UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FRANCISCO DANIEL SILVA DE SOUZA

UMA MATEMÁTICA LÚDICA: “TODO NÚMERO É INTERESSANTE”

FORTALEZA – CEARÁ
2015

FRANCISCO DANIEL SILVA DE SOUZA

UMA MATEMÁTICA LÚDICA: “TODO NÚMERO É INTERESSANTE”

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro De Ciências E Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Flávio Alves Aguiar

FORTALEZA – CEARÁ

2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Souza, Francisco Daniel Silva de .
Uma matemática lúdica: "todo número é interesante" [recurso eletrônico] / Francisco Daniel Silva de Souza. - 2015.
1 CD-ROM: il.; 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 83 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2015.
Área de concentração: Teoria dos Números.
Orientação: Prof. Dr. Alberto Flávio Alves Aguiar.

1. Números Naturais Interessantes. 2. Princípio da Indução Matemática. 3. Números Primos . 4. Números de Fibonacci. 5. Números Poligonais. I. Título.

FRANCISCO DANIEL SILVA DE SOUZA

UMA MATEMÁTICA LÚDICA:

"TODO NÚMERO É INTERESSANTE"

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 03 de dezembro de 2015.

AVALIAÇÃO

Prof. Dr. Alberto Flávio Alves Aguiar

(Orientador)

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda

Universidade Estadual do Ceará – UECE

A você, minha mãe Zilma, que sempre abdicou de priorizar sua vida para investir na minha.
E a você Paula Denise, meu amor e minha companheira na vida e nos sonhos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo meu existir.

A minha mãe por todos os sacrifícios que fez pelo meu bem estar e pela minha educação.

A minha amada, guerreira e fantástica esposa que suportou comigo, de forma compreensiva, todas as adversidades até chegarmos a realização desse sonho.

A todos os colegas sobreviventes do PROFMAT – UECE, agora Mestres, pela amizade e solidariedade ao longo do curso.

A meus familiares, pela formação de meus valores e pelo acolhimento mesmo nos momentos mais difíceis.

A meus amigos, que mesmo distantes sempre torcem por mim.

A minha diretora e amiga Sônia Mascarenhas, por toda compreensão e apoio dado nesses últimos três anos diante da dificuldade de conciliar trabalho e estudo.

A meus professores do PROFMAT – UECE e, em especial, ao meu orientador Professor Doutor Alberto Flávio, que conduziu brilhantemente a realização deste trabalho compartilhando seu arsenal de conhecimentos sobre a História da Matemática.

E a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização desse sonho.

“A evolução é a lei da vida, o número é
a lei do universo e a unidade é a lei de Deus.”
(Pitágoras)

RESUMO

Todo número natural é interessante! É fácil imaginar alguém se dando conta do quão interessante é certo número devido às suas propriedades. Poderia, então, indagar sobre outras ocorrências de números interessantes, caso existam. Se gostar de Matemática, poderia mesmo até começar a pensar sobre este assunto. Este trabalho tem como objetivo mostrar que todos os números são interessantes. É isso mesmo! Aqui há unanimidade e absolutamente nenhuma discórdia. Difícil de acreditar quando tudo ao redor apresenta contradições e dualidades irreconciliáveis. Uma propriedade como esta torna os números muito atraentes. Deseja-se chamar a atenção para esta verdade tão singular que só mesmo os números poderiam possuir — além de sua onipresença em nossas atividades e sem os quais estaríamos de volta a uma época anterior à Idade da Pedra. São oferecidos muitos exemplos, além provas de que todos os números gozam desta propriedade, mesmo sendo, a humanidade, impotente para descrevê-los um a um, pois são infinitos! No texto, é narrado um acontecimento entre os matemáticos H. G. Hardy (inglês) e S. Ramanujan (indiano), no qual ambos concordam que 1729 é um número (muito) interessante. Hardy, um especialista renomado em Teoria dos Números, ainda não havia percebido que todos os números, sem exceção, são interessantes. É claro que ele conhecia muitas famílias de números interessantes, mas não atentara que esta qualidade valia para *todos*. Nada de extraordinário, pois o conhecimento não despenca de uma vez, mas vem aos poucos e às vezes dá saltos pelas mãos de gênios. A beleza e os mistérios dos números os têm mantido no foco de muitos. Hoje, mais do nunca antes, pois somos totalmente dependentes deles no nosso viver cotidiano. As mentes jovens são poderosas e plásticas. Se algo as atrai com força, pode brotar desta atração frutos de inestimável valor. Este algo pode ser a atração do estudo dos números.

Palavras-chave: Números Naturais Interessantes. Princípio da Indução Matemática. Números Primos. Números de Fibonacci. Números Poligonais.

ABSTRACT

Every natural number is interesting! It is easy to imagine one realizing how interesting a given number is due to its features. One could then inquire about other instances of interesting numbers, in case they exist. If one likes Mathematics, one could even start to think about this subject. This paper aims to show that all numbers are interesting. That is right! Here there is unanimity and absolutely no disagreement. It is hard to believe when everything else around displays irreconcilable contradictions and dualities. A feature like that makes numbers something very attractive. We wish to draw attention to this unique truth, which only numbers could have – in addition to their omnipresence in our daily activities, without which we would be back to a time before the Stone Age. There are a lot of examples and evidences showing that numbers possess this feature, although humankind is unable to describe all numbers individually, for they are infinite! In the text, it is narrated an event that took place between mathematicians H. G. Hardy (English) and S. Ramanujan (Indian), when both of them agreed that 1729 is a (very) interesting number. Hardy, a renowned expert in Theory of Numbers, had not yet realized that all numbers, without exception, are interesting. He obviously knew many families of interesting numbers, but did not perceive that this quality comprised *all* of them. Nothing extraordinary, because knowledge does not arise at once; instead, it is developed little by little and sometimes leaps through the hands of geniuses. The beauty and mystery of numbers have been calling the attention of many. Nowadays more than ever before, for we are utterly dependent on them in our daily lives. Young minds are powerful and plastic. If something tightly attracts them, invaluable fruits can sprout from this attraction. This something can be the attraction for the study of numbers.

Keywords: Interesting Natural Number. Priciple off Mathematical Induction. Prime Numbers. Fibonacci Numbers. Polygonal Numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda aspectos da teoria dos números e sua história, pondo em primeiro plano os números naturais e alguns dos seus subconjuntos notáveis através de suas propriedades. Exemplos pontuais vão sendo oferecidos, nos quais, propriedades particulares deste número são destacadas para, em seguida, apresentar uma generalização abrangente: “todo número natural é interessante”.

Os primeiros números naturais surgiram já nos primórdios da humanidade. Registros históricos sugerem que não eram vistos de forma abstrata como acontece hoje, mas ligados a atividades da luta diária para continuar vivo. Ainda hoje, é prática corrente, apresentar, de forma concreta, os primeiros naturais às crianças, nos seus anos iniciais na escola. Elas repetem aceleradamente as etapas percorridas durante dezenas de milênios da humanidade. Mesmo sendo guiado por pessoas experientes, o processo é penoso e a luta quase sempre exige delas esforço e tempo para aprender a contar.

Só em tempos recentes, relativamente à longa história da humanidade, foi que teve início o estudo sistemático dos números. Aconteceu em sociedades que dispunham de recursos acima das necessidades diárias e dentro de uma classe ociosa. Alguns exemplos:

Pitágoras, um matemático do século VI a.C., se destacou pelo sucesso de sua metodologia capaz de produzir demonstrações, razoavelmente, rigorosas. Ele e seu grupo enxergaram padrões na névoa da abstração dos números dispondo-os em arranjos geométricos (de forma figurada), na maioria das vezes plana e, ocasionalmente, espacial.

Os matemáticos Eratóstenes, cerca de 250 a.C.; Mersenne e Fermat, no século XVII; e Stanisław Ulam, recentemente falecido (13/05/1984), entre muitos outros, se esforçaram na busca de fórmulas e padrões de distribuição dos números primos. Primos, como logo veremos, são como os átomos na Natureza: todo número é expresso de maneira única como produto de primos.

Fibonacci, no século XIII, fez conhecido o sistema de numeração indo-arábico por toda Europa Ocidental através de sua obra *Liber Abbaci*, publicada em 1202, desbancando o ineficiente sistema de numeração romano largamente usado na época. Foi nessa mesma obra que Fibonacci apresentou um problema, embora irrealista, sobre a reprodução de casais de coelhos que resultou na sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...). É facilmente observável que a partir do terceiro elemento dessa sequência qualquer elemento sucessivo é obtido pela soma dos dois anteriores. Essa sequência ficou conhecida como sequência Fibonacci. Entre suas muitas propriedades, destaca-se a de formar uma segunda sequência que se aproxima de um já famoso número conhecido desde os tempos gregos e chamado de *divina proporção* ou *razão de ouro*. Essa razão tem revelado padrões estéticos de beleza na Natureza e na Arte, além de modelar um número crescente de modelos em diversas áreas do conhecimento. Há quem se entusiasme e diga que a razão de ouro é a digital de Deus.

Talvez o exemplo mais simples do interesse e encanto que os números têm seja a conhecida história da visita do matemático inglês H. G. Hardy ao colega indiano S. Ramanujam, que convalescia em um hospital londrino. Sendo Ramanujan muito tímido e reservado, conta-nos Hardy que a fim tornar o ambiente mais descontraído, comenta que 1729, o número do seu táxi, que não lhe chamara a atenção. “Mas este número é muito interessante”, responde Ramanujam: ele é o menor número que pode ser escrito, de duas formas diferentes, como a soma de dois cubos: $1729 = 10^3 + 9^3 = 1^3 + 12^3$. Hardy (1940) comentou este fato em mais de um dos seus trabalhos.

Este número tem ainda outras surpresas: a soma de seus dígitos na base dez é 19, um dos divisores de 1729. Depois que Ramanujan faleceu foi encontrado em um dos seus vários cadernos de notas uma menção a este número e esta notável propriedade. Essa história nos sugere a ideia de que cada número é digno de ser estudado individualmente e que cada número natural apresenta características distintas dos outros que os tornam interessantes ao estudo.

Na segunda metade do século XIX, dois matemáticos construíram formalmente o conjunto dos números reais a partir dos números naturais: Giuseppe Peano (italiano) e Richard Dedekind (alemão). Não foram os únicos a realizar esta árdua tarefa; Georg Cantor, outro matemático alemão fez o mesmo usando outro enfoque. É uma construção elaborada e cheia de nuances. A mais ensinada é a de Dedekind, que utiliza um conceito que veio a ficar conhecido como “cortes de Dedekind”.

Conta-se que Pitágoras teria dito em certa ocasião: “tudo é número”, tentando dar voz ao seu espanto com o poder que os números tinham para descrever o mundo. O que havia deixado ele tão extasiado era o fato da frequência de vibração de uma corda musical (talvez feita de tripas) ser proporcional ao tamanho da corda. Lembrando que, quando ele se referia a “número”, estava mirando apenas os inteiros. Quanto mais refletimos sobre os números, mais nos encantamos com as descobertas de novas propriedades que vão surgindo como novos luzeiros a nos guiar por caminhos novos.

Esse encantamento pode ser relevante no tocante às práticas pedagógicas e andragógicas de ensino da Matemática para a Educação Básica, tanto para desenvolver atalhos de cálculos, quanto para refinar a percepção de regularidades matemáticas a partir da familiaridade com os números naturais ao identificar coisas muito simples, tais como: 6 = 1 +2 + 3 = 1.2.3; 1024 = 2^{10};189 ser igual a quantidade de algarismos usada para listar todos os números de 1 a 99; a regra que define os termos da sequência 18, 20, 24, 30, 32, 38, 42, ...; o valor desconhecido de 1, 2, 9, 64, 625, ?, etc.

Clifford Pickover, John Wiley & Sons (2005), em “A Passion for Mathematics”, lista centenas de fatos curiosos sobre números com o poder de encantar até o mais desinteressado leitor. Infelizmente, ainda não tem uma tradução para o Português.

Grande parte do que será apresentado terá por base o conceito de *Indução Matemática*. Este conceito lastreia uma larga área da Teoria dos Números. Alguns exemplos de seu uso serão estudados, bem como de situações nas quais ele é mal usado ou não pode ser empregado. Depois de adquirir familiaridade com Indução Matemática, demonstra-se o resultado: *Todo Número é Interessante.* Seguem-se outros resultados como o *Teorema Fundamental da Aritmética.* Fazendo um paralelo a este resultado será demonstrado que *todo número pode ser expresso de forma única, como soma de números de Fibonacci*

Esta dissertação está dividida em sete capítulos. A primeira parte é introdutória e apresenta informações gerais sobre todo o trabalho. A segunda traz resultados antigos sobre os números naturais caracterizando alguns subconjuntos como números interessantes.

No capítulo 3, será apresentado um subconjunto natural superinteressante: os números primos. Por definição estes números não possuem divisores outros que não sejam a unidade e eles mesmos. Será provado que os primos são infinitos e que, a partir da demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, este resultado pode ser interpretado como se os números primos fossem os átomos com dos quais são compostos todos os números naturais maiores do que um.

No capítulo 4, será apresentado outro subconjunto natural superinteressante: os números de Fibonacci. Provaremos ainda que é possível expressar todos os números naturais através de uma soma finita e única de números de Fibonacci. Estes números também podem ser usados para se obter a razão áurea.

No capítulo 5, serão destacados alguns outros subconjuntos naturais interessantes: os números perfeitos, amigáveis, palíndromos, figurados oblongos e poligonais. Estes números podem ser vistos sob o ponto de vista recreativo.

A sexta etapa desse trabalho, será dedicada ao estudo da relevância dos números naturais na gênese de outros conjuntos numéricos mais amplos que têm os inteiros como subconjunto. Assim como Peano axiomatizou os inteiros, menção será feita a Dedekind, que deu forma axiomática rigorosa aos números reais. Esta construção pavimenta também para estes novos números a propriedade de serem também *todos interessantes*. De forma abreviada os números complexos são apresentados de modo a também portarem a propriedade de *serem todos interessante*s.

Por fim, o último capítulo é destinado às considerações finais e as conclusões.

2 TODO NÚMERO NATURAL É INTERESSANTE

Ossos encontrados em cavernas com mais de 20.000 anos de idade contêm entalhes que parecem indicar que foram feitos por alguém que registrava uma quantidade. Não se sabe ao certo. Sendo isso verdadeiro, tal sistema só poderia registrar números pequenos.

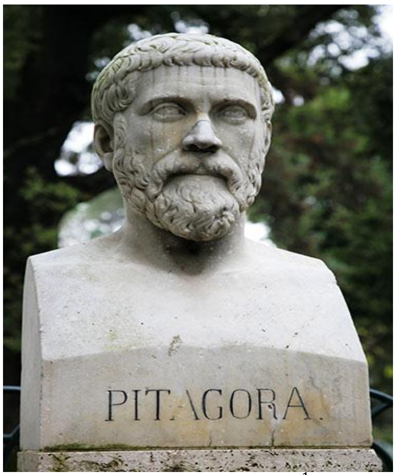
O que é um número? Todos julgamos saber, intuitivamente. Oferecer, porém uma definição precisa não é tão trivial assim. Somente na segunda metade do século XIX foram feitas formalizações, tendo uma delas (*Grundgesetze der Arithmetik,* vol. 1, 1893; vol. 2, 1903) *[Leis Básicas da Aritmética]* Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 1848-1925) inconsistências lógicas que só foram sanadas muitos anos depois. O assunto era demasiadamente árido, sendo que, para serem impressos, ele teve que arcar com os custos. Frege tentou provar que todas as leis da Aritmética eram derivadas de axiomas que ele cria serem lógicos. Em um episódio que ficou célebre, Bertrand Russell, em uma carta a Frege, pouco antes do vol. 2 ser publicado em 1903, apontou um paradoxo que surgia pela aplicação do seu Axioma V.

É largamente aceito que os números (para contar) foram surgindo à medida que as atividades econômico-sociais exigiam que bens, objetos ou recursos fossem contados. Com o surgimento da escrita, os números passaram a ser registrados e pouco a pouco foram ganhando uma forma de registro. É claro que a forma como os números eram registrados variava com cada sistema de escrita. Hoje registramos o número três como 3; os romanos como III e os gregos como D. Chamamos estes símbolos para representar números de *numerais.*

Pitágoras, personagem semilendário que teria vivido durante o VI século a.C. (principalmente a sua escola, isto é, seus seguidores), foi um dos primeiros a dividir os números naturais entre pares e ímpares. Descobriu ainda como calcular a soma de todos os inteiros a partir de 1 até determinado inteiro. Ele não descobriu uma fórmula como temos hoje, mas um jeito de achar o número que representa esta soma. Modernamente, esse jeito é conhecido hoje como algoritmo. Foi ele também quem definiu os números amigos e perfeitos.

Pitágoras dizia que um amigo é “alguém que é o outro eu, tal como são o 220 e o 284”, se referindo à relação de que um dos números é resultado da soma de todos divisores próprios do outro e vice-versa. Essa percepção demonstra que a atenção de Pitágoras também estava voltada para a soma dos divisores próprios dos números naturais, o que o levaria, certamente, ao encanto dos números obtidos pela soma de seus divisores próprios e que passaram a ser chamados de perfeitos.

Figura 1 – Busto de Pitágoras



Fonte: Blog da Gabi (2015)[1]

Finalmente, foi ele ou sua escola que encontrou a primeira aplicação dos números a uma situação cotidiana, isto é, formulou um modelo matemático para descrever um fenômeno físico. Ele encontrou uma relação entre dois inteiros, representando o tamanho das cordas de um instrumento musical com a frequência do som produzido pela corda ao ser percutida. Conta a tradição que ele teria dito "tudo é número", tal foi o seu entusiasmo ao perceber a importância dos números naturais para estudar e descrever fenômenos da Natureza. Para descrever quantidades que não podiam ser contadas, ele fazia uso de proporções entre dois comprimentos. Entretanto, tal entusiasmo não demorou a murchar quando deram de cara com os números irracionais por ocasião da descoberta da relação existente entre os catetos e a hipotenusa dos triângulos retângulos — relação essa que ficou conhecida como o *Teorema de Pitágoras*.

Na época de Pitágoras, o estudo da filosofia, da Matemática e dos fenômenos da Natureza constituía uma coisa só e os que a isso se dedicavam eram chamados de filósofos (amantes da sabedoria) — palavra grega que teria surgido nesta época. O grupo de pessoas que se congregava em torno de Pitágoras, com o tempo, adquiriu ares de uma sociedade secreta de amigos, passando a despertar suspeitas por parte dos que detinham o poder.

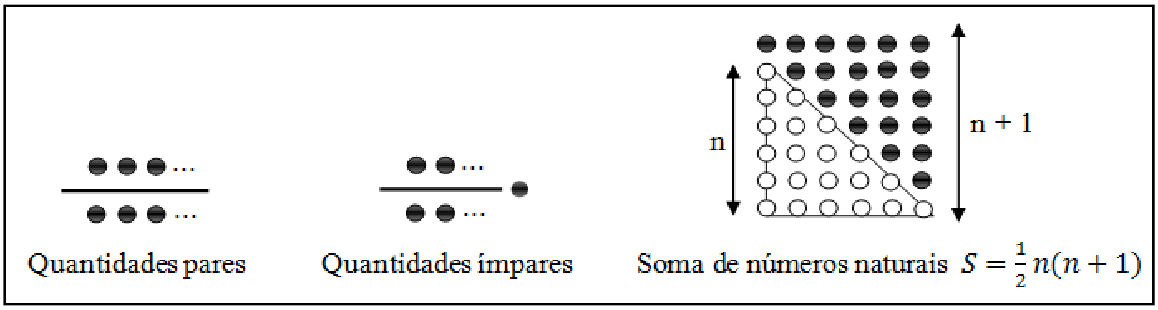
Os *Pitagóricos*, como passaram a ser chamados, foram os primeiros a produzir demonstrações seguindo argumentos lógicos, a considerar os conceitos matemáticos de forma

[1]Disponível em:< http://www.editoradobrasil.com.br:81/blog-da-gabi/tag/projetoportaljimboe/page/9/>. Acesso em jun. 2015.

abstrata, a observar os números de modo figurado, através de formas geométricas. Não foi o primeiro a trilhar este caminho. Seu antecessor foi *Tales de Mileto* a quem se atribuem as primeiras demonstrações lógicas. Os dois teriam sido contemporâneos, sendo Tales bem mais velho que Pitágoras.

Pitágoras, destacou também os números 6 e 28, por gozarem de uma propriedade notável: 6 = 1 + 2 + 3 e 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14, isto é, seus divisores próprios ao serem somados reproduzem esses números. Chamou-os de *números perfeitos*. Não foram os únicos a perceber que esses números eram especiais. O número 6 é lembrado como o número de dias que Deus precisou para criar e fazer os céus e a Terra (no relato de Gêneses) e o 28 representa (aproximadamente) o tempo do ciclo lunar, que desempenhou um papel relevante nos calendários primitivos.

Figura 2 – Estudo Pitagórico de números por figuras



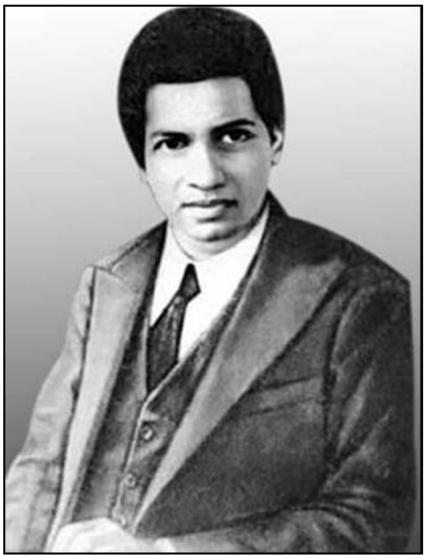
Fonte: Elaborada pelo autor

O que Pitágoras e sua escola fizeram não ficou morto no passado, mas, recebeu impulso pelos seus pósteros que ampliaram e aprofundaram sobremaneira seus estudos ao ponto de Thierry de Chartres dizer, no século XII: “a criação dos números foi também a criação das coisas.” No século XIX, Kronecker, um famoso matemático alemão, afirmou em um momento de euforia: “os inteiros são obra de Deus; tudo o mais é obra dos homens”.

O emprego dos naturais na contagem das coisas ou dos animais exerceu uma influência tão forte na mente das pessoas que elas acharam meios de usá-los mesmo para situações nas quais isso não seria possível. Por exemplo, não é possível contar lama usando os naturais. Foi dado um jeito nisso. Passou-se a dizer “um monte de lama, dois montes de lama, três montes de lama, etc”. Até hoje, é difícil definir o que são os números generalizando com suas diversas funcionalidades, assim como, não é fácil dizer como eles são usados. Veja o que afirmou Hersh: “dois números são iguais se em qualquer fórmula um pode ser substituído pelo outro e vice-versa sem alterar o resultado da fórmula”. Isso talvez não seja verdade.

Fórmulas são formas simbólicas de generalizar ou expressar os números. Os números são simplesmente o que são. Eles são o que sempre foram. Eles não mudam ou mudarão. Pessoas que se dedicavam a esses estudos vieram a ser conhecidas como matemáticos. Seu interesse pelos números chega a tal ponto de defenderem que cada número possui uma personalidade própria, características próprias que o distingue dos outros números. Entre os matemáticos recentes que estudaram os números e suas propriedades destaca-se o matemático hindu *Ramanujan*. Há uma história muito conhecida de Ramanujan, relatada por G. H. Hardy. Nesta ocasião Ramanujan convalescia em um hospital londrino. Como Ramanujan era uma pessoa muito tímida e reservada, Hardy, tentando quebrar o gelo comentou que a placa do taxi (1729) que o transportara era um número que não lhe despertava qualquer interesse. Ramunajan o surpreendeu afirmando que era um belo número, pois se tratava do menor número natural que podia ser expresso de duas maneiras diferentes como a soma de dois cubos, a saber: $1729 = 10^3 + 9^3$ ou $1729 = 1^3 + 12^3$.

Figura 3 – Srinivasa Ramanujan



Fonte: P.K. Srinivasa – The first biographer of Ramanujan[2]

Essa história parece sugerir que eles pensavam que cada número era digno de ser individualmente estudado. Seguindo esta linha de pensamento, nos propomos a defender a ideia de que cada número natural, sem exceção, tem alguma(s) característica(s) que o(s) distingue(m) dos outros e, portanto, o torna interessante. Depois, tentaremos estender esta ideia a outros números além dos Naturais.

[2]Disponível em:<http://www.pksrinivasan.com/>. Acesso em jun. 2015.

Vamos admitir ainda a existência de duas operações entre os Naturais: a *soma* e o *produto*. Além destas duas, existem ainda as operações de *diferença* e *divisão.* Estas, no entanto, nem sempre podem ser realizadas, pois o resultado não seria um número Natural.

Consideremos inicialmente o número 1. Com certeza, ninguém duvida que o 1 é interessante, porque ele é o primeiro número natural e é o único número com a seguinte propriedade: qualquer que seja o número natural escolhido, quando multiplicado por 1 resulta no próprio número escolhido. Em outras palavras, ele deixa invariante pela multiplicação o número escolhido. Verificamos assim que o número 1, sem dúvida, é interessante.

Consideremos agora o número 2 — 2 também é interessante? Com efeito, isto é verdadeiro. Bem, o 2 (1 + 1) é o primeiro número par, é um número fatorial e é o único número primo par. Estas propriedades, sem dúvida, o coloca no conjunto dos números interessantes. Se isso não bastasse, devemos estar lembrados que pela geometria euclidiana, dois é o menor número de pontos que define uma única reta. Além disso, o 2 é um excelente divisor natural, pois divide, de forma exata, metade de todos os infinitos números naturais, isto é, todos os números pares. Talvez por destacar a ideia das metades, o 2, para os sábios da antiguidade, sempre representou a justiça e também a dualidade das coisas distinguindo: o espiritual do material, o bem do mal, o homem da mulher, o dia da noite, a claridade da escuridão... Isso, com certeza, reforça o que estamos dizendo: o 2 é um número interessante.

O número 3 é, de cara, um número triangular e é o menor número primo ímpar. Além disso, na geometria Euclidiana, três pontos distintos e não alinhados determinam um único plano e os três estados físicos da água (líquido, gasoso e sólido) é de importância fundamental para a existência e manutenção da vida, como a conhecemos; só isto já basta para garantir que o 3 também é um número interessante.

O número 4 também apresenta uma característica geométrica: as dimensões do universo em que vivemos (três físicas e uma temporal). Ele é o menor quadrado perfeito, $2 \times 2 = 2^2 = 4$. E é o único natural que pode, aritmeticamente, ser obtido pela soma e pelo produto do mesmo número: $2 + 2 = 2 \times 2 = 4$. Além disso, o 4 quantifica as quatro estações do ano e as quatro fases da lua. Com tantas propriedades agregadas é, sem dúvida, um número interessante.

Será que o 5 continua a sequência de números interessantes? Existem apenas duas possibilidades: o 5 é interessante ou o 5 não é interessante.

Suponhamos que o 5 não seja interessante. Observe então que o 5 tem uma propriedade muito peculiar: é o menor número inteiro natural que não é interessante. Tal característica é por si mesma uma propriedade muito interessante! Isso nos leva a concluir que o 5, ao contrário, do que havíamos suposto, é muito interessante.

Essa demonstração por contradição nos permite estender esta característica a qualquer número natural n, isto é, todo natural n é interessante. Com efeito, seja n um natural qualquer,então, ele é interessante ou ele não é interessante. Se ele não for interessante, ele é o menor natural desinteressante. Por ser o primeiro número desinteressante da série, isso o torna o número n interessante. Assim, a afirmação de que todo número natural é interessante não pode ser falsa; logo,esta premissa tem de ser verdadeira. A técnica de demonstração aqui empregada é conhecida por *reductio ad absurdum.* É também uma das mais usadas. Dois outros tipos de provas são frequentes em Matemática: prova por dedução e prova por indução.

A prova por dedução é uma discussão bem elaborada, baseada em postulados ou outros resultados previamente estabelecidos. Tal discussão conduz a uma conclusão cuja validade depende exclusivamente sobre a validade das premissas e a correção do raciocínio.

Já a prova por indução foi descrita pela primeira vez pelo matemático inglês Augustus de Morgan em 1838. Nesta última, o raciocínio se baseia em casos particulares a fim de chegar a uma conclusão geral. A prova por indução matemática ou prova de n para n + 1 não constitui um método para descobrir novas fórmulas ou novos resultados, mas de um caminho lógico a partir de uma hipótese conduzindo a resultados que devem ser verdadeiros.

Mas, o objetivo desse trabalho é demonstrar formalmente esta proposição pelo método indutivo e ainda oferecer mais exemplos de sua abrangência e beleza no universo dos números naturais.

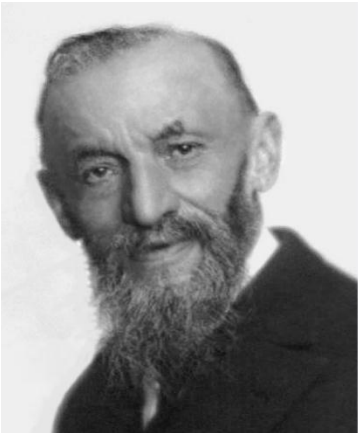
2.1 PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Giuseppe Peano (1858–1932), um matemático e lógico italiano, autor de mais de 200 trabalhos entre livros e textos de pesquisa, um dos fundadores da *Lógica Matemática* e da *Teoria dos Conjuntos*, contribuiu com muitos símbolos, entre eles o da união e da intersecção de conjuntos.

Antes de Peano, se Euclides foi o primeiro matemático a pensar em termos axiomáticos, então, até o final do século XIX, também foi o último. Durante um intervalo de mais de 2.200 anos nenhum matemático pensou em estudar os naturais sob a ótica de axiomas. Isso também é verdadeiro para qualquer outro ramo da Matemática tendo por base axiomas.

Peano nasceu e se criou em uma propriedade do campo, não fazendo parte da classe social da elite intelectual da Europa de então. Assim como Fermat, passou a membro desta classe devido ao seu próprio valor, publicando seu primeiro trabalho em 1881 e só em 1889 foi publicado o *Arithmetrices Principia, Nova Methodo Exposita,* introduzindo os cinco axiomas que os Naturais deveriam gozar. Ele não estava sendo totalmente original, pois o matemático alemão Richard Dedekind já havia vislumbrado esta possibilidade alguns meses antes, sem que Peano tivesse tomado conhecimento disso.

Figura 4 - Giuseppe Peano



Fonte: Wikipedia[3]

Paris foi a sede do II Congresso Internacional de Matemática. Nesta conferência, Peano se encontrou com Bertrand Russell e o presenteou com um exemplar de sua obra *O Formulário,* que abordava, entre outras coisas, o uso de símbolos lógicos. Russell ficou tão impressionado com ela que abandonou a conferência e retornou imediatamente a Londres para estudar o texto de Peano, sem perda de tempo. Pouco antes, Peano havia apresentado um outro trabalho abordando o problema de como *definir uma definição em Matemática.*

2.1.1 Axiomas de Peano

Assim como nos *Elementos de Euclides*, Peano também se baseou em cinco axiomas para reger a Aritmética. São eles:

1) 0 (zero) é um numero natural.
2) O sucessor de qualquer numero natural é também um numero natural.

[3]Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano>. Acesso em jun. 2015.

3) 0 (zero) não é sucessor de qualquer numero natural.

4) Se dois números têm o mesmo sucessor, então estes dois números são iguais.

5) *O axioma da indução* — Qualquer conjunto de números que contenha o 0 (zero) e que contenha o sucessor de qualquer um dos seus elementos, então ele conterá todos os números naturais.

O *primeiro axioma* visa nos proteger da frivolidade intelectual: e se não existissem números naturais? Este axioma não permite que isso aconteça — existe pelo menos um natural, o 0 (zero).

O *segundo axioma* nos apresenta a figura do *sucessor*.

O *terceiro axioma* nos garante que os Naturais têm um início, isto é, existe um número que não vem logo à direita de outro número. Poderíamos perguntar: *um início em quê?* Como isso não tem resposta, faz lembrar que os números naturais são como o *Big Bang*, que dá início à complicadíssima estrutura do Universo sem apresentar antecedentes óbvios.

O *quarto axioma* controla a ideia da sucessão e com ela a da igualdade dos números naturais. Se isso não existisse, um número poderia ser seu próprio sucessor. Tal anormalidade, o quarto axioma não deixa acontecer.

Como na Geometria, o *quinto axioma* se destaca dos antecessores — faz uma reivindicação: qualquer conjunto de números que satisfaça estas duas condições contém todos os Naturais. Que duas condições são estas?

1) 0 (zero) é membro do conjunto.

2) Se um número qualquer está no conjunto, seu sucessor também estará. O quinto axioma de Peano lembra um documento legal, do tipo que sanciona uma conduta ou cria um direito — explicita as condições sob as quais pode-se concluir algo acerca de todos os números Naturais.

Se estas condições não são ambas verdadeiras, então nada se pode garantir.

Os naturais gozam ainda de uma propriedade assaz interessante. Esta propriedade é conhecida como o *Princípio da Boa Ordenação*, isto é, qualquer subconjunto não vazio dos naturais possui um menor elemento. Pode-se provar que o Quinto Axioma ou Axioma da Indução Finita é equivalente ao Princípio da Boa Ordenação.

A Indução Matemática é, portanto, um recurso de grande importância para a Matemática, pois permite estabelecer verdades matemáticas válidas em subconjuntos naturais infinitos. Esse recurso não tem a finalidade de provar que determinada sentença aberta é verdadeira para inúmeros casos, e sim em mostrar que tal sentença é verdadeira para todo número natural $n \geq a$, onde $a \in N$.

2.1.2 Definindo a Indução Finita (o Princípio da Indução Matemática)

Seja P(n) uma sentença aberta em n. Se P(n) satisfaz às condições:

i) P(0) (ou P(1)) é verdadeira;

ii) Se P(n) é verdadeira P para $n = k \in N$, implicar P(k+1) também é verdadeira. Então, a proposição P(n) é verdadeira para todo $n \in N$.

Figura 5 – Efeito dominó

Fonte:Júlio Pascoal[4]

O Princípio da Indução nada mais é do que a aplicação do V Axioma de Peano.

Em resumo, o princípio da indução se assemelha ao efeito da queda das peças em um dominó infinito, pois se a primeira peça cai e se a queda da k-ésima peça leva a queda da (k+1)-ésima peça, então todas as peças cairão.

Abaixo serão ilustradas algumas aplicações do Princípio da Indução.

1. Demonstrar que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

"A soma dos n primeiros números ímpares é n^2" é uma sentença verdadeira para n = 1, n = 2, n = 3,isto é, a primeira condição é verdadeira.

A segunda condição estabelece que se a afirmação for verdadeira, sendo $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2,$$

Noutras palavras, sendo P(n) verdadeira implicar a validade de P(n +1), isto é,

$$1 + 3 + 5 + ... +(2n - 1) + (2n + 1) = n^{\mathbf{2}} + (2n+1) = (n+1)^2$$

[4]Disponível em:<www.juliopascoal.com.br/tag/efeito-domino/>. Acesso em jun. 2015.

Uma outra alternativa de demonstração seria observar que a sequência de números naturais ímpares constitui uma progressão aritmética de razão r = 2, com a_1= 1, e a_n= 2n–1.Sabe-se que a soma dos n primeiros termos desta progressão é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}.$$

$$S_n = \frac{(1+2n-1).n}{2}$$

$$S_n = \frac{2n^2}{2}$$

$$S_n = n^2$$

Isso nos permite concluir que a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

2. Demonstrar que a soma dos n primeiros naturais pares é igual a n vezes n+1, isto é, 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n (n + 1) para todo natural n ≥ 1.

Seja P(n) a afirmação que 2 + 4 + 6 + ... + 2n = n (n + 1) para todo natural n ≥ 1. Então:

- P(0) é verdadeiro, pois 0 = 0(0+1).
- Se para $n \in \mathbb{N}$, temos P(n) é verdadeira, então,

Assim, temos:

$$\underline{2 + 4 + 6 + ... + 2n} + 2(n+1) = n(n + 1) + 2(n+1) = n^2 + n + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$$

Isto é, P(n+1) também é verdadeira. Portanto, a propriedade é sempre verdadeira para todos os Naturais pares.

2.1.3 Princípio da Boa Ordenação

Todo conjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$, contém um elemento mínimo. Noutras palavras, existe um elemento a$\in A$, que é menor do que todos os outros elementos de A.

O Princípio da Boa Ordenação é claramente intuitivo. Não requer experiência abrangente ou conhecimentos elaborados para ter sua validade comprovada em cada situação. O mesmo não ocorre com o Princípio da Indução. Este, assim como o Quinto Axioma de Euclides, mais se assemelha a uma proposição que deve ser demonstrada, primeiramente, para ter-se a garantia de sua validade.

Demonstra-se a seguir que o Princípio da Boa Ordenação implica o Princípio da Indução, isto é, se é válido o Princípio da Boa Ordenação, então, o Princípio da Indução, também será.

Seja S o conjunto de todos os Naturais (incluindo o 0 conforme o fez Peano) com as seguintes propriedades:

1) $0 \in S$
2) Sempre que $k \in S$, $k+1$ também está em S. Então S coincide com os Naturais.

A fins de demonstração, suponha que S não coincide com os naturais. Então, existe $T \neq \emptyset$ tal que a união de S e T (disjuntos) coincide com os Naturais. Como $0 \in S$, então $a \in T$, sendo $a \geq 1$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, T tem um elemento mínimo a'. Como $a' - 1 < a'$, $a' - 1$ não está em T, logo $a' - 1 \in S$; e pela propriedade 2), $(a' - 1) + 1 = a' \in S$. Absurdo.

2.1.4 Indução Completa ou Recorrência

A condição 1) do Princípio da Indução pode ser substituída por $P(n_0) \in S$. Neste caso a Proposição P(n) que define S seria para todo $n \geq n_0$. Noutras palavras,

i. $P(n_0)$ é verdadeira;
ii. Se P(n) é verdadeira então P(n+1) também é verdadeira, para todo $n \geq n_0$.

Então, P(n) é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

Demonstração:

Definindo o conjunto $S = \{k \text{ naturais}; k \geq n_0 > 0 \text{ e } P(k) \text{ é verdadeira}\}$

A condição (i) garante que S não é um conjunto vazio. Provaremos que S coincide com o conjunto $E = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, ...\}$. Se tal não fora existiria um conjunto T não vazio, onde P(n) não é verdadeira e tal que $S \cup T = E$.

Pelo princípio da Boa Ordenação, existe um menor elemento $t \in T$, onde P(t) é falsa. Ora, $t - 1 < t$ é um natural que não está em T, pois t é o menor elemento de T. Assim, $t - 1$ está em S onde a propriedade P é verdadeira, isto é, $P(t - 1)$ é verdadeira. Da hipótese (ii) segue-se que $P((t - 1) + 1) = P(t)$ é verdadeira. Absurdo.

Considere as seguintes aplicações para o Princípio da Indução onde, $n_0 > 1$.

1) Verifique se $2^{n+1} < 3^n$ para todo natural $n \geq 2$.

Então P(n) a afirmação que $2^{n+1} < 3^n$ para todo natural $n \geq 2$.

- P(2) é verdadeira, pois $2^3 < 3^2 \Longrightarrow 8 < 9$.
- Se P(n) verdadeira para $n \in \mathbb{N}$, temos, então que provar que P(n+1) também é verdadeira.

Assim, temos:

$$2^{(n+1)+1} < 3^{(n+1)}$$

$$\text{Mas, } 2^{(n+1)+1} = 2.\ 2^{n+1} < 2.3^n < 3.3^n.$$

$$\text{Logo, } \mathbf{2^{(n+1)+1} < 3^{n+1}}.$$

Portanto, verificamos que $2^{n+1} < 3^n$ para todo natural $n \geq 2$.

2) Demonstre que $2n + 2$ é a soma de dois números primos, para todo $n \geq 1$, natural.

É trivial que "$2n + 2$ é a soma de dois números primos" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n= 3$,... A condição (i) é satisfeita. Entretanto, até hoje, ninguém conseguiu garantir a condição (ii) do Princípio da Indução. Também não foi possível estabelecer este resultado através de outros métodos de demonstração distintos do Princípio da Indução.

Este fato tem um enunciado muito simples, entretanto, sua demonstração tem se mostrado extremamente desafiadora. Ninguém, até hoje, encontrou um número que tornasse a sentença falsa e tampouco alguém, até o presente conseguiu demonstrar que a sentença é sempre verdadeira.

Essa conjectura foi proposta em uma carta de Christian Goldbach a Euler em 1742 nos termos: "Todo inteiro par, maior do que 2, é a soma de dois números primos". Até hoje ninguém conseguiu prová-la ou refutá-la. Mais uma razão para os pares serem números interessantes!

2.1.5 Cuidados a serem observados nas demonstrações utilizando o princípio da indução

Aplicar o princípio da indução para demonstrar a veracidade de uma proposição exigem atenção e alguns cuidados. O exemplo a seguir, ilustra a má aplicação do Princípio da Indução.

1) Seja $n \in \mathbf{N}$, então $n^2 + n + 41$ é um número primo.

De fato, $n^2 + n + 41$ é um número primo para $n = 1,2,3,4,5,...,39$. Mas para $n = 40$, $n^2 + n + 41 = 41^2$ que não é um número primo. Portanto, a afirmação "$n \in N$, então $n^2 + n + 41$ é um número primo" é FALSA. Foi Euler quem, em 1772, mostrou que $f(n) = n^2 + n + 41$ assumia valores primos para $n = 0, 1, 2,..., 39$. Observando que $f(n - 1) = f(-n)$, vê-se que $n^2 + n + 41$ assume valores primos para 80 inteiros consecutivos: $-40, -39, ..., -1, 0, 1, ..., 39$. Quando substituímos a variável n por $(n - 40)$ em $n^2 + n + 41$, obtém-se $f(n - 40) = g(n) = n^2$

–79n + 1601 que assume valores primos para todos os números naturais de 0 até 79 – são 80 números primos! Um *record* para trinômios do segundo grau!

2) $\forall n \in \mathbf{N}$, então $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.

A sentença é válida para n = 1, n = 2, n = 3 ... e para mais de doze octilhões de outros n naturais, até se chegar a um número com 29 algarismos, isto é, se n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767 a fórmula $991n^2 + 1$ se torna um quadrado perfeito! Então, o quadrado de 379.516.400.906.811.930.638.014.896.080 é bem a resposta.

Essa equação é do tipo $x^2 - D.y^2 = 1$, conhecida como a equação de Pell. É um exemplo de equação diofantina. Deve-se destacar que o nome de J. Pell (1610-1685) foi associado a esta equação por um erro de Euler . Na verdade, essa equação foi estudada por J. Wallis, W. Brouncker e P. Fermat.

Mas, como resolver a equação de Pell?

É importante considerar que, se D natural for um quadrado perfeito,a equação não tem soluções inteiras.

Pelo Teorema das frações contínuas, que não será demonstrado nesse trabalho, tendo$\sqrt{D} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, existem infinitas soluções (x, y) $\in \mathbb{N}x\ (\mathbb{N} - \{0\})$quando:

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{y}$$

Assim, suponha que D não é um quadrado perfeito. Desta forma:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{D}}$$

Seguindo o teorema anteriomente citado, a equação poderá ser escrita como $(x - \sqrt{D}.y) . (x + \sqrt{D}.y) = 1$ e desse modo, se (x , y) é uma solução, então:

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| = \frac{1}{y\left|x + \sqrt{D}y\right|}$$

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| = \frac{1}{y^2\left|{}^{x}\!/_{y} + \sqrt{D}\right|} < \frac{1}{2y^2}$$

Sendo D = 991, conclui-se que $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{2y^2}$ pelo o fato de $\sqrt{D}$> 1 e, portanto, x / y> 1. Onde, necessariamente x / y tem que ser um processo contínuo correspondente a uma fração convergente a $\sqrt{D}$.

Portanto, a sentença “$\forall n \in N$, $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito” é FALSA! Mas isso só ocorre pela primeira vez quando n = 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767.

Estes dois próximos exemplos são como luzeiros de advertência para os cuidados que se deve observar em uma demonstração formal.

3) Este problema é conhecido como “O Enigmado cavalo de Alexandre, O Grande” e foi inventado pelo matemático George Polya (1887 – 1985) e é citado pelo professor Abramo Hefez (2011):

> “Num mosaico romano, Bucéfalo, o cavalo de Alexandre, o Grande, é representado como um fogoso corcel cor de bronze. Nesse exemplo, vamos “provar” que isso é uma falácia.
>
> Inicialmente, “provaremos” que todos os cavalos têm mesma cor. De fato, considere a sentença aberta:
>
> P(n): Num conjunto com n cavalos, todos têm a mesma cor.Note que P(1) é obviamente verdadeira, pois num conjunto com apenas um cavalo, esse terá a mesma cor de todos cavalos do conjunto já que é o único.
>
> Agora, suponha o resultado válido para conjuntos contendo n cavalos. Considere um conjunto: $\mathbf{C = \{c_1, c_2, \ldots , c_n, c_{n+1}\}}$com n + 1 cavalos. Decompomos o conjunto C numa união de dois conjuntos: $\mathbf{C = C' \cup C'' = \{c_1, c_2, \ldots , c_n\} \cup \{c_2, c_3, \ldots , c_{n+1}\}}$cada um dos quais contém n cavalos.
>
> Pela hipótese indutiva, segue-se que os cavalos em C’ têm mesma cor, ocorrendo o mesmo para os cavalos em C’’. Como $\mathbf{C_2 \in C' \cap C''}$, segue-se que os cavalos de C’ têm a mesma cor dos cavalos de C’’, permitindo assim concluir que todos os cavalos em C têm a mesma cor.
>
> Assim, a nossa “demonstração” por indução está terminada, provando que P(n) é verdadeira para todo $n \in N$.
>
> Agora, todo mundo sabe (você sabia?) que Marengo, o famoso cavalo de Napoleão, era branco. Logo, Bucéfalo deveria ser branco.
>
> Onde está o erro nessa prova?”

Essa demonstração por indução matemática, impulsivamente, nos convence que a proposição é verdadeira. No entanto, se testarmos essa validade para n = 2, teríamos $\mathbf{C = \{c_1, c_2\}}$ e assim, seus subconjuntos seriam $\mathbf{C'=\{c_1\}}$ e $\mathbf{C''=\{c_2\}}$. Podemos notar que não há intersecção entre os conjuntos **C’**e **C**”. Desta forma, a falta de um elemento comum aos dois conjuntos impossibilita uma conclusão transitiva e não estabelece a relação que garanta igualdade das cores dos cavalos c_1 e c_2. Ou seja, o passo de indução falha de n = 1 para n = 2.

Portanto, a proposição que parecia verdadeira pela indução matemática, falhou em um contra exemplo se mostrando falsa.

Outro cuidado que se deve ter é com a aplicação do Princípio da Indução a outros conjuntos numéricos. Veja em outro exemplo a sua aplicação envolvendo o conjunto dos números reais.

4) Demonstre a afirmação; "se x$\in \mathbb{R}$, então sen(x.π) = 0" é verdadeira.

- P(1) é dado por sen(1.π) = sen(π) = 0
- Se para x $\in \mathbb{R}$, P(x) é verdadeira, então será verificada a validade de P(x+1).

$$\text{sen}[(x+1).\pi] = 0$$

$$\text{sen}(x.\pi+\pi) = 0$$

$$\text{sen}(x.\pi).\cos\pi - \text{sen}\,\pi.\cos(x.\pi) = 0$$

Mais uma vez, impulsivamente, pelo princípio da indução, qualquer pessoa pode ser levada a crer que a afirmação é verdadeira.

Mas,testando a proposição para valores fracionários como $x = \frac{2}{3}$, percebe-se que a afirmação é falsa. A falha ocorre pelo fato do$\mathbb{R}$ não satisfazer o Princípio da Boa Ordenação. Assim, basta o x assumircertos valores racionais não inteiros para a proposição não ser verdadeira.

2.2 DEMONSTRAÇÃO QUE TODO NÚMERO NATURAL É INTERESSANTE

Neste tópico, vamos demonstrar que todo número natural é interessante. No entanto, vale ressaltar que a demonstração de "número interessante" tem um caráter lúdico e está também relacionada ao senso comum, ou seja, diretamente relacionada ao fato de que quando alguém admira algo isso lhe interessa, é interessante.

Que características deveria ter um número para ser considerado como um número interessante?

Segundo o dicionário Priberam, a palavra interessante significa: 1. O que interessa; desperta interesse ou curiosidade. 2. O que cativa pela personalidade ou simpatia. 3. O que tem utilidade. 4. O que é engraçado. Segundo Paenza (2005), um número é interessante "quando tem algum atrativo, algo que o distinga, algo que mereça destacá-lo dos outros, que tenha alguma vantagem ou alguma particularidade".

O Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa de Antonio Geraldo da Cunha, Ed. Nova Fronteira, 1987 define o substantivo *interesse* como lucro, proveito, vantagem, sentimento. Origina-se do latim clássico, *interesse.* O adjetivo *interessante* deriva do substantivo *interesse.*

O Dicionário do Aurélio define o termo interesse como: (1) lucro material; ganho (2) Parte ou participação que alguém tem em alguma coisa (3) Vantagem, proveito, benefício (4) empenho (5) curiosidade (6) aquilo que convém, que importa, seja em que domínio for.

Os sentidos (5) e (6) são os que nos interessam aqui. Observe que *inter* + *esse*é composto de duas palavras: *inter*: no interior de dois; entre; no espaço de (como em intercâmbio, interfone, intermunicipal etc.) *êsse*: aplica-se a pessoa ou algo diretamente ligado ou próximo. Desmembrando a palavra *interesse* em duas palavras aclara melhor o sentido que se quer ressaltar aqui. Todavia, não se está propondo uma definição matemática formal do adjetivo *interessante* derivado da palavra *interesse.* Desde modo, como não se tem uma definição matemática formal do termo, também a "prova" ou "demonstração" da proposição: *todo número é interessante*, não tem a conotação formal exigida pela Matemática. Deve assim ser entendida pelo leitor como algo carente do formalismo requerido, servindo apenas como motivação para despertar sua atenção para o apelo, a beleza, o deslumbramento e o encanto que a Matemática proporciona a quem se envolver com ela.

É muito fácil verificar que os primeiros naturais são interessantes. Revisando:

— **1:** é o primeiro Natural. Pela operação de adição de 1 a qualquer Natural percorre-se todo o conjunto. Pela multiplicação, o produto de qualquer Natural k por 1, deixa-o invariante. É o único número com esta propriedade singular.

— **2:** é o primeiro número par; também é o único primo par; 2 é o único número tal que a soma das potências de seu recíproco é igual a 2, isto é;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

O 2 representa, também, a dualidade (claro e escuro, quente e frio, bem e mal); o número atômico do segundo elemento mais comum do Universo, o Hélio; número de raízes distintas de um polinômio de grau 2 etc. Representa também o menor número de humanos capaz de gerar um novo ser humano...

— **3:** é o primeiro número primo ímpar; os três estados da água; o terceiro número de Fibonacci; um número é divisível por 3 se a soma dos seus dígitos, na base 10, é um número múltiplo por 3; qualquer permutação dos dígitos de um número divisível por 3 é divisível por 3; é o menor primo de Mersenne; menor número de lados de um polígono sem auto-interseção; Gauss provou que qualquer Natural é a soma de, no máximo, 3 números triangulares; as 3 divisões do tempo (passado, presente e futuro); as 3 cores primarias, etc.

— **4:** é o único numero que pode ser expresso como soma e produto de dois números iguais, 2 + 2 = 2 x 2 = 4, isto é, 4 é o primeiro número composto; 2^2, o primeiro quadrado perfeito; um número é um múltiplo se 4 se os seus dois últimos dígitos é um número múltiplo de 4; os 4 quadrantes do plano; os 4 pontos cardeais; as 4 dimensões do Universo (comprimento, altura, largura e tempo); o teorema das 4 cores; os 4 planetas rochosos; os 4 Evangelhos; 4 número de bases do RNA e DNA (guanina, citosina, adenina e tiamina); os humanos tem 4 caninos e 4 sisos; os 4 tipos sanguíneos (A, B, O, AB); a valência do Carbono; as quatro forças fundamentais da Natureza (gravidade, eletromagnética, atômica forte e atômica fraca); as 4 cores básicas (CMYK), as 4 operações, etc.

— **5:** tem muita ligação com a humanidade, os cinco dedos, os cinco artelhos, os cinco sentidos, os cinco membros do corpo; o terceiro primo; pode ser expresso como $2^2 + 1$ (primo de Fermat); é o quinto número de Fibonacci; um pentágono regular tem 5 lados iguais e 5 diagonais e pode ser construído com régua e compasso; é o comprimento da hipotenusa do menor triângulo retângulo com lados inteiros, (3, 4, 5); é a categoria dos furacões mais destruidores; é o grau do menor polinômio com coeficientes racionais cujas raízes não são expressas em geral por radicais; os cinco planetas visíveis a olho nu; os cinco continentes; os cinco mares, etc.

— **6:** é o produto dos dois primeiros primos, 6 = 2 x 3; é o fatorial de 3, 3! = 6; é o primeiro número *perfeito*, 6 = 1 + 2 + 3, ou seja, a soma dos seus divisores próprios; é o terceiro número *triangular*; o hexágono tem seis lados e seis vértices; o número atômico do Carbono, o elemento químico mais importante para a vida; um cubo tem seus faces; as 6 direções (norte, sul, leste, oeste, para cima e para baixo); o octaedro é um sólido platônico com 6 vértices; o tetraedro é um sólido platônico com 6 arestas, etc.

— **7:** é o quarto menor número primo; é um duplo primo de Mersenne ($2^3 – 1 = 7$), uma vez que 3 é também um primo de Mersenne; o heptágono tem 7 lados e 7 vértices e é o menor polígono regular que não pode ser construído com régua e compasso; as 7 unidades básicas de medida do Sistema Internacional: metro, quilograma, segundo, ampère, kelvin e mole; Isaac Newton identificou 7 cores no arco-íris: vermelho, laranja, amarelo, verde, azul, índigo e violeta; os 7 níveis de energia do elétron em torno do núcleo atômico; o pH neutro, entre a acidez e a alcalinidade; o número atômico do nitrogênio, o gás mais abundante na nossa atmosfera; os 7 tipos de vírus; quase todos os mamíferos possuem 7 vértebras cervicais, etc.

Esta lista poderia continuar por muito tempo. Todos estes números têm uma característica comum: são pequenos. Números muito grandes podem ser interessantes? Já conhecemos um deles, 12.055.735.790.331.359.447.442.538.767, o menor inteiro que transforma a expressão $991n^2 + 1$ em um quadrado perfeito! Esta lista poderia continuar por muito tempo, como se pode ver na página seguinte.

Para abarcar todos os Naturais será aplicado o *Segundo Princípio da Indução*.

Seja P(n) a proposição: "todo número natural é interessante".

Então;

- P(1) é, obiviamente verdadeira, como já foi visto.
- Se P(k) é verdadeira para 1, 2, 3, ...k, então P(k+1) segue verdadeira. Se tal não fora, k+1 seria o menor inteiro positivo a *não ser interessante*; caso fosse par seria o menor par desinteressante ou então o menor ímpar. Tais características, por si mesmas, fariam de k+1 um número interessante! Absurdo.

Concluímos, portanto, que TODO NÚMERO NATURAL É INTERESSANTE.

Agora que já sabemos que todos os números naturais são interessantes, vamos conhecer melhor alguns destes números ou subconjuntos dos Naturais que se destacam dos demais por suas propriedades interessantes.

Em 1948, o matemático americano Claude Shannon criou a teoria (matemática) da informação. Esta teoria envolve números enormes como, por exemplo, os que quantificam os pontos de cores de uma tela de televisão HD que se renovam 30 vezes por segundo durante duas horas; noutras palavras, um filme. A informação aí contida se traduz em um número colossal. Isso alçou os números muito grandes a assumirem um caráter especial — passaram a fazer parte do cotidiano, a chamar para si a atenção dos estudiosos. Estes números estão muito além do que seja a experiência humana no trato com os números. Outros números muito grandes é a ordem de grandeza dos segundos que transcorreram desde o início do Universo: 10^{15} segundos; 10^{80} é a ordem de grandeza de todas as partículas do Universo conhecido. Estes números são exemplos da abundância de números muito grandes que trazem consigo propriedades interessantes.

O objeto de atenção até aqui foi listar algumas das características pertinentes a cada número que o torna interessante. No que se segue, diz respeito a demonstrações de propriedades que certos subconjuntos dos Naturais exibem e que chamaram a atenção e encantaram tantas pessoas ao longo de séculos e milênios.

O leitor que estiver interessado em conhecer mais poderá consultar o endereço: http://mrob.com/pub/math/numbers.html.

Mais ainda, aquelas pessoas que se sentem muito atraídas pelo poder, beleza e desafio da Matemática muito aprenderão consultando os *sites*:

http://www.puzzles.com/puzzleplayground/Authors/MartinGardner.htm

https://projecteuler.net/

Se você está situado um passo além, poderá ser um participante ativo da *net* de Euler resolvendo os problemas propostos ou encontrando outras soluções mais simples ou mais elegantes ou ainda propondo novos desafios.

3 NÚMEROS PRIMOS

A primeira visão que se tem dos números denominados *primos* é que eles se distinguem dos demais por não possuírem divisores próprios. Seus únicos divisores são a unidade e eles próprios. Esta característica marcante de imediato desperta *interesse* por eles. Esta propriedade colou neles como sua própria definição. Até o início do século XX, muitos matemáticos consideravam 1 como o primeiro primo. A partir de então, 1 passou a ser visto noutra categoria de números: a *unidade*. Se 1 fosse considerado primo, o Teorema Fundamental da Aritmética aqui demonstrado seria enunciado de forma diferente (6 = 2 x 3 = 1 x 2 x 3, por exemplo, poderia ser expresso de duas formas diferentes). O *Crivo de Eratóstenes* também deveria ter seu enunciado modificado.

Quão abundantes são eles? Com exceção de 2, todos os primos ocorrem entre os números impares. Assim, seu percentual situa-se claramente abaixo de 50%. Logo nos 10 primeiros naturais, só ocorrem 4 primos e o percentual fica em 40%.Nos 100 primeiros naturais o percentual cai para 25%; de 101-200 apenas 21% e à medida que se prossegue o percentual de primos, continua a decair. Mas será que a partir de certo ponto, quem sabe, muito grande, não mais existiriam primos? Tal não ocorre conforme demonstrou Euclides na sua obra *Os Elementos*. Sua demonstração além de claríssima é considerada como uma das mais belas em toda a Matemática. A partir do quarto século, com o desaparecimento da civilização grega e até por volta de 1640 nos dias Fermat, nada de relevante foi acrescentado aos primos. O conjunto {2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512} são as potências de 2. Este conjunto com 9 números são as únicas potencias de 2 até 1023, ou seja, os números que são potências de 2 são raríssimos! O crescimento é exponencial. Pela raridade, são interessantíssimos! Isso vale para as potências de qualquer número. Dada a raridade das potências elas passam a ser muito interessantes, além de terem uma expressão simples e possuírem aplicações tanto em Matemática como nas outras Ciências. Os primos não são tão raros assim — ocupam um lugar intermediário. Entre os primeiros K números Naturais cerca de K/ln(K) destes números são primos. Este resultado ficou conhecido como o Teorema dos Números Primos e foi demonstrado no final do século XIX pelos matemáticos franceses Jacques Hadamard e Charles-Jean de la Vallée Poussin. Os números primos vão ficando cada vez menos comuns na medida em que os números crescem, embora esta diminuição ocorra muito lentamente. Um número de vinte algarismos tem a metade da probabilidade de ser primo que um número de dez algarismos escolhidos ao acaso.

Qual o registro histórico mais antigo que existe dos números primos? Não se tem uma resposta para esta pergunta. Certamente, antes de Euclides eles já eram conhecidos e sua importância também percebida. Infelizmente não existe uma fórmula para identificá-los. O que existe é uma estimativa de quantos primos estão abrigados em um intervalo. Foi Euler o primeiro a divisar este fato. A demonstração completa só foi concluída mais de um século depois.

3.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Todo inteiro positivo n > 1 é expresso por um produto único de fatores primos: $n = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\dots.p_k^{\alpha_k}$, onde $p_k são números primos$ e $\alpha_k \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

N ou é primo ou é composto. Se for primo nada mais há a demonstrar. Caso contrário, n = ab, tal que a | n e 1 < a < n. Entre todos os inteiros "a" com esta propriedade seja p_1 o menor deles, que existe pelo Princípio da Boa Ordenação; p_1 é primo, caso contrário ele teria um divisor q, 0 < q < p_1.

Assim, q | p_1 e, por conseguinte, q | n, contradizendo que p_1 é o menor divisor de n. Podemos então escrever, n = $p_1.n_1$, onde p_1 é primo e 0 < n_1< n. Se n_1 for primo a demonstração termina aqui. Caso contrário, repetimos o mesmo argumento acima. Se não fosse primo, então $n_1 = p_2\, n_2$, $0 < p_2 < n_1$.

Isto leva a $n = p_1p_2n_2$, com $1 < n_2 < n_1$. Se n_2 for primo a demonstração está concluída. Caso contrário, o argumento é novamente repetido. Vamos ter $n = p_1p_2p_2n_3$ com $1 < n_3 < n_2$. Dando prosseguimento se obtém uma sequência $n > n_1 > n_2 > n_3 > \dots > 1$ não pode continuar indefinidamente.

Assim, após um número finito de passos se chega que n_{k-1} é primo e renomeamos $p_k = n_{k-1}$. Então, temos: $n = p_1p_2p_3\dots p_k$.

A demonstração da segunda parte do Teorema, isto é, a unicidade, foge ao nosso tema principal que é descobrir e caracterizar as razões pelas quais os números são interessantes.

Chegamos à conclusão que os números primos são as letras que escrevem de maneira única todos os números. Poderíamos dizer que eles lembram os átomos que compõem e descrevem qualquer pedaço de matéria do Universo. Só que os átomos são em número finito (92 ocorrem naturalmente) e os primos são infinitos, conforme logo mais veremos. O papel que os primos desempenham entre os Naturais é singular, resultando daí serem muito interessantes.

3.2 TEOREMA DE EUCLIDES: HÁ UM NÚMERO INFINITO DE PRIMOS.

Euclides demonstrou a infinidade dos números primos a partir de sua célebre obra Os Elementos (Livro IX, Proposição 20).

Demonstração:

A demonstração será por contradição. Vamos supor que só existam finitos primos. Vamos listá-los em ordem crescente: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., p_n.

Seja $K = p_1\ p_2\ p_3 ... p_n + 1$. Ora, $K > 1$. K não pode ser primo, pois todos os primos já foram usados para compor K. Então, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, K é um produto de primos; seja p um dos primos que decompõe K. Ele deve ser um dos p_j que foram usados. Assim, $p \mid p_1\ p_2\ p_3 ... p_n$ e $p \mid K$. Logo, $p \mid (K - p_1\ p_2\ p_3 ... p_n) = 1$; $p > 1$ e $p \mid 1$. É Absurdo!

Essa é uma demonstração elegantíssima pela sua clareza, concisão e alcance, exemplo emblemático do poder que a Matemática possui. Existem outras demonstrações belíssimas da infinidade dos primos. Entre elas está a de Leonardo Euler de 1732. Ele mostrou que a série $\sum_{\text{p primo}}^{\infty} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \ldots = \infty$, isto é, a série diverge.

O contrário ocorre com a série de recíprocos das potências de 2, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. Isso reconfirma que os primos são muito mais abundantes do que as potências de 2.

No conjunto dos primos existem subfamílias que têm propriedades ainda mais especiais. Uma subfamília que chama a atenção é a dos primos gêmeos: 2 e 3, 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 29 e 31 etc. Até aonde vai esta família? Existem apenas finitos membros ou ela se estende indefinidamente? Até hoje esta questão está em aberto!

Observe que entre 3 e 2 a diferença é um, mas daí em diante esta diferença é sempre 2, medida de quão próximos dois primos podem estar. Com ajuda de computadores foi identificado em dezembro de 2011 que os números $3756801695685 \cdot 2^{666669} \pm 1$, são primos gêmeos. É um número enorme. Cada um possui 200700 dígitos na base 10.

O complementar desse conjunto também merece destaque: são os primos *isolados*. Em outras palavras, *p* é um primo *isolado* se nem $p - 2$ nem $p + 2$ são primos. Com esta definição, 2 é um primo isolado, apesar de estar colado no 3! Exemplo de mais alguns primos isolados: 23, 37, 47, 53, 67, 79, 83, 89, 97,… Em 1849 *de Polignac* propôs que para todo número natural k existem infinitos números primos p e p’ tais que p’– p = 2k. Quando k = 1 se trata da conjectura dos primos gêmeos.

Em abril de 2013, Yitang Zhang publicou no *Annals of Mathematics* que para algum inteiro K menor que setenta milhões, existem infinitos pares de primos cuja diferença é K. Isso causou uma verdadeira tempestade entre os matemáticos que são especialistas em Teoria dos Números. Trabalhando em conjunto por sugestão de Terence Tao (Medalha Fields) foi encontrada uma demonstração para K = 6! Uma tremenda redução de K! Entretanto, a conjectura dos primos gêmeos continua de pé. Se os primos tendem a ficar cada vez mais distantes entre si, o que será que causa a existência de tantos pares próximos? Será que existe algum “efeito gravitacional” entre os primos?

Muitos modelos de tabulação foram criados em busca de padrões de identificação e localização dos números primos na sequência dos números naturais. Veremos a seguir, alguns desses modelos.

3.3 O CRIVO DE ERATÓSTENES

O que fazer para identificar números primos? À primeira vista bastaria identificar os divisores do número a. Se $b \mid a$, então, $a = b.c$, onde $1 < b < a$ e $1 < c < a$. Vamos supor que $b \leq c$ (caso contrário, trocaríamos as posições de b por c e c por b). Então, teremos $b^2 \leq b.c = a$. Logo, $b \leq \sqrt{a}$. Esta desigualdade garante que basta procurar os primos menores que a raiz de a. Seja $a = 509$. Então $b \leq \sqrt{509}$, b primo, os possíveis divisores primos seriam 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, pois $22 < \sqrt{509} < 23$. Nenhum destes números divide 509 e daí pode-se concluir que 509 também é primo. O fato de bastar procurar divisores que se situam abaixo da $\sqrt{a}$ reduz drasticamente o trabalho de se identificar os primos divisores de a.

Erastóstenes foi um matemático grego que viveu em Alexandria logo depois da morte de Euclides. Era contemporâneo de Arquimedes. Ele descreve um algoritmo para identificar os primos que certo número a dado e que veio a ficar conhecido como o *Crivo de Erastóstenes.*

O crivo de Eratóstenes é um algoritmo que consiste em escrever um quadro com a sequência dos números naturais a partir do 1. Para identificarmos os números primos:

- Comece eliminando o 1 da lista.
- Destaque, assim, o número seguinte que é o 2, o primeiro número primo. E eliminamos, agora, todos os múltiplos de 2 a seguir.

- Destaque, dessa vez, o primeiro número não eliminado que é o 3, o segundo número primo. A partir daí, eliminamos todos os múltiplos de 3 posteriores.
- Destaque, agora, o próximo número não eliminado: o 5 que é outro número primo. Elimine, também, todos os múltiplos de 5 a seguir.
- E assim, sucessivamente. Repetimos esse processo até que o primeiro número não apagado da lista em questão seja maior que a raiz quadrada do número maior da lista: $\sqrt{n}$, pois todos os números restantes serão primos menores ou iguais a n.

Nas figuras 6 e 7 a seguir, o Crivo de Eratóstenes ilustra os 100 primeiros naturais escritos em formato tabular. Existe uma grande quantidade de formatos que nos permitem enxergar um padrão entre os números que vão sendo eliminados e não eliminados (primos). Para alguns formatos, o padrão é imediatamente visível, para outros nem tanto. Nos dois formatos tabulares ilustrados, o primeiro exibe padrões mais complexos de visualização, enquanto o segundo concentra quase todos os números primos na primeira e na quinta linha da tabela.

Figura 6 – Crivo de Eratóstenes para Números de 1 a 100

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Fonte: Latecnologiaylavidacotidiana[5]

[5]Disponível em:<http://latecnologiaylavidacotidiana.blogspot.com.br/2014/03/criba-de-erastotenes.html>. Acesso em jun. 2015.

Figura 7 – Crivo de Eratóstenes em Outra Tabulação

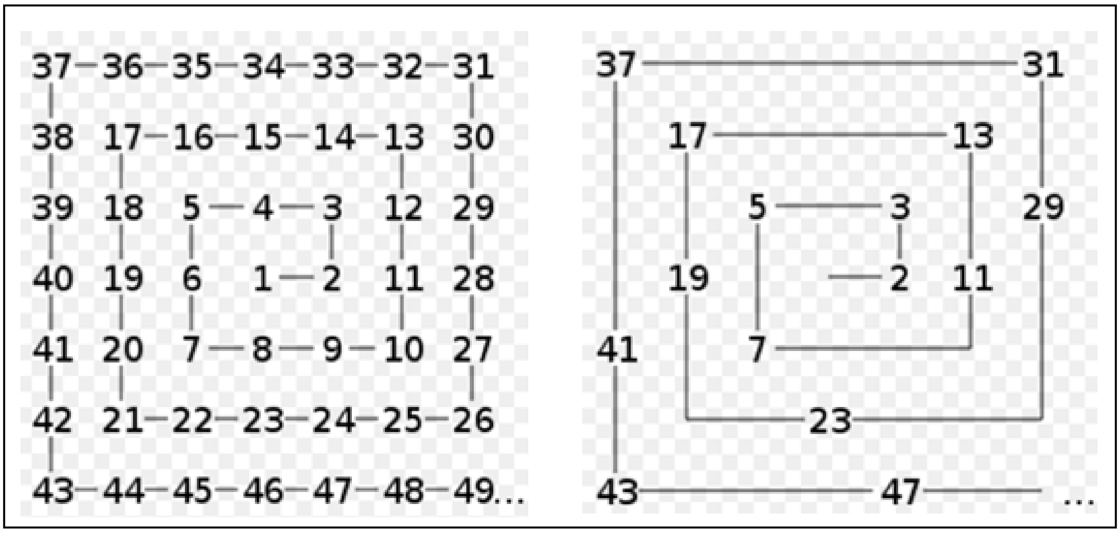
	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	

Fonte: Elaborada pelo autor

As casas em branco contêm os primos sendo, quase sempre, segmentos de retas horizontais. Aqui, o padrão é facilmente percebido: as linhas pretas horizontais eliminam os múltiplos de 2, 3 (múltiplos impares de 3) e 6; as diagonais azuis eliminam os múltiplos de 5 e 7. Estas linhas capturaram todos os números compostos.

A busca por padrões continua, mesmo sem a perspectiva de se encontrar um padrão definitivo, pois este não existe. Conforme Pickover (2011), Estanislaw Marcin Ulam, em 1963, procurava se distrair enquanto assistia uma conferência muito enfadonha, segundo ele. Sobre uma folha de papel quadriculado rabiscava uma sucessão de números inteiros na forma de espiral. Para a sua surpresa, os números primos mostraram uma tendência de se alinharem seguindo diagonais na sua espiral. Observe as retas horizontais e verticais que indicam a forma da espiral.

Figura 8 - Distribuição em Espiral dos Números Naturais e Primos Respectivamente



Fonte: Wikipedia[6]

[6]Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Espiral_de_Ulam>. Acesso em jun. 2015.

A Espiral de Ulam também está relacionada com polinômios do segundo grau (BARTHEL, Jim; SGOBBA, Pietro; ZHU, Fa. 2015):

A partir de testes feitos sobre a espiral de Ulam, é possível verificar uma tendência de concentração de números primos nas diagonais que permanecem presentes, mesmo quando uma grande quantidade de números é escrita ou quando o número do centro da espiral não é o "1".

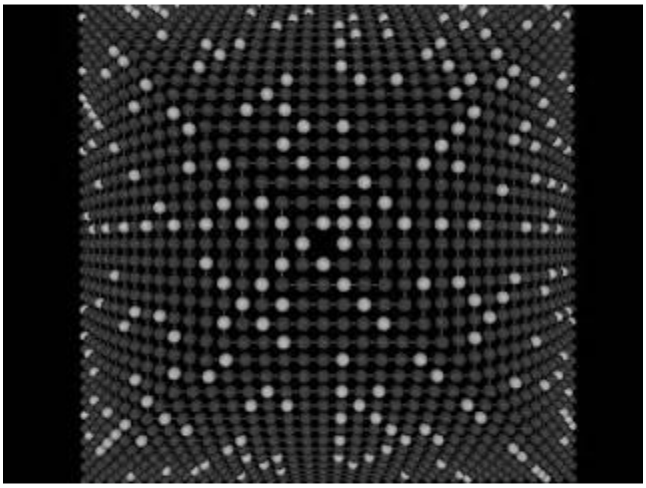
Tudo isso implica na existência de constantes inteiras "*b*" e "*c*" utilizadas na função: "$f(n) = 4n^2 + bn + c$", sendo $n \in \mathbb{N}$, capaz de obter uma grande quantidade de números primos.

MERAYO (2005) apresenta no livro "Secretos de los números primos" a expressão $\mathbf{f(n)= 4}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}\mathbf{ + 170}\boldsymbol{n}\mathbf{ + 1847}$como uma dessas funções, afirmando que f(n) identifica 760 primos não encontrados na função proposta por Euler em 1772.

Legendre provou em 1752 que não existem funções racionais que sempre produzam primos e Goldbach também demonstrou que não existem polinômios com coeficientes inteiros que para todo valor de n inteiro produza um número primo.

O *software* MatLab pode ajudar na geração de espirais de Ulam com grande eficiência. No gráfico abaixo traz uma ilustração da espiral de Ulam.

Figura 9: Espiral de Ulam



Fonte: Adaptada do Blog Freeinformatic[7]

[7]Disponível em:<http://freeinformatic.blogspot.com.br/?view=mosaic>. Acesso em jun. 2015.

A figura 9 permite observar de forma mais ampla a distribuição de todos os números naturais primos e compostos na espiral de Ulam, onde os pontos escuros marcam os números compostos e os pontos claros destacam os números primos.

3.4 NÚMEROS PRIMOS ESPECIAIS

Com o despertar da Ciência no final da Idade Média, teve início o esforço para se descobrir fórmulas algébricas que fossem capazes de expressar os primos. Nesta época, não se sabia que estes números não seguem um padrão. Dois, dentre eles podem ser citados: os primos de Mersenne e os primos de Fermat.

3.4.1 Números primos de Mersenne

Os números primos de Mersene (M_p) são todos aqueles obtidos pela fórmula $\mathbf{M_p = 2^p - 1}$, quando p for primo.

Tabela 1 – Cálculos da Fórmula de Mersenne

P	$M_p = 2^p - 1$	Observações
1	$M_1 = 2^1 - 1 = 1$	
2	$M_2 = 2^2 - 1 = \mathbf{3}$	p = 2 (primo), M_2 = 3 (primo)
3	$M_3 = 2^3 - 1 = \mathbf{7}$	p = 3 (primo), M_3 = 7 (primo)
4	$M_4 = 2^4 - 1 = 15$	
5	$M_5 = 2^5 - 1 = \mathbf{31}$	p = 5 (primo), M_5 = 31 (primo)
6	$M_6 = 2^6 - 1 = 63$	
7	$M_7 = 2^7 - 1 = \mathbf{127}$	p = 7 (primo), M_7 = 127 (primo)
8	$M_8 = 2^8 - 1 = 255$	
...	...	...

Fonte: Elaborada pelo autor

Hoje, com os recursos computacionais que se dispõe é muito fácil perceber que não é verdade que $\mathbf{M_p}$ é um número primo, se p é primo. Hudalricus Regius mostrou em 1536 que para p = 11, na fórmula de Mersenne, $M_{11} = 2^{11} - 1 =$ ***2047*** não é primo, pelo fato de que 2047 = 23 x 89.

Em 1643, Mersenne afirmou que $\mathbf{M_p}$ é primo para p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, **67**, 127 e **257** e para os demais valores de p > 257, $\mathbf{M_p}$ é composto.

Hoje sabemos também que Mersenne errou ao incluir $\mathbf{M_{67}}$ e $\mathbf{M_{257}}$ como primos e ao ignorar a primariedade de $\mathbf{M_{61}}$, $\mathbf{M_{89}}$ e $\mathbf{M_{107}}$.

Apesar da fórmula sugerida por Mersenne não fornecer sempre números primos, ela é verdadeira em muitos casos. Daí o interesse de encontrar números primos a partir da fórmula de Mersenne nos últimos três séculos.

Consultando o site http://www.mersenne.org/prime.htm, tem-se a informação que até dezembro de 2015 já são conhecidos 48 primos de Mersenne: p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 1213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433, 1257787, 1398269, 2976221, 3021377, 6972593, 13466917, 20996011, 24036583, 30402457, 32582657, 37.156.667, 42.643.801, 43.112.609 e 57.885.161.

Em 1996, foi criado um projeto internacional de computação compartilhada: o *Great Internet Mersenne Prime Search* (GIMPS), para encontrar números primos de Mersenne. Segundo o *site* do GIMPSE, foi encontrado, em 2013, o quadragésimo oitavo (48º) primo da série e o maior de todos. O gigante foi descoberto pelo professor Curtis Cooper, da Universidade Central do Missouri em Warrensburg, EUA. É o número primo $M_{57.885.161}$ = $\mathbf{2^{57.885.161} - 1}$ que é composto por 17 milhões de algarismos que, se fossemos escrevê-lo por extenso, precisaríamos de 3,4 mil páginas impressas com 5 mil dígitos em cada página!

Até o momento, ninguém demonstrou que os primos de Mersenne sejam infinitos.

Tabela 2 – Números Primos de Mersenne Descobertos pelo GIMPS

AS DESCOBERTAS REALIZADAS PELO PROJETO GIMPS			
n	**Data**	**Descobridor**	$\mathbf{M_p}$
1	**1996-Nov-13**	Joel Armengaud descobriu o 35º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{1.398.269} -1}$
2	**1997-Aug-24**	Gordon Spence descobriu o 36º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{2.976.221} -1}$
3	**1998-Jan-27**	Roland Clarkson descobriu o 37º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{3.021.377} -1}$
4	**1999-jun-01**	Nayan Hajratwala descobriu o 38º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{6.972.593} -1}$
5	**2001-Nov-14**	Michael Cameron descobriu o 39º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{13.466.917} -1}$
6	**2003 Nov-17**	Michael Shafer descoberto o 40º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{20.996.011} -1}$
7	**2004-May-15**	Josh Findley descobriu o 41º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{24.036.583} -1}$
8	**2005-Feb-18**	Dr. Martin Nowak descobriu o 42º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{25.964.951} -1}$
9	**2005-Dez-15**	Curtis Cooper/Steven Boone descobriu o 43º conhecido Primo de M.	$\mathbf{2^{30.402.457} -1}$
10	**2006-Set-04**	Curtis Cooper e Steven Boone descobriu o 44º conhecido Primo de M.	$\mathbf{2^{32.582.657} -1}$
11	**2008-Set-06**	Hans-Michael Elvenich descobriu o 45º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{37.156.667} -1}$
12	**2009-Apr-12**	Odd Magnar Strindmo descobriu o 46º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{42.643.801} -1}$
13	**2008-Aug-23**	Edson Smith descobriu o 47º conhecido Primo de Mersenne	$\mathbf{2^{43.112.609} -1}$
14	**2013-Jan-25**	**Curtis Cooper descobriu o 48º conhecido Primo de Mersenne**	$\mathbf{2^{57.885.161} -1}$

Fonte: adaptação do GIMPS (2015)

A cada novo número primo descoberto, o pesquisador ganha uma premiação em dinheiro. Não é uma missão fácil. E até 2013 não se mostrou impossível.

3.4.2 Números primos de Fermat

A partir da conjectura de Fermat, todos os números obtidos pela fórmula: $\mathbf{F_n = 2^{2^n} + 1}$, listados na tabela abaixo são números primos, segundo Fermat.

Tabela 3 – Cálculos da Fórmula de Fermat

N	$\mathbf{F_n = 2^{2^n} + 1}$	$\mathbf{F_n}$
1	$F_1 = 2^{2^1} + 1$	$F_1 = 5$
2	$F_2 = 2^{2^2} + 1$	$F_2 = 17$
3	$F_3 = 2^{2^3} + 1$	$F_3 = 257$
4	$F_4 = 2^{2^4} + 1$	$F_4 = 65537$
5	$\mathbf{F_5 = 2^{2^5} + 1}$	$\mathbf{F_5 = 4294967297}$
...	...	...

Fonte: Elaborada pelo autor

Infelizmente, Fermat estava enganado. Em 1732, Euler descobriu uma fatoração para o $\mathbf{F_5}$**:4294967297 = (641).(6700417)**. Não se conhece outros números primos que sejam também primos de Fermat, se n > 4. Desse modo, surgem as perguntas: então F_n é composto para n > 4? Existem infinitos F_n compostos? Ninguém sabe a resposta. Até 2014 se sabia que F_n, $5 \leq n \leq 32$ são todos compostos.

4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Há registros históricos que os primeiros elementos desta sequência apareceram na Índia por volta de 200 a.C.. Segundo esta visão, Fibonacci teria sido o introdutor desta sequência na Europa no seu livro *Liber Abbaci,* em 1202.

Figura 10 – Suposta imagem de Fibonacci

Fonte: Web del profesor[8]

Em 1627, foi publicada a sua segunda edição. Não existe nenhuma cópia da primeira edição. A gravura do rosto de Fibonacci acima foi pintada por um artista desconhecido, em data também desconhecida. Uma curiosidade: ele só adquiriu este apelido anos depois de sua morte física. Este livro também introduzia os símbolos indu-arábicos e o sistema de numeração decimal. Eves (2004) cita o que ele diz logo no primeiro capítulo: "*Nouetn figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1.Cym his itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zeph rum appelatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur*." Ou em Português em tradução livre: "*Estes são os nove símbolos hindus: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Com estes nove símbolos e com o sinal 0, que os árabes chamam de Zéfiro, qualquer número pode ser escrito.*"

Naturalmente, a grafia desses dez numerais era diferente daquela constante no seu livro. A forma destes numerais foi sendo modificada ao longo dos séculos seguintes até assumir a forma utilizada hoje. O principal objetivo deste livro era ensinar a fazer cálculos sem a ajuda do ábaco chinês. Ele traz exemplos de problemas na área comercial, tais como a conversão de moedas e de medidas e o cálculo de juros e de lucros. Trata ainda de problemas

[8]Disponível em:<http://webdelprofesor.ula.ve/ingenieria/jacinto/guia-de-estudio/14267779/MatDiscretas/Mat_Discretas25.html>. Acesso em ago. 2015.

de natureza puramente matemática como o Teorema do Resto Chinês, números perfeitos, primos de Mersenne, números piramidais e ainda a hoje famosa sequência do crescimento de uma população (ideal) de coelhos.

É claro que nesta época estas questões não tinham estes nomes ainda. Investiga a existência de raízes de polinômios e discute estratégias para aproximação de raízes. Não deixa fora também a Geometria Euclidiana incluindo as demonstrações de alguns teoremas. Sem dúvida, Fibonacci foi o maior matemático europeu entre Diofanto e Fermat.

Figura 11– Estátua de Fibonacci.

Fonte: Wikipedia[9]

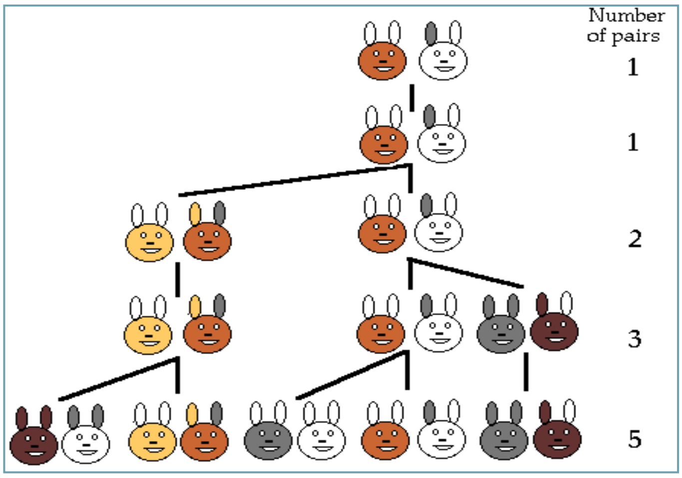
Além da obra *Liber* Abaci, ele escreveu outros livros de grande repercussão: *Practica Geometriae* (1220), Floss (1225), *Liber Quadratorum* (sobre equações diofantinas), etc. Outras obras se perderam. Não se conhece a data de sua morte; ela ocorreu entre 1240 e 1250. Para homenageá-lo, existe uma estátua de Fibonacci no cemitério de Pisa erguida ainda no século XIX e um asteróide foi batizado com seu nome (6765 Fibonacci), além de vários conceitos matemáticos e uma revista matemática circulando quatro vezes por ano desde 1963, mantida pela *Fibonacci Association* (Fibonacci Quarterly). Isso é parte do reconhecimento pelo seu legado.

---

[9]Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci>. Acesso em jun. 2015.

Na sua obra de 1202, Fibonacci considerava uma irrealística criação de coelhos, supondo que eles nascem aos pares: um macho e uma fêmea, exatamente. Cada fêmea engravida quando tem um mês de idade e as gestações duram exatamente um mês. Assim, a fêmea do primeiro casal engravida quando tem um mês de idade e dá a luz a um novo casal exatamente um mês depois. Supõe-se ainda que nenhum coelho morra.

Figura 12 – Contagem da Reprodução de Coelhos



Fonte: The Mathematical Magic of the Fibonacci Numbers[10]

O que Fibonacci quer saber é quantos casais de coelhos existirão ao final de um ano. Se F_n representa o número de casais ao final de cada mês, temos $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ e em geral, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Então, a resposta é 144 casais, que é o único número da sequência que é um quadrado perfeito, isto é, $F_{12} = 144 = 12^2$.

Trata-se de uma sequência recursiva onde cada F_n depende dos dois antecessores imediatos. Esta sequência ficou conhecida como "Sequência de Fibonacci" dado por Edouard Lucas, no século XIX.

À primeira vista, sequências deste tipo têm uma grande desvantagem: para conhecer F_{1000} precisa-se antes conhecer os 999 antecessores. Será? É um fato conhecido que toda sequência recursiva linear com coeficientes constantes possui uma fórmula fechada. No caso da de Fibonacci, esta formula foi obtida por Binet. Hoje, sabe-se que Abraham de

[10] Disponível em:< www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html>. Acesso em jun. 2015.

Moivre já havia obtido este resultado. Esta fórmula é expressa por: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right)$, onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887...$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1-\varphi = -1/\varphi \approx -0{,}6180339887...$

Observe que ψ e φ são raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$, de modo que também satisfazem $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ e $\psi^n = \psi^{n-1} + \psi^{n-2}$.

A expressão de Binet é desconcertante, pois nada sugere que esta fórmula resultará em um número natural e muito menos ainda em F_n, para cada n. A fórmula de Binet também revela que os números de Fibonacci estão intimamente ligados a φ. Mais uma observação: se $r_1 < 0$ e $r_2 > 0$ são as raízes de um polinômio do segundo grau, $r_1 = -1/r_2$. Isso garante que na fórmula de Binet, se $n \geq 10$, basta calcular $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}; \frac{\varphi^{10}}{\sqrt{5}} \approx 55{,}0056$, uma vez, $\psi^{10} \approx 0$, F_{10} é o inteiro mais próximo na fórmula.

Pode-se provar a partir da fórmula de Binet que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$, não importam quais sejam os valores iniciais para F_1e F_2, com exceção de (0, 0), isto é, o valor do limite independe das condições iniciais, menos quando os dois primeiros valores são nulos. Este importante limite foi demonstrado pelo matemático escocês Robert Simson em 1753. Observe como fez Johannes Kepler, que F_{n+1}/F_n se aproxima de φ alternadamente por valores superiores e inferiores das identidades acima e do fato da equação $x^2 - x - 1 = 0$ resultar da divisão de um segmento em média proporcional, também conhecida por *razão áurea.*

Mario Livio (2012), em seu livro *The Golden Ratio,* escreve:

> "Algumas das maiores mentes matemáticas de todos os tempos, desde de Pitágoras e Euclídes na Grécia antiga, através do matemático medieval, o italiano Leonardo de Pisa e o astrônomo renascentista Johannes Kepler, as atuais das figuras científicas, tais como Oxford e o físico Rogre Penrose, passaram horas sem fim ao longo desta razão simples e de suas propriedades. Mas o fascínio com a razão Áurea não se limita apenas aos matemáticos. Biologos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos tem ponderado e debatido base de sua onipresença e de recurso. Na verdade é, provavelmente, justo dizer que a A Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas como nenhum outro número da história matemática."

A sequência de Fibonacci satisfaz muitas identidades, como por exemplo, $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ e $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$. Estas duas identidades são facilmente demonstradas por indução matemática. Existe uma interseção não vazia entre os números de Fibonacci e os números primos. São membros desta interseção 2, 3, 5, 13, 89, 233, 1597, 28657, 514229, … Não se sabe se este conjunto tem infinitos elementos.

Se I_n é o n-ésimo número natural, então o $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ que é um número super *interessante*, como já foi visto, assim como o limite φ.

Não é exagero ressaltar o quanto 1 é, de fato, *interessante.* A *Lei de Benford*, um físico da General Electric, também conhecida como a *Lei do Primeiro Dígito* estabelece que em inúmeros conjuntos numéricos (distribuições) os dígitos pequenos ocorrem desproporcionalmente em relação aos maiores. Ele observou esta lei em 1938. Por exemplo, 1 aparece em cerca de 30% como o primeiro número entre os elementos da distribuição; enquanto que o 9 só aparece em 5% das vezes. O que se espera, intuitivamente, é que os nove numerais tivessem uma ocorrência próxima da esperada, 11,1%. Para citar algumas das distribuições onde esta lei é válida: contas de eletricidade, endereços residenciais, preços de ações negociadas na bolsa, estatísticas de populações, taxas de mortalidade, comprimentos de rios, constantes matemáticas e físicas, potências de números, etc.

Benford testou a sua lei em vinte coleções: áreas das bacias de 335 rios, tamanhos de 3259 populações americanas, 104 constantes físicas, 1800 pesos moleculares, etc. E por que esta lei é válida? Até hoje não existe uma resposta cabal. Ted Hill, um matemático americano, vem estudando esta lei nos anos recentes.

Esta lei tem sido aceita em cortes de justiça estaduais e federais dos Estados Unidos como prova de fraudes em diversas áreas.

4.1 ALGUMAS APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E DO NÚMERO φ

O Algoritmo de da Divisão de Euclides tem aperfeiçoamentos (versões). Leopoldo Kronecker mostrou a versão que exige o menor número de passos é equivalente a $\left|\frac{r_{k+1}}{r_k}\right| < \frac{1}{\varphi} \approx 0,618$.

A fórmula $\varphi = 1 + 1/\varphi$ quando expandida recursivamente produz o que se chama de representação em forma de frações contínuas de φ, a saber:

$$\varphi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}.$$

Sendo φ um número irracional, sua expressão contendo apenas um único algarismo, 1, combinado a uma sequência de somas e quocientes, além de sua beleza arrebatadora, singeleza e primalidade, chama a atenção até de pessoas de fora do campo da Matemática. Seria este número o mais irracional entre todos os irracionais? Suas propriedades o destacam como um número assaz *interessante!*

As representações para os números $\underline{e}$ e $\underline{\pi}$ não chamam tanto a atenção nem mostram regularidade.

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\dots}}}}} \; ; \; e = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\dots}}}}}$$

Por ter uma expansão constituída apenas pelo elemento 1, φ é o número irracional mais difícil de ser aproximado por uma sequência de racionais. O Teorema de Hurwitz garante que qualquer que seja o real k, existe uma sequência infinita de racionais m/n cuja distância a k satisfaz:

$$\left|k - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2.\sqrt{5}}$$

A sequência gerada pela fração contínua de φ, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, etc. estão todas muito próximas da tolerância $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n^2}.\sqrt{\mathbf{5}}}$; bem diferente do que acontece com a fração 355/113 que se aproxima de π. Isso reforça o quão *interessante* φ é, apesar de não ser um número natural, sua origem está em uma sequência de números naturais (Fibonacci).

Em http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html existem dezenas de outras aplicações dos números de Fibonacci à Matemática.

Outros ramos da Ciência e das Artes também são repletos de aplicações. Consulte o *site* http://sciencenetlinks.com/lessons/the-fibonacci-sequence/ para conhecer muito material cuja abrangência vai do fácil ao muito esotérico e restrito a especialistas.

4.2 OS NÚMEROS DE FIBONACCI COMO BASE DOS NATURAIS

Ao longo deste trabalho tem-se presenciado a importância dos números primos em diversas áreas do conhecimento. Muito tem sido revelado e ainda mais está por vir. Desafios atravessam séculos sem solução. O que se tem revela uma beleza austera e uma abrangência cujas fronteiras ainda não podem ser vislumbradas.

Os números de Fibonacci guardam uma semelhança com os números primos, uma espécie de sombra do Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). E por ser uma sombra do TFA tem alcance e extensão comparáveis e pode ser enunciada nos termos:

Teorema: Todo número natural n pode ser escrito como uma soma finita de números de Fibonacci.

Demonstração: Seja k um número natural qualquer. Se k for um número de Fibonacci a demonstração termina aqui. Se não, seja F(1) o maior número de Fibonacci que não exceda k, $F(1) \leq k$. F(1) será o primeiro elemento da sequência. Seja $k - F(1) = k_1$. Seja F(2) o maior número de Fibonacci que não exceda k_1, isto é, $F(2) \leq k_1$. F(2) será o segundo elemento da sequência. A sequência $1 \leq \ldots k_3 \leq k_2 \leq k_1$ é decrescente e, pelo Princípio da Boa Ordenação tem um elemento mínimo que, necessariamente será um número de Fibonacci. Se isso assim não fora o processo poderia ter continuidade gerando um novo elemento menor ainda. Absurdo, pois o elemento escolhido era o menor elemento da sequência. Observe que a unicidade não faz parte deste teorema como ocorre no teorema de Euclides. Basta um contra-exemplo para ver que a unicidade não ocorre. Considere o número 5, um número de Fibonacci. Este número também pode ser expresso como 5 = 2 + 3; tanto 2 como 3 são números de Fibonacci. Isso empalidece o resultado, porém não tira seu brilho.

5 OUTROS SUBCONJUNTOS INTERESSANTES DOS NATURAIS

Alguns destes conjuntos já eram conhecidos e estudados desde os tempos de Pitágoras. Apesar de não disporem de nenhuma notação simbólica que facilitasse o seu estudo, não desistiam. Tinham sua mente para se apoiar.

5.1 NÚMEROS PERFEITOS

Entendia-se por *números perfeitos* aqueles naturais cujos divisores próprios quando somados, o total é igual ao número considerado. Esta definição é antiga, consta nos Elementos de Euclides (VII. 22). Eram conhecidos 6 = 1+2+3 e 28 = 1+2+4+7+28e 496, 8128. Somente estes quatro números eram conhecidos pelos matemáticos gregos. Até o presente momento são conhecidos 48 números perfeitos.

Em uma outra citação no livro Elementos (Livro IX, proposição 36), Euclides escreveu e demonstrou o teorema enunciado abaixo em uma linguagem um tanto obscura para o nosso tempo. Esse teorema confuso também foi enunciado no livro "Números e Numerais":

> Se tantos números quanto desejarmos começando com uma unidade são expostos em proporção dupla, até que a soma de todos se torne um número primo, e se a soma multiplicada pelo último forma algum número, o produto será perfeito. (GUNDLACH, 1994)

Mesmo sem mencionar nada a respeito do conceito de números perfeitos, Euclides, supostamente, sugere que em qualquer soma parcial da série 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ..., quando resulta-se em um número primo, ao multiplicá-lo pelo último termo ($2^n – 1$) obtém-se em um número par perfeito. Ou seja, os números pares perfeitos são obtidos pelo produto de $2^n – 1$ por qualquer primo de Mersenne, o que pode ser representado por $2^{n-1}.(2^n – 1)$.

Teorema (Euclides - Euler): Um número natural par N é denominado *número perfeito* se, e somente se, N = $\mathbf{2^{n-1}.(2^n - 1)}$, sendo$\mathbf{2^{n-1}}$ é um primo de Mersenne.

Demonstração: Suponha que N = $\mathbf{2^{n-1}.(2^n - 1)}$, onde $\mathbf{2^n - 1}$é um primo de Mersenne. Assim, n> 1 e N é par.

A partir da proposição da soma dos divisores de N, seja N = $p_1^{e_1}.p_2^{e_2}.\dots.p_t^{e_t}$,onde p_1, p_2, ..., p_t são números primos e e_1, e_2, ... ,e_t são números naturais não nulos e considere S(N) como a soma de todos os divisores de N. Então:

$$\sigma(N) = \frac{p_1^{e_1+1} - 1}{p_1 - 1}.\frac{p_2^{e_2+1} - 1}{p_2 - 1}.\dots.\frac{p_t^{e_t+1} - 1}{p_t - 1}$$

Por corolário, para um número composto N = x.y, $\sigma(N) = \sigma(x.y) = \sigma(x).\sigma(y)$ quando mdc (x,y) = 1.

Assim, sendo $\mathbf{2^n - 1}$ um número ímpar, temos que o mdc $(2^{n-1}, 2^n - 1) = 1$, e portanto, são primos entre si.

Esegue-se que:

$\sigma(N) = \sigma(2^{n-1}.(2^n - 1)) = \sigma(2^{n-1}) . \sigma(2^n - 1) = \frac{2^n-1}{2-1}. 2^n = 2. 2^{n-1}. (2^n - 1) = 2.N.$

Portanto, N é perfeito.

No século XVIII, Euler também demonstra o teorema que define os números perfeitos pares.

Demonstração: Reciprocamente, suponha que N é perfeito e par. Seja 2^{n-1} a maior potência de 2 que divide N. Logo, p > 1 e $N = 2^{n-1} . b$, com b ímpar.

Como $N = \frac{2^n}{2} . b$ é perfeito, concluímos que:

$2^n.b = 2N = \sigma(N)$

$2^n.b = 2. 2^{n-1} .b = \sigma(2^{n-1} .b)$

Assim:

$2^n.b = \sigma(2^{n-1}).\sigma(b) = (2^n - 1) . \sigma(b)$

Segue então que $2^n - 1 | 2^n.b$. Como o mdc $(2^n - 1, 2^n) = 1$, concluímos que $2^n - 1|b$. Logo existe um $B \in \mathbb{N}$ com $(2^n - 1).B = b$. Além disso, temos $B \neq b$, pois $n \geq 2$.

Dessa forma, $2^n.(2^n - 1).B = 2^n.b = (2^n - 1) . \sigma(b)$

Ou seja, $2^n .B = \sigma(b) \geq b + B = 2^n .B$.

Portanto, $\sigma(b) = B + b$. Concluímos que M e m são os únicos divisores de b.

Mais precisamente, B = 1 e $m = 2^n - 1$ que é primo. Logo, N tem a forma:

$$N = 2^{n-1}.(2^n - 1) \text{ com } 2^n - 1 \text{ primo.}$$

É importante mencionar que, até novembro de 2015,é desconhecida a existência de algum número perfeito ímpar e tem-se, a partir do maior primo de Mersenne,o 48º maior número perfeito conhecido. É o $\mathbf{2^{57.885.160}. (2^{57.885.161} - 1)}$, que é formado por mais de 34 milhões de algarismos.

5.2 NÚMEROS AMIGÁVEIS (AMIGOS)

Sendo mais um legado de Pitágoras, os números amigáveis são pares de números em que cada um é a soma dos divisores próprios do outro. Pitágoras dizia que "um amigo é alguém que é o outro eu, tal qual são 220 e 284".

Os números 220 e 284 são números amigos, pois, a partir de seus respectivos divisores D(220) = {1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 55, 110, $\underline{220}$} e D(284) = {1, 2, 4, 71, 142, $\underline{284}$} pode-se verificar que a soma dos divisores próprios de 220, $S_{DP}(220) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 55 + 110 =$**284** e a soma dos divisores próprios de 284, $S_{DP}(284) = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 =$ **220**.

No século IX, os matemáticos árabes reiniciaram o seu estudo. Por volta do ano 850, Thabit Ibn Kurrah conseguiu desenvolver uma fórmula geral para se descobrir novos números amigos.

Se $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^{n} - 1$ e $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ são números primos, onde $n > 1$ é inteiro, então$2^n.p.q$ e $2^n.r$ são um par de números amigos.

Aplicando a fórmula para n = 2, temos p = 5, q = 11 e r = 71 que são primos, logo: $2^n.p.q = 4.5.11 = 220$ e $2^n.r = 4.71 = 284$ são números amigos.

E para n = 4, temos p = 23, q = 47 e r = 47 que são primos, logo: $2^n.p.q = 16.23.47 = 17290$ e $2^n.r = 16.1151 = 18416$ são números amigos.

O matemático iraniano Baqir Yazdi (século XVI) descobriu o par 9363584, 9437056, fato atribuído a Descartes durante muito tempo.

Nove séculos depois de Thabit, Leonard Euler voltou sua atenção para os números amigos, desenvolvendo uma fórmula que generalizava a regra de Thabit Ibn Kurrah e, com isso, acrescentou 60 novos pares de números amigos.

Pela regra de Euler, os números $2^n.p.q$ e $2^n.r$ são um par amigável se os três números inteiros

$$p \equiv 2^m.(2^{n-m} + 1) - 1$$

$$q \equiv 2^n.(2^{n-m} + 1) - 1$$

$$r \equiv 2^{m+n}.(2^{n-m} + 1)^2 - 1$$

são todos os números primos para algum m natural, sendo $1 \leq m \leq n - 1$. Os primeiros (m, n) que determinam números amigos são (1, 2), (3, 4), (6, 7), (1, 8), (29, 40),...

Contudo, muitos pares de números amigos que não satisfazem a essas regras têm sido encontrados. Permanece em aberto a questão se são ou não infinitos. Todos os pares amigos conhecidos ou são ambos pares ou ambos ímpares. Paul Erdös, um matemático húngaro demonstrou que a densidade dos pares de números amigos relativa aos Naturais é 0. São raríssimos!

5.3 NÚMEROS PALÍNDROMOS

Um número palíndromo é um número em que, mesmo quando escrito para a frente ou para trás, permanece o mesmo, ou seja, da forma x= $a_1 + 10a_2 + 10^2a_3 + ... + 10^{k-2}a_3 + 10^{k-1}a_2 + 10^k a_1$, sendo números naturais k , $a_1 \geq 1$ e $a_k < 10$. Os números naturais palíndromos com 1, 2 e 3 algarismos são (OEISA002113):

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313, 323, 333, 343, 353, 363, 373, 383, 393, 404, 414, 424, 434, 444, 454, 464, 474, 484, 494, 505, 515, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595, 606, 616, 626, 636, 646, 656, 666, 676, 686, 696, 707, 717, 727, 737, 747, 757, 767, 777, 787, 797, 808, 818, 828, 838, 848, 858, 868, 878, 888, 898, 909, 919, 929, 939, 949, 959, 969, 979, 989, 999.

A fórmula que determina diversos números palíndromos é dada pela soma de qualquer número com outro que possua os mesmos algarismos na ordem inversa. Se não resultar em um número palíndromo, repita o processo.

Vejamos:

16 + 61 = 77

147 + 741 = 888

258 + 852 = 1110 + 0111 = 1221

374 + 473 = 874 + 478 = 1352 + 2531 = 3883

Uma propriedade interessante é que todo número palíndromo com um número par de algarismos é múltiplo de 11.

Demonstração: Seja X tal número. Podemos escrever X=$a_1 + 10a_2 + 10^2a_3 + ... + 10^{k-1}a_k + 10^k a_{k+1} + ... + 10^{2k-1}a_2 + 10^{2k}a_1$, com k, a_1 e a_k naturais e$a_1 \neq 0$, $a_k < 10$. Para que 11 seja divisor de X, é necessário que a diferença entre soma dos algarismos de ordem par e soma dos algarismos de ordem ímpar seja um número divisível por 11. E Por X ser um número palíndromo com uma quantidade par de algarismos, note que:

Os termos centrais $a_{k-1} = a_k$ só aparecem uma única vez na decomposição.

E os termos $a_1, a_2, a_3, ... \neq a_k$ aparecem duas vezes em ordens equidistantes: uma par e outra ímpar.

Assim, temos que:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{k-1}) - (a_k + ... + a_4 + a_3 + a_2 + a_1) = 0$$

ou

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + a_{k-1} - a_k + ... + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0$$

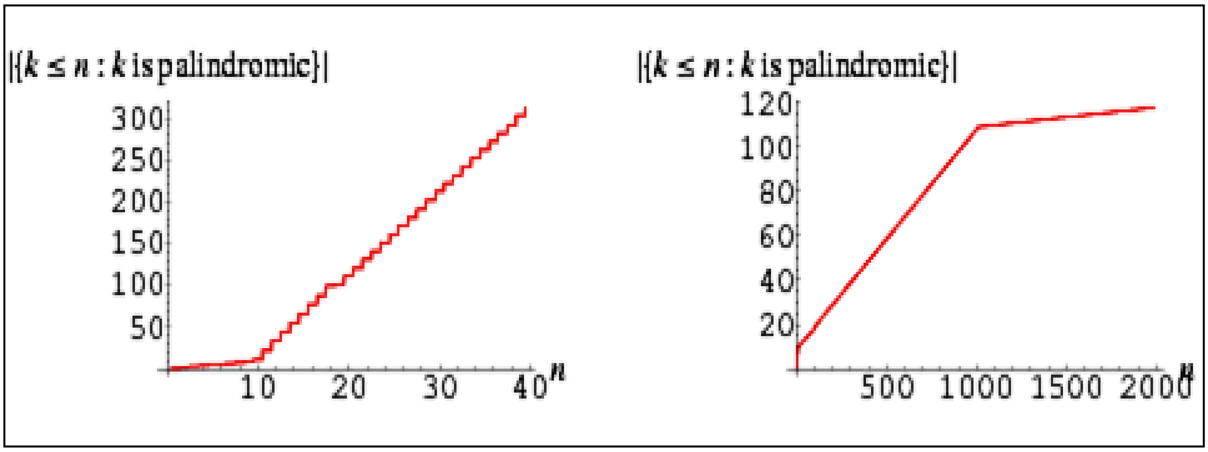
Como zero é divisível por 11, conclui-se assim a demonstração.

Existem infinitos palíndromos contidos nos naturais. A quantidade de números palíndromos menores que n = 10, 10^2, 10^3, ..., são respectivamente, 9, 18, 108, 198, 1098, 1998, 10998, ... (OEIS A050250). Essa sequência é dada pela fórmula de forma fechada:

$$a_n = \begin{cases} 2\left(10^{n/2} - 1\right), & para\ n\ pares \\ 11.10^{(n-1)/2} - 2, & para\ n\ ímpares \end{cases}$$

A quantidade de números palíndromos menores do que um número dado estão ilustrados no gráfico a seguir.

Figura 13 – Gráfico dos números palíndromos nos naturais



Fonte: Wolfram Mathworld[11]

Na maioria das vezes, estes números ocupam espaço na Matemática recreativa. Exemplo disso é a enumeração dos primos que sejam, também, palíndromos: 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151...; ou dos quadrados que sejam palíndromos: 0, 1, 4, 9, 121, 484, 676, 10201, 1232, etc. Naturalmente, estes números dependem da base onde estão expressos.

Os números palíndromos são, pois, números interessantes.

[11]Disponível em:<http://mathworld.wolfram.com/PalindromicNumber.htm>. Acesso em jun. 2015.

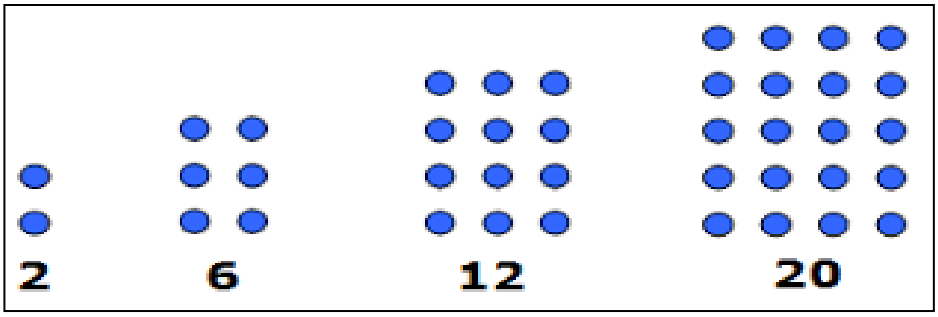
5.4 NÚMEROS FIGURADOS

Consta que estes números faziam parte dos estudos realizados pelos pitagóricos. Provavelmente, era um recurso que eles lançavam mão por não disporem de uma notação conveniente para representar os números (Naturais). Caracterizam-se como figurados pelo fato de ser possível representá-los sob uma forma geométrica plana ou física, através de pontos ou pedras, para a investigação de suas propriedades. Os mais simples são os triangulares, seguidos dos quadrados, retangulares, pentagonais, hexagonais, heptagonais, etc. Em resumo, números poligonais.

5.4.1 Números Oblongos

São infinitos números naturais retangulares obtidos a partir do produto de dois números consecutivos n.(n+1). Os vinte primeiros números oblongos são 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240, 272, 306, 342 e 380.

Figura 14 – Os quatro menores números oblongo



o
Fonte:Elaborada pelo autor

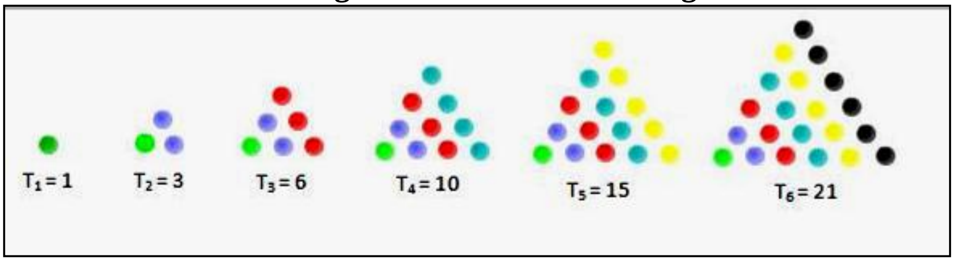
A metade dos números oblongos formam os primeiros números poligonais: os números triangulares, que serão apresentados em seguida.

5.4.2 Números Triangulares

A sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406 … é formada de números triangulares.

Existe uma forma geral para representá-los: $T_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

Figura 15 – Números Triângulares



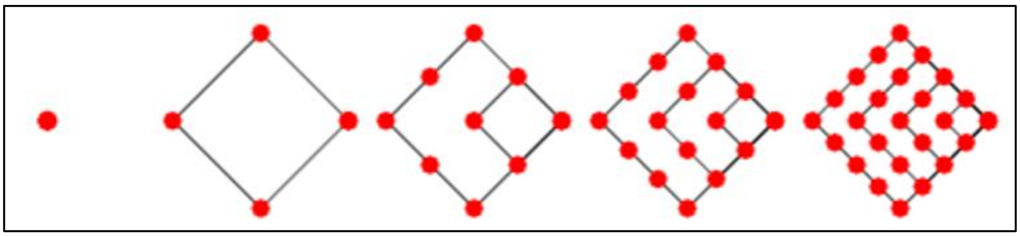
Fonte: Wordpress[12]

Os números triangulares gozam de muitas propriedades, como, por exemplo, $T_{n-1} + T_n = n^2$, $T_{m+n} = T_m + T_m + mn$, $T_{mn} = T_m T_n + T_{m-1} T_{n-1}$. É imediato de sua fórmula que a soma dos n primeiros números pares se expressa como: 2+4+6+...+2n = n(n+1) que pode ser vista como um número retangular (oblongo) de comprimento n e altura n+1. Quanto à soma dos n primeiros números ímpares, esta é expressa como $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. Esta fórmula nos leva diretamente aos números quadrados.

5.4.3 Números Quadrados (ou Quadrangulares)

Números quadrados são aqueles que se expressam como quadrado de um número. Pela sua beleza estes números atraem matemáticos e leigos. Entre os mais belos resultados está o *Teorema de Lagrange*: todo número natural pode ser expresso pela soma de não mais quatro quadrados.

Figura 16 – Números quadrados



Fonte:Worldscientific[13]

[12]Disponível em:<https://qkdb.files.wordpress.com/2013/03/paint.jpg>. Acesso em jun. 2015.

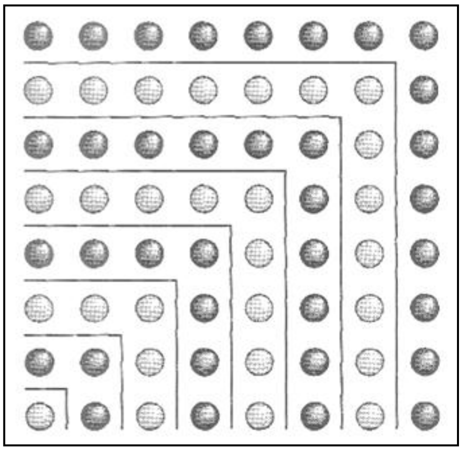
[13]Disponível em:<http://www.worldscientific.com/doi/suppl/10.1142/8188/suppl_file/8188_chap01.pdf:>. Acesso em abr. 2015.

Representando os números quadrados pela figura se chega à fórmula para a soma dos n primeiros quadrados:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Retomando a demonstração apresentada no capítulo 2, os números quadrados são obtidos pelo somatório dos n primeiros números ímpares.

Figura 17 – Somatório de ímpares



Fonte: Vídeos da Tv escola- Dicas Pedagogicas[14]

Pela figura 18, é possível observar que os oito primeiros números quadrados podem ser decompostos em um somatório de números ímpares.

$1^2 = 1 = 1$

$2^2 = 4 = 1 + 3$

$3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$

$4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$

$5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$6^2 = 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

$7^2 = 49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

$8^2 = 64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

n^2 = soma dos n primeiros ímpares

[14] Disponível em:<http://www.topgyn.com.br/estudenet/albums/tv-escola-pdf/Dicas_Pedagogicas_-_Matematica_por_toda_parte_-_Matematica_nas_Feiras_e_Mercados.pdf>. Acesso em jun. 2015.

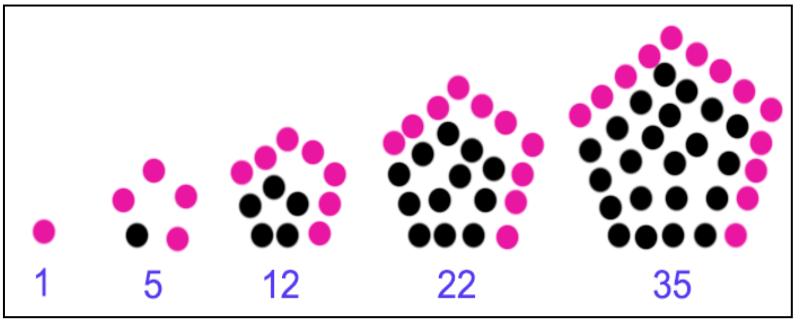
Na base 10, todos os números quadrados terminam sempre em 00, 1, 4, 6, 9 e 25.

5.4.4 Números Pentagonais

Os números poligonais, que vem a seguir, são infinitos números naturais que podem ser geometricamente dispostos na forma de pentágonos regulares. Assim, passaram a ser chamados de números pentagonais.

Os vinte primeiros números pentagonais são 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 330, 376, 425, 477, 532 e 590.

Figura 18 – Números Pentagonais



Fonte: Tutorvista[15]

Pela tabela a seguir, é possível observar que a variante de P_1 para P_2 é igual a 4 e as demais variantes aumentam 3 unidades da anterior para somar-se a P_{n-1}.

Tabela 4 – Números Pentagonais e a Fórmula Geral

Figura n	1	2	3	4	5	...	n
P_n	1	5	12	22	35	...	$\frac{n(3n-1)}{2}$

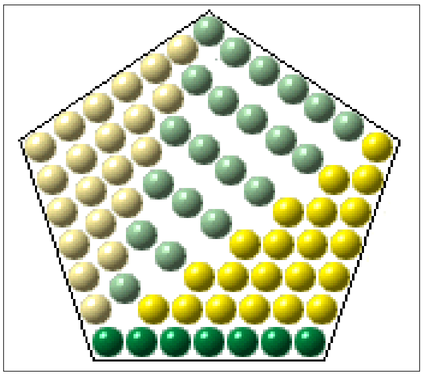
+4 +7 +10 +13 + (3n – 2)

Fonte: Autoral

A demonstração da fórmula geral é pensada a partir da composição da figura a seguir:

[15] Disponível em:<http://math.tutorvista.com/number-system/polygon-numbers.html>. Acesso em jun. 2015.

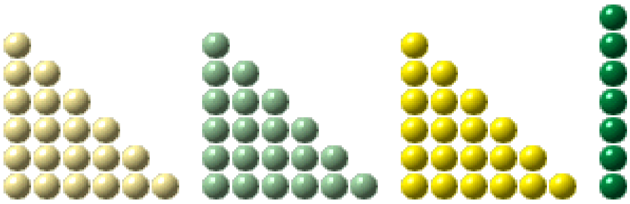
Figura 19 – Número pentagonal em triângulos



Fonte: Atractor[16]

Observando geometricamente os números pentagonais é possível perceber que suas unidades podem ser dispostas no pentágono regular na forma de três triângulos equiláteros, ou melhor, de três quantidades triangulares t_{n-1} mais uma fila de n unidades.

Figura 20 – Número pentagonal na forma $3.t_{n-1} + n$



Fonte: Atractor[17]

Assim, $P_n = 3.t_{n-1} + n$

$$P_n = 3.\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = \frac{3n^2 - 3n + 2n}{2}$$

$$\therefore P_n = \frac{3n^2 - n}{2} ou P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

[16]Disponível em:<http://www.atractor.pt/mat/numeros/pentagonais/>. Acesso em mar. 2015.

[17]Disponível em:<http://www.atractor.pt/mat/numeros/pentagonais/>. Acesso em mar. 2015.

A demonstração da fórmula recursiva é dada pela figura 16. E é possível perceber que qualquer número pentagonal, a partir do segundo, é dado pelo anterior de lado n acrescido de três filas de n +1, descontando as unidades de duas pontas.

$$\begin{array}{llll}
P(1) = 1 & & & = 1 \\
P(2) = P(1) + 4 & = 1 + 3.2 - 2 & & = 5 \\
P(3) = P(2) + 7 & = 5 + 3.3 - 2 & & = 12 \\
P(4) = P(3) + 10 & = 12 + 3.4 - 2 & & = 22 \\
P(5) = P(4) + 13 & = 22 + 3.5 - 2 & & = 35 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\therefore P(n) = P_{n-1} + (3.n - 2)$$

ou $P(n+1) = P_n + (3.n + 1)$

É a fórmula recursiva dos números pentagonais.

A relação entre os números pentagonais, triangulares e quadrados é dada pela fórmula $P_n = S_n + T_{n-1}$.

Na verdade,

$$S_n + T_{n-1} = n^2 + \frac{(n-1).n}{2}$$

$$S_n + T_{n-1} = \frac{2n^2 + n^2 - n}{2}$$

$$S_n + T_{n-1} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

$$S_n + T_{n-1} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\therefore S_n + T_{n-1} = P_n$$

5.4.5 Generalizando os números poligonais.

A figura a seguir apresenta a classificação, as fórmulas gerais e o Sloane das sequências dos números poligonais ou m-gonais, sendo $3 \leq m \leq 30$, bem como os dez primeiros dos n elementos dessas sequências que podem ser encontradas no site do The On-Line Enciclopédia of Integer Sequences (OEIS).

Tabela 5 – Números Poligonais até a Ordem n = 30.

Nº poligonal	Fórmula	Dez primeiros números da sequência										Sloane
Triangular	$(n^2 + n) / 2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	A000217
Quadrangular	$(2n^2+0.n) /2$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	A000290
Pentagonal	$(3n^2 -1.n) /2$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	A000326
Hexagonal	$(4n^2 -2n) /2$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	A000384
Heptagonal	$(5n^2 -3n) /2$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	A000566
Octogonal	$(6n^2 -4n) /2$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	A000567
Nonagonal	$(7n^2 -5n) /2$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	A001106
Decagonal	$(8n^2 -6n) /2$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	A001107
Hendecagonal	$(9n^2 -7n) /2$	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	A051682
Dodecagonal	$(10n^2-8n) /2$	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	A051624
Tridecagonal	$(11n^2-9n) /2$	1	13	36	70	115	171	238	316	405	505	A051865
Tetradecagonal	$(12n^2-10n) /2$	1	14	39	76	125	186	259	344	441	550	A051866
Pentadecagonal	$(13n^2-11n) /2$	1	15	42	82	135	201	280	372	477	595	A051867
Hexadecagonal	$(14n^2-12n)/2$	1	16	45	88	145	216	301	400	513	640	A051868
Heptadecagonal	$(15n^2-13n) /2$	1	17	48	94	155	231	322	428	549	685	A051869
Octadecagonal	$(16n^2-14n) /2$	1	18	51	100	165	246	343	456	585	730	A051870
Nonadecagonal	$(17n^2-15n) /2$	1	19	54	106	175	261	364	484	621	775	A051871
Icosagonal	$(18n^2-16n) /2$	1	20	57	112	185	276	385	512	657	820	A051872
Hencosagonal	$(19n^2-17n) /2$	1	21	60	118	195	291	406	540	693	865	A051873
Docosagonal	$(20n^2-18n) /2$	1	22	63	124	205	306	427	568	729	910	A051874
Tricosagonal	$(21n^2-19n) /2$	1	23	66	130	215	321	448	596	765	955	A051875
Tetracosagonal	$(22n^2-20n) /2$	1	24	69	136	225	336	469	624	801	1000	A051876
Pentacosagonal	$(23n^2-21n) /2$	1	25	72	142	235	351	490	652	837	1045	A256645
Hexacosagonal	$(24n^2-22n) /2$	1	26	75	148	245	366	511	680	873	1090	A255185
Heptacosagonal	$(25n^2-23n)/2$	1	27	78	154	255	381	532	708	909	1135	A255186
Octacosagonal	$(26n^2-24n) /2$	1	28	81	160	265	396	553	736	945	1180	A195314
Nonacosagonal	$(27n^2-25n) /2$	1	29	84	166	275	411	574	764	981	1225	A255187
Triacontagonal	$(28n^2-26n) /2$	1	30	87	172	285	426	595	792	1017	1270	A254474

Fonte: Adaptado de: World Scientific[18]

Para os demais números poligonais n > 30, mantém-se a mesma regularidade para as fórmulas na formação das sequências numéricas. A classificação poligonal dos números é feita conforme a tabela a seguir:

[18]Disponível em:<http://www.worldscientific.com/doi/suppl/10.1142/8188/suppl_file/8188_chap01.pdf>. Acesso em jul. 2015.

Tabela 6 – Demais Números Poligonais com nomenclatura definida

M	m-gonal	Fórmula Geral	Sloane
40	Tetracontágonal	$(38n^2 - 36n)/2$	A261191
50	Pentacontagonal	$(48n^2 - 46n)/2$	A261343
60	Hexacontagonal	$(58n^2 - 56n)/2$	A249911
70	Heptacontagonal	$(68n^2 - 66n)/2$	-
80	Octacontagonal	$(78n^2 - 76n)/2$	-
90	Nonacontagonal	$(88n^2 - 86n)/2$	-
100	Hectagonal	$(98n^2 - 96n)/2$	A261276
1000	Quiliogonal	$(998n^2 - 996n)/2$	A195163
10000	Myriagonal	$(9998n^2 - 9996n)/2$	A167149
100000	Heptamyriagonal	$(99998n^2 - 99996n)/2$	A129699

Fonte: Autoral (2015)

Pelas tabelas 23 e 24, pode-se concluir que todo número natural $n \neq 2$ pode ser representado de forma poligonal e que o número 1 é visto como a origem de todos os infinitos números n-gonais. Vale ressaltar que o 2, representado de forma figurada, é classificado como número oblongo (2x1).

Por recursividade, é possível determinar a fórmula de um número m-gonal, para $m \geq 3$ e $n \geq 1$ naturais, de modo que:

$$S_m = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}.$$

Assim:

$$S_m = \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2}.$$

No livro Numbers Figurates, há uma citação creditada a Hypsicles de Alexandria, no II século a.C. que foi destacada por Dyophantys em seu trabalho sobre números poligonais.

> Se há tantos números que nos agrada começando com um e aumentando pela mesma diferença comum , em seguida, quando a comum diferença é 1 , a soma de todos os termos é um número triangular ; quando 2, um quadrado; quando 3, um número pentagonal; e o número de ângulos é chamada após o número superior à diferença comum por 2 , e o lado depois do número de termos, incluindo 1.(DEZA; DEZA,2002, p.4)

Essa citação descreve a composição dos n-ésimo número figurado m-gonal (S_m (n)), sendo $m \geq 3$ o número de lados da forma poligonal:

Triangular: $S_3(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n$ ---------- razão = 1 = (3 – 2)

Quadrangular: $S_4(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ ---------- razão = 2 = (4 – 2)

Pentagonal: $S_5(n) = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2)$ ---------- razão = 3 = (5 – 2)

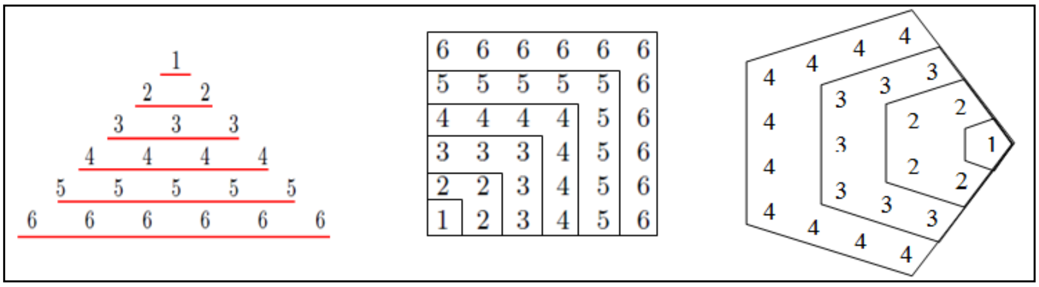
Hexagonal: $S_6(n) = 1 + 5 + 9 + ... + (4n - 3)$ ---------- razão = 4 = (6 – 2)

Heptagonal: $S_7(n) = 1 + 6 + 11 + ... + (5n - 4)$ --------- razão = 5 = (7 – 2)

Octogonal: $S_8(n) = 1 + 7 +13 + ... + (6n - 5)$ -------- razão = 6 = (8 – 2)

As disposições de números na forma figurada a seguir, ilustra bem essa quantidade acrescida de a_n para a_{n+1} em cada m-gonal.

Figura 21–Progressão dos números Poligonais de Ordens 3, 4 e 5



Fonte: Elaborada pelo autor

Em uma linguagem matematicamente simplificada, o númerom-gonal S_m (n) é a soma dos primeiros n elementos da progressão aritmética cuja razão é dada por (m – 2). Deste modo, a sequência S_m é dada por:

$$(1,1 + (m - 2),1 + 2.(m - 2),1 + 3.(m - 2), ...) \text{ para } m \geq 3.$$

Assim , por definição:

$S_m (n) = 1 + (1+ (m – 2)) + (1 + 2.(m – 2)) + ... + (1+ (n – 1).(m – 2))$, sendo $m \geq 3$ o número de lados da forma poligonal e n a ordem do numero poligonal na sequência. Assim, $S_m(n + 1) = S_m(n) + (1 + (m - 2)n)$.

Considerando que cada número poligonal $S_m(n)$ é um somatório dos n primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$S_m(n) = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Como a soma dos termos equidistantes se equivalem:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

Então, expressa-se: $S_m(n) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, sendo $a_1 = 1$ e $a_n = 1 + (m - 2).(n - 1)$.

Assim:

$$S_m = \frac{1 + (1 + (m-2).(n-1)}{2}.n$$

Portanto, a um número poligonal qualquer é dado por:

$$S_m = \frac{\big((m-2)n - m + 4\big).n}{2}$$

ou

$$S_m = \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2}.$$

Provando essa fórmula também por indução matemática obtém-se:

i. A validade para n = 1.

$$S_m = \frac{(m-2).1 - (m-4).1}{2} = 1.$$

ii. A validade para n + 1, considerando a fórmula válida para n.

$$S_m(n+1) = S_m(n) + (1 + (m - 2).n$$

$$S_m(n+1) = \frac{n((m-2)n) - m + 4)}{2} + (1 + (m-2)n$$

$$S_m(n+1) = \frac{(m-2).n^2 + (4-m).n + (m-2).2n + 2}{2}$$

Incrementando no numerador da expressão $(m - 2) - (m - 2) + (4 - m) - (4 - m)$, obtém-se:

$$S_m(n+1) = \frac{(m-2).(n^2 + 2n + 1) + (4-m).(n+1) + 2 - (m-2) - (4-m)}{2}$$

$$S_m(n+1) = \frac{(n+1s).((m-2).(n+1) + (m-4))}{2}$$

Ou

$$S_m(n+1) = \frac{(m-2).(n+1)^2 + (m-4)(n+1)}{2}.$$

Portanto, está provada a fórmula geral para os números poligonais.

Isso tudo fortalece, ainda mais, a certeza de que todos os números naturais são harmoniosamente interessantes, principalmente por suas propriedades esteticamente geométricas.

Esses que números assumem formas geométricas planas ou espaciais (cúbicos, piramidais, tetraedrais, etc) tem sido estudados ao longo dos séculos. Em resumo:

$$N = T_n + (-1).\ T_{n-1}$$
$$T_n = T_n + 0.\ T_{n-1}$$
$$n^2 = T_n + 1.\ T_{n-1}$$
$$P_n = T_n + 2.\ T_{n-1}$$
$$Hex_n = T_n + 3.\ T_{n-1}$$
$$Hep_n = T_n + 4.\ T_{n-1}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$M\text{-}gonal_n = T_n + (M-3).T_{n-1}$$

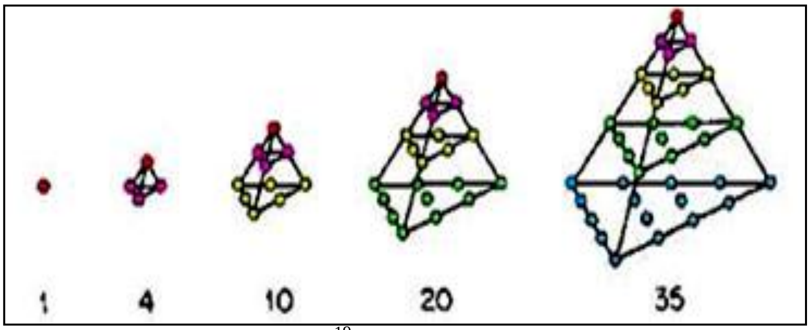
Um padrão emergiu e com ele foi acrescentado mais “cores” e “brilho” à paisagem destes números que já eram *interessantes*!

Os números figurados tridimensionais também seguem padrões. Os mais simples são os que assumem a forma de um cubo. Estes possuem n^3 elementos como o 1, 8, 27, 64,125, ... , que são os primeiros números cúbicos.

Os tetraédricos são mais complicados. Os primeiros são: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, ... São construídos somando-se as camadas de números triangulares desde o vértice inferior até o vértice superior. Podem ser expressos pela fórmula:

$$TET_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Figura 22 – Números Piramidais Triangulares



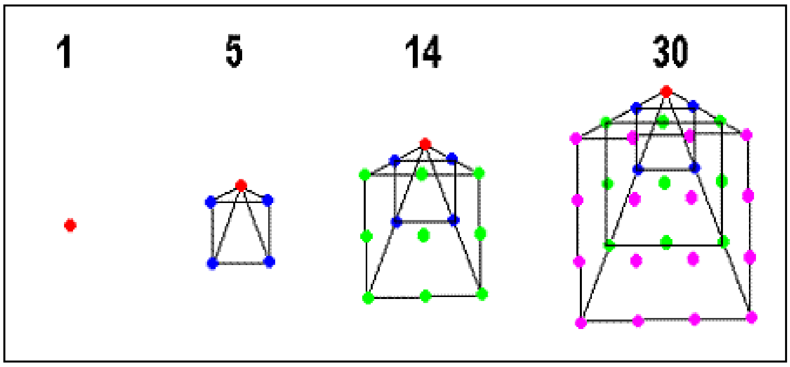
Fonte: El alma de los números[19]

[19] Disponível em:<http://elalmadelosnumeros.blogspot.com.br/2012_06_01_archive.html>. Acesso em jun. 2015.

Os *piramidais quadrados* são obtidos somando-se as camadas de quadrados da base até o topo. Os primeiros números são 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, ...Todos Seguem a fórmula:

$$PIR_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Figura 23 – Números Piramidais Quadrangulares



Fonte: Intef[20]

É claro que os matemáticos não ficaram restritos a apenas números figurados planos e espaciais. Existem padrões em dimensões quatro, cinco,..., mas que não serão tratadas neste trabalho.

Além de todos esses subconjuntos interessantes enunciados nesse capítulo, existem muitos outros que sustentam a ideia de que todos os números naturais são interessantes. Ao instante em que classificam e agrupam números com as mesmas propriedades, também os diferenciam dos demais com características distintas .

São também subconjuntos interessantes de números naturais: as potências com suas figuras quadradas, cúbicas e hipercúbicas, os fatoriais e subfatoriais, os primoriais, os quase perfeitos, os pseudoperfeitos, misteriosos, intocáveis, afortunados, números de Lucas, números de Kaprekar, números de Catalan, números místicos,... Entre muitos outros que podem ser apresentados em sala de aula na educação básica em abordagens matemáticas mais recreativas e interligadas.

[20]Disponível em:<http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/internet/numeros-piramidales.htm>. Acesso em jun. 2015.

6 RELEVÂNCIA DOS NÚMEROS NATURAIS PARA OS NÚMEROS REAIS.

Depois de toda abordagem voltada para as inúmeras propriedades que destacaram diversos subconjuntos naturais interessantes, haveria algo a mais para endossar a ideia de que todo número natural é interessante e fundamental para a aritmética?

6.1 OS CORTES DE DEDEKIND

Em meados do século XIX, um pequeno grupo de matemáticos ousou questionar a base de fundamentação do conjunto dos números reais, mediante ao crescimento de toda uma superestrutura matemática sem comprovações rigorosas. Dentre esse pequeno grupo de matemáticos, Richard Dedekind destacou-se por seus trabalhos que procuraram fornecer uma compreensão mais formal e rigorosa sobre a natureza dos números reais.

Dedekind tornou pública as suas ideias em 1872 o *Stetigkeit und Irrationale* (Continuidade e números Irracionais) e, em 1888, o livro *Was Sind und was Sollen die Zahlen?* Que traduzido, questiona: O que são os números e para que eles servem? Nele são destacadas propriedades usuais dos números reais, consideradas óbvias como $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, que nunca haviam sido provadas com rigor. Isso permitiu revelar uma série de lacunas na fundamentação lógica dos números reais, constatando-se que, até então, não havia prova matemática que garantisse a existência dos números reais.

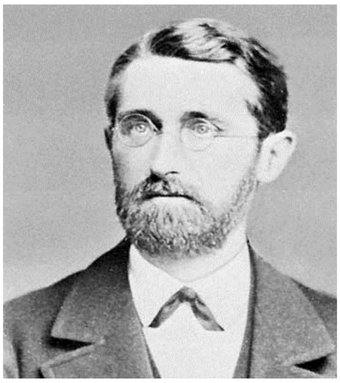
Que algoritmo calcularia precisamente $\sqrt{2}.\sqrt{3}$?

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097\ldots ? \\ \text{x}\ \sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415059\ldots ? \\ \hline \sqrt{2}\ x\ \sqrt{3} = \qquad\qquad\qquad ? \end{array}$$

Rigorosamente, é bastante complicado definir soma e produto de dois números irracionais considerando suas infinitas casas decimais sem período, pois o algoritmo dessas operações sugere iniciar o cálculo a partir da última casa decimal da direita, no caso, inexistente.

E foi a partir dos estudos gregos na Antiguidade Clássica, que Dedekind se inspirou para dotar os Reais de uma fundamentação lógica e formal. Para os gregos, os números inteiros, racionais e irracionais estavam associados a segmentos de reta. Exemplo disso, temos os irracionais $\sqrt{2}$ u como a medida da diagonal de um quadrado de 1u e a $\sqrt{3}$ u como o dobro da altura de um triângulo equilátero de lado 1u.

Figura 24 – Richard Dedekind



Fonte: Encyclopedia Britannica[21]

Os dois métodos mais conhecidos para obter os reais a partir dos racionais foram desenvolvidos por George Cantor e Richard Dedekind em meados da segunda metade do século XIX. De forma breve será feita uma descrição do método desenvolvido por Dedekind.

Por definição, entende-se por um *corte de Dedekind* (E, D) como sendo uma subdivisão dos números racionais em dois subconjuntos disjuntos e não vazios E e D, de modo que D não possua um maior elemento e se x ∈ E, y ∈ $D,$ então $x < y$.

Todo número racional r determina um único corte de Dedekind (E, D) se E consiste de todos os $x < r$ e D de todos os $x \geq r$. Reciprocamente, se para um corte de Dedekind (E, D), o conjunto D tem um menor elemento r, diz-se que o corte (E, D) determina o racional r.

Desta maneira, a imperfeição dos números racionais é vista por Dedekind pela existência de cortes (E, D) que não definem nenhum racional.

Teorema: Seja (E, D) um corte de Dedekind. Então para todo $\epsilon > 0$ existe x ∈ E e y ∈ D tais que $y - x < \epsilon$.

Demonstracão: Como E e D são não vazios, existem $r \in$ E e $s \in$ D. Existe ainda um inteiro n positivo tal que $s - r < n\epsilon$. Considere os números racionais

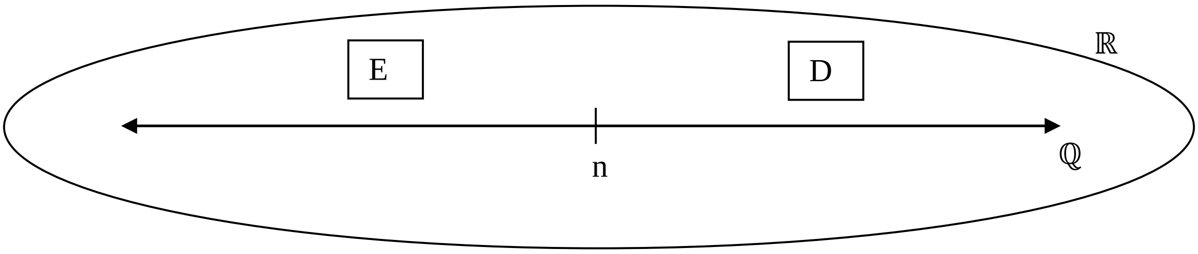
$$r, r + \frac{s-r}{n}, r + \frac{2(s-r)}{n}, \ldots s.$$

[21]Disponível em:<http://global.britannica.com/biography/Richard-Dedekind>. Acesso em jun. 2015.

Entre os números nesta sequência que estão em E existe o maior deles, $r + \left(\frac{j}{n}\right)(s - r)$. Então, $r + \left(\frac{j+1}{n}\right)(s - r) \in$ D. Entretanto, $r + \left(\frac{j+1}{n}\right)(s - r) - [r + \frac{j(s-r)}{n} = \frac{1}{n}(s - r)$. Isto conclui a demonstração.

A figura 25 ilustra O Corte de Dedekind dividindo o conjunto dos números racionais em duas partes ou conjuntos: E(esquerda) e D(direita), de tal modo que todos os números racionais pertençam a uma ou a outra e todo números de E seja menor que todo números de D.

Figura 25 – Corte de Dedekind na reta numérica



Fonte: Adaptada Stewart (2009)

Esse corte pode ser feito de diversas maneiras, havendo três possibilidades excludentes entre si:

i. Há em E um racional “e” máximo (majorante).

ii. Há em D um racional “d” mínimo (minorante).

iii. Não há em E um racional máximo, nem em E um racional mínimo.

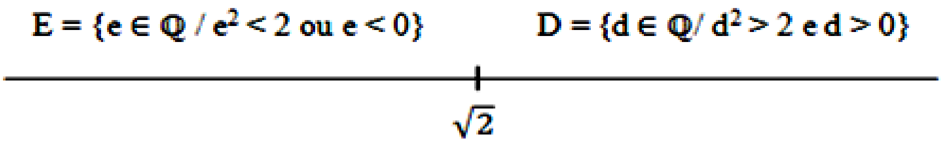
Somente o corte do tipo iii definem os números irracionais, os demais cortes definem os números racionais considerando que alguma fração possa equivaler a n.

Assim, sendo n irracional, o conjunto E é dado por todos os racionais menores que n e o conjunto D é dado por todos os números racionais maiores que o número real n.

Supondo que os números reais, de fato, existam. Como fundamentá-los a partir dos racionais?

Nos reais, o conjunto dos números racionais e dos irracionais são disjuntos por não possuírem um elemento comum. Tomando o irracional $\sqrt{2}$ como exemplo, embora o mesmo não possa ser obtido por alguma fração exata, seu valor pode ser aproximado por infinitos racionais. De algum modo, $\sqrt{2}$ se encontra em alguma posição específica, inserido entre todos os racionais possíveis. Essa posição é dada pelo corte em que $\sqrt{2}$ separa os racionais em duas partes: E = $\{e \in \mathbb{Q} \,/\, e^2 < 2 \text{ ou } e < 0\}$ e D = $\{d \in \mathbb{Q} / \, d^2 > 2 \text{ e } d > 0\}$.

Figura 26 – Corte que define $\sqrt{2}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, o corte (E, D) define $\sqrt{2}$, onde os números de D são os racionais positivos e seus quadrados são maiores que 2. Os números de E são todos os outros menores que $\sqrt{2}$. Esses conjuntos racionais especificam precisamente a localização de uma linha de números reais, sendo um determinado pelo outro univocamente. Tendo $E \cup D = \mathbb{Q}$, resumidamente, define-se:

$$\sqrt{2} \equiv (E, D) = \{e \in \mathbb{Q} \,/\, e^2 < 2 \text{ ou } e < 0\}.$$

Assim, Dedekind definiu que um número real é ou corresponde a um corte feito no conjunto dos racionais e que o conjunto dos números reais é a união de todos os cortes racionais e irracionais. O resultado desses estudos definiu *soma*, *produto* e *ordem* para os cortes de Dedekind.

Por definição, sejam (E_1, D_1) e (E_2, D_2) cortes de Dedekind, então sua soma (E, D) é um corte de Dedekind para o qual o conjunto E consiste de todos os $x + y$, onde $x \in E_1$ e $y \in E_2$ e onde D é o conjunto de todos os outros números racionais.

Teorema: Seja $(E, D) = (E_1, D_1) + (E_2, D_2)$, onde (E_1, D_1) e (E_2, D_2) são cortes de Dedekind. Então (E, D) é um corte de Dedekind.

A demonstração será omita, pois como já foi dito, a abordagem aqui feita é resumida. Seguem-se as definições de *produto* e *ordem* e os teoremas correspondentes que demonstram tratar-se de cortes de Dedekind. O tratamento feito por Dedekind é complexo e sofisticado, estando além da compreensão de um aluno médio dos primeiros dois anos do curso de Licenciatura em Matemática.

A partir da conclusão desse trabalho, Dedekind deu fundamento à igualdade como$\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, por exemplo, ou a qualquer outra operação envolvendo irracionais.

Ainda na busca de fundamentar os Subconjuntos Reais, cabe agora discutir a existência dos números racionais para consolidar essa fundação dos reais. Mas admitindo a existência dos números inteiros, o conjunto dos números racionais é definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ n = \frac{p}{q} \middle| \, p \in \mathbb{Z} \, e \, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Mas, o que garante a existência dos números inteiros?

Os números inteiros é uma duplicação ou simetria dos números naturais, tratando-os como positivos ou negativos pelos sinais de mais (+) e menos (–) para diferenciar uma contagem de vantagens e de prejuízos respectivamente.

No entanto, como demonstrar a existência dos números naturais? E se existem o que eles são?

A primeira questão foi respondida pelo grande matemático Giuseppe Peano, citado no primeiro capítulo, contornando a comprovação da existência dos naturais seguindo uma ideia de Euclides que, sem definir os conceitos de ponto, reta e plano, propôs como axiomas.

Além do princípio da indução matemática axiomatizado por Peano, postulam-se outras nove propriedades que definem as operações binárias de adição (+) e multiplicação (x) sobre o conjunto dos números naturais que, também, fundamentam as operações nos reais.

i. Comutatividade aditiva: Se a e b pertencem aos naturais, então a + b = b + a.
ii. Comutatividade multiplicativa: Se a e b pertencem aos naturais, então a x b = b x a.
iii. Associatividade aditiva: Se a, b e c pertencem aos naturais, então (a+b)+ c = a +(b+c).
iv. Associatividade multiplicativa: Se a, b e c pertencem aos naturais, então (a x b) x c = a x (b x c).
v. Distributividade: Se a, b e c pertencem aos naturais, então a x (b + c) = a x b + a x c.
vi. Neutralidade multiplicativa: Existe um número natural 1 de tal forma que a x 1 = a, para todo a natural.
vii. Cancelamento aditivo: Se a, b e c pertencem aos naturais e se c+a = c+b, então a = b.
viii. Cancelamento multiplicativo: Se a, b e c pertencem aos naturais e se c x a = c x b, então a = b.
ix. Neutralidade Aditiva: Dados a e b pertencentes aos naturais, uma, e apenas uma solução mantém: a = b, a + x = b e a = b + y, em que x e y pertencem aos naturais.

Tudo isso permitiu a Dedekind demonstrar que os números irracionais são definidos a partir dos racionais, ou seja, como os números racionais são definidos a partir dos naturais, então toda teoria dos números reais funda-se sobre a conceituação intuitiva e sólida dos números naturais. E isso demonstra a imensa relevância dos números naturais reforçando a certeza de que os mesmos representam um conjunto extremamente interessante e fundamental para a aritmética e para toda matemática.

6.2 NÚMEROS COMPLEXOS INTERESSANTES

Estes novos números construídos com rigor matemático por Dedekind seriam todos interessantes? Até aqui, toda a atenção tem estado focada no conjunto de Números Naturais e seus subconjuntos. Foi demonstrado que cada Natural é interessante; seus subconjuntos aqui estudados acrescentam aspectos particulares que os tornam ainda mais interessantes. Assim, tem sido com uma única exceção: o número φ, que surgiu da convergência da sequência f_{n+1} / f_n. Este número encerra um verdadeiro universo de propriedades. Já era conhecido e estudado no tempo de Euclides, há mais de quinze séculos antes de Fibonacci. Além da matemática, ele está presente em várias outras áreas do conhecimento, como biologia, botânica e até mesmo na arte.

As quatro operações aritméticas realizadas nos Naturais, tanto a soma como o produto, resultam em números naturais; isto é, são operações fechadas que resultam em números *interessantes.* As outras duas operações, nem sempre. Ao falharem, oferecem a oportunidade de criação de novos conjuntos numéricos. No caso da divisão o conjunto que estende os Naturais recebe o nome de Conjunto dos Racionais, por ser a razão entre dois naturais, m/n e a letra Q representa este conjunto. Fica claro que quando n = 1, m = m/1 seguindo-se daí que os Racionais contêm os Naturais. O quociente, portanto, na base decimal, pode ser um natural exato ou um natural seguido de uma sequência de naturais, isto é, $m/n = b,a_1a_2a_3a_4...$ A sequência $a_1a_2a_3a_4...$, quando existe, pode ser finita a partir de um certo índice j, todos os a_j seguintes são nulos; ou continuar indefinidamente. Neste caso, a partir de um certo índice t, os a_i se repetem mas apresentam uma periodicidade. Por exemplo:

$5/2 = 2,5$; onde $a_i = 0$, para $i \geq 2$.

$1/11 = 0,090909...$, onde 09 se repetem indefinidamente.

É costume se representar o período que se repete por $1/11 = \overline{09}$. Em algumas vezes estes períodos podem ser bem longos, como, por exemplo:

$$1/97 = 0,\overline{01030927\ 83505154\ 63917525\ 77319587\ 62886597\ 93814432\ 98969072}$$
$$\overline{1649484536082474\ 22680412\ 37113402\ 06185567}$$

São noventa e seis (96) dígitos que se repetem, indefinidamente. Reciprocamente, se um número assume a forma $b,a_1a_2a_3a_4...$, na base 10, ele é o quociente de dois naturais, m/n. Os números racionais, apesar de darem a impressão de serem muito mais abundantes que os Naturais, na realidade não o são. É possível se associar a cada racional *r* um número natural *n.* Assim, o conjunto Q não é maior do que o conjunto N. Este fato notável foi demonstrado pelo matemático Georg Cantor na segunda metade do século XIX. Estas propriedades e muitas outras não expostas aqui tornam os racionais Q números muito *interessantes!*

Quando os pitagóricos tentaram calcular o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos iguais, medido uma unidade, deram de cara com um novo tipo de número, o qual não podia ser expresso como quociente de dois naturais, na linguagem de hoje. O problema foi parcialmente contornado na época de Euclides. O novo tipo de número que eles encontraram é conhecido hoje como números irracionais, isto é, aqueles números que não podem ser expressos como quociente de dois naturais.

Cantor demonstrou que estes números não podem ser pareados com os Naturais: são muito mais densos. Sendo os Naturais um conjunto infinito, isso significa que existem mais de um tipo de infinito: uma hierarquia de tamanhos. Na ocasião em que Cantor deu conhecimento de sua demonstração, houve um grande mal estar entre os matemáticos que estudavam estas questões. Os racionais e os irracionais juntos vieram a compor o que é conhecido como o conjunto dos números reais, R. Em palavras simples, quase todos os números são irracionais. É claro que nesta empreitada foram também acrescentados os números negativos. Estes também não foram aceitos de pronto até uns cinco séculos atrás.

Apesar de sua abundancia, não é uma tarefa fácil provar que um dado número é irracional. A expansão decimal a partir da vírgula não assume qualquer padrão periódico fixo, isto é, nunca termina, nem tampouco se torna uma dízima periódica. Porém, podem ocorrer alguma regularidade como, por exemplo, com o número p = 0,1001000100001000001000000001..., que é irracional.

Ou ainda com o número q = 0,1234567891011121314151617181920212223..., que também é irracional, apesar de mostrar um padrão claramente explícito.

O fato dos números irracionais constituírem um conjunto com um novo tipo de infinito e não seguirem um padrão na sua representação decimal já os distingue como números que são *interessantes,* mesmo antes de quaisquer outras propriedades particulares que cada um apresenta.

Verificou-se que os irracionais se distinguem também pelo fato de admitirem uma divisão entre dois conjuntos disjuntos, a saber: os irracionais que são raízes de polinômios com coeficientes racionais e os que não são. Estes dois conjuntos são conhecidos como

Números Algébricos e Números Transcendentais. Na segunda metade do século XIX, foi demonstrado que os números π e e, base dos logaritmos naturais, são números transcendentais, como o já mencionado φ. Os números algébricos podem ser pareados com os Naturais, acarretando que os transcendentais não podem. Assim, quase todos os irracionais são transcendentais. Apesar de serem tantos, é muito difícil demonstrar que um dado irracional é um número transcendental. Foi Euler quem em 1737 provou que *e* é irracional. Somente em 1873, o matemático francês Charles Hermitte demonstrou ser *e* transcendental, 137 anos depois da façanha de Euler! Usando a mesma técnica de Hermitte, o matemático alemão Ferdinand von Lindermann demonstrou em 1882 que π também é transcendental.

Neste universo de números irracionais existem surpresas de todo tipo. Por exemplo, pode um número irracional elevado a uma potência também irracional ser um número racional? Parece difícil à primeira vista. Mas a resposta é positiva. Considere os irracionais $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.Então, $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2,$ que é racional.Fatos como este reforçam a afirmativa de que os irracionais são mesmo *muito interessantes.*

Em competições que buscavam encontrar as raízes das equações do terceiro e quarto graus, ocorridas em meados do século XVI e realizadas na Itália, algo estranho parecia acontecer: números cujo quadrado, ao invés de ser positivo como era esperado, era negativo. Quase um século depois, René Descartes os chamou de números *imaginários*, na sua obra *Discours de la Methode*. Quase um século e meio depois e após muito estudo, esses números foram aceitos e são representados desde então por $z = x + iy$, onde x e y são reais e $i^2 = -1$, sendo chamados de números *complexos*. Quando $y = 0$, z é um real comum; quando $x = 0$, z é dito um imaginário puro. Foram definidas para as quatro operações os números complexos de modo que se $y = 0$, elas são exatamente as mesmas operações conhecidas para os reais.

Um matemático inglês, chamado R. John Wallis, procurou representar em sua obra *De Algebra Tractatus* (1685), os complexos em um plano coordenado, porém de um modo um tanto ou quanto vago. Talvez por isso, não recebeu a atenção merecida entre os matemáticos contemporâneos.

Em 1806, o contador parisiense Jean Robert Argand, publicou no anonimato um pequeno trabalho onde dava aos complexos uma representação geométrica. J. F. Français, professor de uma escola de engenharia, tomou conhecimento do trabalho de Argand e o divulgou. Entretanto, foi Carl Friedrich Gauss, um matemático alemão, quem cunhou o termo *plano complexo*.

Em meados do século XVIII, Euler se sentia à vontade em trabalhar com os números complexos. Sem muito rigor matemático chegou a fórmula $e^z = e^x(\cos(y) + i\text{sen}(y))$ para concluir: $e^{i\pi} + 1 = 0.$ Esta fórmula consta de uma obra de Euler publicada em 1748 e intitulada *Introductio in Analysin Infinitorum.*Uma pesquisa intitulada "A Identidade de Euler", realizada pela revista de Matemática "The Mathematical Intelligencer", em 1990, apontou-a como "o mais belo teorema da Matemática". Em 2004, o periódico "Physics World" repetiu a pesquisa e o resultado foi um empate entre a Identidade de Euler e as Equações de Maxwell do Eletromagnetismo apontadas como "as maiores equações de todos os tempos".

Bertrand Russell, o único matemático a ganhar um Prêmio Nobel, descreveu a beleza que existe na Matemática, em tradução livre, como "fria e austera, como a de uma escultura, sem apelar para nenhum componente de nossa natureza mais fraca, sem os esplêndidos ornamentos da pintura ou da música, mas de uma pureza sublime, capaz de uma perfeição rigorosa como somente a maior das artes pode apresentar" (BERTRAND, 1919).

A Identidade de Euler se enquadra com perfeição com a opinião expressa por Russell do que é belo e ao mesmo tempo sublime. É possível que ele fosse até mais extenso e enfático (faleceu em 1970) se estivesse vivo na década de 80, quando computadores digitais adquiriram potência suficiente para descobrir a beleza que reside em aplicar repetidamente uma mesma fórmula ao resultado da aplicação anterior desta fórmula, processo chamado de interação.

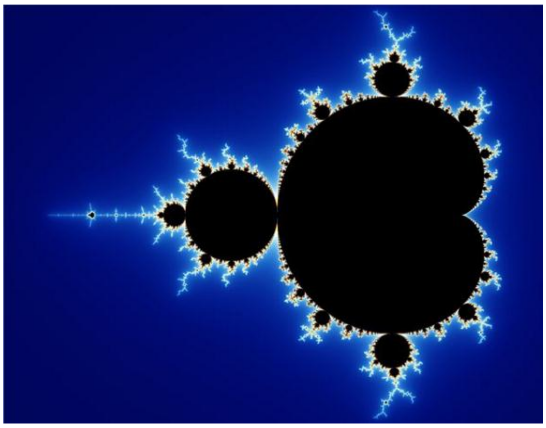
As Fórmulas são bem simples como $f(z) = z^2 + c$, z e c complexos, c constante. Uma notação mais sugestiva seria $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Interessa conhecer para que valores da constante c os iterados desta simples fórmula recursiva são limitados, para $z_0 = 0$, isto é, seu módulo não tende para o infinito. Estes conjuntos foram chamados de conjuntos de Mandelbrot (M). Dito em outros termos:

$$z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c,\ c \in M \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |z_{n+1}| \leq 2.$$

Por exemplo, c =1, os iterados pela fórmula seriam 0, 1, 2, 5, 26,... uma sequência ilimitada; logo 1 não pertence a M. Para c = –1, os iterados seriam a sequência0, –1, 0, –1,0, ..., que é limitada, logo está em M.

A capa da revista *Scientific American* de agosto de 1985 contém um algoritmo para computadores pessoais para calcular o conjunto M. Os recursos disponíveis, a beleza dos conjuntos e a divulgação por uma revista de grande circulação fez que com o assunto se tornasse muito popular. Existem incontáveis endereços na internet sobre estes conjuntos. Alguém interessado poderia consultar https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set.

Figura 27 – Uma Vista do Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Wikipedia[22]

Variando a fórmula recursiva para z_{n+1} novos e empolgantes conjuntos M são gerados. Os números complexos são muito mais do que simplesmente *interessantes. São empolgantes!*

Percorremos até aqui um caminho desde os mais simples números, os Naturais, passando pelos racionais e irracionais, indo até os complexos. Neste percurso, num crescente vertiginoso, eles ficavam cada vez mais *interessantes.*

[22]Disponível em:<https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>. Acesso em jun. 2015.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através da construção rigorosa dos inteiros por Peano, surgiu o conceito de indução matemática e, através deste princípio, foi demonstrado que todos os naturais são números interessantes. Os subconjuntos dos naturais, como os números primos e os números de Fibonacci, fortaleceram esta propriedade revelando outros aspectos interessantes. Na busca para ressaltar características particulares interessantes dos naturais foram, demonstrados alguns teoremas clássicos como a infinidade dos primos, o Teorema Fundamental da Aritmética, o Algoritmo da Divisão de Euclides, entre outros. Um resultado ainda merece destaque: todo natural n pode ser expresso de forma única pelos números de Fibonacci.

O objetivo central e até mesmo lúdico foi chamar a atenção do leitor para o fato de que todo número tem características que o torna *interessante*. A maior parte a abordagem dos números seguida neste trabalho é bem elementar, de modo a favorecer o entendimento de um público mais numeroso e, ainda, promover entre os professores e alunos do Ensino Básico da Matemática o gosto e o interesse por esta disciplina.

A maior parte do trabalho ficou restrita aos números naturais. Conjuntos numéricos maiores como os Racionais (frações), Reais e Complexos são abordados de forma rápida — sempre na direção de mostrar que também se incluem entre os números *interessantes.* Em relação a estas últimas extensões, muito deixou de ser feito. São conjuntos muito mais amplos e complexos que os inteiros e, certamente, muito mais fecundos em propriedades *interessantes.*

Além disso, embora muito se tenha investigado e concluído neste trabalho, a abordagem desse tema deixa muitas lacunas para futuros trabalhos ampliarem seu alcance, pois, na medida em que se busca um subconjunto natural e interessante com propriedades distintas se descobrem muitos outros e se constrói, no campo das ideias, novas relações e leis de formações para mais subconjuntos interessantes. Como exemplo, é possível aprofundar muitos outros números figurados no plano e investigar novas formas em dimensões espaciais. Tais lacunas comprovam que esse tema possui uma construção inesgotável, afinal, como disse Pitágoras, “Tudo é número”. E todos são *interessantes*!

Para a inserção de mais fontes de estudo e aprofundamento, recomenda-se, dentre outros, a leitura dos livros Figurates Numbers de Elena Deza e Michel Marie Deza. 2ªed. World Scientific Pub, 2012 e o Dicionário de Números Interessantes e Curiosos escrito por David Wells. 2ªed. Gradiva, 2003, além de todos os livros de Ian Stewart publicados pela Zahar no Brasil.

Este trabalho contou ainda, entre suas principais fontes de pesquisa, a en.wikipedia, a maior enciclopédia existente em qualquer língua e o Mathworld, ambas de abrangência e profundidade incontestáveis. Além dos sites de estudo e pesquisa de números inteiros: o GIMPS (The Great Internet Mersenne Prime Search) e o SLOANE (OEIS - The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences) que apresentam registros sempre atualizados. Coube a nós ler, pinçar e ordenar muito do que aqui está exposto.

REFERÊNCIAS

BARTHEL, Jim; SGOBBA, Pietro; ZHU, Fa. **Visualizingthedistributionof primes**. 2015. Disponível em<http://math.uni.lu/eml/projects/reports/prime-distribution.pdf>.

BERTRAND, Russell.**The Study of Mathematics and other essas.**Longman, 1919.

CUNHA, A. G. da.**Dicionário Etimológico Nova Fronteira da Língua Portuguesa**. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1987.

DEZA and M. M. DEZA.**Figurate numbers**.World Scientific Publishing, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas SP, Unicamp, 2004.

FERREIRÓS, José. **Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics.**Birkhäuser: Boston; especially: Chapter 7, "Sets and Maps as a Foundation for Mathematics",1999.

________. **Richard Dedekind (1888) and Giuseppe Peano (1889), Booklets on the Foundations of Arithmetic**. Chapter 47 of *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640–1940,* I. Grattan-Guinness (ed.), Amsterdam: Elsevier, pp. 613–626, 2005.

FREGE, Friedrich Ludwig Gottlob.**Grundgesetze der Arithmetik**. Vol. 1, 1893; vol. 2, 1903: Pohle(Jena).

GIMPS.Mersenne prime search.**GIMPS – The Great Internet Mersenne Prime Search.**Disponível em: <http://www.mersenne.org/> . Acesso em: jul. 2015.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos Números e Numerais**. São Paulo: Atual, 1992.

HARDY, G H. **Ramanujan.**New York: Cambridge University Press, 1940.

_______. **SrinivasaRamanujan**. *Proc. London Math. Soc.,1921.*

HEFEZ, A. **Elementos de aritmética.** 2ª edição, SBM, 2011.

LIVIO, Mario. **The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number.** Broadway Books, 2002.

MERAYO, F. García. **Secretos de los números primos**. Manual formativo de ACTA, Nº. 37, págs. 87-97. 2005. Disponivel em <http://www.acta.es/>.

PAENZA, Adrián. **Matemática...¿Estásahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades** – 1ª ed., Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina, 2005.

PICKOVER, Clifford A. **A Passion for Mathematics**.John Wiley & Sons, Inc.New Jersey. 2005.

PICKOVER, C. A. **O livro da Matemática.** Holanda: Librerob.v., 2011. p. 284

SLOANE, N. J. A. **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences**. Disponível em: <http://oeis.org/A002860>. Acesso em jun. 2015.

STEWART, I. **Em Busca do Infinito: Uma História da Matemática dos Primeiros Números à Teoria do Caos**. Rio de Janeiro: EditoraZahar, 2014.

ZHANG, Yitang. **Bounded gaps between primes.** Annals of Mathematics, 2013.