UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CÉLIO OLIVEIRA SOUZA

SEQUÊNCIAS DE AULAS SOBRE ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS E REGIÕES CIRCULARES

ILHÉUS – BA
2016

CÉLIO OLIVEIRA SOUZA

SEQUÊNCIAS DE AULAS SOBRE ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS E REGIÕES CIRCULARES

Dissertação de mestrado apresentada ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito final à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof.Drª. Mirela Vanina de Mello

ILHÉUS – BA
2016

S729 Souza, Célio Oliveira Souza.
Sequências de aulas sobre área de regiões poligonais e regiões circulares / Célio Oliveira Souza. – Ilhéus, BA: UESC, 2016.
89f. : Il.

Orientadora: Mirela Vanina de Mello.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria. Polígonos. I. Título.

CDD 510.7

CÉLIO OLIVEIRA SOUZA

SEQUÊNCIAS DE AULAS SOBRE ÁREA DE REGIÕES POLIGONAIS E REGIÕES CIRCULARES

Dissertação de mestrado apresentada ao programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito final à obtenção do título de mestre em Matemática.

Trabalho aprovado, 14 de Janeiro de 2016.

Mirela Vanina de Mello

Prof. Drª. Mirela Vanina de Mello

Grasiele C. Jorge

Prof. Drª. Grasiele Cristiane Jorge

Prof. Me. André Malvezzi Lopes

ILHÉUS – BA
2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois sem ele eu não teria forças para essa longa jornada. Agradeço aos meus professores, meus colegas e ao meu irmão **Fabrício Oliveira Souza** que me ajudaram na conclusão da monografia.

Aos meus pais, irmãos, minha esposa **Tainá Reis de Jesus Sá**, e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

RESUMO

Este trabalho é composto por uma sequência de aulas de geometria plana sobre Áreas de Regiões Poligonais e Regiões Circulares. Ele é escrito em uma linguagem objetivamente pedagógica para o professor e acessível ao educando. Tal material compõe importante utilidade para os professores de Matemática da educação básica.

Palavras-chave: Matemática; Geometria; Área.

ABSTRACT

This work consists in a sequence of plane geometry classes dealing with area of polygonal and circular regions.
It is written to the teacher and available to students. Such material has an important utility at the work of mathematician in the basic education.

Keywords: Mathematics; Geometry; Area.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Retângulo ABCD e a Unidade de Área..15

Figura 1.2 – A área do retângulo ABCD é o dobro da área do triângulo ECD......................17

Figura 1.3 – O quadrado ABCD decomposto em triângulos 17

Figura 1.4 – O losango é um paralelogramo de lados iguais..18

Figura 1.5 – Losango MNOP...19

Figura 1.6 – O trapézio isósceles ABCD decomposto em retângulo e triângulos 20

Figura 1.7 – Trapézio ABCD..21

Figura 1.8 – Um paralelogramo é um trapézio..22

Figura 1.9 – O Teorema de Pitágoras...23

Figura 1.10 – quantidade de metros de fio necessários para “puxar luz” do poste até a caixa de luz...........24

Figura 1.11 A altura do triângulo em função do lado 24

Figura 1.12 Seno, cosseno e tangente nos triângulos semelhantes....................................26

Figura 1.13 – As razões trigonométricas no triângulo retângulo...27

Figura 1.14 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30º e 60º......................................28

Figura 1.15 – Razões trigonométricas do ângulo de 45°..28

Figura 1.16 – A área do losango pelo seu perímetro e um de seus ângulos internos...........29

Figura 1.17 – O trapézio ABCD é retângulo..30

Figura 1.18 – Área do paralelogramo por um de seus ângulos internos..............................31

Figura 1.19 – Razões trigonométricas de ângulos...32

Figura 2.1 – Projeção vertical h e horizontal x do lado AB do triângulo ABC........................33

Figura 2.2 – Decomposição do triângulo qualquer ABC em dois triângulos retângulos.........34

Figura 2.3 – Triângulo qualquer de lados a, b e c..37

Figura 2.4 – Uma pracinha ABCD com o formato de um quadrilátero................................39

Figura 2.5 – A altura h do triângulo ABC como decomposição do seu lado AB....................41

Figura 2.6 – Triângulo ABC..42

Figura 2.7 – Decompondo o paralelogramo em dois triângulos congruentes.......................42

Figura 2.8 – Lei dos Senos..43

Figura 2.9 – Triângulo ABC com ângulos de 30º e 45º e lado 6..44

Figura 2.10 – A Decomposição do triângulo ABC em dois triângulos retângulos.................46

Figura 2.11 – Triângulo ABC no plano cartesiano...47

Figura 2.12 – Triangulo ABC com suas projeções...48

Figura 2.13 – Dispositivo prático para calcular área de triângulos no plano cartesiano.........49

Figura 2.14 – Cálculo da área do triângulo ABC pelo dispositivo prático.............................50

Figura 3.1 – Polígono ABCDEF...51

Figura 3.2 – Polígono Regular ABCDEFGH decomposto em 6 triângulos............................51

Figura 3.3 – No pentágono regular ABCDE, a razão AB/AD é o número de ouro................52

Figura 3.4 – Pentágono ABCDE decomposto em 5 triângulos isósceles e congruentes.......53

Figura 3.5 – Um pentágono regular inscrito num círculo...54

Figura 3.6 – Um círculo inscrito num pentágono regular...55

Figura 3.7 – As abelhas guardam seu mel em compartimentos hexagonais.........................56

Figura 3.8 – O hexágono regular é decomposto em seis triângulos eqüiláteros...................57

Figura 3.9 – Hexágono regular inscrito num círculo..57

Figura 3.10 – O apótema do círculo inscrito num hexágono regular.....................................58

Figura 3.11 – Planta baixa da construção de uma piscina..59

Figura 3.12 – Polígono regular com n lados (n-ágono)...60

Figura 4.1 – Uma malha...63

Figura 4.2 – Pentágono não regular ABCDE com vértices sobre uma malha.......................64

Figura 4.3 – Completando o pentágono de modo que este forme um retângulo..................64

Figura 4.4 – Heptágono não regular com vértices sobre pontos de uma malha...................66

Figura 4.5 – Área da estrela..66

Figura 4.6 – Triângulo Fundamental...67

Figura 4.7 – O polígono de 11 lados...68

Figura 4.8 – Aproximando a área do círculo por um quadrado...70

Figura 4.9 – Aproximando a área do circulo por um octógono não regular...........................70

Figura 4.10 – Área do círculo aproximada um polígono não regular de 32 lados.................71

Figura 5.1 – A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo..........73

Figura 5.2 – Tabela de aproximação do valor de pi...74

Figura 5.3 – O perímetro do círculo se aproxima ao do polígono regular 75

Figura 5.4 – A região OAB é um setor circular...77

Figura 5.5 – A região circular de espessura x é uma coroa circular................................ 78

Figura 5.6 – A área mais escura é a área do setor AB menos a área do triângulo OAB.......80

Figura 5.7 – Um triângulo eqüilátero inscrito num círculo.. 81

Figura 5.8 – A área da região PQR 82

Figura 5.9 – A área destacada é a área do setor ACD menos a área do triângulo ACD.......83

Figura 5.10 – Um trevo de quatro folhas inscrito num quadrado...83

Figura 5.11 – Lunas...84

SUMÁRIO

Introdução 13

1. A Idéia de Área e Noções Fundamentais 15

2. Área de Triângulos Quaisquer 33

3. Área de Polígonos Regulares... 51

4. Área de Polígonos Não Regulares.. 63

5. A Área do Círculo 73

Referências bibliográficas... 88

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é disponibilizar aos professores de Matemática da educação básica o acesso a uma sequência de aulas sobre área de regiões poligonais e regiões circulares escrito numa linguagem objetivamente pedagógica para o professor e acessível ao educando.

A Geometria tem papel fundamental na formação do aluno no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do seu cotidiano. Entretanto, conforme Pavanello (1989) , Lorenzato (1995), Passos (2000), Pereira (2001), Barbosa (2008) e Fonseca (2011), o ensino da Geometria vem sendo pouco explorado na sala de aula e os trabalhos em formação inicial, no cotidiano, evidenciam a fragilidade no conhecimento geométrico dos alunos, revelando a ausência de conteúdos fundamentais para estudantes no ensino superior. As teses de formação continuada, quando revelam o cotidiano, mostram uma falta de autonomia, bem como um conhecimento precário sobre a importância da geometria, e dificuldades no trato com conteúdos. Elas ressaltam a complexidade da ação docente, e o necessário entendimento acerca de suas concepções e crenças, a fim de que se possam promover evoluções.

Estes estudos comprovam que o ensino da Geometria nas Escolas Públicas do Brasil, na maioria das vezes, vem sendo trabalhado de forma superficial e sem ligação com o cotidiano do aluno. Acredita-se que o insucesso no ensino da Geometria Plana decorre de vários fatores, como por exemplo, falta de interesse por parte dos alunos, priorização de outros conteúdos matemáticos, ou até mesmo por ser um dos últimos tópicos a serem ensinados por parte dos professores. Com isso, surge a necessidade de novos materiais sobre geometria.

Do ponto de vista metodológico este material se enquadra no modelo descrito como uma abordagem quantitativa. Inicialmente realizou-se um levantamento bibliográfico e em seguida foram feitas sequências de aulas sobre áreas de regiões poligonais e circulares. O foco foi no aprendizado por meio de figuras, uma vez que na educação básica os discentes apresentam dificuldades na compreensão das propriedades básicas da Geometria Plana e dificuldade de interpretação bem como transposição dos conhecimentos adquiridos da sala de aula para aplicações práticas.

Com isso, podemos explorar um pouco mais o ensino da Geometria na sala de aula, com intuito de despertar o interesse do aluno, na tentativa de desenvolver habilidades como a capacidade de abstração e resolução de problemas presentes no seu dia a dia.

Observamos ainda que são pré-requisitos para essa sequência de aulas: n oções básicas sobre semelhança e congruência de triângulos, propriedades geométricas como mediana, mediatriz e bissetriz e ainda conhecimento prévio de ponto e segmento de reta.

1. A Idéia de Área e Noções Fundamentais

A **geometria plana** é muitas vezes relacionada como uma disciplina a parte da matemática, ou seja, é em muitas das vezes deixada para depois, mas devido aos pré requisitos existentes, que englobam noções de estatística, álgebra e aritmética não podemos de forma alguma fazer seu estudo de forma isolada. O presente capítulo nos possibilitará enxergar os conceitos primitivos da qual sempre relacionamos com a geometria plana, que é a idéia de área e noções fundamentais.

Aula 1. Área de Retângulos e Triângulos

Medir a área de uma figura plana é compará-la com uma unidade pré definida, ou seja, descobrir quantas destas unidades estão contidas dentro desta figura. Para entendermos melhor este conceito, observe o polígono com quatro lados ABCD da Figura 1.1 abaixo. Agora responda: Quantas unidades padrão (quadradinhos $1u^2$) cabem dentro dela? Você deve ter contado que em sua base cabem 6 e que em sua altura cabem 4 quadradinhos e multiplicando estas quantidades uma pela outra encontrou $24u^2$ como resposta. O que você acabou de fazer foi uma comparação, ou seja, uma medição. Definimos AB como sendo o tamanho do segmento AB.

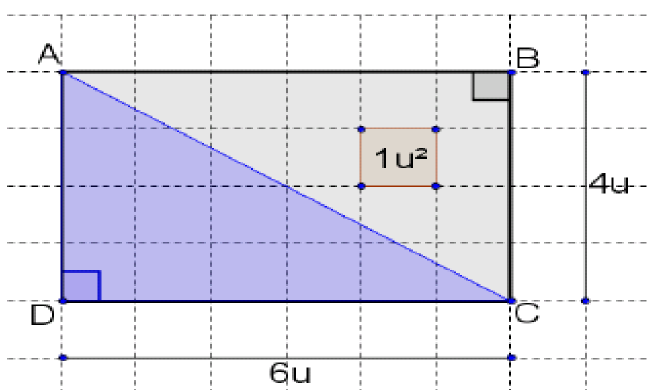


Figura 1.1 – Retângulo ABCD e a Unidade de Área.

Definição 1.1: Na geometria, um **polígono** é uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada, ou seja, uma figura limitada por linhas retas. A estas linhas retas chamamos lados do polígono.

Definição 1.2: Um **quadrilátero** é um polígono de quatro lados, cuja soma dos ângulos internos é 360°, e a soma dos ângulos externos, assim como qualquer outro polígono, é 360°. Um **retângulo** é um quadrilátero com quatro ângulos de 90° (ângulos retos). Sendo a a medida de sua altura e b a medida de sua base, então sua área A_R é dada por $A_R = a \times b$.

Pela Definição 1.2, o quadrilátero ABCD da Figura 1.1 é um retângulo com dimensões $6u$ e $4u$. Todo quadrilátero pode ser decomposto em triângulos, o retângulo pode ser decomposto em dois triângulos retângulos (que possuem um ângulo de medida 90°) idênticos, ABC, retângulo em B e ADC, retângulo em D. Então, a área de cada triângulo é a metade da área do retângulo, ou seja, as áreas dos triângulos ADC e ABC na Figura 1.1 são de 12 u^2.

Teorema 1.1: Sejam b a medida da base de um triângulo e a sua altura, então sua área A_T é calculada pela metade do produto da medida de sua base pela medida de sua altura, ou seja, $A_T = \frac{a \times b}{2}$.

A prova deste teorema vem direto da definição de área de retângulo, haja visto que, todo retângulo pode ser decomposto em dois triângulos retângulos cuja altura e a base são as mesmas do retângulo. Ilustramos o raciocínio utilizado para a demonstração do Teorema no exemplo a seguir.

Exemplo 1.1: O retângulo ABCD da Figura 1.2 foi decomposto em três triângulos, sendo dois deles retângulos, ADE e BCE, e outro não retângulo, DCE. Determinemos a área do triângulo DCE. A base DC do retângulo mede $7u$ e sua altura AD mede $3u$, assim, pela Definição 1.1, sua área é de $21u^2$. Por outro lado, o triângulo ADE tem base AE medindo $5u$ e altura AD medindo $3u$ e o triângulo BCE tem base BE medindo $2u$ e altura BC medindo $3u$. Logo, pelo Teorema 1.1, suas áreas são, respectivamente, $7{,}5u^2$ e $3u^2$. Como a soma das áreas dos triângulos ADE, DEC e BCE é a área do retângulo ABCD, então a área do triângulo DCE é, necessariamente, $21u^2 - (7{,}5u^2 + 3u^2) = 10{,}5u^2$. Observe que BC tem a mesma medida da altura do triângulo DCE, logo, pelo Teorema 1.1, sua área é $\frac{7 \times 3}{2} = 10{,}5u^2$.

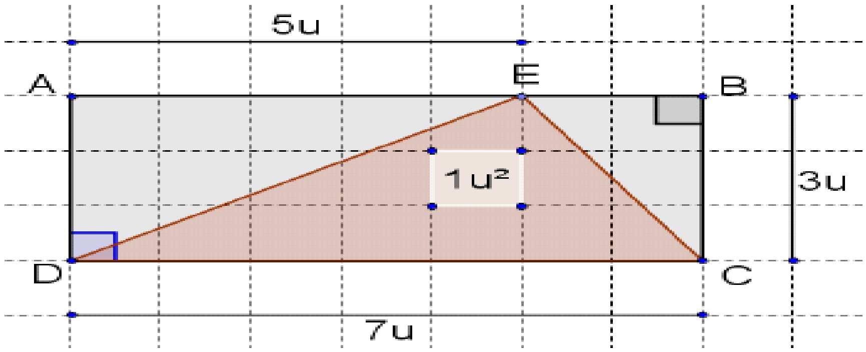


Figura 1.2 – A área do retângulo ABCD é o dobro da área do triângulo ECD.

Definição 1.2: Um quadrado é um retângulo com todos os lados iguais.

O quadrado é uma figura interessante para estudar áreas, pois este pode ser decomposto em quatro triângulos idênticos, todos retângulos e isósceles (dois lados com iguais medidas). No quadrado ABCD da Figura 1.3, suas diagonais AC e BD são perpendiculares (fazem 90° entre si) e se intersectam em seus pontos médios, ou seja, os segmentos AE, BE, CE e DE têm a mesma medida.

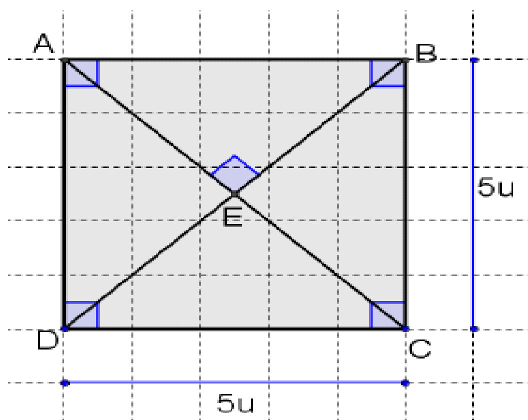


Figura 1.3 – O quadrado ABCD pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos, isósceles e congruentes.

Exemplo 1.2: Da Definição 1.1, a área A_Q do quadrado ABCD da Figura 1.3 é A_Q = 5 × 5 = 25 u^2. Observe que este quadrado pode ser decomposto em dois triângulos retângulos e congruentes, ABD e CBD. Logo, estes têm as mesmas áreas, cada uma com metade da área do retângulo. Observe também que este retângulo pode ser decomposto em quatro triângulos, ABE, BEC, CED e DEA, todos retângulos e congruentes, logo, cada um destes triângulos têm um quarto de área da área total do retângulo. Portanto, sendo A_1 e A_2 as áreas dos triângulos congruentes a BCD e AEB, respectivamente, então,

$$A_1 = \frac{1}{2} \times A_Q = \frac{25}{2} = 12{,}5\ u^2$$

e

$$A_2 = \frac{1}{4} \times A_Q = \frac{25}{4} = 6{,}25\ u^2.$$

Repare que, na Figura 1.3, cada um dos triângulos, ABE, BEC, CED e DEA têm base medindo $5u$ e altura medindo $2{,}5u$. Logo, pelo Teorema 1.1, suas áreas podem ser calculadas por

$$\frac{5 \times 2{,}5}{2} = 6{,}25u^2.$$

Aula 2. Área de Paralelogramos e Trapézios

Definição 1.3: Um paralelogramo é uma figura plana de quatro lados cujos lados opostos são paralelos.

Na Figura 1.4, MNOP é um paralelogramo com PM paralelo a ON e MN paralelo a PO, além disso, temos também nesta figura que os lados MN, NO, OP e PM têm a mesma medida, daí dizemos que este paralelogramo é um **losango**. Os segmentos PN e MO são ditos diagonais do losango. Estes são perpendiculares e se intersectam em seus respectivos pontos médios. O próximo exemplo nos mostra como calcular a área deste losango.

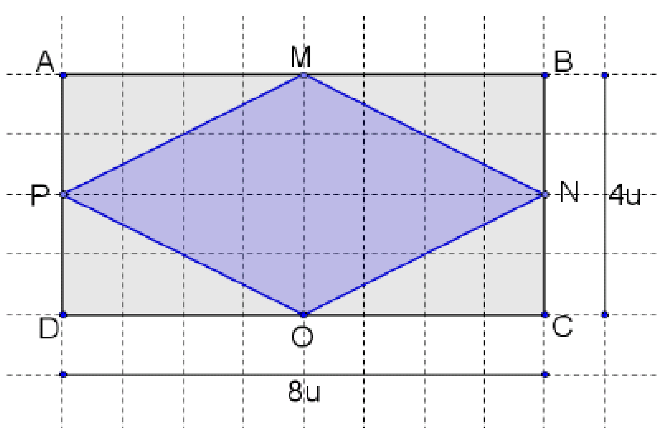


Figura 1.4 – O losango é um paralelogramo de lados iguais.

Exemplo 1.3: Para calcular a área do losango MNOP da Figura 1.4, basta observar que o retângulo ABCD desta figura é formado por quatro triângulos retângulos, APM, BNM, NCO e PDO, todos de bases medindo $4u$ e altura medindo $2u$ e um losango, MNOP. Pelo Teorema 1.1, a área de cada triângulo é $\frac{4\times2}{2}$ = $4u^2$ e pela Definição 1.1 a área do retângulo é 8 × 4 = $32u^2$. Portanto, sendo A_L a área do losango, então,

$$4 \times 4u^2 + A_L = 32u^2 \Longrightarrow A_L = 32u^2 - 16u^2 = 16u^2.$$

Como veremos no teorema a seguir, uma maneira rápida de calcular a área deste losango é multiplicar as medidas de suas diagonais PN e MO e dividir o resultado por 2, ou seja,

$$A_L = \frac{8 \times 4}{2} = 16u^2.$$

Teorema 1.2: Seja MNOP um losango e MO e PN suas diagonais de medidas a e b, respectivamente, então sua área A_L é dada por $A_L = \frac{a\times b}{2}$.

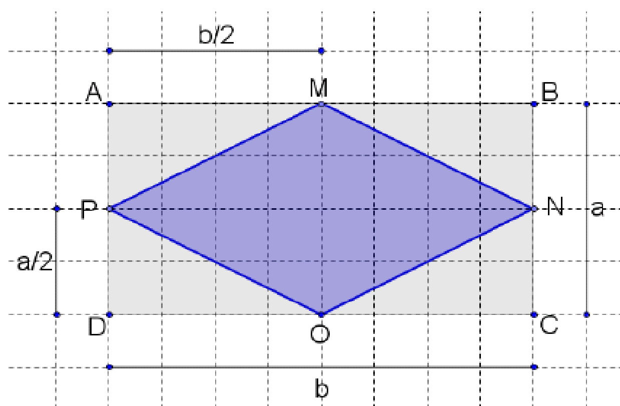


Figura 1.5 – Losango MNOP.

Demonstração:

Para provar este teorema repare que a área do retângulo ABCD na Figura 1.5 é a soma das áreas dos triângulos AMP, BMN, NCO e PDO com a área do losango MNOP. Do Teorema 1.1, a área de cada triângulo é $A_T = \frac{b/2\times a/2}{2} = \frac{a\times b}{8}$ e da Definição 1.1, a área do retângulo é $A_R = a \times b$. Sendo assim, a área A_L do losango é,

$$A_L = A_R - 4 \times A_T = a \times b - 4 \times \frac{a \times b}{8} = \frac{a \times b}{2}.$$

Definição 1.4: Um trapézio é uma figura plana de quatro lados onde dois de seus lados são paralelos.

Com base nesta definição e na Definição 1.3 concluímos que, todo paralelogramo é um trapézio, mas nem todo trapézio é um paralelogramo.

Exemplo 1.4: Queremos agora, medir a área do trapézio ABCD da Figura 1.6. A base AB deste trapézio é chamada de base menor e a base DC é chamada de base maior. O segmento AE é chamado altura do trapézio. Observe que este trapézio pode ser decomposto em três figuras: um retângulo ABFE e dois triângulos, AED e BFC, logo a área do trapézio é a soma das áreas destas figuras. O trapézio da figura é dito isósceles, pois $AD = BC = \sqrt{13}$ e como $EF = 5$ e $DC = 9$, concluímos que $DE = FC = 2$.

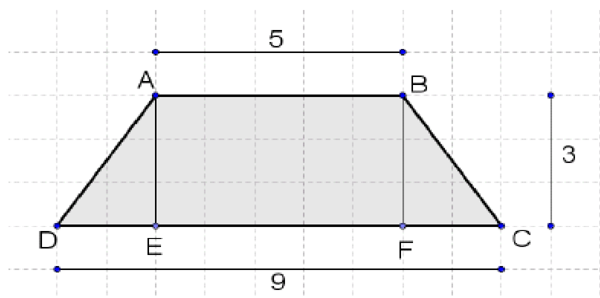


Figura 1.6 – O trapézio isósceles ABCD pode ser decomposto em um retângulo e dois triângulos retângulos.

Do Teorema 1.1 área de cada um dos triângulos, ADE e BFC, é,

$$\frac{2.3}{2} = 3\,u^2$$

e da Definição 1.1 a área do retângulo ABFE é,

$$5.3 = 15\,u^2.$$

Logo, a área do trapézio ABCD é,

$$2 \times 3u^2 + 15u^2 = 21\,u^2.$$

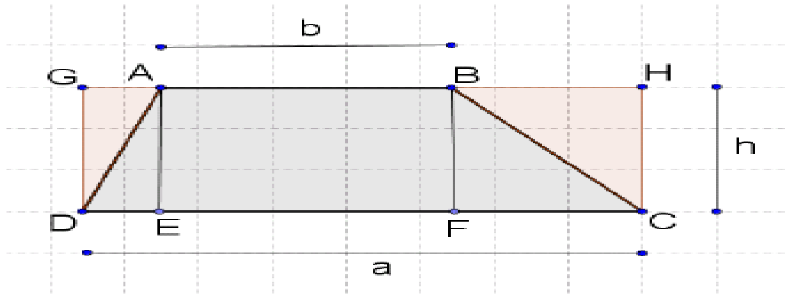


Figura 1.7 – Trapézio ABCD.

O teorema abaixo generaliza uma expressão de como calcular a área de qualquer trapézio.

Teorema 1.3: Seja ABCD um trapézio de base menor AB medindo b, base maior DC medindo a e de altura BF medindo h. Sendo A_T a medida de sua área, então, $A_T = (b + a) \times \frac{h}{2}$.

Para provar este teorema, repare que a área A_T do trapézio ABCD da Figura 1.7 é soma das áreas do retângulo ABFE com a metade da soma das áreas dos retângulos GAED e BHCF, ou seja,

$$A_T = AB.HC + \frac{(DE.HC + FC.HC)}{2}$$

$$= \frac{HC}{2}.(2.AB + DE + FC)$$

$$= \frac{HC}{2}.(AB + (AB + DE + FC))$$

$$= \frac{HC}{2}.(AB + DC).$$

Portanto,

$$A_T = \frac{h}{2}.(b + a).$$

Exemplo 1.4: Como vimos na Definição 1.4, um paralelogramo qualquer é um trapézio com as bases de iguais medidas e lados opostos paralelos. Seja ABCD, na Figura 1.8, um paralelogramo de bases $AB = DC = 7$ e altura medindo $h = 3$. Pelo Teorema 1.3, sua área A_P é:

$$A_P = \frac{h}{2}.(b + a) = \frac{3}{2}.(7 + 7) = 21\,u^2.$$

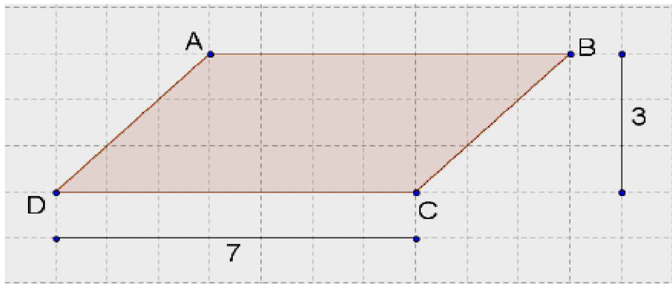


Figura 1.8 – Um paralelogramo é um trapézio.

A área do paralelogramo acima poderia ser calculada simplesmente multiplicando a medida da base $DC = 7$ pela medida de sua altura $h = 3$, ou seja, $A_P = 7 \times 3 = 21\,u^2$, pois projetando o ponto A sobre DC obteremos um triângulo retângulo congruente ao triângulo gerado pela projeção de B sobre o prolongamento de DC, assim sobrepondo esses triângulos podemos transformar ABCD em um retângulo que com visto na primeira aula sua área é dada pelo produto de suas dimensões.

Aula 3. O Teorema de Pitágoras

Quando trabalhamos com triângulos retângulos e conhecemos as medidas de dois de seus lados, a medida do terceiro lado pode ser calculada em função das duas outras.

Teorema 1.4: (Teorema de Pitágoras) Sejam a e b as medidas dos catetos de um triângulo retângulo. Se c for a medida de sua hipotenusa, então, $a^2 + b^2 = c^2$.

Demonstração:

De fato, na Figura 1.9 temos um quadrado ABCD de lados medindo $(a + b)$ que foi decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes e um quadrado. Repare que sua área A pode ser expressa por,

$$A = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

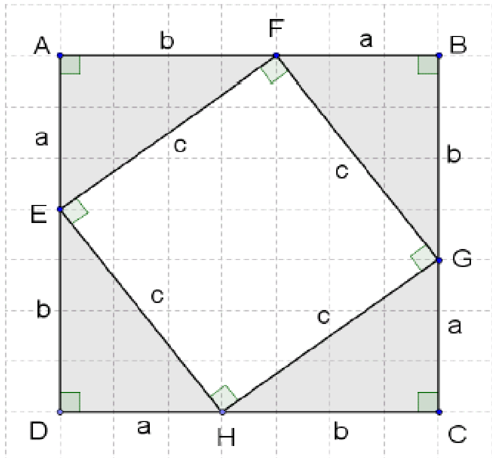


Figura 1.9 - O teorema de Pitágoras

Por outro lado, como este quadrado é formado por quatro triângulos retângulos idênticos de catetos medindo a e b e hipotenusa medindo c e mais um quadrado EFGH de lados medindo c, então sua área A também pode ser calculada pela soma das áreas dos quatro triângulos mais a área do quadrado EFGH, ou seja,

$$A = 4.\left(\frac{a.b}{2}\right) + c^2.$$

Igualando as áreas,

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4.\left(\frac{a.b}{2}\right) + c^2 = 2ab + c^2$$

De onde sai que,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

O exemplo abaixo mostra uma aplicação prática deste teorema.

Exemplo 1.5: Quantos metros de fio são necessários para “puxar luz” de um poste de 6m de altura até a caixa de luz que está ao lado da casa e a 8m da base do poste?

Para obtermos a quantidade de metros de fio necessários para “puxar luz” do poste até a caixa de luz, basta, observando a Figura 1.10, considerarmos o triângulo retângulo gerado em tal situação.

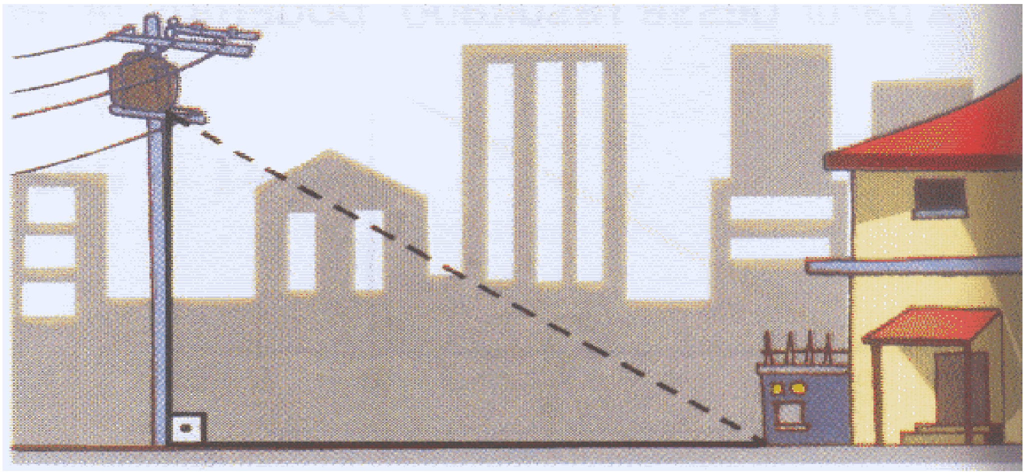


Figura 1.10 – quantidade de metros de fio necessários para “puxar luz” do poste até a caixa de luz.

Assim, temos pelo Teorema de Pitágoras, que se x = (a quantia de fio procurada em metros); então:

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Longrightarrow x = 10m.$$

Exemplo 1.6: Vamos agora, com o auxílio do Teorema de Pitágoras, calcular a área de um triângulo equilátero ABC, na Figura 1.11, em função de seu lado a.

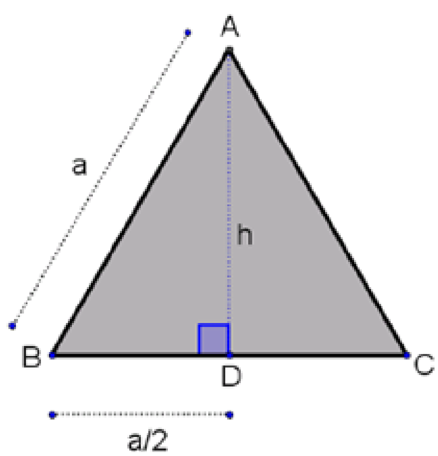


Figura 1.11 – A altura h do triângulo eqüilátero ABC é escrita em função de seu lado a.

Já sabemos, do Teorema 1.1, que a área A_T deste triângulo é dada por $A_T = \frac{a.h}{2}$. Agora basta escrever sua altura h em função de seu lado a. Como ABC é equilátero, então sua altura AD também é mediana e logo $BD = DC = a/2$. Seguimos então aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ADC:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Longrightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Longrightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Portanto a área de ABC é,

$$A_T = \frac{a.h}{2} = \frac{a.\frac{a}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Esta informação será muito útil em problemas de áreas mais elaborados que aparecerão no decorrer deste trabalho.

Aula 4. As Razões Trigonométricas (Seno, Cosseno e Tangente)

Definição 1.5: Num triângulo retângulo ABC, reto em C, de catetos $BC = a$ e $AC = b$ e de hipotenusa $AB = c$, sejam $\beta = \widehat{BAC}$ e $\alpha = \widehat{ABC}$. Definimos como seno (sen) de um ângulo agudo deste triângulo a razão entre o cateto oposto a ele e sua hipotenusa e como cosseno (cos) deste ângulo a razão entre o cateto adjacente a este ângulo e sua hipotenusa e definimos como tangente (tg) deste ângulo a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a este ângulo.

Exemplo 1.7: Na Figura 1.12, os triângulos ABC e DBE são retângulos e semelhantes, pois os ângulos $\widehat{BAC} \approx \widehat{BDE}$ e $\widehat{BCA} \approx \widehat{BED}$.

Pelo teorema de Pitágoras, temos, no triângulo ABC, que:

$$6^2 + 8^2 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

E, no triângulo BDE, que:

$$9^2 + 12^2 = DE^2$$

$$DE = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15.$$

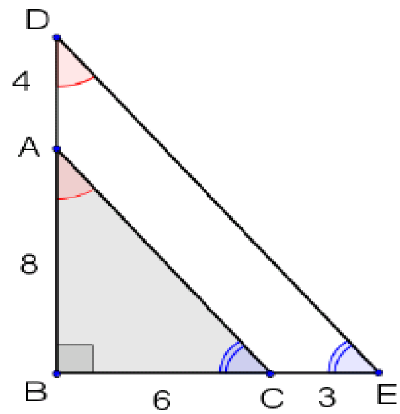


Figura 1.12 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos internos de triângulos semelhantes.

Sejam $\beta = \widehat{BAC}$ e $\alpha = \widehat{BCA}$. Pela Definição 1.5, temos que, no triângulo ABC,

$$sen(\beta) = cos(\alpha) = \frac{6}{10} = 0{,}60,$$

$$cos(\beta) = sen(\alpha) = \frac{8}{10} = 0{,}80,$$

$$tg(\beta) = \frac{6}{8} = 0{,}75, \text{ e}$$

$$tg(\alpha) = \frac{8}{6} \approx 1{,}33.$$

No triângulo DBE,

$$sen(\beta) = cos(\alpha) = \frac{9}{15} = 0{,}60,$$

$$cos(\beta) = sen(\alpha) = \frac{12}{15} = 0{,}80,$$

$$tg(\beta) = \frac{9}{12} = 0{,}75, e$$

$$tg(\alpha) = \frac{12}{9} \approx 1{,}33.$$

Como podemos perceber, o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo interno à um triângulo não depende do tamanho dos lados deste triângulo, mas sim da abertura de cada ângulo.

De modo geral, seja um triângulo retângulo ABC de catetos $BC = a$, $AC = b$ e hipotenusa $AB = c$, como na Figura 1.13. Sendo $\beta = \widehat{BAC}$ e $\alpha = \widehat{ABC}$, então, pela Definição 1.5, segue que:

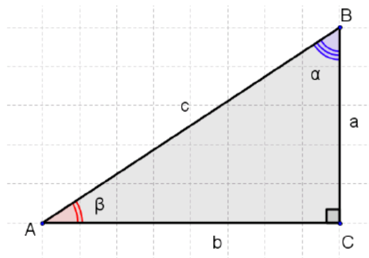


Figura 1.13 – As razões trigonométricas no triângulo retângulo.

$$sen(\beta) = cos(\alpha) = \frac{a}{c},$$

$$cos(\beta) = sen(\alpha) = \frac{b}{c},$$

e

$$tg(\beta) = \frac{1}{tg(\alpha)} = \frac{a}{b}.$$

Aula 5. Seno, Cosseno e Tangente dos Ângulos Notáveis

Ângulos notáveis são ângulos que aparecem com maior freqüência quando estudamos triângulos. São eles os ângulos de 30°, 45° e 60°. Vamos calcular o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e 60°.

Exemplo 1.8: Se o triângulo ABC da Figura 1.14 é equilátero, então todos os seus ângulos internos são iguais a 60°. Também podemos afirmar que sua altura AD é mediana e bissetriz, logo o ângulo entre esta altura e o lado AB é de 30°. Agora, no triângulo retângulo ABD, observe que a altura AD de medida $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ é cateto oposto ao ângulo de 60° e adjacente ao ângulo de 30° e que o segmento BD de medida $a/2$ é o cateto adjacente ao ângulo de 60° e oposto ao de 30° e que o lado AB de medida a é sua hipotenusa.

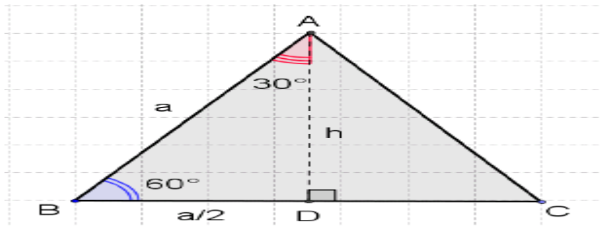


Figura 1.14 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°.

Usando da Definição 1.5 de razões trigonométricas no triângulo ADB, concluímos que:

$$sen(30°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}\,, \qquad cos(30°) = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad tg(30°) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$sen(60°) = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad cos(60°) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}\,, \qquad tg(60°) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}.$$

No próximo exemplo vamos calcular as razões trigonométricas para o ângulo de 45°.

Exemplo 1.9: Seja ABCD um quadrado de lados a, como na Figura 1.15. Traçando sua diagonal AC temos que o triângulo ADC é retângulo e isósceles com seus catetos $AD = DC = a$.

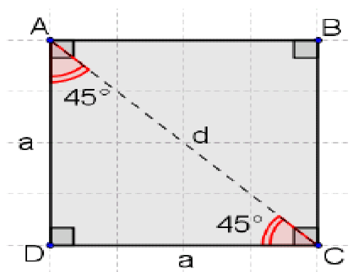


Figura 1.15 – Razões trigonométricas do ângulo de 45°.

Seja d a medida da diagonal desse quadrado que é também a hipotenusa do triângulo ADC. Então, pelo Teorema de Pitágoras,

$$a^2 + a^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Usando agora as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo segue que:

$$\cos(45°) = sen(45°) = \frac{a}{d} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{e } tg(45°) = \frac{a}{a} = 1.$$

Aula 6. Aplicando as Razões Trigonométricas no Cálculo de Área

Já sabemos calcular a área de um losango quando conhecemos as medidas de suas diagonais, mas nem sempre as conhecemos. O próximo exemplo nos traz uma situação onde para calcular a área de um losango, precisamos calcular primeiro as medidas de suas diagonais.

Exemplo 1.10: O losango da Figura 1.16 tem perímetro 12 u e um de seus ângulos obtuso mede 120°.

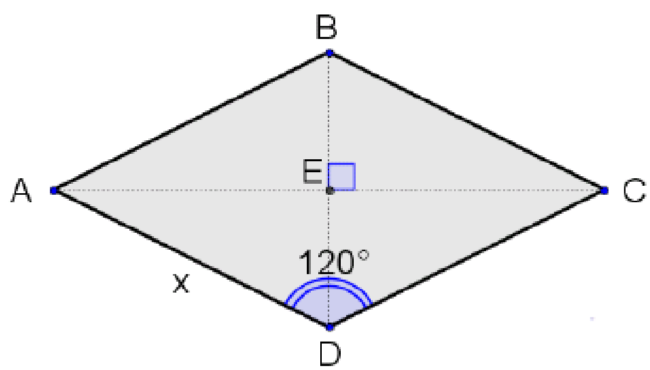


Figura 1.16 – A área do losango pelo seu perímetro e um de seus ângulos internos.

As diagonais AC e DB deste losango são perpendiculares entre si e, além disso, são bissetrizes dos ângulos internos deste losango. Seja E o ponto de interseção dessas diagonais, logo ABE é um triângulo retângulo e $\widehat{ADE}$ = 60°. Como o perímetro do losango é 12u, então cada lado x mede 3u.

Para descobrir a medida da diagonal AC, basta encontrar a medida do segmento AE e dobrar,

$$sen(60°) = \frac{AE}{X} \implies AE = X.sen(60°) = 3.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

logo,

$$AC = 2AE = 3\sqrt{3}\,u.$$

Do mesmo modo, para descobrir a medida da diagonal DB, vamos descobrir primeiro a medida do segmento ED e depois dobrar,

$$\cos(60°) = \frac{ED}{X} \Longrightarrow ED = X.\cos(60°) = 3.\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

logo,

$$DB = 2ED = 3\,u.$$

Finalmente, pelo Teorema 1.2, a área do losango é,

$$A_L = \frac{AC.DB}{2} = \frac{3\sqrt{3}.3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}u^2$$

Exemplo 1.11: O trapézio ABCD da Figura 1.17 é um trapézio retângulo. Queremos sua área em função de duas de suas medidas a e b, sabendo que o lado AD forma um ângulo de 45° com sua base maior.

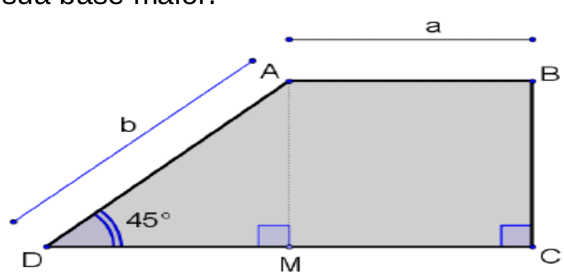


Figura 1.17 – O trapézio ABCD é retângulo.

Neste trapézio, M é a projeção do ponto A sobre a base maior DC do trapézio. Considerando AM como altura h, pela Definição 1.5,

$$tg(45°) = \frac{AM}{DM} = 1 \text{ e } sen(45°) = \frac{AM}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De onde temos que,

$$AM = DM \text{ e } AM = b\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo,

$$DC = b\frac{\sqrt{2}}{2} + a \quad \text{e} \quad h = b\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicando o Teorema 1.3, temos que a área do trapézio é,

$$A_T = \frac{b\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \times \left(b\frac{\sqrt{2}}{2} + a + a\right) = \frac{b^2}{4} + \frac{ba\sqrt{2}}{2} = \frac{b^2+2ba\sqrt{2}}{4}.$$

Exemplo 1.12: Vamos agora, com o uso da trigonometria, calcular a área de um paralelogramo, sabendo que um de seus lados é o dobro do outro e que o ângulo entre eles é de 60°.

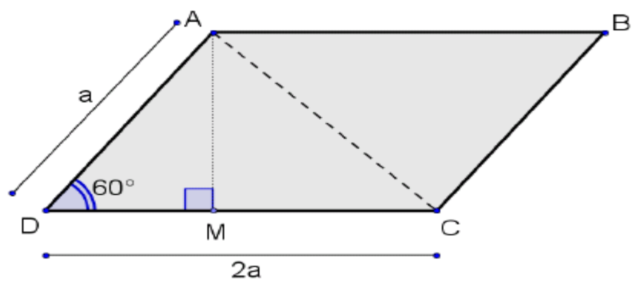


Figura 1.18 – Área do paralelogramo por um de seus ângulos internos.

Na Figura 1.18, ABCD é um paralelogramo, logo $AB = DC$ e $AD = BC$ e, portanto, pelo caso lado, lado e lado, os triângulos ADC e CBA são congruentes, pois o lado AC é comum aos dois. Desta forma, basta calcular a área do triângulo ADC e dobrar para ter a área do paralelogramo ABCD. Então vamos lá. AM é altura do triângulo ADC e também do triângulo retângulo ADM. Daí, pela Definição 1.5,

$$sen(60°) = \frac{AM}{a}$$

o que implica em,

$$AM = a.sen(60°).$$

Pelo Teorema 1.1, a área do triângulo ADC é,

$$A_T = \frac{DC \times AM}{2} = \frac{2a \times asen(60°)}{2} = a^2 sen(60°) = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área A_L do losango é,

$$A_L = 2.A_T = 2.a^2\frac{\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$$

E aqui termina a primeira parte de nossos estudos, os conhecimentos até aqui adquiridos são de fundamental importância para prosseguir com as próximas aulas que virão.

Abaixo segue uma tabela de razões trigonométricas para os ângulos agudos inteiros.

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

Tabela 1.19 – Razões trigonométricas de ângulos agudos.

2- Áreas de Triângulos Quaisquer

Aula 1. Área de Triângulos Conhecendo as Medidas de seus lados

Dentre os estudos da Geometria, o **triângulo** incide na figura plana mais simples. Porém, é a mais admirável de todas, pois possui várias aplicações diante as ocasiões ligadas ao dia a dia. Os engenheiros usam frequentemente formas triangulares nas suas construções, para torná-las mais protegidas.

Nesta parte de nossos estudos vamos aprender a calcular área de qualquer tipo de triângulo desde que, sejam conhecidos seus lados e/ou seus ângulos.

Queremos agora calcular a área de um triângulo conhecendo apenas as medidas de seus três lados, começaremos então, esta aula, com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1: Na Figura 2.1, o triângulo ABC tem seus lados $AB = 8u$, $AC = 10u$ e $BC = 12u$. Como proceder para calcular sua área?

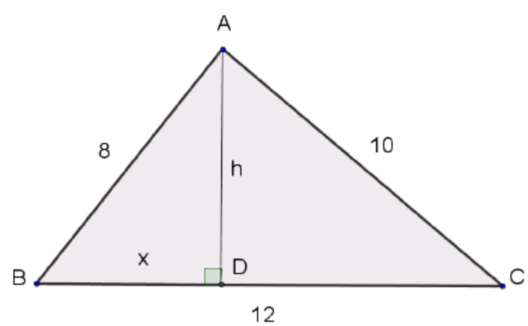


Figura 2.1 – Projeção vertical h e horizontal x do lado AB do triângulo ABC.

A estratégia é a seguinte: Seja h a medida da altura deste triângulo relativa à base BC de medida $12u$ e seja x a medida da projeção do lado AB sobre o lado BC. Pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo ABD temos que,

$$x^2 + h^2 = 8^2 = 64,$$

e no triângulo ADC, temos também,

$$(12 - x)^2 + h^2 = 10^2$$

$$144 - 24x + x^2 + h^2 = 100$$

Substituindo a primeira equação nesta última, segue que,

$$144 - 24x + 64 = 100 \Longrightarrow 24x = 108 \Longrightarrow x = \frac{9}{2}.$$

Voltando na primeira equação e substituindo o valor de x encontraremos o valor de h

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 + h^2 = 64 \Longrightarrow h^2 = 64 - \frac{81}{4} = \frac{175}{4} \Longrightarrow h = \sqrt{\frac{175}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{7}.$$

Finalmente a área A_T do triângulo ABC é:

$$A_T = \frac{12.h}{2} = \frac{12.\frac{5}{2}\sqrt{7}}{2} = 15\sqrt{7}\,u^2.$$

Será que existe um método mais prático e rápido para calcular está área? A resposta é sim, mas antes de conhecer este método veremos o seguinte teorema, cujo resultado é conhecido como Fórmula de Heron.

Teorema 2.1: (Fórmula de Heron) Sejam a, b e c as medidas dos três lados de um triângulo qualquer. Se A é sua área, então $A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semi perímetro deste triângulo.

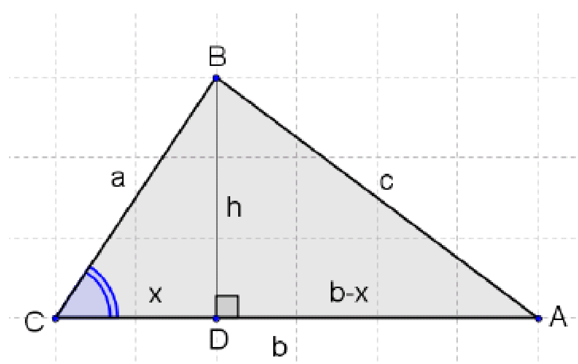


Figura 2.2 – Decomposição do triângulo qualquer ABC em dois triângulos retângulos.

Demonstração:

Para provar este teorema, observe que, na Figura 2.2, a altura BD do triângulo ABC o divide em dois outros triângulos retângulos, a saber, BDC e BDA, dos quais podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + h^2 = a^2,$$

e

$$(b - x)^2 + h^2 = c^2.$$

Isolando h na primeira equação e substituindo na segunda, segue que,

$$(b - x)^2 + a^2 - x^2 = c^2,$$

$$b^2 - 2bx + x^2 + a^2 - x^2 = c^2,$$

logo

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2bx.$$

Portanto

$$x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\,.$$

Voltando na equação $x^2 + h^2 = a^2$ e substituindo o valor de x, temos que:

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2 + h^2 = a^2 \Longrightarrow (2bh)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 =$$

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2).(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = ((a + b)^2 - c^2).(c^2 - (a - b)^2)$$

$$= (a + b + c).(a + b - c).(c + a - b).(c - a + b)$$

$$= (a + b + c).(a + b + c - 2c).(c + a + b - 2b).(c + a - 2a + b).$$

Fazendo $p = \frac{a+b+c}{2}$ $então$ $2p = a + b + c$, assim segue que,

$$(2bh)^2 = 2p.(2p - 2c).(2p - 2b).(2p - 2a) = 16.p.(p - c).(p - b).(p - a),$$

ou seja,

$$2bh = \sqrt{16.p.(p-c).(p-b).(p-a)} = 4.\sqrt{p.(p-c).(p-b).(p-a)}$$

e, portanto,

$$b.h = 2.\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} \quad \Rightarrow \quad \frac{b.h}{2} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}.$$

Concluímos então que $A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$.

Para mostrar a praticidade deste resultado vamos voltar no problema proposto no início desta aula:

Exemplo 2.2: Na Figura 2.1, o triângulo ABC tem seus lados $AB = 8u$, $AC = 10u$ e $BC = 12u$, logo,

$$p = \frac{8+10+12}{2} = 15u$$

e, portanto sua área A será:

$$A = \sqrt{15.(15-8).(15-10).(15-12)} = \sqrt{15.7.5.3} = 15\sqrt{7}u^2$$

Que claro é o mesmo resultado encontrado no Exemplo 2.1.

Aula 2. A Lei dos Cossenos

Quando conhecemos apenas as medidas de dois dos três lados de um triângulo qualquer, se faz necessário o conhecimento de pelo menos um ângulo para poder, então, calcular a medida do terceiro lado e conseqüentemente a área deste triângulo. Para isso, vamos precisar de uma lei importantíssima da trigonometria,que será enunciada no teorema abaixo.

Teorema 2.2: (Lei dos Cossenos) Sejam (AC), (BC) as medidas de dois lados de um triângulo e seja alpha o ângulo entre estes dois lados. Se (AB) é a medida do terceiro lado, então,

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2.(AC).(BC).cos(\alpha).$$

Demonstração:

De fato, se o ângulo α for reto, então, a afirmação acima é exatamente o Teorema de Pitágoras. Podemos, portanto, supor que α não é um ângulo reto. Tracemos a altura de vértice A. Como α não é um ângulo reto, então, o pé desta altura, que designaremos por D, não coincide com o ponto C. Se D coincidir com o ponto B, então, o triângulo ABC é retângulo tendo o ângulo B reto. Neste caso, (AC). $cos(\alpha)$=(BC) e o resultado acima é uma decorrência do Teorema de Pitágoras. Assim, podemos supor que B, C e D são pontos distintos. Como ADB e ADC são triângulos retângulos, tem-se

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

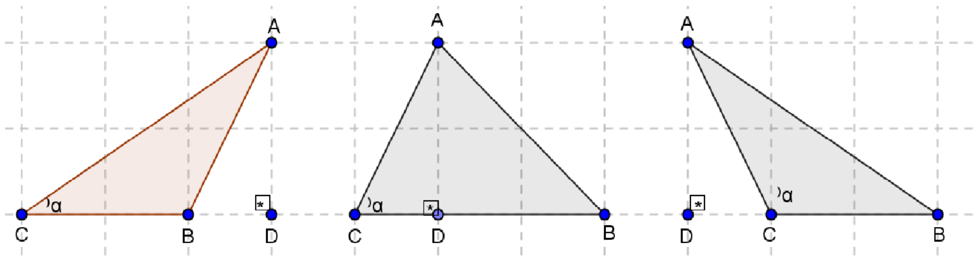


Figura 2.3: Triângulo qualquer de lados a, b e c

Logo, subtraindo-se estas duas equações, obtem-se

$$(AB)^2 - (AC)^2 = (BD)^2 - (DC)^2.$$

Agora iremos substituir o termo $(BD)^2$ desta equação. Para isto, teremos de considerar três possibilidades. (Veja figura 2.3).

a) C está entre B e D.
   Neste caso, tem-se (DC)+(BC)=(BD). Substituindo-se (BD) por (DC)+(BC), desenvolvendo-se o quadrado e simplificando-se os termos, a equação acima torna-se:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 + 2.(BC).(DC).$$

Observe que (DC)=(AC). $cos(\alpha)$ e que $cos(\alpha)$=- cos(180º – α)=- $cos(\alpha)$. Assim, o resultado fica demonstrado neste caso.

b) D está entre C e B.

Neste caso, tem-se (BD)+(DC)=(BC) e, portanto, (BD)=(DC)-(BC). Substituindo-se como no caso anterior este valor de (BD), obtem-se

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2.(BC).(DC).$$

Observando-se que (DC)=(AC). $cos(\alpha)$ obtém-se o resultado,

c) B está entre C e D.

Este caso é tratado de forma semelhante ao anterior.

Vamos aplicar este resultado no seguinte exemplo.

Exemplo 2.3: Um triângulo ABC é tal que AB = 10u, BC = 12u e o ângulo $\widehat{ABC}$ = 60°. Quanto mede sua área?

Pela lei dos cossenos, fazemos a = 10u, b = 12u e α = 60°. Daí temos:

$$c = \sqrt{10^2 + 12^2 - 2 \times 10 \times 12 \times \cos(60°)}\ ,$$

$$c = \sqrt{100 + 144 - 120},$$

assim,

$$c = \sqrt{124} = 2\sqrt{31}\ u.$$

Aplicando agora a fórmula de Heron, fazemos,

$$p = \frac{10 + 12 + 2\sqrt{31}}{2} = 11 + \sqrt{31}\ u$$

Logo temos que sua área A é,

$$A = \sqrt{(11+\sqrt{31}).(11+\sqrt{31}-10).(11+\sqrt{31}-12).(11+\sqrt{31}-2\sqrt{31})} \rightarrow$$

$$A = \sqrt{(11+\sqrt{31}).(1+\sqrt{31}).(-1+\sqrt{31}).(11-\sqrt{31})} \rightarrow$$

$$A = \sqrt{\left(11^2-(\sqrt{31})^2\right).((\sqrt{31})^2-1^2)} \rightarrow$$

$$A = \sqrt{(121-31).(31-1)} \ .$$

Portanto, temos que $A = \sqrt{90.30} = 30\sqrt{3}\ u^2$.

Aula 3. Calculando a Área da Pracinha

No próximo exemplo temos uma situação onde calculamos a área de um quadrilátero separando-o em dois triângulos quaisquer. Este método é muito útil para calcular área de polígonos com mais de três lados.

Exemplo 2.4: Na Figura 2.4, temos uma pracinha com o formato de um quadrilátero ABCD, tal que AB = 60u, BC = 70u, CD = 50u, DA = 80u e ângulo $\widehat{CDA}$ = 120°. Quanto de unidade de área é necessário para preencher toda a pracinha?

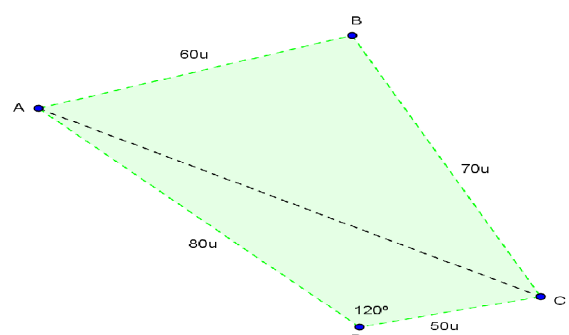


Figura 2.4 – Uma pracinha ABCD com o formato de um quadrilátero.

Precisamos então calcular a área desse quadrilátero. Para isso, é necessário descobrir a medida da diagonal AC. Feito isto, basta aplicar a fórmula de Heron para calcular as áreas dos triângulos ABC e ACD.

Pela lei dos cossenos, no triângulo ACD temos que:

$$AC = \sqrt{80^2 + 50^2 - 2 \times 80 \times 50 \times \cos(120°)}$$

Usando a seguinte propriedade do cosseno,

cos(a+b)=cos(a).cos(b)-sen(a).sen(b),

temos

$$\cos(120°) = \cos(60° + 60°) = cos^2(60°) - sen^2(60°) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1}{2},$$

substituindo,

$$AC = \sqrt{6400 + 2500 + 4000} = \sqrt{12900} = 10\sqrt{129}u \text{ .}$$

Aplicando agora a fórmula de Heron separadamente em cada triângulo, temos que, no triângulo ABC,

$$p = \frac{60 + 70 + 10\sqrt{129}}{2} = 5\left(13 + \sqrt{129}\right),$$

logo, sua área é,

$$A_{ABC} = \sqrt{(5)\left(13 + \sqrt{129}\right).(5)\left(1 + \sqrt{129}\right).(-5).\left(1 - \sqrt{129}\right).(5).\left(13 - \sqrt{129}\right)} =$$

$$800\sqrt{5}.$$

Assim,

$$A_{ABC} = 800\sqrt{5}u^2.$$

No triângulo ACD, temos,

$$p = \frac{80 + 50 + 10\sqrt{129}}{2} = 5\left(13 + \sqrt{129}\right)u$$

logo, sua área é,

$$A_{ACD} = \sqrt{(5)^4.\left(13 + \sqrt{129}\right).\left(-3 + \sqrt{129}\right).\left(3 + \sqrt{129}\right).\left(13 - \sqrt{129}\right)} = 1000\sqrt{3},$$

Portanto

$$A_{ACD} = 1000\sqrt{3}u^2.$$

Logo, a área da pracinha ABCD é,

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = 800\sqrt{5} + 1000\sqrt{3} \approx 3521u^2.$$

Aula 4. Um Método Alternativo

O problema proposto no Exemplo 2.3 pode ser resolvido por um método alternativo que veremos a partir de agora.

Exemplo 2.5: Na Figura 2.5, temos que $BC = 12u$ é uma base do triângulo ABC e que $AD = h$ é sua altura relativa a esta base. Sendo A sua área, então $A = \frac{12.h}{2}$.

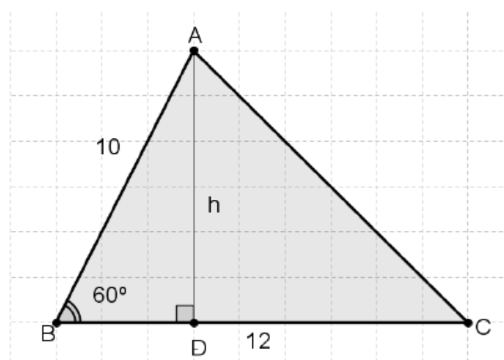


Figura 2.5 – A altura h do triângulo ABC como decomposição do seu lado AB.

Neste caso, basta descobrir a medida h de sua altura, para isso, observe que h é o cateto oposto ao ângulo $\hat{B} = 60°$ e, portanto,

$$h = 10.sen(60°) = 10.\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Daí, segue que:

$$A = \frac{12.h}{2} = 6.5\sqrt{3} = 30\sqrt{3}\,u^2.$$

O teorema abaixo generaliza este caso.

Teorema 2.3: Sejam a e b a medida de dois lados quaisquer de um triângulo, e α a medida do ângulo entre eles. Sendo A sua área, então temos que A é dada pela expressão

$$A = \frac{ab\, sen(\propto)}{2}.$$

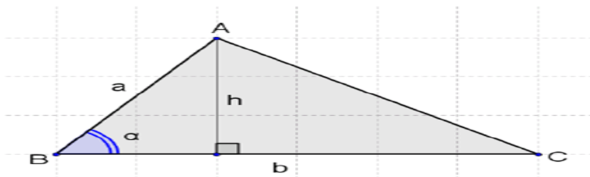


Figura 2.6 : Triângulo ABC

Demonstração:

De fato, basta perceber que,

$$h = a\ sen \propto$$

e então,

$$A = \frac{b.h}{2} = \frac{ba\, sen(\propto)}{2}.$$

Exemplo 2.6: Vamos aplicar este resultado calculando a área de um paralelogramo de lados medindo 9 u e 12 u e ângulo agudo de 45°.

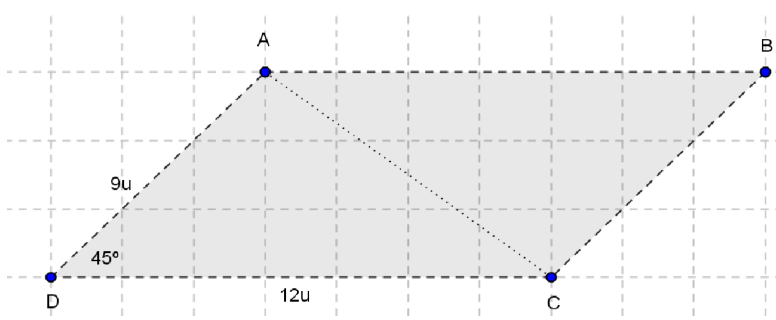


Figura 2.7 – Decompondo o paralelogramo em dois triângulos congruentes.

Na Figura 2.7, a diagonal AC divide o paralelogramo ABCD em dois triângulos congruentes ACD e ACB, assim a área A_P do paralelogramo é o dobro da área A_T do triângulo ACD, logo:

$$A_P = 2.A_T = 2.\frac{a.b.sen(\propto)}{2} = 9.12.sen(45°) = 108.\frac{\sqrt{2}}{2} = 54\sqrt{2}\,u^2.$$

Aula 5. A Lei dos Senos

Vamos agora tratar de triângulos quando conhecemos seus ângulos internos e um de seus lados. Repare que basta conhecer dois dos três, pois o terceiro é o suplementar da soma dos conhecidos. Definimos que $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ significam respectivamente os ângulos nos pontos A, B e C.
O próximo teorema enuncia mais uma importante lei da trigonometria, a lei dos senos.

Teorema 2.4: (Lei dos Senos) Num triângulo ABC seja a a medida do lado oposto ao vértice A, b a medida do lado oposto ao vértice B e c a medida do lado oposto ao vértice C, então,

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}.$$

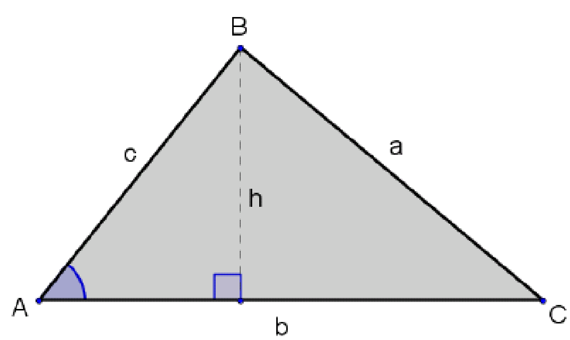


Figura 2.8: Lei dos Senos.

Demonstração:
Para provar este teorema, observe que, na Figura 2.8 a altura relativa à base AC do triângulo ABC mede h, logo temos que,

$$sen(\hat{A}) = \frac{h}{c} \;\Rightarrow\; h = c.sen(\hat{A}),$$

$$sen(\hat{C}) = \frac{h}{a} \implies h = a.sen(\hat{C}),$$

igualando as equações acima, segue que,

$$c.sen(\hat{A}) = a.sen(\hat{C}) \implies \frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}.$$

Para mostrar que,

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})},$$

basta seguir o mesmo raciocínio anterior tomando a altura relativa a base AB.

Vamos aplicar este resultado para resolver o próximo exemplo.

Exemplo 2.7: Dado o triângulo ABC da Figura 2.9, cujos ângulos $\hat{B}$ = 45°, $\hat{C}$ = 30° e a medida de um de seus lados é AB = 6, calcular sua área.

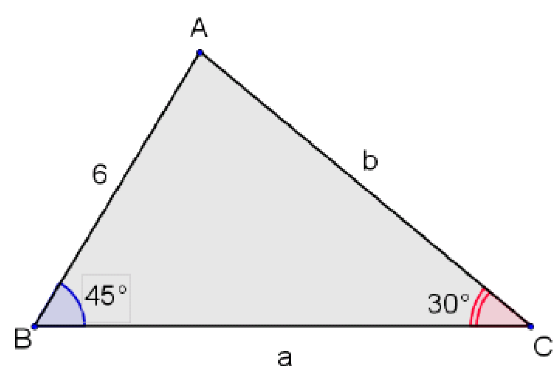


Figura 2.9: Triângulo ABC com ângulo de 30º e 45º e lado 6.

Pela lei dos senos,

$$\frac{6}{sen(30°)} = \frac{b}{sen(45°)} \implies b = \frac{6.sen(45°)}{sen(30°)} = \frac{6\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}5.$$

Aplicando agora a lei dos cossenos, temos que,

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A})},$$

Ou seja,

$$a = \sqrt{72 + 6^2 - 2 \times 6\sqrt{2} \times 6.\cos(105°)}.$$

Utilizando a propriedade do cosseno da soma de dois ângulos, obtemos

$$\cos(105°) = \cos(45° + 60°) = \cos(45°).\cos(60°) - \text{sen}(45°).\text{sen}(60°) = 1 - \sqrt{3},$$

substituindo temos,

$$a = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Usando o Teorema 2.3, temos que a área do triângulo é

$$A = \frac{a.c.\text{sen}(45°)}{2} = \frac{6\sqrt{2+\sqrt{3}}.6\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = 9\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \approx 24{,}6u^2.$$

É interessante observar que o maior lado do triângulo se opõe ao maior ângulo e que o menor lado se opõe ao menor ângulo.

Exemplo 2.8: O exemplo anterior pode ser resolvido também, usando apenas a trigonometria básica e a idéia primitiva de área de triângulo. Acompanhe esta solução alternativa com base na Figura 2.10.

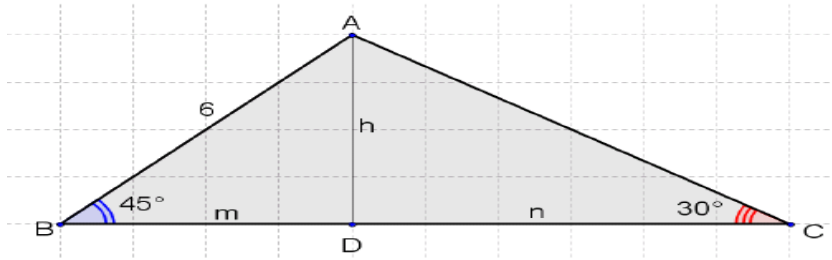


Figura 2.10 – Decomposição do triângulo ABC em dois triângulos retângulos.

A altura AD divide ABC em dois outros triângulos retângulos ADB e ADC, no primeiro, h é cateto oposto ao ângulo de 45°, logo:

$$sen(45°) = \frac{h}{6} \Longrightarrow h = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}u.$$

Ainda no triângulo ADB, m é cateto adjacente ao ângulo de 45°, assim:

$$\cos(45°) = \frac{m}{6} \Longrightarrow m = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}u.$$

Por outro lado, no triângulo ADC, n é cateto adjacente ao ângulo de 30°, logo:

$$tg(30°) = \frac{h}{n} \Longrightarrow n = \frac{h}{tg(30°)} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3\sqrt{6}u.$$

Finalmente, seja A_T a área do triângulo ABC, então A_T é a metade do produto da medida de sua base $(m + n)$ pela medida de sua altura h:

$$A_T = \frac{(m+n).h}{2} = \frac{(3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}).3\sqrt{2}}{2} = \frac{18 + 18\sqrt{3}}{2} = 9.(1 + \sqrt{3}) \approx 24{,}6u^2.$$

Aula 6: O Triângulo no Plano Cartesiano

Vamos agora fazer uma abordagem analítica dos triângulos, colocando-os num plano cartesiano e vendo seus vértices como um ponto com coordenadas (x, y). Por este ponto de vista analítico o nosso trabalho ficará bem mais fácil.

Começaremos essa aula com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.9: Sejam $A = (5,7)$, $B = (2,3)$ e $C = (9,1)$ os vértices de um triângulo. Qual é a área deste triângulo?

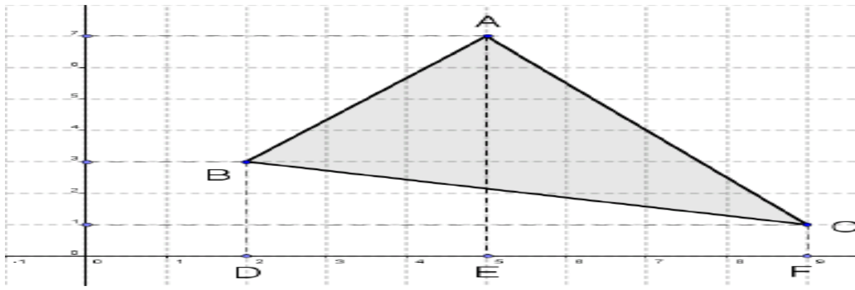


Figura 2.11 – Triângulo ABC no plano cartesiano.

Para calcular sua área, observe que, (ver Figura 2.11) esta é a soma das áreas dos trapézios ABDE e AEFC menos a área do trapézio BDFC, onde $D = (2,0)$, $E = (5,0)$ e $F = (9,0)$ são as projeções dos pontos B, A e C, respectivamente, sobre a abscissa.

Calculando cada área separadamente:

$$A_{ABDE} = \frac{(7+3)}{2} \cdot (5-2) = 5.3 = 15u^2,$$

$$A_{AEFC} = \frac{(7+1)}{2} \cdot (9-5) = 4.4 = 16\,u^2$$

e

$$A_{BDFC} = \frac{(3+1)}{2} \cdot (9-2) = 2.7 = 14u^2.$$

Portanto, a área do triângulo ABC é,

$$A_{ABC} = 15 + 16 - 14 = 17u^2.$$

O teorema abaixo nos fornece uma expressão geral para calcular a área de um triângulo dados seus três pontos no plano cartesiano $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$.

Teorema 2.5: Dados os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ não colineares num plano cartesiano, então a área S do triângulo ABC é dada pela expressão,

$$S = \frac{|y_1x_3 + y_2x_1 + y_3x_2 - y_3x_1 - y_1x_2 - y_2x_3|}{2}.$$

Demonstração:

Para provar este teorema, tomemos as projeções $E = (x_1, 0)$, $F = (x_2, 0)$ e $G = (x_3, 0)$ de A, B e C, respectivamente, sobre o eixo x (ver Figura 2.12). Seja S_1 a área do trapézio $ACGE$, S_2 a área do trapézio $ABFE$, S_3 a área do trapézio $BCGF$ e a área do triângulo ABC. Logo, $S = S_1 - S_2 - S_3$.

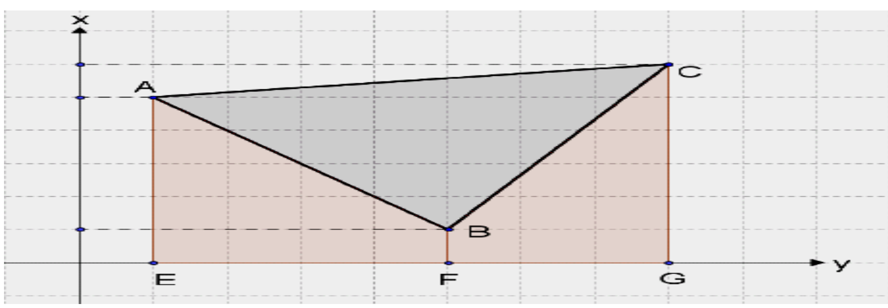


Figura 2.12: Triangulo ABC com suas projeções

Calculando as áreas separadas de cada trapézio temos:

$$S_1 = \frac{(y_3+y_1).(x_3-x_1)}{2} = \frac{y_3x_3 - y_3x_1 + y_1x_3 - y_1x_1}{2},$$

$$S_2 = \frac{(y_2+y_1).(x_2-x_1)}{2} = \frac{y_2x_2 - y_2x_1 + y_1x_2 - y_1x_1}{2},$$

$$S_3 = \frac{(y_3+y_2).(x_3-x_2)}{2} = \frac{y_3x_3 - y_3x_2 + y_2x_3 - y_2x_2}{2}.$$

Como $S = S_1 - S_2 - S_3$, então

$$S = \left(\frac{y_3x_3 - y_3x_1 + y_1x_3 - y_1x_1}{2}\right) - \left(\frac{y_2x_2 - y_2x_1 + y_1x_2 - y_1x_1}{2}\right) - \left(\frac{y_3x_3 - y_3x_2 + y_2x_3 - y_2x_2}{2}\right).$$

Logo

$$S = \left(\frac{y_1x_3+y_2x_1+y_3x_2-y_3x_1-y_1x_2-y_2x_3}{2}\right).$$

Observe que a expressão acima pode assumir valores negativos ou positivos conforme a posição dos pontos A, B e C, uma vez que as coordenadas de A, B e C podem ser positivas ou negativas; o que nos leva a seis possibilidades diferentes de obtermos a área, diferindo apenas no sinal. Assim, devemos tomar o módulo desta expressão para obter a área do triângulo. Portanto,

$$S = \frac{|y_1x_3+y_2x_1+y_3x_2-y_3x_1-y_1x_2-y_2x_3|}{2}.$$

Observe ainda que em cada um dos seis casos citados acima a demonstração é análoga ao caso que fizemos.

Concluindo assim a prova.

Uma forma prática de calcular a expressão acima é através do dispositivo na Figura 2.13:

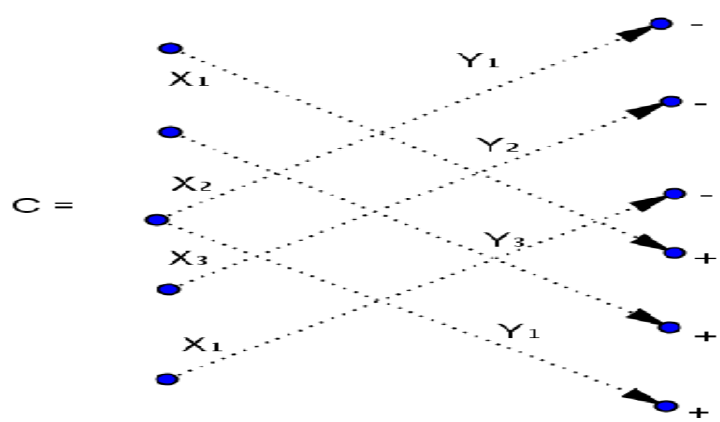


Figura 2.13 – Dispositivo prático para calcular área de triângulos com coordenadas no plano cartesiano.

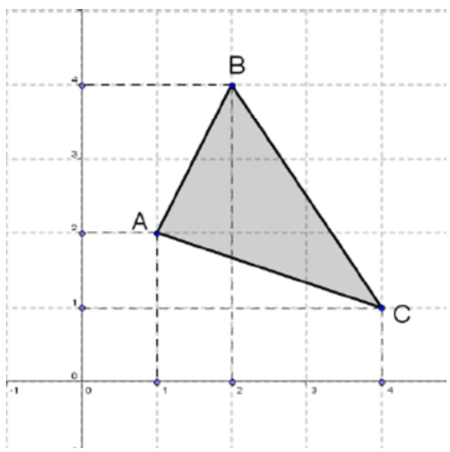
Observe que as coordenadas do ponto A são repetidas na última linha do dispositivo. Além disso, adotamos que os três produtos indicados com a seta para cima são positivos e os outros produtos negativos.

Denotando por C a soma dos produtos obtidos atravéz do dispositivo com os respectivos sinais, segue que a área S do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{|C|}{2}.$$

Vamos aplicar este dispositivo para calcular a área do triângulo no exemplo a seguir.

Exemplo 2.10: Considere o triângulo ABC da Figura 2.14, cujos vértices são A = (1,2), B = (2,4) e C = (4,1).



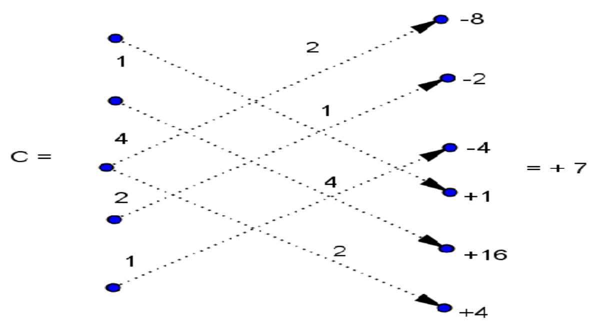


Figura 2.14 – Cálculo da área do triângulo ABC pelo dispositivo prático.

Logo, pelo dispositivo prático, concluímos que a área S do triângulo ABC é,

$$S = \frac{|7|}{2} = 3{,}5\ u^2.$$

E assim encerramos a segunda parte de nossos estudos sobre áreas de figuras planas triangulares. A terceira parte que veremos a seguir é dedicada a áreas de figuras planas regulares, ou seja, figuras planas com todos os lados de iguais medidas.

3- Áreas de Polígonos Regulares

A palavra "polígono" advém do grego e quer dizer muitos (poly) e ângulos (gon). Veremos a seguir detalhadamente um pouco mais sobre áreas de polígonos.

Aula 1: Definindo Polígonos Regulares

Como já definido no Capítulo1 na geometria, um **polígono** é uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada, ou seja, uma figura limitada por linhas retas. A estas linhas retas chamamos lados do polígono.

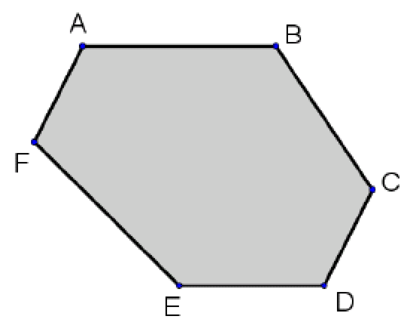


Figura 3.1 – Polígono ABCDEF

A Figura 3.1 é um polígono com 6 lados, conhecido como hexágono. Seus lados são os segmentos de retas AB, BC, CD, DE, EF e FA, A,B,C,D,E e F são chamados de vértices.

Observe que já tratamos das áreas de alguns polígonos neste trabalho, como por exemplo, triângulos e quatriláteros.

Definição 3.2: Dizemos que um polígono é **regular**, quando todos os seus lados e todos os seus ângulos têm as mesmas medidas.

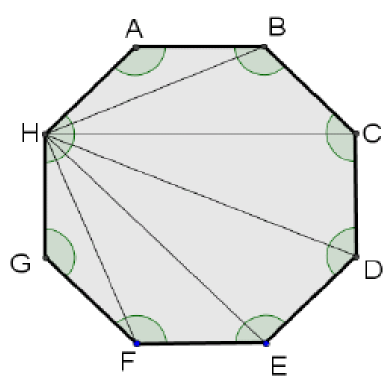


Figura 3.2 – Polígono Regular ABCDEFGH decomposto em 6 triângulos.

Exemplo 3.1: Na Figura 3.2 temos um polígono regular ABCDEFGH com 8 lados e 8 ângulos todos de iguais medidas. Este polígono é conhecido como **octógono regular**. Se a poligonal ABCDEFGH tem comprimento de 20 u, ou seja, o perímetro deste octógono regular é de 20 u, então cada um de seus lados mede,

$$a = \frac{20}{8} = 2{,}5\,u.$$

Para calcular a medida de cada um de seus ângulos internos, basta observar que este octógono pode ser decomposto em 6 triângulos e que a soma dos ângulos internos destes triângulos é a soma dos ângulos internos do octógono. Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180° e o octógono é regular, então temos que a medida de cada um de seus ângulos internos é,

$$S_i = \frac{6 \times 180°}{8} = 135°.$$

Já sabemos calcular a área dos dois primeiros polígonos regulares, o triângulo equilátero e o quadrado. Mas como proceder para calcular a área de um pentágono (5 lados), hexágono (6 lados), heptágono (7 lados),..., n-ágono (n lados), todos regulares? As respostas para estas perguntas estão nas próximas aulas desta terceira parte de nossos estudos e começaremos pelo pentágono regular.

Aula 2. Área de um Pentágono Regular

Um pentágono regular é um polígono com cinco lados iguais e cinco vértices.

Uma curiosidade sobre o pentágono regular é que a razão entre o comprimento de seus lados e o comprimento de suas diagonais é um número irracional conhecido como número de ouro, ou número mágico, representado pela letra grega $\boldsymbol{\varphi}$ (Phi). O número de ouro tem um valor aproximado de $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{1{,}618}$. Essa razão é conhecida como razão áurea.

$$\frac{AB}{AD} = \varphi \cong 1{,}618.$$

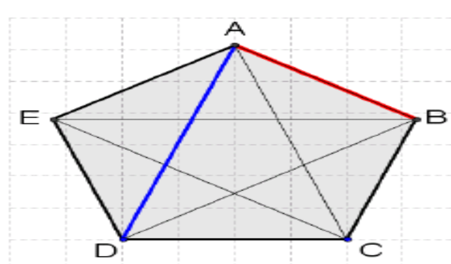


Figura 3.3 – No pentágono regular ABCDE, a razão AB/AD é o número de ouro.

Comecemos então o raciocínio para calcular a área do pentágono regular.

Exemplo 3.2: Sejam ABCDE um pentágono regular de lados medindo a e F um ponto interior a este pentágono eqüidistante de seus cinco vértices, conforme Figura 3.4. Dizemos que F é o centro da circunferência que passa por seus cinco vértices, ou que a circunscreve, ou simplesmente, que F é o ponto central do pentágono. Assim, o ângulo $\widehat{AFB}$, chamado ângulo central, é um quinto de um ângulo de volta inteira (360°), logo,

$$\widehat{AFB} = \frac{1}{5}.360° = 72°.$$

Agora observe o triângulo AEF. Ele é isósceles, pois $AF = EF$. Logo se $FG = h$ é a altura de AEF, também conhecido como apótema do pentágono, então G é ponto médio de AE, dai $AG = a/2$. Por outro lado, $\widehat{AFE} = \widehat{AFB} = 72°$. Daí como AFE é isósceles, então,

$$\widehat{GAF} = \widehat{GEF} = \frac{180°-72°}{2} = 54°.$$

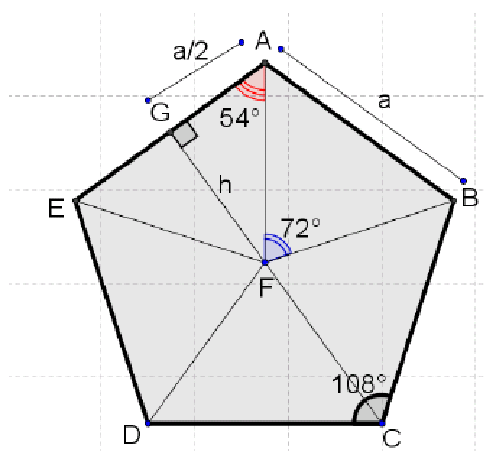


Figura 3.4 – O pentágono ABCDE é decomposto em 5 triângulos isósceles e congruentes.

Finalmente, observe que

$$tg(54°) = \frac{h}{a/2} \Longrightarrow h = \frac{a}{2}tg(54°),$$

e que a área A_5 do pentágono é cinco vezes a área A_T do triângulo AEF, logo

$$A_5 = 5A_T = 5.\frac{a.h}{2} = \frac{5}{2}a\left(\frac{a}{2}tg(54°)\right).$$

Portanto

$$A_5 = \frac{5}{4}a^2 tg(54°).$$

Que é a fórmula para calcular a área de qualquer pentágono regular de lados a.

Repare também que o raio do círculo que circunscreve o pentágono é AF que pode ser calculado por,

$$cos(54°) = \frac{a/2}{AF} \Longrightarrow AF = \frac{a}{2\cos(54°)}.$$

Essa última relação é bastante útil. Vejamos a seguinte situação, onde temos um pentágono regular inscrito dentro de círculo.

Exemplo 3.3: O pentágono regular da Figura 3.5 é tal que seus vértices estão sobre um círculo de raio 1 u. Queremos calcular sua área.

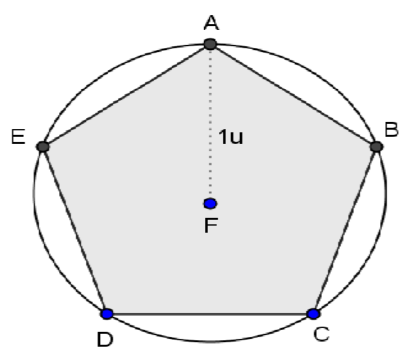


Figura 3.5 – Um pentágono regular inscrito

Para isto, repare que no exemplo anterior temos a relação,

$$AF = \frac{a}{2\cos(54°)}.$$

Como o raio AF do círculo mede $1u$,

$$1 = \frac{a}{2\cos(54°)} \Longrightarrow a = 2\cos(54°)u.$$

Também do exemplo anterior, temos que a área de um pentágono regular é dada por,

$$A_5 = \frac{5}{4}a^2 tg(54°).$$

Substituindo o valor de a temos,

$$A_5 = \frac{5}{4}(2\cos(54°))^2 tg(54°) = \frac{5}{2}\cos(54°)\,sen(54°) \approx \frac{5}{2} \times 0{,}5878 \times 0{,}8090$$

Logo, a área desse pentágono é $A_5 \approx 1{,}19\ u^2$.

Exemplo 3.4: Agora, vamos supor que um círculo de raio $1\,u$, tangencie o pentágono interiormente, ou seja, o círculo esta inscrito no pentágono. Qual é a área deste pentágono agora?

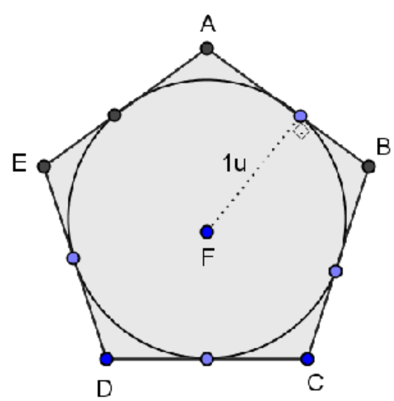


Figura 3.6 – Um círculo inscrito num pentágono regular.

Esta situação pode ser vista na Figura 3.6 e neste caso o apótema do pentágono mede $h = 1\,u$, logo, pela equação deduzida no Exemplo 3.2,

$$h = \frac{a}{2} tg(54°).$$

Substituindo h, encontramos a medida a de cada um dos lados do pentágono,

$$1 = \frac{a}{2} tg(54°) \implies a = \frac{2}{tg(54°)}.$$

Substituindo na fórmula para área de pentágono regular,

$$A_5 = \frac{5}{4}\left(\frac{2}{tg(54°)}\right)^2 tg(54°) = \frac{5}{2tg(54°)} \approx \frac{5}{2 \times 1{,}3764} \approx 1{,}82\ u^2.$$

Aula 3. Área de um Hexágono Regular

Um hexágono regular é um polígono de seis lados e seis ângulos internos, todos iguais.

Um fato interessante é a forma hexagonal que as abelhas dão aos favos. As abelhas quando fabricam o mel precisam guardá-lo em compartimentos individuais de tal maneira que formem um mosaico sem lacunas, já que têm que aproveitar ao máximo o espaço.

Figura 3.7 – As abelhas guardam seu mel em compartimentos hexagonais.

Tais mosáicos só podem ser feitos utilizando **triângulos**, **quadrados** e **hexágonos**. Por que as abelhas terão escolhido os hexágonos, se estes são mais difíceis de construir? Este é um problema isoperimétrico (de igual perímetro). Papus (Papus de Alejandría, matemático grego que viveu do ano 284 ao 305) demonstrou que, entre todos os polígonos regulares com o mesmo perímetro, tem maior área, aquele que tiver o maior número de lados. Por este motivo, as abelhas constroem os favos de forma hexagonal, uma vez que, gastando a mesma quantidade de cera, conseguem uma maior superfície para guardar o mel.

Mas como calcular a área de um hexágono regular? Aprenderemos agora neste próximo exemplo.

Exemplo 3.5: Para medir a área de um hexágono regular basta perceber que este pode ser decomposto em seis triângulos eqüiláteros.

De fato, seja ABCDEF o hexágono regular da Figura 3.8 cujos lados medem a e O um ponto interior a este que equidista de seus vértices. Observe que no triângulo ABO o ângulo,

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{6}.360° = 60°.$$

Observe também que, como $AO = BO$ então ABO é isósceles e, portanto

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°.$$

Do qual podemos concluir que ABO é um triângulo equilátero e, portanto sua área A_3, como já vimos no Exemplo 1.7,

$$A_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

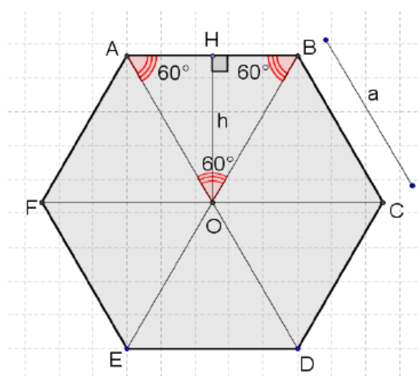


Figura 3.8 – O hexágono regular é decomposto em seis triângulos eqüiláteros.

Portanto, a área A_6 do hexágono regular é

$$A_6 = 6.A_3 = 6.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}.$$

O que é uma fórmula geral para calcular a área de qualquer hexágono regular de lados a.

É relevante observar que, se um círculo circunscreve um hexágono regular, então seu raio tem a mesma medida dos lados deste polígono, ver Figura 3.9.

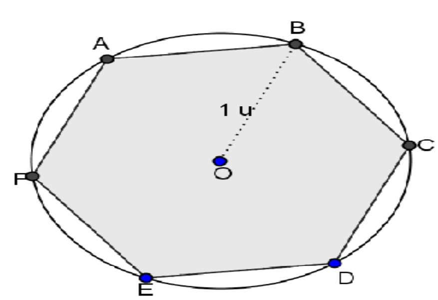


Figura 3.9 – O lado de um hexágono regular inscrito num círculo tem mesmo comprimento que o raio deste

Exemplo 3.6: A área A_6 do hexágono regular da Figura 3.9 circunscrito pelo círculo de raio 1 u é,

$$A_6 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \times 1^2 \times \sqrt{3}$$

$$A_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ u^2.$$

Outro exemplo a considerar é quando o círculo de raio 1u está inscrito no hexágono. Como o seu raio coincide com o apótema h deste polígono, que é a altura do triângulo eqüilátero de lados iguais aos lados do hexágono, que já foi calculado no Exemplo 1.7 é dado por,

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

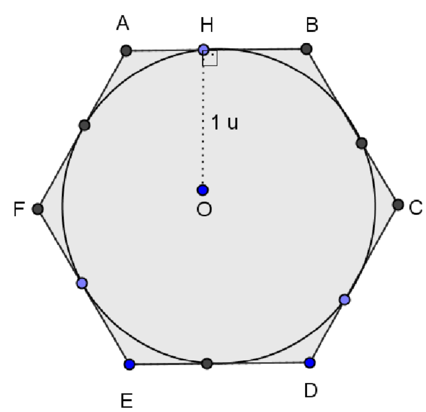


Figura 3.10 – O apótema do círculo inscrito num hexágono regular coincide com o raio deste círculo.

Logo,

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \Longrightarrow 1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Assim, a medida de cada lado desse hexágono é $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Portanto, a área A_6 do hexágono ABCDEF cujo círculo de raio 1 u está inscrito em seu interior é,

$$A_6 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \sqrt{3} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,u^2.$$

O próximo exemplo traz uma situação do dia a dia, na qual precisamos usar conhecimentos sobre área de hexágonos regulares.

Exemplo 3.7: A Figura 3.11 mostra a planta baixa de um terreno que tem a forma de um retângulo de lados medindo 30 m por 25 m. Neste terreno será construída uma piscina, também retangular, de dimensões 22 m por 20 m. O contorno desta piscina será calçado com pedras de cimento de formato hexagonal e regular de lados medindo 12 cm. Quantas pedras no mínimo serão necessárias para realizar este trabalho?

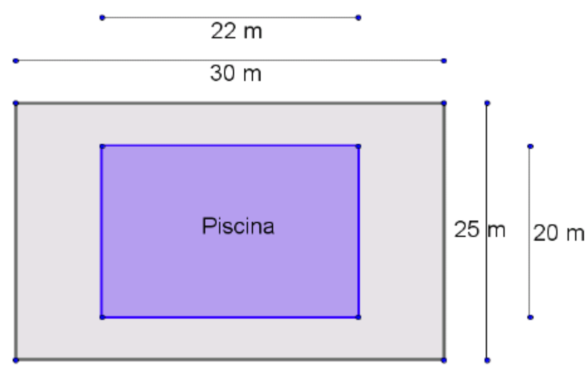


Figura 3.11: Planta baixa da construção de uma piscina.

A área A_C que será calçada é a área do terreno menos a área da piscina, ou seja,

$$A_C = 30 \times 25 - 22 \times 20 = 750 - 440 = 310\,m^2.$$

Por outro lado, a área de cada pedra hexagonal de lados 12 cm é dada pela equação,

$$A_6 = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{12}{100}\right)^2 \times \sqrt{3},$$

$$A_6 = \frac{216}{10000}\sqrt{3}m^2.$$

Portanto, a quantidade de pedras necessárias para calçar a borda da piscina é,

$$\frac{A_C}{A_6} = \frac{310\,m^2}{\frac{216}{10000}\sqrt{3}\,m^2} \approx 8286\,pedras.$$

Aula 4. Área de um Polígono Regular com n Lados (n-ágono)

Vamos agora, de modo geral, encontrar uma expressão que relacione a área de um polígono regular qualquer de n lados com a medida a de cada um de seus lados. O próximo teorema enuncia uma fórmula geral para área de qualquer polígono regular.

Teorema 3.1: A área A_n de um polígono regular de n lados e com cada lado medindo a é dada pela expressão,

$$A_n = \frac{n.a^2}{4}.\, tg\left(\frac{90°.\ (n-2)}{n}\right).$$

Demonstração:

De fato, seja $A_1A_2A_3...A_n$ um polígono regular com n lados, ou seja, um n-ágono, como na Figura 3.12.

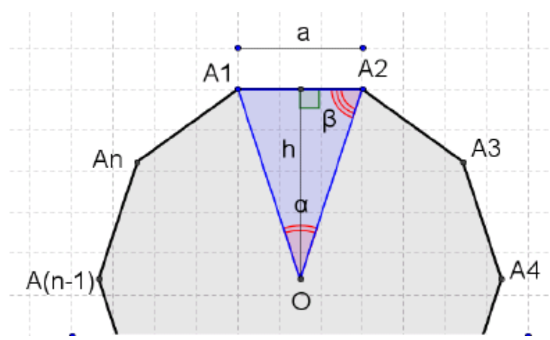


Figura 3.12 – Polígono regular com n lados (n-ágono).

Note que o polígono regular da Figura 3.12 pode ser decomposto em n triângulos de base “a” isósceles e congruentes, sendo um dos vértices em O, o centro da circunferência circunscrita, e cuja altura h é o apótema. Deste modo, a área A_n deste polígono regular é dada por:

$$A_n = n.\frac{a.h}{2}.$$

Observe que $P = na$ é o perímetro do polígono. Logo,

$$A_n = \frac{P.h}{2}.$$

O apótema h do polígono pode ser calculado pela tangente do ângulo β da seguinte forma:

$$tg(\beta) = \frac{h}{a/2} \implies h = \frac{a.tg(\beta)}{2}.$$

Para descobrir o valor do ângulo β basta perceber que o ângulo central α é tal que

$$\alpha = \frac{360°}{n},$$

e daí,

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{180° - \frac{360°}{n}}{2} = \frac{180°.n - 360°}{2.n}.$$

Portanto, a área A_n de um polígono regular com n lados é escrita em função de n e da medida a de cada lado pela expressão,

$$A_n = n.\frac{a.\left(\frac{a.tg(\beta)}{2}\right)}{2} = n.\frac{a.\left(\frac{a.tg\left(\frac{180°.n-360°}{2.n}\right)}{2}\right)}{2} = \frac{n.a^2}{4}.tg\left(\frac{180°.n-360°}{2.n}\right),$$

concluindo assim a prova do teorema.

Exemplo 3.8: Observe que se fizermos $n = 6$ (hexágono regular), teremos:

$$A_6 = \frac{6a^2}{4}.tg\left(\frac{180° \times 6 - 360°}{2 \times 6}\right) = \frac{3}{2}a^2 tg(60°) = \frac{3}{2}a^2.\sqrt{3},$$

que é justamente o resultado que encontramos na aula anterior.

Vamos agora, resolver alguns exemplos aplicando os resultados obtidos na demonstração do Teorema 3.1.

Exemplo 3.9: Se eu dobrasse o número de lados de um polígono regular mantendo a medida de seu lado, a sua área dobraria?

A reposta é não. Como contra exemplo, vamos considerar a área de um polígono regular de 12 lados, o dodecágono regular, e comparar com a área do hexágono regular.

Seja A_{12} a área do dodecágono regular. Assim, pelo Teorema 3.1 temos,

$$A_{12} = \frac{12a^2}{4} tg\left(\frac{180°\times 12 - 360°}{2\times 12}\right) = 3a^2 tg(75°), \text{ e}$$

$$tg(75°) = \frac{sen(75º)}{cos(75º)} = \frac{sen(30º + 45º)}{cos(30º + 45º)} = \frac{sen(30º).cos(45º) + sen(45º).cos(30º)}{cos(30º).cos(45º) - sen(30º).sen(45º)}$$

$$tg(75°) = 2 + \sqrt{3},$$

Logo $$A_{12} = 3a^2\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 11{,}2a^2.$$

Como já sabemos da aula 3 desta 3ª parte, a área A_6 do hexágono regular é,

$$A_6 = \frac{3}{2}a^2.\sqrt{3} \approx 2{,}6a^2.$$

Comparando as áreas de cada polígono, vemos claramente que a resposta é **não**.

Exemplo 3.10: E o que aconteceria com a área, se dobrássemos o tamanho de cada lado a de um polígono regular mantendo constante o número n de lados?

Para responder a essa pergunta, seja A_a a área de um polígono regular qualquer cujos lados medem a e A_{2a} a área do polígono com mesmo número de lados, mas com a medida de cada lado dobrada. Agora basta verificar a razão

$$\frac{A_a}{A_{2a}} = \frac{\frac{n.a^2}{4}.tg\left(\frac{180°.n-360°}{2.n}\right)}{\frac{n.(2a)^2}{4}.tg\left(\frac{180°.n-360°}{2.n}\right)} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, dobrando a medida de cada lado do polígono regular, sua área é quadruplicada.

4- Áreas de Polígonos Não Regulares

O cálculo de áreas de figuras planas desempenha um papel fundamental nos mais diversos ramos da Matemática e em muitas aplicações a outros ramos do conhecimento.

Quando tais figuras planas são polígonos regulares não é tão difícil calcular sua área, como já aprendemos nas aulas anteriores, em contrapartida se torna um tanto complicado quando estas figuras são polígonos com muitos lados e não regulares. Observo que neste capítulo boa parte do seu contexto foi tomada como referência o Trabalho de Conclusão de Curso "Teorema de Pick : uma nova abordagem sobre áreas de figuras para o ensino básico / Fabrício Oliveira Souza. – 2013. " da UFES/PROFMAT.

Aula 1. Conhecendo a Fórmula de Pick

A fórmula de Pick é um resultado do final do século passado e dá um critério interessante para o cálculo de área de polígonos, regulares ou não, com vértices sobre uma malha.

Definição 4.1: Uma malha é um conjunto de pontos no plano cartesiano cujas coordenadas são números inteiros (positivos, negativos ou nulos).

Na Figura 4.1 temos uma malha. Note que cada ponto (x, y) desta malha é tal que x e y são números inteiros.

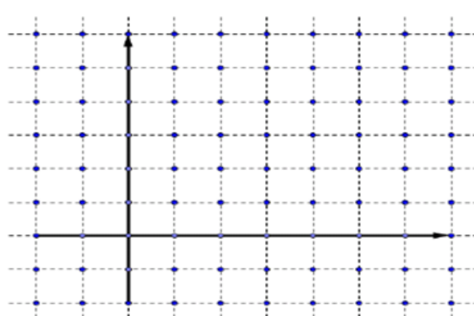


Figura 4.1 – Uma malha.

No exemplo a seguir temos uma situação onde precisamos calcular a área de um polígono não regular cujos vértices estão sobre uma malha.

Exemplo 4.1: Na Figura 4.2 temos um pentágono não regular ABCDE cujos vértices são pontos de uma malha. Como calcular a área deste pentágono?

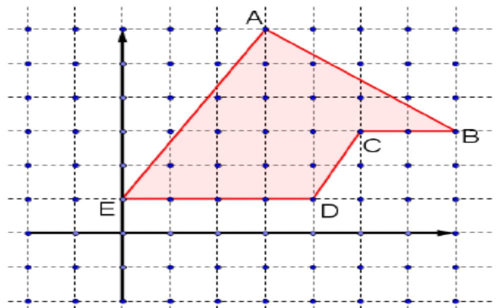


Figura 4.2 – Pentágono não regular ABCDE com vértices sobre uma malha.

Uma solução seria completar esta figura de modo que ela forme um retângulo, co na Figura 4.3.

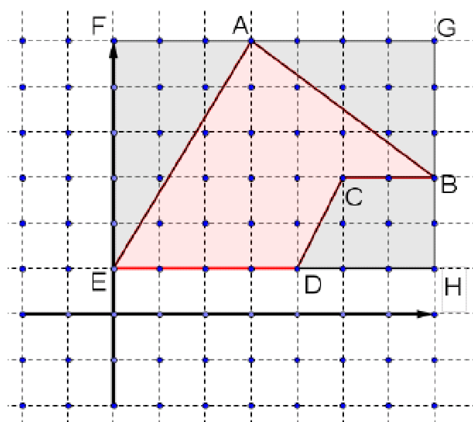


Figura 4.3 – Completando o pentágono de modo que este forme um retângulo.

Agora observe que, a área do retângulo EFGH é a soma das áreas dos triângulos EFA e ABG com a área do trapézio DCBH mais a área do pentágono ABCDE, ou seja,

$$A_{EFGH} = A_{EFA} + A_{ABG} + A_{DCBH} + A_{ABCDE}.$$

Calculando estas áreas, temos que,

$$7 \times 5 = \frac{3 \times 5}{2} + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{2}{2} \times (3 + 2) + A_{ABCDE}$$

$$35 = 7{,}5 + 6 + 5 + A_{ABCDE}$$

$$A_{ABCDE} = 35 - 7{,}5 - 6 - 5 = 16{,}5\, u^2.$$

Este não é o método mais eficiente, mas resolveu nosso problema.

Georg Alexander Pick (1859 – 1942) desenvolveu um teorema em 1899 que permite calcular a área de um polígono simples sobreposto a uma malha quadriculada, relacionando somente os nós localizados nas arestas deste polígono e o número de nós internos a ele. Um nó é definido pela intersecção de duas retas da malha. Um polígono simples é aquele que não possui buracos no seu interior, nem intersecções com suas arestas.

Teorema 4.1: (Teorema de Pick) Seja P um polígono qualquer sobre uma malha, de modo que os vértices do polígono sejam pontos da malha. Seja B o número de pontos da malha sobre as arestas deste polígono e I o número de pontos da malha internos ao polígono. A área A do polígono P será dada por:

$$A = \frac{1}{2}B + I - 1.$$

Provaremos este teorema na próxima aula, até lá, vamos apenas usar este resultado em alguns exemplos.

Exemplo 4.2: Vamos calcular novamente a área do pentágono ABCDE do Exemplo 4.1, agora usando a fórmula de Pick.

Na Figura 4.2 temos 9 pontos da malha sobre as arestas e 13 pontos desta malha internos a este pentágono. Logo, na fórmula de Pick, fazemos $B = 9$ e $I = 13$,

$$A = \frac{1}{2} \times 9 + 13 - 1 = 16{,}5\, u^2.$$

Conferindo com a área calculada no Exemplo 4.1.

Exemplo 4.3: Vamos agora calcular a área do heptágono não regular da Figura 4.4 usando a fórmula de Pick.

Observe que há 30 pontos da malha no interior e 14 pontos da malha sobre as arestas deste polígono, logo $I = 30$ e $B = 14$.

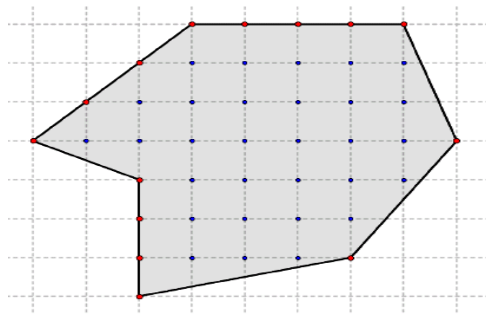


Figura 4.4 – Heptágono não regular com vértices sobre pontos de uma malha.

Portanto, a área A do heptágono é,

$$A = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{1}{2}.14 + 30 - 1.$$

Logo

$$A = 36\ u^2.$$

Para terminar esta aula, vamos resolver mais um exemplo.

Exemplo 4.4: Vamos calcular a área da “ESTRELA” da Figura 4.5.

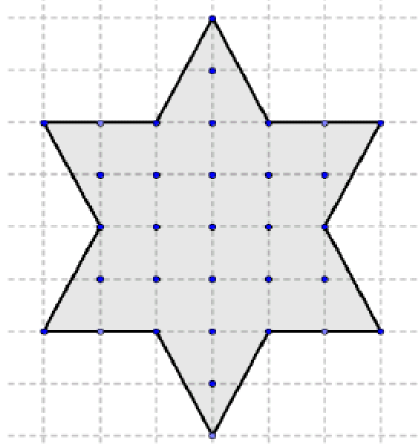


Figura 4.5: Área da estrela.

Podemos contar 16 pontos sobre a borda desta estrela e 17 pontos em seu interior, logo, pela fórmula de Pick, fazendo $B = 16$ e $I = 17$, temos que a área da estrela é,

$$A = \frac{1}{2}B + I - 1 = \frac{1}{2}.16 + 17 - 1,$$

O que implica que

$$A = 24\ u^2.$$

Aula 2. Demonstrando a Fórmula de Pick

Nesta aula vamos demonstrar o Teorema 4.1, mas antes, para fixarmos a idéia, vamos começar calculando a área de um polígono sem o uso da fórmula de Pick.

Primeiro, vamos entender o que é um **Triângulo Fundamental**.

Definição 4.2: Triângulo Fundamental é um triângulo retângulo e isósceles de catetos medindo 1 unidade, como na Figura 4.6.

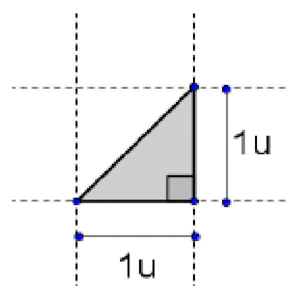


Figura 4.6 – Triângulo Fundamental

Uma forma para encontrarmos a área do polígono da Figura 4.7, é observar que o polígono é composto por 24 triângulos fundamentais. Como a área de cada triângulo fundamental é $\frac{1}{2}$, a área do polígono é,

$$A = 24 \times \frac{1}{2} = 12\ u^2.$$

Uma forma de obter o número de triângulos fundamentais contidos no polígono, é somar todos os ângulos internos deste polígono cujos vértices são pontos sobre suas arestas com todos os ângulos de 360° cujos vértices são pontos internos a este polígono. Assim, teremos que esta soma é igual a 180° vezes o número de triângulos fundamentais que cabem em seu interior.

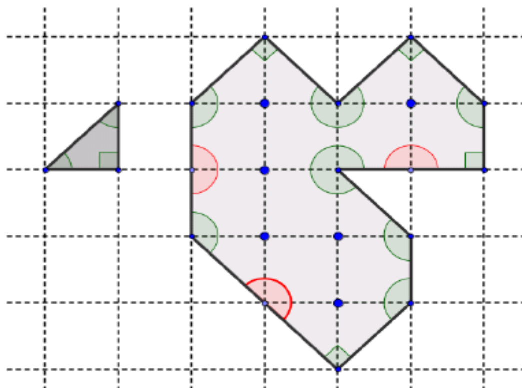


Figura 4.7

Por exemplo, observe que o polígono da Figura 4.7 tem 11 lados e, portanto, a soma S_i de seus ângulos internos é,

$$S_i = (11 - 2) . 180° = 1620°.$$

Além disso, temos mais três pontos nas arestas deste polígono cujos ângulos com vértices nestes são de 180°, logo, a soma S_B dos ângulos com vértices em pontos sobre as arestas deste polígono é,

$$S_B = 1620° + 3 . 180° = 2160°.$$

Finalmente, repare que temos seis pontos no interior deste polígono e que o ângulo com vértices nestes é de 360°, logo, a soma S_I dos ângulos com vértices em pontos no interior deste polígono é,

$$S_I = 6 . 360° = 2160°.$$

Portanto, a soma S dos ângulos internos dos triângulos fundamentais contidos neste polígono é,

$$S = S_B + S_I = 2160° + 2160° = 4320°.$$

Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, então o número T de triângulos contidos neste polígono é,

$$T = \frac{4320°}{180°} = 24 \text{ triângulos.}$$

Assim, a área do polígono é

$$A_P = 12\, u^2.$$

É com base nesta idéia apresentada que faremos a prova do Teorema 4.1.

Prova do Teorema 4.1:

Sejam B o número de pontos da malha sobre as arestas do polígono, B' o número de pontos da malha que são vértices do polígono e B" o número de pontos da malha sobre as arestas que não são vértices deste polígono, assim

$$B = B' + B''.$$

Contudo, a soma S dos ângulos com vértices nos pontos sobre as arestas do polígono é,

$$S = (B' - 2) \times 180° + B'' \times 180°,$$

$$S = (B' + B'' - 2) \times 180°,$$

$$S = (B - 2) \times 180°.$$

Seja agora I o número de pontos internos ao polígono. Sendo assim, a soma S' dos ângulos com vértices nestes pontos é,

$$S' = I \times 360°.$$

Sendo T o número de Triângulos Fundamentais contidos neste polígono e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, segue que,

$$T \times 180° = S + S',$$

$$T \times 180° = (B - 2) \times 180° + I \times 360°,$$

$$T = B - 2 + 2 \times I.$$

Como a área de cada Triângulo Fundamental é $\frac{1}{2}$, concluímos que a área A do polígono é,

$$A = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \times (B - 2 + 2 \times I),$$

$$A = \frac{1}{2}B + I - 1.$$

Concluindo assim a prova do teorema.

Aula 3. Aproximando a Área de um Círculo

O teorema de Pick pode ser utilizado para dar uma aproximação da área de uma figura plana não necessariamente poligonal em associação ou não com a noção de escala ampliando as aplicações do mesmo. É claro que neste caso a aproximação é tão boa quanto menor for a célula da malha. Neste contexto, podemos então, aproximar a área de um círculo, e esta será tão próxima da área real quanto menor for a distância entre os pontos da malha.

Exemplo 4.5: O círculo da Figura 4.8 tem raio $1u$, que é a distância entre os pontos adjacentes da malha, e sua área A certamente é maior que $2u^2$ e menor que $4u^2$, para que você entenda isso, basta contar os triângulos fundamentais que cabem dentro do círculo,

$$2u^2 < A < 4u^2.$$

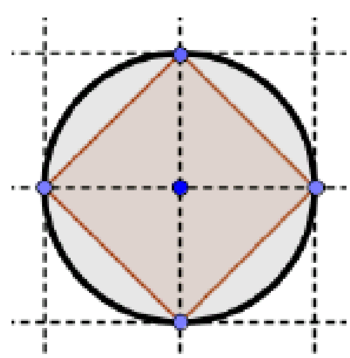


Figura 4.8 – Aproximando a área do círculo por um quadrado.

Vamos agora diminuir a distância entre os pontos da malha para $\frac{1}{3}u$ e permanecer com o raio do círculo em $1u$, como na Figura 4.9.

A área do círculo agora será aproximada pela área do polígono não regular de oito lados hachurada.

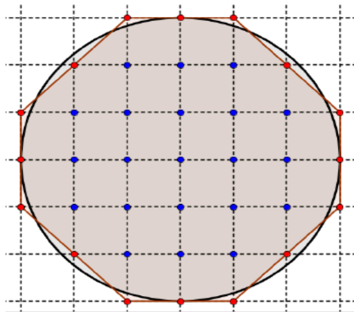


Figura 4.9 – Aproximando a área do circulo por um octógono não regular.

Observe que a nossa unidade de área agora é

$$u^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Usando a Fórmula de Pick, com $B = 16$ e $I = 21$, temos que a área A deste polígono é,

$$A = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}B + I - 1\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}.16 + 21 - 1\right),$$

$$A = \frac{1}{9}.28\, u^2 \approx 3{,}11u^2.$$

Como vimos no exemplo anterior esta área é maior que $2u^2$ e menor que $4u^2$.

Já percebemos que, quanto menor a distância entre os pontos da malha onde está o círculo melhor será a aproximação de sua área que é aproximadamente 3,141593. Neste próximo exemplo vamos calcular, por aproximação, a área deste mesmo círculo dos exemplos anteriores usando agora a distância entre os pontos da malha de $\frac{1}{10}$.

Exemplo 4.7: Na Figura 4.10 temos uma poligonal não regular de 32 lados cuja área é bem próxima da área do círculo de raio $1u$.

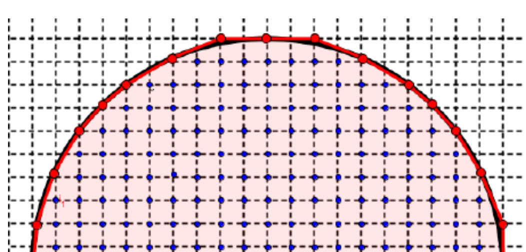


Figura 4.10 – Área do círculo aproximada um polígono não regular de 32 lados.

Observe que sobre seu perímetro temos 32 pontos e no seu interior temos 299 pontos da malha, daí podemos de forma análoga ao exemplo anterior, obtermos que,

$$A = \frac{1}{100} \times 314\, u^2 = 3{,}14 u^2.$$

Percebemos que o valor da área do círculo vai se aproximando cada vez mais de seu valor real. Poderíamos continuar com uma quantidade de pontos cada vez maior para melhor aproximação, no entanto as ferramentas que dispomos são totalmente manuais, gerando um trabalho enorme. Mas vejam que é natural que quando a quantidade de pontos tende ao infinito, o valor aproximado da área do círculo tende ao seu valor real, que, como veremos agora nesta última parte de nossos estudos, é o número π (pi) que pertence aos números irracionais.

5- A Área do Círculo

A circunferência possui características não comumente encontradas em outras figuras planas, como o fato de ser a única figura plana que pode ser rodada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente. É também a única figura que é simétrica em relação a um número infinito de eixos de simetria. A circunferência é importante em praticamente todas as áreas do conhecimento como nas Engenharias, Matemática, Física, Química, Biologia, Arquitetura, Astronomia, Artes e também é muito utilizada na indústria e no nosso dia a dia.

Aula 1. O Número pi e a Circunferência

Definição 5.1: Circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos de um plano que equidistam de um ponto fixo denominado centro da circunferência.

Como todas as circunferências são semelhantes entre si, concluiu-se que a razão entre os comprimentos de qualquer circunferência pelo seu respectivo diâmetro será sempre uma mesma constante.

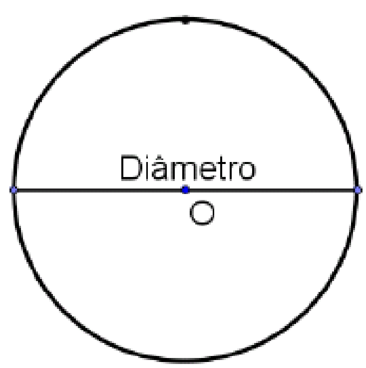


Figura 5.1 – A razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo é sempre constante.

Ou seja, sendo C o comprimento da circunferência e D a medida do seu diâmetro, então,

$$\frac{C}{D} = constante.$$

Uma aproximação para essa importante constante foi encontrada pelo matemático grego Arquimedes de Siracura (287 a.C. – 212 a.C.). Ele mostrou que o valor da razão entre o diâmetro e o comprimento da circunferência estava entre 3 + 10/71 e 3 + 1/7. Por convenção, afim de facilitar os cálculos, representou-se essa constante pela letra do alfabeto grego π (pi). Assim, convencionou que $\pi \approx 3{,}14$ para a maioria dos cálculos simples. Uma boa parte das calculadoras científicas de 8 dígitos aproxima π por 3,1415927.

Podemos aproximar o valor de π pelo valor limite da razão entre o perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos no círculo de raio 1 pelo diâmetro deste círculo, quando o número de lados desse cresce arbitrariamente:

$$\frac{perímetro\ do\ polígono\ circunscrito}{2r} > \pi > \frac{perímetro\ do\ polígono\ inscrito}{2r}.$$

Número de lados do polígono	Perímetro do polígono inscrito dividido por 2r	Perímetro do polígono circunscrito dividido por 2r
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21540
24	3,13262	3,15967
48	3,13935	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14145	3,14188
256	3,14151	3,14175

512	3,14157	3,14163
1024	3,14159	3,14160

Figura 5.2 – Tabela de aproximação do valor de pi.

Observe na Tabela 5.1 que quanto maior o número de lados de cada polígono mais dígitos decimais coincidem com o número pi, tanto para os polígonos inscritos como para os circunscritos. Com um polígono de 1024 lados, praticamente temos 4 algarismos exatos depois da vírgula.

Aula 2. Deduzindo a Área do Círculo

Imagine agora, uma seqüência de polígonos regulares com n lados, com n=3, 4, 5,..., onde todos esses polígonos estão em um círculo de raio R fixo. Observe que conforme o número de lados do polígono aumenta, mais a área do polígono se aproxima da área do círculo (ver Figura 5.3).

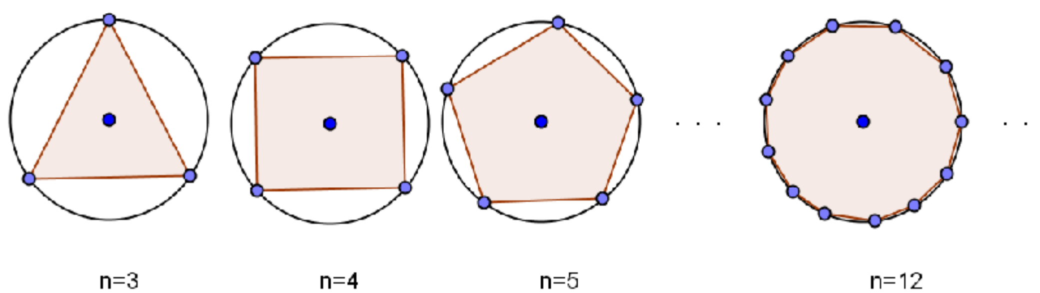


Figura 5.3 – Vários polígonos regulares inscritos na circunferência.

Nestas condições, podemos dizer que para n suficientemente grande, a apótema do polígono h é tão próxima ao raio do círculo R quanto quisermos e o mesmo podemos dizer para os perímetros do polígono e do círculo.

Assim, denotando o perímetro do círculo por P_C, temos que

$$\frac{P_C}{2R} = \pi \ \rightarrow \ P_C = 2\pi R.$$

Com base nessas idéias intuitivas de limite e utilizando a relação $A_n = \frac{P.h}{2}$, podemos dizer que a área do círculo é o limite de A_n, quando n tende ao infinito, ou seja, a área do círculo A_c é dada por

$$A_c = \frac{P_C.R}{2} = \frac{2.\pi.R^2}{2} = \pi.R^2.$$

Como este trabalho é voltado para alunos e professores do Ensino Fundamental e Médio, não iremos apresentar uma definição precisa de limite para demonstrar formalmente o resultado obtido acima, mas o leitor poderá obter uma demonstração rigorosa deste fato em textos de um nível mais amplo, por exemplo, no (http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=17717). Temos neste portal uma aula muito interessante mostrando tal fato.

Exemplo 3.11: Para encerrar esta aula, vamos calcular a área de um polígono regular de 24 lados inscrito em um círculo de raio $1u$. Para isso, observe a Figura 3.12 e faça $n = 24$ e $OA_2 = 1\,u$. Assim,

$$\alpha = \frac{360°}{24} = 15°,$$

e conseqüentemente,

$$\beta = \frac{180° - 15°}{2} = 82{,}5°.$$

Agora repare que,

$$cos(\beta) = \frac{\frac{a}{2}}{1} \implies a = 2cos(\beta),$$

Substituindo estes resultados na expressão do Teorema 3.1, temos

$$A_{24} = \frac{24 \times (2cos(\beta))^2}{4}.tg\left(\frac{180° \times 24 - 360°}{2 \times 24}\right),$$

Isto é,

$$A_{24} = \frac{24 \times 2^2 cos^2(82{,}5°)}{4} tg(82{,}5°) \approx 3{,}10583\, u^2.$$

Procedendo de modo análogo, encontramos as áreas dos polígonos regulares de 50 e 125 lados, inscritos em um círculo de raio 1u, que são dadas, respectivamente por

$$A_{50} \approx 3{,}13333 \; e \; A_{125} \approx 3{,}14027.$$

Note que conforme aumentamos a quantidade de lados do polígono, mais nos aproximamos da área do círculo que é dada por

$$A_c = \pi . R^2 = \pi \approx 3{,}14159.$$

Aula 3. Área do Setor Circular

Nesta aula falaremos de um problema que é bastante comum entre os de áreas de regiões circulares. Este problema envolve uma região conhecida como setor circular.

Exemplo 5.3: A Figura 5.4 mostra uma praça que possui o formato circular com raio OA medindo 20 metros e está dividida em duas regiões. A região maior do círculo é um setor circular, e será plantada grama e a região menor que também é, outro setor circular de abertura 50º será cimentada. O ângulo $\widehat{AOB}$ = 50° e é chamado de ângulo central do setor circular. Quantos metros quadrados de grama são necessários para preencher a parte maior dessa praça? E quantos metros cúbicos de cimento serão gastos na região menor, se a espessura da calçada será de 5 centímetros?

Iniciaremos calculando a área total A desta praça sabendo que seu raio r é de 20 m,

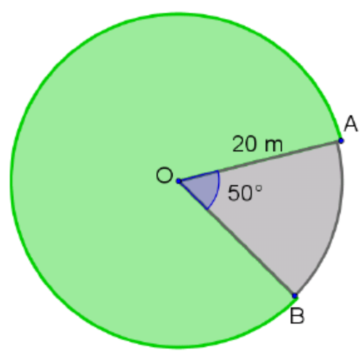


Figura 5.4 – A região OAB é um setor circular.

$$A = \pi . r^2 = \pi . 20^2.$$

Logo

$$A = 400 . \pi . m^2.$$

Vamos agora, calcular o percentual de área que será cimentada. Sabemos que uma volta completa no centro do círculo corresponde a 360°. Como a parte cimentada corresponde a 50°, então esta fração de área A_C é de,

$$A_C = \frac{50°}{360°}A = \frac{5}{36}A.$$

Assim,

$$A_C = \frac{5}{36}.400\pi = \frac{500\pi}{9}\ m^2.$$

Portanto, a área gramada A_G será de,

$$A_G = A - A_C = 400\pi - \frac{500\pi}{9} = \frac{3100\pi}{9} \approx 1082{,}1\ m^2.$$

Para calcular o volume V de cimento que será gasto para calçar a região cinza, basta multiplicar sua área superficial A_C por sua espessura e que é de 5 cm:

$$V = A_C \times e = \frac{500\pi}{9}.0{,}05 = \frac{25\pi}{9} \approx 8{,}727\ m^3.$$

Portanto, vamos precisar de 1082,1 m^2 de grama para a região verde e 8,727 m^3 de cimento para calçar a região cinza.

De modo geral, quando o ângulo central é α, temos que a área do setor circular é dada por,

$$A_C = \frac{\alpha}{360°}A.$$

Aula 4. Área da Coroa Circular

Nosso próximo problema envolve uma situação diferente. Vamos aprender a calcular a área de uma região circular chamada **coroa circular**.

Exemplo 5.4: A Figura 5.5 representa um jardim circular com 6 m de raio. A região mais clara, chamada coroa circular, representa metade da área total que foi removida para reduzir as despesas. Esta coroa é uma borda que foi cortada de largura uniforme x em toda a sua volta. Qual é a largura desta borda?

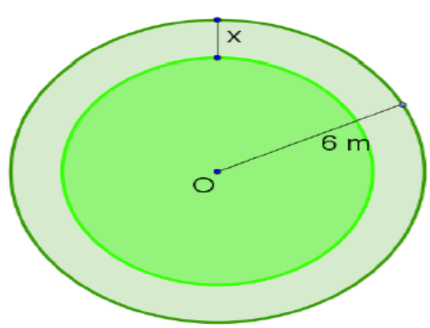


Figura 5.5 – A região circular de espessura x é uma coroa circular.

Para resolver este problema, note que a área desta coroa circular é o resultado da subtração das áreas do círculo maior (externo), de raio 6 m, pelo círculo menor (interno), de raio $(6 - x)\, m$.

Sendo assim, seja A_E a área do círculo externo e A_I a área do círculo interno. Se A_S é a área da coroa circular, então,

$$A_S = A_E - A_I = \pi.6^2 - \pi.(6 - x)^2,$$

$$A_S = 36\pi - \pi(36 - 12x + x^2),$$

$$A_S = \pi(12x - x^2).$$

Como a área da coroa circular é metade da área do círculo maior,

$$A_S = \frac{A_E}{2},$$

$$\pi(12x - x^2) = \frac{\pi.6^2}{2},$$

$$12x - x^2 = 18,$$

logo

$$x^2 - 12x + 18 = 0.$$

que é uma equação do 2° grau e pode ser resolvida facilmente pela conhecida "Fórmula de Bhaskara". Resolvendo a equação temos que,

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times 1 \times 18}}{2 \times 1},$$

de onde sai que,

$$x = 6 - 3\sqrt{2} \quad ou \quad x = 6 + 3\sqrt{2}.$$

Como $6 + 3\sqrt{2} > 6$ então a solução deste problema é,

$$x = 6 - 3\sqrt{2} \approx 1{,}76\ m.$$

Portanto a largura da coroa circular deve ser aproximadamente de 1 m e 76 cm.

De modo geral, a área A de uma coroa circular cujo círculo externo tem raio R e o círculo interno tem raio r é dada por,

$$A = A_{EXT} - A_{INT},$$

$$A = \pi R^2 - \pi r^2,$$

$$A = \pi(R^2 - r^2).$$

Aula 5. Área da Região Circular Limitada por uma Corda

Definição 5.2: Uma corda é um segmento de reta contida num círculo que une dois pontos distintos de sua circunferência.

Exemplo 5.5: Em um círculo de (centro O), foi feito um corte por uma corda AB de tal modo que o ângulo $\widehat{AOB} = \alpha$ (ver Figura 5.6). Vamos encontrar a área interior ao círculo que está acima da corda AB em função do ângulo central α e do raio AO do círculo.

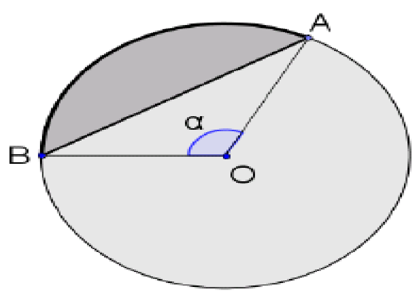


Figura 5.6 – A área mais escura é a área do setor AB menos a área do triângulo OAB.

A área da região mais escura acima da corda AB é dada pela subtração entre a área do setor circular AOB de ângulo central α e a área do triângulo isóscele AOB.
A área A_S do setor é calculada por,

$$A_S = \frac{\alpha}{360°}(\pi \times OA^2).$$

A área A_T do triângulo AOB, como já foi visto anteriormente, é dada por,

$$A_T = \frac{OA \times OB \times sen(\alpha)}{2},$$

$$A_T = \frac{OA^2 \times sen(\alpha)}{2}.$$

Sendo A a área da região procurada, então,

$$A = A_S - A_T = \frac{\alpha}{360°}(\pi \times OA^2) - \frac{OA^2 \times sen(\alpha)}{2}.$$

Portanto

$$A = \frac{OA^2}{2} \times \left(\frac{\alpha\pi}{180°} - sen(\alpha)\right).$$

Exemplo 5.6: O triângulo eqüilátero ABC da Figura 5.7 tem lados medindo 18 cm e é circunscrito por um círculo. Qual é a área da região interna ao círculo que fica acima da corda AC?

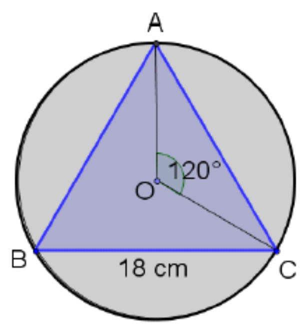


Figura 5.7 – Um triângulo eqüilátero inscrito num círculo.

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OAC, temos que,

$$AC = \sqrt{OA^2 + OC^2 - 2 \times OA \times OC \times cos(120°)},$$

$$AC^2 = 2 \times OA^2 - 2 \times OA^2 \times cos\,(120°),$$

$$18^2 = 2 \times OA^2 \times (1 - cos\,(120°)),$$

$$OA^2 = \frac{18^2}{2 \times (1 - \cos\,(120°))}.$$

Como já visto em aulas anteriores temos que cos(120°) = cos(60º + 60º) = –0,5, substituindo temos,

$$OA^2 = \frac{324}{3} = 108.$$

Substituindo este resultado na equação que foi encontrada no exemplo anterior e fazendo α = 120°, temos que,

$$A = \frac{OA^2}{2} \times \left(\frac{\alpha\pi}{180°} - sen(\alpha)\right),$$

assim,

$$A = \frac{108}{2} \times \left(\frac{120°\pi}{180°} - sen(120°)\right).$$

De argumento análogo ao anterior temos que

$$\text{sen}(120°) = sen(60º + 60º) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87.$$

Substituindo temos,

$$A \approx 54 \times (2{,}10 - 0{,}87) = 66{,}42.$$

Este raciocínio pode ser usado em qualquer situação que envolve um polígono regular inscrito num círculo.

Aula 6. A Área da “Calcinha” e a Área da “Folha”

Exemplo 5.7: O triângulo ABC da Figura 5.8 é equilátero de lados medindo a. Em cada um de seus vértices foram construídos arcos de circunferências de raio $\frac{a}{2}$. Qual é a área da região PQR (CALCINHA) interna ao triângulo?

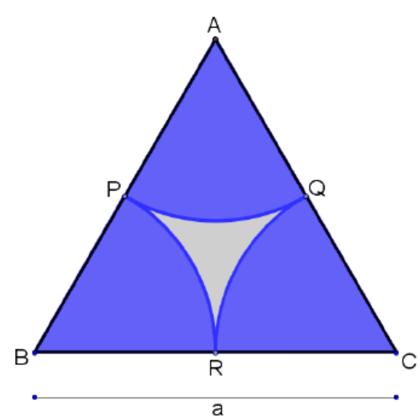


Figura 5.8 – A área da região PQR é a área do triângulo ABC menos a área de meio círculo.

A região mais escura é formada por três setores circulares de ângulo central igual a 60°, pois são vértices de um triângulo eqüilátero. Logo, representam um único setor de ângulo central 180°, ou seja, meio círculo de raio $\frac{a}{2}$. Portanto, a área A_S da região em azul é dada por,

$$A_S = \frac{\pi.(\frac{a}{2})^2}{2} = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Seja A_C a área da região circular PQR e A_T a área do triângulo ABC, então,

$$A_T = A_C + A_S \Longrightarrow A_C = A_T - A_S.$$

Assim,

$$A_C = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{8} = a^2\frac{(2\sqrt{3}-\pi)}{8}.$$

Exemplo 5.8: Na Figura 5.9, ABCD é um quadrado de lados medindo a. O arco $\widehat{AC}$ é um quarto de volta de uma circunferência de raio a. A região de interseção dos setores ABC e ACD é conhecida como "folha".

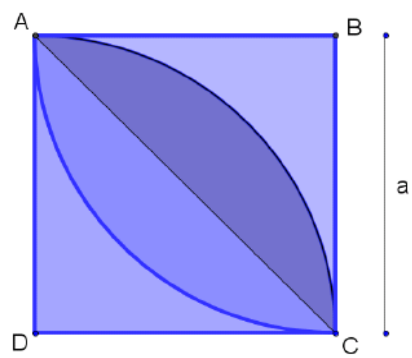


Figura 5.9 – A área destacado em escuro e a área do setor ACD menos a área do triângulo ACD.

Observe que a área destacada em escuro, meia folha, é a área do setor circular ACD de ângulo central 90° e raio a menos a área do triângulo retângulo ACD, ou seja,

$$A_{ESCURA} = \frac{90°}{360°}\pi a^2 - \frac{a^2}{2}.$$

Logo

$$A_{ESCURA} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right).$$

Portanto, a área da folha é,

$$A_F = 2 \times A_{ESCURA} = a^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right).$$

Este resultado pode ser útil em várias outras situações que envolvem regiões que são interseções de círculos. Um bom exemplo disso é o que veremos agora.

Exemplo 5.9: Na Figura 5.10 temos um "trevo de quatro folhas" inscrito num quadrado de lados $6u$. Para calcular sua área, basta perceber que esta figura é formada por quatro figuras do Exemplo 5.8 com $a = 3u$.

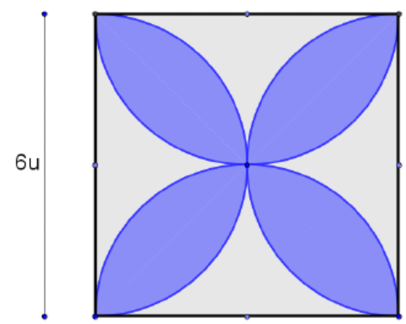


Figura 5.10 – Um trevo de quatro folhas inscrito num quadrado.

Portanto, a área do trevo é,

$$A_T = 4 \times 3^2 \times \left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) = 18.(\pi - 2).$$

Logo

$$A_T \approx 20{,}55\, u^2.$$

Aula 7. A Área das Lunas

Na Figura 5.11 temos um triângulo retângulo ABC com hipotenusa sobre o diâmetro AC de um semicírculo de centro D. Sobre o cateto AB deste triângulo foi construído um segundo semicírculo de centro no ponto médio F de AB e de raio FA. Sobre o cateto BC deste triângulo ABC constrói se novamente um terceiro semicírculo de centro sobre o ponto médio E de BC de raio EB. As duas regiões, azul e vermelha, externas ao semicírculo AC são chamadas lunas.

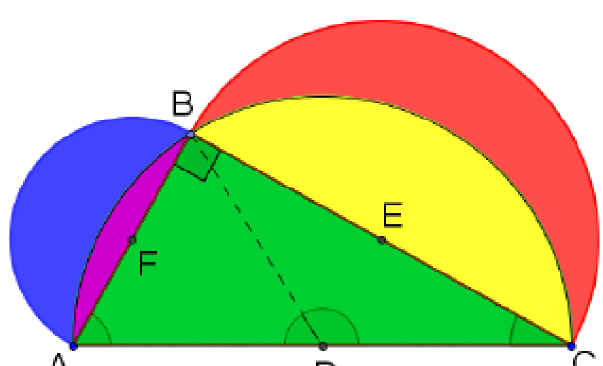


Figura 5.11 - Lunas

Exemplo 5.10: Primeiramente, vamos considerar que o triângulo ABD da Figura 5.11 é eqüilátero de lados a, para calcular as áreas das regiões lilás e amarela.

Repare que, neste caso o ângulo $\widehat{ADB}$ = 60°, daí a área do setor ABD é um sexto da área de um círculo de raio a e a área da região lilás A_L será a área deste setor menos a área do triângulo eqüilátero ABD, ou seja,

$$A_L = \frac{1}{6}\pi a^2 - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Por outro lado, o ângulo $\widehat{BDC}$ = 120°, daí a área do setor BDC é o dobro da área do setor ABD. Repare que os triângulos ABD e BDC têm bases e alturas iguais, logo, têm mesmas áreas, portanto a área da região amarela A_{AM} é,

$$A_{AM} = \frac{2}{6}\pi a^2 - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exemplo 5.11: Ainda na Figura 5.11 e mantendo as mesmas medidas fixas do exemplo anterior, quais serão as áreas das regiões pintadas de azul e de vermelho?

A área da região azul A_{AZ} é bem fácil de calcular, tendo em vista que já sabemos a área da região lilás A_L, que foi calculada no exemplo anterior. Para isto, basta perceber que estas áreas somadas resultam na área de um semicírculo de diâmetro a, ou seja,

$$A_{AZ} + A_L = \frac{1}{2}\,\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$A_{AZ} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2}{2}\,\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$$

$$A_{AZ} = \frac{a^2}{2}\left(\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \rightarrow$$

$$A_{AZ} = \frac{a^2}{2}\left(-\frac{1}{12}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Portanto,

$$A_{AZ} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi\right).$$

Seguindo este mesmo raciocínio, as áreas vermelham e amarelam juntas resultam na área de um semicírculo de diâmetro BC, que pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras da seguinte forma,

$$BC^2 + BA^2 = AC^2 \rightarrow$$
$$BC^2 + a^2 = (2a)^2 \rightarrow$$
$$BC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Usando o raciocínio análogo ao usado anteriormente, temos que a área da região em amarelo é

$$A_{VM} = \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}\right).$$

Exemplo 5.12: Vamos finalmente calcular a área do triângulo retângulo ABC da Figura 5.11 e comparar algumas áreas já calculadas.

A área A_{VD} deste triângulo pode ser expressa por,

$$A_{VD} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{a \times a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

É interessante ressaltar que a soma das áreas azul e vermelha é proporcionais, dadas estas medidas fixas. Observe:

$$A_{AZ} + A_{VM} = \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi\right) + \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi + \sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = A_{VD}.$$

Ou seja, as áreas das lunas azul e vermelha juntas são iguais à área do triângulo verde ABC.

Más será que isso aconteceria para outras medidas fixas diferentes destas que usamos? A resposta é sim. Não importa as medidas que usaremos; esta relação sempre vai ocorrer. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo 5.13: Para encerrar nossa aula, vamos mostrar que, na Figura 5.11, a soma das áreas azul e vermelha é igual à área verde, quaisquer que sejam as medidas dos catetos AB e BC do triângulo retângulo ABC.

De fato, sejam $AB = a$ e $BC = b$ as medidas dos catetos e $AC = c$ a medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABC. Observe que a soma das áreas lilás e amarela é igual à diferença entre a área do semicírculo de diâmetro c e a área do triângulo ABC, ou seja,

$$A_L + A_{AM} = \frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} - \frac{a \times b}{2}.$$

Observe agora que a soma das áreas azul e vermelha é igual a soma das áreas dos semicírculos de diâmetros a e b menos a soma das áreas lilás e amarela,

$$A_{AZ} + A_{VM} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} - (A_L + A_{AM}),$$

$$A_{AZ} + A_{VM} = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} - \left(\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} - \frac{a \times b}{2}\right),$$

$$A_{AZ} + A_{VM} = \frac{\pi}{8}(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{a \times b}{2}.$$

Pelo teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$. Logo, $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ e portanto,

$$A_{AZ} + A_{VM} = \frac{a \times b}{2} = A_{VD}.$$

Mostrando assim, que a relação obtida $A_{AZ} + A_{VM} = A_{VD}$ é válida para qualquer triângulo retângulo ABC.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana. 4ª Edição. Fortaleza, Julho de 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, Luiz Roberto. Didática da Resolução de Problemas, 1ª. edição. São Paulo: Ática, 1989.

DEMO, Pedro. Educar pela Pesquisa, 1ª. edição. Campinas: Editores Associados, 1996.

IMENES, Luiz Márcio. Geometria dos Mosaicos, São Paulo: Scipione, 1989.

LORENZATO, Sérgio. Geometria. Educação Matemática em Revista. n. 4, Ano III, 1995.

MARTINS, Dominique Miranda. A Geometria das Abelhas. 2009. 32 p. Monografia de Conclusão de Curso –Departamento de Matemática –Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

MIYASAKI, Melissa Mitie. Materiais Didáticos Despertam Interesse dos Alunos na Aula de Matemática?. São Carlos, São Paulo.Disponível em

<www.dm.ufscar.br/~darezzo/tb2003/melissa_militie.pdf >Acesso em 20 março 2015.

PAVANELLO, Regina Maria. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Conseqüências. Revista Zetetiké, volume 1, número 1, 1993, página 7-16.

VASCONCELLOS, Celso dos S. Construção do conhecimento em sala de aula. 3ª. Edição. São Paulo: Libertad e Centro de Formação e Assessoria Pedagógica, 1995.