Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Evolução das Ideias sobre Números Imaginários †

por

Leandro Sales Almeida de Oliveira

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2015
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Evolução das Ideias sobre Números Imaginários

por

Leandro Sales Almeida de Oliveira

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra e História da Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. João Bosco Batista Lacerda - UFPB

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos - UFPB

Agosto/2015

O48e Oliveira, Leandro Sales Almeida de.
Evolução das ideias sobre números imaginários / Leandro Sales Almeida de Oliveira.- João Pessoa, 2015.
51f. : il.
Orientador: Antônio de Andrade e Silva
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Números imaginários. 3. Complexos. 4. Quatérnios. 5. Octônios. 6. Sedênios.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Agradecimentos

A Deus, o nosso Pai Celestial, criador de todas as coisas, sem o qual nem a matemática existiria.

Ao PROFMAT, por dar esta oportunidade a professores que, como eu, puderam fazer um mestrado para aperfeiçoamento do ensino da matemática.

A CAPES, pelo investimento que me ajudou a seguir com o percurso do mestrado.

Aos docentes integrados ao curso, especialmente àqueles que tive a oportunidade de trocar ideias durante os dois do mestrado.

Ao meu Orientador, o Professor Andrade, que só tive o privilégio de conhecer a pouco tempo, mas mesmo assim pude aprender imensamente nos nossos poucos encontros que tivemos, com sua simplicidade, humildade e mansidão.

E a minha família, que me incentivou do início ao fim, sempre me dando o apoio necessário para prosseguir com os meus sonhos e concluir com êxito este mestrado.

Dedicatória

A minha esposa, Jarleyde, e ao meu filho, Miguel, que são o meu tesouro inestimável.

Resumo

Neste trabalho serão estudados os números imaginários e como se deu a sua evolução ao longo do tempo. Evolução esta que ocorreu de forma bem lenta, até se chegar no que é conhecido hoje como o número imaginário i. Entretanto, a criação dos complexos não foi o ponto final do estudo dos números imaginários. Estudos seguintes introduziram conceitos ainda mais abrangentes criando conjuntos como os quatérnios, extensão de quatro dimensões dos complexos. Finaliza-se o trabalho, com as extensões de oito e dezesseis dimensões dos complexos, conhecidas como octônios e sedênios, respectivamente. Além de ser apresentado algumas aplicações dessas extensões, também conhecidas como números hipercomplexos.

Palavras-chave: Números; Imaginários; Complexos; Quatérnios; Octônios; Sedênios.

Abstract

In this paper it will be studied the imaginary numbers and how their evolution over time occurred. Such evolution has occurred at a slow pace until it reached at what is known today as the imaginary number i. However, the creation of the complex was not the end of the study of imaginary numbers. These studies have introduced even more comprehensive concepts creating sets as quaternions, extension of four dimensions of the complex. It will be concluded, with the extensions of eight and sixteen dimensions of the complex numbers, known as octonions and sedenions, respectively. Additionally, it will be submitted some applications of these extensions, also known as hypercomplex numbers.

Keywords: Numbers; Imaginary; Complex; Quaternions; Octonions; Sedenions.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Ao pensarmos no número imaginário i, provavelmente, lembramos do nosso ensino médio e do professor nos informando que existe um conjunto maior do que o dos números reais, onde existe é possível extrair raiz quadrada de número negativo, e nos apresenta a igualdade $i = \sqrt{-1}$. O que pode passar despercebido, tanto pelos alunos quanto pelo professor, é que esta igualdade não se deu num passe de mágica como parece ao ser apresentado em sala de aula. Existe muita história por trás disso e é o objetivo de nossa pesquisa trazer os acontecimentos que tornaram possível estudarmos o conjunto dos números complexos no ensino médio hoje.

A história começa com a disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução de equações do 3.º grau, onde nessa disputa se é descoberta a fórmula de resolução de tal equação [3],[6]. Com o descobrimento desta fórmula, levanta-se o questionamento sobre raízes quadradas negativas. Para os matemáticos da época, isto não existia. E a fórmula descoberta parecia fazer possível tal fato, deixando os matemáticos intrigados. As tentativas para explicar tal fato e resolver o problema então proposto, passou por mãos de matemáticos que contribuíram muito para o avanço da matemática [4].

Também neste trabalho, traremos, o que para um aluno do ensino médio, pode ser uma mera curiosidade, mas que para alguns matemáticos foi uma pesquisa de vários anos. Trata-se de alguns conjuntos, chamados de hipercomplexos, assim conhecidos por conterem mais de uma unidade imaginária , além da tradicional i. Começaremos com a primeira expansão, conhecida por Quatérnios de Hamilton. Quatérnios pelo fato de ser um conjunto tetradimensional, com três unidades imaginárias distintas, porém ambas iguais a $\sqrt{-1}$. Hamilton estudou por mais de uma década para chegar a esta primeira expansão. Primeiramente, ele tentou com apenas uma unidade imaginária a mais, dando origem a um tripleto. Razão pela qual ele demorou tanto tempo para chegar a conclusão definitiva dos quatérnios. Ele queria um conjunto onde pudesse ser descrito em três dimensões, para se aplicar a geometria, tal como os complexos funcionavam perfeitamente para duas dimensões. Porém, Hamilton enfrentou problemas com a multiplicação de tripletos, pois não chegava a conclusão de quanto deveria valer o produto ij, as duas unidades imaginárias até então. O problema só foi resolvido com a inserção de uma terceira unidade imaginária. Daí os tripletos passaram a ser quatérnios e o problema da multiplicação e da aplicação à geometria foram resolvidos [7],[10].

A próxima extensão, o conjunto dos octônios, foi descrita pela primeira vez por Graves, amigo de Hamilton, mas este não foi o primeiro a publicá-la, feito atribuído a Cayley. O conjunto dos octônios possui sete unidades imaginárias distintas [1].

O último conjunto estudado no trabalho, são os sedênios, um conjunto hexadimensional com quinze unidades imaginárias distintas [2].

Uma curiosidade sobre estes conjuntos é que a cada extensão eles perdem uma propriedade com relação a multiplicação, tão comum aos complexos. Os quatérnios, não são comutativos; os octônios não são comutativos nem associativos e os sedênios não fazem parte de uma álgebra de divisão, ou seja, eles possuem elementos não nulos que multiplicados resultam no elemento nulo do conjunto [1], [2], [12], [13].

Trazemos ainda, algumas aplicações dos números hipercomplexos, desconhecidos de muitos, mas muito úteis em nossa vida, principalmente dos quatérnios [1], [8], [9], [14], [15], [16], [17].

Capítulo 1

Abordagem Histórica dos Números Imaginários - De Cardano a Gauss

Neste capítulo, estudaremos a evolução das ideias sobre os números imaginários. Iremos de sua origem nos cálculos feitos por Cardano; passaremos por diversas mentes brilhantes que contribuíram para o desenvolvimento destes números e iremos até o fabuloso Gauss, que tirou do misticismo os números que no passado eram conhecidos como impossíveis, e perpetuou as expressões números complexos e número imaginário. Tomando como base para esta pesquisa os trabalhos de Cerri [3], Ebbinghaus [4] e Garbi [6].

1.1 Cardano, Tartaglia e a disputa de resolução de equações do 3.º grau

Quando um estudante do ensino médio está aprendendo sobre os números complexos, deve achar que sua descoberta se deu através da equação do 2.º grau, quando o seu discriminante é negativo. Porém veremos que este estudo não tem a ver com a equação do 2.º grau e sim com a do 3.º grau, e que a absorção do conceito de número imaginário se deu de forma bem lenta.

A resolução de equações é algo que fascina matemáticos ao longo de toda a história. Babilônios, gregos, romanos, indianos, hindus, entre outros povos, sempre procuravam uma maneira de criar um método para se resolver qualquer tipo de equação. Quando falamos de equação do 2.º grau, pensamos logo em Bháskara e sua técnica. Apesar dele ter ficado com a fama, quem descobriu a fórmula mesmo foi Sridhara, conterrâneo de Bháskara.

O fato de que o discriminante da equação do 2.º grau poder ser negativo não perturbava os matemáticos da época. Eles, simplesmente diziam que a equação não tinha solução.

É no meio da disputa entre Girolamo Cardano (Figura 1.1) e Nicolò Fontana (Tartaglia) (Figura 1.2) pela a resolução da equação do 3.º grau que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos surgiram.

Figura 1.1: Girolamo Cardano (1501 − 1576).

Por volta de 1510, Scipione del Ferro encontrou uma fórmula geral de resolver as equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

e revelou a seu aluno, Antonio Maria Fior, que após a morte de seu mestre, tentou adquirir notoriedade com a descoberta de seu professor lançando um desafio a Tartaglia para resolver equações desse tipo. Tartaglia aceitou o desafio e durante sua preparação, Tartaglia revelou: "***mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a* 10 *de fevereiro de* 1535**"[6]. Porém, ele foi ainda mais longe e encontrou a fórmula geral para se resolver equações do tipo

$$x^3 + px^2 + q = 0,$$

cuja resolução Fior desconhecia e, assim, Tartaglia venceu o desafio.

Cardano ouviu falar do feito de Tartaglia e logo desejou deter este conhecimento para expor na sua famosa obra que estava por ser escrita. Ele tentou seduzir Tartaglia a entregá-lo a fórmula, porém Tartaglia desejava que ele próprio fizesse isso, pois ele era o descobridor. Cardano não desistiu e continuou a insistir, até que Tartaglia o deu com a promessa de que ele não a revelaria a ninguém, mas ele logo viu que foi um grande erro, pois Cardano publicou e ficou com a fama. A fórmula até hoje leva o nome de fórmula de Cardano.

Figura 1.2: Nicolò Fontana (Tartaglia) $(1499 - 1557)$.

Percebamos que quando Tartaglia descobriu a fórmula para se resolver equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0,$$

ele descobriu como se resolve qualquer equação completa do 3.º grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Basta fazer a substituição $y = x + m$ e calcular m, de modo a anular o termo de grau 2.

Vejamos a fórmula que Tartaglia descobriu para as equações do tipo

$$x^3 + px + q = 0$$

Eis a fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Por exemplo, a equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

terá como solução através da fórmula de Cardano o seguinte valor:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Esta equação tem como raízes os valores

$$x = 4, \quad x = -2 + \sqrt{3} \text{ e } x = -2 - \sqrt{3},$$

como estas raízes reais estariam relacionadas com o resultado da fórmula de Cardano? Como se extrairia raízes cúbicas de números de natureza desconhecida? Garbi, em *O Romance das Equações Algébricas*[6], disse que: "Tartaglia havia mexido em um verdadeiro vespeiro, do qual saíam estranhíssimas e insondáveis questões". O interessante é que em sua *Ars Magna*(Figura 1.3), Cardano já havia operado com números complexos, sem saber com o que estava mexendo. Ele escreveu que é impossível dividir 10 em duas partes, de modo que seu produto seja 40. Entretanto, ele disse, se o problema pudesse ser resolvido, seria da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y &= 10 \\ xy &= 40. \end{cases}$$

Eleva-se ao quadrado a primeira equação e multiplica-se por 4 a segunda

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 &= 100 \\ 4xy &= 160. \end{cases}$$

Subtraindo-se a primeira da segunda,

$$x^2 - 2xy + y^2 = -60 \Rightarrow (x - y)^2 = -60 \Rightarrow x - y = \sqrt{-60} = 2\sqrt{-15},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y &= 10 \\ x - y &= 2\sqrt{-15}. \end{cases}$$

Portanto,

$$2x = 10 + 2\sqrt{-15} \Rightarrow x = 5 + \sqrt{-15} \text{ e } y = 5 - \sqrt{-15}.$$

Eis a primeira vez na história em que o homem fez algumas operações com números complexos. O que o autor, Cardano, disse a respeito deste grande avanço para a matemática: "**Este resultado é tão sutil quanto inútil**"[6]. Cardano, de fato, não sabia o tesouro que tinha nas mãos.

Figura 1.3: Frontispício da Ars Magna (1545), obra de Cardano.

1.2 Bombelli e sua ideia pioneira

Rafael Bombelli(Figura 1.4), nascido em Bolonha, Itália, no ano de 1530, foi o primeiro homem a tentar lidar com o número desconhecido, até então. Ele desejava relacionar a raiz $x = 4$ da equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

com o que se era obtido através da fórmula de Cardano

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Em seu livro intitulado *L'Algebra parte Maggiore dell'Arithmetica*[4], podemos encontrar como se deu o seu pensamento. Ele resolveu associar os números

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

a números na forma

$$a + \sqrt{-b} \text{ e } a - \sqrt{-b},$$

respectivamente. Neste caso,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \text{ e } \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = a - \sqrt{-b}.$$

Ao criar as seguintes regras

$$\left\{\begin{array}{rcr} (\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) & = & -1 \\ (\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) & = & 1 \\ (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) & = & -1 \\ (1)(\sqrt{-1}) & = & \sqrt{-1} \\ (-1)(\sqrt{-1}) & = & -\sqrt{-1} \\ (1)(-\sqrt{-1}) & = & -\sqrt{-1} \\ (-1)(-\sqrt{-1}) & = & \sqrt{-1} \end{array}\right.$$

e

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1},$$

Bombelli chegou a conclusão de que $a = 2$ e $b = 1$, pois

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{-1} + 3.2.(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

e

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2^3 - 3.2^2.\sqrt{-1} + 3.2.(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Bombelli havia construído os alicerces de toda a teoria dos números complexos.

Figura 1.4: Rafael Bombelli (1526 – 1572).

1.3 Descartes, Newton e Leibniz

Os três gênios dos quais falaremos a seguir, não mudaram significativamente o que se sabia sobre os números imaginários na época, mas vale a pena saber a opinião de cada um deles a respeito destes números.

Figura 1.5: René Descartes (1642 – 1727)

René Descartes(Figura 1.5), apesar de ter intensamente trabalhado na construção da teoria da geometria analítica, ele em sua *La Géométrie*[4] em 1637 também estudou equações algébricas. Em um trecho da sua obra, ele disse que "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias"[4]. Fora a primeira vez na história que tal expressão foi usada e que mais tarde seria designada para representar o número $\sqrt{-1}$. Descartes também confessou que quantidades imaginárias são completamente incapazes de se conseguir visualizar.

Figura 1.6: Isaac Newton (1642 – 1727)

Isaac Newton(Figura 1.6) considerou as raízes complexas como sendo a insolubilidade de um problema, expressando que equações cujas raízes seriam imaginárias deveriam ser tratadas como impossíveis, para que não apresentem casos de problemas que são insolúveis nos reais como se fossem possíveis. No tempo de Newton, os números complexos não tinham uma aplicação sequer, especialmente, na física. Talvez, se houvesse, ele não teria considerado as soluções imaginárias tão impossíveis assim.

Figura 1.7: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz(Figura 1.7), ocasionalmente, escrevia algo relacionado aos números imaginários. Por volta de 1675, numa carta direcionada a Huygens, escreveu uma relação que enriqueceu a teoria dos números imaginários:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}.$$

Em 1702, no primeiro periódico científico publicado em alemão pelo *Leipzig Acta Eruditorum*[4], Leibniz fala que as raízes imaginárias são um tipo de resort sutil e maravilhoso, cheio de espírito divino, uma espécie de hermafrodita entre existência e não-existência. Em 1712, Leibniz já havia identificado $\log(-1)$ como sendo um número imaginário.

1.4 Euler, o matemático que dominou os números complexos

Antes do suíço Leonhard Euler(Figura 1.8), ninguém havia dado uma contribuição tão grande aos números complexos como ele. As ideias de Euler, quanto a estes números e como eles poderiam ser utilizados foram várias. Vejamos, então, as suas contribuições.

Em princípio, foi ele, quem introduziu o símbolo que usamos até hoje para substituir $\sqrt{-1}$, a letra i, letra escolhida devido ao nome: número imaginário. Ele, então, passou a estudar os números da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Estes números foram chamados de números complexos.

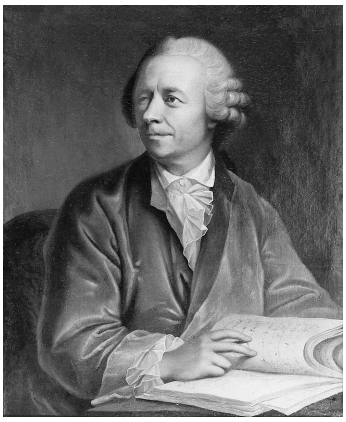

Figura 1.8: Leonhard Euler (1707 – 1783).

Euler definiu as operações de adição e multiplicação para os números complexos, tendo em vista os estudos de Bombelli. Verificou que são válidas as propriedades associativa, comutativa e existência de elemento neutro, tanto para a adição, quanto para a multiplicação, além de verificar também as existências do elemento oposto para cada número complexo e do inverso multiplicativo para cada complexo diferente do zero. Assim ele foi o primeiro a verificar que o conjunto dos números complexos é o que chamamos, modernamente, de corpo. Este gênio percebeu que era possível relacionar os números complexos à trigonometria e que eles poderiam ser escritos de uma certa forma, a qual foi chamada de forma polar de um número complexo:

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta),$$

onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ é chamado de módulo de z e θ é o argumento de z. Essa relação com a trigonometria e com a geometria analítica de Descartes só trouxe benefícios, tais como o descobrimento de como se extrair raízes de números complexos. Lembremos que esta era uma questão que perturbava os matemáticos desde o descobrimento da fórmula de Cardano.

Com respeito a raízes quadradas de números negativos, o próprio Euler, em sua obra intitulada "Vollständige Anleitung zur Algebra", ou traduzida para o inglês como "Elements of Algebra", diz: "*Fica claro, portanto, que as raízes quadradas de números negativos não podem ser contadas entre os números possíveis: consequentemente, temos de dizer que elas são os números que são impossíveis. Esta circunstância leva-nos ao conceito de números, que, pela sua própria natureza, são impossíveis, e que são comumente chamados de números imaginários ou números fantasiosos, porque eles só existem em nossa fantasia ou na nossa imaginação*"[4].

Uma outro feito de Euler com relação aos números complexos foi o desenvolvimento da fórmula da raiz n-ésima de um número complexo não-nulo. Fórmula esta que mostra todas as n raízes distintas do número complexo, desde que esteja na forma polar.

Pondo

$$z = \rho(\cos\phi + i\text{sen}\phi) \text{ e } w = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta),$$

se $z^n = w$, então

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right), \ \forall\ k \in \mathbb{Z}, \text{ com } z_k = z_{k+n}.$$

De posse desta fórmula, podemos voltar a equação que vimos na seção 1.1

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

que, pela fórmula de Cardano, obtínhamos o seguinte resultado:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

ou, simplesmente,

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}.$$

Que por séculos levantou questionamentos de que como a equação com uma solução tão clara $x = 4$, poderia se equivaler a expressão acima e se existiriam outras raízes, como parecia existir. Foi só com a fórmula, que Euler ajudou a desenvolver, que estes questionamentos foram respondidos. Assim, extraindo as raízes cúbicas de $2 + 11i$ e $2 - 11i$ e somando-as, chega-se as três raízes distintas da equação em questão:

$$x = 4,\ \ x = -2 + \sqrt{3} \text{ e } x = -2 - \sqrt{3},$$

Embora não soubesse, Tartaglia, quando descobriu a fórmula de resolver equaçõs do 3.º grau, descobriu a fórmula que gerava todas as raízes da equação. Bombelli deu o primeiro passo para as questões que se seguiram e Euler desvendou totalmente o mistério que sondava sobre os números "desconhecidos", por isto e por muito mais, que ele ficou conhecido como o matemático que dominou os números complexos.

Ainda há a fórmula de Euler desenvolvida após este conjecturar a existência de uma função exponencial com variáveis complexas. Utilizando método de séries infinitas, ele demonstrou que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta.$$

No caso em que $\theta = \pi$, temos a expressão que envolve os cinco números mais importantes de toda a matemática:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

igualdade esta que é tida como a mais bela entre todas as igualdades, segundo Feynman [5].

1.5 Os Números Complexos como Pontos no Plano: Wallis, Wessel e Argand

Figura 1.9: John Wallis (1616 – 1703).

As primeiras noções de uma correspondência entre os números complexos e pontos num plano foram trazidas pelo matemático inglês John Wallis(Figura 1.9), em sua obra intitulada “De Algebra Tractatus”, publicada em 1685. Porém, suas ideias não tiveram nenhuma influência em seus contemporâneos.

A primeira representação de pontos num plano como números complexos que foi levada mais a sério foi a do topógrafo Caspar Wessel(Figura 1.10), em seu memorial “On the analytical representation of direction - an essay” de 1798. O primeiro objetivo de Wessel foi poder operar com segmentos de reta orientados e assim ele teve a ideia de olhar os números complexos como esses segmentos orientados. Wessel introduziu um eixo de números imaginários perpendicular ao eixo dos números reais e interpretou vetores como números complexos no plano (Figura 1.12). Assim, ele definiu as operações usuais de vetores para os números complexos, geometricamente falando.

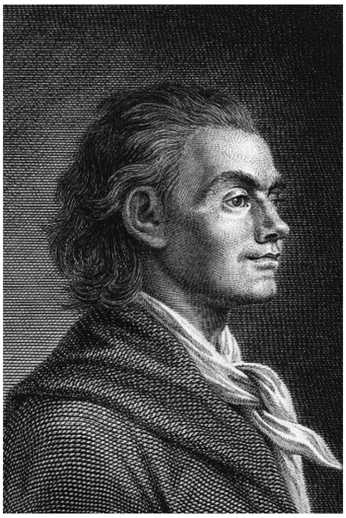

Figura 1.10: Caspar Wessel (1745 – 1818).

Uma interpretação geométrica diferente dos números complexos foi dada pelo suíço Jean Robert Argand(Figura 1.11) em sua “Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques”. Ele interpreta $\sqrt{-1}$ como uma rotação através de um ângulo reto no plano no sentido anti-horário e que o produto

$$(\sqrt{-1})(\sqrt{-1}) = -1$$

é equivalente a fazer duas rotações de ângulos retos, ou seja, o mesmo que uma reflexão.

Figura 1.11: Jean Robert Argand (1768 – 1822).

Desta forma, os números já eram conhecidos tanto na sua forma algébrica como na trigonométrica, além de sua interpretação geométrica.

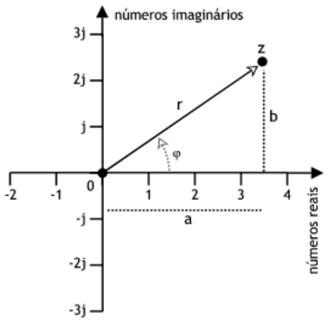

Figura 1.12: Forma Geométrica do número complexo.

1.6 Gauss e o Teorema Fundamental da Álgebra

Carl Friedrich Gauss (Figura 1.13) fez com que as visões sobre números complexos fossem mudadas. Ele já tinha conhecimento da interpretação dos números complexos como pontos no plano, o que podemos perceber numa carta em que Gauss escreveu para Bessel, onde diz: “Assim como se pode pensar em todo o domínio de grandezas reais como sendo representados por uma linha reta infinita, de mesmo modo o domínio completo de todas as grandezas, números reais e imaginários podem ser visualizados como um plano infinito, no qual o ponto definido pela abscissa

a e uma ordenada b, representa a magnitude do número $a + bi$"[4]. Ele usou este conhecimento em sua tese de doutorado, onde provou o Teorema Fundamental da Álgebra em 1799, aos 21 anos de idade. Esta tese até hoje é considerada a maior tese em matemática de todos os tempos.

Figura 1.13: Carl Friedrich Gauss $(1777 - 1855)$.

O teorema diz que "Toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, pelo menos, uma raiz complexa"[3]. Isso implica em que toda equação de grau n tem exatamente n raízes, eventualmente repetidas. Cerri e Monteiro em *História dos Números Complexos*[3] afirmam: "Assim, o Teorema Fundamental da Álgebra resolveu a questão das soluções de equações algébricas e ainda mostrou que o conjunto dos números complexos é o melhor conjunto para se tratar do assunto, pois contém todas as soluções de qualquer equação algébrica, de qualquer grau".

Mesmo, com a prova do Teorema Fundamental da Álgebra, a ideia dos números complexos não havia sido completamente disseminada até 1831, quando Gauss publicou "Theoria Residuorum Biquadraticorum. Comentatio Secunda". Aqui ele define claramente seus pontos de vista de uma maneira que supera todas as objeções lógicas, compra a expressão "número complexo" e descreve a atitude de seus contemporâneos a esses números, com as seguintes palavras: "Mas estes números imaginários, ao contrário de quantidades reais - anteriormente, e mesmo agora, ocasionalmente, embora impropriamente chamado impossível - foram apenas tolerados, em vez de dado cidadania plena e, portanto, aparecem mais como, um jogo jogado com símbolos desprovidos de conteúdo em si, a que um se abstém absolutamente de atribuir qualquer substrato visualizável. Ao dizer isto não se tem vontade de depreciar o tributo rico que este jogo com os símbolos tem contribuído para o tesouro das relações entre os números reais."[4]

E em relação à aura de mistério que rondava sobre os números complexos, Gauss diz que: "Se este assunto até agora tem sido considerado do ponto de vista errado e, assim, envolto em mistério e cercado pela escuridão, é em grande parte, à uma terminologia inadequada, que deve ser responsabilizado. Teve $+1, -1$ e $\sqrt{-1}$, em vez de ser chamado de positivo, negativo e imaginário (ou pior ainda, impossível) a unidade, fosse dado o nome de, digamos, unidade direta, inversa, e lateral. Então, dificilmente teria tido qualquer possibilidade para tal obscuridade."[4]

Podemos perceber que Gauss virou um verdadeiro advogado dos números complexos, lutando contra o preconceito que ainda existia na época, conforme este relato: "Poderia ser triste em tudo isso que, enquanto quantidades imaginárias ainda foram baseadas em uma ficção, não eram, por assim dizer, totalmente aceito em matemática, mas foram consideradas sim como algo a ser tolerado; eles permaneceram longe de ser dado o mesmo status que as quantidades reais. Já não existe qualquer justificação para tal discriminação, agora que a metafísica ou números imaginários foi colocado em uma verdadeira luz e que tem sido demonstrado que têm apenas como um bom significado objetivo real como os números negativos."[4] A citação original pode ser encontrada no livro NUMBERS. [4] (Figura 1.14)

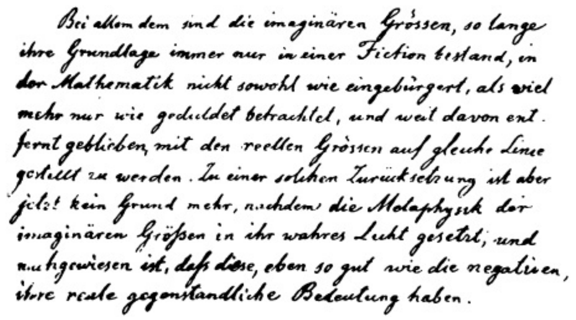
Bei allem dem sind die imaginären Grössen, so lange
ihre Grundlage immer nur in einer Fiction bestand, in
der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als viel
mehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon ent-
fernt geblieben, mit den reellen Grössen auf gleiche Linie
gestellt zu werden. Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber
jetzt kein Grund mehr, nachdem die Metaphysik der
imaginären Größen in ihr wahres Licht gesetzt, und
nachgewiesen ist, daß diese, eben so gut wie die negativen,
ihre reale gegenständliche Bedeutung haben.

Figura 1.14: Citação Original de Gauss, escrito à sua própria mão.

Com todo o trabalho e sua constante defesa aos números complexos, Gauss conseguiu remover toda a aura de misticismo dos números complexos, pois sua interpretação simples como pontos de um plano libertou essa grandeza fictícia de todo o mistério e especulações e deu a eles uma cidadania plena na matemática, assim como os números reais já possuíam. Simplesmente, podemos resumir que Gauss fez dos "impossíveis", possíveis.

Capítulo 2

Hamilton e o Seu Desejo de Ir Além

Neste capítulo abordaremos a grandiosa descoberta de Sir William Rowan Hamilton[7]. Trata-se da expansão dos números complexos, um conjunto da quarta dimensão, conhecidos como quatérnios de Hamilton[17]. Discorreremos todo o contexto histórico do desenvolvimento de tal conjunto como se é conhecido e também de suas características[10].

2.1 E se fosse possível expandir os complexos para o espaço?

Após Gauss ter difundido os números complexos, muitos matemáticos começaram a trabalhar com eles em suas pesquisas. Foi então que Sir William Rowan Hamilton (Figura 2.1) se encantou com os números complexos e especialmente com a interpretação geométrica como pontos ou vetores no plano atribuída a John Warren. Inspirado pelo trabalho de Warren e com suas ideias fervilhando , Hamilton então começou a pensar se era possível levar os números complexos para o espaço.

Foi quando ele tentou acrescentar um novo número imaginário diferente do conhecido i, mas de tal modo que este número elevado ao quadrado também fosse -1. Daí surgem os tripletos:

$$a + bi + cj, \text{ com } i^2 = -1, \; j^2 = -1 \text{ e } i \neq j.$$

(Forma algébrica)(Figura 2.5)

Figura 2.1: Sir William Rowan Hamilton ($1788 - 1856$).

$$(r\cos\theta, r\text{sen}\theta\cos\phi, r\text{sen}\theta\text{sen}\phi)$$

(Forma Polar)(Figura 2.4)

Lançada a ideia, será que seriam satisfeitas todas as propriedades algébricas que satisfazem os complexos no plano? Como se daria a interpretação geométrica de tais tripletos?

Eram estas e outras perguntas pertinentes que cercavam a mente de Hamilton. Para respondê-las, ele teria que testar os seus novos números. Veremos, então, como foram dados os testes destes números.

2.1.1 Multiplicação de Tripletos - Teste Geométrico

Em 1830, Hamilton fez seu primeiro teste, ao tentar definir uma multiplicação de tripletos, de modo que seu produto pudesse ser interpretado via rotações no espaço, baseando-se nas ideias de Warren em "Um Tratado sobre a Representação Geométrica de Raízes Quadradas de Quantidades Negativas". Lá encontramos o enunciado: "Se $ab = c$ e a tem inclinação de um ângulo A e b tem inclinação de um ângulo B, em relação à linha unitária; c terá inclinação de um ângulo $A + B$".

Observemos que Warren não se preocupou em dizer se o produto de duas linhas retas pertence ou não ao plano que contêm a linha reta unidade e as linhas fatores, porém pela Figura 2.2, concluímos que permanece sim no plano. Intrigado pelo fato de que Warren não havia discutido uma possível extensão para o espaço, Hamilton elaborou uma conjectura geométrica para o espaço com os tripletos.

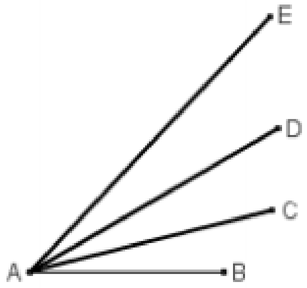

Figura 2.2: Produto de duas linhas retas.

Antes de lançar a sua conjectura geométrica, Hamilton observou que a multiplicação de pares de tripletos estava de acordo com o resultado de Warren, pois se duas linhas de comprimento r e r' e inclinações θ e θ' são representados em coordenadas polares pelos pares numéricos (Figura 2.3)

$$(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta) \text{ e } (r'\cos\theta', r'\mathrm{sen}\theta'),$$

o seu produto será

$$(rr'\cos(\theta+\theta'), rr'\mathrm{sen}(\theta+\theta')).$$

[10]

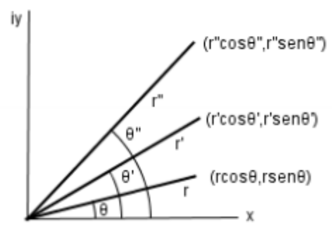

Figura 2.3: Ilustração da Observação de Hamilton.

Após estas observações, Hamilton fez então o enunciado da sua conjectura geométrica da multiplicação de tripletos:

"Como as linhas retas no espaço são somadas de acordo com as mesmas regras com as quais são somadas no plano, elas também poderiam ser multiplicadas de acordo com as mesmas regras com as quais são multiplicadas no plano, ou seja, multiplicando seus comprimentos e somando seus ângulos polares"

$$(rr' \cos(\theta + \theta'), rr'\text{sen}(\theta + \theta') \cos(\phi + \phi'), rr'\text{sen}(\theta + \theta')sen(\phi + \phi').$$

Em termos de tripletos, duas linhas do espaço podem ser identificadas como:

$$(r \cos \theta, r\text{sen}\theta \cos \phi, r\text{sen}\theta\text{sen}\phi) \text{ e } (r' \cos \theta', r'\text{sen}\theta' \cos \phi', r'\text{sen}\theta'\text{sen}\phi')$$

em que r, r' são seus comprimentos e θ, ϕ, θ', ϕ' são os ângulos que identificam essas linhas num sistema de referência no espaço, respectivamente, e o seu produto é um tripleto. Embora essa multiplicação esteja de acordo com sua conjectura geométrica, Hamilton teve que abandoná-la, pois a mesma, segundo o próprio Hamilton descobriu, "é inconsistente com o princípio distributivo"[10], uma das propriedades da teoria dos pares numéricos que ele pretendia preservar. Com essa conclusão, Hamilton decidiu não publicar integralmente essa tentativa.

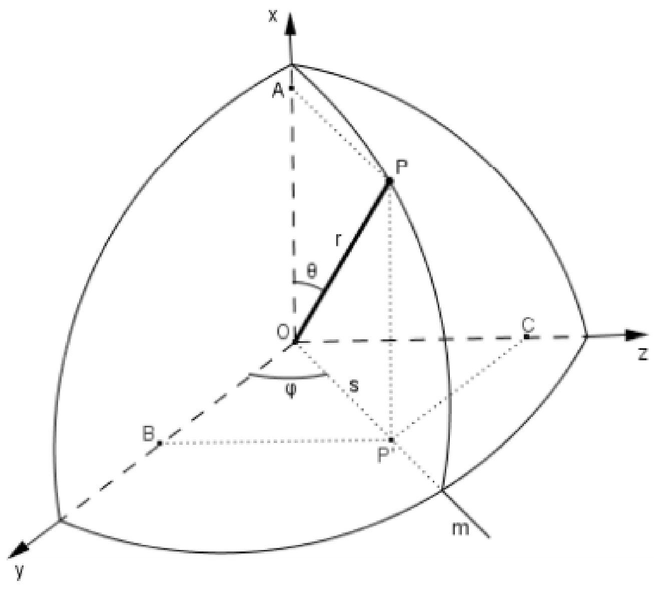

Figura 2.4: Tripleto $(r \cos \theta, r\text{sen}\theta \cos \phi, rsen\theta\text{sen}\phi)$.

2.1.2 Multiplicação de Tripletos - Teste Algébrico

Hamilton passou, então, a usar um modelo algébrico $x + iy + jz$ (Figura 2.5) como um tripleto para as suas novas tentativas, mas para validar suas conjecturas algébricas ainda utilizou-se da geometria. Segundo ele, um tripleto $x + iy + jz$ pode ser interpretado geometricamente como uma linha reta orientada do espaço com origem no ponto $(0, 0, 0)$ e extremidade em (x, y, z), em que as linhas dos números reais e as dos imaginários i e j são perpendiculares entre si. Nas palavras do próprio Hamilton:

"*Como $\sqrt{-1}$, em um sentido bem conhecido, é uma linha perpendicular à linha 1, parece natural que deva haver outro imaginário para expressar a linha perpendicular a ambas anteriores ...*"[10]

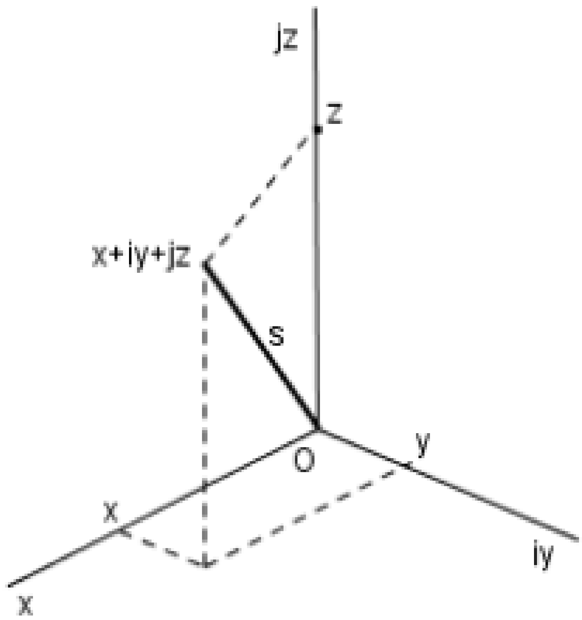

Figura 2.5: Tripleto $x + yi + zj$.

Em termos algébricos, Hamilton idealizou j também como uma raiz quadrada de -1, ou seja, $j^2 = i^2 = -1$. Em termos de rotações no plano, multiplicar por i^2 resulta numa rotação dupla de um ângulo reto no plano xy, e multiplicar por j^2 resulta numa rotação dupla de um ângulo reto no plano xz. (Figura 2.6)

Após definir algebricamente um tripleto, Hamilton passa a se preocupar com as operações entre dois tripletos, buscando que as mesmas propriedades que eram satisfeitas para os complexos no plano fossem satisfeitas para os tripletos no espaço. Ele definiu a adição de tripletos assim:

$$(a + ib + cj) + (x + iy + jz) = (a + x) + i(b + y) + j(c + z).$$

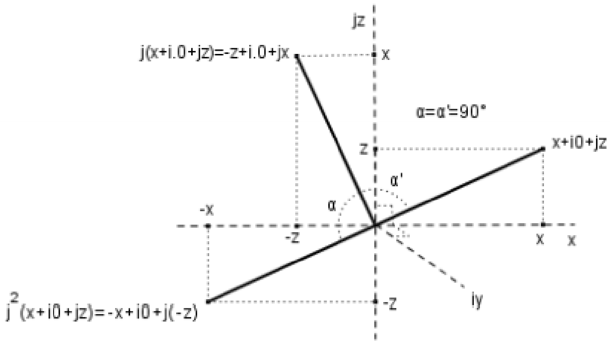

Figura 2.6: Interpretação de j via rotações no plano xz.

Com essa definição todas as propriedades da adição para os números complexos (associatividade; comutatividade; existência de elemento neutro; inverso aditivo) foram preservadas.

A dificuldade surgiu quando, após definir a multiplicação as propriedades fossem preservadas. Este problema deixaria a mente de Hamilton ocupada por vários anos. Vejamos, nas próprias palavras dele, os primeiros questionamentos sobre a multiplicação: "*chamando a antiga raiz, como os alemães frequentemente fazem, de i, e a nova de j, questionei quais leis deveriam ser assumidas para a multiplicação de $a + ib + jc$ com $x + iy + jz$ $(\ldots)$ Parece natural assumir que o produto é*

$$(ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz + cy),$$

mas o que fazer com ij? Deveria ser da forma $\alpha + i\beta + j\gamma$?"[10]

Podemos perceber o primeiro problema: A multiplicação de tripletos estava parecendo, à primeira vista, que não seria um tripleto, o que deveria ser esperado. Aparecia um termo estranho a um tripleto, o termo ij. Para tentar superar o obstáculo, Hamilton começou a fazer conjecturas sobre o produto ij, de modo que

$$(a + ib + jc)(a' + ib' + jc') = (a'' + ib'' + jc'')$$

satisfaça as seguintes condições:

1. O comprimento das linhas fatores deve ser igual ao comprimento da linha produto;

2. Os raios vetores dos pontos $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$ devem pertencer ao mesmo plano que contém o semieixo positivo dos x;

3. A soma das inclinações das linhas fatores deve ser igual à inclinação da linha produto.

2.1.3 Conjecturas para ij

1. $ij = \pm 1$

   Numa carta encaminhada para Graves, datada em 17 de outubro de 1843, Hamilton observou que o quadrado de ij deve ser igual a 1, utilizando-se das propriedades da comutativa e associativa da multiplicação:

   $$(ij)^2 = (ij)(ij) = i(ji)j = i(ij)j = (ii)(jj) = i^2j^2 = (-1)(-1) = 1.$$

   Para testar esta conjectura, Hamilton considerou uma multiplicação particular, a multiplicação de um tripleto por ele próprio:

   $$(a + ib + jc)(a + ib + jc) = a^2 - b^2 - c^2 + i(2ab) + j(2ac) + ij(2bc).$$

   Trocando-se ij por ± 1, obtém-se

   $$(a + ib + jc)^2 = (a^2 - b^2 - c^2 \pm 2bc) + i(2ab) + j(2ac)$$

   Hamilton não mostra os detalhes, mas conclui que esta multiplicação não satisfaz a condição 1, e abandona esta conjectura. Vejamos o trecho da carta em que ele se justifica: "*as nem mesmo assumindo isto* ($ij = \pm 1$) *teremos a soma dos quadrados dos coeficientes de* $1, i$ *e* j *no produto igual ao produto das somas dos correspondentes quadrados dos fatores.*"[10] Em símbolos, teremos:

   $$(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2) \neq (a^2 - b^2 - c^2 \pm 2bc)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2.$$

2. $ij = 0$

   Hamilton pensou nesta conjectura ao observar que a condição 1 é satisfeita no quadrado de um tripleto, caso despreze o termo $ij(2bc)$:

   $$(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 - b^2 - c^2)^2 + (2ab)^2 + (2ac)^2.$$

   Ele também observou que as condições 2 e 3 estavam sendo satisfeitas para este caso. A verificação das condições 2 e 3 pode ser feita através da Figura

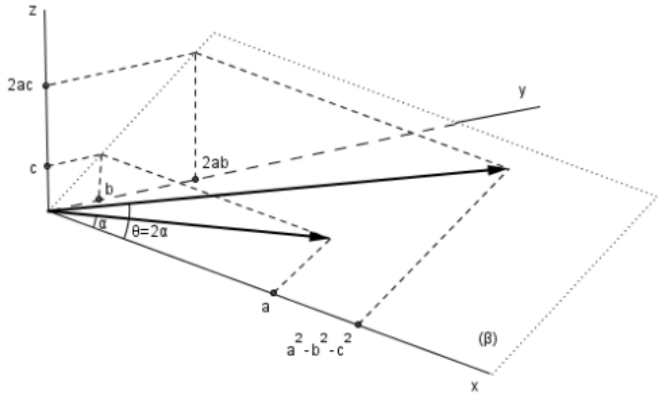

Figura 2.7: Interpretação geométrica para o quadrado de um tripleto.

2.7. Para a condição 2, basta vermos que β é o plano que contém o semieixo positivo dos x e cuja interseção com o plano yz é a reta $z = \frac{c}{b}y$, pois os raios vetores dos pontos a, b, c e $a^2 - b^2 - c^2, 2ab, 2ac$ são tais que $c = \frac{c}{b}b$ e $2ac = \frac{c}{b}2ab$.

Em relação a condição 3, podemos considerar os ângulos $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ como o ângulo formado pelos raios vetores do ponto (a, b, c) com o eixo positivo dos x e θ como o ângulo formado pelo raio vetor do ponto $(a^2 - b^2 - c^2, 2ab, 2ac)$ com o mesmo semieixo. Aplicando o Teorema de Pitágoras na Figura 2.7, teremos que

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{(2ab)^2 + (2ac)^2}}{a^2 - b^2 - c^2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 + 4a^2c^2}}{a^- b^2 - c^2},$$

de onde podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha_1 + \alpha_2) &= \tan(2\alpha) \\
&= \tfrac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2} \\
&= \tfrac{2\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}}{1-(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a})} \\
&= \tfrac{2\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}}{\frac{a^2-b^2-c^2}{a^2}} \\
&= 2\tfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{a^2-b^2-c^2} \\
&= \tfrac{\sqrt{4a^2b^2+4a^2c^2}}{a^2-b^2-c^2} \\
&= \tan\theta.
\end{aligned}$$

Apesar da conjectura $ij = 0$ estar de acordo com a conjectura geométrica de Hamilton numa multiplicação particular, é fácil verificar que não é válida para qualquer produto de tripletos. Por exemplo,

$$(1+i+j)(1+i+2j) = -2+2i+3j.$$

Com isso não teríamos a condição 1 satisfeita. Hamilton chamou esta conjectura de "estranha e desconfortável" e logo a abandonou sem justificativa.

3. $ij = -ji = k$

Hamilton percebeu que poderia fazer com que o termo ij sumisse do produto de uma outra maneira. Sem justificar, ele supôs $ij = -ji$, o que feriria a propriedade comutativa da multiplicação, mas foi através desta inovadora ideia que a história dos números imaginários começariam a avançar mais uma vez. Para começar o teste de sua teoria, ele considerou a multiplicação de dois tripletos com as mesmas coordenadas retangulares para as unidades imaginárias, ou seja:

$$\begin{array}{rcl} (a+ib+jc)(x+ib+jc) & = & ax-b^2-c^2+i(a+x)b+j(a+x)c \\ & + & ijbc+jibc \\ & = & ax-b^2-c^2+i(a+x)b+j(a+x)c \\ & + & ijbc-ijbc \\ & = & ax-b^2-c^2+i(a+x)b+j(a+x)c. \end{array}$$

Ele observou que o produto era um tripleto e que as condições 1, 2 e 3 estavam sendo satisfeitas. Para verificar a condição 1, é só ver que a igualdade a seguir é verdadeira

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+b^2+c^2) = (ax-b^2-c^2)^2+((a+x)b)^2+((a+x)c)^2$$

Para as condições 2 e 3, de modo análogo à Figura 2.7 podemos fazer com a Figura 2.8 obtendo as conclusões para a multiplicação apresentada nesta subseção. Mesmo que Hamilton não tivesse ainda testado para o caso geral, ele concluiu que a hipótese $ij = -ji$ é de fato correta, embora ele ainda não tivesse obtido nenhuma informação, até então, sobre o valor de k.

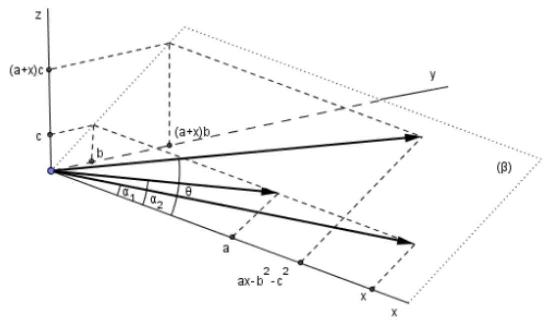

Figura 2.8: Interpretação geométrica para $(a + ib + jc)(x + ib + jc)$.

2.2 Surgem os Quatérnios

Partindo para uma multiplicação geral de tripletos e considerando $ij = -ji$, Hamilton concluiu que:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz - cy)$$

e em seguida, fez $k = ij = 0$. Portanto:

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx).$$

Ao verificar se a condição 1 para esta igualdade era satisfeita, ou seja, se a igualdade

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2$$

é verdadeira, Hamilton em suas próprias palavras, respondeu: "Não, o primeiro membro excede o segundo por $(bz - cy)^2$"[10], ou seja

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax - by - cz)^2 + (ay + bx)^2 + (az + cx)^2 = (bz - cy)^2.$$

Esta diferença $(bz - cy)^2$ foi crucial no avanço da história dos imaginários, pois foi quando ele finalmente percebeu como resolver o problema para o produto ij. "*Mas esta diferença* $(bz - cy)^2$ *é, justamente, o coeficiente de* k *no desenvolvimento do produto* $(a+ib+jc)(x+iy+jz)$ *se admitimos* $ij = k$ *e* $ji = -k$*, como antes(...)E aqui me veio a ideia de que devemos admitir, de alguma maneira, uma quarta dimensão para o espaço com o propósito de calcular com tripletos; ou transferindo o paradoxo para a álgebra, que devemos admitir um terceiro símbolo imaginário* k*, distinto de* i

e j, mas igual ao produto deste, nesta ordem; o que me levou a introduzir quatérnios tais como $a + ib + jc + kd$ ou $(a; b; c; d)$"[10].

Hamilton percebeu que, mesmo sem a possibilidade de uma visualização geométrica, teria de tomar uma decisão paradoxal; introduzir uma quarta dimensão. Assim, a descoberta dos quatérnios nos trouxe dois importantes fatos: é possível construir uma teoria algébrica que não respeite propriedades aritméticas, no caso, a comutatividade da multiplicação, e que para operar com linhas no espaço tridimensional foi preciso recorrer ao espaço de dimensão quatro.

Numa carta enviada ao seu filho Archibaldi, no ano de 1865, Hamilton escreveu:

"*Mas no dia* 16 *do mesmo mês* (*outubro de* 1843) *- que era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um círculo elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o arauto de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei uma caderneta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora(Figura 2.10). Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i, j, k*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que contém a solução do problema"(Figura 2.9)[10].

Na placa está escrito: "Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge".

Para finalizarmos este capítulo, vamos mostrar a tábua de multiplicação(Figura 2.11) com os símbolos i, j, k. Hamilton chegou a estas conclusões

$$ik = iij = (-1)j = -j; \;\; kj = ijj = i(-1) = -i$$

e assim, como $ij = -ji$, ele conclui que $ki = j$ e $jk = i$. A tábua também nos lembra que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

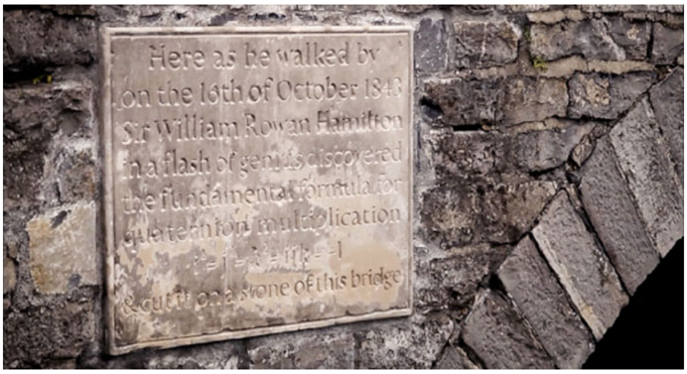

Figura 2.9: Placa na Broom's Bridge sobre o Royal Canal.

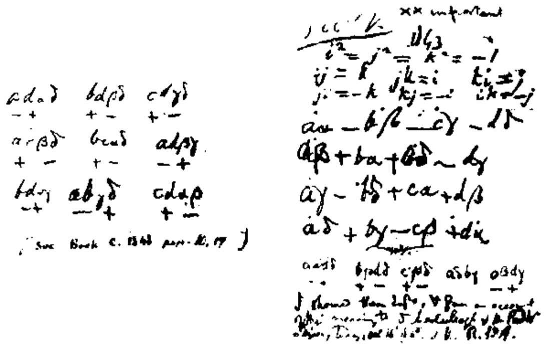

Figura 2.10: Bloco de Notas de Hamilton.

	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Figura 2.11: Tábua de Multiplicação das Unidades Imaginárias i, j, k.

Capítulo 3

Até onde podem ir os imaginários?

Neste capítulo serão abordados as extensões de 8 e 16 dimensões dos números complexos, o conjunto dos octônios e o conjunto dos sedênios, respectivamente[2]. Comparando cada estes conjuntos entre si, entendendo a particularidade de cada conjunto[2]. Finalizando com algumas aplicações destes mesmos conjuntos[1], [8], [9], [12], [14], [15], [16], [17].

3.1 Os Octônios

Enquanto Hamilton se fascinava com o mais novo conjunto que descobrira, enviou uma carta ao seu amigo, John Graves(Figuras 3.1), um dia após o estalo sobre o Royal Canal. John, nove dias depois, respondeu: "Ainda há algo no sistema que me atormenta. Eu ainda não tenho uma clara visão de até que ponto temos a liberdade de criar imaginários e dotá-los de propriedades sobrenaturais. (...) Se com sua alquimia você pode fazer três potes de ouro, por que parar por aí?"

Com este trecho da carta de resposta de Graves a Hamilton, podemos perceber que a mente de Graves estava sedenta e curiosa por descobrir algo além dos quatérnios que Hamilton desenvolvera. Em 26 de dezembro 1843, mesmo ano em que os quatérnios foram descritos pela primeira vez, em nova carta endereçada a Hamilton, Graves descreve um novo sistema numérico octodimensional, conhecido hoje como octônios. Entretanto, ele não conseguiu fazer com que Hamilton se interessasse pelas suas ideias. A única coisa que ele conseguiu de Hamilton foi uma promessa de uma publicação sobre os octônios na Irish Royal Society, maneira como os matemáticos se tornavam públicos na época. Porém Hamilton não cumpriu com a sua promessa e

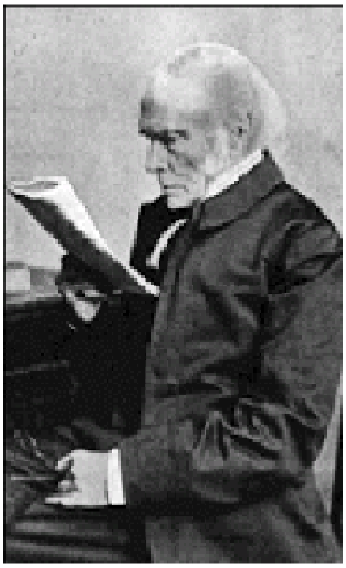

Figura 3.1: John Graves (1806 – 1870).

Graves não teve a sua obra publicada. Uma infelicidade, pois dois anos depois outro matemático, Arthur Cayley(Figura 3.2), redescobriu os octônios e os publicou como sendo ideia original dele. Os octônios ficaram conhecidos na história como números de Cayley e não números de Graves.

Podemos nos perguntar por que Hamilton não se encantara com os octônios? Provavelmente ele estava obcecado com a sua própria descoberta: os quatérnios. Mas ainda havia outra coisa que não agradara muito Hamilton nos octônios. Estes números quebram algumas leis da aritmética.

Os quatérnios já eram um pouco estranhos, pois o seu produto não era comutativo; mas os octônios além de não ter o produto comutativo também não era associativo. A não comutatividade dos quatérnios era interessante pelo fato de que a ordem dos fatores influenciava na rotação dos quatérnios. Um exemplo simples de que a ordem influencia na rotção: Pegue um livro, vire-o de cabeça para baixo, de modo que você agora veja a capa de trás, e depois gire 90 graus no sentido horário. Agora troque a ordem dessas operações: primeiro gire 90 graus no sentido horário, e depois vire o livro. A posição final é diferente da primeira obtida. Pois o resultado depende da ordem; as rotações não comutam.

Vejamos na figura 3.3 a tábua de multiplicação dos octônios.

Assim, com tanta estranheza, os octônios levantavam questionamentos entre os

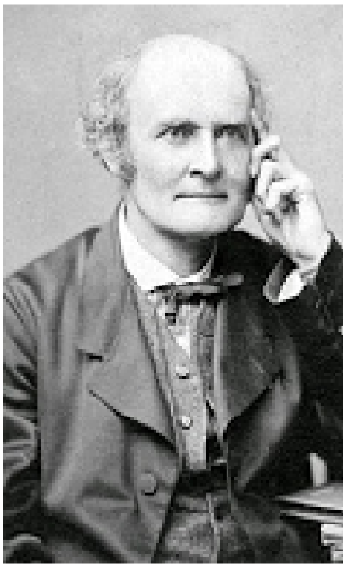

Figura 3.2: Arthur Cayley (1821 – 1895).

$\times$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$

Figura 3.3: Tábua de multiplicação dos octônios.

matemáticos, talvez porque não estava bem claro a utilidade dos octônios , já que eles estão ligados com a geometria de rotações de sete e oito dimensões, sendo que por mais de um século isso foi um exercício puramente intelectual. Levaria um tempo até ser desenvolvido teorias na física, como as das partículas, e teoria das cordas, que precisam dos octônios para serem desenvolvidas.

3.2 Até onde podem ir os imaginários?

Sabemos até agora da existência dos Complexos, dos Quatérnios e dos Octônios, que são conjuntos de 2, 4 e 8 dimensões, respectivamente. Mas será que existem conjuntos com unidades imaginárias com 2^n dimensões? Antes de responder a esta pergunta, vale a pena falarmos de um teorema desenvolvido por Adolf

Hurwitz(Figura 3.4), conhecido como O Teorema (1, 2, 4, 8), ou O Problema de Hurwitz que simplesmente consistia em determinar todas as álgebras de composição sobre os reais.

Figura 3.4: Adolf Hurwitz (1859 – 1919).

O problema surgiu em conexão com um outro problema sobre formas quadráticas também considerado por Hurwitz. Ele consegue provar que só existem álgebras de composição para $n = 1, 2, 4$ e 8[13]. Em álgebras de composição temos que é preservada a propriedade de que se um produto entre dois elementos de um mesmo conjunto é o elemento neutro, então um destes dois elementos é o próprio elemento neutro.

Temos que no conjunto dos complexos, o produto entre seus elementos é comutativo e associativo; No conjuntos dos quatérnios, o produto entre seus elementos é associativo, mas não comutativo; No conjunto dos octônios o produto entre seus elementos, não é associativo nem comutativo, mas todos eles preservam a propriedade do produto com o elemento neutro. O que acontece com outros conjuntos de dimensão 2^n, com $n > 3$, é que estes conjuntos quebram também esta propriedade.

Através de um processo chamado Cayley-Dickson aplicado aos octônios, obtemos uma sequência de c-álgebras de dimensões 16, 32, 64, assim por diante. A primeira delas é chamada de sedênios e é 16-dimensional. Todas c-álgebras nesta sequência são satisfatoriamente normadas, mas não reais, nem comutativas, nem associativas.

Todas tem inversos multiplicativos mas não são álgebras de divisão, pois o cálculo mostra que os sedênios e todas as outras têm zero divisores. Todos os números hipercomplexos (números com mais de uma unidade imaginária) baseados no processo de construção de Cayley-Dickson possuem o zero como divisor.

3.3 Sedênios

Cada sedênio é uma combinação linear das unidades $e_0, e_1, e_2, e_3, ..., e_{15}$, onde cada $e_i = \sqrt{-1}$, com $1 \leq i \leq 15$ e e_0 é o escalar puro, equivalente ao número 1 no conjunto dos reais. Formando uma base para o espaço dos sedênios. Assim cada sedênio pode ser representado na forma: $x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_{14}e_{14} + x_{15}e_{15}$.

A adição e a subtração são definidos pela adição e subtração dos coeficientes correspondentes e a multiplicação é distributiva para a adição.

Assim como as álgebras baseadas no processo de construção Cayley-Dickson, os sedênios contêm as álgebras pelas quais foi construído. Eles contêm os octônios (e_0 ao e_7), que também contêm os quatérnios (e_0 ao e_3), os complexos (e_0 e e_1) e os reais (e_0).

$\times$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	e_9	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	$-e_0$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_9	e_8	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	e_{11}	e_8	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	e_3	$-e_0$	$-e_1$	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-e_0$	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	$-e_0$	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_{13}	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_1	$-e_0$	e_3	$-e_2$
e_{14}	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	$-e_0$	e_1
e_{15}	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Figura 3.5: Tábua de Multiplicação dos Sedênios.

Os sedênios têm o e_0 como o elemento neutro da multiplicação, e como já citado sobre estes tipos de conjuntos, os sedênios possuem inversos multiplicativos, mas não são uma álgebra de divisão, pois o zero é divisor neste conjunto, ou seja, dois sedênios não-nulos podem ser multiplicados e obter o zero. Como exemplo, se multiplicarmos $e_3 + e_{10}$ por $e_6 - e_{15}$, teremos:

$$(e_3 + e_{10})(e_6 - e_{15}) = e_5 - e_{12} + e_{12} - e_5 = 0$$

Veja a tábua de multiplicação dos sedênios (Figura 3.5).

É interessante percebermos o que nos traz o processo de Cayley-Dickson: Todo número complexo C é descrito na forma $C = r_0 + ir_1$, onde r_0, r_1 são números reais, e i uma unidade imaginária. Todo quatérnio Q pode ser descrito como $Q = c_0 + jc_1$, onde c_0, c_1 são números complexos e j, uma outra unidade imaginária distinta de i. Todo Octônio O pode ser descrito como $O = q_0 + lq_1$, onde q_0, q_1 são quatérnios, e l é uma outra unidade imaginária diferente de i e j. Todo Sedênio S pode ser descrito como $S = o_0 + eo_1$, onde o_0, o_1 são octônios e e uma unidade imaginária distinta das anteriores.

3.4 Aplicações dos Números Hipercomplexos

Por mais que estes números pareçam estranhos, seja pela quantidade de unidades imaginárias, todas iguais a $\sqrt{-1}$, e diferentes entre si, ou seja pela sua falta, de comutatividade, associatividade ou ainda a presença do zero como divisor, estes números não são apenas números que ficam na teoria, eles também ficam na prática. Não que eles não tenham uma construção demasiadamente filosófica, apesar de bela; Eles têm aplicações que nunca imaginávamos ter.

Os próprios complexos, quando surgiram, não tinham aparentemente alguma aplicação sequer, mas com o passar dos anos foram surgindo inúmeras aplicações e foram se mostrando muito úteis nas áreas da física, engenharias elétrica, civil e mecânica, entre outras. Em que será então aplicados os hipercomplexos? É o que vamos ver agora.

3.4.1 Aplicação dos Quatérnios

Hamilton definiu uma espécie de vetor esférico (Figura 3.6), geometricamente corresponde a um arco orientado sobre um meridiano da esfera e algebricamente corresponde ao quociente de quatérnios unitários puramente vetoriais que representam os extremos do arco. Este quociente, se multiplicado pelo primeiro extremo do arco, resulta no segundo, da mesma forma que um vetor usual, adicionado ao ponto de partida, resulta no ponto de chegada. Enquanto o vetor usual representa a diferença entre os pontos final e inicial e é livre, na esfera, só pode partir de qualquer ponto inicial no mesmo ponto inicial em um mesmo meridiano.[15]

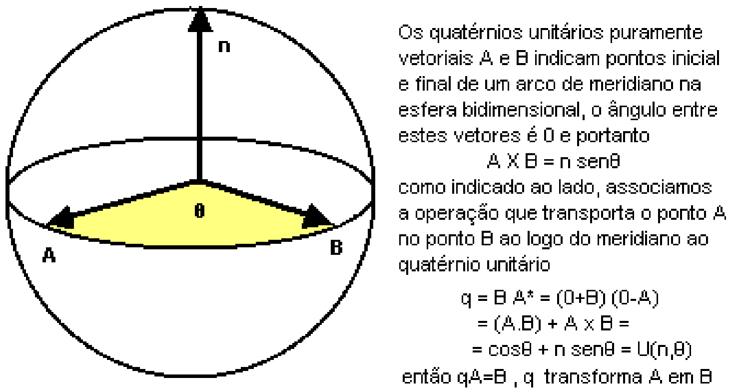

Figura 3.6: Vetor Esférico.

Cada triângulo e cada polígono esférico está associado a uma sequência de rotações que trazem um objeto de volta à posição original. A última rotação, associada ao último lado, é exatamente o oposto da composta das $n-1$ primeiras. Tudo é muito semelhante ao fato da soma dos vetores associados aos lados de um polígono dar zero, como na geometria analítica.

O fato de que $(CA)(BC)(AB) = 1$ é a condição de fechamento do triângulo esférico e as partes escalar e vetorial são equivalentes as leis dos cossenos e dos senos da trigonometria esférica. De modo que fica muito mas fácil se trabalhar com quatérnios do que com a trigonometria esférica. Daí uma grande utilidade dos quatérnios. Notem que se tomamos todos os arcos de meridianos possíveis sobre a esfera, obtemos todos os quatérnios unitários possíeis, isto permite-nos identificar os pontos da esfera tridimensional com quocientes de direções no espaço tridimensional usual. [15]

Outra aplicação dos quatérnios está na álgebra matricial. Os dispositivos mecânicos, como giroscópios, rastreadores, braços robóticos, etc., não podem ter uma matriz singular no software. Uma matriz singular pode causar bloqueio no eixo cardã e travar o dispositivo, porque um grau de liberdade, entre os três eixos está perdido. Isso seria muito perigoso para um sistema de navegação lutador da força aérea, por exemplo.

Além disso pode ser muito dispendioso para uma fábrica de automóveis que utiliza braços robóticos. Rotações, através dos quatérnios, não apresentam o problema no eixo cardã. Os quatérnios também exigem menos etapas de programação do que a rotação da matriz. Menos etapas de programação equivale a um software mais rápido e mais eficiente.[2]

Rotação também é usada na animação por computador. Como os computadores se tornam mais rápidos, os consumidores precisam de incentivos para compras as máquinas mais caras. Jogos de vídeo oferecem fortes incentivos para aqueles que tomam seu lazer a sério. Jogos de vídeo interativos precisam de métodos eficazes de girar objetos virtuais. Por exemplo, os três jogos de vídeo do Tomb Raider I, II e III tiraram proveito dos quatérnios.

A álgebra matricial utiliza ângulos de Euler, que são ângulos de rotação no sistema de coordenadas retangulares. O problema é que os ângulos de Euler produzem um tipo anormal de movimento. Com os quatérnios, as rotações são suaves e naturais. É por isso que o desenvolvimento de software de programação da Microsoft oferece ferramentas de engenharia dos quatérnios.

Os quatérnios também são utilizados nas imagens por ressonância magnética e na Tomografia Axial Computadorizada (TAC), ou simplesmente, Tomografia Computadorizada. A tecnologia de ressonância magnética utiliza energia magnética e ondas de rádio, afim de produzir imagens em corte transversal do corpo humano. A tecnologia TAC utiliza raios-x. Como os raios-x passam através do corpo, que são atenuados em níveis diferentes.A ressonância magnética e tomografia computadorizada realizam transformações rígidas que são representadas por quatérnios. Cada quatérnio é iterado como uma mudança interpolada que é calculada para a posição e orientação. Além disso, a rotação interpolada é um pequeno ângulo de aproximação de uma rotação de um quatérnio que é linear em três parâmetros.[8]

3.4.2 Aplicação dos Octônios

Entre os anos de 1970 e 1980, os físicos desenvolveram uma teoria chamada supersimetria. Ela afirma que nos níveis mais fundamentais, o Universo exibe uma simetria entre a matéria e as forças da natureza. Cada partícula de matéria tem uma partícula parceira que carrega a força e cada partícula de força tem uma partícula de matéria como gêmea. A supersimetria também engloba a ideia de que as leis da física permaneceriam imutáveis se trocássemos todas as partículas de matéria e força. Porém, ainda não se encontrou qualquer evidência experimental que suporte a supersimetria, mas muitos físicos acreditam que ela seja real.

Entretanto, uma coisa que sabemos ser real é a mecânica quântica e de acordo com ela as partículas são, também, ondas. Na versão padrão tridimensional da mecânica quântica, existe um número, chamado espinor, que descreve o movimento ondulatório de partículas de força. Se quisermos entender as interações entre as partículas, temos de combinar esses dois tipos usando uma imitação remendada da multiplicação. Embora o sistema que usamos agora pareça funcionar bem, ele não é muito elegante. Como alternativa, imagine um estranho universo desprovido de tempo, contendo apenas o espaço. Se esse universo tem dimensão um, dois, quatro ou oito, então ambas partículas de matéria e força seriam ondas descritas por um único tipo de número, ou seja, um número em uma álgebra de divisão, o único tipo de sistema que permite a adição, subtração, multiplicação e divisão. Em outras palavras, nessas dimensões os vetores e os espinores coincidiriam: eles seriam cada um apenas números reais, complexos, quatérnios ou octônios, respectivamente. A supersimetria emerge naturalmente, provendo uma descrição unificada da matéria e das forças. Uma simples multiplicação descreve as interações e todas as partículas, não importa o tipo, usam o mesmo sistema numérico.

Ainda assim, nosso universo não poderia ser real porque precisamos levar em conta o tempo. Na teoria de cordas essa consideração tem um efeito intrigante. Em qualquer momento no tempo, uma corda é um objeto unidimensional como uma curva ou uma linha, mas essa corda traça uma superfície bidimensional conforme o tempo passa. Essa evolução muda as dimensões nas quais a supersimetria aparece, ao adicionar duas, uma para a corda e uma para o tempo. Em vez da supersimetria em dimensão um, dois, quatro ou oito, tempos com essa adição, a supersimetria em três, quatro, seis ou dez.

Os teóricos dizem que apenas as versões com dez dimensões são autoconsistentes. As demais sofrem anomalias nas quais o mesmo cálculo, quando efetuado de maneiras diferentes, dão resultados diferentes. Em qualquer outra versão que não a decadimensional a teoria de cordas falha, mas a decadimensional é a versão da teoria que usa octônios. Assim, se a teoria da cordas estiver correta, os octônios não são uma mera curiosidade pois eles fornecem uma razão profunda porque o universo deve ter dez dimensões.

Recentemente, os físicos começaram a ir além das cordas para considerar as membranas. Uma membrana bidimensional, ou 2-brana, parece com uma folha a cada instante. Conforme o tempo passa, ela traça um volume tridimensional no espaço-tempo. Enquanto na teoria das cordas tínhamos de adicionar duas dimensões, agora são três. Assim, quando lidamos com membranas, esperaríamos que a supersimetria emergisse naturalmente em dimensão quatro, cinco, sete e onze, o que implica em que ela deveria fazer, naturalmente, o uso dos octônios. Infelizmente, ninguém entende a teoria das membranas bem o suficiente para escrever até suas equações básicas.[1]

Tanto na teoria das cordas, quanto na teoria das membranas, ainda não existe nenhuma predição experimentalmente testável, sendo apenas sonhos. Devido a esta incerteza, ainda estamos distantes de saber se os octônios são imprescindíveis para o entendimento do mundo que vemos ou se são apenas um ramo da matemática.

3.4.3 Aplicação dos Sedênios

Os multicomponentes dos números hipercomplexos são amplamente utilizados para a reformulação da mecânica quântica e equações da teoria de campos. A primeira generalização da mecânica quântica e eletrodinâmica foi feita com base nos quatérnios, que foram interpretados como vetores escalares. O passo seguinte foi dado com base nos octônios, que foram interpretados como a soma de escalares, pseudoescalar, vetores polares e vetores axiais. Escalares e vetores axiais não são transformados sob inversão espacial enquanto pseudoespaciais e vetores polares mudam seu sinal sob inversão espacial. Portanto esta interpretação leva apenas a simetria em relação à inversão espacial em conta. Contudo um abordagem relativista consistente requer uma simetria completa, com a tomada do tempo e do espaço, ou seja, requer às álgebras de 16 dimensões, os sedênios. Mesmo assim é só na teoria, sem nada muito experimental.[9]

Com isso chegamos a conclusão que os conjuntos de números imaginários com dimensão oito ou mais não possuem uma aplicação tão palpável, mas o que sabemos do futuro? Na época em que os complexos, e até mesmo os quatérnios foram emfim estruturados não passavam de apenas uma bela filosofia e hoje são ferramentas muito úteis para o avanço da humanidade. Mesmo que os octônios e os sedênios não venham a ser aplicados, fica a sua estrutura que serve para estimular e instigar nossa mente para saber até onde podem ir estes números.

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho foi apresentar a professores e alunos do ensino médio e a mentes curiosas por matemática, a origem dos números complexos. Como se deu a evolução ao longo dos séculos, desde os primeiros cálculos de Cardano até o seu estabelecimento definitivo com Gauss.

Espera-se que este trabalho possa ser lido pelo público alvo e usado pelos professores do ensino básico, mostrando aos seus alunos que não é tão fácil o caminho que a matemática percorre até chegar nos livros didáticos, prontos para eles aprenderem a teoria.

Também foi nosso objetivo mostrar que existem outros conjuntos que são formados por mais de uma unidade imaginária e com isso instigar a mente dos leitores, mostrando que sempre se pode ir além e não se contentar com o que os outros já descobriram ou com o que está escrito nos livros.

Particularmente, eu não conhecia nem a metade da história contada neste trabalho e nunca havia ouvido falar dos números hipercomplexos. Fiquei muito elfórico a cada descoberta que fazia e gostaria que os leitores tivessem o mesmo sentimento.

Apesar deste trabalho não mostrar aplicações dos números complexos, somente dos hipercomplexos, deixo aqui o meu pedido aos professores que pesquisem por si mesmos algumas aplicações e mostrem aos alunos que os números complexos não são apenas mais uma teoria, ou apenas mais um assunto a se estudar para passar de ano e sim que são muito importantes para a nossa vida.

Referências Bibliográficas

[1] BAEZ, John C.; HUERTA, John. **Os estranhos números da teoria de cordas**.[S. I.]. Scientific American Brasil, Duetto, 2011.

[2] CARTER, Michael T. B. **Hypercomplex numbers from the quaternions to the sedenions**. Purdue University, West Lafayette, 2010.

[3] CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **História dos Números Complexos**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2001.

[4] EBBINGHAUS, H. D.; et al. **Numbers**. 3^{rd} edition. New York: Springer, 1995.

[5] Feynman, Richard.**The Feynman Lectures on Physics: Volume I**. [S.l.: s.n.], 1970.

[6] GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas**. 3.ª edição. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

[7] HAMILTON, William R.; WILKINS, David R. (Ed.). **Researches respecting quaternions: First Series**. Dublin, Transactions of the Royal Irish Academy, vol. 21, part 1 (1848), pp. 199-296, 2000.

[8] MIRONOV, Victor L. **Application of hypercomlex numbers and Clifford algebras**. [S. I.]. [s. n.], 2015.

[9] MIRONOV, Victor L.; MIRONOV, Sergey V, **Associative space-time sedenions and their applications in relativistic quantum mechanics and field theory**. Scientific Research Publishing. Nizhny Novgorod, 2014.

[10] NEVES, Robson C. **Os quatérnios de Hamilton e o espaço**. 2008. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

[11] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Adolf Hurwitz*. School of Mathematics and Statistics. University of St. Andrews. St. Andrews, 2005.

[12] PENDENZA, Cristiane A. **Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo "De Moivre"**. 2006. (Mestrado em Matemática Aplicada). Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto.

[13] PRÉCENTH, Rasmus. **The (1, 2, 4, 8) - Theorem for composition algebras**. Uppsala University. Uppsala, 2013.

[14] RISING, Justin. **What is the meaning and use of the sedenions?**. Quora. [s.n.], 2013.

[15] ROSA, Márcio A. F. **Aplicações às isometrias do espaço tridimensional e à geometria da esfera**.Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2011.

[16] ROSA, Márcio A. F. **Complexos e aplicações geométricas**.Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2011.

[17] ROSA, Márcio A. F. **Quatérnios, a generalização quadrimensional**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2011.