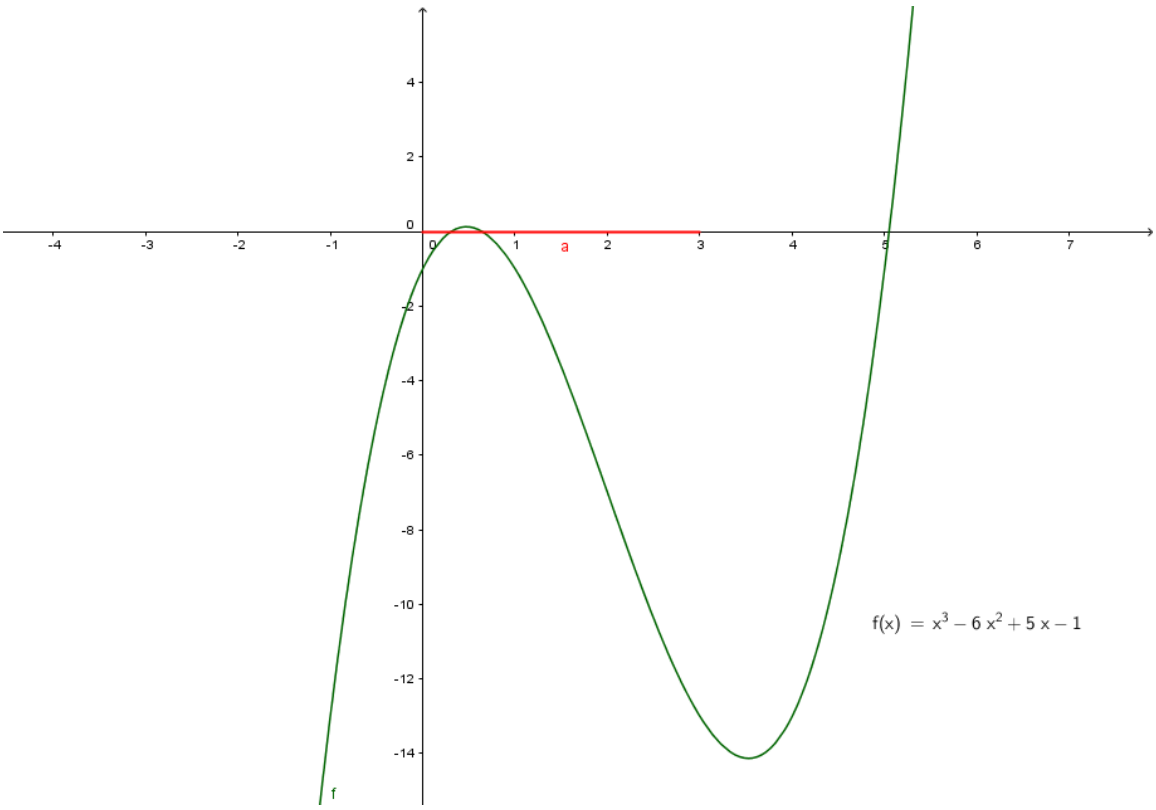

Figura 6.19: Gráfico gerado pela função polinomial $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 1$.

Observe o gráfico da figura (6.19), a função é de grau 3, mas o intervalo em questão mostrou que existe 2 raízes reais e por isso sabemos que a terceira é também real. E se existissem duas raízes complexas, como estabelecer a existência pelo teorema de Fourier-Budan?

Vamos construir um modo de manipular os intervalos, exibir a sequência de Fourier e também as funções em termos dos intervalos com a ajuda de seletores para que possamos mover e mudar os coeficientes e os intervalos.

Exemplo 6.4.8. *Vamos construir uma função polinomial de grau 3 e suas derivadas no Geogebra.*

1. *Inserir 4 seletores, a, b, c e d.*
2. *Inserir mais dois seletores e mudar para r e s, com incremento igual* 1.
3. *Digitar no campo de entrada a função $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.*
4. *Digitar no campo de entrada $g'(x)$.*
5. *Digitar no campo de entrada $g''(x)$.*
6. *Digitar no campo de entrada $g'''(x)$.*
7. *Na entrada escrever "$F = \{g, g', g'', g'''\}$".*
8. *Na entrada escrever "$N_r = \{g(r), g'(r), g''(r), g'''(r)\}$".*
9. *Na entrada escrever "$N_s = \{g(s), g'(s), g''(s), g'''(s)\}$".*
10. *Não exibir as funções $g''(x)$ e $g'''(x)$, para não poluir a construção.*

Desta forma, podemos propor algumas perguntas, e analisar a mudança do intervalo e observar as mudanças de sinais das funções já calculadas de uma infinidade de funções. Segue algumas conjecturas:

1. Todas as raízes são reais. Mova os seletores r e s combinando os possíveis intervalos que podem ou não dar variações de sinais que determinem a quantidade de raízes no intervalo em questão.
2. Todas as raízes são reais. Mova os seletores r e s fora do domínio das raízes.
3. Duas raízes complexas não real e uma real. Mova os seletores r e s combinando os possíveis intervalos que podem ou não dar variações de sinais que determinem a quantidade de raízes no intervalo em questão.
4. Duas raízes complexas não real e uma real. Mova os seletores r e s fora do domínio das concavidades das funções $g(x)$ e $g'(x)$.

No gráfico da figura (6.20), exibimos uma situação particular em que $N_r = \{-15, 19, -16, 6\} \Longrightarrow (-+-+)$ equivalente a 3 mudanças de sinais, $N_s = \{5, 14, 14, 6\} \Longrightarrow (++++)$ equivalente a nenhuma mudança de sinal, seguindo que $N_r - N_s = 3$, então concluímos a partir do teorema de Fourier-Budan que no intervalo$(r, s) = (-4, 1)$ há 3 raízes, uma real e duas complexas.

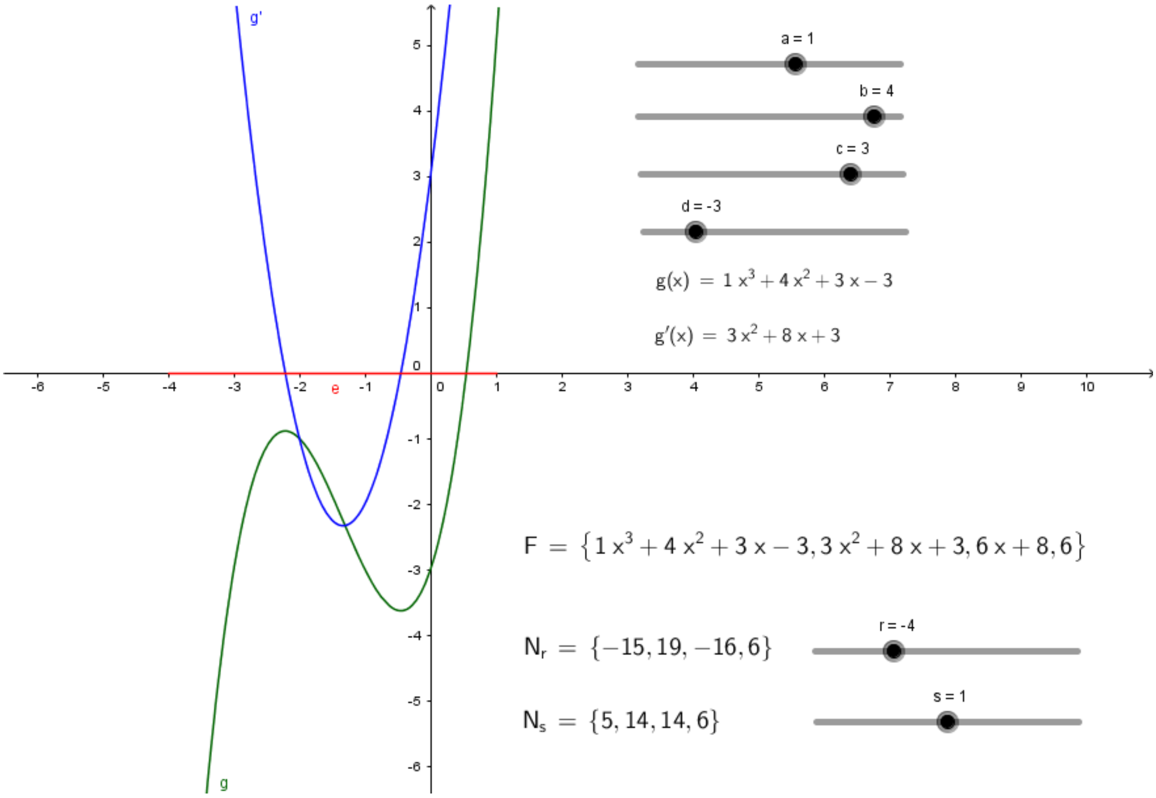

Figura 6.20: Variações das funções sob o aspecto do teroema de Fourie-Budan.

Mudando o intervalo no domínio da vizinhança da raiz real de tal forma que não esteja no domínio das concavidades das funções, vamos constatar nossa conjectura. Obeserve o gráfico da figura (6.21).

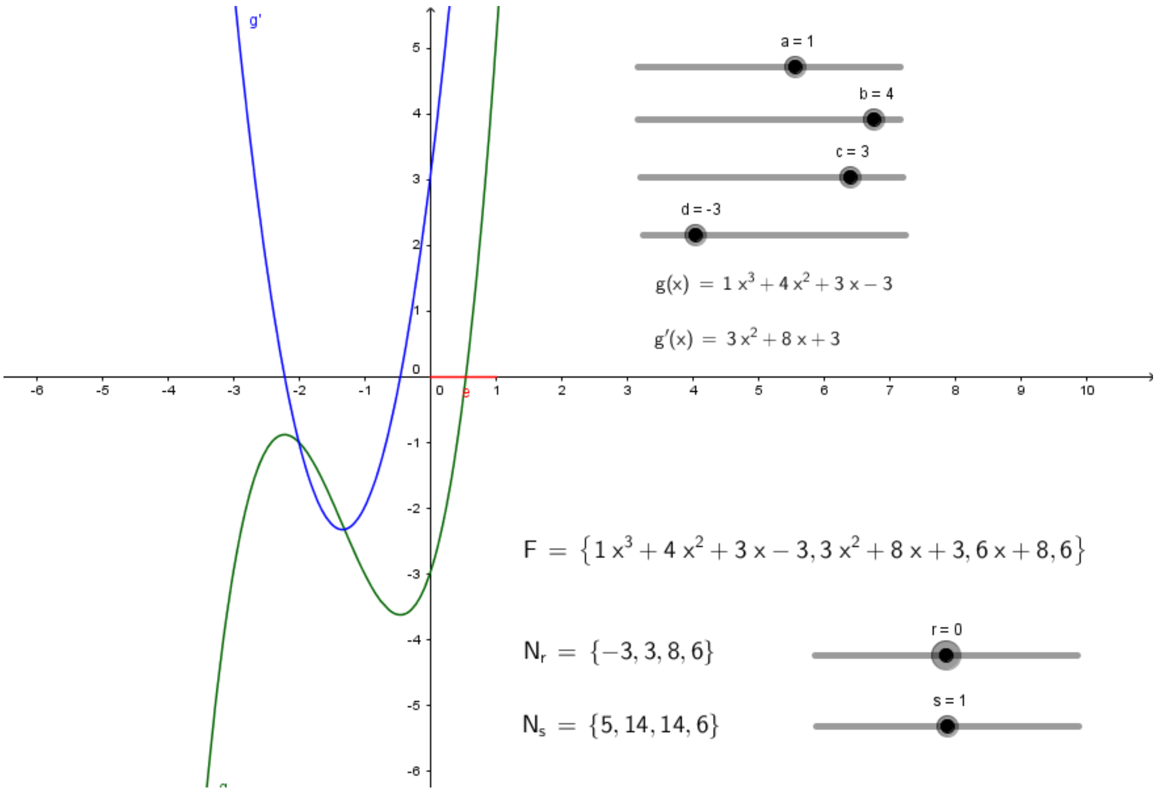

Figura 6.21: Variações das funções com raízes complexas sob o aspecto do teorema de Fourie-Budan.

No gráfico da figura (6.21), $N_r = \{-3, 3, 8, 6\} \Longrightarrow (-+++)$ equivalente a 1 mudança de sinal, $N_s = \{5, 14, 14, 6\} \Longrightarrow (++++)$ equivalente a nenhuma mudança de sinal, seguindo que $N_r - N_s = 1$, então concluímos a partir do teorema de Fourier-Budan que no intervalo$(r, s) = (0, 1)$ há 1 raiz real e as duas raízes complexas não foram constatadas.

6.4.4 Projeto Sturm

(Teorema de Sturm) Seja $w(x)$ o número de alterações do sinal na sequência $f(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$. O número de raízes de f (sem levar em conta as multiplicidades) no intervalo (a, b) , em que $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, e $a < b$, é igual a $w(a) - w(b)$.

Vamos resolver a sequência de Sturm de um polinômio no exemplo abaixo e em seguida estabeleceremos o critério das diferenças de sinais em intervalos reais arbitrários para determinar o número de raízes nestes intervalos.

Exemplo 6.4.9. *Consideremos o polinômio $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$. Vamos determinar a sequência de Sturm relativa ao polinômio $f(x)$.*

Solução: Temos $f_0(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$. O polinômio $f_1(x)$ é a derivada do polinômio $f_0(x)$, assim

$$f_1(x) = 3x^2 + 2x - 2.$$

Continuamos com a obtenção da sequência e para determinar $f_2(x)$, temos que dividir $f_0(x)$ por $f_1(x)$ e considerar um resto $r(x)$ com grau menor que $f_1(x)$. Por fim, este resto multiplicamos por -1 e chamamos de $f_2(x)$. Segue que

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrrrr}
x^3 & + & x^2 & - & 2x & - & 2 & 3x^2 & + & 2x & - & 2 \\ \cline{8-12}
-x^3 & - & \frac{2}{3}x^2 & + & \frac{2}{3}x & & & \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{9} & & \\ \cline{1-5}
 & & \frac{1}{3}x^2 & - & \frac{4}{3}x & - & 2 & & & & & \\
 & - & \frac{1}{3}x^2 & - & \frac{2}{9}x & + & \frac{2}{9} & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & \frac{14}{9}x & - & \frac{16}{9} & & & & &
\end{array}$$

Neste ponto da divisão dos polinômios o resto possui grau menor que o polinômio divisor, assim podemos parar a divisão e considerar $f_2 = -r(x)$, logo

$$f_2(x) = \frac{14}{9}x + \frac{16}{9}.$$

Seguindo o algoritmo, $f_3(x)$ é o polinômio oposto do resto da divisão de $f_1(x)$ por $f_2(x)$, então

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr}
 & 3x^2 & + & 2x & - & 2 & \frac{14}{9}x & + & \frac{16}{9} \\ \cline{7-9}
- & 3x^2 & + & \frac{24}{7}x & & & \frac{27}{14}x & + & \frac{171}{49} \\ \cline{1-4}
 & & & \frac{38}{7}x & - & 2 & & & \\
 & & - & \frac{38}{7}x & - & \frac{304}{49} & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & & -\frac{402}{49} & & &
\end{array}$$

Finalmente o último passo, pois o resto é uma constante, assim

$$f_3(x) = \frac{402}{49}.$$

Portanto, a sequência de Sturm é escrita como:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x^3 + x^2 - 2x - 2, \\
f_1(x) &= 3x^2 + 2x - 2, \\
f_2(x) &= \frac{14}{9}x + \frac{16}{9}, \\
f_3(x) &= \frac{402}{49}.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.4.10. *Vamos determinar a variação de sinais na sequência de Sturm do exemplo (6.4.9). substituindo a variável x, por valores reais arbitrários, construindo, desta forma, uma tabela de sinais que facilitará o exame da existência e quantidade de raízes em intervalos arbitrários.*

Solução: Determinaremos a partir da sequência os valores de $\varphi(-3)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ e $\varphi(3)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\varphi(-3) &= \{f_0(-3),\, f_1(-3),\, f_2(-3),\, f_3(-3)\},\\
\varphi(-2) &= \{f_0(-2),\, f_1(-2),\, f_2(-2),\, f_3(-2)\},\\
\varphi(-1) &= \{f_0(-1),\, f_1(-1),\, f_2(-1),\, f_3(-1)\},\\
\varphi(0) &= \{f_0(0),\, f_1(0),\, f_2(0),\, f_3(0)\},\\
\varphi(1) &= \{f_0(1),\, f_1(1),\, f_2(1),\, f_3(1)\},\\
\varphi(2) &= \{f_0(2),\, f_1(2),\, f_2(2),\, f_3(2)\},\\
\varphi(3) &= \{f_0(3),\, f_1(3),\, f_2(3),\, f_3(3)\}.
\end{aligned}$$

Calculando cada um desses valores, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi(-3) &= \left\{-14,\, 19,\, -\frac{26}{9},\, \frac{402}{49}\right\},\\
\varphi(-2) &= \left\{-2,\, 6,\, -\frac{4}{3},\, \frac{402}{49}\right\},\\
\varphi(-1) &= \left\{0,\, -1,\, \frac{2}{9},\, \frac{402}{49}\right\},\\
\varphi(0) &= \left\{-2,\, -2,\, \frac{16}{9},\, \frac{402}{49}\right\},\\
\varphi(1) &= \left\{-2,\, 3,\, \frac{10}{3},\, \frac{402}{49}\right\},\\
\varphi(2) &= \left\{6,\, 14,\, \frac{44}{9},\, \frac{402}{49}\right\},\\
\varphi(3) &= \left\{28,\, 31,\, \frac{58}{9},\, \frac{402}{49}\right\}.
\end{aligned}$$

Construiremos a tabela de sinais com os cálculos obtidos, assim

x	f_0	f_1	f_2	f_3	$\varphi(x)$
-3	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	0	$-$	$+$	$+$	1
0	$-$	$-$	$+$	$+$	1
1	$-$	$+$	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	$+$	0
3	$+$	$+$	$+$	$+$	0

Vamos agora estudar a variação de sinais em cada intervalo real.

- *Para o intervalo* $I_1 = (-3, -2]$, *temos* $\varphi(-3) - \varphi(-2) = 3 - 3 = 0$. *Portanto, não há raiz neste intervalo para* $f(x)$.
- *Para o intervalo* $I_2 = (-2, -1]$, *temos* $\varphi(-2) - \varphi(-1) = 3 - 1 = 2$. *Portanto, há 2 raízes neste intervalo para* $f(x)$.
- *Para o intervalo* $I_3 = (-1, 0]$, *temos* $\varphi(-1) - \varphi(0) = 1 - 1 = 0$. *Portanto, não há raiz neste intervalo para* $f(x)$.
- *Para o intervalo* $I_4 = (0, 1]$, *temos* $\varphi(0) - \varphi(1) = 1 - 1 = 0$. *Portanto, não há raiz neste intervalo para* $f(x)$.
- *Para o intervalo* $I_5 = (1, 2]$, *temos* $\varphi(1) - \varphi(2) = 1 - 0 = 1$. *Portanto, há uma raiz neste intervalo para* $f(x)$.
- *Para o intervalo* $I_6 = (2, 3]$, *temos* $\varphi(2) - \varphi(3) = 0 - 0 = 0$. *Portanto, não há raiz neste intervalo para* $f(x)$.

Observamos o gráfico da figura (6.22) de $f(x)$, e concluímos que realmente há duas raízes entre -2 e -1 e há uma raiz entre 1 e 2.

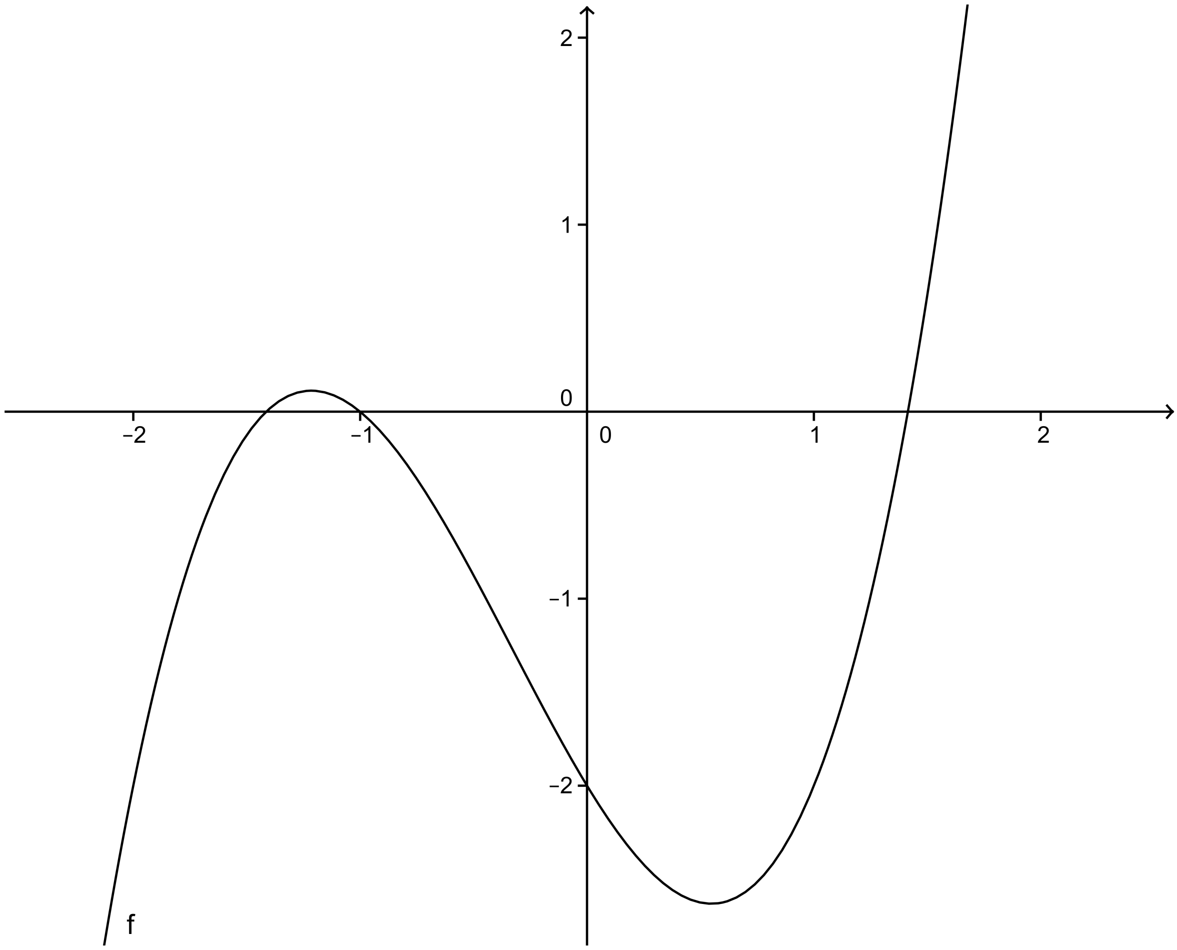

Figura 6.22: Gráfico gerado pela função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$.

Para equações cuja raízes são complexas, o teorema não funciona. Vamos saber o porquê.

Exemplo 6.4.11. *Sabemos que o polinômio $f(x) = x^2 - x + 1$ possui raízes complexas. Vamos analisar alguns intervalos para a sequência de Sturm.*

Solução: Temos que $f_0(x) = x^2 - x + 1$ e sua derivada é $f_1(x) = 2x - 1$, seguindo os passos para obtenção da sequência, dividiremos f_0 por f_1), então

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrr}
 & x^2 & - & x & + & 1 & 2x & - & 1 \\ \cline{7-9}
- & x^2 & + & \frac{1}{2}x & & & \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{4} \\ \cline{1-4}
 & & - & \frac{1}{2}x & + & 1 & & & \\
 & & & \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{4} & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & & \frac{3}{4} & & &
\end{array}
$$

Portanto, $f_2(x) = -\frac{3}{4}$.

Escrevendo a sequência, temos

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x^2 - x + 1,\\
f_1(x) &= 2x - 1,\\
f_2(x) &= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Vamos agora calcular os valores de $\varphi(-3)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ e $\varphi(3)$, assim

$$\begin{aligned}
\varphi(-3) &= \{f_0(-3),\ f_1(-3),\ f_2(-3)\},\\
\varphi(-2) &= \{f_0(-2),\ f_1(-2),\ f_2(-2)\},\\
\varphi(-1) &= \{f_0(-1),\ f_1(-1),\ f_2(-1)\},\\
\varphi(0) &= \{f_0(0),\ f_1(0),\ f_2(0)\},\\
\varphi(1) &= \{f_0(1),\ f_1(1),\ f_2(1)\},\\
\varphi(2) &= \{f_0(2),\ f_1(2),\ f_2(2)\},\\
\varphi(3) &= \{f_0(3),\ f_1(3),\ f_2(3)\}.
\end{aligned}$$

Calculando cada um desses valores, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi(-3) &= \left\{13,\ -7,\ -\frac{3}{4}\right\},\\
\varphi(-2) &= \left\{7,\ -5,\ -\frac{3}{4}\right\},\\
\varphi(-1) &= \left\{3,\ -3,\ -\frac{3}{4}\right\},\\
\varphi(0) &= \left\{1,\ -1,\ -\frac{3}{4}\right\},\\
\varphi(1) &= \left\{1,\ 1,\ -\frac{3}{4}\right\},\\
\varphi(2) &= \left\{3,\ 3,\ -\frac{3}{4}\right\},\\
\varphi(3) &= \left\{7,\ 5,\ -\frac{3}{4}\right\}.
\end{aligned}$$

Construiremos a tabela de sinais com os cálculos obtidos, assim

x	f_0	f_1	f_2	$\varphi(x)$
-3	$+$	$-$	$-$	1
-2	$+$	$-$	$-$	1
-1	$+$	$-$	$-$	1
0	$+$	$-$	$-$	1
1	$+$	$+$	$-$	1
2	$+$	$+$	$-$	1
3	$+$	$+$	$-$	1

Observe que a diferença das variações de sinais sempre será zero, pois $f_0(x)$ é positivo para todo x real e $f_2(x)$ é negativo para todo x real, assim $f_1(x)$ sendo positivo ou negativo para um x arbitrário, a variação será sempre 1. *O teorema de Sturm, não identifica raízes complexas em intervalos reais, pelo simples fato de não existir correspondência entre as raízes complexas e a imagem real como mostra a figura (6.23).*

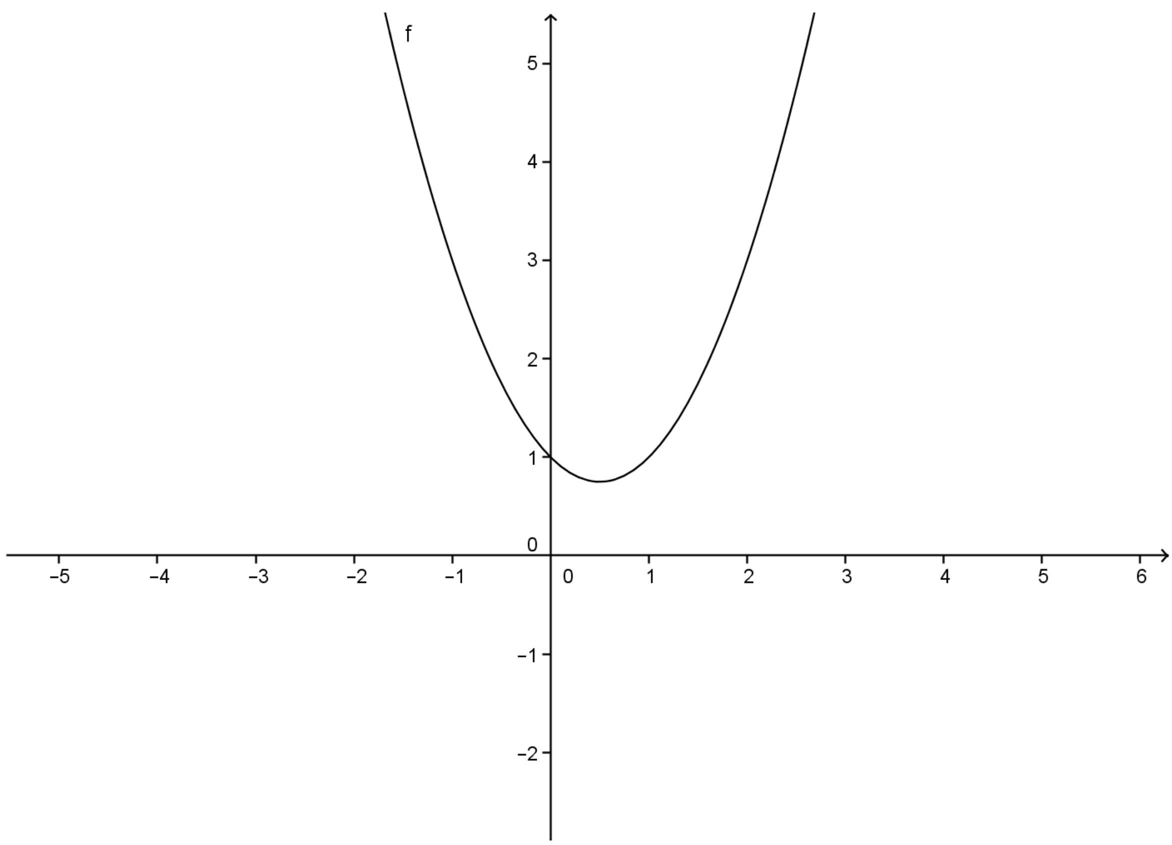

Figura 6.23: Gráfico gerado pela função polinomial $f(x) = x^2 - x + 1$.

Exemplo 6.4.12. *Sejam $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ e sua derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$, vamos analisar seu comportamento utilizando o teorema de Sturm sabendo que $f(x)$ possui a raiz 1 com multiplicidade 3.*

Solução: Temos que $f_0(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ e $f_1(x) = 3x^2 - 6x + 3$. Fazendo a divisão, temos

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrrrr}
x^3 & - & 3x^2 & + & 3x & - & 1 & 3x^2 & - & 6x & + & 3 \\ \cline{8-12}
-x^3 & + & 2x^2 & - & x & & & \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{3} & & \\ \cline{1-5}
 & - & x^2 & + & 2x & - & 1 & & & & & \\
 & & x^2 & - & 2x & + & 1 & & & & & \\ \cline{3-7}
 & & & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Devido a multiplicidade, $f(x)$ é divisível por $f'(x)$, logo $f_2(x) = 0$ e não podemos continuar com o algoritmo, logo a sequência de Sturm terá somente $f_0(x)$ e $f_1(x)$. Temos ainda, que $f(1) = 0$, logo como a sequência só há dois sinais a serem contados, todas as diferenças resultarão o valor 0 *e a única raiz é o número* 1 *com multiplicidade 3, pois a função é de grau 3.*

O teorema de Sturm é um ótimo algoritmo para determinar a existência de raízes em intervalos reais arbitrários, mas devido aos cálculos trabalhosos este método se torna inviável se quisermos generalizar para polinômios de grau elevado, mas em termos computacionais, sua aplicação é bastante eficaz e satisfatória diante dos outros teoremas semelhantes que estudamos até agora.

6.4.5 Projeto Sylvester

O teorema de Sylvester estabelece uma importante relação entre os coeficientes e as raízes por meio de polinômios na forma quadrática associadas a matrizes simétricas facilitando a análise quanto à assinatura destes polinômios. Sua grande aplicação está em conceitos da álgebra linear, geometria analítica, sistemas dinâmicos, topologia diferencial e entre outras áreas da ciências exatas.

Usando o Geogebra para obter as cônicas em 3 dimensões, vamos resolver alguns exemplos com a aplicação dos critérios de Sylvester através de suas formas quadráticas. O que facilita a manipulação destas formas quadráticas é o fato delas serem lineares, ou seja, possuem como origem o vetor nulo e por ser utilizados métodos simples para sua resolução, como completar quadrados, matrizes e seus determinantes e cônicas.

Exemplo 6.4.13. *Considere a função polinomial na forma quadrática $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + 3xy$. Vamos desenvolver a matriz associada a $f(x, y)$ e completar quadrados para analisarmos os sinais e concluir a cônica que é gerada.*

Solução: A matriz será de ordem 2 *e seus elementos estão explícitos na função, assim*

$$
M = \begin{bmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Todos os elementos são positivos e seu determinante também é positivo, logo é definida positiva.

Agora vamos desenvolver a função por complemento de quadrados, para analisar o sinal de cada termo explicitamente, assim

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2+2y^2+3xy \\ &= 3(x^2+xy)+2y^2 \\ &= 3\left(x^2+xy+\frac{y^2}{4}\right)-\frac{3y^2}{4}+2y^2 \\ &= 3\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{5}{4}y^2. \end{aligned}$$

Observe que os dois termos são positivos, logo a forma quadrática é definida positiva.

A cônica gerada pela função é uma paraboloide positiva. Com o uso do geogebra podemos gerar esta cônica, como mostra a figura (6.24).

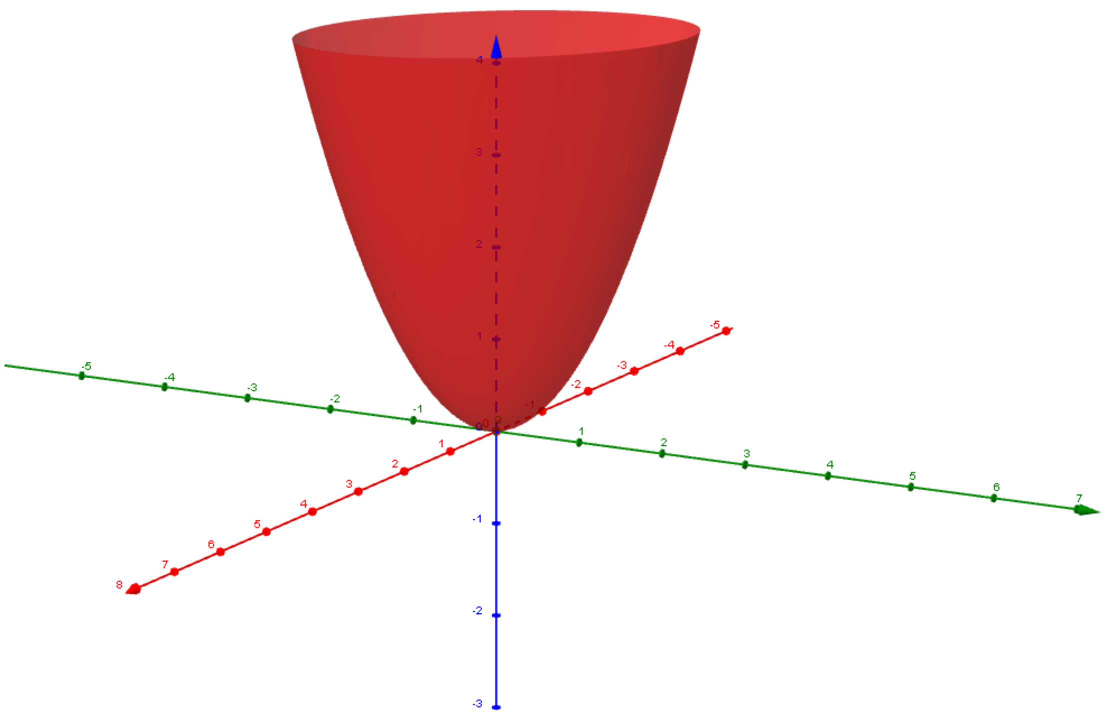

Figura 6.24: Gráfico gerado pela função polinomial na forma quadrática $f(x,y)=3x^2+2y^2+3xy$.

Exemplo 6.4.14. *Vamos analisar a forma quadrática $f(x,y)=3x^2-y^2-xy$.*

Solução: A sua matriz associada é $M=\begin{bmatrix} 3 & -0,5 \\ -0,5 & -1 \end{bmatrix}$.

Os menores determinantes da matriz M são respectivamente $(+,-,-)$. Portanto é indefinida.

Completando o quadrado, temos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x^2 - y^2 - xy \\ &= 3(x^2 - \frac{1}{3}xy) - y^2 \\ &= 3\left(x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{y^2}{36}\right) - \frac{3y^2}{12} - y^2 \\ &= 3\left(x - \frac{y}{6}\right)^2 - \frac{5}{4}y^2. \end{aligned}$$

Repare que o primeiro termo é positivo e o segundo é negativo, implica que a forma quadrática é indefinida, logo seu gráfico é uma hiperboloide, como mostra a figura (6.25).

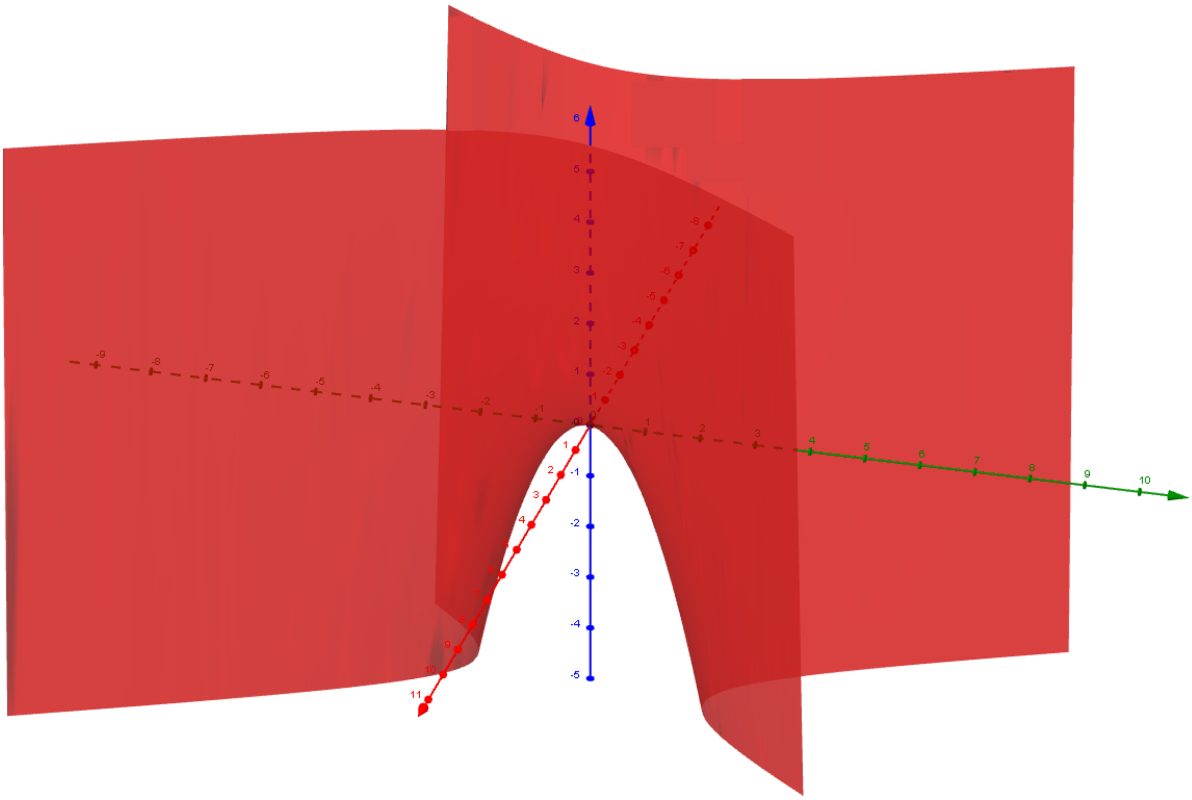

Figura 6.25: Gráfico gerado pela função polinomial na forma quadrática $f(x,y) = 3x^2 - y^2 - xy$.

Bibliografia

[1] Abramo, Hefez & Villela, Maria Lucia Torres. *Polinômios e Equações Algébricas*. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] Bedoya, Hernando & Camelier, Ricardo. *Álgebra 2*. Volume único. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2007.

[3] Boyer, Carl B. & revista por Uta C. Merzback; tradução Elza F. Gomide. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[4] Domingues, Hygino H. & Iezzi, Gelson: *Álgebra Moderna*. Volume único. 4. ed. Reform. São Paulo: Atual, 2003.

[5] Garcia, Arnaldo & Yves, Lequain. *Elementos de Álgebra*. Coleção Projeto Euclides. 6. Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[6] Gonçalves, Adilson: *Introdução à Álgebra*. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[7] Guedes, André Luiz Pires . *Introdução à Geometria Computacional*. Depto. de Informática - UFPR II Encontro regional da SBMAC. DM- UFPR, Curitiba-PR, 1994.

[8] Lima, Elon Lages: *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. 8 ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2009.

[9] Martin, Paulo A. *Grupos, corpos e teorias de Galois*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[10] Muniz Neto, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios*. Coleção Professor de Matemática. 1 Ed. Volume 6. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[11] Nader, Fabiano Neves. *Teorema de Sturm: Uma demonstração detalhada do Teorema de Sturm com Propriedades e Aplicações*. PROFMAT - UFRP. Disponível em: `http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1477/2012_01284_FABIANO_NEVES_NADER.pdf?sequence=1`. Acesso em: 28 outubro 2015.

[12] Picado, Jorge. *Apontamentos de Álgebra II.* DM-Universidade de Coimbra, 2006. Disponível em: `http://www.mat.uc.pt/ picado/algebraII/apontamentos/sebenta.pdf`. Acesso em: 22 junho 2015.

[13] Prasolov, Victor V: *Polynomials.* Springer Science & Business Media, Volume 11, 2009.

[14] School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. *Galois.* Disponível em: `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Galois.html`. Acesso em: 10 maio 2015.

[15] Steinbruch, Alfredo. & Winterle, Paulo. *Álgebra Linear* 2 ed. São Paulo: MacGraw-Hill, 1987.