



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Presidente Prudente

Marcia Eiko Motoki

**Aplicações da Função Logarítmica em sala de aula no
Ensino Médio: Uma proposta de solução de problemas
pela transposição para a linguagem matemática**

**Presidente Prudente
2016**

Marcia Eiko Motoki

**Aplicações da Função Logarítmica em sala de aula no
Ensino Médio: Uma proposta de solução de problemas
pela transposição para a linguagem matemática**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Câmpus de Presidente Prudente.

Orientador: Prof. Dr. Aylton Pagamisse

**Presidente Prudente
2016**

Motoki, Marcia Eiko.

Aplicações da função logarítmica em sala de aula no ensino médio: uma proposta de solução de problemas pela transposição para a linguagem matemática / Marcia Eiko Motoki. -- São José do Rio Preto, 2016

104 f. : il., gráfs., tabs.

Orientador: Aylton Pagamisse

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual

Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática). 3. Aprendizagem baseada em problemas. 4. Professores de matemática. 5. Matemática – Metodologia. I. Pagamisse, Aylton. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513(07)

Marcia Eiko Motoki

**Aplicações da Função Logarítmica em sala de aula no
Ensino Médio: Uma proposta de solução de problemas
pela transposição para a linguagem matemática**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Câmpus de Presidente Prudente.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Aylton Pagamisse - UNESP – Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Rui Marcos de Oliveira Barros – UEM - Maringá

Prof. Dr. Marco Antonio Piteri - UNESP - Presidente Prudente

**Presidente Prudente
2016**

À minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por me ter dado força e motivação para a realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Aylton Pagamisse pelas sugestões, paciência, apoio e dedicação na orientação deste trabalho

Aos meus pais Iwane (*in memoriam*) e Toshie por ter me ensinado os valores da vida e sempre incentivarem os meus estudos.

Aos meus irmãos Ricardo, Marco, Sérgio e Marcelo pelo apoio e incentivo.

À minha irmã Irene pelo seu apoio, incentivo, além de me apresentar ao PROFMAT.

À minha irmã Julian que não me deixou desanimar e com quem posso contar em todos os momentos.

Aos meus amigos e colegas da EE de Parapuã por acreditarem em mim.

Aos professores do PROFMAT pela competência, dedicação e compromisso.

Aos amigos e colegas do PROFMAT, pela amizade e solidariedade, além do grupo de estudos à distância, em especial à Elcie, Júlio e Willian.

Aos amigos de estrada, além de PROFMAT, Silvio, Marinaldo e João, que tornaram os quilômetros de viagem em momentos de estudo.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

.

“Quando trabalhamos intensamente, sentimos com nitidez o progresso do nosso trabalho.”

G. Polya (1995, p.88)

RESUMO

Os logaritmos foram criados, na primeira metade do século XVII, para facilitar os cálculos matemáticos tornando-se um instrumento de cálculo eficiente, pois tem como propriedade fundamental transformar produtos em soma. Atualmente, mesmo com o uso de modernas máquinas de calcular ao alcance de todos, sua importância não é menor do que foi no passado, pois está relacionada a vários fenômenos naturais.

Apesar das diversas aplicações, além da Matemática Financeira (juros simples e contínuos) há também aplicações na Física, Química, Biologia, Geografia e Música. Na minha experiência profissional, resolver problemas que incluam os logaritmos é considerado complicado por muitos estudantes, que não compreendem seu conceito e nem a sua utilidade.

O presente trabalho trata de uma abordagem para solucionar situações-problemas envolvendo os logaritmos, através de um esquema de resolução que explora os detalhes do enunciado, organizando os dados relevantes, a transposição para a linguagem matemática e desenvolvimento dos cálculos até a resposta final. Para atingir tal objetivo, é feita uma revisão do surgimento dos logaritmos, do conceito de potenciação, função exponencial, logaritmo como área e função logarítmica. Além disso, é apresentado o logaritmo aplicado em diversas áreas.

Palavras-chave: Logaritmos, cálculo, função logarítmica, solução de problemas.

ABSTRACT

Logarithms were created in the first half of the seventeenth century, to facilitate the mathematics becoming an efficient calculation tool, it has become a fundamental property products sum. Currently, even with the use of modern calculators available to all, its importance is no less than in the past, because it is related to various natural phenomena.

Despite several applications in addition to the Financial Mathematics (simple and continuous interest) there are also applications in physics, chemistry, biology, geography and music. In my professional experience, solve problems involving logarithms is considered complicated by many students who do not understand its concept nor its usefulness.

This work is an approach to solving problem situations involving logarithms, through a resolution scheme that explores the details of the statement by organizing relevant data, transposed into mathematical language and development of calculations to the final answer. To achieve this goal, it is made a revision of emergence of logarithms, the concept of empowerment, exponential function, logarithm as area and logarithmic function. Moreover, the logarithm is shown applied in several areas.

Keywords: logarithms, calculus, logarithmic function, troubleshooting.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

http	Hype Text Tranfer Protocol.
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^+	Conjunto dos números reais positivos.
\mathbb{Q}	Conjunto dos números racionais.
\mathbb{Q}^+	Conjunto dos números racionais positivos.
www	World Wide Web.
\mathbb{Z}	Conjunto dos números inteiros.
\in	Pertence.
\notin	Não pertence.
\Rightarrow	Implicação lógica.
\Leftrightarrow	Equivalência lógica.
\forall	Qualquer.

Sumário

1. Introdução	11
2. Um pouco sobre a história dos logaritmos	14
3. Definição de logaritmos a partir da potenciação	19
3.1. Potenciação	20
3.1.1. Potência de expoente natural	20
3.1.2. Propriedade Fundamental	21
3.1.3. Consequências da definição e da propriedade fundamental	21
3.1.4. Potência de expoente fracionário	22
3.1.5. Potência com expoente irracional	23
3.1.6. Potência com expoente irracional e a propriedade fundamental ...	24
3.1.7. Potência de expoente real	24
3.1.8. Propriedades	24
3.2. Função exponencial	25
3.2.1. Gráfico da Função Exponencial	25
3.3. Logaritmos	28
3.3.1. Definição	28
3.3.2. Propriedade fundamental	28
3.3.3. Consequências da definição	29
4. Funções logarítmicas	30
4.1. Função Logarítmica	30
4.1.1. Definição	30
4.1.2. Propriedades	30
4.1.3. Gráfico da Função Logarítmica	35
5. Logaritmo como área	37
5.1. Faixa de hipérbole	37
5.2. Área de uma faixa de hipérbole através de polígonos retangulares ...	38
5.3. Área de uma faixa de hipérbole através de trapézios	40
5.3.1 Área de uma faixa de hipérbole através de trapézio secantes	41
5.3.2 Área de uma faixa de hipérbole através de trapézios tangentes ...	42
5.4. Logaritmos naturais	47
5.4.1. Definição	47
5.4.2. O número e	48
6. Aplicações	50
6.1. Logaritmos e juros contínuos	50
6.2. Logaritmos e o crescimento populacional	51

6.3. Logaritmos e a desintegração radioativa	52
6.4. Logaritmos e o potencial hidrogeniônico	53
6.5. Logaritmos, o IDH e o PIB.....	54
6.6. Logaritmos e a intensidade luminosa	56
6.7. Logaritmos e a escala Richter	57
6.8. Logaritmos e a régua de cálculo	57
6.9. Logaritmos e Música	59
7. Problemas com transposição para linguagem matemática	62
7.1. Transposição para a linguagem matemática	62
7.1.1. Etapas da transposição.....	62
7.2. Atividades	68
7.3. Pesquisa junto aos professores da unidade escolar	71
8. Considerações Finais	73
Referências bibliográficas	75
Apêndice A – O número e	77
Apêndice B – Situações-problema propostas	84
Apêndice C – Respostas dos professores.....	101

1. Introdução

Quando se trata da situação da escolaridade básica no Brasil, nas avaliações de rendimento os dados não são animadores, como apontam os resultados do SARESP¹, ENEM² e PISA³. E os resultados de Matemática, no Ensino Médio, são ainda mais preocupantes. Segundo dados do ENEM 2014⁴, a média em Matemática foi 473,5, sendo 1000 a nota máxima e se for considerada apenas a rede estadual de ensino, essa média cai para 451,5.

No Relatório Nacional da edição de 2012 do PISA⁵, exame aplicado de forma amostral a alunos que tenham entre 15 anos e 3 meses a 16 anos e 2 meses na data da aplicação e matriculados a partir do 8º ano do Ensino Fundamental, o Brasil ocupou a 57ª posição, em Matemática, sendo 65 países participantes.

Quanto ao SARESP, os pontos da escala são agrupados nos seguintes níveis de proficiência, no Ensino Médio: Abaixo do Básico (< 275), Básico (275 a < 350), Adequado (350 a < 400) e Avançado (\geq 400). O relatório pedagógico 2014, mostrou que a média em Matemática, no Estado de São Paulo, foi de 268,7, em 2013 e 270,5, em 2014. Esses índices estão Abaixo do Básico, ou seja, os alunos, não demonstram terem domínio suficiente dos conteúdos, das competências e das habilidades desejáveis para a série escolar em que se encontram (SÃO PAULO, 2015).

Em vista desses dados preocupantes, muitos estudos, no que tange, o ensino da Matemática, têm sido discutidos no meio acadêmico. Dentre os conteúdos matemáticos, o estudo dos logaritmos é importante na formação do aluno do Ensino Médio, pois perpassa as outras áreas do conhecimento no qual ele se encontra inserido e o processo de aprendizagem não é simples, pois o conteúdo não está restrito apenas a resolver situações da matemática financeira, mas presente em outros componentes curriculares como Física – som, Química – índice de acidez,

¹ Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar de São Paulo.

² Exame Nacional do Ensino Médio.

³ Programme for International Student Assessment - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes

⁴ Disponível em

<http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2015/apresentacao_coletiva_enem_13012015.pdf>

⁵ Disponível em < <http://portal.inep.gov.br/internacional-novo-pisa-resultados>>

desintegração radioativa, Biologia – crescimento populacional de bactérias, Arte – escalas musicais, e Geografia – IDH.

Além disso, baseado no desempenho dos alunos, em 2014, na questão envolvendo Logaritmos, o Relatório Pedagógico (SÃO PAULO, 2015, p.148), pontua “fica o alerta para o professor de matemática frente à dificuldade que o tema apresenta para os estudantes do Ensino Médio, o que implica na necessidade de repensar as estratégias de ensino utilizadas”.

Desse modo, a proposta deste trabalho é proporcionar subsídios para pesquisa e em forma material de apoio de modo que auxilie a interpretação de situações problema em nível de aprendizagem de logaritmos no Ensino Médio, visto que a grande preocupação dos professores do Ensino Básico é fazer com que a Matemática seja atrativa e possível de ser aprendida no âmbito da sala de aula, e relacionada a fenômenos naturais e situações do cotidiano.

Fora da escola, em suas interações sociais, as crianças e adolescentes participam de situações cotidianas que envolvem números e operações; espaço e forma; grandezas e medidas; tratamento da informação. Porém, a autora constata que nos Cadernos do Aluno/Professor, do Currículo de Matemática da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, a vivência dos alunos e a teoria estudada na escola são pouco exploradas. O ensino da Matemática deve ser útil à vida e ao trabalho, isto é, formar o cidadão pleno e não uma disciplina de memorização de resultados para a série seguinte (PCNS⁶, 1999).

No que tange a análise do desempenho do aluno do Ensino Médio quanto ao conteúdo logaritmos, em níveis não satisfatório, esses advêm não somente dos dados obtidos com os resultados de avaliações externas, mas também, das avaliações realizadas em sala de aula, as quais são informações concretas para a análise que revela a necessidade de novas estratégias para o ensino deste conteúdo da matemática.

Na opinião de quem escreve, baseada em sua experiência profissional, muitos alunos conseguem definir logaritmos e reconhecer algumas propriedades, mas têm dificuldades na aplicabilidade em uma situação-problema, pois talvez, as dificuldades acumuladas ao longo dos anos escolares, resulte em um conhecimento fragmentado.

⁶ Parâmetros Curriculares Nacionais

O aluno faz uma análise imediatista, sem identificar claramente o objetivo do contexto apresentado, assim como as demais informações relevantes.

Assim, buscar novas estratégias que reflita na aprendizagem dos logaritmos, principalmente na solução de situações-problema, levou ao desenvolvimento desse trabalho, considerando a necessidade de um embasamento teórico que apoie o trabalho docente e as dificuldades que muito aluno tem em entender os problemas e as estratégias de solução.

Desse modo, o trabalho realizado foi organizado em oito capítulos e três apêndices, com o objetivo que esse material seja uma ferramenta de apoio e pesquisa para os professores que desenvolvem esse conteúdo em sala de aula.

O Capítulo 2 aborda a origem dos logaritmos, como instrumento eficaz de cálculo comparado ao que existia na época da sua criação. Na sequência, no Capítulo 3, tem-se o conceito de potenciação, suas propriedades como uma preparação para a definição e propriedades dos logaritmos e a caracterização da função exponencial e seu gráfico. O Capítulo 4 trata da função logarítmica e sua caracterização e representação gráfica. O conceito de logaritmos a partir da área de uma faixa de hipérbole é o tema do Capítulo 5, um modo pouco explorado nos livros didáticos, mas que amplia a compreensão dos professores. Já o Capítulo 6, traz aplicações dos logaritmos nas diversas áreas do conhecimento: códigos de linguagem (Arte), ciências humanas (Geografia) e ciências da natureza (Biologia, Física e Química), mostrando a importância dos logaritmos além das fronteiras matemáticas. No Capítulo 7, é apresentada solução de uma situação-problema através da transposição para a linguagem matemática, utilizando uma sequência de indagações proposta nesse trabalho, a qual foi baseado no método de George Polya (1995), que permite esmiuçar os enunciados e interpretar matematicamente os dados presentes e conhecidos, além disso, há a opinião de alguns professores de matemática, do Ensino Médio, que analisaram o método proposto. E, finalmente, no Capítulo 8, são feitas as considerações finais a respeito do trabalho desenvolvido.

2. Um pouco sobre a história dos logaritmos

No século XVII os recursos tecnológicos eram modestos, comparado ao que temos atualmente, porém era a época do desenvolvimento da Astronomia por Kepler, da Mecânica por Galileu e também, o auge das grandes navegações europeias. Assim, e a precisão dos cálculos era necessária para o sucesso dessas jornadas.

Para efetuar esses cálculos, foram desenvolvidos alguns métodos como o processo para o cálculo do produto, baseado em fórmulas trigonométricas que transformavam produto em soma e subtração, também conhecidas como fórmulas de Werner, pois foram usadas pelo matemático alemão Johannes Werner (1468 – 1528) para simplificar cálculos astronômicos. As fórmulas são:

$$2.\text{sen}x.\text{cos}y = \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)$$

$$2.\text{sen}x.\text{sen}y = \text{cos}(x-y) - \text{cos}(x+y)$$

$$2.\text{cos}x.\text{sen}y = \text{sen}(x+y) - \text{sen}(x-y)$$

$$2.\text{cos}x.\text{cos}y = \text{cos}(x+y) + \text{cos}(x-y)$$

Por exemplo, para determinar o produto $0,758 \cdot 0,921$, através da fórmula $2.\text{cos}x.\text{cos}y = \text{cos}(x+y) + \text{cos}(x-y)$:

$$X = 0,758 \Rightarrow \text{cos}x = 0,758 \Rightarrow x \approx 0,400156$$

$$Y = 0,921 \Rightarrow \text{cos}y = 0,921 \Rightarrow y \approx 0,710555$$

Logo

$$\begin{aligned} (0,758) \cdot (0,921) &= \text{cos}(0,400156) \cdot \text{cos}(0,710555) = \frac{\text{cos}(1,110711) + \text{cos}(0,310399)}{2} \approx \\ &\approx \frac{0,444025 + 0,952212}{2} = \frac{1,396237}{2} = 0,6981185 \end{aligned}$$

Hoje em dia, o resultado $(0,758) \cdot (0,921) = 0,698118$ é facilmente obtido numa calculadora simples.

Porém, esse método tinha outros inconvenientes além de ser trabalhoso, não servia para calcular potências e raízes.

Assim, matemáticos da época procuravam métodos mais eficazes que resolvessem problemas envolvendo multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Esse intuito foi alcançado por dois matemáticos: o escocês John Napier (1550 – 1617) e o suíço Jobst Bürgi (1552 -1632), que sem um saber do trabalho do outro, desenvolveram independentemente e praticamente simultaneamente, as ideias

básicas dos logaritmos. O trabalho de Napier foi publicado em 1614 e o de Bürgi, em 1620, porém a influência do trabalho de Napier foi muito maior, não só por causa do alcance de suas publicações, mas também pelos seus contatos no meio acadêmico.

Vale ressaltar que muito antes de Napier publicar sua descoberta, o embrião do que seriam os logaritmos já existia, pois, tabelas exponenciais (ou logarítmicas) foram encontradas entre tabelas babilônias e também, Arquimedes menciona em seu trabalho sobre números imensos, a relação entre os expoentes dos números, ideia que dezoito séculos depois, levou a invenção dos logaritmos (BOYER, 2010).

A palavra "LOGARITMO" é atribuída à Napier, a partir da fusão das palavras gregas "LOGOS" - razão e "ARITMOS" – número (EVES, 2011).

A ideia básica de Napier para construir sua tábua de logaritmos é tomar uma progressão geométrica de razão menor que um, no caso $1 - 10^{-7}$ (ou 0,9999999) para que os termos na progressão de potências crescentes ficassem muito próximas (BOYER, 2010).

Chamando de *NapLog* o logaritmo usado por Napier, tem-se

$$\text{NapLog}(0,9999999) = 1$$

$$\text{NapLog}(0,9999999)^2 = 2$$

$$\text{NapLog}(0,9999999)^3 = 3$$

$$\text{NapLog}(0,9999999)^4 = 4$$

e assim sucessivamente.

Napier percebeu que se $N = 0,9999999 = 1 - 10^{-7}$, logo

$$N^2 = N.N = N(1 - 10^{-7}) = N - N.10^{-7} = N - \frac{N}{10000000}$$

$$N^3 = N^2.N = N^2(1 - 10^{-7}) = N^2 - \frac{N^2}{10000000}$$

$$N^4 = N^3.N = N^3(1 - 10^{-7}) = N^3 - \frac{N^3}{10000000}$$

e assim sucessivamente.

Logo se $N = 0,9999999$, então $\frac{N}{10000000} = 0,00000009999999$ e

$$N^2 = 0,9999999 - \frac{0,9999999}{10000000} = 0,9999999 - 0,00000009999999 = 0,99999980000001,$$

arredondado para 0,9999998;

$$N^3 = 0,99999980000001 - \frac{0,99999980000001}{10000000} = 0,999999700000029999999 ,$$

arredondado para 0,9999997;

Analogamente, obtém-se $N^4 = 0,9999996$ e assim por diante.

Dessa forma, tem-se

$$\text{NapLog}(0,9999999) = 1$$

$$\text{NapLog}(0,9999998) = 2$$

$$\text{NapLog}(0,9999997) = 3$$

$$\text{NapLog}(0,9999996) = 4$$

Assim, seguindo a fórmula determinada por Napier, foi construído uma tabela com 20 números tais que os resultados são os logaritmos de 1 a 20.

Número	Logaritmo	Número	Logaritmo
0,9999999	1	0,9999989	11
0,9999998	2	0,9999988	12
0,9999997	3	0,9999987	13
0,9999996	4	0,9999986	14
0,9999995	5	0,9999985	15
0,9999994	6	0,9999984	16
0,9999993	7	0,9999983	17
0,9999992	8	0,9999982	18
0,9999991	9	0,9999981	19
0,9999990	10	0,9999980	20

Tabela 2.1 - Logaritmos obtidos a partir da fórmula determinada por Napier.

Observa-se na tabela 2.1, que para efetuar $0,9999995 \times 0,9999992$, basta somar $5 + 8 = 13$, sendo 5 e 8 os respectivos logaritmos de 0,9999995 e 0,9999992 e 13, é o logaritmo de 0,9999987, que corresponde ao resultado do produto $0,9999995 \times 0,9999992$, com aproximação de 7 casas decimais, que pode ser facilmente verificado numa calculadora.

Para efetuar a divisão $0,9999992 \div 0,9999995$, deve-se subtrair $8 - 5 = 3$ e 3 na tabela logarítmica corresponde ao logaritmo de 0,9999997, que é o resultado de $0,9999992 \div 0,9999995$, com aproximação de 7 casas decimais.

Multiplicando por 10^7 , Napier evitou decimais, que ainda não era totalmente difundido e aceito na época, além de chegar a um equilíbrio, dessa forma obteve

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7} \right)^L$$

em que L é o logaritmo do número N.

Nota-se que Napier não se preocupou com uma base para o seu sistema, ele fixa uma base para trabalhar e sua tábua consiste em “logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arcos” (EVES, p.345).

Com o sucesso imediato da publicação da sua descoberta, que despertou interesse imediato e entre os mais entusiastas estava Henry Briggs⁷. Briggs, matemático e professor de Oxford, visitou Napier em sua residência na Escócia, em 1615 (BOYER, 2010). Segundo Eves (2011, p. 345 e 346):

[...]. Foi durante essa visita que Napier e Briggs concordaram que as tábuas seriam mais úteis se fossem alteradas de modo que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim, os logaritmos briggsianos ou comuns, os logaritmos dos dias de hoje. Esses logaritmos, que são essencialmente os logaritmos de base 10, devem sua superioridade em cálculos numéricos ao fato de que nosso sistema de numeração é decimal.

Porém, coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos decimais, pois Napier não tinha mais forças para pôr em prática essas novas ideias, vindo a falecer em 1617, ano em que Briggs publicou a tabela dos logaritmos de 1 a 1000, com precisão de quatorze casas decimais. E, em 1624, Briggs ampliou sua tabela, incluindo logaritmos de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, também com quatorze casas decimais.

Em 1628, o holandês Adriaen Vlacq (1600-1660), publicou uma tabela com os logaritmos de 20000 a 90000, completando os valores que faltavam nas tabelas de Henry Briggs.

⁷ Henry Briggs (1561-1630), matemático inglês, professor de geometria do Gresham College de Londres e, em 1619, designado em Oxford.

Se Napier usou uma progressão geométrica de razão $1 - 10^{-7}$, o outro inventor dos logaritmos, Bürgi, usou como razão $1 + 10^{-4}$ e multiplicou por 10^8 , em vez de 10^7 , como Napier. Mas tanto no sistema inventado por Napier como o de Bürgi, o logaritmo de um produto ou quociente não são a soma ou diferença dos logaritmos, o que não ocorre com a de Briggs, pois em suas tabelas todas as propriedades dos logaritmos de aplicam.

Calculando o limite da expressão $(1 - 10^{-7})^{10^7} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

onde $e \approx 2,718281828459$, ou seja um sistema de logaritmos de base $\frac{1}{e}$.

No Apêndice A é definido o valor de e como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e, também, como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, assim como é provado a sua irracionalidade.

Somente um século depois, com o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal, a importância do número e seria reconhecida (BOYER, 2010).

3. Definição de logaritmos a partir da potenciação

Para ensinar logaritmos aos alunos é imprescindível que o professor tenha um bom embasamento teórico do assunto. Mesmo que o foco desse trabalho seja a abordagem das aplicações dos logaritmos em sala de aula, será feito um estudo da potenciação e da função exponencial pois este trabalho seguirá a definição de função logarítmica como inversa da função exponencial.

Desde a Antiguidade, já existiam tabelas muito rudimentares que tornava possível transformar multiplicação em adição.

Para ilustrar, considere o exemplo (ROSSI, 2010) a seguir. Inicialmente, se associa a sequência geométrica 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ..., 2^n , ... com os termos da sequência aritmética 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n , ..., como mostra a Tabela 3.1:

2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...
	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

Tabela 3.1 - Sequência Geométrica associada a sequência aritmética.
Fonte: Adaptado de ROSSI (2010, p.71).

Observe que, para efetuar o produto 16×256 basta somar $4 + 8 = 12$, sendo 4 e 8, os correspondentes de 16 e 256 na sequência aritmética e obtendo, 12 que na Tabela 3.1, correspondente a 4096, ou seja, tem-se $16 \times 256 = 4096$, que pode ser facilmente verificado numa calculadora ou “fazendo as contas” manualmente.

Se efetuar a divisão $2048 \div 64$, basta subtrair $11 - 6 = 5$ e 5 na sequência aritmética corresponde a 32, que é o resultado da operação $2048 \div 64 = 32$.

Nota-se, nesses exemplos as propriedades do produto e do quociente das potências: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, mas uma tabela assim construída é muito limitada, pois só permite calcular produtos de números da forma a^n , com n natural.

Porém, uma vez estabelecida a notação exponencial, para expoente natural, neste trabalho, esse conceito será expandido aos expoentes negativos, fracionários, irracionais e reais.

3.1. Potenciação

Nos anos finais do Ensino Fundamental, é introduzido o conceito de potenciação aos alunos como uma ferramenta para representar um produto formado por fatores iguais e sua contextualização se resume, basicamente, como um recurso para escrever números muito grande ou muito pequeno, isto é, em notação científica (VAN DE WALLE, 2009). No Ensino Médio, o tema é tratado com o objetivo de consolidar a noção de potenciação em contextos mais significativos, como a função exponencial e uma preparação para os logaritmos (SÃO PAULO, 2014).

Uma vez que será desenvolvido o conceito de logaritmos a partir da potenciação, é importante que os professores tenham claro o conceito e as propriedades da potenciação para compreender o conceito e as propriedades dos logaritmos, como é desenvolvido pelo Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010).

A seguir, será feita uma revisão da definição e propriedades de potências de números reais, partindo dos números naturais.

3.1.1. Potência de expoente natural

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. É definido a potência de base a e expoente n , o número a^n tal que:

i. $a^0 = 1$

ii. $a^n = a^{n-1} \cdot a$, $n \geq 1$.

Como consequência da definição:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

Para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a potência a^n é o produto de n fatores iguais a a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

3.1.2. Propriedade Fundamental

A propriedade que segue é uma consequência da definição de potência de expoente natural.

Seja a um número real positivo. Dados os inteiros positivos m, n , vale a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

De fato, a prova será feita por indução⁸ sobre n .

Sejam $a \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{N}$.

(i) Para $P(1)$, isto é, quando $n = 1$, tem-se que $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$.

(ii) Supondo válido para $P(n)$, então $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a) = (a^m \cdot a^n) \cdot a = a^{m+n} \cdot a^1 = a^{(m+n)+1}$$

De (i) e (ii), tem-se pelo princípio de indução matemática que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para todo m, n inteiros positivos.

Em decorrência dessa propriedade e da definição, algumas consequências foram destacadas a seguir.

3.1.3. Consequências da definição e da propriedade fundamental

Para $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, os resultados abaixo são imediatos da definição (3.1.1) e propriedade fundamental (3.1.2):

$$I) (a^m)^p = a^{m \cdot p}$$

$$\text{De fato, } (a^m)^p = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{p \text{ fatores}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^p} = a^{m \cdot p}$$

$$II) a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

De fato, pela propriedade fundamental e a definição, tem-se $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$, então $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

⁸ Seja $P(n)$ uma sentença aberta sobre \mathbb{N} . Suponha que:

(i) $P(1)$ é verdadeira

(ii) Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, sempre que $P(n)$ é verdadeira, segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{III) } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$\text{De fato, } \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}.$$

$$\text{IV) } (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Demonstração por indução sobre n.

$$\text{i) } P(1) \text{ é verdadeira pois } (a \cdot b)^1 = a \cdot b = a^1 \cdot b^1;$$

ii) Supondo $P(n)$ verdadeira, isto é $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, então para $P(n+1)$ tem-se:

$$(a \cdot b)^{n+1} = (a \cdot b)^n \cdot (a \cdot b) = a^n \cdot b^n \cdot a \cdot b = (a^n \cdot a) \cdot (b^n \cdot b) = a^{n+1} \cdot b^{n+1}.$$

Como $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, isto é, a potência de base real, não nula, e expoente inteiro negativo é o inverso da correspondente potência de inteiro positivo (natural).

3.1.4. Potência de expoente fracionário

Lembrando que $(\sqrt[q]{a})^q = a$, logo a potência $a^{p/q}$ deve ser definida de modo que $(a^{p/q})^q = a^{(p/q) \cdot q} = a^p$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

A definição de potência de base a , $a \in \mathbb{R}^+$ e expoente $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$)

é a relação:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Assim, a noção de potenciação, também, se estende aos expoentes racionais. O mesmo vale para sua propriedade fundamental, como está demonstrado abaixo.

Seja $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{u}{v}$, p, q, u, v inteiros e $q > 0$ e $v > 0$. Vale a propriedade

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

De fato, como $(a^r)^q = a^{rq} = a^p$ e $(a^s)^v = a^u$. Então:

$$(a^r \cdot a^s)^q = (a^r)^{qv} \cdot (a^s)^{qv} = a^{rqv} \cdot a^{sqv} = a^{pv} \cdot a^{uq} = a^{pv+uq}.$$

Assim $a^r \cdot a^s = a^{(pv+uq)/qv}$, mas

$$\frac{pv+uq}{qv} = \frac{pv}{qv} + \frac{uq}{qv} = \frac{p}{q} + \frac{u}{v} = r + s$$

Logo, conclui-se que $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

Assim, para definir a potência para todos os expoentes reais, falta definir para os números irracionais.

3.1.5. Potência com expoente irracional

Os números irracionais não podem ser expressos como quociente de dois inteiros, isto é, números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e , π , etc. não podem ser escritos como dízimas periódicas ou decimais com desenvolvimento finito (IEZZI, 2004).

Mas todo número irracional é limite de uma sequência de números racionais.

Por exemplo: Para $x_1 = 2$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$, tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \right] = \sqrt{2}$.

Uma vez retomado o conceito de número irracional, pode-se definir a potência de um número real positivo com expoente irracional.

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e x um número irracional. Define-se a^x como o limite da sequência $(a^{x_1}, a^{x_2}, \dots, a^{x_n}, \dots)$, onde $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ é uma sequência de números racionais convergindo para x .

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$$

Observações:

- i) Se $a=1$ então $1^x = 1$, $\forall x$ irracional;
- ii) Se $a < 0$ e x irracional e positivo, então a^x não está definido;

iii) Se x é irracional e $x < 0$, então 0^x não está definido.

3.1.6. Potência com expoente irracional e a propriedade fundamental

A propriedade fundamental, também é válido se o expoente da potência for número irracional.

Seja a um número real positivo. Dados os irracionais positivos i, j , vale a propriedade $a^i \cdot a^j = a^{i+j}$.

De fato, sendo $a^i = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{i_n})$ e $a^j = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{j_n})$, logo

$$i) a^i \cdot a^j = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{i_n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{j_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{i_n} \cdot a^{j_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{i_n + j_n}) = a^{i+j} \text{ e}$$

$$ii) a^{i+j} = a^i \cdot a^j = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{i_n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{j_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{i_n} \cdot a^{j_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{i_n + j_n}) = a^{i+j}$$

Conclui-se de i) e ii), que $a^i \cdot a^j = a^{i+j}$.

3.1.7. Potência de expoente real

Como já foi definido anteriormente, as potências com base positiva ($a > 0$) e expoente x (x racional ou irracional), logo temos definido a potência de qualquer expoente a^x com a, x números reais e a positivo, ($a > 0$).

De acordo com o que foi visto, tem-se as propriedades a seguir para as potências reais a^x , com a positivo e x expoente real.

3.1.8. Propriedades

Para todo $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$, são válidas as propriedades:

$$P_1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$P_2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$P_3) (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$P_4) \left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$P_5) (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Uma vez revisado o conceito e propriedades das potências reais, na sequência tem-se a caracterização da função exponencial e suas propriedades fundamentais.

3.2. Função exponencial

Seja $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$. A função exponencial de base a , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada por $f(x) = a^x$, é definida tal que valem seguintes propriedades, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

i) $f(x+y) = f(x).f(y)$, isto é $a^{x_1+x_2} = a^{x_1}.a^{x_2}$;

ii) $f(1) = a^1 = a$;

iii) $x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$, se $a > 1$;

$x > y \Leftrightarrow a^x < a^y$, se $0 < a < 1$.

Alguns exemplos de função exponencial com diferentes valores para a base a :

a) $f(x) = 2^x$;

b) $y = 2^{-x}$;

c) $y = (\sqrt[3]{0,4})^x$;

d) $g(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$;

e) $h(x) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.

A seguir, a representação gráfica da função exponencial em que são analisadas o seu crescimento e decrescimento.

3.2.1. Gráfico da Função Exponencial

Construindo o gráfico das funções exponenciais $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, observa-se algumas particularidades em suas curvas, quanto ao crescimento e decrescimento das funções para determinados valores da base a , assim como o conjunto imagem da função logarítmica.

i. $y = 2^x$

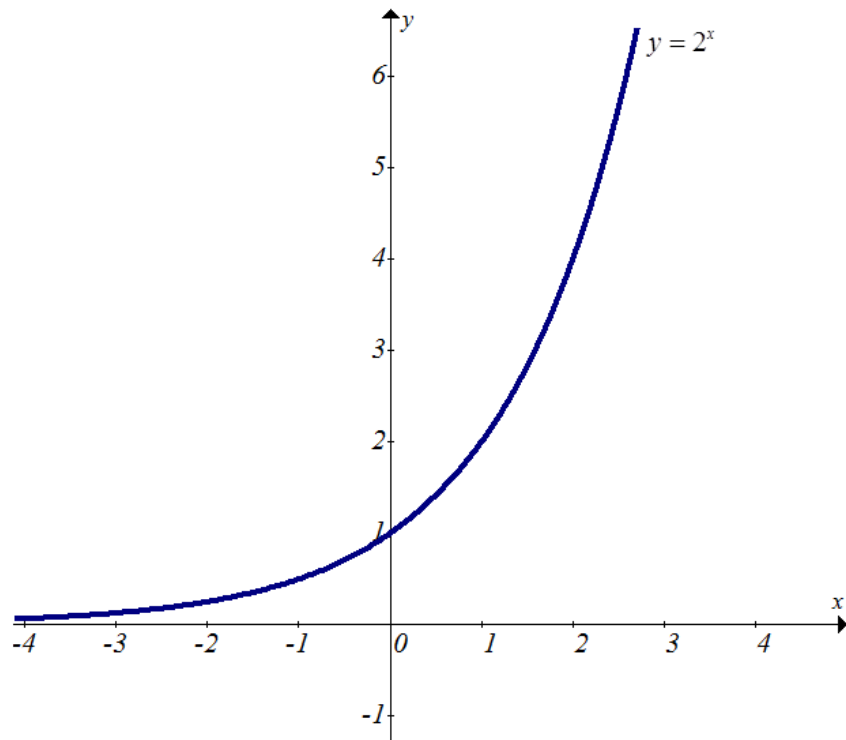


Figura 3.1. Gráfico da função $y = 2^x$ ($a > 1$).

ii. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

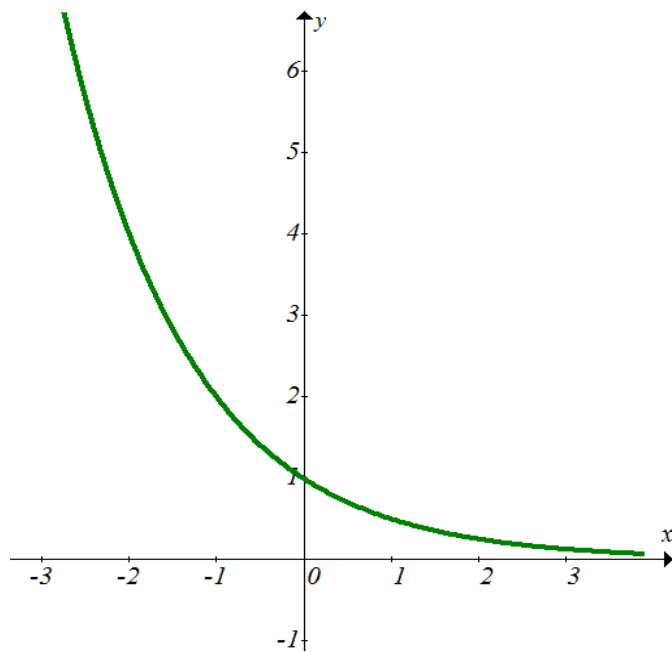


Figura 3.2: Gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

No primeiro caso, o gráfico da função $y = 2^x$, é estritamente crescente ($a > 1$) e no segundo caso, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, a função é estritamente decrescente ($0 < a < 1$).

A figura 3.3 mostra os gráficos das funções $f(x) = a^x$ quando $a > 1$ e $0 < a < 1$ num mesmo plano cartesiano, nota-se que $f(x) = a^x$ cresce mais lentamente quando x é negativo e conforme mais cresce os valores de x , o crescimento de y fica cada vez mais rápido.

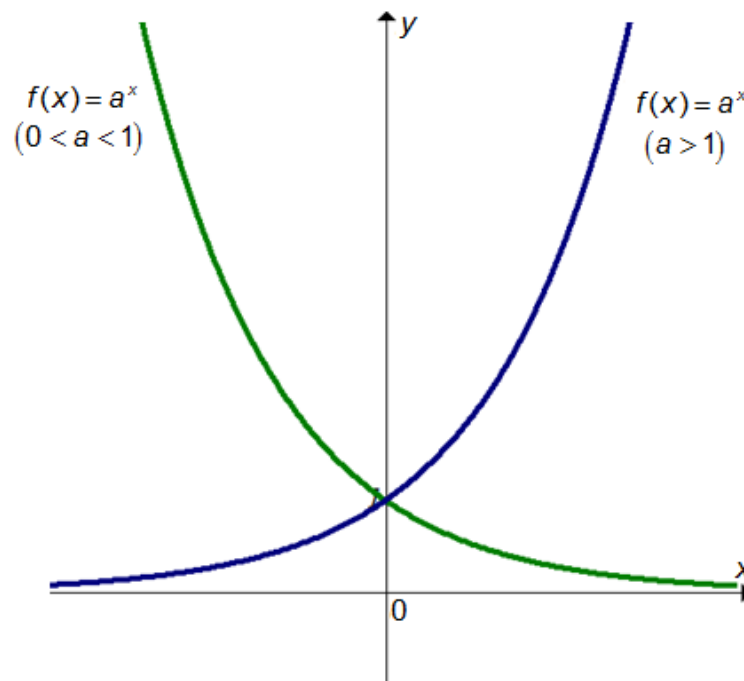


Figura 3.3: Gráficos das funções $f(x) = a^x$ para $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Nota-se na figura 3.3, algumas características do gráfico da função exponencial, cuja curva é denominada **curva exponencial** (DANTE, 2013, p.160):

- para $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é estritamente crescente, isto é, $\forall x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$;
- para $0 < a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é estritamente decrescente, isto é, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$;
- a função $f(x) = a^x$ não assume o valor zero (a curva não toca o eixo x), isto é, $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$;
- para qualquer valor de x , $f(x) > 0$, isto é, a curva exponencial tem pontos somente no primeiro e segundo quadrantes.

- a função exponencial $f(x) = a^x$ é injetiva pois é estritamente crescente ou decrescente;
- a função exponencial $f(x) = a^x$ é sobrejetiva pois $\forall y \in Im(f), \exists x \in \mathbb{R}$, de modo que $a^x = y$;
- a função exponencial $f(x) = a^x$ admite inversa pois é bijetiva (injetiva e sobrejetiva).

3.3. Logaritmos

O avanço tecnológico não diminuiu a importância dos logaritmos, pois ela é aplicada na modelagem de diversos fenômenos, nas diversas áreas do conhecimento. Segundo o PCN+ (Brasil, 2002):

[...] A explicitação de linguagens, usadas em comum por diferentes disciplinas científicas, permite ao aluno perceber sua universalidade e também distinguir especificidades desses usos. Um exemplo disso é o uso do logaritmo, operação que dá origem a funções matemáticas, mas que também é linguagem de representação em todas as ciências.

Após ser feita a revisão das definições e propriedades da potenciação e também, caracterizado a função exponencial, será definido os logaritmos, que tradicionalmente aparecem nos livros didáticos como a inversa da potência de um número real.

3.3.1. Definição

Dado um número real $a > 0$ e $a \neq 1$, o logaritmo de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

A partir dessa definição, as propriedades dos logaritmos decorrem imediatamente das propriedades da potenciação, mas pela história da matemática, os logaritmos foram desenvolvidos antes do desenvolvimento do conceito de função exponencial.

3.3.2. Propriedade fundamental

A propriedade que segue é uma consequência imediata da definição 3.3.1.

Dados os números reais positivos a, u, x , com $a \neq 1$, tem-se:

$$\log_a (ux) = \log_a (u) + \log_a (x).$$

De fato, chamando $p = \log_a u$ e $q = \log_a x$, segue que $a^p = u$ e $a^q = x$.

Logo, $u.x = a^p.a^q = a^{p+q}$, e pela definição, $\log_a (ux) = p + q = \log_a u + \log_a x$.

3.3.3. Consequências da definição

Pela definição acima, tem-se:

i) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$.

ii) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$.

iii) $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$, $\forall a, n \in \mathbb{R}, a > 0$ e $a \neq 1$.

iv) $a^{\log_a b} = b$, pois se $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \Rightarrow a^{\log_a b} = b$, $\forall a, n \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$.

v) $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, $\forall a, x, y \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$.

De fato, se $\log_a x = m$ e $\log_a y = n \Rightarrow a^m = x$ e $a^n = y$.

Logo:

Para $x = y \Rightarrow a^m = a^n \Rightarrow m = n \Rightarrow \log_a x = \log_a y$.

Para $\log_a x = \log_a y \Rightarrow m = n \Rightarrow a^m = a^n \Rightarrow x = y$.

vi) $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+; a \neq 1, b \neq 1$ e $c \neq 1$.

De fato, se $\log_b c = p$, $\log_a c = q$ e $\log_a b = r \Rightarrow b^p = c$, $a^q = c$ e $a^r = b$.

Assim, $c = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp} \Rightarrow a^q = a^{rp}$.

Como $a^q = a^{rp} \Rightarrow q = rp$, ou seja $p = \frac{q}{r} \Rightarrow \log_b c = \frac{q}{r} = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Portanto $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

Nos próximos capítulos, o logaritmo é tratado como função e suas propriedades demonstradas de acordo com essa abordagem.

4. Funções logarítmicas

Mesmo com o desenvolvimento das máquinas de calcular e o seu uso generalizado, pois hoje em dia é fácil instalar aplicativo semelhante em qualquer telefone celular, a importância da função logarítmica, assim como a sua inversa, a função exponencial não diminuiu, pois segundo Maor (2005, p.27) “ a função logarítmica permanece no centro de quase todos os ramos da matemática, pura ou aplicada.”

De acordo com EVES (2011, p.347)

A função logarítmica, porém nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da Matemática.

4.1. Função Logarítmica

Agora, a ideia de logaritmo é abordada como função. Lembrando que o conjunto dos números reais positivos é denotado por \mathbb{R}^+ , será definido os logaritmos como função e na sequência, a demonstração de suas propriedades.

4.1.1. Definição

Seja uma função real $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$. Denomina-se uma função logarítmica ou sistema de logaritmos se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

- i) \log_a é uma função crescente, ou seja, $x < y \Rightarrow \log_a(x) < \log_a(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.
- ii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

4.1.2. Propriedades

Sendo $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, as propriedades das funções logarítmicas a seguir, são consequências da definição 4.1.1.

P₁. A função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é injetora.

De fato, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \neq y$ então:

- Se $x < y$ resulta por i), $\log_a(x) < \log_a(y)$;

- Se $y < x$ resulta por i), $\log_a(y) < \log_a(x)$.

Portanto, se $x \neq y$, tem-se que $\log_a(x) \neq \log_a(y)$.

P₂. O logaritmo de 1 é zero.

De fato, como $1 = 1 \cdot 1$, por ii) tem-se:

$$\log_a(1) = \log_a(1 \cdot 1) = \log_a(1) + \log_a(1) \Rightarrow \log_a(1) = \log_a(1) - \log_a(1) = 0$$

Portanto, $\log_a(1) = 0$.

P₃. Os números maiores do que 1 tem logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 tem logaritmos negativos.

De fato, sendo \log_a crescente, então, de $0 < x < 1 < y$, tem-se, por ii):

$$\log_a(x) < \log_a(1) < \log_a(y)$$

Como $\log_a(1) = 0$, logo conclui-se que $\log_a(x) < 0 < \log_a(y)$.

P₄. Para todo $x > 0$, tem-se $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

De fato, como $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, então:

$$\log_a\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log_a(1) \Rightarrow \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x).$$

P₅. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$, vale $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

De fato, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a(x) + \log_a\left(\frac{1}{y}\right)$. Por P₄,

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y), \text{ então } \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y).$$

P₆. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $r \in \mathbb{Q}$, tem-se $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$.

De fato, como $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, então para $\log_a(x.y.z)$, segue que:

$$\log_a(xyz) = \log_a(xy) + \log_a(z) = \log_a(x) + \log_a(y) + \log_a(z).$$

E, assim, estendendo para n fatores:

$$\log_a(x_1.x_2 \cdots x_n) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \cdots \log_a(x_n)$$

Em particular para $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\log_a(x^n) = \log_a(x.x \cdots x) = \log_a(x) + \log_a(x) + \cdots + \log_a(x) = n.\log_a(x).$$

Assim, $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$ para $r = n \in \mathbb{N}$.

Para $n=0$, tem-se $\log_a(x^0) = \log_a(1) = 0 = 0.\log_a(x)$.

Para $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, tem-se $x^n.x^{-n} = x^0 = 1$. Então:

$$\log_a(x^n) + \log_a(x^{-n}) = \log_a(1) = 0 \Rightarrow \log_a(x^{-n}) = -\log_a(x^n) = -n \log_a(x^n).$$

Logo, $\log_a(x^{-n}) = -n \log_a(x)$.

Se $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, então $(x^r)^q = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^p$.

Logo, $q.\log_a(x^r) = \log_a\left[(x^r)^q\right] = \log_a(x^p) = p.\log_a(x)$, o que resulta:

$$\log_a(x^r) = \frac{p}{q} \log_a(x).$$

Como $r = \frac{p}{q}$, logo $\log_a(x^r) = r.\log_a(x)$, $r \in \mathbb{Q}$.

P7. Uma função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.

De fato, deve-se mostrar que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\exists x, y \in \mathbb{R}^+$, $\log_a(x) < \alpha$ e $\log_a(y) > \beta$.

i) \log_a é ilimitada inferiormente, isto é, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}^+$, tal que $\log_a(x) < \alpha$.

De fato, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ então $\exists x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\log_a(x) > -\alpha$.

Por P4, $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$, e chamando $y = \frac{1}{x}$, logo $\log_a(y) = -\log_a(x)$.

Como $\log_a(x) > -\alpha \Rightarrow -\log_a(x) < \alpha$, então $\log_a(y) = -\log_a(x) < \alpha$.

ii) \log_a é ilimitado superiormente, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}^+$ $\log_a(y) > \beta$

Com efeito, seja $\beta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{\beta}{\log_a(2)}$.

Por P_3 , tem-se que $\log_a(2) > 0$, então $n \cdot \log_a(2) > \beta$.

Mas, por P_6 , tem-se que $n \cdot \log_a(2) = \log_a(2^n)$.

Logo, $\log_a(2^n) > \beta$ e tomando $x = 2^n$, segue que $\log_a(y) > \beta$.

Uma função logarítmica \log_a não pode ser definida para $x=0$, pois $\log_a(0) = \log_a(x \cdot 0) = \log_a(x) + \log_a(0)$, ou seja, $\log_a(x) = 0$. Então \log_a seria identicamente nula, contrariando a propriedade i).

Também, para $x < 0$, não é possível estender satisfatoriamente, o domínio da função logarítmica.

Teorema 1. Toda função logarítmica é sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c , existe sempre um número real positivo x tal que $\log_a(x) = c$.

Demonstração: Seja uma função logarítmica $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sobrejetiva e sejam, também, $\alpha, b \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$.

Como \log_a é crescente e ilimitada, então existem $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\log_a(k) > b$.

Seja $\alpha_0 + 1$ o menor inteiro tal que $\log_a(\alpha_0 + 1) > b$, logo $\log_a(\alpha_0) \leq b < \log_a(\alpha_0 + 1)$.

Considere os números $a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, \dots, a_0 + \frac{9}{10}, \alpha_0 + 1$.

Como $\log_a(\alpha_0) \leq b < \log_a(\alpha_0 + 1)$, então pode-se supor que nessa sequência há dois

elementos consecutivos α_1 e $\alpha_1 + \frac{1}{10}$ tais que $\log_a(\alpha_1) \leq b < \log_a\left(\alpha_1 + \frac{1}{10}\right)$. Logo,

existe $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq a_1 \leq 9$ e pondo $\alpha_1 = a_0$, $a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10}$ segue que,

$\log_a(\alpha_1) \leq b < \log_a\left(\alpha_1 + \frac{1}{10}\right)$.

Agora, considere os números $\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, \dots, \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10}$.

Existe $a_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que se $\alpha_1 = a_0, a_1 a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}$, segue que

$$\log_a(\alpha_2) \leq b < \log_a\left(\alpha_2 + \frac{1}{10^2}\right).$$

Analogamente encontra-se que:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

Assim, pondo $\alpha_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$, tem-se $\log_a(\alpha_n) \leq b < \log_a\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right)$, tem-se

que $\log_a(\alpha) = b$, pois caso $\log_a(\alpha) < b$, logo $\exists x > 0$ tal que $\log_a(\alpha) < \log_a(x) < b$.

Mas \log_a é uma função crescente, logo $\alpha < x$. Tomando n grande suficiente para

que $x - \alpha > \frac{1}{10^n}$, então $x > \alpha + \frac{1}{10^n}$.

Assim, $\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x$ e como \log_a é crescente, resulta que

$$b < \log_a\left(\alpha_n + \frac{1}{10^n}\right) \leq \log_a\left(\alpha + \frac{1}{10^n}\right) < \log_a(x), \text{ o que é um absurdo pois } \log_a(x) < b.$$

Se $\log_a(\alpha) > b$, logo $\exists x > 0$ tal que $b < \log_a(x) < \log_a(\alpha)$. Como \log_a é crescente,

logo $x < \alpha$, então $x < \alpha_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\log_a(x) < \log_a(\alpha_n) \leq b$, ou seja

$\log_a(x) < b$ o que contraria $b < \log_a(x)$.

Portanto $\log_a(\alpha) = b$.

Corolário. Toda função logarítmica $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca entre \mathbb{R}^+ e \mathbb{R} .

Demonstração: Seja $\log_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica.

Como \log_a é uma função e qualquer função origina uma tabela de valores associada a ela. Assim, numa tabela de valores associada a função \log_a , coloca-se os valores de x na coluna a esquerda e os seus respectivos correspondentes $\log_a(x)$

na coluna à direita. Mas toda função logarítmica é injetiva (P_1), ou seja, se $x, y \in \mathbb{R}^+$ tem-se $\log_a(x) \neq \log_a(y)$ e pelo Teorema 1 é também sobrejetiva, isto é, dado qualquer número real c , existe sempre um número real positivo x tal que $\log_a(x) = c$. Portanto, para cada elemento do domínio de \log_a há um único corresponde em seu contradomínio, ou seja $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca entre \mathbb{R}^+ e \mathbb{R} .

4.1.3. Gráfico da Função Logarítmica

A figura 4.1 representa os gráficos das funções logarítmicas $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_3 x$ e $h(x) = \log_{10} x$ ($a > 1$) e também das funções $p(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $q(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ e $h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$ ($0 < a < 1$). Nota-se algumas particularidades em suas curvas, quanto ao crescimento e decrescimento para determinados valores da base do logaritmo a assim quanto ao conjunto domínio e imagem da função logarítmica.

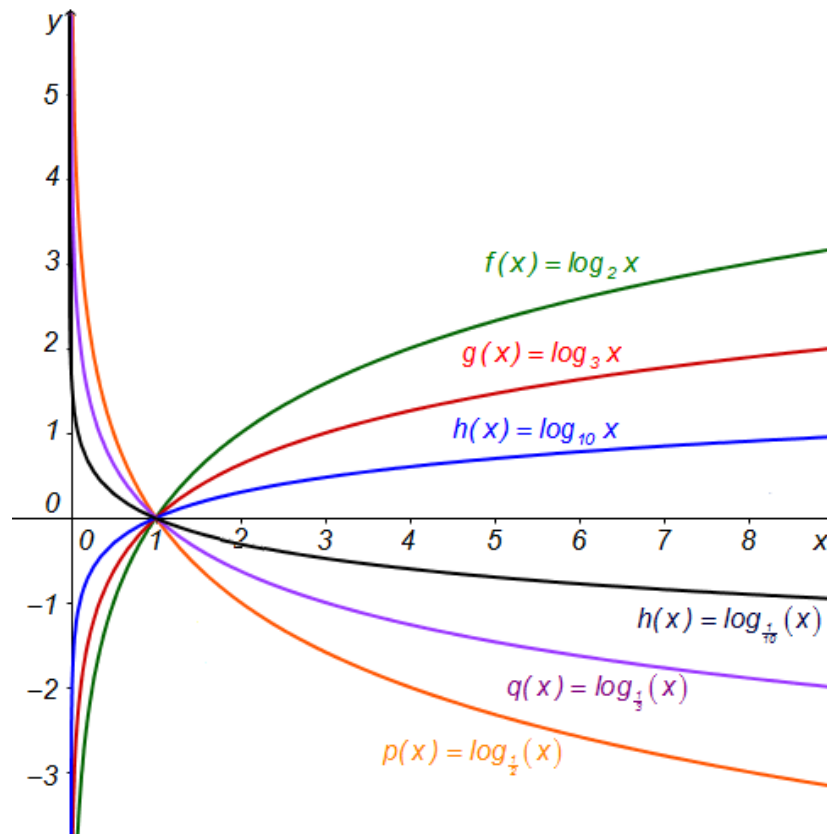


Figura 4.1: Gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \log_3 x$, $h(x) = \log_{10} x$, $p(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$, $q(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$ e $h(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x)$.

Considerando o gráfico da função $f(x) = \log_a x$ quando $a > 1$ e $0 < a < 1$, como mostra a Figura 4.2:

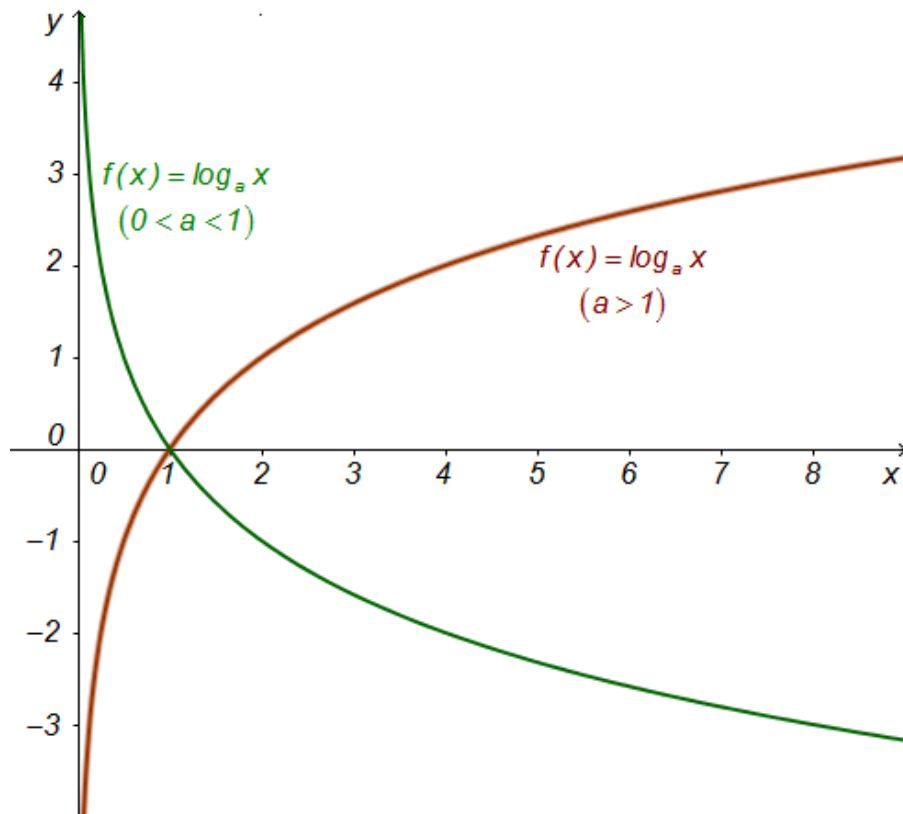


Figura 4.2: Gráficos das funções, $f(x) = \log_a(x)$ ($a > 1$) e $f(x) = \log_a(x)$ ($0 < a < 1$).

Observa-se algumas particularidades dessa função:

- a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é estritamente crescente se $a > 1$ e se $0 < a < 1$, é estritamente decrescente.;
- o gráfico da função $f(x) = \log_a x$ não toca o eixo y e não ocupa pontos nos quadrantes II e III;
- o gráfico da função logarítmica passa pelo ponto $(1, 0)$, isto é, $f(1) = \log_a 1 = 0$;
- a função logarítmica é ilimitada, super e inferiormente;
- a função logarítmica é injetiva e sobrejetiva, logo ela é bijetiva;
- na função logarítmica $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), o eixo das ordenadas é uma assíntota vertical do gráfico.

No próximo capítulo, o logaritmo natural será definido geometricamente.

5. Logaritmo como área

No Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) não é citada a relação do conceito de logaritmo com a área de uma faixa de hipérbole, porém, a autora considera importante a ciência desse tema para compreender melhor os vários significados dos logaritmos.

A ideia de relacionar o conceito de logaritmo com a área de uma faixa de hipérbole não é nova, pois já havia sido observada pelo belga Gregory Saint Vincent, em 1647 e o inglês Isaac Newton, em 1660, embora ambos, ainda não identificassem claramente a concepção geométrica da função logarítmica e nem reconhecessem o número e , mas pelas observações registradas pode-se afirmar que a ideia já estava semeada (LIMA,1991).

5.1. Faixa de hipérbole

Para definir a faixa de hipérbole, considere o ramo positivo da hipérbole $xy = 1$ e H , o ramo positivo do gráfico da função $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{x}$, isto é

$$H = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right); x \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

Geometricamente, tem-se na Figura 5.1, que H é o conjunto de pontos reais (x,y) , com $x > 0$ e $x.y = 1$.

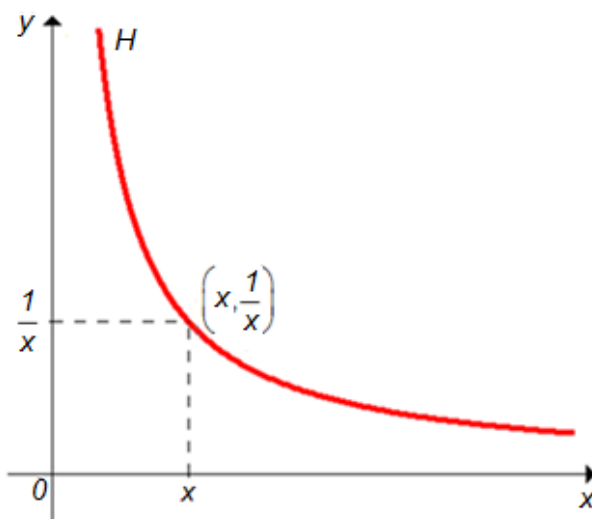


Figura 5.1: H representa o conjunto de pontos $y = \frac{1}{x}$.

Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.25).

Assim, obtém-se uma faixa de hipérbole fixando dois números reais e positivos, a e b , com $a < b$ como mostra a Figura 5.2. Tomando a região limitado pelas retas $x = a$, $x = b$ e pela hipérbole H , tem a região, que será chamada H_a^b , onde

$$H_a^b = \left\{ (x,y); a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

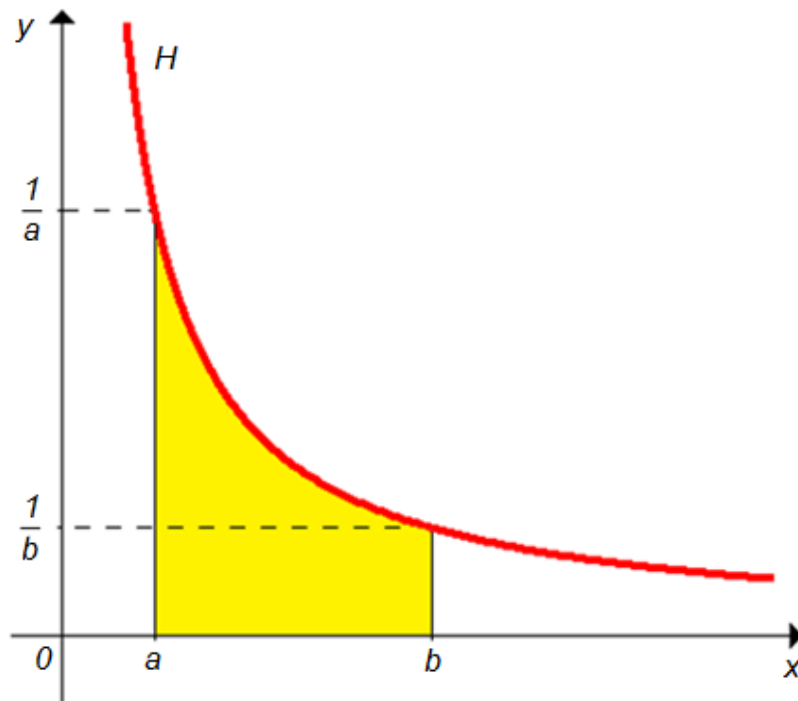


Figura 5.2: A região em amarelo é a faixa de hipérbole H_a^b .

Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.25).

5.2. Área de uma faixa de hipérbole aproximado por polígonos retangulares

Para calcular a área dessa faixa da hipérbole, decompõe-se o intervalo $[a,b]$ em um número finito de intervalos justapostos, por exemplo, inserindo os pontos intermediários c , d , e e f e obtendo, assim os intervalos $[a,c]$, $[c,d]$, $[d,e]$, $[e,f]$ e $[f,b]$, como mostra a Figura 5.3.

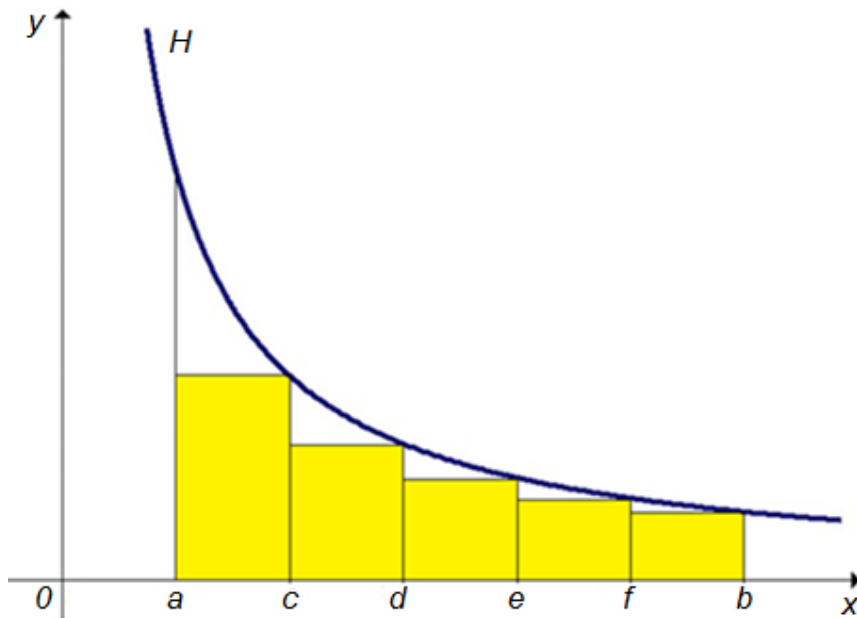


Figura 5.3: Polígono regular inscrito na faixa de hipérbole H_a^b .
 Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.26).

Para ilustrar como é feito o cálculo da área dos retângulos sob a faixa da hipérbole, no intervalo $[a, b]$, será feito um exemplo numérico, supondo $a = 1$ e $b = 2$, como mostra a Figura 5.4.

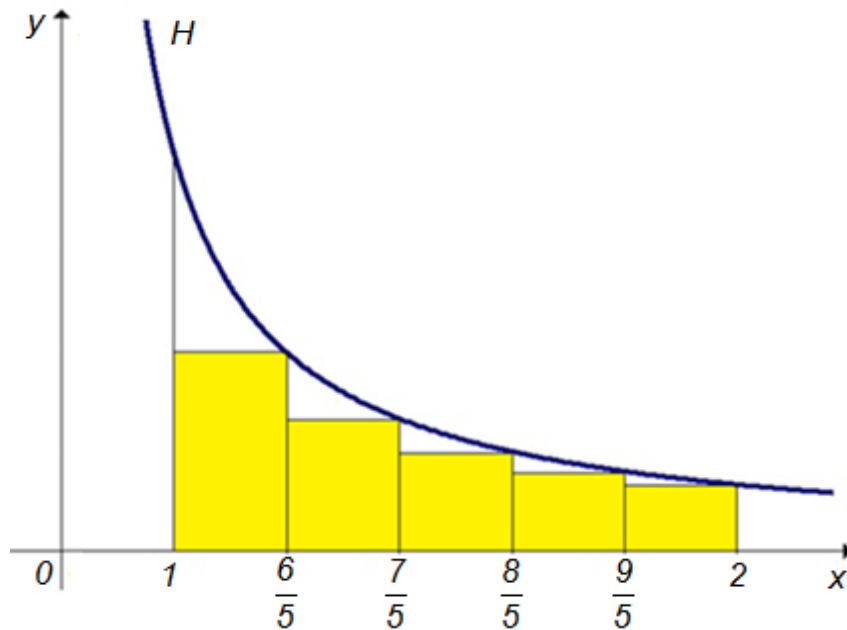


Figura 5.4: Polígono retangular inscrito na faixa de hipérbole H_1^2 .

Tomando a decomposição do intervalo $[1,2]$, como mostra a Figura 5.4, nos intervalos intermediários $\left[1, \frac{6}{5}\right]$, $\left[\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right]$, $\left[\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right]$, $\left[\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right]$ e $\left[\frac{9}{5}, 2\right]$, tem-se a área dos polígonos retangulares somando-se as áreas dos cinco retângulos:

$$A = \left(\frac{1}{5} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{19524}{30240} \approx 0,65$$

Se aumentar o número de subdivisões do intervalo, para 10, teremos os pontos intermediários $\left[1, \frac{11}{10}\right]$, $\left[\frac{11}{10}, \frac{6}{5}\right]$, $\left[\frac{6}{5}, \frac{13}{10}\right]$, $\left[\frac{13}{10}, \frac{7}{5}\right]$, $\left[\frac{7}{5}, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{2}, \frac{8}{5}\right]$, $\left[\frac{8}{5}, \frac{17}{10}\right]$, $\left[\frac{17}{10}, \frac{9}{5}\right]$, $\left[\frac{9}{5}, \frac{19}{10}\right]$ e $\left[\frac{19}{10}, 2\right]$ a área dos polígonos será de:

$$A = \left(\frac{1}{10} \times \frac{10}{11}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{10}{13}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{5}{7}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{10}{17}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{10}{19}\right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} = \frac{448372820160}{670442572800} \approx 0,6688 \approx 0,67.$$

Assim, pode-se afirmar que 0,67 é uma aproximação melhor do que 0,65 para a área sob a faixa de hipérbole no intervalo $[1,2]$.

Por mais refinada que seja as subdivisões do intervalo $[a,b]$, a área de cada polígono retangular inscrito nessa faixa de hipérbole é, ainda, um valor aproximado, por falta para a área de H_a^b . Assim, para qualquer número positivo $\alpha < \text{Área}(H_a^b)$, existe um polígono retangular P, inscrito na faixa H_a^b de tal modo que $\alpha < \text{Área}(P_a^b) < \text{Área}(H_a^b)$ (LIMA,1991).

5.3. Área de uma faixa de hipérbole através de trapézios

A fim de obter uma aproximação melhor sob a área da faixa de hipérbole H_a^b , para cada subdivisão $[c,d]$ no intervalo $[a,b]$ pode-se, em vez de considerar o retângulo inscrito de base $[c,d]$ levar em conta os trapézios que podem ser obtidos.

5.3.1 Área de uma faixa de hipérbole através de trapézios secantes

Por exemplo, dada a faixa de hipérbole $H = \left\{ (x, y); x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}$ e considerando o intervalo $[1, 2]$, decomposto em cinco trapézios secantes, como mostra a figura 5.5.

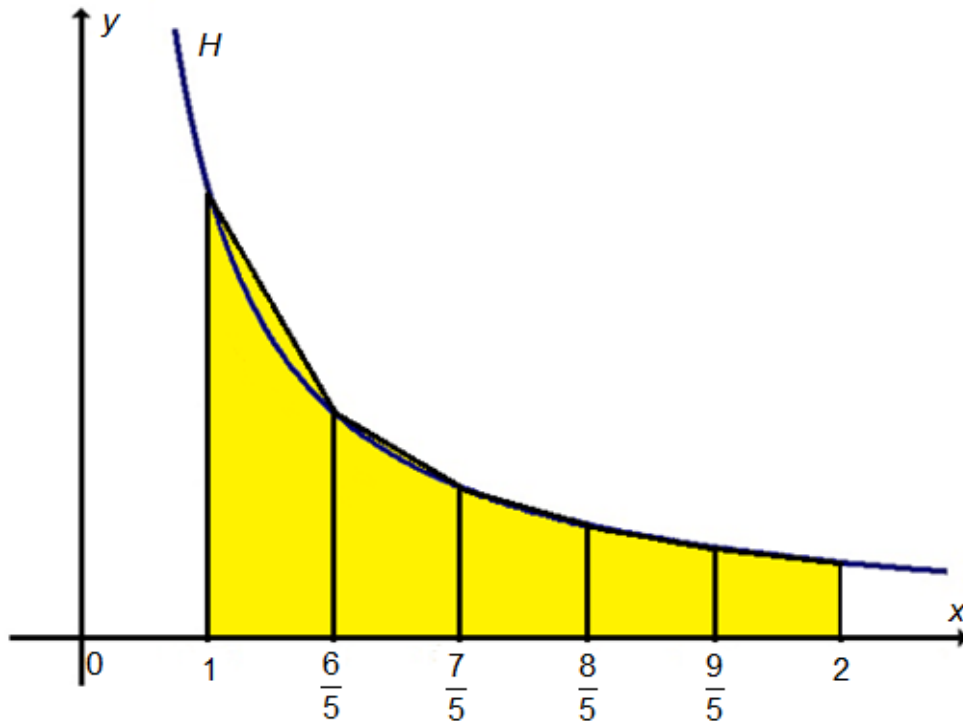


Figura 5.5: Aproximação de H_1^2 por trapézios secantes.

A área sob a faixa de hipérbole é dada por

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\left(1 + \frac{5}{6}\right) \times \frac{1}{5}}{2} + \frac{\left(\frac{5}{6} + \frac{5}{7}\right) \times \frac{1}{5}}{2} + \frac{\left(\frac{5}{7} + \frac{5}{8}\right) \times \frac{1}{5}}{2} + \frac{\left(\frac{5}{8} + \frac{5}{9}\right) \times \frac{1}{5}}{2} + \frac{\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{5}}{2} = \\
 &= \frac{11}{60} + \frac{65}{420} + \frac{75}{560} + \frac{85}{720} + \frac{19}{180} = \frac{924 + 780 + 675 + 595 + 532}{5040} = \frac{3506}{5040} \approx 0,6956
 \end{aligned}$$

Comparando o resultado acima com a aproximação por polígono retangular, obtida na Seção 5.2, tem-se

$$0,6688 < \text{Área}(H_1^2) < 0,6956$$

A aproximação da área da faixa de hipérbole pode ficar ainda melhor com os trapézios tangentes, como será visto na sequência.

5.3.2. Área de uma faixa de hipérbole através de trapézios tangentes

Considere a faixa de hipérbole $H = \left\{ (x, y); x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}$ no intervalo $[1, 2]$.

Decompondo o intervalo $[1, 2]$ em intervalos de mesmo comprimento $\frac{1}{5}$ justapostos:

$\left[1, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right], \left[\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right], \left[\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right]$ e $\left[\frac{9}{5}, 2\right]$. Sejam, $\frac{11}{10}, \frac{13}{10}, \frac{3}{2}, \frac{17}{10}$ e $\frac{19}{10}$ os pontos

médios de cada intervalo, respectivamente e sobre cada intervalo $[c, d]$ dado, considere o trapézio cujo lado inclinado é tangente à hipérbole pelo ponto

$\left(\frac{c+d}{2}, \frac{2}{c+d}\right)$, como mostra a figura 5.6.

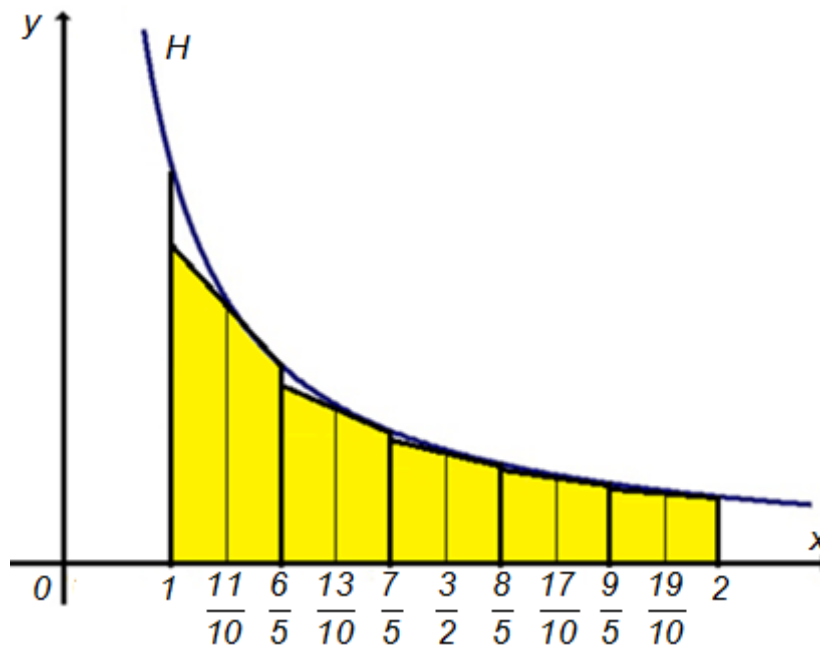


Figura 5.6: Aproximação de H_1^2 por trapézios secantes.

A área de cada trapézio é dada por $\frac{2}{d+c} \times (d-c)$, pois $\frac{2}{d+c}$ é a medida da sua base média e $(d-c)$ é a medida da sua altura.

Logo, a área sob a faixa de hipérbole é:

$$A = \frac{2}{1 + \frac{6}{5}} \times \left(\frac{6}{5} - 1\right) + \frac{2}{\frac{6}{5} + \frac{7}{5}} \times \left(\frac{7}{5} - \frac{6}{5}\right) + \frac{2}{\frac{7}{5} + \frac{8}{5}} \times \left(\frac{8}{5} - \frac{7}{5}\right) + \frac{2}{\frac{8}{5} + \frac{9}{5}} \times \left(\frac{9}{5} - \frac{8}{5}\right) + \frac{2}{\frac{9}{5} + 2} \times \left(2 - \frac{9}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{10}{11} + \frac{10}{13} + \frac{10}{15} + \frac{10}{17} + \frac{10}{19} \right) \times \frac{1}{5} = \left(\frac{62985 + 53295 + 46189 + 40755 + 36465}{692835} \right) \times \frac{10}{5} =$$

$$= \frac{479378}{692835} \approx 0,6919$$

Lembrando que a área dos trapézios secantes foi aproximadamente 0,6956, mas a aproximação por trapézios tangentes é melhor, como mostrado a seguir.

De fato, dada a faixa de hipérbole $H_a^b = \left\{ (x,y); a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$, considerando uma decomposição de $[a,b]$ em intervalos justapostos e sobre cada intervalo $[c,d]$ da decomposição ao aproximar a área da faixa de hipérbole H_c^d pela área do trapézio tangente, é menor o erro cometido comparado com a aproximação da mesma área pela área do trapézio secante.

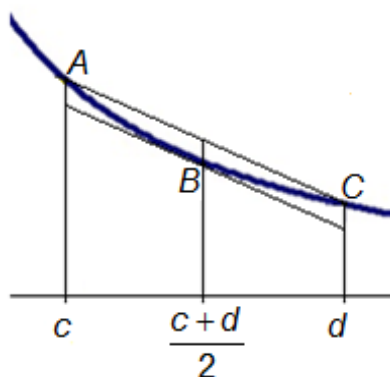


Figura 5.7: Área da faixa de hipérbole H_c^d decomposto em trapézios tangentes e secantes.

Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.36).

Observe a figura 5.7 e considere a parte da figura compreendida entre os segmentos tangente e secante. Traçe dois segmentos secantes auxiliares, \overline{AB} e \overline{BC} .

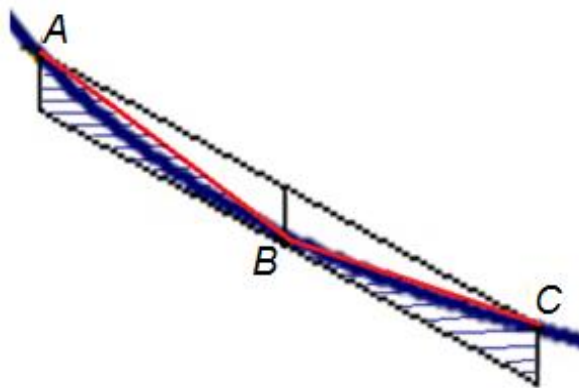


Figura 5.8: Parte da figura compreendida entre os segmentos tangente e secante.
 Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.36).

Como a soma das dos triângulos hachurados é igual à soma das áreas dos triângulos não hachurados, então a área da parte do trapézio secante que excede a faixa H_c^d é maior que a área que falta ao trapézio tangente para ser igual a H_c^d .

O Teorema 1 traz o resultado mais importante em relação a área de uma faixa de hipérbole.

Teorema 1. Seja qual for o número real k , $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm a mesma área.

Demonstração: De fato, considere o segmento $[c, d]$ do eixo das abscissas e o retângulo inscrito em H , cuja base é o segmento $[c, d]$. Sua área é

$$(d - c) \times \frac{1}{d} = \frac{d - c}{d} = 1 - \frac{c}{d}.$$

Seja o retângulo de base $[ck, dk]$ inscrito em H . Sua área é

$$(dk - ck) \times \frac{1}{dk} = \frac{dk - ck}{dk} = \frac{dk}{dk} - \frac{ck}{dk} = 1 - \frac{c}{d}.$$

Logo o primeiro e o segundo retângulo tem mesma medida de área.

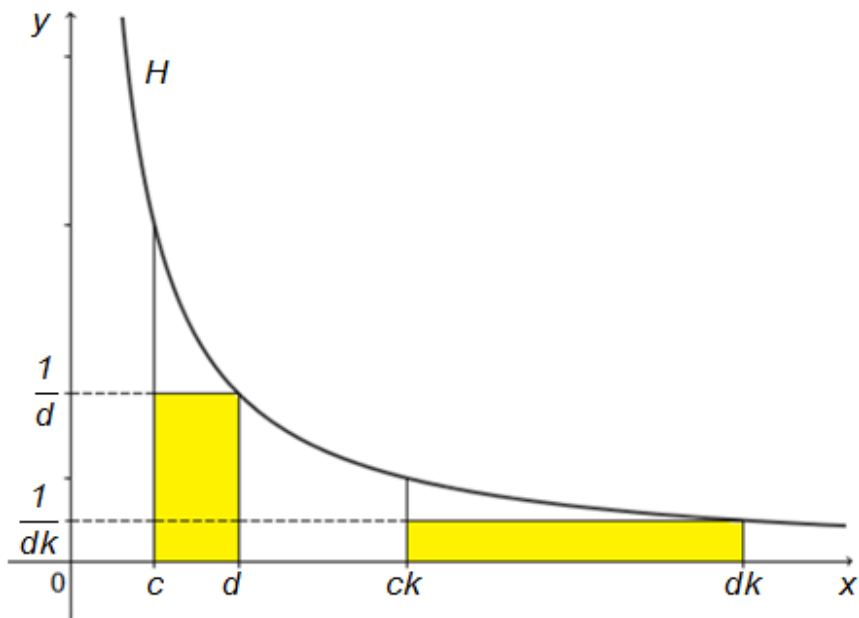


Figura 5.9: Os retângulos em amarelo possuem a mesma área.
 Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.38).

Considerando, agora, um polígono retangular P , inscrito na faixa H_a^b , então se for multiplicado por k cada uma das abscissas dos pontos de decomposição do intervalo $[a,b]$, determinado pelo polígono P , tem-se uma subdivisão $[ak,bk]$ do intervalo e um polígono P' , inscrito na faixa de hipérbole H_{ak}^{bk} .

Como foi visto, cada um dos retângulos de P' tem a mesma área que o seu correspondente em P . Assim, P e P' tem a mesma área.

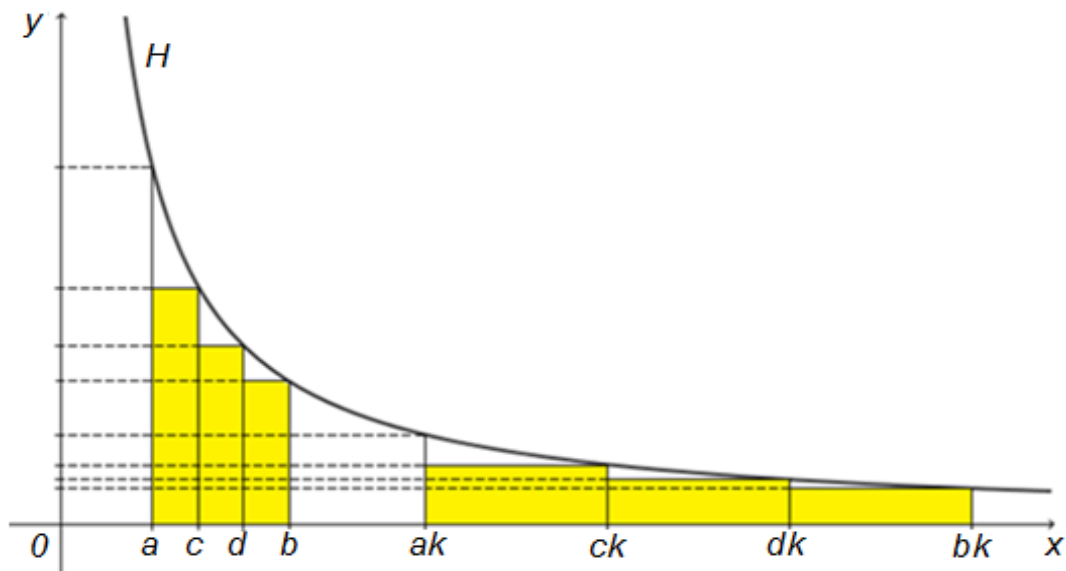


Figura 5.10: $\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_{ak}^{bk})$.
 Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.39).

Portanto, cada polígono retangular inscrito em H_a^b , há um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma medida de área.

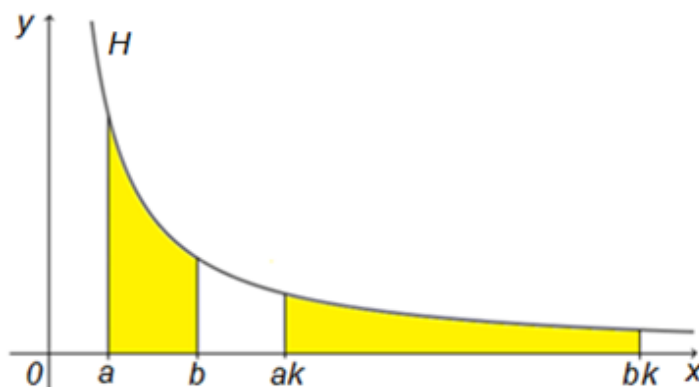


Figura 5.11: $\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_{ak}^{bk})$.

Fonte: Adaptado de Lima(2013, p.199).

Observa-se que a faixa de hipérbole H_a^a é um segmento de reta, assim $\text{Área}(H_a^a) = 0$.

Para efeitos de cálculos, convencionou-se que $\text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a)$.

Assim, é claro que para $a < b < c$, tem-se $\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c)$, como pode ser observado na figura 5.12.

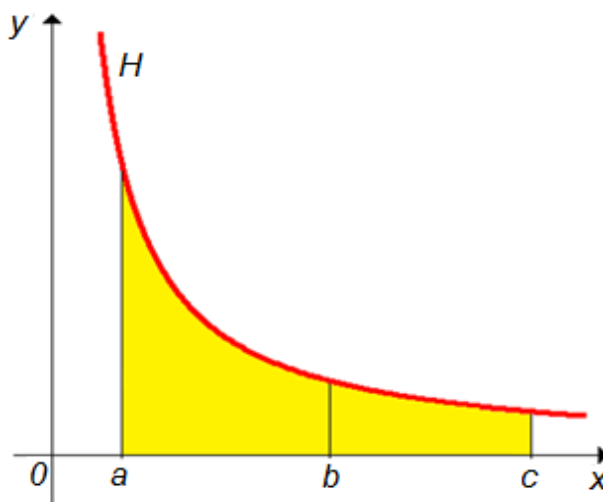


Figura 5.12: $\text{Área}(H_a^c) = \text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c)$.

Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.41).

Na Seção 5.4, será definido o logaritmo natural de um número positivo x como a área de uma faixa de hipérbole H_1^x .

5.4. Logaritmos naturais

Os logaritmos naturais ou neperianos, são pouco explorados no ensino médio, embora sua importância não seja menor. Além disso, podem ser vistos como área sob uma faixa de hipérbole, como será abordado neste capítulo.

5.4.1. Definição

O logaritmo natural de um número real positivo x é a área da faixa de hipérbole H_1^x , ou seja,

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x > 0$$

Por convenção, $\text{Área}(H_1^x) < 0$, quando $0 < x < 1$.

Se $x = 1$, tem-se que $\ln 1 = 0$, pois H_1^1 é um segmento de reta.

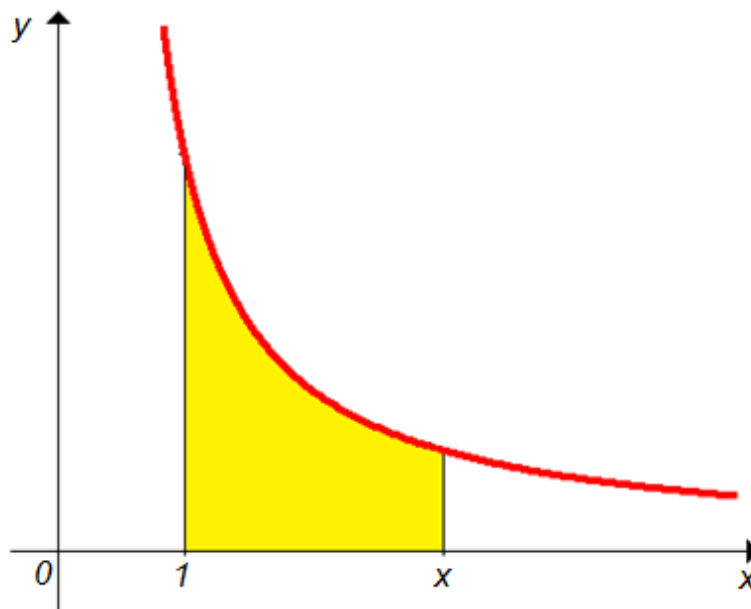


Figura 5.13: A área em amarelo corresponde a $\ln x$.
Fonte: Adaptado de Lima(1991, p.44).

Teorema 2. A função real $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica.

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$.

(i) Primeiro será demonstrado que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Por definição $\ln x = \text{Área}(H_1^x)$ e $\ln y = \text{Área}(H_1^y)$. Como $\text{Área}(H_1^{xy}) = \text{Área}(H_1^x) + \text{Área}(H_x^{xy})$ e pelo Teorema 1, da Seção 5.3.2, tem-se que $\text{Área}(H_x^{xy}) = \text{Área}(H_{x.1}^{x.y}) = \text{Área}(H_1^y)$, segue $\text{Área}(H_x^{xy}) = \text{Área}(H_{x.1}^{x.y}) = \text{Área}(H_1^y)$. Portanto $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

(ii) Segundo, será demonstrado que se $x < y$ então $\ln(x) < \ln(y)$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$, com $x < y$. Logo existe $k \in \mathbb{R}^+$, $k > 1$, tal que $y = kx$. Segue que $\ln(y) = \ln(kx) = \ln(k) + \ln(x)$. Mas $k > 1$, logo $\ln(k) > 0$ então $\ln(y) > \ln(x)$.

De (i) e (ii), tem-se que $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é função logarítmica.

5.4.2. O número e

Como toda função logarítmica é bijetiva, há somente um único número real, que é representado por **e** tal que seu logaritmo natural é igual a 1, ou seja, $\ln e = 1$. Na figura 5.14 considere a faixa de hipérbole H_1^{1+x} e os retângulos de área $\frac{x}{1+x}$, $1+x$ e x .

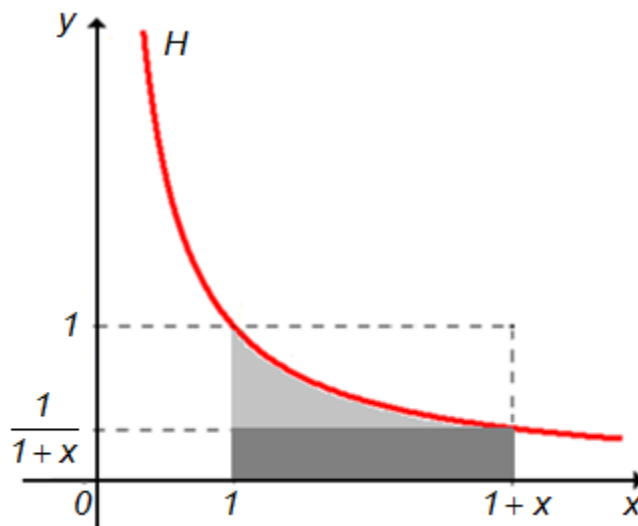


Figura 5.14: Faixa de hipérbole H_1^{1+x} .

Fonte: Adaptado de Lima(2013, p.202).

Para todo $x > 0$, tem-se: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$. Como $x > 0$, então a expressão

pode ser dividida por x , logo $\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$ (I).

Seja $n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = \frac{1}{n}$. Substituindo em (I) obtem-se:

$$\frac{n}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \Rightarrow e^{\frac{n}{n+1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

O número e é irracional, sendo **2,718281828459** uma aproximação com 12 algarismos decimais exatos (LIMA, 1991), como está demonstrado no Apêndice A.

Teorema 2. *Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional. Tem-se que $y = e^r$ se, e somente se,*
 $\ln y = r.$

Demonstração: Se $y = e^r \Rightarrow \ln y = \ln e^r \Rightarrow \ln y = r \cdot \ln e = r \Rightarrow \ln y = r.$

Reciprocamente, seja $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $\ln y = r.$ Como $\ln e = 1$ então $r \cdot \ln e = r$, logo $\ln y = r \cdot \ln e = \ln e^r$, ou seja $y = e^r.$

Através da área da faixa de hipérbole pode-se determinar o logaritmo para outras bases reais, considerando $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}^+$, em vez de $y = \frac{1}{x}$. Assim, para cada $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}^+$, define-se $\log_a x = H(k)_a^b$, onde $H(k)_a^b = k \cdot \text{Área}(H_a^b)$.

O próximo capítulo traz algumas aplicações das funções logarítmicas nas diversas áreas do conhecimento.

6. Aplicações

É comum quando o professor inicia um conteúdo, algum aluno dizer “pra que serve isso”, ou fazer um comentário como “nunca vou usar isso”.

No caso dos logaritmos, o seu uso não se restringe apenas à Matemática, ela está presente em vários fenômenos e situações cotidianas, estudadas nas diversas áreas do conhecimento, como veremos adiante.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2010, p.45):

Quem ignorar hoje a riqueza de significados presente na ideia de logaritmo e se dirigir a uma sala de aula do Ensino Médio pretendendo ensiná-la tendo em vista a simplificação de cálculos não será compreendido pelos alunos, que poderão até mesmo considerar estranha a intenção do professor.

Reduzir os logaritmos a simples método para simplificar os cálculos é torná-lo sem importância, pois como lembra Lima (2013, p.192) “o uso generalizado das calculadoras, cada vez mais desenvolvidas, fez com que essa utilidade inicial dos logaritmos perdesse sentido”.

Porém, nos dias atuais, os logaritmos continuam de suma importância, devido as suas propriedades funcionais, pois são necessários no estudo fenômenos e situações que se tem uma grandezas que variam exponencialmente, como o potencial hidrogeniônico (pH), crescimento populacional, decomposição radioativa, escala Richter (intensidade de terremotos), etc.

6.1. Logaritmos e os juros contínuos

Considere o caso de um capital C_0 aplicado por um período de tempo t , que rendeu ao investidor o capital inicial acrescido de juros J . Chamando de montante M a soma $C_0 + J$ e α , a taxa de juros, isto é, $\alpha = \frac{J}{C_0}$.

Um capital inicial C_0 aplicado no regime de juros compostos de taxa α , em n períodos de tempo, transforma-se em um montante igual a $C_0(1+\alpha)^n$.

De fato, após 1 período de tempo, o montante torna-se igual a $C_0 + C_0 \cdot \alpha = C_0(1+\alpha)$. Decorridos 2 períodos de tempo, o montante é dado por

$C_0(1+\alpha) + C_0(1+\alpha).\alpha = C_0(1+\alpha)(1+\alpha) = C_0(1+\alpha)^2$. Assim, em n períodos de tempo o capital transforma-se em $C_0(1+\alpha)^n$.

Considerando uma fração $\frac{1}{n}$ do período de tempo, o capital renderia, aplicado à mesma taxa de juros, $\frac{\alpha.C_0}{n}$, então o montante do período seria de $C_0 + \frac{\alpha.C_0}{n} = C_0\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)$. Em mais um $\frac{1}{n}$ do período de tempo, o montante resultante seria $C_0\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) + C_0\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\frac{\alpha}{n} = C_0\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^2$. Assim, após n períodos de tempo, o montante obtido se tornaria igual a $C_0\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$.

Sendo $M(t) = C_0(1+\alpha)^t$, para obter o tempo necessário t para que um capital inicial C_0 atinga o valor $M(t)$, deve-se usar logaritmos:

$$M(t) = C_0(1+\alpha)^t \Rightarrow \log M(t) = \log C_0(1+\alpha)^t \Rightarrow t = \frac{\log M(t)}{\log C_0(1+\alpha)}$$

Se o investidor puder ter os juros incorporados ao capital a cada instante, após n períodos de tempo, o montante recebido seria de $\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = C_0 \cdot e^\alpha$.

Quando a taxa de juros é dada em anos, sendo $k\%$ ao ano e $\alpha = \frac{k}{100}$, tem-se que um capital inicial C_0 aplicado a essa taxa, depois de t anos será transformado em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 \cdot \left(1 + \frac{\alpha.t}{n}\right)^n = C_0 \cdot e^{\alpha.t}$$

6.2. Logaritmos e o crescimento populacional

Em 1798, o economista inglês Thomas Malthus apresentou um modelo de crescimento populacional, conhecido como “Modelo de Malthus”. Esse modelo de crescimento populacional pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele instante. Matematicamente, se $P(t)$ é a população total no instante t , m e n as

taxas constantes de mortalidade e natalidade, respectivamente, e se, $k = n - m$ então $\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = n - m = k$, onde k é uma constante de proporcionalidade (nesse caso $k > 0$). Esse modelo é utilizado no crescimento de pequenas populações em um curto intervalo de tempo, como por exemplo crescimento de bactérias, pois não leva em conta fatores que podem influenciar a população tanto em seu crescimento quanto em seu declínio. Sabendo-se que uma certa população cresce segundo o modelo malthusiano e $P(0) = P_0$, então: $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$. O modelo discreto de Malthus é dado por $P(t+1) - P(t) = \alpha \cdot P(t)$. Se $P(0) = P_0$, tem-se $P(t) = P_0 (1 + \alpha)^t$ (TAVONI, 2013).

6.3. Logaritmos e a desintegração radioativa

Em substâncias radioativas, como o rádio ou o urânio, os átomos possuem uma tendência natural de se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não-radioativa. Assim, com o passar do tempo, a massa radioativa original diminui, conseqüentemente, aumentando a massa da nova substância transformada. Desse modo, ocorrerá num determinado instante, que a quantidade de matéria que se desintegrará de um corpo radioativo será proporcional à massa da substância original presente no corpo naquele instante. A constante de proporcionalidade, que neste trabalho foi denotada por α , é determinada experimentalmente e cada substância radioativa tem sua constante de desintegração radioativa (LIMA, 1991, p.95).

Considerando um corpo de massa M_0 , formado por uma substância radioativa com taxa de desintegração igual α e cuja desintegração se processa instantaneamente, no fim de cada segundo. Sendo M_0 a massa no tempo $t = 0$, após 1 segundo, haveria uma perda de $\alpha \cdot M_0$ unidades de massa, restando a massa:

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0 (1 - \alpha).$$

Assim, decorridos 2 segundos, a massa radioativa restante seria:

$$M_2 = M_1 - \alpha M_1 = M_1 (1 - \alpha) = M_0 (1 - \alpha)(1 - \alpha) = M_0 (1 - \alpha)^2$$

Logo, após 3 segundos tem-se

$$M_3 = M_0 (1 - \alpha)^3.$$

Como a desintegração radioativa é um processo contínuo, pode-se incorrer no erro de achar que após $t = u$ segundos, teria $M_u = M_0(1 - \alpha)^u$.

Para obtermos uma aproximação mais exata, considere um número inteiro positivo n e que a cada $\frac{1}{n}$ segundos ocorra uma desintegração. Assim, tem-se:

$$M_0 - \frac{\alpha}{n} M_0 = M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right).$$

Após 1 segundo, n desintegrações teriam ocorridos e efetuando n reduções, a massa restante seria de $M_0 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n$. Assim, dividindo o intervalo $[0,1]$ em um número n cada vez maior de partes iguais, obtem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[M_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \right] = M_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \right] = M_0 \cdot e^{-\alpha}.$$

Logo, para t segundos, deve-se dividir o intervalo $[0,t]$ em n partes iguais e obter em cada intervalo parcial, a massa restante de $M_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot t}{n}\right)$ e como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[M_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot t}{n}\right)^n \right] = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

segue que $M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t}$, é a expressão que fornece a massa restante do corpo decorridos t segundos.

O número α é determinado a partir da meia-vida da substância, que é o tempo que leva para desintegrar metade da sua massa radioativa.

6.4. Logaritmos e o potencial hidrogeniônico

Os logaritmos, também são usados na representação do potencial hidrogeniônico⁹, ou simplesmente pH, conceito criado pelo químico dinamarquês S. P. L. Sorensen, para representar a concentração do íon hidrogênio $[H^+]$ objetivando medir a acidez de uma solução usada na fabricação de cerveja.

⁹ Tradução do latim *pondus hydrogenii*, que significa o poder do hidrogênio, escala logarítmica proposto pelo bioquímico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen, em 1909. Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/PH>

O pH indica a quantidade aproximada de íons H^+ que se encontram livres no líquido, indicando a concentração (quantidade por unidade de volume) de tais íons.

De acordo com o Caderno do Professor (SÃO PAULO, 2014), a água (H_2O) tem cerca de 1 íon-grama de H^+ para cada 10^7 litros, sendo seu pH igual a 7. O pH de uma limonada é igual a 2, pois há cerca de 1 íon-grama para cada 10^2 litros. No leite de magnésia, há cerca de 1 íon-grama de H^+ para cada 10^{10} litros, então seu pH é 10. O pH de uma solução varia de 0 a 14, sendo que, para valores inferiores a 7, as soluções são ácidas; maiores que 7, básicas e iguais a 7, são neutras.

A escala de pH é logarítmica e determina-se o valor do pH de uma solução aquosa é a partir da concentração de íons de H^+ presentes nela: $pH = -\log[H^+]$.

Na tabela 6.1 há o valor aproximado do pH de algumas substâncias:

Líquido	pH
Ácido sulfúrico	0,1
Café	5,0
Leite	6,9
Amônia	13,0

Tabela 6.1: Valor aproximados do pH de algumas substâncias
Fonte: SÃO PAULO (2014, p.35)

6.5. Logaritmos, o IDH e o PIB

Na década de 1990, foi criado o índice de desenvolvimento humano, IDH para o Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), pelos economistas Mahbub ul Haq¹⁰ e Amartya Sen¹¹. Este índice determina o desenvolvimento humano de um país ou região baseada nos seguintes componentes, até 2009, era assim determinado:

i) a longevidade, dada pela expectativa de vida ao nascer;

$$Expectativa \ de \ vida = \frac{EV - 25}{85 - 25},$$

onde EV é a expectativa de vida.

¹⁰ Mahbub ul Haq (1934 – 1998), economista paquistanês.

¹¹ Amartya Sen (1933), economista indiano.

ii) educação, dada pela combinação da taxa de alfabetização de adultos (peso 2) e a taxa combinada de matrícula nos níveis de ensino fundamental, médio e superior:

$$\text{Educação} = \frac{2(\text{ITAA}) + \text{GEI}}{3},$$

tal que $\text{ITAA} = \frac{\text{TAA} - 0}{100 - 0}$ e $\text{GEI} = \frac{\text{CGER} - 0}{100 - 0}$;

Sendo que

- *ITAA* é o Índice da Taxa de Alfabetização dos Adultos;
- *GEI* é o Índice *Gross Enrolment*, a taxa combinada de matrícula nos níveis de ensino fundamental, médio e superior (*Gross Enrolment Index*);
- *CGER* é o quociente de *Combined gross enrolment*,

iii) renda, dada pelo produto interno bruto (PIB) per capita ajustado ao custo de vida local para torná-lo comparável entre países e regiões, através da metodologia conhecida como paridade do poder de compra (PPC).

$$\text{PIB} = \frac{\log(\text{PNBpc}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)},$$

onde *PNBpc* é o produto nacional bruto per capita.

O IDH é calculado a partir de uma média simples dos índices de longevidade, educação e renda, obtendo-se um indicador síntese que pode variar entre zero (nenhum desenvolvimento humano) e um (total desenvolvimento humano).

A equação abaixo permite transformar cada uma das dimensões acima em um valor entre 0 e 1:

$$\text{Índice } x = \frac{x - \min(x)}{\max(x) - \min(x)},$$

De modo que $\min(x)$ e $\max(x)$ são, respectivamente, os valores máximo e mínimo assumidos por x .

A partir de 2010, o PNUD começou a usar as seguintes critérios para o cálculo do IDH¹²:

i) Expectativa de vida ao nascer: $EV = \frac{EV - 20}{83,2 - 20}$;

¹² Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%8Dndice_de_Desenvolvimento_Humano.

ii) Índice de Educação: $IE = \frac{\sqrt{IAME \times IAEE} - 0}{0,951 - 0}$, tal que:

- $IAME$ é o índice de anos médios de estudo e é dado por $IAME = \frac{AME - 0}{13,2 - 0}$;

- $IAEE$ é o índice de anos esperados de escolaridade, dado por $IAEE = \frac{AEE - 0}{20,6 - 0}$.

Sendo que :

AME significa anos médios de estudo;

AEE significa anos esperados de escolaridade.

iii) Índice de Renda: $IR = \frac{\ln(Renda \text{ pc}) - \ln(163)}{\ln(108.211) - \ln(163)}$.

O IDH é a médi geométrica dos três índices: $IDH = \sqrt[3]{EV \times IE \times IR}$.

6.6. Logaritmos e a intensidade luminosa

A escala logarítmica é usada também para relacionar a sensação luminosa do brilho das estrelas com a intensidade luminosa emitida por ela. Esta relação obedece à lei de Weber-Flechner.

A lei de Weber, proposta pelo fisiologista alemão Ernst Heinrich Weber (1795-1878) sobre a resposta de seres humanos para estímulos físicos, diz que, diferenças marcantes na resposta a um estímulo ocorrem para variações da intensidade do estímulo proporcionais ao próprio estímulo.

O físico e filósofo alemão, Gustav Theodor Fechner (1801-1887), baseado na lei de Weber, propôs um método de construção de escalas. Sendo i a taxa de variação da intensidade do estímulo que permite discriminação da resposta, associando x_0 o nível de resposta 0 e sejam y a resposta e x a intensidade do estímulo, tem-se:

a) $x = x_0 (1 + i)^y$;

b) $y = a \log(x) + b$, onde $a = \frac{1}{\log(1 + i)}$ e $x = \frac{1}{(1 + i)^b}$.

A grandeza denominada magnitude M de uma estrela relativa à sensação, é definida como sendo igual ao logaritmo decimal da razão entre a intensidade luminosa I_0 emitida por uma estrela tomada como padrão e a intensidade luminosa I causadora da sensação luminosa:

$$M = \log\left(\frac{I_0}{I}\right)$$

6.7. Logaritmos e a escala Richter

Além da escala de intensidade luminosa de uma estrela, uma outra que obedece à lei de Weber-Fechner que é a escala Richter, do físico estadunidense Charles Richter (1900-1985), que trata da magnitude dos terremotos.

Nessa escala, a magnitude R de um terremoto, que tem valor mínimo 1, mas não um valor máximo, é determinada pela expressão $R = \frac{2}{3}[\log(E) - 3]$, onde E é a energia liberada.

Os aparelhos que medem a magnitude de um terremoto são os sismógrafos e são considerados grandes terremotos a partir do grau 7 na Escala Richter.

A tabela 4.2 traz os efeitos causados por um terremoto, de acordo com o seu valor na Escala Richter.

Magnitude na Escala Richter	Efeitos
Menos de 3,5	Não é sentido.
3,5 a 5,4	Às vezes é sentido e raramente causa danos.
5,5 a 6,0	Pode causar pequenos danos em casas e prédios bem construídos.
6,1 a 6,9	Pode causar danos graves em áreas em torno de até 100 km do epicentro do terremoto.
7,0 a 7,9	Causa danos muito graves numa grande faixa.
8,0 ou mais	Pode causar danos muito graves em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Tabela 6.2: Efeitos de um terremoto de acordo com seu valor na Escala Richter.
 Fonte: <http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>.

6.8. Logaritmos e a régua de cálculo

O matemático inglês, Edmund Günter (1581 – 1626), um dos alunos de Henry Briggs, em Londres, ao utilizar as tábuas logarítmicas de base 10, em suas aulas percebeu que poderia automatizar a soma de logaritmos de dois valores, onde estes

seriam marcados em um pedaço de tábua e com um compasso de bicos para juntar os dois valores.

Esta criação veio a facilitar e evitar os cálculos mentais, este instrumento tornou-se conhecido por *linhas de números de Günther*. Tempos depois o matemático e clérigo inglês William Oughtred (1574 – 1660) que trabalhou para aperfeiçoar a Linha de Números de Günther, passando a denominá-la *régua de cálculo*, visando auxiliar seus alunos nos estudos que utilizam cálculos aritméticos, desencadeando suas práticas de utilização e contribuindo para a criação de projetos como das máquinas a vapor, em virtude de facilitar e aumentar a precisão dos cálculos utilizados.

O funcionamento da régua de cálculo de Oughtred ocorre da seguinte forma: eram demarcadas duas escalas logarítmicas em dois pedaços de tábua, onde cada pedaço continha uma escala, uma deslizava ao lado da outra, com suas escalas frente a frente, facilitando a operacionalização dos cálculos, evitando assim a necessidade do compasso de bicos. As régua de cálculo foram muito utilizadas até a segunda metade do século XX, mas foi desaparecendo com a invenção e popularização das calculadoras científicas.

Por exemplo, para multiplicar 2,9 por 0,3, deve efetuar os seguintes procedimentos¹³:

- 1º) Na régua será efetuado a multiplicação $2,9 \times 0,3$. Para isso, coloque o número 1 da régua móvel, alinhado com o 1 da régua fixa debaixo e marque com o cursor, como mostra a Figura 6.1.

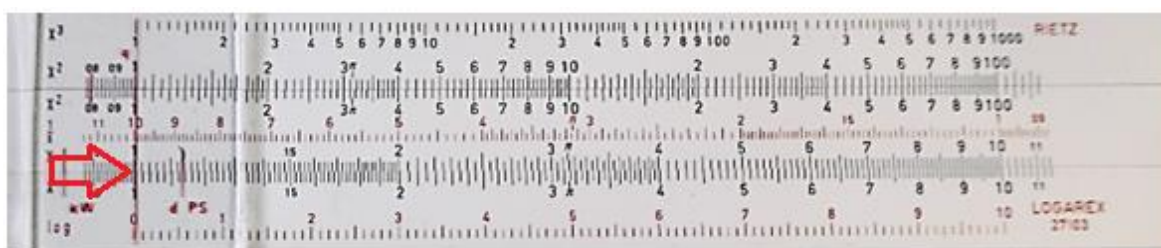


Figura 6.1: Primeiro passo.

- 2º) Deslize o cursor até o número 2,9 e alinhe com o número 1 da parte móvel, como mostra a Figura 6.2.

¹³ Fonte: <http://pt.wikihow.com/Usar-uma-R%C3%A9gua-de-C%C3%A1lculo>.



Figura 6.2: segundo passo.

3º) Deslize o cursor até o número 3 da parte móvel, como mostra a figura 6.3.

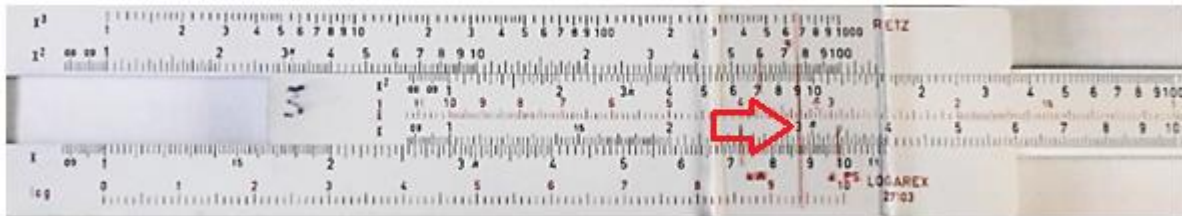


Figura 6.3: Terceiro passo.

4º) Volte a parte móvel para o número 1. Observe que o cursor está indicando 8,7, como mostra a Figura 6.4. Corrigindo a casa decimal, tem-se o resultado 0,87.

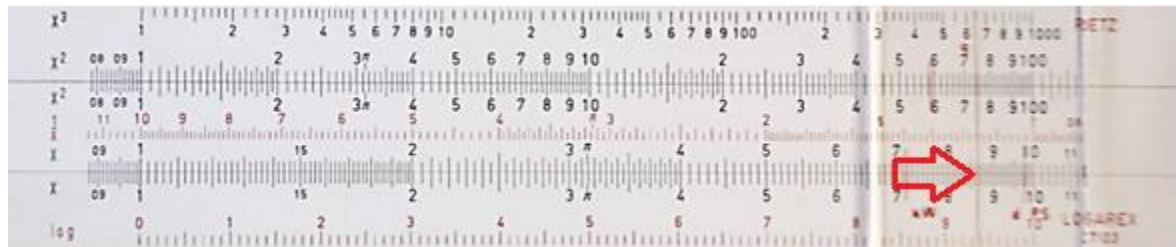


Figura 6.4: Quarto passo.

Observa-se que quando alinha o número 2,9 e depois o número 3 há uma soma dos logaritmos de 2,9 e 3, resultando 8,7. No caso da divisão entre dois números, o processo será inverso, ou seja, deverá efetuar uma subtração de logaritmos.

Há régua de cálculo de diversos tipos, em diversas formas e são usadas na aviação até os dias de hoje na aviação pois não necessitam de bateria ou energia elétrica e também não são suscetíveis a interferências.

6.9. Logaritmos e Música

A relação entre música e matemática vem desde a Antiguidade. Na Grécia Antiga, por volta do século VI A.C., há registro que os pitagóricos relacionavam intervalos musicais e razões geométricas (EVES, 2011).

Arquitas de Tarento (428 A.C. – 365 A.C.), matemático grego acreditava que a música era mais importante que a literatura na educação das crianças (ABDOUNUR,2006). A música fazia parte do *quadrivium* matemático, sendo os demais ramos a aritmética, geometria e astronomia.

Pitágoras teria esticado uma corda e a feito vibrar. Depois pressionou um ponto a $\frac{3}{4}$ da extremidade e vibrando-a, o som emitido era uma quarta acima do emitido pela corda inteira. Tocando, novamente a corda, a $\frac{2}{3}$ do comprimento original, o som era uma quinta acima e se tocasse a metade do tamanho original, o som emitido era uma oitava do original. Em sua experiência, notou também que de todos os intervalos experimentados, apenas em $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ os sons lhe era agradável. Pitágoras considerava que os números 1, 2, 3 e 4 geravam toda a perfeição.

As descobertas de Pitágoras levaram ao desenvolvimento de um sistema musical pelos pitagóricos, que foram a base da música ocidental. A denominação conhecida hoje das notas musicais é atribuída ao italiano Guido d'Arezzo (955-1050).

Começando do som da nota *fá*, após uma quinta é obtido o som da nota *dó*, que somado uma quinta torna-se a nota *sol*, e de quinta em quinta temos as demais notas *ré*, seguido de *lá*, *mi* e *si*. Assim, obtém-se a sequências de notas musicais *fá-dó-sol-ré-lá-mi-si*.

Por trás de uma sinfonia há relações matemáticas que ajudam a dar sonoridade às composições musicais e separar as notas musicas de determinadas formas promovem sons mais ou menos agradáveis. Na escala de sete sons mais conhecida: *dó, ré, mi, fá, sol, lá e si* essa separação de sons é matemática.

Entre o final do século XVII e início do século XVIII, foi desenvolvido e sistematizado um modelo, conhecido como escala temperada (ou cromática), que dividia a escala musical em doze sons, agradáveis de se ouvir, mas em vez de frações, era dividido a partir de logaritmos. As 12 notas da escala cromática ou temperada correspondem aos logaritmos de base 2: 2^0 , $2^{1/12}$, $2^{2/12}$, $2^{3/12}$, $2^{4/12}$, $2^{5/12}$, $2^{6/12}$, $2^{7/12}$, $2^{8/12}$, $2^{9/12}$, $2^{10/12}$, $2^{11/12}$. As notas seguem a sequência: *dó, dó#¹⁴, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si*.

¹⁴ O símbolo “#” é denominado sustenido e indica a elevação de um semitom na nota.

Considerando a frequência de cada nota, em relação a altura a do som emitido por uma nota, medida em intervalos musicais de oitavas acima de uma certa nota musical tomada como referência, é igual ao logaritmo de base 2 de sua frequência, ou seja, $a = \log_2 f$.

Na tabela 6.3 estão os nomes das notas musicais da escala temperada e suas respectivas frequências, em Hertz (Hz).

Nota	Escala temperada	Frequência (Hz)
<i>dó</i>	$2^0 = 1$	262
<i>dó#</i>	$2^{\frac{1}{12}}$	277
<i>ré</i>	$2^{\frac{2}{12}}$	294
<i>ré#</i>	$2^{\frac{3}{12}}$	311
<i>mi</i>	$2^{\frac{4}{12}}$	330
<i>fá</i>	$2^{\frac{5}{12}}$	349
<i>fá#</i>	$2^{\frac{6}{12}}$	370
<i>sol</i>	$2^{\frac{7}{12}}$	392
<i>sol#</i>	$2^{\frac{8}{12}}$	415
<i>lá</i>	$2^{\frac{9}{12}}$	440
<i>lá#</i>	$2^{\frac{10}{12}}$	466
<i>si</i>	$2^{\frac{11}{12}}$	494
<i>dó (escala acima)</i>	2	523

Tabela 6.3: Escala Temperada.

Fonte: https://pt.wikiversity.org/wiki/Teoria_musical.

Assim, é possível dizer que as 12 notas da escala cromática ou temperada correspondem aos logaritmos de base 2: $2^0, 2^{1/12}, 2^{2/12}, \dots$. Por exemplo, calculando a

razão entre as notas *mi* e *dó* obtem-se: $\frac{330}{262} \approx \frac{5}{4} \approx 2^{\frac{4}{12}}$.

7. Problemas com transposição para linguagem matemática

Neste trabalho é proposto a solução de situações-problema através de um esquema de resolução que esmiúça o enunciado do problema, organizando a questão implícita ou explícita, os dados relevantes, a transposição para a linguagem matemática e desenvolvimento dos cálculos até a resposta esperada.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2010, p.46):

Na exploração de cada centro de interesse, uma estratégia muito fecunda é a via da problematização, da formulação e do equacionamento de problemas, da tradução de perguntas formuladas em diferentes contextos em equações a serem resolvidas.

Assim, ao ler e analisar o enunciado da questão, o aluno deve compreender a situação proposta, ter claro qual a sua finalidade, o caminho a ser seguido é “os fins indicam os meios” escreveu Polya (1995, p.141).

Tendo claro a finalidade, pode planejar como resolver a questão, refletindo sobre o que sabe sobre o contexto da situação proposta, da teoria envolvida e também, dos conceitos que podem ser buscados.

7.1. Transposição para a linguagem matemática

Dado um problema envolvendo logaritmos, o aluno pode nem começar a tentar resolvê-la, dizendo que não entendeu. O “não entendeu” pode indicar que não sabe como organizar suas ideias, pode indicar que não sabe identificar o que responder, pode indicar que não identificou os dados do exercício em questão, etc.

Resolver mecanicamente inúmeros exercícios não garante uma aprendizagem significativa, se não entender o contexto das questões. Ao ler e entender um problema, o aluno deve saber qual o objetivo da questão, analisar os dados disponíveis em seu enunciado e articulá-las com a teoria que ele conhece.

7.1.1. Etapas da transposição

Para compreender e resolver um problema, trilhando por esse caminho, este trabalho propõe uma sequência de 7 indagações a serem respondidas e seguidas, ao ler o problema de logaritmo. Desse modo, o aluno terá estratégias bem definidas para a resolução do problema.

Primeira Indagação: *Qual a pergunta?*

Ao responder “qual a pergunta?”, o aluno identifica a pergunta a ser respondida, grifando no enunciado e assim ter em foco o objetivo da questão, pois antes de começar deve-se ter claro onde se quer chegar e assim evitar que especulações tirem o foco do objetivo a ser alcançado.

Na situação-problema abaixo, a pergunta da questão é grifada.

A aspirina, indicado para aliviar dores em geral, tem como princípio ativo o ácido acetilsalicílico (AAS) cuja meia-vida é entre 15 e 20 minutos¹⁵. Suponha que, em um certo indivíduo, essa meia-vida é de 18 minutos, ou seja, após esse tempo, a concentração de AAS reduz-se à metade. Quantos minutos depois de ingerido, restaram no indivíduo, 10% desse remédio?

Tem-se:

<i>Qual a pergunta? (Objetivo da questão)</i>	<i>da</i>	<i>Quantos minutos, depois de ingerido, restaram 10% do remédio no corpo?</i>
---	-----------	--

Quadro 7.1: Qual a pergunta?

A finalidade do problema é determinar depois de quanto tempo, em minutos, haviam 10% de AAS no organismo, dadas as condições da questão.

Segunda Indagação - *O que significa matematicamente?*

A compreensão da questão é muito importante, evita que especulações tirem o foco do objetivo do problema, ou seja, responder corretamente a pergunta feita.

Assim, em continuidade ao mesmo problema da Primeira Indagação, em que foi identificado e grifada a pergunta da situação proposta, deve-se transpô-la para a linguagem matemática, isto é, em notação aritmética-algébrica, não perdendo o foco do problema.

Tem-se para a questão: *Quantos minutos, depois de ingerido, restaram 10% do remédio no corpo?*

<i>Interpretação matemática</i>	<i>$t = ?$ para $M(t) = 10\%$ de $M_0 = 0,1.M_0 = 10^{-1}.M_0$</i>
---------------------------------	--

Quadro 7.2: O que significa matematicamente?

Em que:

¹⁵ Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81cido_acetilsalic%C3%ADlico.

t é a representação do tempo, em minutos;

$M(t)$ é o valor da massa no instante t ;

M_0 é o valor da massa no instante inicial.

No caso, junto a indagação, há uma condicionante para a situação, que também foi representada em notação aritmética-algébrica.

Terceira Indagação - *O que temos?*

Após compreender o problema por inteiro, o próximo passo é analisar os seus detalhes (Polya, 1995). Assim, uma vez identificada a questão do problema e traduzida para a linguagem matemática, o próximo passo é saber quais dados relevantes para a sua solução estão presentes no enunciado.

Relendo a questão, identifica-se, grifando no enunciado, como foi feito no quadro 7.3, as pistas que indiquem o caminho para a solução da questão, que pode ser a fórmula matemática ou informações que levem a dedução da fórmula para solucionar a questão proposta.

A aspirina, indicado para aliviar dores em geral, tem como princípio ativo o ácido acetilsalicílico (AAS) cuja meia-vida é entre 15 e 20 minutos. Suponha que, em um certo indivíduo, essa meia-vida é de 18 minutos, ou seja, após esse tempo, a concentração de AAS reduz-se à metade. Quantos minutos depois de ingerido, restaram no indivíduo, 10% desse remédio?

O que temos?	O AAS tem meia-vida de aproximadamente 18 minutos, isto é, 50% do remédio é eliminado pelo corpo após 18 minutos.
--------------	--

Quadro 7.3: O que temos?

Quarta Indagação – *Qual a representação matemática?*

Nesse passo, deve-se passar para a simbologia matemática as pistas identificadas e grifadas na Terceira Indagação, que levem à solução da questão. Ao fazer essa transposição, tem-se a oportunidade de analisar os principais detalhes da questão, que pode levar diretamente a uma fórmula ou mostrar um caminho para obtê-la, como na situação-problema proposta na Primeira Indagação.

No quadro 7.4, é acrescido a transposição para a linguagem matemática do dado relevante, identificado no enunciado do problema.

<i>Interpretação matemática</i>	$0 \rightarrow M_0$ $18 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot M_0$ $36 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{36}{18}} \cdot M_0$ $54 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{54}{18}} \cdot M_0$
---------------------------------	---

Quadro 7.4: Interpretação matemática.

Quinta Indagação – Qual fórmula usar?

Se não há uma fórmula no enunciado ou conhecida pelo aluno, desenvolve-se a expressão matemática que levará a solução da questão a partir da análise dos dados do problema. No caso do exemplo, a partir da interpretação matemática é possível deduzir a fórmula a ser utilizada.

<i>Interpretação matemática</i>	$0 \rightarrow M_0$ $18 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot M_0$ $36 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{36}{18}} \cdot M_0$ $54 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{54}{18}} \cdot M_0$
<i>Representação Algébrica</i>	$t \text{ min} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{18}} \cdot M_0$ $M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{18}} \cdot M_0$

Quadro 7.5: Representação algébrica.

Sexta Indagação – Qual a relação entre a pergunta e a fórmula?

Identificados a questão da ser respondida e as pistas a serem usadas, relaciona-se ambos para solucionar a questão e efetuar os cálculos necessários para obtenção da resposta.

Relação entre a pergunta e a fórmula	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{18}} \cdot M_0 = 10^{-1} \cdot M_0$ $\left(2^{-1}\right)^{\frac{t}{18}} = 10^{-1}$ $\log\left[2^{-\frac{t}{18}}\right] = \log(10^{-1})$ $-\frac{t}{18} \log 2 = -\log(10)$ $t = \frac{18 \cdot \log(10)}{\log(2)} \approx \frac{18}{0,3} = 60$ $t \approx 60 \text{ min}$
--------------------------------------	---

Quadro 7.6: Relação entre a pergunta e a fórmula.

Sétima Indagação – A resposta está correta?

Feito os procedimentos anteriores, obtém-se a resposta do problema e pode-se verificar sua validação, no caso, se após 60 minutos restaram 10% de M_0 , ou seja, se $M(60) \approx 0,1 \cdot M_0$.

Verificação da Resposta	$M(60) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{18}} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{3}} \approx 0,1 \cdot M_0$
Resposta	<p>Portanto, 60 minutos, depois de ingerido, restaram aproximadamente, 10% do remédio no corpo.</p>

Quadro 7.7: A resposta está correta?

Assim, a apresentação e solução do problema seria da seguinte forma:

A aspirina, indicado para aliviar dores em geral, tem como princípio ativo o ácido acetilsalicílico (AAS) cuja meia-vida é entre 15 e 20 minutos. Suponha que, em um certo indivíduo, essa meia-vida é de 18 minutos, ou seja, após esse tempo, a concentração de AAS reduz-se à metade. Quantos minutos depois de ingerido, restaram no indivíduo, 10% desse remédio?

Solução

$$t = ? \text{ para } M(t) = 10\% \text{ de } M_0 = 0,1 \cdot M_0 = 10^{-1} \cdot M_0$$

$$0 \rightarrow M_0$$

$$18 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot M_0$$

$$36 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{36}{18}} \cdot M_0$$

$$54 \text{ min} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot M_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{54}{18}} \cdot M_0$$

$$t \text{ min} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{18}} \cdot M_0$$

$$M(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{18}} \cdot M_0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{18}} \cdot M_0 = 10^{-1} \cdot M_0$$

$$\left(2^{-1}\right)^{\frac{t}{18}} = 10^{-1}$$

$$\log\left[2^{-\frac{t}{18}}\right] = \log(10^{-1})$$

$$-\frac{t}{18} \log 2 = -\log(10)$$

$$t = \frac{18 \cdot \log(10)}{\log(2)} \approx \frac{18}{0,3} = 60$$

$$t \approx 60 \text{ min}$$

$$\text{Verificação: } M(60) = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{18}} = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10}{3}} \approx 0,1 \cdot M_0$$

Resposta: Portanto, 60 minutos, depois de ingerido, restaram aproximadamente, 10% do remédio no corpo.

O esquema é aplicado, como pode ser visto no Apêndice B, na solução de diversas situações-problema envolvendo logaritmos.

As atividades da Seção 7.2 permitem explorar, a partir do cálculo de um expoente desconhecido, a necessidade de instrumento eficiente na sua solução, no caso o logaritmo. Mas para que o aluno perceba essa necessidade, é preciso que faça uma leitura correta do enunciado, identificando o objetivo e as informações relevantes que possibilitará a solução da questão.

7.2. Atividades

A seguir, há nove situações-problemas propostas para serem resolvidas através do protocolo de resolução pela transposição para linguagem matemática. As soluções são encontradas no Apêndice B.

- 1) *Em Química, define-se o pH de uma solução como o logaritmo decimal (base 10) do inverso da respectiva concentração de H_3O^+ (íon hidroxônio). O cérebro humano contém um líquido, denominado cefalorraquidiano (LCR)¹⁶, cuja concentração de $4,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol} / \ell$ (em média). Qual será o pH desse líquido?*
- 2) *Uma das diversas aplicações dos logaritmos é a escala de pH (potencial hidrogeniônico), que vai de 0 a 14 e serve para medir se uma solução aquosa é ácido, neutro ou básico. Nessa escala, se o nível for entre 0 e 6, é ácido; entre 8 e 14, é a solução é básica e se for 7, é neutra. De posse dessas informações, determine o pH de uma substância com 0,0000001 íons de H^+ .*
- 3) *(UFRR, APUD DANTE, 2013, p.202) Em pesquisa recente realizada por cientistas brasileiros de uma universidade federal comprovaram que a ariranha e o mico-leão-dourado são espécies em extinção no Brasil. Com o objetivo de preservar essas espécies, foram reunidos numa reserva florestal 120 ariranhas e 80 micos-leões-dourados. Constatou-se, após alguns anos, que o crescimento da população de ariranhas foi 5% ao ano e que a população de micos cresceu à taxa de 10% ao ano. Em quanto tempo, aproximadamente, após a reunião desses animais na reserva, o número de micos deve chegar ao dobro do número de ariranhas?
(Use $\log 3 = 0,4771$ e $\log 1,047 = 0,0199$)*
- 4) *(UFPE, APUD DANTE, 2013, p.202) Um boato se espalha da seguinte maneira: no primeiro dia, apenas uma pessoa tem conhecimento dele; no segundo, ela conta a outras três pessoas e, a cada dia que passa, todas as pessoas que sabem do boato contam-no para três novas pessoas. Assim, a sequência formada pelo número de pessoas que sabem do boato, em termos de dias que*

¹⁶ Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADquido_cefalorraquidiano.

passam , é dada por 1, 4, 16, 64 Em uma cidade com 1,5 milhão de habitantes, quantos dias serão necessários para que todas as pessoas sejam informadas do boato? (Aproxime sua resposta para o menor inteiro maior ou igual ao valor obtido. Dados: use a aproximação $\log_2(1,5 \cdot 10^6) \approx 20,52$.

- 5) (ENEM-2012) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

- A) 27.
B) 36.
C) 50.
D) 54.
E) 100.
- 6) (ENEM-2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7,3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. *Historic Earthquakes*.
Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010(adaptado).
U.S. GEOLOGICAL SURVEY. **USGS Earthquake Magnitude Policy**.
Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010(adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

- A) $10^{-5,10}$
- B) $10^{-0,73}$
- C) $10^{12,00}$
- D) $10^{21,65}$
- E) $10^{27,00}$

- 7) (SARESP-2009) Por estar no centro de uma placa tectônica, o Brasil está protegido de grandes abalos sísmicos, porém, no Ceará estão ocorrendo pequenos terremotos devido à acomodações localizadas nesta placa. Um destes abalos atingiu 4 pontos na escala Richter, cuja medida de intensidade é dada pela fórmula $I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$ em que E é a energia liberada pelo terremoto, em kWh

e E_0 é uma constante igual a 10^{-3} kWh. Então, a energia liberada por este abalo foi de:

- A) 10^9 kWh.
 - B) 10^6 kWh.
 - C) 10^3 kWh.
 - D) 10^2 kWh.
- 8) Segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), até 2009, o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) era determinado pela média aritmética dos índices da educação, expectativa de vida ao nascer e PIB (produto interno bruto) em dólares. O índice do PIB era dado pela equação abaixo, onde PIB per capita era o valor da renda per capita do país analisado, em dólar; 40000 dólares era o valor máximo de renda per capita no mundo.

$$\text{Índice do PIB} = \frac{\log(\text{PIB per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$$

De posse dessas informações, calcule qual era o PIB per capita de um país que tenha o índice do PIB igual a 0,80.

- 9) *A caderneta de poupança de Banco Fictício rendeu nos últimos 5 meses, em média, juros de 0,694% ao mês. Se a taxa de juros continuar com essa média, depois de quanto tempo um capital inicial C_0 irá triplicar?*

7.3. Pesquisa junto aos professores da unidade escolar

A escola em que a autora trabalha teve no ano letivo de 2015, 19 turmas, sendo 7 do Ensino Fundamental, anos finais e 12 turmas do Ensino Médio. Foi solicitado pela autora a quatro professores de matemática que atuam no ensino médio dessem seu parecer sobre o método para solução de problemas envolvendo logaritmos pela transposição para a linguagem matemática, respondendo às 5 questões:

1. *Em relação ao esquema de solução, excluiria algum item? Qual(is)? Justifique.*
2. *Em relação ao esquema de solução, incluiria algum item? Qual(is)? Justifique.*
3. *Modificaria algum item no esquema de solução? Qual(is)? Justifique.*
4. *Aplicaria o esquema de solução em suas aulas?*
5. *Em sua opinião, o esquema de solução pode auxiliar os alunos resolverem problemas envolvendo logaritmos? Comente sua resposta.*

As respostas dos professores se encontram no Apêndice C.

No geral, todos os professores que analisaram o método de solução de problemas foram unânimes em considerarem o esquema eficiente para solução de problemas e que utilizariam em suas aulas.

Um dos professores sugeriu que acrescentasse a verificação da resposta, pois quando o protocolo de solução de problemas pela transposição lhe foi mostrado de fato, não havia a Sétima Indagação. Mesmo que o esquema direcione para a resposta correta, deve-se considerar o que disse Polya (1995, p.10) “Apesar de tudo, é sempre

possível haver erros, especialmente se o argumento for longo e trabalhoso. Daí a conveniência de verificações”.

Assim, foi acrescentado mais uma indagação, para a verificação da resposta obtida, reforçando o esquema para a solução de problemas envolvendo logaritmos.

Outra resposta que chamou a atenção, foi da professora que usou o esquema para solução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.

8. Considerações Finais

O logaritmo é um conteúdo matemático que, embora tenha sido criado para efetuar cálculos, há muito tempo ultrapassou esses limites, pois é ferramenta fundamental em várias aplicações. Nesse trabalho foram dados vários subsídios para auxiliar o professor. Diversificar as áreas de aplicação pode ser um instrumento para que os alunos percebam que o logaritmo não é apenas mais um objeto matemático, mas que está mais presente em sua vida do que se pode imaginar.

O conteúdo de logaritmos é previsto, no currículo da Secretaria Estadual da Educação, para o segundo semestre, na situação de aprendizagem 4 do volume 2.

Na experiência profissional da autora, para muitos estudantes, resolver problemas envolvendo logaritmo é complicado pois analisam superficialmente o enunciado, não identificam claramente o objetivo da questão, os dados relevantes, não formulam estratégias de solução e não relacionam a teoria com a questão proposta.

Trabalhar com situações-problemas diversificadas é uma forma de chamar a atenção dos alunos para os logaritmos e assim compreenderam o conteúdo estudado. Tendo a atenção dos alunos para o logaritmo, é preciso que eles percebam que, é possível resolver os problemas propostos, lendo e analisando o enunciado, identificando o objetivo da questão e as pistas implícitas e/ou explícitas inseridas na questão.

Assim, esse trabalho objetiva contribuir para o trabalho de outros professores, como fonte de pesquisa ou que sejam utilizados em sala de aula o material que foi produzido, como foi feito ou com as alterações que cada docente julgar pertinente.

Quatro professores de matemática da escola onde a autora trabalha analisaram o método de solução de problemas. Foram unânimes em dizerem que consideram o esquema eficiente para solução de problemas e que utilizaram ou utilizariam em suas aulas. O resultado pelos professores que aplicaram o método foi satisfatório e ainda foi sugerido acrescentar mais um item, para a verificação da resposta, que é a sétima indagação da proposta de solução de problemas pela transposição para a linguagem matemática.

Uma das professoras utilizou esse esquema para solucionar situações-problemas envolvendo progressão geométrica e avaliou positivamente o resultado. A autora também, além das questões sobre logaritmos, aplicou para problemas sobre trigonometria, prismas e cilindros. Essas experiências sinalizaram que o método é promissor e vale a pena expandir para outros conteúdos matemáticos.

Quando se trata de resolver situações-problemas, pela experiência profissional da autora, os alunos tem grande dificuldade em resolver problemas envolvendo logaritmos pois deve articular a teoria com a questão proposta. A partir dessas considerações foi proposto um protocolo baseado em Polya (1995), em que os alunos devem ler com atenção, identificar a proposta da questão, retirar ou deduzir as informações que ajudarão a obter a solução do problema e efetuar os cálculos para determinar a solução de uma questão.

Desse modo, para trabalhos futuros, percebe-se que o método de solução de problemas envolvendo logaritmos pode ser estendido para outros conteúdos e ser tema de trabalhos futuros.

Referências bibliográficas:

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras Editora, 2006.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, 1999.

BRASIL. MEC. SEMT. PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos PCN's. Brasília, 2002. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>> (último acesso em 28 de julho de 2015 às 17:00).

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**, volume 1. São Paulo: Editora Ática, 2013.

DA SILVA, P. L. D. ; Spolaor, S. L. G. . Um irracional: o número de Euler. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, p. 89-94. Disponível em <<http://cascavel.ufsm.br/revistas/ojs-2.2.2/index.php/cienciaenatura/article/viewFile/14244/pdf>> (último acesso em 18/12/2015 às 09:32)

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**, Volume 1. São Paulo: LTC, 2008.

_____. **Um Curso de Cálculo**, Volume 4. São Paulo: LTC, 1999.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**, volume 2. São Paulo: Atual Editora, 2004.

LIMA, Elon. Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

_____. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MAOR, E. e: **História de um Número**. Lisboa: Gradiva, 2005.

MORGADO, A. et al. **Progressões e Matemática Financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROSSI, P. R. da S. **Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem significativa através de uma sequência didática**, 2010. 219f. Dissertação (Mestrado Profissional Ensino de Ciências Exatas) — Centro de Ciências Exatas e de Tecnologias, UFSCar, São Carlos, 2010. Disponível em:

<http://www.btdtd.ufscar.br/htdocs/tedeSimplificado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=3329> (Último acesso em 29/12/2015 às 22:42)

SÃO PAULO (Estado). **Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio – 1ª série**, volume 2. São Paulo, 2014.

_____. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo, 2010.

_____. **Relatório Pedagógico SARESP 2014: Matemática**. Fundação Vunesp. Fundação para o Desenvolvimento da Educação – FDE. São Paulo, 2015.

SANTOS, L. M. N. **Pobreza como privação de liberdade: Um estudo de caso na favela do Vidigal no Rio de Janeiro**, 2007. 191f. Dissertação (Mestrado em Economia) – Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2007. Disponível em <http://www.cpgeconomia.uff.br//novosite/arquivos/tese/2007-larissa_martins.pdf> (Último acesso em 14/10/2014 às 21:48).

Tavoni, R. **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e Exponenciais**, 2013. 70f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2013. Disponível em <http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92412/tavoni_r_me_rcla.pdf?sequence=1> (último acesso em 04/07/2015 às 23:47).

VAN DE WALLEN, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Apêndice A – O valor do número e

1. Definição do número e

Neste anexo, será definido o número e, ou número de Euler como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

e também, demonstrado que é um número irracional.

Chamando $T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, tem-se pelo binômio de Newton:

$$\begin{aligned} T_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{n!(n-n)!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n}{n} - \frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{n}{n} - \frac{n-2}{n}\right) \left(\frac{n}{n} - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

Assim, $T_n > 2$ e também, considerando a sequência

$(T_n) = \left(1, 1, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!}, \dots, \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!}\right)$, é óbvio que a

sequência (T_n) é crescente, pois:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \frac{1}{3!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{n!} + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Como $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)!} > 0$, e se

$$n < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \Leftrightarrow -\frac{k}{n} < -\frac{k}{n+1}, \text{ para } \forall k > 0.$$

$$\text{Mas } -\frac{k}{n} < -\frac{k}{n+1} \Leftrightarrow 1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}, \text{ para } \forall k > 0.$$

Logo, se $k = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, tem-se:

$$T_{n+1} > 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{n!}$$

$$> 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} > T_n.$$

Portanto $T_{n+1} > T_n$, ou seja, T_n é crescente.

Note que para $n > 1$:

$$0 < \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1; \quad 0 < 1 - \frac{2}{n} < 1; \quad \dots; \quad 0 < 1 - \frac{n-1}{n} < 1$$

$$\text{Então } T_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Chamando $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$, tem-se para qualquer n , $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} > 1$ e se $n \geq 3$:

$$n! = 1.2.3 \dots n > \underbrace{1.2.2 \dots 2}_n = 2^{n-1}, \text{ logo } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Sendo $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k} + \dots$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots$ é

uma progressão geométrica (PG) infinita de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \frac{1}{2}$, logo

pode ser aplicado a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita $s = \frac{a_1}{1-q}$.

$$\text{Assim } S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Logo $1 < S_n < 3$, ou seja, $T_n < 3$.

Desse modo, $2 < T_n < 3$, logo existe $T \in \mathbb{R}$, com $2 \leq T \leq 3$ tal que T_n se aproxima de T quando n cresce. O valor de T é aproximado na tabela a seguir:

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	T_n
1	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1$	2
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$	$\approx 2,5937424$
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$	$\approx 2,7048138$
1.000	$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000}$	$\approx 2,7169239$
10.000	$\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000}$	$\approx 2,7181459$
100.000	$\left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000}$	$\approx 2,7182682$
1.000.000	$\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^{1000000}$	$\approx 2,7182804$
10.000.000	$\left(1 + \frac{1}{10000000}\right)^{10000000}$	$\approx 2,7182816$
100.000.000	$\left(1 + \frac{1}{100000000}\right)^{100000000}$	$\approx 2,7182818$
1.000.000.000	$\left(1 + \frac{1}{1000000000}\right)^{1000000000}$	$\approx 2,7182818$

Tabela 1: Valor aproximado de T .
Fonte: Adaptado de DA SILVA (2014).

Pela Tabela 1, pode-se concluir que 2,7182818 é um valor aproximado de T .
Observe o resultado da aproximação da soma S :

n	$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$	S_n
0	$\frac{1}{0!}$	1
1	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}$	2
2	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$	2,5
3	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}$	$\approx 2,6666667$
4	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$	$\approx 2,7083333$
5	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$	$\approx 2,7166667$
6	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$	$\approx 2,7180556$
7	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$	$\approx 2,7182539$
8	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}$	$\approx 2,7182787$
9	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}$	$\approx 2,71828152$
10	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$	$\approx 2,7182818$
11	$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!}$	$\approx 2,7182818$

Tabela 2: Valor aproximado de S.
 Fonte: Adaptado de DA SILVA (2014).

Pela Tabela 2 pode-se deduzir que o valor aproximado de S é 2,718281828.

A seguir será mostrado que $T = S$, isto é, $T \geq S$ ou $T \leq S$.

De fato, como $T_n < S_n < S$, logo $T \leq S$.

Para mostrar que $T \geq S$, fixa-se m tal que $m < n$ e seja

$$T_{m,n} = 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{m!}.$$

Como $m < n$ então todas as parcelas são positivas, logo $T_{m,n} \leq T_n$ e quanto maior o valor de n , $T_{m,n}$ se aproxima de S_m e os termos $1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$, ..., $1 - \frac{m-1}{n}$ ficam próximos de 1, logo:

$$S_m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!} \leq 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-2}{n}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!} = T_n$$

Mas $T_{m,n} < T_n \leq T$, tem-se $S_m \leq T$, para qualquer m . logo $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq T$ e

portanto $T = S$.

Assim, definindo $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ tem, também, que $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. De acordo com

as tabelas 1 e 2 pode deduzir que $2 < e < 3$.

De fato, $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots > 2$. Como foi visto, $n! > 2^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$,

logo $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$.

Como $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ e $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right)$ é uma PG infinita então:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Logo $e \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{35}{12} < 3$.

Portanto $2 < e < 3$.

2. A irracionalidade do número e

A prova de que o número de Euler é irracional será por absurdo, isto é, suponha que e é um número racional. Logo, existem números naturais p e q tal que $e = \frac{p}{q}$,

$\text{mdc}(p,q) = 1$. Como $2 < e < 3$, logo $e \notin \mathbb{N}$ então $q \neq 1$ ou seja $q \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$

e ainda $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$, então

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Multiplicando o primeiro e segundo membro da equação por $q!$, tem-se:

$$\frac{p}{q} \cdot q! = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right) \cdot q!$$

Então:

$$\frac{p}{q} \cdot q \cdot (q-1)! = 1 \cdot q! + 1 \cdot q! + \frac{1}{2!} \cdot q! + \frac{1}{3!} \cdot q! + \dots + \frac{1}{(q-1)!} \cdot q! + \frac{1}{q!} \cdot q! + \frac{1}{(q+1)!} \cdot q! + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q! + \dots$$

$$p \cdot (q-1)! = q! + q! + \frac{1}{2!} \cdot 1 \cdot 2 \dots q + \frac{1}{3!} \cdot 1 \cdot 2 \dots q + \dots + q + 1 + \frac{1}{(q+1)} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q! + \dots$$

$$p \cdot (q-1)! = q! + q! + 3 \cdot 4 \dots q + 4 \cdot 5 \dots q + \dots + q + 1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q! + \dots$$

$$p \cdot (q-1)! - (q! + q! + 3 \cdot 4 \dots q + 4 \cdot 5 \dots q + \dots + q + 1) = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q! + \dots \quad (1)$$

Como $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \geq 2$, logo $p \cdot (q-1)! - (q! + q! + 3 \cdot 4 \dots q + 4 \cdot 5 \dots q + \dots + q + 1) \in \mathbb{Z}$ e

$$\frac{1}{(q+1)} \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(q+1)(q+2)} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$$

...

$$\frac{1}{n!} \cdot q! = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (q-1) \cdot q}{1 \cdot 2 \dots (q-1) \cdot q \cdot (q+1) \dots (q+(n-q))} = \frac{1}{(q+1) \dots (q+(n-q))} \leq \frac{1}{3^{n-q}}$$

Logo,

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot q! + \dots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-q}} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

De (1) segue que:

$$p \cdot (q-1)! - (q! + q! + 3 \cdot 4 \dots q + 4 \cdot 5 \dots q + \dots + q+1) \leq \frac{1}{2}.$$

Absurdo, pois não há número inteiro entre 0 e $\frac{1}{2}$, logo é um absurdo supor que e é racional. Portanto, e é um número irracional.

Apêndice B – Situações-problema propostas

A Questão 1 trata de determinar o potencial hidrogeniônico de uma substância química, com a fórmula matemática presente no enunciado, cabendo ao aluno, reconhecê-la em sua leitura, grifando a pergunta a ser respondida e as informações relevantes. Em seguida, traduzir para a linguagem matemática e aplicar as propriedades logarítmicas adequadas para resolver a situação.

- 1) *Em Química, define-se o pH de uma solução como o logaritmo decimal (base 10) do inverso da respectiva concentração de H_3O^+ (íon hidroxônio). O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de $4,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol} / \ell$ (em média). Qual será o pH desse líquido?*

Transposição para linguagem matemática

<i>Qual a pergunta?</i>	Qual será o pH desse líquido?
<i>Interpretação matemática</i>	$pH = ?$
<i>O que temos?</i>	Que o “pH de uma solução como o logaritmo decimal (base 10) do inverso da respectiva concentração de H_3O^+ (íon hidroxônio). O cérebro humano contém um líquido cuja concentração de $4,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol} / \ell$ ”
<i>Interpretação matemática</i>	$pH = \log\left(\frac{1}{H_3O^+}\right)$ e $H_3O^+ = 4,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol} / \ell$
<i>Representação Algébrica</i>	$pH = \log\left(\frac{1}{H_3O^+}\right) = \log(1) - \log(H_3O^+) = 0 - \log(H_3O^+) = -\log(H_3O^+)$
<i>Relação entre a pergunta e a representação algébrica</i>	$pH = -\log(4,8 \cdot 10^{-8}) = -[\log(4,8) + \log(10^{-8})] = -[0,681241 - 8] = 7,31859$ $\therefore pH \approx 7,3$
<i>Verificação da resposta</i>	$7,3 = \log\left(\frac{1}{H_3O^+}\right) = -\log(H_3O^+) \Leftrightarrow \log(H_3O^+) = -7,3 \Leftrightarrow H_3O^+ = 10^{-7,3} \approx 5 \cdot 10^{-8}$
<i>Resposta</i>	Portanto, o pH procurado é 7,3.

Quadro 1: Questão 1.

As soluções não seriam apresentadas dessa forma, mas esse é o esquema ser seguido para obter a solução do problema. Assim, a solução da Questão 1 seria apresentada do seguinte modo:

Solução

$$pH = ?; \quad pH = \log\left(\frac{1}{H_3O^+}\right) \text{ e } H_3O^+ = 4,8 \cdot 10^{-8} \text{ mol / l}$$

$$pH = \log\left(\frac{1}{H_3O^+}\right) = \log(1) - \log(H_3O^+) = 0 - \log(H_3O^+) = -\log(H_3O^+)$$

$$\text{Logo, } pH = -\log(H_3O^+)$$

$$pH = -\log(4,8 \cdot 10^{-8}) = -[\log(4,8) + \log(10^{-8})] \approx -[0,681241 - 8] = 7,31859 \approx 7,3$$

Verificação:

$$7,3 = \log\left(\frac{1}{H_3O^+}\right) = -\log(H_3O^+) \Leftrightarrow \log(H_3O^+) = -7,3 \Leftrightarrow H_3O^+ = 10^{-7,3} \approx 5 \cdot 10^{-8}$$

Resposta: O pH procurado é 7,3.

A Questão 2 trata, como na atividade 1, do pH de uma substância aquosa, mas desta vez, a fórmula não está no enunciado, pois o aluno pode buscá-la, considerando que foi visto anteriormente.

- 2) *Uma das diversas aplicações dos logaritmos é a escala de pH (potencial hidrogeniônico), que vai de 0 a 14 e serve para medir se uma solução aquosa é ácido, neutro ou básico. Nessa escala, se o nível for entre 0 e 6, é ácido; entre 8 e 14, é a solução é básica e se for 7, é neutra. De posse dessas informações, determine o pH de uma substância com 0,0000001 íons de H⁺.*

Transposição para linguagem matemática

Qual a pergunta? (Objetivo da questão)	[...] determine o pH de uma substância com 0,0000001 íons de H^+ .
O que significa matematicamente?	$pH = ?$ se $pH = 0,0000001 = 10^{-7}$
O que temos?	[...]pH (potencial hidrogeniônico), vai de 0 a 14. [...]se o nível for entre 0 e 6, é ácido; entre 8 e 14, é a solução é básica e se for 7, é neutra e $pH = -\log[H^+]$ (pela atividade 1).
Representação matemática	$pH = -\log[H^+]$
Representação Algébrica	$pH = -\log[H^+]$
Relação entre a pergunta e a fórmula	$pH = -\log[10^{-7}] = -[-7] = 7$
Verificação da resposta	$7 = -\log[H^+] \Leftrightarrow -7 = \log[H^+] \Leftrightarrow H^+ = 10^{-7}$
Resposta	A substância tem pH igual a 7, logo é neutra.

Quadro 2: Questão 2.

Assim, a apresentação da solução do problema seria da seguinte forma:

Solução

$$pH = ? \text{ se } pH = 0,0000001 = 10^{-7}$$

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log[10^{-7}] = -[-7] = 7$$

$$\text{Verificação: } 7 = -\log[H^+] \Leftrightarrow -7 = \log[H^+] \Leftrightarrow H^+ = 10^{-7}$$

Resposta: A substância tem pH igual a 7, logo é neutra.

A questão 3 trata do crescimento exponencial das populações de ariranhas e micos-leões-dourados num determinado local, com percentuais distintos.

- 3) (UFRR) Em pesquisa recente realizada por cientistas brasileiros de uma universidade federal comprovaram que a ariranha e o mico-leão-dourado são espécies em extinção no Brasil. Com o objetivo de preservar essas espécies, foram reunidos numa reserva florestal 120 ariranhas e 80 micos-leões-dourados. Constatou-se, após alguns anos, que o crescimento da população

de ariranhas foi 5% ao ano e que a população de micos cresceu à taxa de 10% ao ano. Em quanto tempo, aproximadamente, após a reunião desses animais na reserva, o número de micos deve chegar ao dobro do número de ariranhas? (Use $\log 3 = 0,4771$ e $\log 1,047 = 0,0199$)

- A) 25 anos
- B) 20 anos
- C) 30 anos
- D) 15 anos
- E) 10 anos

Transposição para linguagem matemática

Qual a pergunta?	<i>Em quanto tempo, aproximadamente, após a reunião desses animais na reserva, o número de micos deve chegar ao dobro do número de ariranhas?</i>	
O que significa matematicamente?	$t = ?$ para $M(t) = 2A(t)$	
O que temos?	<p>(...) foram reunidos numa reserva florestal 120 ariranhas e 80 micos-leões-dourados.</p> <p>(...) o crescimento da população de ariranhas foi 5% ao ano e que a população de micos cresceu à taxa de 10% ao ano.</p>	
Representação matemática	<p>Ariranhas: $A(t)$ $t = 0 \Rightarrow A(0) = 120$ $t = 1 \Rightarrow A(1) = 120 + 5\% \text{ de } 120 = 120 + 0,05 \cdot 120 = 120 \cdot 1,05$</p> <p>$t = 2 \Rightarrow A(2) = 120 \cdot 1,05 + 5\% \text{ de } 120 \cdot 1,05$ $= 120 \cdot 1,05 + 0,05 \cdot 120 \cdot 1,05 = 120 \cdot 1,05^2$</p> <p>⋮</p> <p>$t \Rightarrow A(t) = 120 \cdot 1,05^t$</p> <p>Micos-leões: $M(t)$ $t = 0 \Rightarrow M(0) = 80$ $t = 1 \Rightarrow M(1) = 80 + 10\% \text{ de } 80 = 80 + 0,10 \cdot 80 = 80 \cdot 1,10$ $t = 2 \Rightarrow M(2) = 80 \cdot 1,10 + 10\% \text{ de } 80 \cdot 1,10$ $= 80 \cdot 1,10 + 0,10 \cdot 80 \cdot 1,10 = 80 \cdot 1,10^2$</p> <p>⋮</p> <p>$t \Rightarrow M(t) = 80 \cdot 1,10^t$</p>	
Representação Algébrica	Ariranhas: $A(t)$ $t \Rightarrow A(t) = 120 \cdot 1,05^t$	Micos-leões: $M(t)$ $t \Rightarrow M(t) = 80 \cdot 1,10^t$
Relação entre a pergunta e a fórmula	$M(t) = 2 \cdot A(t) \Rightarrow 80 \cdot 1,10^t = 2 \cdot 120 \cdot 1,05^t$ $\frac{1,10^t}{1,05^t} = \frac{240}{80}$ $1,047^t \approx 3$ $\log(1,047^t) \approx \log(3)$ $t \approx \frac{\log(3)}{\log(1,047)} \approx \frac{0,4771}{0,0199} \approx 25$	
Verificação da resposta	$80 \cdot 1,10^{24} \approx 788$ e $120 \cdot 1,05^{24} \approx 390$	
Resposta	Alternativa A	

Quadro 3: Questão 3.

Assim, a apresentação e solução do problema seria da seguinte forma:

Solução

$$t = ? \text{ para } M(t) = 2A(t)$$

Ariranhas: $A(t)$

$$t = 0 \Rightarrow A(0) = 120$$

$$t = 1 \Rightarrow A(1) = 120 + 5\% \text{ de } 120 = 120 + 0,05 \cdot 120 = 120 \cdot 1,05$$

$$\begin{aligned} t = 2 \Rightarrow A(2) &= 120 \cdot 1,05 + 5\% \text{ de } 120 \cdot 1,05 \\ &= 120 \cdot 1,05 + 0,05 \cdot 120 \cdot 1,05 = 120 \cdot 1,05^2 \end{aligned}$$

⋮

$$t \Rightarrow A(t) = 120 \cdot 1,05^t$$

Micos-leões: $M(t)$

$$t = 0 \Rightarrow M(0) = 80$$

$$t = 1 \Rightarrow M(1) = 80 + 10\% \text{ de } 80 = 80 + 0,10 \cdot 80 = 80 \cdot 1,10$$

$$\begin{aligned} t = 2 \Rightarrow M(2) &= 80 \cdot 1,10 + 10\% \text{ de } 80 \cdot 1,10 \\ &= 80 \cdot 1,10 + 0,10 \cdot 80 \cdot 1,10 = 80 \cdot 1,10^2 \end{aligned}$$

⋮

$$t \Rightarrow M(t) = 80 \cdot 1,10^t$$

$$M(t) = 2 \cdot A(t) \Rightarrow 80 \cdot 1,10^t = 2 \cdot 120 \cdot 1,05^t$$

$$\frac{1,10^t}{1,05^t} = \frac{240}{80}$$

$$1,047^t \approx 3$$

$$\log(1,047^t) \approx \log(3)$$

$$t \approx \frac{\log(3)}{\log(1,047)} \approx \frac{0,4771}{0,0199} \approx 25$$

$$\therefore t \approx 25 \text{ anos}$$

Verificação: $80 \cdot 1,10^{24} \approx 788$ e $120 \cdot 1,05^{24} \approx 390$

Resposta: Alternativa A.

A próxima questão trata de quanto tempo leva para todas as pessoas de uma cidade com 1,5 milhão de habitantes a serem informadas sobre um boato.

- 4) (UFPE) Um boato se espalha da seguinte maneira: no primeiro dia, apenas uma pessoa tem conhecimento dele; no segundo, ela conta a outras três pessoas e,

a cada dia que passa, todas as pessoas que sabem do boato contam-no para três novas pessoas. Assim, a sequência formada pelo número de pessoas que sabem do boato, em termos de dias que passam , é dada por 1, 4, 16, 64 Em uma cidade com 1,5 milhão de habitantes, quantos dias serão necessários para que todas as pessoas sejam informadas do boato? (Aproxime sua resposta para o menor inteiro maior ou igual ao valor obtido. Dados: use a aproximação $\log_2(1,5 \cdot 10^6) \approx 20,52$

Transposição para linguagem matemática

Qual a pergunta?	[...] em uma cidade com 1,5 milhão de habitantes, quantos dias serão necessários para que todas as pessoas sejam informadas do boato?
O que significa matematicamente?	$t = ?$ se $B(t) = 1500000 = 1,5 \cdot 10^6$
O que temos?	a sequência formada pelo número de pessoas que sabem do boato, em termos de dias que passam , é dada por 1, 4, 16, 64 ...
Representação matemática	$t = 1 \Rightarrow B(1) = 1 = 4^0$ $t = 2 \Rightarrow B(2) = 4 = 4^1$ $t = 3 \Rightarrow B(3) = 16 = 4^2$ $t = 4 \Rightarrow B(4) = 64 = 4^3$
Representação Algébrica	$t \Rightarrow B(t) = 4^{t-1}$ $\therefore B(t) = 4^{t-1}$
Relação entre a pergunta e a representação algébrica	$B(t) = 4^{t-1} = 1,5 \cdot 10^6$ $(2^2)^{t-1} = 1,5 \cdot 10^6$ $2^{2t-2} = 1,5 \cdot 10^6$ $\log_2(2^{2t-2}) = \log_2(1,5 \cdot 10^6)$ $2t - 2 \approx 20,52$ $2t \approx 22,52$ $t \approx 11,26$
Verificação da resposta	$B(11) = 4^{11-1} = 4^{10} = 1048576 \approx 1,5 \cdot 10^6$
Resposta	No 12º todos os habitantes da cidade estarão informados do boato.

Quadro 4: Questão 4.

Assim, a apresentação da solução do problema 4 seria da seguinte forma:

Solução

$$t = ? \text{ se } B(t) = 1500000 = 1,5 \cdot 10^6$$

$$t = 1 \Rightarrow B(1) = 1 = 4^0$$

$$t = 2 \Rightarrow B(2) = 4 = 4^1$$

$$t = 3 \Rightarrow B(3) = 16 = 4^2 \quad t \Rightarrow B(t) = 4^{t-1}$$

$$t = 4 \Rightarrow B(4) = 64 = 4^3$$

$$t \Rightarrow B(t) = 4^{t-1}$$

$$\therefore B(t) = 4^{t-1}$$

$$B(t) = 4^{t-1} = 1,5 \cdot 10^6$$

$$(2^2)^{t-1} = 1,5 \cdot 10^6$$

$$2^{2t-2} = 1,5 \cdot 10^6$$

$$\log_2(2^{2t-2}) = \log_2(1,5 \cdot 10^6)$$

$$2t - 2 \approx 20,52$$

$$2t \approx 22,52$$

$$t \approx 11,26$$

$$\text{Verificação: } B(11) = 4^{11-1} = 4^{10} = 1048576 \approx 1,5 \cdot 10^6$$

Resposta: No 12º todos os habitantes da cidade estarão informados do boato.

A Questão 5 proposto a seguir trata da desintegração radiotiva, com a fórmula no enunciado.

- 5) (ENEM-2012) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27.

B) 36.

C) 50.

D) 54.

E) 100.

Transposição para linguagem matemática

Qual pergunta?	Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do céσιο-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?
Interpretação matemática	$t = ?$ para $M(t) = 10\% \text{ de } A = 0,1.A = 10^{-1}.A$
O que temos?	A meia-vida do céσιο-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.
Interpretação matemática	$M(30) = \frac{1}{2}A$ e $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$
Representação Algébrica	$M(30) = 2^{-1}.A$ e $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$
Relação entre a pergunta e a representação algébrica	$\log(2,7)^{k \cdot 30} = \log(2^{-1}) = -\log(2)$ $30 \cdot k \cdot \log(2,7) = -\log(2)$ $\log 2,7 = \frac{-0,3}{30k} = -\frac{0,01}{k}$ $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt} = 10^{-1}.A$ $2,7^{kt} = 10^{-1} \Rightarrow kt \log(2,7) = -\log(10)$ $kt \left(-\frac{0,01}{k} \right) = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{0,01} = 100$
Verificação da resposta	$\log 2,7 = -\frac{0,01}{k} \Leftrightarrow k = -\frac{0,01}{\log 2,7} \approx -0,023$ $2,7^{-0,023 \cdot 100} = 2,7^{-2,3} \approx 0,1$
Resposta	Alternativa E) 100

Quadro 5: Questão 5.

Logo, quando o aluno for solucionar o problemas, após a leitura, identificará a questão a ser respondida, os dados que o enunciado traz para resolvê-la, como a fórmula e a condição para a resposta. Assim, a solução será da seguinte forma:

Solução

$t = ?$ para $M(t) = 10\% \text{ de } A = 0,1.A = 10^{-1}.A$

$M(30) = \frac{1}{2}A$ e $M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$;

$$M(30) = 2^{-1} \cdot A \text{ e } M(t) = A \cdot (2,7)^{kt}$$

$$2^{-1} \cdot A = A \cdot (2,7)^{k \cdot 30}$$

$$2^{-1} = (2,7)^{k \cdot 30}$$

$$\log(2,7)^{k \cdot 30} = \log(2^{-1}) = -\log(2)$$

$$30 \cdot k \cdot \log(2,7) = -\log(2)$$

$$\log 2,7 = \frac{-0,3}{30k} = -\frac{0,01}{k}$$

$$M(t) = A \cdot (2,7)^{kt} = 10^{-1} \cdot A$$

$$2,7^{kt} = 10^{-1}$$

$$kt \log(2,7) = -\log(10)$$

$$kt \left(-\frac{0,01}{k} \right) = -1 \Rightarrow t = \frac{1}{0,01} = 100$$

Verificação

$$\therefore \log 2,7 = -\frac{0,01}{k} \Leftrightarrow k = -\frac{0,01}{\log 2,7} \approx -0,023$$

$$2,7^{-0,023 \cdot 100} = 2,7^{-2,3} \approx 0,1$$

Alternativa E)

A Questão 6 trata da escala logarítmica de magnitude de momento, traz no enunciado a fórmula necessária para obter a resposta da questão.

- 6) (ENEM-2011) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula: $M_W = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$, onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7,3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010(adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy. Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1 maio 2010(adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?

- A) $10^{-5,10}$ B) $10^{-0,73}$ C) $10^{12,00}$ D) $10^{21,65}$ E) $10^{27,00}$

Transposição para linguagem matemática

Qual a pergunta?	[...] qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina.cm)?
O que significa matematicamente?	$M_0 = ?$
O que temos?	[...] a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula: $M_W = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$ Teve magnitude $M_W = 7,3$.
Representação matemática	$M_W = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$ e $M_W = 7,3$
Representação Algébrica	$M_W = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$
Relação entre a pergunta e a representação algébrica	$M_0 = ?$ e $M_W = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$ $7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$ $\frac{2}{3} \log_{10}(M_0) = 7,3 + 10,7$ $\log_{10}(M_0) = 18 \cdot \frac{3}{2}$ $\log_{10}(M_0) = 27$ $M_0 = 10^{27}$
Verificação da resposta	$-10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(10^{27}) = -10,7 + \frac{2}{3} \cdot 27 = -10,7 + 18 = 7,3$
Resposta	Alternativa E

Quadro 6: Questão 6.

A solução da Questão 6 assim será apresentada:

Solução

$$M_0 = ? \quad M_W = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0) \quad \text{e} \quad M_W = 7,3$$

$$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(M_0)$$

$$\frac{2}{3} \log_{10}(M_0) = 7,3 + 10,7$$

$$\log_{10}(M_0) = 18 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow \log_{10}(M_0) = 27 \Rightarrow M_0 = 10^{27}$$

$$\text{Verificação: } -10,7 + \frac{2}{3} \log_{10}(10^{27}) = -10,7 + \frac{2}{3} \cdot 27 = -10,7 + 18 = 7,3$$

Resposta: *Alternativa E*

- 7) (SARESP-2009) Por estar no centro de uma placa tectônica, o Brasil está protegido de grandes abalos sísmicos, porém, no Ceará estão ocorrendo pequenos terremotos devido à acomodações localizadas nesta placa. Um destes abalos atingiu 4 pontos na escala Richter, cuja medida de intensidade é dada pela fórmula $I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$ em que E é a energia liberada pelo terremoto, em kWh e E_0 é uma constante igual a 10^{-3} kWh. Então, a energia liberada por este abalo foi de:

A) 10^9 kWh.

B) 10^6 kWh.

C) 10^3 kWh.

D) 10^2 kWh.

Transposição para linguagem matemática

Qual a pergunta?	Então, a energia liberada por este abalo foi de:
O que significa matematicamente?	$E = ?$
O que temos?	Um destes abalos atingiu 4 pontos na escala Richter, cuja medida de intensidade é dada pela fórmula $I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$ em que E é a energia liberada pelo terremoto, em kWh e E_0 é uma constante igual a 10^{-3} kWh
Representação matemática	$I = 4, I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$ e $E_0 = 10^{-3} kWh$
Representação Algébrica	$I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$
Relação entre a pergunta e a representação algébrica	$E = ? \quad I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}, I = 4$ e $E_0 = 10^{-3} kWh$ $4 = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{-3}}$ $6 = \log \frac{E}{10^{-3}}$ $\frac{E}{10^{-3}} = 10^6$ $E = 10^9 kWh$
Verificação da resposta	$\frac{2}{3} \log \frac{10^9}{10^{-3}} = \frac{2}{3} \log(10^6) = \log(10^6)^{\frac{2}{3}} = \log 10^4 = 4$
Resposta	Alternativa C

Quadro 7: Questão 7.

A solução da Questão 7 assim será apresentada:

Solução

$$E = ? \quad I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}, I = 4 \text{ e } E_0 = 10^{-3} kWh$$

$$4 = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{-3}}$$

$$6 = \log \frac{E}{10^{-3}}$$

$$\frac{E}{10^{-3}} = 10^6$$

$$E = 10^9 \text{ kWh}$$

$$\text{Verificação: } \frac{2}{3} \log \frac{10^9}{10^{-3}} = \frac{2}{3} \log(10^6) = \log(10^6)^{\frac{2}{3}} = \log 10^4 = 4$$

Resposta: Alternativa C.

Na situação abaixo, o problema sobre índice do PIB é uma maneira dos alunos perceberem a presença dos logaritmos, num assunto das Ciências Humanas, que diz respeito a todos.

- 8) Segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), até 2009, o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) era determinado pela média aritmética dos índices da educação, expectativa de vida ao nascer e PIB (produto interno bruto) em dólares. O índice do PIB era dado pela equação abaixo, onde PIB per capita era o valor da renda per capita do país analisado, em dólar; 40000 dólares era o valor máximo de renda per capita no mundo.

$$\text{Índice do PIB} = \frac{\log(\text{PIB per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$$

De posse dessas informações, calcule qual era o PIB per capita de um país que tenha o índice do PIB igual a 0,80.

Transposição para linguagem matemática

Qual a pergunta? (Objetivo da questão)	[...] calcule o índice do PIB per capita de um país que tenha o índice do PIB igual a 0,80.
O que significa matematicamente?	$PIB \text{ per capita} = ?$ Índice do PIB = 0,80
O que temos?	$\text{Índice do PIB} = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$
Representação matemática	$\text{Índice do PIB} = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$
Representação Algébrica	$\text{Índice do PIB} = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$
Relação entre a pergunta e a representação algébrica	$PIB \text{ per capita} = ? \quad \text{Índice do PIB} = 0,80$ $\text{Índice do PIB} = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$ $0,80 = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$ $0,80 = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - 2}{\log(4) + \log(10000) - 2}$ $0,80 = \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - 2}{2 \cdot \log(2) + 4 - 2}$ $0,80 \approx \frac{\log(PIB \text{ per capita}) - 2}{0,602 + 4 - 2}$ $\log(PIB \text{ per capita}) \approx 0,80 \cdot 2,602 + 2$ $\log(PIB \text{ per capita}) \approx 4,0816$ $(PIB \text{ per capita}) \approx 10^{4,0816} \approx 12067,00$ $\therefore (PIB \text{ per capita}) \approx 12067 \text{ dólares}$
Verificação da resposta	$\frac{\log(12067) - 2}{\log(4) + \log(10000) - 2} \approx \frac{4,0816 - 2}{0,602 + 4 - 2} = \frac{2,0816}{2,602} = 0,8$
Resposta	O PIB per capita do país analisado é de, aproximadamente, 12067 dólares.

Quadro 8: Questão 8.

A solução da questão assim será apresentada:

Solução

PIB per capita = ? Índice do PIB = 0,80

$$\text{Índice do PIB} = \frac{\log(\text{PIB per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$$

$$0,80 = \frac{\log(\text{PIB per capita}) - \log(100)}{\log(40000) - \log(100)}$$

$$0,80 = \frac{\log(\text{PIB per capita}) - 2}{\log(4) + \log(10000) - 2}$$

$$0,80 = \frac{\log(\text{PIB per capita}) - 2}{2 \cdot \log(2) + 4 - 2}$$

$$0,80 \approx \frac{\log(\text{PIB per capita}) - 2}{0,602 + 4 - 2}$$

$$\log(\text{PIB per capita}) \approx 0,80 \cdot 2,602 + 2$$

$$\log(\text{PIB per capita}) \approx 4,0816$$

$$(\text{PIB per capita}) \approx 10^{4,0816} \approx 12067,00$$

$$\text{Verificação da resposta: } \frac{\log(12067) - 2}{\log(4) + \log(10000) - 2} \approx \frac{4,0816 - 2}{0,602 + 4 - 2} = \frac{2,0816}{2,602} = 0,8$$

Resposta: O PIB per capita do país analisado é de, aproximadamente, 12067 dólares.

A Questão 9 trata do cálculo do tempo necessário para um determinado capital inicial triplicar se submetido a uma taxa de juros constante. Na solução, pode utilizar a fórmula $M(t) = C_0(1 + \alpha)^t$, deduzida em no capítulo 6.

- 9) A caderneta de poupança de Banco Fictício rendeu nos últimos 5 meses, em média, juros de 0,694% ao mês. Se a taxa de juros continuar com essa média, depois de quanto tempo um capital inicial C_0 irá triplicar?

Transposição para linguagem matemática

Qual a pergunta? (Objetivo da questão)	Se a taxa de juros continuar com essa média, depois de quanto tempo um capital inicial C_0 irá triplicar?
O que significa matematicamente?	$T=?$ se $M(t) = 3.C_0$
O que temos?	[...] rendeu nos últimos 5 meses, em média, juros de 0,694% ao mês
Representação matemática	$\alpha = 0,694\% = 0,00694$
Representação Algébrica	$M(t) = C_0(1 + \alpha)^t$
Relação entre a pergunta e a representação algébrica	$T=?$ se $M(t) = 3.C_0$, $\alpha = 0,00694$ e $M(t) = C_0(1 + \alpha)^t$ $C_0(1 + 0,00694)^t = 3C_0$ $(1,00694)^t = 3 \Rightarrow \log(1,00694)^t = \log 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log(1,00694)}$ $\Rightarrow t \approx 158,85$
Verificação da resposta	$C_0(1 + 0,00694)^{159} = C_0 \cdot 1,00694^{159} \approx C_0 \cdot 3,0031$
Resposta	O capital triplicará em 159 meses, ou em 13 anos e 3 meses.

Quadro 9: Questão 9.

Desse modo a solução se apresentará:

Solução

$$T=? \text{ se } M(t) = 3.C_0, \alpha = 0,00694 \text{ e } M(t) = C_0(1 + \alpha)^t$$

$$C_0(1 + 0,00694)^t = 3C_0$$

$$(1,00694)^t = 3 \Rightarrow \log(1,00694)^t = \log 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log(1,00694)} \approx 158,85$$

$$\text{Verificação: } C_0(1 + 0,00694)^{159} = C_0 \cdot 1,00694^{159} \approx C_0 \cdot 3,0031$$

Resposta: O capital triplicará em 159 meses, ou em 13 anos e 3 meses.

Apêndice C – Respostas dos professores

Aos professores de Matemática da EE de Parapuã, que lecionam no Ensino Médio foram feitas cinco perguntas abaixo para saber o que acharam da abordagem de solução de problemas pela transposição para a linguagem matemática. Seguem suas respostas digitalizadas.

**PESQUISA SOBRE O ESQUEMA DE SOLUÇÃO PARA RESOLVER
PROBLEMAS ENVOLVENDO LOGARITMOS**

1. Em relação ao esquema de solução, excluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

nao.

2. Em relação ao esquema de solução, incluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

nao.

3. Modificaria algum item no esquema de solução? Qual(is)? Justifique.

nao, pois esta explicando com bastante detalhe a questao sugerida.

4. Aplicaria o esquema de solução em suas aulas?

Sim.

5. Em sua opinião, o esquema de solução pode auxiliar os alunos resolverem problemas envolvendo logaritmos? Comente sua resposta.

Sim, pois no esquema para resolver a questao, mostra o objetivo proposto, o significado matematicamente, o que tem na situacao problema, como se representa na matematica, seu desenvolvimento da formula e a relacao entre a pergunta e a formula, assim dando borda para o aluno interpretar de forma clara para a resolucao da questao.

**PESQUISA SOBRE O ESQUEMA DE SOLUÇÃO PARA RESOLVER
PROBLEMAS ENVOLVENDO LOGARITMOS**

1. Em relação ao esquema de solução, excluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

Não. O esquema favorece o levantamento de dados da situação-problema e facilita sua interpretação e resolução.

2. Em relação ao esquema de solução, incluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

Não, pois o esquema apresenta etapa por etapa a leitura, interpretação e solução do problema.

3. Modificaria algum item no esquema de solução? Qual(is)? Justifique.

Não. Todos os itens estão adequados a passagem de uma etapa para outra na resolução do problema.

4. Aplicaria o esquema de solução em suas aulas?

Sim. Adaptei o esquema de solução no estudo de progressões aritméticas, progressões geométricas e aplicarei, no segundo semestre de 2015, para o estudo de logaritmos.

5. Em sua opinião, o esquema de solução pode auxiliar os alunos resolverem problemas envolvendo logaritmos? Comente sua resposta.

Sim. Os alunos apresentam muitas dificuldades na leitura e interpretação da situação-problema. O esquema de solução proposto facilita o levantamento de dados, estabelecendo uma evolução compreensível da fórmula para se chegar à solução.

**PESQUISA SOBRE O ESQUEMA DE SOLUÇÃO PARA RESOLVER
PROBLEMAS ENVOLVENDO LOGARITMOS**

1. Em relação ao esquema de solução, excluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

Não excluiria nenhum item.
O problema está desenvolvido passo a passo.

2. Em relação ao esquema de solução, incluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

Não, pois o esquema de solução da questão está completa.

3. Modificaria algum item no esquema de solução? Qual(is)? Justifique.

Não, pois a resolução apresenta-se, fácil leitura e interpretação.

4. Aplicaria o esquema de solução em suas aulas?

Sim, pois apresenta para o aluno que se consegue resolver várias situações problemas usando logaritmos.

5. Em sua opinião, o esquema de solução pode auxiliar os alunos resolverem problemas envolvendo logaritmos? Comente sua resposta.

Sim, o esquema de solução (leitura, interpretação e desenvolvimento) dos problemas envolvendo logaritmos pode auxiliar os alunos na sua resolução.

**PESQUISA SOBRE O ESQUEMA DE SOLUÇÃO PARA RESOLVER
PROBLEMAS ENVOLVENDO LOGARITMOS**

1. Em relação ao esquema de solução, excluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

Não excluiria, pois todos os itens ajudam a resolver o problema.

2. Em relação ao esquema de solução, incluiria algum item? Qual(is)? Justifique.

Sim, se possível algum item para "fazer a prova" do problema. Se possível testar a resposta. Verificar se a resposta é compatível com o problema.

3. Modificaria algum item no esquema de solução? Qual(is)? Justifique.

Não modificaria, pois todos os itens auxiliam na resolução do problema.

4. Aplicaria o esquema de solução em suas aulas?

Aplicaria com certeza, ajuda muito na resolução do problema. Facilita muito o entendimento.

5. Em sua opinião, o esquema de solução pode auxiliar os alunos resolverem problemas envolvendo logaritmos? Comente sua resposta.

Sim. Problemas envolvendo logaritmos muitos deles são difíceis de entender por parte dos alunos. Este esquema de solução ajuda muito o entendimento do problema. Ajuda muito a "destrinchar" o problema e chegar de uma forma mais precisa em sua solução.