

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcos do Carmo Pereira

Matemática e Música
De Pitágoras aos dias de hoje

Rio de Janeiro
2013

Marcos do Carmo Pereira

Matemática e Música
De Pitágoras aos dias de hoje

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Leonardo Tadeu Silvaes Martins
UniRio - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Doutor em Matemática - UFF

Rio de Janeiro

2013

Pereira, Marcos

Matemática e Música

De Pitágoras aos dias de hoje / Marcos Pereira - 2013

xx.p

1. Matemática 2. Matemática e Música. I.Título.

CDU 536.21

Marcos do Carmo Pereira

Matemática e Música
De Pitágoras aos dias de hoje

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 25 de março de 2013

BANCA EXAMINADORA

Leonardo Tadeu Silvaes Martins

UniRio - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Doutor em Matemática - UFF

Ronaldo da Silva Busse

UniRio - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Doutor em Matemática - UFRJ

Wanderley Moura Resende

UFF - Universidade Federal Fluminense

Doutor em Educação - USP

Marcos do Carmo Pereira

Matemática e Música
De Pitágoras aos dias de hoje

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 25 de março de 2013

BANCA EXAMINADORA



Leonardo Tadeu Silveiras Martins

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

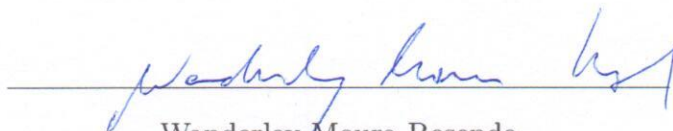
Mestre em Matemática - UFF



Ronaldo da Silva Busse

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Doutor em Matemática - UFRJ



Wanderley Moura Resende

UFF - Universidade Federal Fluminense

Doutor em Educação - USP

Resumo

O objetivo deste trabalho é traçar uma breve síntese da trajetória da música ocidental desde a Grécia Antiga até os dias de hoje. Sabe-se que Pitágoras foi o primeiro filósofo a estudar a música. Um de seus discípulos, Arquitas, inclusive a teria definido como uma das quatro ciências matemáticas por excelência lecionadas na Europa desde a Idade Média, que eram: a aritmética, a geometria, a astronomia e a música. Essas quatro frentes formavam aquilo que se denominava *Quadrivium*. Consideramos importante situar historicamente esse que foi um dos grandes filósofos da época áurea da civilização helênica e também grandes músicos, como Bach, cujas composições serviram de grande influência às gerações posteriores.

Pretendemos, ainda, analisar o processo de construção de algumas escalas musicais, dentre elas, a Escala Pitagórica, baseada em razões de números inteiros e a Escala Temperada – largamente utilizada na música ocidental – que se fundamenta no conceito de progressão geométrica.

Além desses tópicos, foi feito um breve estudo sobre os parâmetros do som e a sua representação gráfica através de funções periódicas. A função seno será a base para o estudo de tais funções.

Ao término da fundamentação teórica, apresentamos uma proposta de atividade para ser desenvolvida numa turma de 2^a série do Ensino Médio. Entendemos que o professor, não apenas o de Matemática, deve sempre buscar novas metodologias, novos recursos, novos caminhos para abordar os conteúdos de sua disciplina. E, partindo desse pressuposto, elaboramos uma atividade que utiliza a História da Música e a História da Matemática para introduzir os conteúdos de progressões geométricas e de funções periódicas.

Palavras-chave: Matemática, Música, Progressão Geométrica, Funções Periódicas

Agradecimentos

À minha mãe, por me ter dado a oportunidade de contemplar esse mundo.

Ao professor Leonardo Silveiras, por sua boa fé em acreditar nas minhas ideias. Não sei se conseguiria terminar este trabalho em tempo hábil, não fora sua paciência e seu engajamento no projeto. Muito Obrigado!

À Capes e ao MEC, pela percepção da bolsa de estudos, tão importante em minha vida e, creio eu, na vida de todos os “*profmatianos*”.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática da Unirio, que tanto contribuíram com seus conhecimentos para a solidez da minha formação em Matemática.

Ao professor José Fernandes, que me incentivou a largar a Engenharia e fazer Licenciatura em Matemática. Creio que eu teria sido um péssimo engenheiro.

A todos os colegas que concluíram o curso comigo e alguns que, por alguma razão, ainda não terminaram.

“A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.”

(Bento de Jesus Caraça)

Sumário

1	Introdução e Contexto Histórico	9
1.1	A Grécia Antiga	13
1.2	A Escola Pitagórica	15
1.3	A Música Segundo Pitágoras	16
2	As Escalas Musicais	19
2.1	A Escala Pitagórica	22
2.1.1	A Construção da Escala Pitagórica	23
2.1.2	Como foram descobertas as outras notas da escala de DÓ?	25
2.2	A Escala de Arquitas	29
2.2.1	Curiosidades Sobre a Média Harmônica	31
2.3	A Escala Temperada	31
2.3.1	Curiosidades Sobre a Escala	34
2.4	Progressões	35
2.4.1	Curiosidade sobre a PA	39
2.4.2	Curiosidades sobre a PG	39
2.5	Comparativo entre as Escalas	40
2.6	A Escala Temperada e os Logaritmos	42
3	A Física do Som	45
3.1	As Ondas Sonoras	45
4	Funções Periódicas	50
4.1	Funções Trigonométricas	51

4.2	Transformações no Plano	52
4.2.1	Análise de uma Função Trigonométrica	54
4.3	Séries Harmônicas	55
4.3.1	Harmônicos, Vibrações e Frequências	56
4.3.2	Mas como se pode ter certeza de que os dois gráficos representam a mesma nota, ou melhor, a mesma frequência, uma vez que são diferentes entre si?	58
5	Proposta de Atividade	60
5.1	Breve História da Música	60
5.1.1	Mas quais sons eram consonantes, que soavam bem, e quais eram dissonantes, desagradáveis aos ouvidos?	61
5.1.2	Mas como foram encontradas as outras notas da escala?	63
5.2	Um 'Defeito' na Escala	65
5.3	Conceito de Frequência	66
5.4	A Escala Temperada	67
5.4.1	Afinal, como foi feita essa divisão e qual seria a distância entre as notas?	68
5.5	Progressão Geométrica	71
5.6	Conceito de Timbre	72
5.7	Séries Harmônicas	75
5.8	Gabarito dos Problemas	77
6	Considerações Finais	83
A	O Professor e a Tecnologia	84
B	Tutorial do Programa <i>Graph</i>	87

Prefácio

A ideia de fazer um estudo sobre Matemática e Música surgiu bem antes do início do curso de Mestrado. Como músico amador desde os 18 anos e professor de matemática desde os 25, há tempos que eu vinha buscando fazer a conexão entre essas que são duas das minhas paixões nessa vida. Mas a oportunidade surgiu apenas agora, no trabalho de conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática – o PROFMAT.

Este presente trabalho está dividido em cinco etapas, sendo que, na primeira, procuramos fazer uma abordagem histórica do desenvolvimento da Matemática e da Música ao longo do tempo, desde o mundo antigo até os dias atuais. Cada fase foi analisada de acordo com o contexto em que está inserida. Na Idade Média, período onde a Música se desenvolveu de maneira mais ampla, houve um grande avanço científico e, é claro, a Matemática também alcança níveis mais elevados. Desenvolvem-se a Álgebra e a linguagem algébrica, tão importante na Matemática que hoje se pratica.

Na segunda etapa, que trata das escalas musicais, foi feita uma reprodução de uma possível maneira com que Pitágoras conseguiu formar a primeira escala musical. Uma escala musical pode ser entendida como uma sequência de sons que, de alguma forma, estão relacionados entre si. No decorrer do processo foram usados diversos conceitos matemáticos, alguns mais simples, como frações, proporcionalidade e médias; outros, em nível de Ensino Médio, como progressões e funções periódicas. Também foram utilizados recursos computacionais para esboçar os gráficos de tais funções. O leitor verá como a Matemática está cada vez mais inserida no mundo moderno e como ela é uma ferramenta necessária nos mais diversos ramos de atividades.

Na próxima fase, analisamos alguns tópicos em Acústica, que é o ramo da Física que se ocupa de estudar o som e sua propagação. Consideramos que o estudo de ondas sonoras e de como o som é produzido, além de alguns parâmetros que o caracterizam, tais como timbre, altura, dentre outros, é de grande importância para o entendimento da construção de uma escala musical. Paralelamente, a fim de dar um sentido visual, foram feitos esboços gráficos de algumas ondas sonoras, utilizando a ferramenta computacional *Graph*. Entendemos que a tecnologia deve ser um aliado na busca de novos caminhos para

se abordar os conteúdos matemáticos.

A quarta fase, que consideramos ser o ápice do trabalho, apresenta uma atividade que aborda de maneira diferente a introdução do conceito de progressão geométrica a partir da construção da escala musical utilizada no mundo ocidental. Acredita-se que Pitágoras foi o primeiro a estudar a música de forma empírica. Portanto, nosso estudo vai desde a experiência lúdica realizada por ele, com seu instrumento de uma só corda (o monocórdio), que culminou na construção da primeira escala musical de que se tem notícia, até a necessidade de se fazer algumas correções nessa escala. As progressões geométricas foram de grande valia para a criação de um modelo matemático de escala que melhor se adequava aos anseios da comunidade musical: uma escala cujas notas estivessem igualmente espaçadas.

Ainda nessa etapa, apresentamos atividades que introduzem o conceito matemático de timbre a partir de funções periódicas. Para tal, é necessário que o aluno já tenha noção das principais funções trigonométricas: seno e cosseno. Cabe lembrar que essas atividades não seriam viáveis sem o uso dos recursos tecnológicos disponíveis, tais como programas de computador que esboçam gráficos de funções.

Na última fase do trabalho, fizemos uma reflexão do papel do professor frente à oferta de recursos tecnológicos. Julgamos ser possível substituir algumas práticas pedagógicas tradicionais por outras, inovadoras, coerentes com o mundo do século XXI. O uso da ferramenta computacional como um estímulo, um elemento disparador que desperta maior interesse por parte dos alunos deve ser avaliado por educadores e instituições de ensino no país. Também são analisados alguns fatores que influenciam na sua implantação, tais como a falta de motivação por parte de alguns alunos e/ou professores, a falta de recursos financeiros para se desenvolver um trabalho deste tipo, já que se faz necessário um razoável investimento financeiro, tal como a implantação de um laboratório de informática, projetores, dentre outros.

Em anexo, encontra-se um pequeno tutorial do *software* educacional gratuito *Graph*, utilizado neste trabalho. Consideramos essencial que o professor atual tenha o domínio de alguns programas computacionais destinados ao ensino-aprendizagem de Matemática que estão disponíveis no mercado.

1 Introdução e Contexto Histórico

Desde os tempos mais remotos, quando o homem deixou o nomadismo pela fixação em tribos, e, mais tarde, criou as cidades, tem havido a necessidade de se estruturar a vida em grupos. Era preciso criar normas para viver em sociedade. E a Matemática surgiu claramente dessa urgência humana de organizar, compreender e estruturar algumas de suas atividades, tais como contar, calcular, trocar, comprar, vender, enfim, das exigências inerentes à formação de uma civilização [1, pág. 52-56]

Em antigas civilizações, tais como a egípcia e a babilônica, a Matemática que se conhece de então é apenas um conjunto de problemas isolados, tal como mostra, por exemplo, o Papiro de Rhind. Os egípcios não estavam preocupados em provar teoremas ou sistematizar os conhecimentos que adquiriam, visto que utilizavam a Matemática apenas como ferramenta para resolver os problemas práticos que surgiam no cotidiano. Os engenheiros e agrimensores egípcios utilizavam geometria, por exemplo, para a demarcação de terras às margens do Nilo [1].

Somente por volta do século V a.C. é que aparecem registros de uma fundamentação teórica na civilização grega, que chegou mesmo a definir certas bases da Matemática que hoje se pratica.

“(...) pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas, (...), a criação de métodos de agrimensura (...)”

[1, pág. 57]

Os filósofos gregos, que também eram matemáticos na época, uma vez que não havia distinção entre filosofia e ciência, acreditavam que havia dois mundos distintos: o mundo sensível, palpável, dos fenômenos e dos fatos reais, e o mundo ‘inteligível’, das ideias, desligado da realidade. E, para alcançar tal mundo, entendiam que a Matemática

tinha um papel essencial, pois era considerada como um caminho para alcançar a verdade. Cabia ao filósofo elevar o pensamento de uma mera opinião ao patamar de ciência, que era então o conhecimento verdadeiro. Para tal, se fazia necessário o estudo aprofundado da disciplina. Havia, portanto, naquela civilização, uma supervalorização do saber matemático. Um exemplo claro dessa concepção figurava à porta da Academia de Platão:

“Que não entre aqui quem não souber geometria”

Segundo [1], os gregos estavam preocupados em saber ‘por que’ e não simplesmente ‘como’, tal e qual os povos que viviam às margens dos rios Nilo e Eufrates.

“Pela primeira vez na matemática (...) o homem começou a formular questões fundamentais como ‘*Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?’ e ‘*Por que* o diâmetro do círculo divide esse círculo ao meio?’. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficientes o bastante para responder questões na forma de *como*, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de *por quê*.”

[1, pág. 94]

A partir do século V d.C., ocasião da queda do Império Romano, iniciam-se transformações na Europa que dão origem a uma nova fase da História: a Idade Média. Nesse período, considerado período das trevas pelos iluministas, pouco se produziu em termos de ciência. Grande parte da produção intelectual estava subordinada à Igreja e aos seus princípios, fato que tornava o conhecimento pouco acessível. Nesse período, principalmente na primeira metade dele, houve até certa desvalorização da Matemática e da ciência como um todo; a formação intelectual foi posta em segundo plano, já que esta não estava – na visão da Igreja – de acordo com a principal meta de então: a salvação da alma.

“Os monastérios eram os únicos locais da Europa Medieval onde se cultivava o saber, e os monges, obviamente, preferiam a religião e a filosofia à ciência. (...) A Idade Média produziu muitos teólogos merecidamente afamados (...) mas quase não se produziu nenhum cientista ou matemático”

[1, pág. 287]

Somente com o advento da burguesia, uma classe formada por comerciantes enriquecidos principalmente pelo comércio das especiarias, e também outras transformações sociais, como a Reforma Protestante e o Renascimento, foi possível o fomento da produção intelectual. Novas tendências emergiram no período, tais como a de que o valor de um homem está relacionado ao seu potencial para trabalhar, ou para produzir algo útil para a sociedade em que vive. Uma concepção otimista da vida, contrária à visão fatalista da Igreja, na qual tudo ocorria pela vontade de Deus.

Em seguida surgiram os *mecenas*, homens ricos que, com os excedentes financeiros advindos de suas atividades comerciais, patrocinavam artistas e cientistas de todas as áreas, fazendo dessa época um período muito fértil em termos de ciência. Tanto que as profundas mudanças por que passou a Europa no fim do medievo cristão foram, nos planos cultural e científico, tal qual uma verdadeira revolução: os artistas, poetas, pensadores renascentistas expressavam seus trabalhos, os ideais e os valores de uma nova sociedade que eclodia em contrapartida à feudal [5, pág 163].

Mais tarde, com o surgimento das ideias renascentistas, advém uma nova fase na história da humanidade: a Idade Moderna, quando há um rompimento com as proibições impostas pela religião e um grande avanço científico ocorre em todos os campos do saber. A arte e o conhecimento se baseiam no mundo concreto, no desenvolvimento do homem e de sua capacidade. Nasce o Iluminismo e o Racionalismo, movimentos culturais que revolucionaram o modo de pensar e agir da sociedade europeia. Tais movimentos caracterizaram-se, dentre outras coisas, pela defesa da racionalidade como meio para entender e explicar o mundo em que viviam. Grandes filósofos e matemáticos, como *Descartes*, emergiram nesse período.

“Os iluministas consideravam a razão indispensável aos estudos dos fenômenos naturais e sociais. Até a crença religiosa deveria ser racionalizada. Eles eram deístas, isto é, acreditavam que Deus está presente na natureza, portanto também no próprio indivíduo, e que se pode descobri-lo por meio da razão. Assim, a Igreja e seus dogmas tornavam-se dispensáveis.”

[5, pág. 230]

Na busca desse objetivo comum a grande parte dos estudiosos de então, o de tentar conhecer, descrever e explicar racionalmente os fenômenos naturais do mundo

que os cercava, estabelecer relações entre os fatos observados na natureza e no próprio indivíduo, nasce uma nova ciência: a Física (do grego *physis*: natureza), que tentava expressar os fenômenos da natureza através da linguagem matemática. Foi nesse período fértil da história da humanidade que surgiram os primeiros modelos matemáticos para descrever tais fenômenos. Aliás, o conteúdo de nosso estudo trata justamente desse fato: a criação de um modelo matemático que melhor se adequava ao anseio dos músicos, que era o de construir uma escala perfeitamente simétrica em todas as tonalidades¹.

Nesse ínterim, grandes gênios da Música também entram para a História, tais como: Mozart, Beethoven e Bach, o qual terá um destaque nesse trabalho. A música chamada erudita instrumental, principal trabalho desses compositores, era preterida na Idade Média em detrimento das melodias cantadas em louvor a Deus. Os cantos gregorianos são exemplos desse estilo denominado música medieval. Somente no fim do período medieval, com o advento das primeiras escritas musicais (partituras), é que o instrumento solo passou a ter maior visibilidade. A Música se torna uma das artes mais apreciadas nas cortes europeias e, por isso, passou a ser financiada pela nobreza e também pela Igreja.

“Na época medieval, o estudo cuidadoso da música partilhou muitas características com a prática da matemática, tais como um interesse em proporções, padrões recorrentes e outras séries detectáveis. (...) Novamente no século XX, primeiramente na esteira da música dodecafônica, e mais recentemente, devido ao amplamente difundido uso de computadores, o relacionamento entre as competências musical e matemática foi amplamente ponderado. A meu ver, há elementos claramente musicais, quando não de ‘alta matemática’ na música: estes não deveriam ser minimizados.”

[8, pág. 98]

Mas ainda faltava algo: a padronização. A escala musical ocidental criada pelo monge Guido D’Arezzo (dó-ré-mi-fá-sol-lá-si-dó), quando reproduzida em ordens distintas, tinha sonoridades completamente diferentes. Esse fato, que será esmiuçado no decorrer de nosso estudo, pode ser entendido da seguinte maneira: cada nota musical tem uma frequência associada (em hertz), porém a distância entre elas não é sempre a mesma, melhor dizendo, a distância entre as frequências de Dó e Ré, por exemplo, não

¹Retirado de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Temperamentomusical>

é igual à distância de Mi para Fá. Portanto, era interessante a criação de um modelo (matemático) de escala que pudesse ser reproduzida em qualquer tom (altura sonora) por qualquer instrumento. Cria-se, então, a escala temperada. O temperamento é a divisão das notas de uma escala musical em distâncias iguais entre os sons. Para tal, concebeu-se uma escala musical como sendo uma progressão geométrica, e a distância entre as notas da escala é a razão da referida progressão [10].

1.1 A Grécia Antiga

Antes da era clássica da civilização helênica, iniciada aproximadamente no século VI a.C., a vida do povo grego era regida pelos mitos. Os mitos eram narrativas concebidas para explicar as origens do mundo e do homem, enfim, toda a sorte de desígnios da vida que não eram passíveis de uma explicação racional, científica. Todavia, a partir daquele século, começaram a surgir os primeiros filósofos, homens que buscavam o conhecimento verdadeiro dos fatos, em detrimento de simplesmente atribuir aos deuses a sua causa. Esses amantes do saber (do grego: *philos* = amor e *sofia* = saber) estavam em busca de um princípio metafísico universal, a chamada causa primeira. Para Tales, considerado o primeiro deles, a água desempenhava esse papel; para Heráclito, o fogo e Pitágoras dizia ser o número a essência de tudo. A Metafísica é o ramo da Filosofia que se ocupa de descobrir um sentido para as coisas que ocorrem no Universo².

Acredita-se que Pitágoras – fundador da Escola Pitagórica – tenha vivido, aproximadamente, entre os anos de 570 – 500 a.C. Nasceu em Samos, ilha grega situada no Mar Egeu, e faleceu em Metaponto, colônia grega no sul da Itália, região denominada Magna Grécia³.

Nicola, em [4], sugere que o filósofo teria nascido numa família de ricos comerciantes e, por essa razão, teria viajado bastante, que fora aluno de Tales, na própria cidade de Mileto, que teria conhecido Zoroastro na Babilônia (Pérsia) e que também teria estudado os mistérios do Antigo Egito com os sacerdotes locais. Pode-se então supor que o contato com diversas culturas o teria influenciado bastante e, provavelmente, o seu lado místico seja oriundo da convivência com povos tão distintos.

²Retirado de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Metafísica>

³Retirado de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Pitágoras>

Quando jovem já se tornara um sábio e, ainda em Samos, já teria tido muitos discípulos, porém também conseguiu alguns desafetos. Diz a lenda que ele foi expulso de sua terra natal pelo tirano Polícrates e, por volta dos seus 40 anos de idade, fugiu para Crotona, também ao sul da Itália, onde fundou a famosa (e um tanto quanto misteriosa) ordem científico-religiosa denominada Escola Pitagórica. Mais tarde, por questões políticas, sua escola foi destruída em meio a uma guerra. Alguns historiadores contam que ele teria sido morto pelo Império Romano lá mesmo em Crotona, porém a versão mais aceita é a de que ele e alguns discípulos teriam sobrevivido e fugido. Pitágoras, então, teria ido para Metaponto e Filolau, seu discípulo mais famoso, teria ido para Taranto e refundado uma nova versão da Escola.

Há poucas informações concretas, muitas imprecisas, e várias lendas a seu respeito. Na verdade, alguns historiadores até duvidam de sua existência, assim como a de outros filósofos ilustres, profetas e religiosos. Isso se deve, principalmente, ao fato de que, tal como Jesus Cristo e Maomé, por exemplo, Pitágoras optou por nunca escrever, tendo preferido deixar seus ensinamentos por meio de *mathématas* (em grego: sentenças) e exemplos de vida. O próprio Sócrates, considerado o pai da filosofia ocidental, também optou por transmitir seus ensinamentos por meio de palestras e pela força de exemplos concretos. O que se sabe sobre ele vem de Platão – seu melhor discípulo – que supostamente teria escrito seus diálogos com base nos ensinamentos do mestre e colocando-o como protagonista de suas obras [4, pág. 21 e 49].



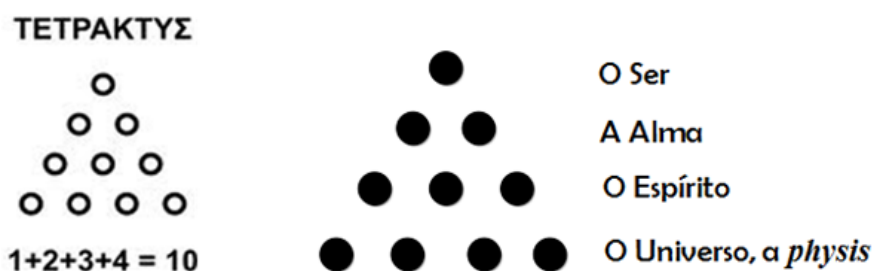
1.2 A Escola Pitagórica

Para início de conversa, os pitagóricos viam a figura do número como a essência de todas as coisas. O princípio metafísico de que tudo é número ou pode ser representado por números foi o pilar da filosofia pitagórica. Mas existe certa dualidade nessa concepção, pois, ao mesmo tempo em que os pitagóricos entendiam o mundo de forma racional, ou seja, que ele era regido por relações matemáticas, também havia uma visão mística de que o número seria a essência de tudo, inclusive do ser. Na verdade, toda a filosofia pitagórica era fundamentada em dualidades, tais como o par e o ímpar, o perfeito e o imperfeito, o ser e o não-ser, etc.

“Os assim chamados pitagóricos, tendo-se dedicado às matemáticas, foram os primeiros a fazê-la avançar. Nutridos por ela, acreditaram que o seus princípios eram o princípio de todas as coisas. E como os números, nas matemáticas, por natureza, são os princípios primeiros, julgando também encontrar nos números muitas semelhanças com as coisas que são geradas, mais do que no fogo, na terra e na água, afirmaram a identidade de determinada propriedade numérica com a justiça, com a alma e o intelecto, e, assim, todas as coisas estariam em relações semelhantes; observando também que as notas e os acordes musicais consistem em números e parecendo-lhes, por outro lado, que toda a natureza é feita à imagem dos números, sendo estes os princípios da natureza, supuseram que os elementos do número são os elementos de todas as coisas e que todo o universo é harmonia e número.”

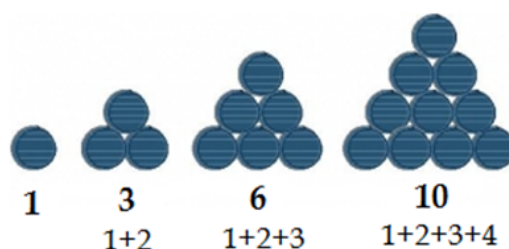
Aristóteles ([12, Livro I, pág. 5])

Todavia, dentre todos os números, havia uma sequência bem peculiar: 1, 2, 3 e 4. Esse pequeno conjunto formava uma tétrade bastante conhecida: eram os termos da sequência de números triangulares (que formam triângulos) tão cultuados pela escola, e que formavam a figura que os pitagóricos chamavam *tetraktys*.



A Tetraktys Fonte: Própria

Nota-se que, com os números 1, 2, 3 e 4, podem-se formar triângulos equiláteros, da seguinte maneira:



Números Triangulares Fonte: Própria

1.3 A Música Segundo Pitágoras

O fascínio que a Música exercia nos povos antigos, e exerce até hoje, pode ser bem exemplificado no mito grego de Orfeu. Orfeu era poeta e músico. Diz a lenda que, quando cantava e tocava sua lira⁴, acalmava os rios e até os animais. Todos se rendiam aos encantos de sua música.

Pitágoras, assim como Orfeu, compunha e tocava lira desde muito jovem. E a música, para ele, tinha várias finalidades, inclusive pedagógicas: a purificação da mente, a cura de doenças, o domínio da raiva e da agressividade do homem, dentre outras coisas. Com o auxílio da música, Pitágoras criava um ambiente de harmonia e tranquilidade para passar seus ensinamentos aos discípulos.

A **música**⁵ (do grego *musiké téchne*, a arte das musas) constitui-se basicamente de uma sucessão de sons e silêncio organizada ao longo do tempo. Os três elementos principais de uma composição musical são: melodia, harmonia e ritmo.

⁴Um instrumento musical parecido com a Harpa

⁵Retirado de: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Musica>

1. **Melodia** é o estudo dos sons tocados separadamente, em sequência. Um canto ou um solo de guitarra, por exemplo, são exemplos de melodias.
2. **Harmonia** é o estudo das combinações de sons tocados simultaneamente. Duas ou mais notas musicais tocadas ao mesmo tempo constituem uma harmonia. Numa composição musical, a harmonia é o conjunto de acordes, que podem ser executados por diversos instrumentos, como violão, piano, etc.
3. **Ritmo** é a parte da música que determina o tempo de duração de cada nota. Em outras palavras, pode-se entender o ritmo quando se observa que algumas sílabas (ou palavras) têm maior duração que outras.⁶

Pitágoras, ao que tudo indica, estava interessado em entender aquilo que hoje se denomina harmonia. Em outras palavras, pode-se dizer que seus estudos consistiam em descobrir quais combinações de sons eram agradáveis aos ouvidos. Porém, para os gregos, a palavra harmonia tinha um sentido mais amplo, de ordem, ordenação, equilíbrio. Aliás, assim como aquele povo, a beleza e a harmonia das formas são características que procuramos identificar à nossa volta. Os objetos de formato simétrico, ‘harmonioso’, em geral, despertam mais interesse que os outros. A beleza de um rosto, por exemplo, estaria associada a formas proporcionais, simétricas e harmoniosas. Platão, considerado pitagórico em sua filosofia, também fazia uma associação similar: para ele, a beleza universal, aquela que reside no mundo das ideias, e que seria imutável, estava relacionada à ordem e à harmonia.

“A harmonia é a unificação de muitos misturados e a concordância dos discordantes.”

Filolau de Crotona

Já na Idade Média, a busca pela harmonia cósmica também era parte dos estudos de vários cientistas, dentre eles, o alemão Johannes Kepler (1571-1630):

“O movimento dos céus, não é mais do que uma eterna polifonia”

⁶Retirado de <http://www.arte.seed.pr.gov.br>

Kepler, em [13]

O filósofo e matemático alemão G. W. Leibniz (1646-1716) também expressou sua concepção sobre matemática e música, como se pode ler no trecho:

“Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi
(A música é um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números)”

No mundo antigo e até o Renascimento, enquanto vigorava a teoria geocêntrica de Aristóteles, os planetas conhecidos eram sete, a saber: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno⁷. Portanto, a escolha de uma escala musical de sete sons em harmonia coincide com o conceito de harmonia das esferas celestes criado por Pitágoras. A teoria geocêntrica firmava a Terra como referencial, como centro do Universo e, nessa concepção, Sol e Lua também eram considerados planetas (astros errantes, em grego) que orbitavam em torno da Terra. De acordo com essa concepção, as esferas celestes (os planetas) aparecem dispostas no céu em ordem, em equilíbrio, tal como uma escala musical.

“Pitágoras descobriu uma certa ordem numérica inerente ao som. É a analogia entre duas séries: o som e o número, um princípio universal extensivo a outras ordens, como a dos astros celestes.”

[2, pág. 20]

“Pitágoras deu continuidade a seus experimentos investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela. Caracterizando a primeira lei descoberta empiricamente, o experimento de Pitágoras é ainda a primeira experiência registrada na história da ciência, no sentido de isolar algum dispositivo para observar fenômenos de forma artificial.”

[3, pág. 5]

⁷Saturno era o último planeta que podia ser visto até então.

2 As Escalas Musicais

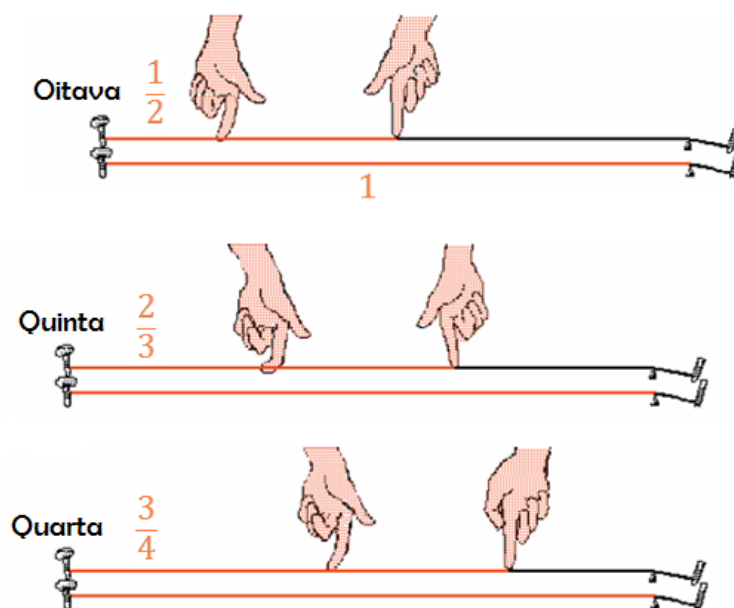
Diógenes Laércio, em *Vidas e Doutrinas dos Filósofos Ilustres*¹, cita Pitágoras como o inventor do monocórdio, um instrumento musical rudimentar, composto de uma corda presa entre dois cavaletes fixados a uma tábua, que ele teria dividido em 12 espaços iguais. A partir de uma intuição, provavelmente induzido por suas próprias convicções místicas a respeito da *tetraktys*, descobriu uma peculiar relação entre os números e os sons, as notas musicais. A essa relação deu o nome **harmonia musical**, que era exatamente a união das notas que, quando tocadas simultaneamente, produziam um som agradável aos ouvidos.

O monocórdio, ao ser tocado na modalidade ‘corda solta’, isto é, presa apenas pelas extremidades, produzia um som, uma nota musical que serviria de referência para que pudesse determinar as outras. As ‘novas’ notas encontradas por ele foram determinadas a partir de proporções numéricas bem definidas:

1. A **Tônica**², de razão 1:1 \rightarrow comprimento c
2. A **Oitava**, de razão 1:2 \rightarrow comprimento $\frac{c}{2}$
3. A **Quinta**, de razão 2:3 \rightarrow comprimento $\frac{2c}{3}$
4. A **Quarta**, de razão 3:4 \rightarrow comprimento $\frac{3c}{4}$

¹Retirado de http://en.wikisource.org/wiki/Lives_of_the_Eminent_Philosophers/Book_VIII, tradução de Robert Drew Hicks

²Em Música, a primeira nota de uma escala ou de um acorde é denominada tônica ou fundamental.



O Monocórdio

Fonte: <http://www.ghtc.usp.br>

Denominou-as notas **consonantes**. Entende-se por consonantes aquelas notas (ou sons) que, quando tocadas juntas, produzem uma sensação prazerosa aos ouvidos. Essa, talvez, tenha sido a primeira noção de **acorde**, que, por definição, é a reprodução de um grupo de notas ao mesmo tempo. A ideia de acorde consonante é oposta à ideia de acorde dissonante, que é formado por sons que, quando tocados juntos, não agradam aos ouvidos. A dualidade consonância×dissonância é objeto de estudo dos musicólogos.

Segundo uma lenda contada por Guido D'Arezzo, no tratado sobre música intitulado *Micrologus*³, Pitágoras, ao ouvir os diferentes sons produzidos pelas batidas dos martelos numa oficina de ferreiro, percebeu que estes propiciavam uma sensação agradável e tinham uma harmonia⁴ entre si. Ele também teria notado que os valores dos sons poderiam ser expressos por relações numéricas (proporções) e que, para sua surpresa, os martelos que produziam os sons mais agradáveis (consonantes) pesavam 12, 9, 8 e 6 unidades de massa.

³Retirado de <http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat>

⁴Harmonia na concepção grega do termo: ordem, beleza, conformidade, equilíbrio.



Ilustração de Franchinus Gafurius, 1492

Fonte: www.amigodaalma.com.br

É sabido que, em se esticando uma corda e fazendo-a vibrar, a mesma emite um som. O som, conforme perceberam os gregos, dependia do tamanho da corda. Tomando-se comprimentos aleatórios, sons diferentes eram produzidos, alguns agradáveis, outros não. Uma pergunta cabível a essa altura é a seguinte: **quais sons eram harmoniosos e quais não?**

Os sons harmoniosos são emitidos por uma corda vibrante cujo comprimento é dividido segundo proporções simples, ou seja, existe uma relação entre sons harmoniosos e números inteiros. A consonância, segundo os pitagóricos, seria mais bela quanto mais simples fosse a relação proporcional entre os sons. A mística dos números fica evidente quando se observam os denominadores das frações:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ e } \frac{3}{4}$$

Essas frações eram equivalentes às frações que relacionavam os pesos dos martelos da oficina, tomando a medida doze como sendo o inteiro, e cujos numeradores têm algumas propriedades, como se pode notar abaixo:

$$\frac{12}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12} \text{ e } \frac{9}{12}$$

- **Nove** é a Média Aritmética entre 6 e 12: $9 = \frac{6 + 12}{2}$
- **Oito** é a Média Harmônica⁵ entre 6 e 12: $8 = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}$
- **Seis, oito, nove e doze** formam uma proporção: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$

2.1 A Escala Pitagórica

Não se sabe ao certo em que tom⁶ estava afinado o monocórdio, mas, na verdade, isso não tem importância, pois o que realmente interessa é a relação entre a corda tocada solta (tônica) e as outras notas obtidas pressionando o monocórdio em determinadas posições e fazendo vibrar a corda pressionada nessas posições. Essas notas consoantes são, na escala ocidental atual, a **oitava**, a **quinta** e a **quarta**, relativas à tônica. A oitava é a nota obtida ao tocar a corda na metade do seu comprimento e que o ouvido humano interpreta como sendo a mesma nota. A primeira e a oitava são identificadas por nós como sendo notas naturalmente equivalentes. Mais tarde será analisado o conceito físico de frequência sonora e sua relação com o comprimento de uma corda.

Pode-se fazer uma analogia com o violão, por exemplo. Quando tocamos uma nota na 12^a casa do violão, obtemos a oitava do acorde. E a 12^a casa pressionada corresponde à corda pressionada na metade do seu comprimento, ou seja, na razão 1:2. Exatamente como descobriu Pitágoras há 2500 anos!

A partir dessa descoberta, estava, então, formada a primeira escala musical, a mais elementar e a que serviu de base para a música grega: a escala formada pelos quatro sons descobertos por Pitágoras, que hoje sabemos que eles representam a 1^a, a 4^a, a 5^a e a 8^a na escala atual⁷. Como consequência, surgiu o tetracórdio, uma espécie de lira com quatro cordas, cada uma contendo uma nota daquela escala.

Convém salientar que não importava o comprimento inicial da corda, mas a razão entre um dado comprimento c , tomado como referência, e os comprimentos $c_1 = \frac{c}{2}$, $c_2 = \frac{2c}{3}$, $c_3 = \frac{3c}{4}$, ... , obtidos a partir da divisão da corda.

⁵A média harmônica entre n números x_1, x_2, \dots, x_n é dada por $M_H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

⁶Por enquanto, entendamos o tom como sendo a nota tomada como base, como referência para a escala. A corda solta pode ser um exemplo.

⁷dó, ré, mi, fá, sol, lá, si, dó

Portanto, saindo dos limites da primeira oitava, podem-se encontrar outros sons equivalentes em oitavas superiores, fracionando a corda em pedaços ainda menores, conforme explicitado abaixo:

- OITAVAS $\rightarrow \frac{c}{2}, \frac{c}{4}, \frac{c}{8}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot c$
- QUARTAS $\rightarrow \frac{3c}{4}, \frac{3c}{8}, \frac{3c}{16}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{3c}{4}$
- QUINTAS $\rightarrow \frac{2c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{6}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{2c}{3}$

Para compreender melhor as frações acima, poderíamos pensar numa sequência de notas que se repetem em grupos de sete. A oitava seria a primeira do próximo grupo de notas, cada vez mais agudas. De acordo com esse padrão, a corda tocada na fração $\frac{c}{6}$, por exemplo, seria uma quinta, porém mais aguda, em duas oitavas acima da quinta inicial, cuja fração da corda era $\frac{2c}{3}$.

Pitágoras também verificou que o som produzido pelo monocórdio quando pressionado em outros pontos senão esses mostrados acima produziam outros sons, porém dissonantes, não aprazíveis. Pode parecer abstrato, mas, mesmo um leigo em Música é capaz de comprovar esse fato, da seguinte maneira:

– Tome um violão, escolha uma corda e meça-a com uma régua.

Toque-a e ‘sinta’ a sonoridade.

– Agora tome dois terços da corda, prenda-a e toque novamente.

O segundo som parecerá, digamos, concordante com o primeiro.

– Por fim, escolha uma fração distinta da anterior.

Por exemplo, três sétimos. Toque a corda.

Este último não parecerá consoante com o primeiro, mas dissonante.

2.1.1 A Construção da Escala Pitagórica

Sabe-se que a primeira escala musical tinha apenas quatro sons. Porém, há outras notas entre essas que também foram sendo descobertas, seguindo as mesmas pro-

porções definidas por Pitágoras, até se chegar ao que hoje se denomina **Escala Diatônica de DÓ**.

A escala diatônica⁸ possui 7 notas, mas incluindo a oitava, transformamo-la numa escala de 8 notas. Abaixo se encontra o exemplo da afamada escala, em que as frações representam as frações da corda solta, de comprimento c :

INTERVALO DE OITAVA							
DÓ ₁	RÉ ₁	MI ₁	FÁ ₁	SOL ₁	LÁ ₁	SI ₁	DÓ ₂
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
c			$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$			$\frac{1c}{2}$

Intervalos na Oitava Fonte: Própria

Antes de procedermos ao cálculo das outras notas, vamos adotar a seguinte convenção: na escala diatônica, a primeira oitava está delimitada pelas notas DÓ₁ e DÓ₂. Entre essas, estão RÉ₁, MI₁, etc. Genericamente, a ‘ n -ésima’ oitava estará entre DÓ _{n} e DÓ _{$n+1$} , e conterá as notas RÉ _{n} , MI _{n} , etc.

Outra convenção adotada nesse trabalho é a de que, a notação X_n para designar uma nota qualquer, tanto pode ser utilizada para uma nota, um som, quanto para designar a fração do comprimento da corda que produz a referida nota.

Por exemplo:

- As notações DÓ _{n} , RÉ _{n} , etc, claramente se referem ao som das notas, às notas propriamente ditas.
- Relações do tipo FÁ _{n} = $\frac{3}{4} \cdot$ DÓ _{n} se referem à fração do comprimento relativo à nota DÓ _{n} necessária para produzir o som da nota FÁ _{n} .

Adotadas essas convenções e supondo, agora, que o monocórdio grego estivesse afinado com a tônica em DÓ₁, podemos afirmar que Pitágoras já percebia o FÁ₁ (quarta), o SOL₁ (quinta) e o DÓ₂ (oitava).

⁸A palavra diatônica vem do grego e significa ‘através da sucessão de sons’

2.1.2 Como foram descobertas as outras notas da escala de DÓ?

Uma maneira bastante utilizada por músicos em todo o mundo para se encontrar as notas musicais anteriores ou posteriores a uma nota dada é efetuando um procedimento denominado **Ciclo das Quintas**.

Definição: Em termos de comprimento de corda, a quinta (ou quinta justa) de uma nota musical qualquer é determinada por: $Q = \frac{2}{3} \cdot X_n$

Partindo da razão definida para a quinta ($\frac{2}{3}$), pode-se determinar o ciclo das quintas da seguinte maneira: tomada uma nota como referência, por exemplo, DÓ, deve-se encontrar a quinta de DÓ, depois a quinta em relação à quinta, e assim por diante. Para tal, partimos de dois resultados já conhecidos, que definem o intervalo de uma oitava:

- A Quinta de DÓ_n é SOL_n.
- A Quinta de FÁ_n é DÓ_{n+1} (*próxima oitava*).

De maneira genérica, a m -ésima quinta, que pertencerá à n -ésima oitava, pode ser obtida pela equação:

$$Q_m = \left(\frac{2}{3}\right)^m \cdot \text{DÓ}_1$$

Se, por simplicidade de notação, definirmos a 1ª nota, (DÓ₁) com 1 unidade de comprimento, isto é, $c = 1$, pode-se calcular os comprimentos de corda que produzem os sons das próximas quintas:

- Quinta de DÓ₁ : $\frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$, que equivale a SOL₁.
Quinta de FÁ₁ : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$, que equivale a DÓ₂.
- Quinta de SOL₁ : $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, que equivale a RÉ₂.
Logo, o RÉ₁ terá o dobro do comprimento: $\text{RÉ}_1 = 2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$.
- Quinta de RÉ₁ : $\frac{2}{3} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$, que equivale ao LÁ₁.
- Quinta de LÁ₁ : $\frac{2}{3} \times \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$, que equivale a MI₂.
Logo, o MI₁ terá o dobro do comprimento: $\text{MI}_1 = 2 \times \frac{32}{81} = \frac{64}{81}$.

- Quinta de $MI_1 = \frac{2}{3} \times \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$, que equivale ao SI_1 .

É importante lembrar que, se uma nota está na 2^a oitava (entre $DÓ_2$ e $DÓ_3$), deve-se multiplicá-la por 2 para trazê-la⁹ aos limites da 1^a oitava. Isto é, se o $DÓ_2$ equivale à metade do $DÓ_1$, então o $DÓ_1$ equivale ao dobro do $DÓ_2$. Raciocínio análogo é utilizado para todas os casos acima em que as notas foram multiplicadas por 2.

Em termos de comprimento de corda, uma oitava de ordem n (entre $DÓ_n$ e $DÓ_{n+1}$) é definida pelo intervalo: $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right]$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Genericamente, para transpor uma nota X_n de uma oitava qualquer à primeira oitava, pode-se utilizar a equação: $X_1 = 2^{n-1} \cdot X_n$

Exemplo:

Seja uma nota tocada numa corda pressionada na altura de $\frac{2}{11}$ do seu comprimento. Por inspeção, nota-se que: $\frac{1}{2^3} < \frac{2}{11} < \frac{1}{2^2}$; portanto, essa nota pertence à 3^a oitava. Logo, para encontrar uma nota equivalente na 1^a oitava, basta substituímos $n = 3$ na equação:

$$\begin{aligned} X_1 &= 2^{n-1} \cdot X_n \\ X_1 &= 2^{3-1} \cdot \frac{2}{11} = \frac{8}{11} \end{aligned}$$

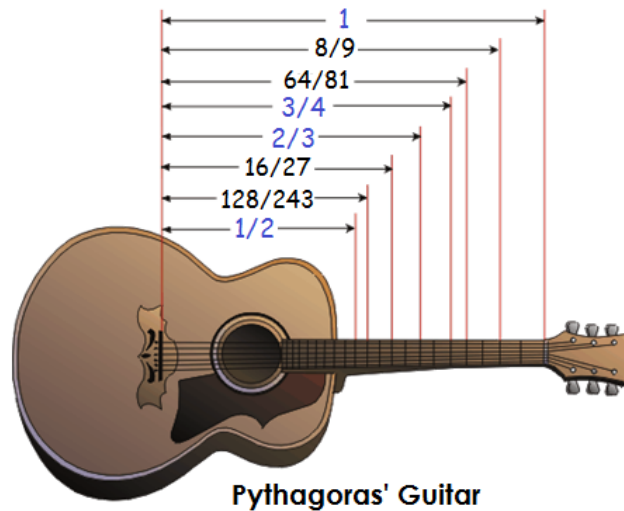
As frações $\frac{2c}{11}$ e $\frac{8c}{11}$ correspondem à mesma nota em oitavas distintas.

Após esses cálculos, pode-se, finalmente, definir as relações proporcionais dos comprimentos das cordas em relação à primeira (corda solta, de comprimento c). Para isso, basta que se ponham as frações calculadas em ordem decrescente, conforme abaixo:

FRAÇÕES DO COMPRIMENTO							
$DÓ_1$	RE_1	MI_1	$FÁ_1$	SOL_1	$LÁ_1$	SI_1	$DÓ_2$
1^a	2^a	3^a	4^a	5^a	6^a	7^a	8^a
c	$\frac{8c}{9}$	$\frac{64c}{81}$	$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$	$\frac{16c}{27}$	$\frac{128c}{243}$	$\frac{1c}{2}$

Todos os Intervalos Fonte: Própria

⁹Entende-se por ‘trazer’ ou ‘transpor’ uma nota à 1^a oitava, o processo de se encontrar um nota equivalente à nota dada na 1^a oitava.



Violão Pitagórico Fonte: <http://www.upscale.utoronto.ca>

Definidas as oito notas de uma oitava, convém generalizar os resultados. Aliás, esse é um dos objetivos da Matemática: criar padrões, modelos que sirvam para resolver problemas similares.

Assim, em termos de comprimento da corda, sempre haverá as relações:

- OITAVAS $\longrightarrow DÓ_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot DÓ_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot DÓ_1$
- QUARTAS $\longrightarrow FÁ_n = \frac{3}{4} \cdot DÓ_n = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot DÓ_1$
- QUINTAS $\longrightarrow SOL_n = \frac{2}{3} \cdot DÓ_n = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot DÓ_1$

Escolhemos a oitava, a quarta e a quinta por serem as primeiras relações encontradas por Pitágoras. Raciocínio similar pode ser feito para outras notas.

Uma analogia interessante a essa altura é que o conceito de intervalo musical está diretamente ligado ao conceito matemático de razão.

Definição: Define-se **intervalo** (I) entre duas notas da escala como sendo a razão entre o comprimento relativo a cada uma das notas. Em linguagem matemática, temos:

$$I = \frac{X_k}{X_{k+1}}, \text{ para o caso de notas consecutivas.}$$

$$I = \frac{X_k}{X_m}, \quad k \leq m, \text{ para o caso de notas quaisquer.}$$

Além disso, vale ressaltar que Pitágoras descobriu, de maneira intuitiva, que a **altura** (frequência¹⁰) de uma nota e o comprimento da corda que gera essa nota são grandezas inversamente proporcionais, isto é, à medida que uma aumenta, a outra diminui. Logo, pode-se estender o conceito de intervalo em termos de frequências das notas, conforme mostrado abaixo:

$$f(X_k) = \frac{1}{X_k} \iff X_k = \frac{1}{f(X_k)}$$

$$I = \frac{\frac{1}{f(X_k)}}{\frac{1}{f(X_{k+1})}} = \frac{f(X_{k+1})}{f(X_k)}, \text{ para o caso de notas consecutivas.}$$

$$I = \frac{f(X_k)}{f(X_m)}, \quad k \geq m, \text{ para o caso de notas quaisquer.}$$

A fim de simplificar a notação, representaremos abaixo as razões relativas às frequências $f(X_k)$ das notas X_k , apenas por **f**.

INTERVALOS DE FREQUÊNCIA							
DÓ ₁	RÉ ₁	MI ₁	FÁ ₁	SOL ₁	LÁ ₁	SI ₁	DÓ ₂
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
f	$\frac{9f}{8}$	$\frac{81f}{64}$	$\frac{4f}{3}$	$\frac{3f}{2}$	$\frac{27f}{16}$	$\frac{243f}{128}$	2f

Intervalos de Frequências Fonte: Própria

Portanto, em qualquer região do espectro de frequências audíveis – que compreende 10 oitavas, aproximadamente – valem as seguintes relações entre as alturas das notas:

¹⁰O conceito físico de frequência está definido mais adiante, na seção 3.1

- OITAVAS $\rightarrow f(\text{DÓ}_n) = 2 \cdot f(\text{DÓ}_{n-1}) = 2^{n-1} \cdot f(\text{DÓ}_1)$
- QUARTAS $\rightarrow f(\text{FÁ}_n) = \frac{4}{3} \cdot f(\text{DÓ}_n) = \frac{4}{3} \cdot 2^{n-1} \cdot f(\text{DÓ}_1)$
- QUINTAS $\rightarrow f(\text{SOL}_n) = \frac{3}{2} \cdot f(\text{DÓ}_n) = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} \cdot f(\text{DÓ}_1)$

2.2 A Escala de Arquitas

Arquitas (de Tarento) foi filósofo, político e matemático do século V a.C. Era seguidor de Pitágoras, portanto, um pitagórico. Pouco se tem documentado sobre ele, mas sabe-se que ele foi um político influente na região da Magna Grécia e que foi aluno e amigo de Platão, quando este deixou Atenas e viveu um tempo em Tarento. Credita-se a Arquitas a utilização de três médias nos seus estudos musicais: Aritmética, Geométrica e Harmônica¹¹. Inclusive, uma das contribuições do filósofo à Matemática e à Música foi a construção de uma escala musical baseada em médias aritméticas e harmônicas.

A propósito, a frequência da quinta nota nas duas escalas corresponde à média aritmética da primeira e da oitava:

$$f(5^{\text{a}} \text{ nota}) : M_A = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}$$

A frequência da quarta era a média harmônica entre as mesmas notas:

$$f(4^{\text{a}} \text{ nota}) : M_H = \frac{2}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

A média geométrica era usada para calcular a frequência das próximas oitavas. Tomando-se três oitavas sucessivas, a 1^a, a 8^a e a 16^a notas, a oitava central é a média geométrica das notas extremas:

¹¹A média harmônica se chamava subcontrária. Arquitas lhe deu esse nome pelo fato de tê-la usado para calcular as notas harmônicas.

$$f(1^a) : f_1 = 1$$

$$f(8^a) : f_2 = 2$$

$$f(16^a) : f_3 = ?$$

$$M_G = f_2 = 2 \rightarrow \sqrt{1 \cdot f_3} = 2 \rightarrow f_3 = 4$$

Ainda foi mais além: o quociente entre as médias aritmética e harmônica determinava o intervalo de frequência entre dois tons, o intervalo de um tom:

$$1 \text{ tom} : \frac{M_A}{M_H} = \frac{3/2}{4/3} = \frac{9}{8}$$

Dessa forma, Arquitas deu sentido às três médias na construção de sua escala musical. Mas ainda faltava calcular as outras notas da escala. E é nesse momento que ele, por assim dizer, se distancia um pouco de Pitágoras.

Sua escala, baseada em médias aritméticas e harmônicas teria algumas pequenas discrepâncias em relação à de seu mestre. A terça pitagórica correspondia a $\frac{81}{64} \approx 1,266$ da frequência da nota fundamental, todavia, para Arquitas, a terça era a média aritmética entre a primeira e a quinta:

$$f(3^a \text{ nota}) : M_A = \frac{1 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} = 1,25$$

Nesse ínterim, cabe apresentar a Série Harmônica, que é a série de frações de numerador unitário cujos denominadores são a sequência de números naturais. Mais adiante, ela servirá de base para entendermos o conceito matemático de timbre.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

É interessante ressaltar que a oitava, a quinta e a quarta, dentre outras, poderiam ser obtidas a partir de somas do inteiro com as frações que compõem a série harmônica:

$$2 = 1 + 1, \quad \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}, \quad \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}, \quad \dots$$

2.2.1 Curiosidades Sobre a Média Harmônica

A média harmônica é usada em situações que envolvem grandezas inversamente proporcionais, como velocidade e tempo, por exemplo. Um problema clássico em que ela se aplica é o problema da ida e volta com velocidades diferentes:

“Um carro faz um percurso com velocidade constante de 60 km/h. Na volta, viaja a 75 km/h. Qual a velocidade média da viagem?”

$$M_H = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{75}} = 66,\bar{6} \text{ km/h}$$

A origem da denominação Média Harmônica é devida a Arquitas. Ele assim a chamou porque o termo central da sucessão 12, 8, 6, ou seja, é a sequência segundo a qual deve estar o comprimento do acorde para manter uma tônica, a quinta e a oitava. Observe que esses números são os mesmos que representavam os pesos dos martelos do ferreiro:

$$M_H = \frac{3}{\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6}} = 8$$

2.3 A Escala Temperada

O espectro de frequências audíveis é claramente um domínio contínuo, um intervalo. Uma escala, contudo, é apenas uma amostra discreta desse espectro, isto é, um conjunto de pontos escolhidos dentro do intervalo de frequências. Muitos povos ao longo da história da humanidade construíram suas escalas musicais baseadas em certos parâmetros pré-estabelecidos. Não era uma escolha aleatória.

Até a Idade Média, o modelo matemático de escala criado por Pitágoras era o mais aceito pela comunidade musical no Ocidente, todavia havia outros. E outros estavam sendo desenvolvidos para tentar corrigir as ‘falhas’ do modelo grego. Talvez o próprio Pitágoras também tenha percebido que o intervalo entre duas notas da escala, quer dizer, entre a frequência sonora das notas, não era sempre o mesmo. Os intervalos

entre um DÓ e um RÉ, ou entre um RÉ e um MI, não eram os mesmos que os intervalos entre MI e FÁ ou entre SI e DÓ¹².

Exemplos:

$$\frac{f(\text{MI}_1)}{f(\text{RÉ}_1)} = \frac{81/64}{9/8} = \frac{9}{8} = 1,125$$

$$\frac{f(\text{FÁ}_1)}{f(\text{MI}_1)} = \frac{4/3}{81/64} = \frac{256}{243} \approx 1,0535$$

Essa pequena diferença entre alguns intervalos foi objeto de estudo por parte de músicos do ocidente por séculos, até que se entendeu que, na verdade, não havia como ajustar esse modelo de escala, era necessário pensar em outro modelo.

Uma especulação plausível é a de que, mesmo percebendo algumas discrepâncias na escala, nem Pitágoras, nem os filósofos pitagóricos poderiam ‘consertar os erros’, visto que eles só trabalhavam com números inteiros e racionais (razão de dois inteiros). Os pitagóricos não aceitavam, por assim dizer, os números irracionais, porque estes não poderiam ser escritos como razão de inteiros, porém como razão de segmentos incomensuráveis¹³ e contradiziam a base da filosofia de sua escola, a máxima de que todas as coisas no Universo poderiam ser representadas por números (inteiros!).

O Renascimento trouxe consigo novas ideias. Houve um grande avanço científico e tecnológico no período e também nas artes, em geral. Na música, em particular, havia a necessidade de se transpor melodias para outras tonalidades, o que na época não era possível, pois a escala pitagórica não favorecia tal procedimento. Com isso, uma peça composta para determinada tonalidade não poderia ser executada em outra, pois as relações entre as notas (intervalos) variavam de acordo com o tom a ser escolhido. Portanto, os intervalos entre as notas pareceriam soar ‘desafinados’. A solução encontrada para corrigir esse problema foi o temperamento da escala, isto é, a divisão equânime dos intervalos para que eles pudessem estar a uma mesma distância entre si. Esse pro-

¹²No tempo de Pitágoras, as notas musicais não tinham nome, eram representadas por letras.

¹³Segmentos incomensuráveis (par de segmentos que não são múltiplos comuns de nenhum outro segmento ou, equivalentemente, cuja razão não seja um número racional) geraram uma crise na filosofia pitagórica. Eles foram descobertos a partir da diagonal de um quadrado de lado unitário, cuja razão com o lado é $\sqrt{2}$, um número irracional

cedimento resultou naquilo que se conhece hoje como escala igualmente temperada ou, simplesmente, **escala temperada**.

O nome completo da escala temperada é: ESCALA MUSICAL DODECAFÔNICA TEMPERADA, cuja expressão dodecafônica vem do grego: *doódeka* = doze, e *fooné* = som). As sete notas da escala agora se tornariam doze, com a inclusão de cinco notas colocadas propositalmente entre algumas das sete.

Matematicamente, a escala temperada possui como principal característica o fato de que as notas estão igualmente espaçadas entre si, ou seja, os intervalos entre duas notas consecutivas são iguais. Esse temperamento foi proposto em 1691, por Andréas Werckmeister e utilizado com maestria por J. S. Bach em O Cravo¹⁴ Bem-Temperado, uma obra de caráter didático composta em dois volumes na qual o músico faz um passeio por todos os doze tons da nova escala. Toda a sua obra, e essa em especial, influenciou músicos do mundo inteiro e mudou o paradigma vigente¹⁵.

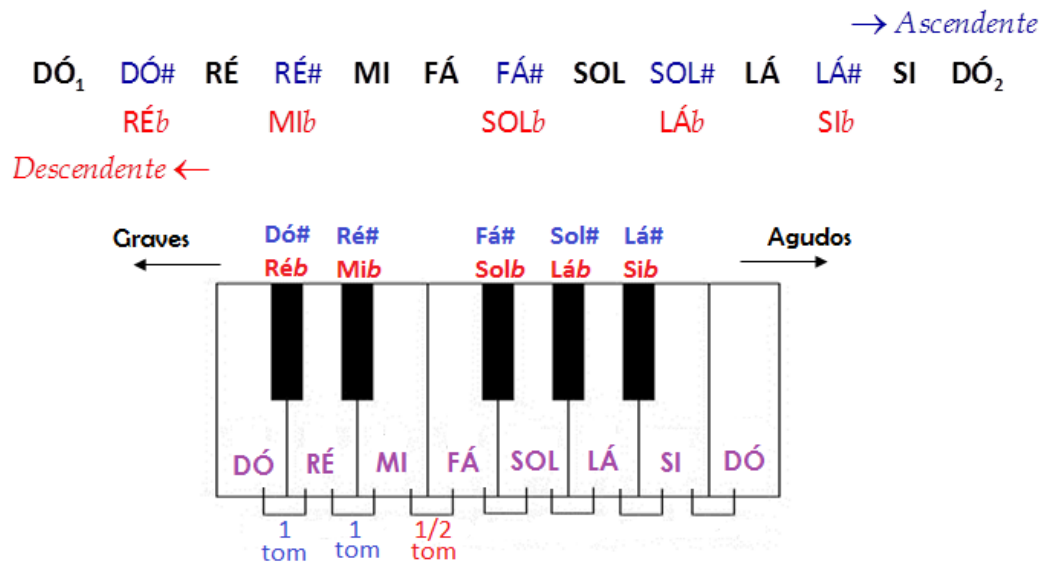
Bach, um gênio da música barroca e um entusiasta do novo temperamento, foi, por assim dizer, o grande difusor da nova escala. A partir de sua morte, o Ocidente se rende ao novo sistema de afinação e o adota como padrão. [3].

A escala temperada, então, foi criada com o intuito de sanar esse problema da diferença entre os intervalos das notas. Para tal, foram introduzidas cinco notas entre as sete notas originais da escala diatônica. Essas notas inseridas foram denominadas **acidentes musicais**. Os acidentes musicais no sentido ascendente são chamados **sustenido** (\sharp) e no sentido descendente são chamados **bemol** (\flat).

Nesta escala de um piano mostrada a seguir, pode-se ter a exata noção desse conceito de ascendente e descendente: no sentido ascendente (para a direita), a nota que fica entre o DÓ e o RÉ é o **DÓ \sharp** e quando está no sentido descendente (para a esquerda), a nota se chama **RÉ \flat** . Porém ambas têm o mesmo som. São as **notas enarmônicas**: mesmo som, nomenclaturas diferentes.

¹⁴Um instrumento de teclas, considerado o precursor do piano.

¹⁵Retirado de XIX Congresso da ANPPOM - Curitiba, Agosto/2009, DeArtes, UFPR



As 12 notas no Piano Fonte: Própria

Hoje, na escala temperada, está definido que as notas estão separadas por intervalos definidos como **semitons**. Entende-se por semitom o menor intervalo entre duas notas da escala. A partir da definição, conclui-se que o intervalo entre RÉ e MI, por exemplo, é de **1 tom (T)** e o intervalo entre MI e FÁ é de **1 semitom (ST)**.

Em linguagem matemática, dizemos que: $1 \text{ tom} = 2 \text{ semitons}$. Para que se possa entender essa relação, deve-se pensar na escala musical como uma escala logarítmica, assunto que será discutido na última seção desse capítulo.

2.3.1 Curiosidades Sobre a Escala

Deve-se ao monge beneditino Guido D'Arezzo, músico do século XI, o nome dado às notas musicais, aproveitando a primeira sílaba de cada verso de um hino cantado a São João Batista por um coral de época. Ele costumava, antes de suas apresentações em público, cantar este hino, pedindo a São João Batista que protegesse sua voz.

HINO A SÃO JOÃO	
UT QUEANT LAXIS	PARA QUE POSSAM, LIVRES,
RESONARE FIBRIS	RESSOAR NAS FIBRAS
MIRA GESTORUM	OS ADMIRÁVEIS FEITOS,
FAMULI TUORUM	OS SERVOS TEUS,
SOLVE POLLUTI	REMOVE, DO IMPURO
LABII REATUM	LÁBIO, O PECADO
SANCTE IOANNES	Ó SÃO JOÃO

Hino a São João Batista

Fonte: <http://www.linguaestrageira.pro.br>

Na ordem direta, a tradução é: “Para que os teus servos possam cantar livremente os feitos admiráveis, remove o pecado do lábio impuro, oh São João”.

As notas musicais, então, primeiramente eram: **UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI**. Mais tarde, para facilitar o solfejo das notas, a primeira nota foi trocada por **DO**, pelo fato de ser mais eufônica. Concretizou-se, então, a escala que conhecemos hoje.

Mas antes dessa nomenclatura, que é latina, outros povos, como os gregos e principalmente os anglo-saxões, denominavam os sons pelas letras do alfabeto. Os graus da escala eram A, B, C, etc. Por razões históricas não muito precisas, o som representado pela letra A tinha a frequência aproximada do som da nota **LÁ**, proposto pelo monge italiano. Logo, a relação entre as duas nomenclaturas perdura até hoje, naquilo que se denominam **cifras**.

C	D	E	F	G	A	B
DÓ	RE	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI

2.4 Progressões

No Ensino Básico, estudam-se basicamente dois tipos de progressões: a progressão aritmética e a progressão geométrica. Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior **somado** a uma razão constante **r**.

exemplos

- $1, 5, 9, 13, 17, \dots \rightarrow r = 4$
- $-2, 3, 8, 13, 18, \dots \rightarrow r = 5$
- $4, 2, 0, -2, -4, \dots \rightarrow r = -2$

As duas primeiras são chamadas progressões aritméticas crescentes e a última, decrescente. Uma PA é crescente quando a razão é positiva ($r > 0$) e decrescente quando a razão é negativa ($r < 0$). Ainda existe a PA constante, de razão nula ($r = 0$). Além

disso, os termos de uma progressão são comumente indexados a partir do primeiro, da seguinte forma: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Fazendo uma análise da PA do 1º exemplo, temos:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 5 = 1 + 4 = a_1 + r$$

$$a_3 = 9 = 1 + 2 \cdot 4 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = 13 = 1 + 3 \cdot 4 = a_1 + 3r$$

⋮

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

A partir desse raciocínio simples, pode-se generalizar a maneira de calcular qualquer termo de uma PA. Em Matemática, a generalização é feita a partir de fórmulas. Então, a fórmula do termo geral da PA é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Caso se queira calcular o termo de número 37 da PA, a_{37} , sem recorrer a cálculos enfadonhos, basta utilizar a fórmula:

$$a_{37} = a_1 + (37 - 1) \cdot r \quad \rightarrow \quad a_{37} = 1 + 36 \cdot 4 = 145$$

Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior **multiplicado** por uma razão constante, denominada q .

Exemplos:

- $1, 5, 25, 125, \dots \rightarrow q = 5$

- $2, 6, 18, 54, \dots \rightarrow q = 3$

- $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow q = \frac{1}{2}$

- $3, -6, 12, -24, \dots \rightarrow q = -2$

As duas primeiras são chamadas progressões geométricas crescentes e a terceira, decrescente. Uma PG é crescente quando a razão é maior que 1 ($q > 1$) e é decrescente quando $0 < q < 1$. O último exemplo mostra uma PG alternada, em que a razão é negativa ($q < 0$). Ainda existe a PG estacionária, em que a razão é unitária.

Fazendo uma análise da PG do 2º exemplo, temos:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 6 = 2 \cdot 3 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = 18 = 2 \cdot 3^2 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = 54 = 2 \cdot 3^3 = a_1 \cdot q^3$$

⋮

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

A partir desse raciocínio, podemos generalizar a maneira de calcular qualquer termo de uma PG. Então, a fórmula do termo geral da PG é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Um problema comum sobre o assunto em livros de Ensino Médio é o que trata da interpolação. Em se tratando de PG, diz-se interpolação de meios geométricos. Interpolar, em linguagem corrente, seria ‘encaixar’. Então, por exemplo, interpolar dois meios geométricos entre 5 e 40, é o mesmo que intercalar dois números entre esses, de tal forma que os quatro estejam em PG. Em linguagem matemática seria: $(5, a_2, a_3, 40)$.

Utilizando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$40 = 5 \cdot q^3$$

$$q^3 = 8 \rightarrow q = 2$$

Logo, a PG completa seria: $(5, 10, 20, 40)$

Voltando à escala temperada, que agora deveria ter 12 sons e o intervalo entre

esses, por sua vez, deveria ser o mesmo, chega-se a um problema matemático interessante: como encontrar 12 sons, igualmente espaçados, entre os valores 1 e 2, que seriam os valores de referência estipulados entre duas oitavas consecutivas? O problema foi resolvido no século XVII, utilizando-se o conceito de Progressão Geométrica (PG).

Entendido o problema da interpolação, pode-se dizer que o temperamento nada mais é do que a interpolação de 11 meios geométricos entre 1 e 2. Portanto, a partir da fórmula do termo geral da PG, fica simples determinar a relação numérica entre os sons.

$$\text{PG } (1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, 2)$$

Deve-se perceber que, na PG acima, a oitava, agora, exerce o papel de 13° som (13° termo da PG), ou seja, o 1° da próxima sequência de 12 frequências igualmente espaçadas, denominadas **graus** da escala.

DÓ ₁	DÓ#	RÉ	RÉ#	MI	FÁ	FÁ#	SOL	SOL#	LÁ	LÁ#	SI	DÓ ₂
1	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	f ₉	f ₁₀	f ₁₁	f ₁₂	2
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°

Definida a PG de 13 termos, deve-se, portanto, calcular sua razão a partir da fórmula do termo geral. Logo,

$$\begin{aligned} f_n &= f_1 \cdot q^{n-1} \\ f_{13} &= f_1 \cdot q^{13-1} \\ 2 &= 1 \cdot q^{12} \\ q^{12} &= 2 \\ q &= \sqrt[12]{2} \end{aligned}$$

Agora, finalmente, a PG pode ser definida:

$$\text{PG } \left(1, 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}}, 2^{\frac{4}{12}}, 2^{\frac{5}{12}}, 2^{\frac{6}{12}}, 2^{\frac{7}{12}}, 2^{\frac{8}{12}}, 2^{\frac{9}{12}}, 2^{\frac{10}{12}}, 2^{\frac{11}{12}}, 2 \right)$$

Também se pode escrever a razão da PG de outras formas:

$$2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} \approx 1,05946 = 105,946\%$$

Escrevendo-o em forma percentual, pode-se ter uma melhor compreensão desse número e do que ele representa nesse contexto. A frequência de cada nota é igual à anterior multiplicada aproximadamente por 105,95%, ou melhor, cada frequência é 5,95% maior que a anterior. Pode-se utilizar o valor aproximado de 6% para facilitar os cálculos.

2.4.1 Curiosidade sobre a PA

Cada termo da PA, conforme já foi explicitado, é igual ao anterior somado à razão r . Então, poder-se-ia dizer que a razão é a diferença entre um termo e seu antecessor. Dessa relação, surge uma importante propriedade da PA:

“Em qualquer PA de três elementos, o termo central é igual à média aritmética dos extremos.”

Em linguagem matemática, temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \quad \therefore \quad 2a_2 = a_1 + a_3 \quad \therefore \quad a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

2.4.2 Curiosidades sobre a PG

A letra q , usada para denominar a razão da PG, significa quociente. Isto se deve ao fato de que a PG tem uma propriedade fundamental: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots$. A razão é calculada a partir do quociente entre um termo qualquer e o seu anterior.

Também se pode utilizar o termo progressão geométrica, por exemplo, para entender a média geométrica. Sabe-se que a Média Geométrica entre dois números a e b é raiz quadrada do produto dos números, ou melhor: $M_G = \sqrt{a \cdot b}$.

Uma das propriedades da PG é a seguinte:

“Em qualquer PG de três elementos, o termo central é igual à média geométrica dos extremos.”

Utilizando a equação da razão, temos:

$$\begin{aligned}\frac{a_2}{a_1} &= \frac{a_3}{a_2} \\ (a_2)^2 &= a_1 \cdot a_3 \\ a_2 &= \sqrt{a_1 \cdot a_3}\end{aligned}$$

2.5 Comparativo entre as Escalas

A primeira tabela faz um comparativo relativo entre as escalas, tomando a primeira nota com valor de uma unidade. Poder-se-á perceber as pequenas discrepâncias entre a escala pitagórica e a escala temperada.

NOTA	PITAGÓRICA	TEMPERADA
DÓ ₁	1	1
DÓ ₁ #	2187/2048 = 1,068	1,05946
RÉ ₁	9/8 = 1,125	1,12245
RÉ ₁ #	32/27 = 1,185	1,1892
MI ₁	81/64 = 1,2656	1,2599
FÁ ₁	4/3 = 1,3333	1,3348
FÁ ₁ #	729/512 = 1,424	1,4142
SOL ₁	3/2 = 1,5	1,49825
SOL ₁ #	6561/4096 = 1,6	1,5873
LÁ ₁	27/16 = 1,6875	1,6817
LÁ ₁ #	16/9 = 1,777	1,7817
SI ₁	243/128 = 1,8984	1,8877
DÓ ₂	2	2

Frequências Relativas Fonte: Própria

Note que, na Escala Temperada, pela própria definição de PG, cada nota, a partir da 2ª, é igual à anterior multiplicada pelo valor aproximado de 1,05946. Há, então, um aumento de 5,95% na frequência em relação à nota anterior. Por sua vez, a escala pitagórica segue as proporções por ele descobertas na experiência do monocórdio.

A Escala Pitagórica é formada pelas frações calculadas na seção 2.1, ocasião em que apresentamos o ciclo das quintas. Para deixar mais claro como se obteve, por exemplo, a fração $\frac{2187}{2048}$, correspondente ao DÓ₁♯ (ou RÉ₁♭), apresentamos o ciclo completo de quintas¹⁶:

$$\mathbf{DÓ_1 - SOL_1 - RÉ_2 - LÁ_2 - MI_3 - SI_3 - FÁ_4\sharp - DÓ_5\sharp - SOL_5\sharp - RÉ_6\sharp - LÁ_6\sharp - FÁ_7 - DÓ_8}$$

Em termos de frequência, a equação das quintas pode ser escrita da seguinte maneira: $Q_m = \left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot DÓ_1$

Analisando o ciclo das quintas, conclui-se que, DÓ₅♯, que pertence à 5ª oitava, corresponde à 7ª quinta. Dessa forma, e tomando DÓ₁ de valor 1, temos:

$$Q_m = \left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot DÓ_1$$

$$DÓ_5\sharp = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot 1 = \frac{2187}{128}$$

Conforme mostrado na seção 2.1, para transpor a nota DÓ₅♯ à 1ª oitava, ou melhor, para que ela pertença ao intervalo [1, 2], é necessário utilizar a fórmula:

$$DÓ_n\sharp = 2^{n-1} \cdot DÓ_1\sharp$$

$$DÓ_1\sharp = \frac{2187}{128} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2187}{2048}$$

Cabe ressaltar que o valor de uma unidade atribuído à nota DÓ₁ é apenas um referencial. De acordo com o padrão de frequências adotado atualmente, essa nota, a primeira das teclas de um piano, tem a frequência de 32,7 Hz. Mas a nota padrão de afinação de grande parte dos instrumentos musicais (também usada como referência de afinação numa orquestra) é na nota LÁ₄, cuja frequência é de 440 Hz, que, no piano,

¹⁶Pode-se notar que a decisão de se inserir 5 notas entre as 7 notas originais da Escala Diatônica não foi arbitrária, ao contrário, essas novas notas surgiram naturalmente no ciclo das quintas.

cujo teclado abrange oito oitavas, está logo após a nota $DÓ_4$, o $DÓ$ central. No violão, a quinta corda solta, a penúltima de baixo para cima, corresponde ao $LÁ_2 = 110$ Hz e é usada como referência de afinação.

Partindo-se do $LÁ_4$, podem-se calcular as frequências de cada uma das notas imediatamente anteriores ou posteriores, dividindo-se ou multiplicando-se por 1,05946, respectivamente. Por exemplo: a nota $LÁ_4\sharp$ terá a frequência de $440 \times 1,05946 = 466,16 \approx 466$ Hz e a nota $LÁ_4\flat$ ($SOL_4\sharp$) terá a frequência de $440 \div 1,05946 = 415,30 \approx 415$ Hz. Todos os valores da tabela abaixo foram aproximados.

NOTA	PITAGÓRICA	TEMPERADA
$DÓ_4$	$f = 260,7$ Hz	$f = 261,6$ Hz
$DÓ_4\sharp$	$f = 278,4$ Hz	$f = 277$ Hz
$RÉ_4$	$f = 293$ Hz	$f = 294$ Hz
$RÉ_4\sharp$	$f = 309$ Hz	$f = 311$ Hz
MI_4	$f = 330$ Hz	$f = 330$ Hz
$FÁ_4$	$f = 347,7$ Hz	$f = 349$ Hz
$FÁ_4\sharp$	$f = 371$ Hz	$f = 370$ Hz
SOL_4	$f = 391$ Hz	$f = 392$ Hz
$SOL_4\sharp$	$f = 417$ Hz	$f = 415$ Hz
$LÁ_4$	$f = 440$ Hz	$f = 440$ Hz
$LÁ_4\sharp$	$f = 463,5$ Hz	$f = 466$ Hz
SI_4	$f = 495$ Hz	$f = 494$ Hz
$DÓ_5$	$f = 521,4$ Hz	$f = 523$ Hz

Frequências Absolutas Fonte: Própria

2.6 A Escala Temperada e os Logaritmos

A escala temperada pode ser interpretada como uma escala logarítmica de base 2. Prestando-se atenção aos expoentes da progressão geométrica associada à escala, isso fica mais evidente:

$$2^0, 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}}, \dots, 2^{\frac{11}{12}}, 2^1$$

Os logaritmos, quando foram criados, tinham como principal objetivo a simplificação dos cálculos. Quando não havia as poderosas máquinas de calcular que se tem hoje, os cálculos eram demasiado trabalhosos e suscetíveis a erros. Portanto a tábua de logaritmos foi de grande utilidade, uma vez que, com ela, era possível reduzir multiplicações a adições e divisões a subtrações.

Então, aplicando-se a função logarítmica aos termos da PG, temos:

$$\log_2 2^0 = 0 ; \log_2 2^{\frac{1}{12}} = \frac{1}{12} , \dots , \log_2 2^{\frac{11}{12}} = \frac{11}{12} , \log_2 2^1 = 1$$

Sob esse ponto de vista, fica fácil dar sentido matemático aos conceitos de *tom* e *semitom*. Nessa escala logarítmica, que é uma PA, um semitom é a razão da PA, ou melhor, equivale à distância de $\frac{1}{12}$ entre as notas e um tom, $\frac{2}{12}$. Uma pequena demonstração matemática desse fato seria:

Se

$$I = \frac{f(\text{RÉ}_1)}{f(\text{DÓ}_1)},$$

teremos

$$\log_2(I) = \log_2 \left(\frac{f(\text{RÉ}_1)}{f(\text{DÓ}_1)} \right) = \log_2 f(\text{RÉ}_1) - \log_2 f(\text{DÓ}_1).$$

De maneira geral, se o intervalo entre duas notas consecutivas X e Y , for I , então $\log_2 I = \log_2 f(Y) - \log_2 f(X)$. Com isso, você pode explicar a questão do tom e do semitom. Se o intervalo entre X e Y é de um semitom e o de Y e Z também o é. Então,

$$\frac{f(Z)}{f(Y)} = I_s = \frac{f(Y)}{f(X)},$$

logo

$$\frac{f(Z)}{f(X)} = \frac{\frac{f(Z)}{f(Y)}}{\frac{f(Y)}{f(X)}} = \frac{f(Z)}{f(Y)} \cdot \frac{f(Y)}{f(X)} = I_s^2,$$

e então

$$\log_2 \left(\frac{f(Z)}{f(X)} \right) = \log_2 I_s^2 = 2 \log_2 I_s$$

Podemos definir I_t , que chamaremos ‘tom’, de forma que $\log_2 I_t = 2 \log_2 I_s$, e assim, $\log_2 \left(\frac{f(Z)}{f(X)} \right) = I_t$. Com isso, pode-se perceber que o intervalo entre duas notas

separadas por dois intervalos de um semitom é um tom. Assim, quando se escreve “1 tom = 2 semitons”, se quer dizer que, se I_t é o intervalo relativo a 1 tom, e I_s o de um semitom, então:

$$\log_2 I_t = 2 \log_2 I_s$$

Por fim, apresentamos uma tabela com os principais intervalos da escala temperada.

Intervalos¹⁷:

Unísono (1 ^a):	0
Segunda menor (2 ^a m):	1 semitom
Segunda Maior (2 ^a M):	2 semitons = 1 tom
Terceira menor (3 ^a m):	3 semitons = 1,5 tons
Terceira Maior (3 ^a M):	4 semitons = 2 tons
Quarta Justa (4 ^a J):	5 semitons = 2,5 tons
Quarta Aumentada (4 ^a A):	6 semitons = 3 tons
Quinta Justa (5 ^a J):	7 semitons = 3,5 tons
Sexta menor (6 ^a m):	8 semitons = 4 tons
Sexta Maior (6 ^a M):	9 semitons = 4,5 tons
Sétima menor (7 ^a m):	10 semitons = 5 tons
Sétima Maior (7 ^a M):	11 semitons = 5,5 tons
Oitava Justa (8 ^a J):	12 semitons = 6 tons

¹⁷Retirado de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Intervalo>

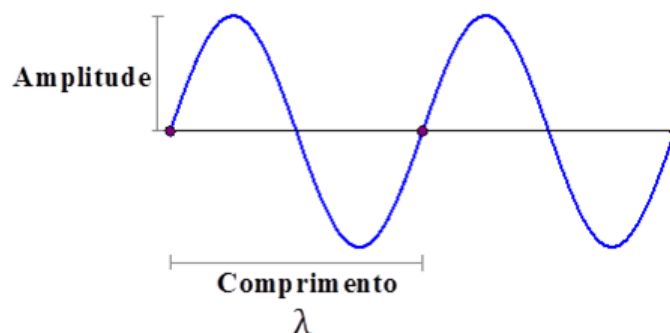
3 A Física do Som

Uma onda, em Física, é uma perturbação gerada num meio qualquer. Por exemplo: quando atiramos uma pedra num lago, esta causa uma perturbação na água (meio), formando ondas. Essas se propagam pela superfície do lago.[9]

Há basicamente dois tipos de onda: a mecânica e a eletromagnética. A primeira necessita de um meio material para se propagar; a segunda, não. O Som é uma onda mecânica, e, por isso, carece de um meio material para se propagar. O meio mais comum é o ar, mas pode ser um líquido, um gás ou um sólido. A corda de um violão, por exemplo, ao vibrar, causa uma perturbação no ar, fazendo vibrar as moléculas presentes no ar e justamente essas vibrações é que geram o efeito sonoro, a sensação auditiva, o som propriamente dito.[9]

3.1 As Ondas Sonoras

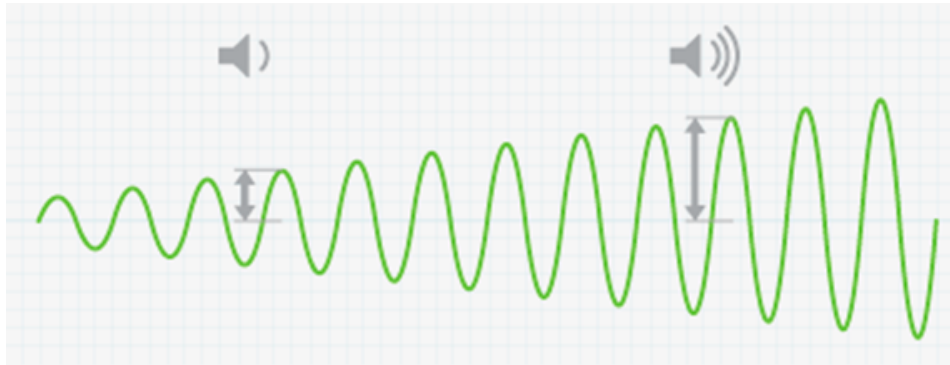
O som se propaga como uma onda, por isso é chamado onda sonora. Cada onda sonora é única pois tem algumas características próprias, tais como: velocidade, frequência, amplitude e comprimento.



Onda Sonora Fonte: Própria

1. **Amplitude:** pode ser entendida como sendo a altura da onda, a distância entre o eixo da onda até a crista (pico). Quanto maior for a amplitude, maior será a quantidade (volume) de energia transportada. Em linguagem corrente, a amplitude

de uma onda sonora determina a intensidade, o **volume** do som. A intensidade do som é normalmente medida em decibéis (dB).



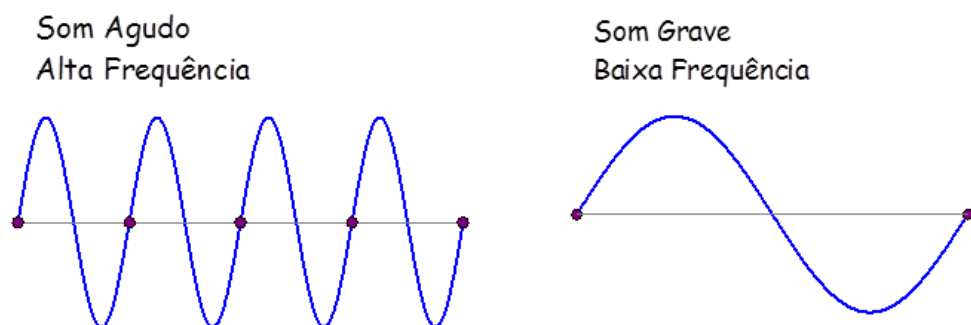
Amplitudes Sonoras Fonte: www.apple.com

2. **Frequência:** é o número de oscilações da onda num período de tempo. É comum expressar a frequência f em ciclos por segundo, cuja unidade de medida é o hertz (Hz). Uma frequência de 60 Hz, por exemplo, indica que a onda completa 60 ciclos em 1 segundo. Estima-se que o ouvido humano consiga perceber frequências que variam de 20 a 20.000 Hz. É a chamada faixa audível. Por essa razão, a faixa audível compreende aproximadamente 10 oitavas. Em linguagem matemática, se uma nota de frequência $2f$ corresponde à oitava de uma nota de frequência f , então:

$$f = 20 \rightarrow f_n = f_1 \cdot 2^n \rightarrow 20 \cdot 2^n = 20000$$

$$2^n = 1000 \rightarrow n \approx 10$$

A frequência é o parâmetro responsável pelos sons graves e agudos. É a altura do som. Todavia, em linguagem coloquial, altura e intensidade são empregadas de maneira incorreta. Um som alto (baixo) é um som agudo (grave) e um som forte (fraco) é um som intenso, com muito (pouco) volume.



Frequência Alta × Baixa Fonte: Própria

3. **Período:** é o tempo necessário para se completar uma onda, um ciclo. O período T é medido em segundos. **Obs:** O período e a frequência, por definição, são grandezas inversas. Isto é: $f = \frac{1}{T}$.
4. **Comprimento:** é o tamanho de uma onda, a distância percorrida pelo som durante o período de vibração (de uma corda, por exemplo). Pode ser medido também de crista a crista ou de vale a vale. A crista é a parte alta da onda; o vale, a parte baixa. É representado pela letra grega lambda (λ).
5. **Velocidade:** todas as ondas possuem uma velocidade, que sempre é determinada pela distância percorrida, sobre o tempo gasto. Os livros de Física de Ensino Médio adotam, em geral, o valor aproximado de 340 m/s para a velocidade do som no ar. De maneira genérica, a equação da velocidade constante de uma onda é:

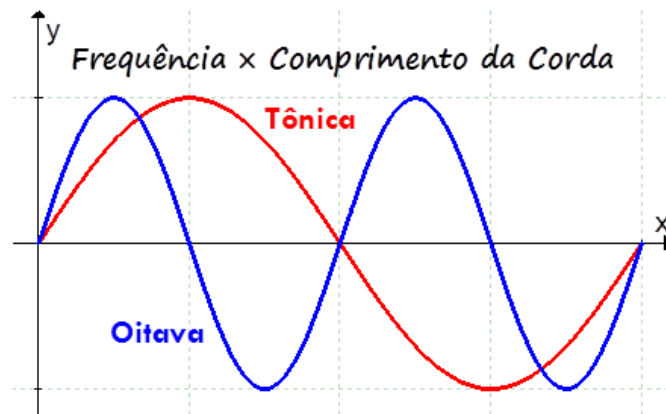
$$v = \frac{\text{distancia}}{\text{tempo}} = \frac{\lambda}{T}$$

A frequência da onda é o número de ciclos que ela completa por segundo. A velocidade, é claro, está associada à rapidez com que ela se propaga, ou melhor, quantos centímetros ou quantos metros ela percorre na unidade de tempo. Essas grandezas têm uma relação matemática entre si: a velocidade é diretamente proporcional ao comprimento e à frequência da onda:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{1}{T} \quad \therefore \quad v = \lambda \cdot f$$

A partir dessa simples equação matemática, também se pode deduzir uma propriedade importante da onda, que o próprio Pitágoras já havia descoberto em seus experimentos:

“A frequência é inversamente proporcional ao comprimento da onda.”



Frequências Fonte: Própria

Além desses fatores que diferenciam as ondas sonoras (ou qualquer outro tipo de onda), há também uma característica bastante peculiar: o **timbre**. O timbre é a qualidade própria do som que nos permite distinguir uma mesma nota tocada ao piano ou num violão, por exemplo. Alguns autores o chamam 'A Cor do Som'.

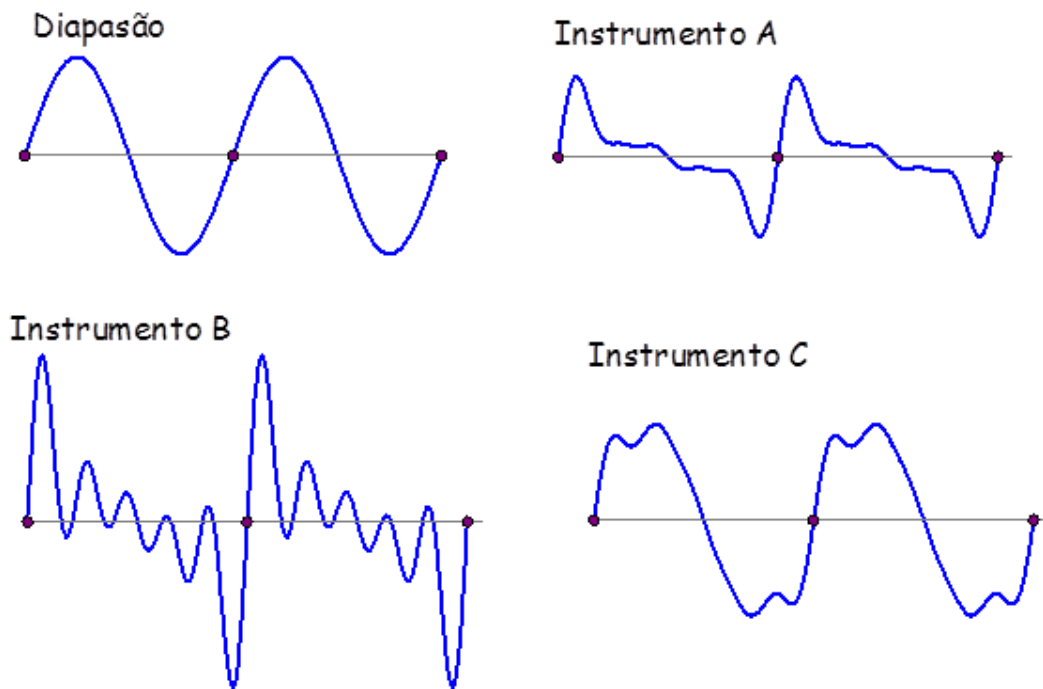
Com o advento da tecnologia, dos computadores e, principalmente, do osciloscópio (aparelho eletrônico que mede formas de onda), foi possível entender melhor as variáveis que interferem no timbre. Por exemplo, hoje se sabe que formas arredondadas de onda produzem timbres mais suaves e formas pontiagudas de onda produzem timbres mais estridentes.

Para exemplificar essas diferenças, vamos analisar algumas formas de onda emitidas de diferentes fontes sonoras, a começar pelo diapasão. O diapasão é um pequeno instrumento metálico utilizado para afinar instrumentos musicais, uma vez que emite um som puro, com uma frequência bem definida, correspondente uma determinada nota musical.



Diapasão Fonte: <http://www.brasilecola.com/fisica/acustica.htm>

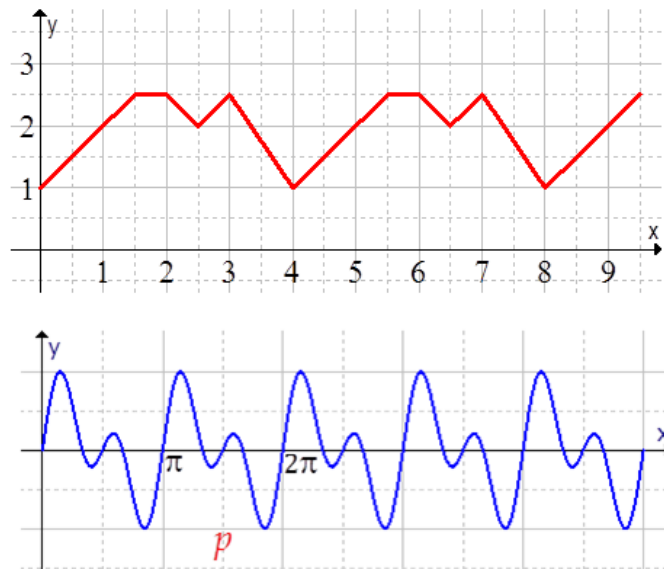
Nos modelos abaixo, fizemos uma comparação entre quatro fontes sonoras diferentes emitindo o mesmo som (mesma frequência). O formato da onda é o que as distingue.



Fontes Sonoras Fonte: Própria

4 Funções Periódicas

Uma Função Periódica é aquela cuja representação gráfica se repete em intervalos regulares, denominados **períodos**. Essa propriedade, inerente a algumas funções, é muito útil para que se possam compreender muitos fenômenos que ocorrem na natureza. Os movimentos da Terra, as ondas do mar, a vibração da corda do violão e até os batimentos cardíacos são fenômenos periódicos. A própria escala temperada é uma função periódica de período 12 unidades. Pode-se dizer que, graças ao estudo das funções periódicas e, em particular, das funções seno e cosseno, foi possível a compreensão e, às vezes, até a manipulação de muitos fenômenos da natureza. Observando-se os gráficos, nota-se uma característica comum aos dois: existe apenas um ‘pedaço’, que se repete em intervalos regulares.



Funções Periódicas Fonte: Própria

Em Matemática, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é classificada como periódica, se existe um número p , tal que $f(x) = f(x + p)$; $\forall x, (x + p) \in \mathbb{R}$. Do 1º gráfico, conclui-se que $f(0) = f(0 + 4) = f(0 + 8) = \dots = f(0 + np)$. Mas ainda: $f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = \dots = f(x + np)$. Se $f(0) = f(0 + 4)$, então, o período da função é 4.

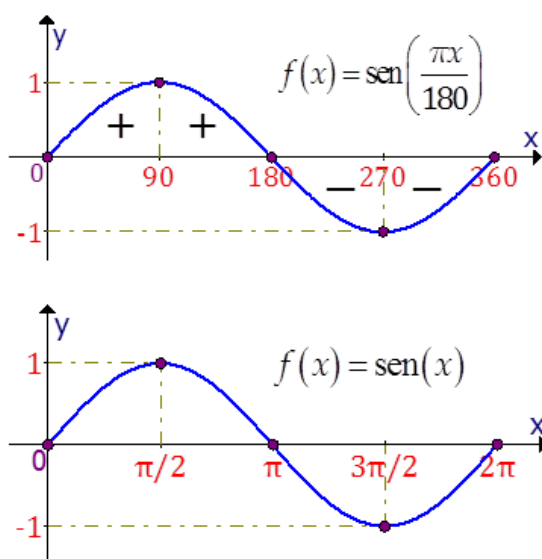
O 2º gráfico representa uma composição de funções trigonométricas (*seno*) – objeto de nosso estudo nas próximas seções – cujo período é π . As funções periódicas

mais comuns e aquelas que são normalmente ensinadas no Ensino Médio são as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente. Nesse trabalho, pretendem-se analisar as duas primeiras e tomar a função seno como referência para a representação gráfica dos sons.

4.1 Funções Trigonômétricas

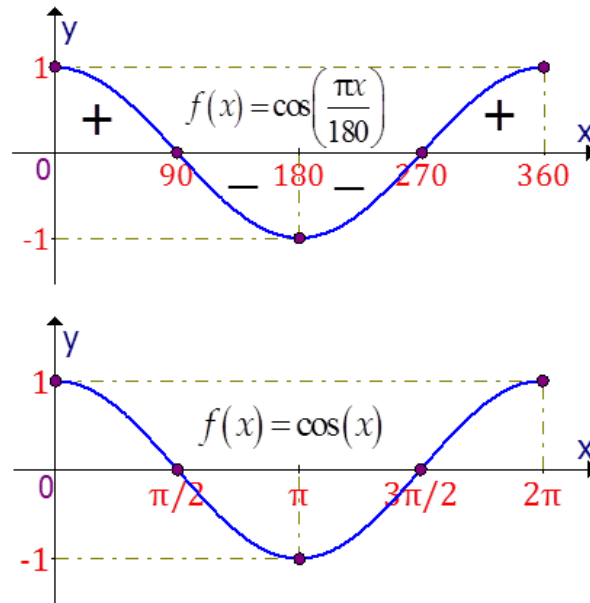
Nesta seção, faremos a representação das principais funções trigonométricas: *seno* e *cosseno*. O Domínio dessas funções é o conjunto dos números reais, porém, nos gráficos abaixo, esboçamos apenas o intervalo $[0, 2\pi]$, que corresponde à primeira volta no ciclo trigonométrico, isto é, o período das funções. A Imagem das mesmas é o intervalo $[-1, 1]$.

Para fins didáticos, pode-se fazer uma representação gráfica das funções seno e cosseno, em graus e radianos¹, da seguinte forma:



Função Seno Fonte: Própria

¹Há que se tomar cuidado ao visualizar os gráficos, pois eles podem dar uma falsa impressão de que representam a mesma função. Na verdade, a função seno, $f(x) = \text{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, é única. A função cuja escala do eixo x está em graus seria uma função composta do tipo $g(x) = f\left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right)$, de período diferente do período de $f(x)$. A mesma observação se aplica à função *cosseno*.



Função Cosseno Fonte: Própria

A curva que representa a função seno é denominada **senóide** (ou onda senoidal), pois tem o formato semelhante ao de uma onda.

4.2 Transformações no Plano

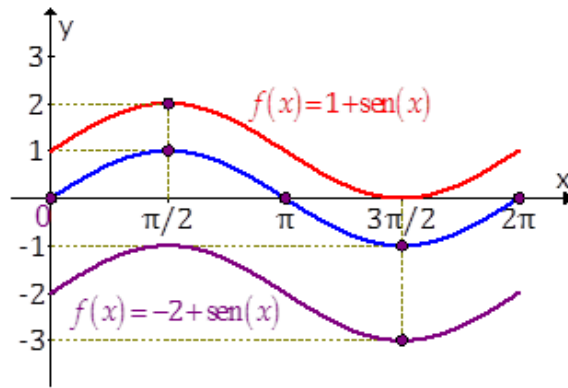
Considerando uma função escrita genericamente na seguinte forma²:

$$f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$$

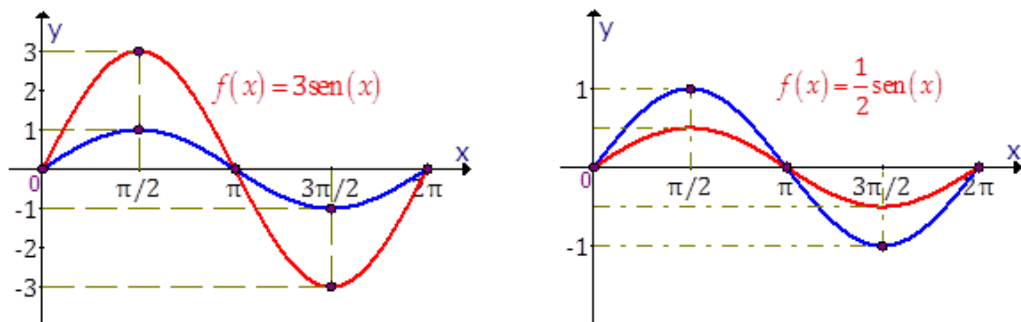
Vamos analisar os parâmetros a , b , c e d e o que ocorre com o gráfico da função seno à medida que fazemos-los variar.

- 1. Parâmetro a :** Promove uma translação, um deslocamento vertical (para cima ou para baixo) no gráfico. Obviamente, se houver uma alteração no sentido vertical do gráfico, haverá uma alteração na imagem da função.

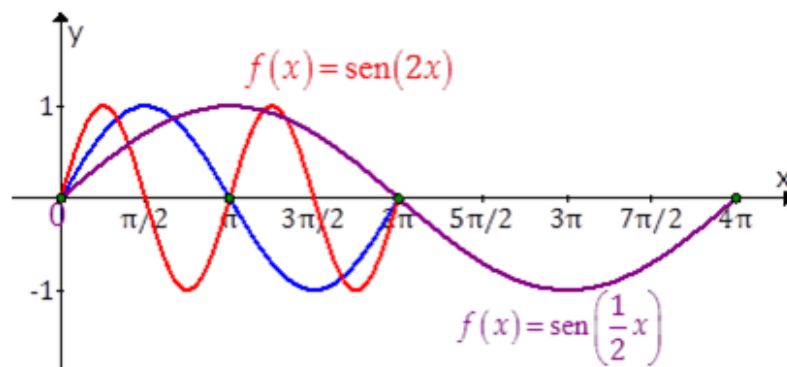
²Escolhemos uma função seno para estudar as transformações. Porém, as mesmas são aplicáveis a uma função cosseno.



- 2. Parâmetro b :** Está associado à amplitude da função. Ele promove uma ampliação (ou redução) vertical no gráfico. Também haverá alteração na imagem da função.

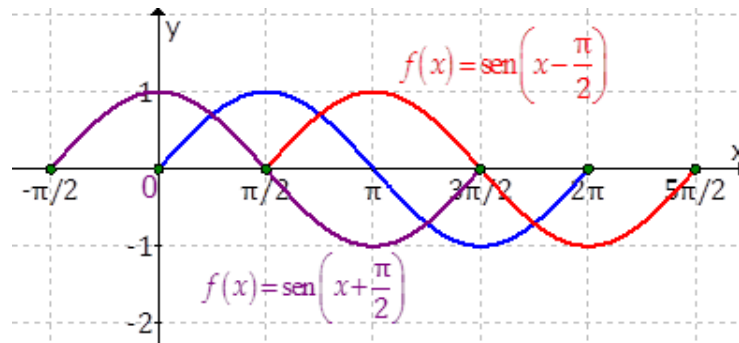


- 3. Parâmetro c :** Está associado ao período da função. Ele promove uma ampliação (ou redução) horizontal no gráfico. Nesse caso, o parâmetro que sofre alteração é o período da função.



Tomando-se o intervalo $[0, 2\pi]$, a função $\text{sen}(2x)$ tem seu período reduzido à metade. Cabem duas ondas no intervalo que cabia uma, apenas. No caso da função $\text{sen}(0,5x)$ ocorre o processo inverso, o período dobra e a frequência é reduzida à metade. O período da função $\text{sen}(x)$ é 2π . O período de uma função da forma $a + b\text{sen}(cx + d)$ é calculado pela relação $\frac{2\pi}{c}$.

4. **Parâmetro d :** promove um deslocamento horizontal no gráfico. Nesse caso, a onda não mais começa em $x = 0$, ao contrário, começa em outro ponto do plano, que dependerá da raiz do polinômio (em x) que está entre parêntesis. Em Física, esse novo ponto de partida da função é chamado **fase**. A defasagem é medida em graus ou radianos.



4.2.1 Análise de uma Função Trigonométrica

Nesta seção, exemplificamos a construção do gráfico de uma função trigonométrica qualquer, identificando-se os coeficientes e o papel de cada um. Por exemplo:

$$f(x) = 6 + 9\text{sen}\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) \quad \text{ou} \quad f(x) = 6 + 9\text{sen}\left[3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$a = 6 \rightarrow$ eixo central da onda

$b = 9 \rightarrow$ amplitude: $\uparrow +9$ $\downarrow -9$

$c = 3 \rightarrow$ relativo ao período: $p = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{3}$

$d = -\frac{\pi}{2} \rightarrow$ relativo à fase: $3x - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$



$$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

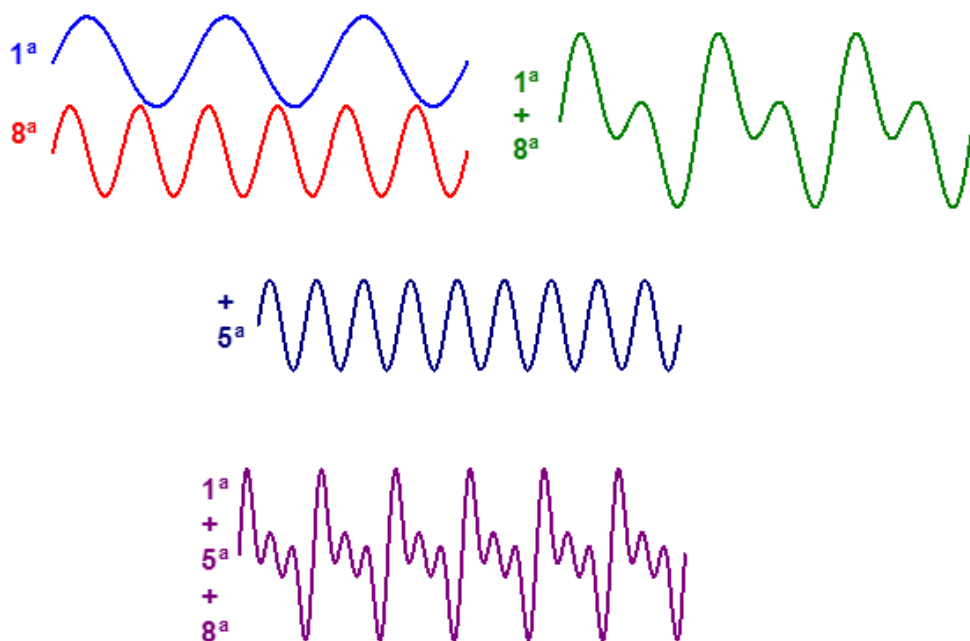
OBS: No gráfico foram esboçados dois períodos, duas ondas completas.

4.3 Séries Harmônicas

Toda nota musical, ao ser tocada num instrumento qualquer, fornece não apenas um som puro, mas uma série de frequências sonoras que, soando em sequência, produzem a característica que nos permite identificar a fonte sonora: o timbre. Essa série de sons é chamada série harmônica. Quando se ouve uma nota, numa determinada frequência, na verdade, ouve-se também uma série de outras frequências secundárias mais agudas que a principal, que não podem ser percebidas isoladamente. Esse conjunto de sons são ‘interpretados’ por nossos ouvidos como sendo o timbre que caracteriza o instrumento musical (a fonte).

Os harmônicos da série soam com intensidades diferentes quando oriundos de instrumentos diferentes. E é exatamente a importância que cada harmônico terá na série o fator preponderante na identificação da fonte que emitiu o som.

Nenhum instrumento musical emite um som puro. O diapasão é o dispositivo que fornece um som mais próximo do som puro, hipotético.

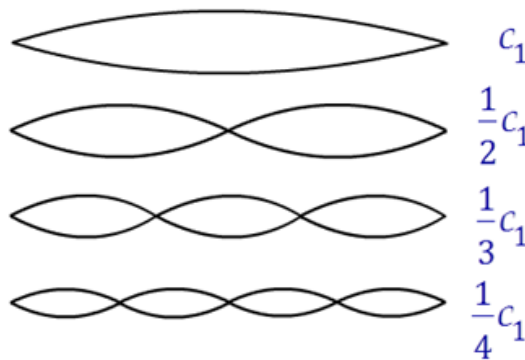


Som Puro × Som Composto Fonte: Própria

4.3.1 Harmônicos, Vibrações e Frequências

A vibração principal e as secundárias de uma corda de violão, por exemplo, ocorrem em partes iguais aos termos da série harmônica, vista na seção 2.2. Aliás, ela recebeu esse nome justamente em razão dessas vibrações.

Quando uma corda é tocada, ela vibra primeiramente em sua extensão total e depois efetua uma série de vibrações posteriores não mais na corda inteira, mas na sua metade, na terça parte, e assim por diante.



As Vibrações de uma Corda Fonte: Própria

Conforme mostrado anteriormente, o comprimento da corda é inversamente proporcional à frequência do som emitido. Portanto, em termos de frequência, a série harmônica obedecerá ao seguinte padrão: $f_1, 2f_1, 3f_1, \dots$. Pode-se, então, representar a série harmônica de uma nota musical a partir de uma função periódica cuja lei é uma soma de funções seno, da seguinte maneira:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \text{sen}(2\pi n f_1 \cdot x)$$

$$f(x) = k_1 \text{sen}(2\pi n f_1 \cdot x) + k_2 \text{sen}(2\pi n f_2 \cdot x) + k_3 \text{sen}(2\pi n f_3 \cdot x) + \dots$$

Na expressão acima, $f_n = n \cdot f_1$ representa a frequência de cada harmônico, a partir da fundamental e k_n representa a intensidade (amplitude) dos harmônicos.

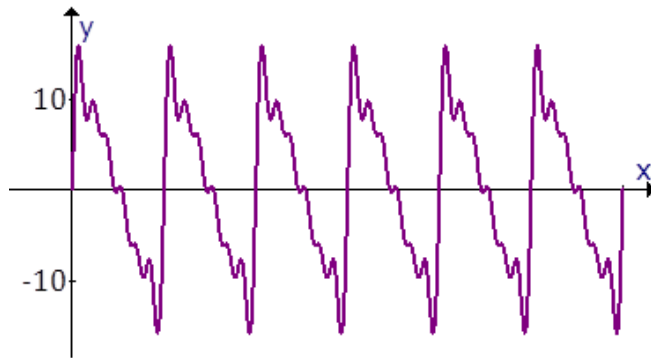
A sequência k_n é decrescente, isto é, os harmônicos são cada vez mais fracos, menos intensos; ao mesmo tempo em que a sequência f_n é uma PA crescente de razão unitária. Cabe ressaltar que os coeficientes k_n constituem um fator preponderante na percepção da fonte sonora (o timbre).

Por fim, vamos construir exemplos de séries harmônicas para uma nota musical tocada em dois instrumentos distintos com a mesma intensidade k_1 .

Suponhamos a nota SOL₁ de frequência aproximada 100 Hz. As alturas dos harmônicos superiores serão: 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz, 400 Hz, etc, onde 200 Hz, 400 Hz, 800 Hz, são as frequências das oitavas subsequentes, visto que as oitavas estão em PG de razão 2. Os coeficientes k_n foram escolhidos aleatoriamente, de modo que estejam decrescendo a cada harmônico.

Instrumento A

$$f(x) = 10\text{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + 5\text{sen}(2\pi \cdot 200 \cdot x) + 4\text{sen}(2\pi \cdot 300 \cdot x) + \dots$$



Instrumento B

$$f(x) = 10\text{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + 2\text{sen}(2\pi \cdot 200 \cdot x) + 1\text{sen}(2\pi \cdot 300 \cdot x) + \dots$$



O primeiro instrumento poderia ser um violino; por ser rico em harmônicos superiores, apresenta um som mais marcante, estridente, que é caracterizado por formas de onda pontiagudas.

O segundo, uma flauta; por ser pobre em harmônicos superiores, apresenta um som mais brando, suave, que é caracterizado por formas de onda arredondadas.

Outra observação a respeito das duas fontes sonoras é que a primeira, além de emitir um som mais estridente, também emite som mais forte, com maior amplitude, como se pode perceber no primeiro gráfico.

4.3.2 Mas como se pode ter certeza de que os dois gráficos representam a mesma nota, ou melhor, a mesma frequência, uma vez que são diferentes entre si?

Por definição, período e frequência são grandezas inversas. As duas funções apresentadas são claramente periódicas. Portanto, se provarmos que as duas têm o mesmo período, então se prova que elas têm a mesma frequência e, por isso, representam o mesmo som, a mesma nota.

Seja $f(x)$ uma função periódica de período T . Isto é:

$$\forall x \in D(f), \exists (x + nT) \in D(f) \text{ tal que}$$

$$f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = \dots = f(x + nT); n \in \mathbb{Z}$$

Queremos mostrar que:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i f(ix) \text{ também é periódica de período } T$$

De fato:

$$g(x + T) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i f(i(x + T)) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i f(ix + iT) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i f(ix) = g(x)$$

Logo, $g(x)$ é periódica, com período submúltiplo de T .

Por sua vez, frequência e período são grandezas inversas, isto é:

$$f = \frac{1}{T} \longleftrightarrow T = \frac{1}{f}$$

Portanto, para uma função do tipo $f(x) = \text{sen}(2\pi f_1 \cdot x)$, podemos escrever $g(x)$ da seguinte maneira:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} k_i \text{sen}(2\pi i f_1 \cdot x)$$

Temos que f é periódica de período $T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{2\pi f_1} = \frac{1}{f_1}$

Logo, como queríamos demonstrar, $g(x)$, periódica de período T , terá frequência f_1 , que é a frequência da nota tocada nos dois instrumentos acima.

5 Proposta de Atividade

Neste capítulo, pretendemos introduzir os conceitos de Progressão Geométrica e de Funções Periódicas – fundamentais para a compreensão dos fenômenos relacionados à Música – a partir de um contexto diferente daquele em que normalmente são abordados esses conteúdos.

Consideramos que aprender Matemática através da Música é bastante atrativo, pois ela está presente em nosso cotidiano. É difícil encontrar uma pessoa que não goste de música, principalmente na faixa etária do nosso público-alvo.

A proposta é de uma aula expositiva, cujas atividades (num total de 10 problemas) podem ser realizadas em grupos de 3 ou 4 alunos. Porém, pela extensão do conteúdo, pode ser trabalhada em várias aulas, ou até mesmo numa palestra ou numa oficina de Matemática e Música.

Ao final dos problemas, sempre que considerarmos conveniente, faremos algumas observações pontuais, visando sempre o objetivo maior, que é a compreensão do conceito matemático relacionado por parte do aluno.

5.1 Breve História da Música

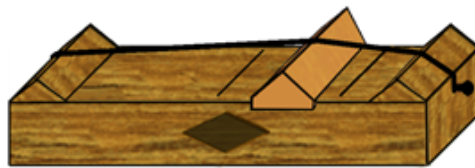
Esta seção apresenta um breve relato histórico que deve ser utilizado pelo professor como motivação para introduzir a aula. Os fatos apresentados não obedecem à ordem cronológica, mas foram descritos de uma maneira que entendemos ser a mais fácil de serem assimilados. Convém ressaltar que a primeira escala, tomada como base para a atual, foi descoberta por Pitágoras, um nome muito conhecido pelos alunos.

Por volta do ano 1000 d.C., na Itália, viveu um monge chamado Guido D'Arezzo. Ele gostava muito de cantar louvores a Deus e, dentre os cantos que entoava, havia um em especial: a Oração a São João (Sancte Ioannes, em latim). O monge pegou as iniciais de cada verso da oração para dar nome às notas musicais que conhecemos: DÓ, RÉ, MI, FÁ, SOL, LÁ, SI. É claro que as notas já existiam, apenas não tinham nomes. Outros povos, como os gregos, e mais tarde os anglo-saxões, usavam letras para representar as

notas. São as famosas cifras A, B, C, D, E, F, G, que nada mais são do que as sete notas musicais em outra ordem. Veja:

C	D	E	F	G	A	B
DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI

E por falar nos gregos, havia um cujo nome é bastante conhecido: Pitágoras. Talvez muita gente não saiba, mas ele foi o criador da primeira escala musical de que se tem notícia. A música sempre exerceu um grande fascínio em todas as civilizações, mas os filósofos gregos foram os primeiros a estudá-la de maneira, digamos, científica. Aliás, esse era o objetivo principal dos filósofos: entender os fenômenos que ocorriam no Universo e buscar uma explicação racional para os fatos. E, com o intuito de entender os sons que existem na natureza e de que maneira se poderia combiná-los (fazer uma música), Pitágoras construiu um instrumento rudimentar de uma única corda: o monocórdio.



Um Monocórdio

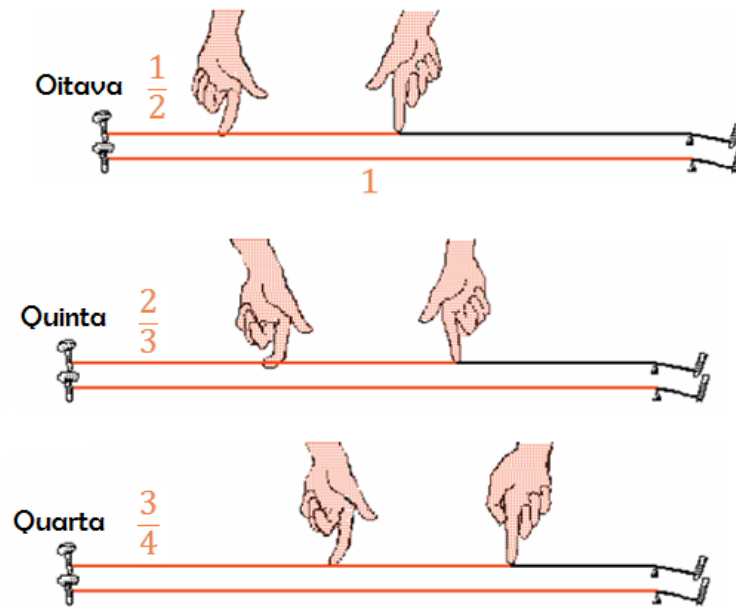
Com o monocórdio em mãos, começou a fazer alguns experimentos, algumas tentativas. Tocou a corda solta e memorizou o som. Depois tocou a corda na metade, depois na terça parte, etc. Logo percebeu que alguns sons combinavam e outros não; alguns soavam agradáveis aos ouvidos e outros eram dissonantes.

5.1.1 Mas quais sons eram consonantes, que soavam bem, e quais eram dissonantes, desagradáveis aos ouvidos?

O filósofo percebeu que, independente do tamanho inicial da corda, havia três sons que combinavam bem com o som da corda solta, e um desses, em particular, era muito especial.

A corda, quando tocada na metade de seu comprimento, produzia um som mais agudo que o da corda inteira, mas que o ouvido humano entende como sendo o

mesmo som, equivalente ao primeiro. É aquele que conhecemos hoje como OITAVA. Os outros dois sons consoantes descobertos por Pitágoras foram aqueles que se ouve quando tocamos a corda na altura de $\frac{2}{3}$ e na altura de $\frac{3}{4}$ do seu comprimento.



Monocórdio

Hoje sabemos que esses dois sons são, respectivamente, os mesmos que a quinta e quarta notas da escala de sete notas, contudo Pitágoras ainda não sabia disso. De qualquer forma, estava formada a primeira escala musical de quatro sons, que serviu de base para se chegar às outras notas. Esses conceitos podem parecer um tanto abstratos ainda, mas, mesmo um leigo em Música é capaz de comprovar essas experiências, da seguinte maneira:

- Tome um violão, escolha uma corda e meça-a com uma régua.
Toque-a e ‘sinta’ a sonoridade.
- Agora tome dois terços da corda, prenda-a e toque novamente.
O segundo som parecerá, digamos, concordante com o primeiro.
- Por fim, escolha uma fração distinta da anterior. Por exemplo, três sétimos.
Toque a corda. Este último não parecerá consoante com o primeiro, mas sim dissonante.

Com o tempo, por razões desconhecidas, a escala de quatro sons evoluiu para uma escala de sete sons, parecida com a que se conhece atualmente. Os gregos, motivados provavelmente pelo seu lado místico, supunham que os astros emitiam um som; portanto, como eram sete os planetas conhecidos na época, pode ser que eles tenham feito essa associação e criado uma escala de sete sons.

5.1.2 Mas como foram encontradas as outras notas da escala?

Não se sabe ao certo como ele descobriu as outras notas, até porque o mestre passava seus ensinamentos aos discípulos por via oral, não deixou nada escrito. Então, vamos tentar reproduzir uma maneira que possivelmente Pitágoras pode ter utilizado para encontrar outros sons. Primeiramente ele descobriu que, para qualquer tamanho de corda (ou pedaço dela), se dividisse a corda na metade ou na quarta parte do tamanho, encontraria sons equivalentes ao primeiro, porém mais agudos (oitava superiores). É fácil concluir que, se tocasse a mesma corda em tamanho dobrado, também encontraria um som equivalente, porém mais grave (uma oitava abaixo).

Por exemplo:

Imagine um monocórdio cuja corda emite uma nota que vamos chamar $DÓ_1$. Se tocarmos a corda na metade soará o $DÓ_2$, mais agudo, uma oitava acima. Ele já sabia que no intervalo entre as duas notas $DÓ$ havia outros sons.

$DÓ_1$	$RÉ_1$	MI	$FÁ$	SOL	$LÁ$	SI	$DÓ_2$	$RÉ_2$	MI	$FÁ$	SOL	$LÁ$	SI	$DÓ_3$	$RÉ \dots$
1		$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$								$\frac{1}{4}$	

O próximo passo foi tomar aquelas duas notas cujo comprimento eram $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ da corda solta e transformá-las em referência. A ideia era a seguinte: começando em 1, as razões $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ soavam bem; então, ele supôs que, se partisse de $\frac{2}{3}$, poderia calcular $\frac{2}{3}$ de $\frac{2}{3}$ que também soaria bem. Foi o que ele fez. E deu certo! Veja os cálculos que ele deve ter feito:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{ (oitava)}$$

Bom, sabemos das aulas de Matemática que $\frac{1}{4} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$. Isto significa que $\frac{4}{9}$ estava na 2ª oitava, depois do DÓ₂. E, para encaixar a nota dentro da 1ª oitava, ele deveria fazer o processo inverso, ou seja, dobrar o tamanho. Logo, $2 \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$. Essa fração representava mais uma nota da escala.

Continuando o processo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \times \frac{8}{9} &= \frac{16}{27} \\ \frac{2}{3} \times \frac{16}{27} &= \frac{32}{81} (\cdot 2) = \frac{64}{81} \\ \frac{2}{3} \times \frac{64}{81} &= \frac{128}{243} \end{aligned}$$

Agora, a escala já tinha 7 notas, mais a oitava. Para saber a posição de cada nota, e associá-las a um nome, bastava por as frações $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{64}{81}$ e $\frac{128}{243}$ em ordem decrescente.

Problema 1: Uma questão puramente aritmética! Você é capaz de colocar as frações acima em ordem decrescente e encaixá-las na sequência de notas abaixo? Uma dica já foi dada: a razão $\frac{2}{3}$ representa a quinta nota da escala.

DÓ₁	RÉ₁	MI₁	FÁ₁	SOL₁	LÁ₁	SI₁	DÓ₂
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
				$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$

Problema 2:

Além disso, você conseguiria descobrir (calcular) a fração da corda correspondente ao RÉ₃, por exemplo? E ao LÁ₄? É possível fazer uma generalização para encontrar qualquer nota em qualquer oitava? A Matemática é muito útil nessas horas!

Observe que aqui já fazemos o primeiro movimento com objetivo de que o aluno perceba a sequência de comprimentos de corda: X_n, X_{n+1}, \dots , como uma PG de razão $\frac{1}{2}$.

Problema 3:

O procedimento que Pitágoras realizou para encontrar as sete notas é conhecido como CICLO DAS QUINTAS, isto é, ele encontrou a quinta da 1ª nota e as quintas das quintas até encontrar as sete notas. Supondo o comprimento da corda igual a 1 e que ele representa a nota DÓ₁, complete a sequência de quintas abaixo:

$$DÓ_1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$$

Aqui, deve-se realizar apenas uma contagem. Tomando a 1ª como DÓ, a 5ª nota da sequência é SOL. Tomando SOL como a 1ª nota, a 5ª é ..., e assim por diante.

5.2 Um ' defeito ' na Escala

Se você respondeu corretamente ao problema 3, encontrou a seguinte sequência: DÓ₁, SOL₁, RÉ₂, LÁ₂, MI₃ e SI₃. O FÁ não estava presente no ciclo das quintas. Mas se ele é o último que faltava na sequência, ele deve ser a quinta nota em relação a SI. Mais ou menos. Recorramos, então, à Matemática para tirar essa dúvida:

– Se o FÁ é a quinta de SI, então o comprimento relativo à nota SI, multiplicado por $\frac{2}{3}$ deve ser igual ao comprimento relativo à nota FÁ, que é $\frac{3}{4}$.

$$\frac{2}{3} \text{ de SI} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{128}{243} = \frac{256}{729}$$

Como a fração $\frac{256}{729}$ está na 2ª oitava, então, multipliquemo-la por 2 para encaixá-la na 1ª oitava: $2 \times \frac{256}{729} = \frac{512}{729} \approx 0,70$. É um valor próximo de $\frac{3}{4} = 0,75$, porém diferente. Dava para imaginar que existiria uma nota entre FÁ e SOL, uma vez que: $0,67 = \frac{2}{3} < \frac{512}{729} < \frac{3}{4} = 0,75$.

Esse pequeno problema na escala – que não ocorria só com o FÁ – gerava uma dificuldade na hora de se fazer uma coisa chamada transposição de tom. Uma melodia simples, num tom de DÓ, por exemplo, não poderia ser tocada (ou cantada) em RÉ, pois, em se fazendo a transposição da sequência de notas, a sonoridade era completamente diferente.

Observe esse exemplo:

- Melodia em DÓ \rightarrow dó – mi – sol
- Melodia em RÉ \rightarrow ré – fá – lá

É fácil comprovar que a sonoridade é diferente, mesmo sem ser músico. Basta calcular as frações relativas a cada nota e você perceberá que os intervalos entre elas são diferentes entre si. Mas eles deveriam ser os mesmos!

- Melodia em DÓ \rightarrow DÓ = 1 ; MI = $\frac{64}{81}$; SOL = $\frac{2}{3}$
- Melodia em RÉ \rightarrow RÉ = $\frac{8}{9}$; FÁ = $\frac{3}{4}$; LÁ = $\frac{27}{16}$

Calculando a razão entre os intervalos entre MI e DÓ e depois entre RÉ e FÁ, percebemos que eles são diferentes. Por isso, as músicas não podiam ser transpostas. Em termos de comprimento de corda, temos:

$$\frac{c(\text{MI})}{c(\text{DÓ})} = \frac{64/81}{1} = \frac{64}{81} \quad ; \quad \frac{c(\text{FÁ})}{c(\text{RÉ})} = \frac{3/4}{8/9} = \frac{27}{32}$$

Para resolver a questão, algumas soluções foram propostas, mas uma, em particular, teve melhor aceitação por parte da comunidade musical. Era o século XVII, época do Iluminismo, período fértil em que as artes, a ciência e também a Matemática se desenvolveram a passos largos.

5.3 Conceito de Frequência

Antes de passarmos à construção da nova escala, vamos falar sobre o conceito de frequência. A frequência é a característica do som que o classifica em agudo ou grave. Frequências altas geram sons mais agudos, estridentes; as baixas geram sons mais graves. O ouvido humano detecta frequências no intervalo 20–20.000 Hz. Para se ter uma ideia melhor desse intervalo, citamos o piano, um instrumento que possui 8 oitavas, cuja frequência das notas varia de 32,7 Hz (DÓ mais grave) a 4186 Hz (DÓ mais agudo).

Bom, voltando à Escala Pitagórica, o que ocorria quando se tocava uma fração qualquer da corda do monocórdio? Uma nota mais aguda era emitida, ou melhor, uma

nota de frequência mais alta. Isso significa que a relação entre o comprimento da corda e a frequência é de proporcionalidade inversa. Reduzindo-se o tamanho da corda, aumenta-se a frequência. Essa descoberta de Pitágoras foi útil para criar uma relação entre as alturas dos sons. Se, para encontrar uma nota na próxima oitava reduzia-se a nota à metade, então, a frequência da mesma seria o dobro da anterior. O esquema abaixo exemplifica a relação entre as frequências:

INTERVALOS DE FREQUÊNCIA							
DÓ ₁	RÉ ₁	MI ₁	FÁ ₁	SOL ₁	LÁ ₁	SI ₁	DÓ ₂
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
f	$\frac{9f}{8}$	$\frac{81f}{64}$	$\frac{4f}{3}$	$\frac{3f}{2}$	$\frac{27f}{16}$	$\frac{243f}{128}$	2f

Intervalos de Frequências

Problema 4: Partindo de uma nota DÓ cuja frequência é de 65 Hz, calcule:

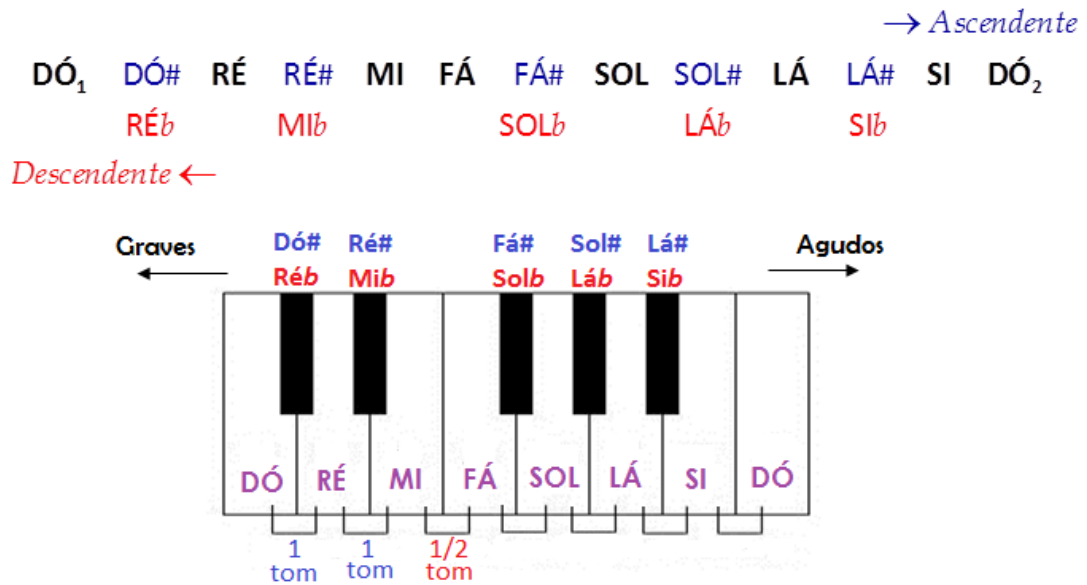
- A) As frequências de DÓ₂ e DÓ₃.
- B) As frequências de SOL₁ e de MI₂.
- C) No item anterior A, você calculou as frequências de duas oitavas superiores. Agora, encontre uma fórmula para generalizar o cálculo da frequência da oitava em relação a qualquer nota dada.

Este é outro movimento com objetivo de que o aluno perceba que a sequência de oitavas: X_n, X_{n+1}, \dots , em termos de frequências, é uma PG de razão 2. O professor deve chamar a atenção para isso.

5.4 A Escala Temperada

Conforme já dissemos, o problema da escala pitagórica estava nas distâncias entre as notas, que não eram iguais. Por isso, era interessante colocar algumas notas a mais na escala para dar conta desses espaços desiguais. Foi o que ocorreu: entre o FÁ e o SOL, por exemplo, foi inserida uma nota chamada FÁ \sharp – FÁ sustenido.

Observe como ficou a escala:



As 12 notas no Piano

Essas cinco notas preenchem perfeitamente os espaços. Agora, portanto, a escala teria doze notas, em vez de sete. A oitava passaria a ser a 13^a nota da sequência. Mas ela continuaria sendo chamada oitava. As novas notas são denominadas **acidentes** musicais e a mesma nota poderia ter duas nomenclaturas: na ‘ida’ – dó sustenido e na ‘volta’ – ré bemol. São as notas enarmônicas: mesmo som, nomes diferentes.

Essa nova divisão da escala foi denominada **temperamento**, ou temperamento igual, uma vez que as notas deveriam estar a igual distância umas das outras. Alguns autores usam o termo escala cromática para a escala de 12 tons. Duas perguntas cabíveis a essa altura são:

5.4.1 Afinal, como foi feita essa divisão e qual seria a distância entre as notas?

Se tomarmos os valores 1 e 2 como referência para as frequências dos extremos de uma oitava, podemos calcular os valores relativos às notas intercaladas entre 1 e 2. Imagine uma sequência de 13 termos na qual você conhece apenas o primeiro e o último e sabe que a razão multiplicativa entre eles deve ser constante. Nesse caso, o problema pode ser esboçado da seguinte maneira:

DÓ ₁	DÓ#	RÉ	RÉ#	MI	FÁ	FÁ#	SOL	SOL#	LÁ	LÁ#	SI	DÓ ₂
1	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇	f ₈	f ₉	f ₁₀	f ₁₁	f ₁₂	2
1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°	13°

O professor deve chamar a atenção para o fato de que, em Matemática, quando temos um problema grande, que parece complexo, tentamos compará-lo com um modelo menor, mais simples. Só depois de entendido o problema simples, é que partimos para a generalização.

Problema 5:

Uma questão comum sobre o assunto em livros de Ensino Médio é o que trata da interpolação. Interpoliar, em linguagem corrente, seria ‘encaixar’. Então, por exemplo, interpoliar dois meios entre 5 e 40, é o mesmo que intercalar dois números entre esses, de tal forma que a razão (quociente) entre cada termo e seu anterior seja a mesma. Em linguagem matemática seria: $(5, x, y, 40)$.

- A) Calcule x e y .
- B) Calcule o 5° e o 6° termos.
- C) Denominando os termos da sequência a_1, a_2, a_3, \dots , encontre uma fórmula para generalizar o problema, isto é, para calcular o termo a_n .

Este seria o ‘último passo’ para chegar à PG. Vale a pena dedicar um tempo à notação matemática dos índices, comumente utilizada em progressões, assim como em outros assuntos.

Retornando ao problema da escala dodecafônica, agora se pode dizer que o temperamento nada mais é do que a interpolação de 11 termos (denominados meios geométricos) entre 1 e 2. Entendido isso, fica simples determinar a relação numérica entre os sons.

$$(1, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, 2)$$

Utilizando o mesmo raciocínio do problema anterior, fixamos $f_1 = 1$ e $f_{13} = 2$. Depois basta calcular a constante multiplicativa e descobrir os outros termos da sequência.

$$\begin{aligned}
 f_n &= f_1 \cdot q^{n-1} \\
 f_{13} &= f_1 \cdot q^{13-1} \\
 2 &= 1 \cdot q^{12} \\
 q^{12} &= 2 \\
 q &= \sqrt[12]{2}
 \end{aligned}$$

Agora, finalmente, a sequência pode ser definida:

$$(2^0, 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{2}{12}}, 2^{\frac{3}{12}}, \dots, 2^{\frac{11}{12}}, 2^1)$$

A razão da PG também pode ser escrita de outras formas:

$$2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} \approx 1,05946 = 105,946\%$$

Escrevendo-o em forma percentual, pode-se ter uma melhor compreensão desse número e do que ele representa nesse contexto. A frequência de cada nota é igual à anterior multiplicada aproximadamente por 105,95%, ou melhor, cada frequência é 5,95% maior que a anterior. Pode-se utilizar o valor aproximado de 6% para facilitar os cálculos.

Problema 6:

Se você entendeu o processo, fica fácil concluir por que as casas do violão vão ficando mais estreitas, à medida que se avança no braço. Isso se deve ao fato de que a frequência e o comprimento da corda são inversamente proporcionais: aumenta a frequência, diminui o comprimento. Veja a figura:



Braço do Violão

A) Supondo um violão cuja primeira casa tem 3,6 cm de largura, qual a largura da 2ª casa? E da 5ª casa?

B) Encontre uma fórmula para calcular a largura de uma casa qualquer de um violão. Denomine $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n$ a largura das casas.

OBS: Note que os fabricantes de violões devem saber Matemática!

O professor deve trabalhar o conceito de grandezas inversas. Isso é importante para que o aluno perceba que existem sequências crescentes e decrescentes. Inclusive ele já as calculou em problemas anteriores. O comprimento da 2ª casa seria $3,6 \div 1,06$ e assim por diante.

5.5 Progressão Geométrica

A sequência de 12 notas (frequências) devidamente calculadas no problema da escala cromática (ou dodecafônica) constitui um exemplo de problema que remete a um conceito matemático importante: a progressão geométrica. Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma razão constante, denominada q .

Exemplos:

$$\begin{aligned} 1, 5, 25, 125, \dots &\rightarrow q = 5 \\ 2, 6, 18, 54, \dots &\rightarrow q = 3 \\ 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots &\rightarrow q = \frac{1}{2} \\ 3, -6, 12, -24, \dots &\rightarrow q = -2 \end{aligned}$$

As duas primeiras são chamadas progressões geométricas crescentes e a terceira, decrescente. Uma PG é crescente quando a razão é maior que 1 ($q > 1$) e é decrescente quando $0 < q < 1$. Nos tópicos anteriores pudemos observar esses dois tipos de progressão: a PG das frequências é claramente uma PG crescente; a dos comprimentos das cordas, decrescente. O último exemplo mostra uma PG alternada, em que a razão é negativa ($q < 0$). Ainda existe a PG estacionária, em que a razão é unitária.

Problema 7:

A figura abaixo mostra um violão. A 5ª corda, de baixo para cima, deve ser

afinada em LÁ, cuja frequência é 110 Hz. A partir dela, afinam-se as outras cordas.



Violão

As notas do violão, de baixo para cima, são MI, SI, SOL, RÉ, LÁ e MI.

O esquema abaixo mostra a posição das três últimas cordas (mais graves) do violão, numa sequência de oitavas. Lembre-se que a gama de frequências audíveis compreende 10 oitavas (0 a 9), portanto nessa sequência, a 5ª corda corresponde ao LÁ₂.

6 ^a					5 ^a					4 ^a	
MI ₂	FÁ	FÁ#	SOL	SOL#	LÁ ₂	LÁ#	SI	DÓ	DÓ#	RÉ ₃	RÉ# ...
?					110					?	

A partir da razão da PG calculada no problema do temperamento da escala, calcule a frequência das notas das cordas do violão tomando, é claro, a 5ª corda – LÁ 110 Hz – como referência.

Entendemos que esse é o problema-chave do assunto, pois aqui o aluno já tomou posse do conceito formal de PG e também já sabe trabalhar com a notação característica. Para os amantes do violão, os que tocam ou querem aprender, é um exercício bastante interessante.

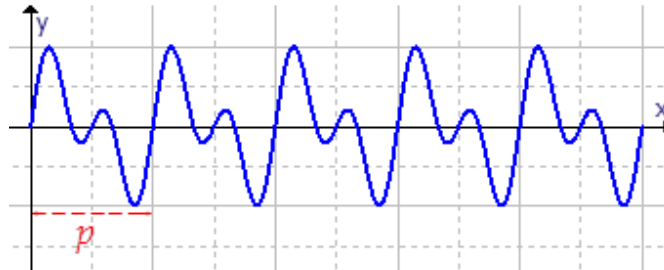
5.6 Conceito de Timbre

A palavra timbre é utilizada, por exemplo, quando nos referimos à qualidade da voz de uma pessoa. É comum dizermos: aquele cantor tem um timbre de voz bonito. Mas o que é timbre? O que determina o timbre de uma voz ou de um instrumento musical?

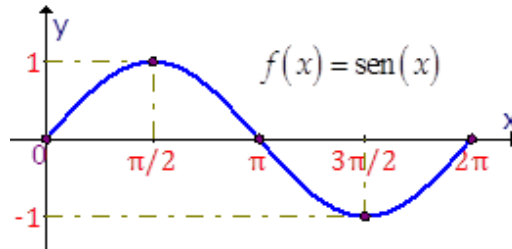
O timbre é a característica do som que nos permite identificar a fonte sonora. É uma espécie de identidade do som. Mesmo um leigo em música é capaz de distinguir o

som oriundo de uma guitarra ou de um piano, por exemplo. Mas o que pouca gente sabe é que existem alguns conceitos matemáticos por trás disso, como funções e seus gráficos.

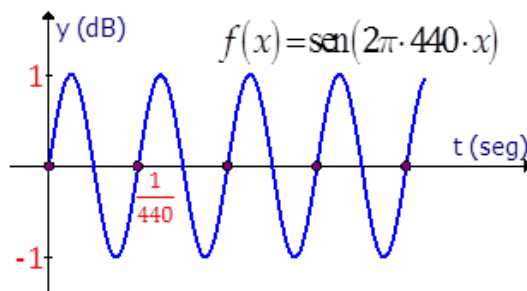
As funções periódicas são aquelas cujo gráfico se repete em intervalos regulares denominados períodos, conforme mostrado no exemplo abaixo:



Uma onda sonora pode ser representada por uma função periódica. Existem várias funções com essa característica, porém as mais estudadas no Ensino Médio são as funções trigonométricas seno e cosseno. Na verdade o som é representado não por uma função seno (ou cosseno), mas por uma soma infinita dessas. O gráfico da função seno, de período 2π , está representado abaixo:



Teoricamente, um som puro, simples, pode ser representado por uma função seno. A nota LÁ 440 Hz, com amplitude (volume) 1 dB, tem o seguinte formato:



A frequência de 440 Hz significa que ela completa 440 ciclos (períodos) no intervalo de 1 segundo. Isso é o mesmo que dizer que o período da onda é de apenas $\frac{1}{440}$ s, uma vez que período e frequência são grandezas naturalmente inversas.

Porém nenhuma fonte sonora emite um som puro. O que ela emite é um som composto por vários sons simples, o que os físicos chamam superposição de sons e os matemáticos poderiam chamar simplesmente soma de senos.

Problema 8: Utilizando o programa *Graph*, esboce o gráfico das seguintes funções:

A) $f(x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(2x)$

B) $f(x) = \text{sen}(x) + \text{sen}(2x) + \text{sen}(3x)$

C) Definindo a função $f(x) = \text{sen}(x)$ como sendo a representação de uma nota musical, o que seria a função $f(x) = \text{sen}(2x)$ em relação a essa nota? E a função $f(x) = \text{sen}(3x)$?

Dica: Para que o eixo x fique em múltiplos de π , no menu Editar Eixos você deve por a Unidade da marca e a Unidade da grade ' $\pi/2$ '. Depois selecione a opção 'mostrar como múltiplos de π '.

Neste problema, propomos uma composição de ondas a partir da soma de funções seno. Definimos $f(x) = \text{sen}(x)$ como sendo a tônica e, obviamente, $f(x) = \text{sen}(2x)$ será a oitava, pois tem o dobro da frequência. A parte mais interessante fica por conta da função $f(x) = \text{sen}(3x)$: o que ela representa? O intervalo de uma oitava é $[1, 2]$, portanto essa 3ª função (3ª nota) deve ser transposta ao intervalo citado.

Problema 9: Utilizando o programa *Graph*, esboce o gráfico das seguintes funções:

A) $f(x) = \text{sen}(x)$ e $f(x) = 2\text{sen}(x)$

B) Os gráficos representam a mesma nota? Explique o que você entendeu.

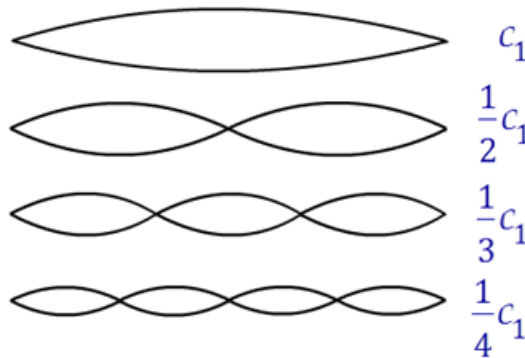
C) Por último esboce o gráfico da função $f(x) = x\text{sen}(x)$, para $x > 0$. O que você pode concluir?

Dica: Para esboçar o gráfico no programa, digite $x * \text{sin}(x)$ e especifique o intervalo de $x = [0, 40]$ e o de $y = [-40, 40]$.

Neste problema, propomos uma análise simples do fenômeno da intensidade do som. Definimos $\text{sen}(x)$ como sendo uma nota qualquer e, obviamente, a função $2\text{sen}(x)$ representará a mesma nota com o dobro de intensidade (volume). A parte interessante fica por conta da função $f(x) = x\text{sen}(x)$, que pode ser interpretada como sendo a representação de um som cujo volume está sendo aumentado indefinidamente.

5.7 Séries Harmônicas

Na seção anterior, vimos que nenhum instrumento emite uma nota pura, mas uma sucessão de notas (mais agudas que a primeira) gerando um som composto. Mas essa sucessão não é aleatória! Quando uma corda de violão é tocada, ela vibra primeiramente em sua extensão total e depois efetua uma série de vibrações posteriores não mais na corda inteira, mas na sua metade, na terça parte, e assim por diante, conforme mostrado na figura:



As Vibrações de uma Corda Fonte: Própria

As vibrações posteriores da corda são chamadas harmônicos superiores e a sequência de frações é denominada Série Harmônica e está representada abaixo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Conforme mostrado anteriormente, o comprimento da corda é inversamente proporcional à frequência do som emitido. Portanto, em termos de frequência, a série harmônica obedecerá ao seguinte padrão: $\mathbf{f}_1, \mathbf{2f}_1, \mathbf{3f}_1, \dots$. Pode-se, então, representar a série harmônica de uma nota musical a partir de uma função periódica cuja lei é uma soma de funções seno, da seguinte maneira:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \text{sen}(2\pi n f_1 \cdot x)$$

$$f(x) = k_1 \text{sen}(2\pi n f_1 \cdot x) + k_2 \text{sen}(2\pi n f_2 \cdot x) + k_3 \text{sen}(2\pi n f_3 \cdot x) + \dots$$

Na expressão acima, $f_n = n \cdot f_1$ representa a frequência de cada harmônico, a partir da fundamental e k_n representa a intensidade (amplitude) dos harmônicos. A sequência k_n é decrescente, isto é, os harmônicos são cada vez mais fracos, menos intensos; ao mesmo tempo em que a sequência f_n é uma PA crescente de razão unitária. Cabe ressaltar que os coeficientes k_n constituem um fator preponderante na percepção da fonte sonora (o timbre).

Problema 10: Suponha que a nota SOL_1 , de frequência aproximada 100 Hz, seja tocada em dois instrumentos musicais distintos.

- A) Quais são as frequências dos harmônicos superiores?
 B) Tomando os quatro primeiros harmônicos, esboce os gráficos das funções que representam a referida nota tocada nos dois instrumentos:

Instrumento A:

$$f(x) = 10\text{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + 4\text{sen}(2\pi \cdot f_2 \cdot x) + 2\text{sen}(2\pi \cdot f_3 \cdot x) + 1\text{sen}(2\pi \cdot f_4 \cdot x)$$

Instrumento B:

$$f(x) = 10\text{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + 2\text{sen}(2\pi \cdot f_2 \cdot x) + 1\text{sen}(2\pi \cdot f_3 \cdot x) + 0,5\text{sen}(2\pi \cdot f_4 \cdot x)$$

- C) Suponha que os instrumentos sejam flauta e violino. Analisando os gráficos que você construiu com o auxílio do programa *Graph*, qual deles representa o som emitido pela flauta e qual representa o violino? Por quê?

Dica: Os coeficientes k_2 , k_3 e k_4 são os responsáveis pela diferença entre os sons (timbre) dos instrumentos.

Neste problema, propomos uma análise simples do fenômeno timbre. O objetivo é que o aluno perceba que a intensidade (estudada no problema anterior) dos harmônicos superiores são o fator preponderante na identificação da fonte sonora, isto é na distinção entre uma mesma nota tocada em instrumentos diferentes, por exemplo.

5.8 Gabarito dos Problemas

1. Pode-se resolver esse problema de duas formas: a 1ª, digamos ‘braçal’, seria reduzindo as frações a um mesmo denominador (*mmc*). A 2ª, menos trabalhosa, seria calculando os valores aproximados das frações utilizando uma calculadora. Depois será fácil ordená-los. Fica a critério do professor. Abaixo, apresentamos a solução:

FRAÇÕES DO COMPRIMENTO							
DÓ ₁	RÉ ₁	MI ₁	FÁ ₁	SOL ₁	LÁ ₁	SI ₁	DÓ ₂
1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
<i>c</i>	$\frac{8c}{9}$	$\frac{64c}{81}$	$\frac{3c}{4}$	$\frac{2c}{3}$	$\frac{16c}{27}$	$\frac{128c}{243}$	$\frac{1c}{2}$

$$2. \text{RÉ}_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\text{LÁ}_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{27} = \frac{2}{27}$$

Genericamente, qualquer nota X_n , de oitavas superiores, pode ser obtida por:

$$\text{DÓ}_n = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{DÓ}_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \text{DÓ}_1$$

$$\text{RÉ}_n = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \text{RÉ}_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \text{RÉ}_1$$

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot X_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot X_1$$

3. As quintas podem ser obtidas da seguinte maneira:

DÓ₁ RÉ₁ MI₁ FÁ₁ SOL₁ LÁ₁ SI₁

SOL₁ LÁ₁ SI₁ DÓ₂ RÉ₂ MI₂ FÁ₂

RÉ₂ MI₂ FÁ₂ SOL₂ LÁ₂ SI₂ DÓ₃

LÁ₃ SI₃ DÓ₃ RÉ₃ MI₃ FÁ₃ SOL₃

MI₃ FÁ₃ SOL₃ LÁ₃ SI₃ DÓ₄ RÉ₃

As QUINTAS, portanto, são: DÓ₁, SOL₁, RÉ₂, LÁ₂, MI₃ e SI₃

4. A) $65 \times 2 = 130 \text{ Hz}$ e $65 \times 2^2 = 260 \text{ Hz}$

B) $\text{SOL}_1 = \frac{3}{2} \cdot \text{DÓ}_1 = \frac{3}{2} \cdot 65 = 97,5 \text{ Hz}$

$\text{MI}_2 = 2 \times \frac{81}{64} \cdot \text{DÓ}_1 = \frac{81}{32} \cdot 65 = 164,5 \text{ Hz}$

C) $\text{DÓ}_n = 2 \cdot \text{DÓ}_{n-1} = 2^{n-1} \cdot \text{DÓ}_1$ $X_n = 2 \cdot X_{n-1} = 2^{n-1} \cdot X_1$

5. A) O Professor pode mostrar ao aluno que, intuitivamente, percebe-se que a razão da sequência é 2: $(5, 5 \cdot 2, 5 \cdot 2 \cdot 2, \dots)$. Mas também pode resolvê-la de uma maneira formal, denominando a constante multiplicativa k :

$$x = 5k$$

$$y = 5k^2$$

$$40 = 5k^3 \rightarrow k^3 = 8 \rightarrow k = 2$$

Logo, $x = 5 \cdot 2 = 10$ e $y = 5 \cdot 2^2 = 20$

B) Os próximos termos são $a_5 = 5 \cdot 2^4 = 80$ e $a_6 = 5 \cdot 2^5 = 160$.

C) Tomando 5 com a_1 , genericamente, pode-se escrever:

$$a_n = 5 \cdot 2^{n-1} = a_1 \cdot k^{n-1}$$

6. A) $\ell_2 = \frac{\ell_1}{1,06} = \frac{3,6}{1,06} \approx 3,4 \text{ cm}$

$$\ell_5 = \frac{\ell_1}{1,06^4} = \frac{3,6}{1,26} \approx 2,86 \text{ cm}$$

B) $\ell_n = \frac{\ell_1}{(1,06)^{n-1}}$

Pode-se perceber que, implicitamente, há um problema por trás desse problema. Mostramos que os comprimentos de corda e as frequências estão em PG. Mas a largura das casas do violão também estão? Uma demonstração de que elas estão sim em PG, e de mesma razão que os comprimentos das cordas, fazemos abaixo:

Seja c o comprimento útil da corda solta. Se denominarmos c_1 o comprimento útil da corda pressionada na 1ª casa do violão, c_2 , o comprimento da mesma pressionada

na 2ª casa, ... , temos que a largura ℓ_1 da 1ª casa será a diferença entre c e c_1 , e assim por diante.

Se é sabido que os comprimentos de corda estão em PG decrescente de razão $q = 2^{-\frac{1}{12}} \approx \frac{1}{1,06}$, então, em linguagem matemática, temos:

$$\ell_1 = c - c_1$$

$$\ell_2 = c_1 - c_2 = c \cdot q - c_1 \cdot q = (c - c_1) \cdot q = \ell_1 \cdot q$$

⋮

$$\ell_n = c_{n-1} - c_n = c \cdot q^{n-1} - c_1 \cdot q^{n-1} = (c - c_1) \cdot q^{n-1} = \ell_1 \cdot q^{n-1}$$

Logo, as larguras das casas estão em PG de mesma razão $q \approx \frac{1}{1,06}$.

7. Tomando o $L\acute{A}_2 = 110$ Hz como referência:

A 6ª corda, MI_2 (*mi bordão*), está 2,5 *tons* ou 5 *semitons* abaixo. Logo,

$$MI_2 = \frac{110}{\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5} = 82,4 \text{ Hz}$$

5ª corda: $L\acute{A} = 110$ Hz

A 4ª corda, $R\acute{E}_3$, está 2,5 *tons* ou 5 *semitons* acima. Logo,

$$R\acute{E}_3 = 110 \cdot \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5 = 146,8 \text{ Hz}$$

A 3ª corda, SOL_3 , está 5 *tons* ou 10 *semitons* acima. Logo,

$$SOL_2 = 110 \cdot \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{10} = 196 \text{ Hz}$$

A 2ª corda, SI_3 , está 7 *tons* ou 14 *semitons* acima. Logo,

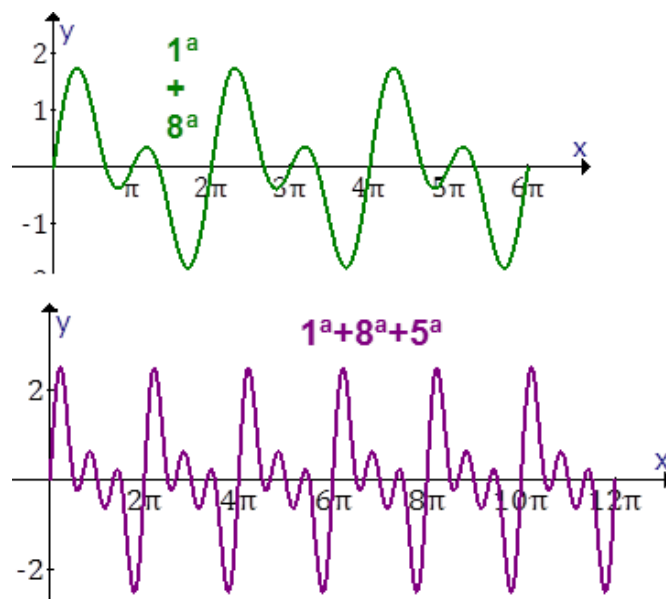
$$SI_3 = 110 \cdot \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{14} = 246,9 \text{ Hz}$$

A 2ª corda, MI₄ (*mi prima*), está 9,5 tons ou 19 *semitons* acima. Logo,

$$MI_4 = 110 \cdot \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{19} = 329,6 \text{ Hz}$$

OBS: Fazendo-se os cálculos com a razão aproximada 1,06, encontram-se valores ligeiramente diferentes daqueles encontrados efetuando-se os cálculos com a razão correta $2^{\frac{1}{12}}$.

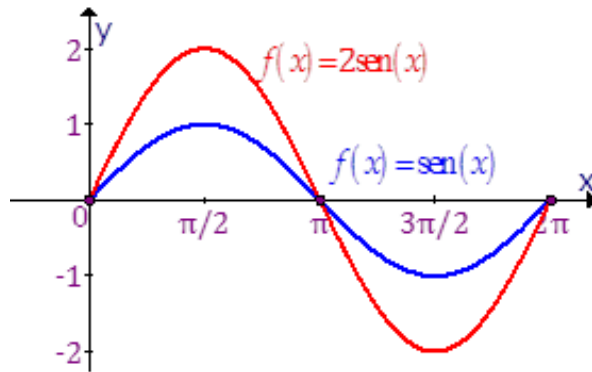
8. A) e B)



C) Conforme os gráficos acima mostram, a função $\text{sen}(x)$ é a nota escolhida. A função $\text{sen}(2x)$ é a oitava e a função $\text{sen}(3x)$ é a quinta da oitava. Sim, porque a frequência da quinta de uma nota é $\frac{3}{2}$ da frequência da mesma. Tomando o intervalo de referência de uma oitava, $[1, 2]$, para transpor a nota que se encontra no intervalo $[2^1, 2^2]$, basta dividi-la por 2.

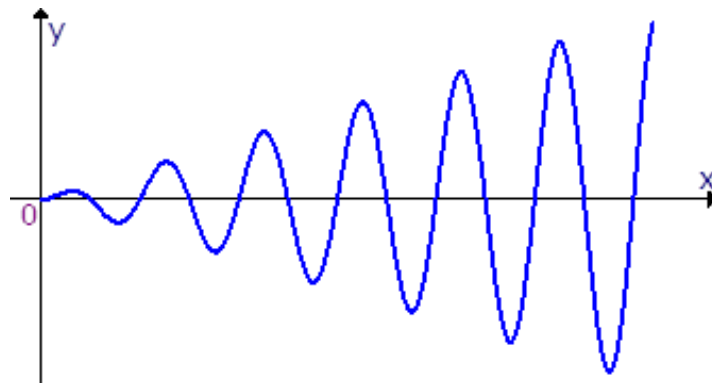
Analogamente, que nota seria o 8º harmônico da série, isto é: $\text{sen}(9x)$? Basta observar que $9 \in [2^3, 2^4]$ e, portanto, devemos dividir 9 por 2^3 . A fração $\frac{9}{8}$ corresponde à 2^a em relação à tônica, a frequência fundamental da nota tocada.

9. A)



B) Sim, representam a mesma nota. O parâmetro que variou foi a intensidade do som, o volume.

C)



O gráfico sugere um aumento indefinido do volume do som.

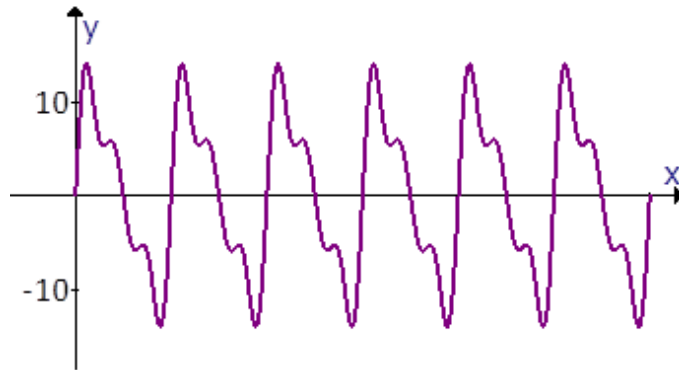
10. A) As frequências são: $f_2 = 100 \cdot 2 = 200$ Hz, $f_3 = 100 \cdot 3 = 300$ Hz, $f_4 = 100 \cdot 4 = 400$ Hz, ...

B) As funções são:

Instrumento A:

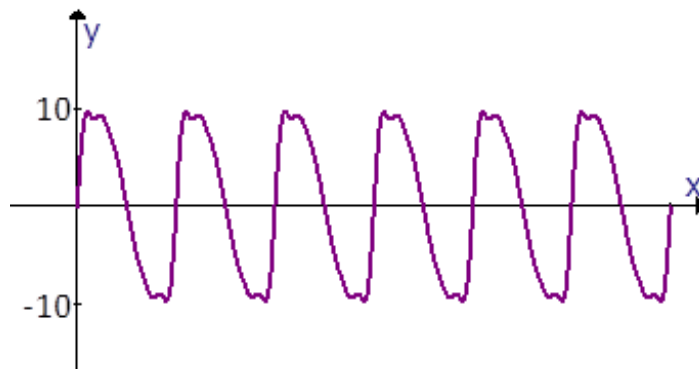
$$f(x) = 10\text{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + 4\text{sen}(2\pi \cdot 200 \cdot x) +$$

$$2\text{sen}(2\pi \cdot 300 \cdot x) + 1\text{sen}(2\pi \cdot 400 \cdot x)$$

**Instrumento B:**

$$f(x) = 10\text{sen}(2\pi \cdot 100 \cdot x) + 2\text{sen}(2\pi \cdot 200 \cdot x) +$$

$$1\text{sen}(2\pi \cdot 300 \cdot x) + 0,5\text{sen}(2\pi \cdot 400 \cdot x)$$



C) O 1º caso representa a nota tocada no violino, pois apresenta harmônicos superiores mais intensos. O 2º, a flauta, que é pobre em harmônicos superiores.

6 Considerações Finais

A Música é, sem dúvida, a arte mais popular do mundo. Mas talvez não seja evidente que, por trás do talento de um artista, existem vários conceitos matemáticos que lhe dão suporte, fundamento. Ao que tudo indica, Pitágoras foi quem descobriu essa relação intrínseca entre as duas áreas. Pode-se imaginar o tamanho espanto do filósofo ao conseguir dar significado lógico-matemático a cada som que se ouvia, associar cada nota a um número. É grandioso o legado que nos foi deixado por Pitágoras, em particular, e por todos os filósofos gregos, em diversos campos do saber.

Cabe aqui ressaltar que não se consegue explicar Música totalmente através da Matemática, até porque, como qualquer atividade artística, trata-se de uma questão de sujeito. A lógica numérica desempenha um papel basal, com o intuito de que, a partir dela, sejam criados parâmetros que servirão de base para a criação musical do artista, uma ação essencialmente subjetiva.

O que propusemos nesse trabalho foi uma alternativa à aula convencional, aquela que se ensina e se aprende de maneira bem semelhante há mais de um século. É sabido que a Matemática praticada nas escolas é a mesma há pelo menos 100 anos. O que nos motiva hoje é a tentativa de encontrar outras abordagens para um mesmo tema, utilizando novos recursos, métodos, a fim de tornar as aulas mais atrativas. Em suma, propõe-se uma intervenção, uma ruptura de paradigma. Um paradigma que talvez o próprio aluno, no início, ofereça alguma resistência para quebrar, pois supostamente já está acostumado àquele modelo tradicional de aula. Aliás, no nosso modo de ver, isso é comum no ser humano, pois, salvo as exceções de praxe, somos, em geral, resistentes a mudanças.

Todavia, não queremos aqui fazer críticas severas às aulas expositivas tradicionais, apenas sugerimos que, ao longo do ano letivo, sempre que for possível e/ou viável, sejam feitas algumas intervenções no sentido de tornar mais prazeroso o ato de aprender. O mestre talvez perceberá que, não apenas o ato de aprender, mas o ato de ensinar tornar-se-á mais prazeroso também.

A O Professor e a Tecnologia

Até poucos anos atrás, não se poderia imaginar para onde os avanços da tecnologia nos levariam. Dizia-se que o computador era o futuro; hoje ele é o presente. Há meros quinze anos, os primeiros provedores de internet chegaram ao Brasil e provocaram uma verdadeira revolução no modo de vida da nossa sociedade. A cada lugar por onde passamos, vemos crianças, jovens e adultos operando o teclado de seus *notebooks* ou acessando conteúdos interativos em seus aparelhos de telefonia móvel. Não precisamos mais ir às lojas, mas elas entram na nossa casa via satélite. Todavia, parece que o computador ainda não ‘entrou’ na escola. A Matemática, que por sua vez, é o pano de fundo de toda essa evolução tecnológica (não existiria computador sem ela!), continua, pelo menos na sala de aula, distante de uma realidade que ela própria ajudou a criar.

“Cada indivíduo deve receber da educação elementos e estímulos para levar ao máximo sua criatividade, e ao mesmo tempo integrar-se a uma ação comum, subordinada aos preceitos e normas criados e aprimorados ao longo da história do grupo cultural (família, comunidade, tribo, nação) ao qual ele pertence, isto é, a sociedade. [6, pág. 15]”

O pensamento de Ubiratan D’Ambrósio mostra-se bastante atual, pois, afinal não seria o computador um estímulo para que o aluno eleve a sua criatividade? Cremos que sim. Simplesmente porque o mundo mudou, a sociedade mudou, as pessoas mudaram e os alunos também. É possível imaginar um modelo anacrônico de sociedade sem tecnologia (as aldeias indígenas, por exemplo), todavia não vivemos nela, não é nela que construímos a nossa trajetória. Mesmo que alguns de nós sejam classificados como ‘estrangeiros digitais’, que não têm grande intimidade com o aparato tecnológico, deve-se ter a clareza de que a educação não é feita para nós e sim para aqueles que são ‘nativos digitais’, isto é, os alunos. Várias reflexões têm sido feitas acerca do uso da Informática na Educação e, principalmente, na Educação Matemática. Porém se faz necessário sair do âmbito do discurso para a prática efetiva, visto que, como não mais se pode imaginar

o mundo sem tecnologia, é fato, por que justamente a escola ficaria à margem do curso natural das coisas?

Nas escolas tradicionais, o processo de ensino-aprendizagem é baseado na simples transmissão do conhecimento, onde o professor apenas transfere aquilo que sabe aos seus alunos, sem qualquer interação mútua. Experiências têm mostrado a ineficácia desse modelo, já que o aluno é um mero participante do processo de aquisição de conhecimentos, limitando-se a memorizar o que lhes foi passado. Os alunos, frequentemente têm julgado este tipo de escola pouco atrativa. Porém, nas escolas onde se entendeu a educação como um processo mais amplo que a acumulação de saberes, acredita-se que o professor naturalmente tenha passado por transformações, pois ele não só teve de mudar suas estratégias de ensino, como também teve de romper com a lógica da transmissão do conhecimento.

Considera-se importante que a Matemática desempenhe o seu papel no desenvolvimento de capacidades intelectuais, na estruturação e na organização do pensamento, no raciocínio lógico-dedutivo, na resolução de problemas de situações que envolvem o cotidiano em todas as áreas do conhecimento. Essa proposta é reconhecida nos PCN's, que permitem e até sugerem um currículo flexível. Nesse contexto, pode-se usar a ferramenta computacional como um caminho para se atingir tais metas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam os recursos digitais como uma das diferentes alternativas de se 'ensinar a aprender Matemática'. Destaca ainda que tais recursos promovem maior autonomia dos estudantes.

“Um ensino de qualidade que busca formar cidadãos capazes de interferir criticamente na realidade para transformá-la deve também contemplar o desenvolvimento de capacidades que possibilitem adaptações às complexas condições e alternativas de trabalho que temos hoje e a lidar com a rapidez na produção e na circulação de novos conhecimentos e informações, que têm sido avassaladores e crescentes. A formação escolar deve possibilitar aos alunos condições para desenvolver competências e consciência profissional, mas não se restringir ao ensino de habilidades imediatamente demandadas pelo mercado de trabalho.”

Um dos desafios do educador de hoje, é fazer os alunos compreenderem seu papel como agentes ativos de produção do conhecimento, e da repetição de tal participação como elemento da sociedade e, mais especificamente de um educador matemático, fazê-los enxergar a importância da Matemática para suas vidas.

“De um lado, o próprio processo atual de formação do professor não leva o educando a estabelecer uma associação relevante entre o que se ensina e o mundo real. Desse modo, esperar que o educando, assim como o professor, mude sua postura, tornando-se um educador voltado para a aplicabilidade, colocando a Matemática como elemento aglutinador da interdisciplinaridade, é um sonho quase impossível.”

[7]

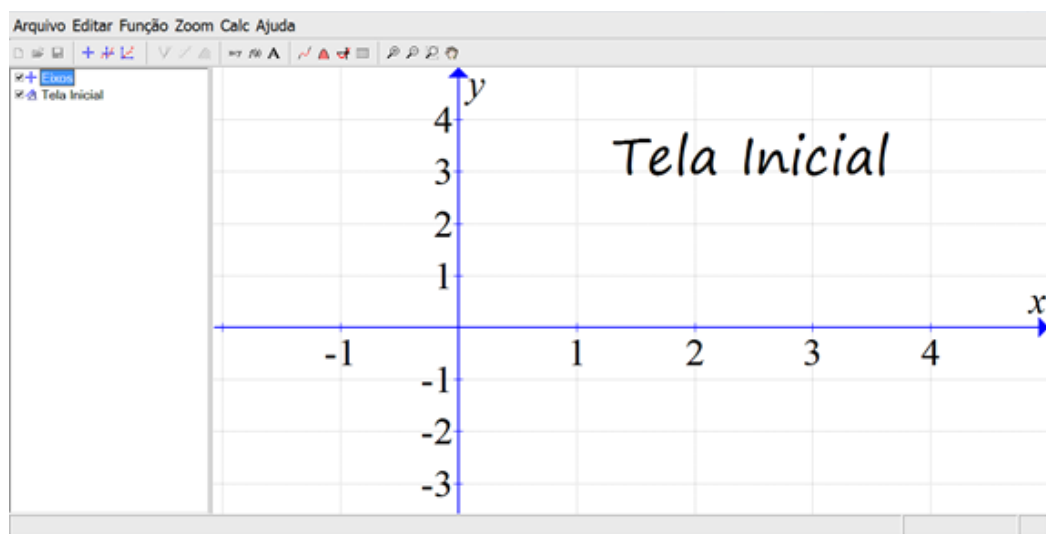
Há algumas vezes escassez de recursos para a implantação de técnicas alternativas de ensino, além de faltas de interesse e motivação, pois, para conseguir um salário melhor, alguns professores vêm trabalhando no limite de suas condições, com uma carga horária excessiva, prejudicando o seu desempenho. Estes fatores podem dificultar a mudança, a rejeição ao novo, a acomodação ao velho já conhecido. Há que se fazer um esforço para abrir mão de convicções há muito adquiridas. Um dos fatores que podem dificultar a prática de utilização de recursos computacionais no ensino se deve ao fato de que a maioria dos professores não se sente preparada para exercer esse tipo de atividade, até porque muitos deles não tiveram esse tipo de abordagem no decorrer de sua formação. Isso se deve, dentre outras coisas, ao fato de que a Matemática que tem sido ensinada ao longo da história tem dado maior ênfase ao seu caráter formal, ela tem sido tratada como um ente isolado das demais ciências, que não precisa interagir com outras áreas do conhecimento, tampouco servir de aplicação a estas.

Entretanto, na última década principalmente, muito se tem discutido sobre a formação do professor e pode-se dizer que tem havido um esforço das esferas competentes a fim de mudar esse quadro, de dar à Matemática um caráter interdisciplinar, de forma que educadores e educandos sintam-na mais presente em seu dia-a-dia.

B Tutorial do Programa *Graph*



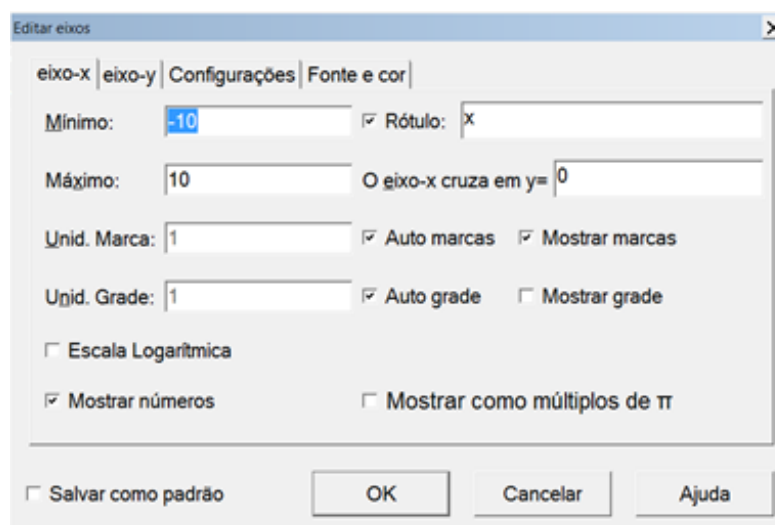
O programa *Graph* foi feito na Dinamarca por Ivan Johansen. É um programa que possui muitos recursos algébricos para esboçar gráficos de funções, relações, desigualdades, cálculo de áreas, animação de gráficos, dentre outras. A *interface* é amigável e bastante atrativa também. Para baixar o programa, deve-se acessar o sítio da empresa que o fez: <http://www.padowan.dk/beta/>. Lá também pode ser encontrado o manual em Português.



Na opção eixos, que pode ser encontrada facilmente no canto direito da tela ou na barra de menu, opção Editar-Eixos, você já pode fazer os ajustes iniciais de fonte, cor, escala, grade, eixos, etc. Para editar a escala nos eixos e a grade, deve-se desmarcar as opções auto marcas e auto grade. Então poderá ser feito o ajuste manual, de acordo com o caso. Ainda no menu Editar, temos a ferramenta Opções, cujo principal tópico é a opção de aumentar a resolução da tela em: Escala da Fonte. No menu Função é onde se tem as principais entradas do programa. Além de se inserir uma função, você também pode inserir pontos, relações (equações ou inequações) e rótulo, como o mostrado na primeira figura.

Menu Eixos

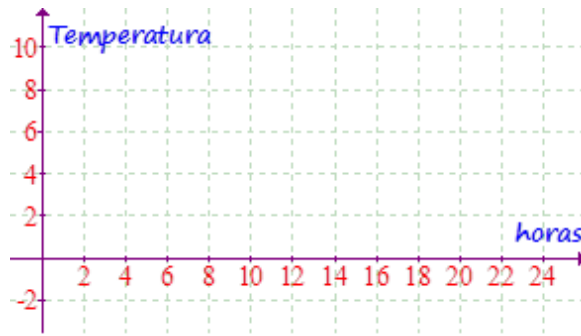
A princípio, este menu de opções se apresenta da seguinte forma:



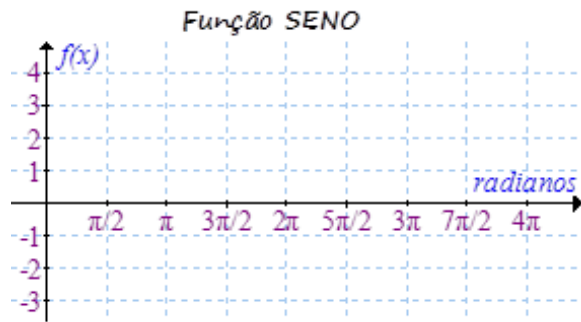
Você pode editar:

- Mínimo e máximo dos eixos x e y .
- Modificar os rótulos. Por exemplo: no lugar de x , escrever tempo, temperatura, etc.
- As marcas nos eixos e as grades estão na posição automática. Mas você pode modifica-las retirando a seleção 'automarcas' e 'autograde'. Então poderá colocar a escala que for conveniente em unidade da marca.
- Também poderá escolher não mostrar os números e deixar os eixos apenas ou então não mostrar os eixos. É uma opção em Configurações.
- A fonte e a cor da grade, dos eixos, dos números e dos rótulos podem ser modificadas a gosto.
- Por último, para o caso de funções trigonométricas, você pode colocar a escala dos eixos em múltiplos de π . O programa reconhece a palavra π . O mais comum é por a unidade da marca de x em $\pi/2$. Lembre-se de que a função $\text{sen}(x)$ é escrita $\sin(x)$. Qualquer dúvida, vá ao menu Ajuda. Lá você encontrará a lista de funções matemáticas e como digitá-las (sintaxe do programa).

Veja alguns exemplos de eixos editados abaixo:



eixo-x	eixo-y	Configurações	Fonte e cor
Mínimo:	2.0750462	<input checked="" type="checkbox"/> Rótulo:	horas
Máximo:	26	O eixo-x cruza em y= 0	
Unid. Marca:	2	<input type="checkbox"/> Auto marcas	<input checked="" type="checkbox"/> Mostrar marcas
Unid. Grade:	2	<input type="checkbox"/> Auto grade	<input checked="" type="checkbox"/> Mostrar grade
<input type="checkbox"/> Escala Logarítmica			
<input checked="" type="checkbox"/> Mostrar números		<input type="checkbox"/> Mostrar como múltiplos de π	



eixo-x	eixo-y	Configurações	Fonte e cor
Mínimo:	-1.4778308	<input checked="" type="checkbox"/> Rótulo:	radianos
Máximo:	4.5pi	O eixo-x cruza em y= 0	
Unid. Marca:	pi/2	<input type="checkbox"/> Auto marcas	<input checked="" type="checkbox"/> Mostrar marcas
Unid. Grade:	pi/2	<input type="checkbox"/> Auto grade	<input checked="" type="checkbox"/> Mostrar grade
<input type="checkbox"/> Escala Logarítmica			
<input checked="" type="checkbox"/> Mostrar números		<input checked="" type="checkbox"/> Mostrar como múltiplos de π	

OBS:

A) Para que apareça a letra grega π , você deve escolher uma fonte conveniente dos números. Algumas escrevem em grego, tais como: Cambria, Euclid Symbol, Symbol, dentre outras.

B) O Título do gráfico se põe em Configurações.

Menu Função

A) Inserir Função É possível inserir uma função padrão, paramétrica ou polar.

Editar função

Tipo de função: Função padrão: y=f(x)

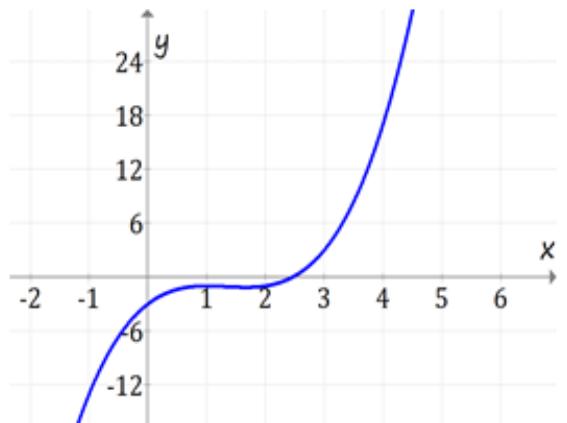
Equação da função
 $f(x) = \sqrt{x^3} \cdot 4x^2 + 5x \cdot 3$

Variação do argumento
 De: -3 Δ : 5 Passos:

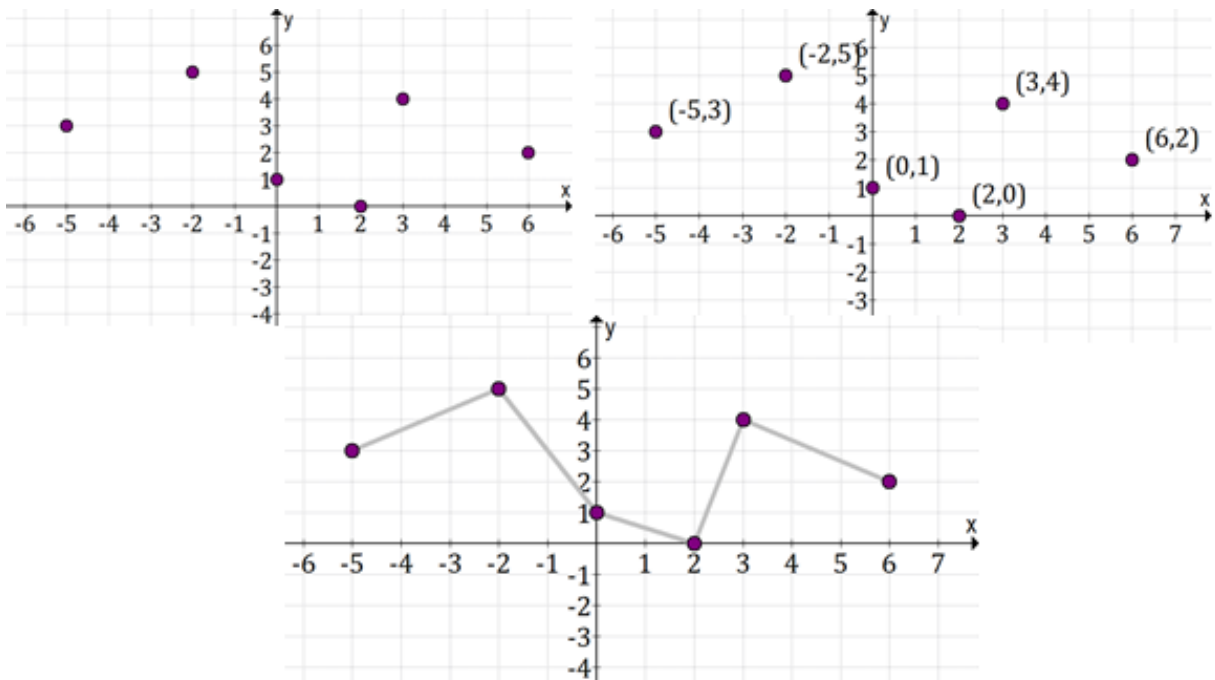
Extremos
 Início: Fim:

Texto da legenda
 Descrição:

Propriedades do gráfico
 Estilo da linha: Tipo de traçado: Automático
 Cor: Largura: 5



B) Inserir Pontos É possível inserir um conjunto de pontos, mostrando as coordenadas na tela com ou sem uma linha os ligando.



Referências Bibliográficas

- [1] H. Eves, *Introdução à História da Matemática*, Editora Unicamp, 1995.
- [2] J. M. Wisnik, *O Som e o Sentido: Uma outra história das músicas*, Companhia das Letras, 1999.
- [3] O. J. Abdounur, *Matemática e Música: O pensamento analógico na construção de significados*, Escrituras, 2000.
- [4] U. Nicola, *Antologia Ilustrada da Filosofia: das origens à Idade Moderna*, Editora Globo, 2005.
- [5] J. J. A. Arruda, *Toda a História*, Editora Moderna, 2002.
- [6] U. D'Ambrosio, *Globalização e Multiculturalismo*, Editora Furb, 1996.
- [7] R. C. Bassanezi, *Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática*, Editora Contexto, 2004.
- [8] H. Gardner, *Estruturas da Mente: a teoria das inteligências múltiplas*, Editora Artes Médicas Sul, 2002.
- [9] C. S. Calçada, *Física Clássica*, Editora Atual, 2010.
- [10] F. N. Monteiro Jr, *Somando Funções Trigonométricas: uma reconstrução didática do conceito de timbre*, BOLEMA: Boletim de Educação Matemática **23** (2010), no. 36, 597-624.
- [11] Ministério da Educação, *Parâmetros Curriculares Nacionais*, 1996.

Obras clássicas citadas

- [12] Aristóteles, *Metafísica*, 350 a.C. Citações traduzidas a partir da versão disponível em <http://classics.mit.edu/Aristotle/metaphysics.html>.
- [13] J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619.