UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

RUDÁ TAVARES MAGALHÃES

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PROPOSTA DE ESTRATÉGIA DE ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

MACAPÁ

2015

RUDÁ TAVARES MAGALHÃES

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PROPOSTA DE ESTRATÉGIA DE ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá, como um dos pré requisitos para a obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática.

ORIENTADORA: PROF. DRA. SIMONE ALMEIDA DELPHIM LEAL

Macapá

2015

RUDÁ TAVARES MAGALHÃES

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PROPOSTA DE ESTRATÉGIA DE ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Universidade Federal do Amapá, como pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre Profissional em Matemática.

Aprovada em ___/ ___/ ___.

Banca Examinadora

.____.

Orientador

UNIFAP

.____.

Professor

UNIVERSIDADE

.____.

Professor

Universidade

À nossa família pelo apoio e compreensão e a todos que buscam na educação a obtenção de um mundo melhor.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só se tornou possível graças:

À Deus pela vida;

Ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada IMPA que coordena o projeto;

À Universidade Federal do Amapá UNIFAP, que nos oportunizou a realização de um sonho;

À Professora Simone Delphim Leal que souber os momentos certos de intervir e ensinar;

A todos os colegas de curso que souberam se manter firmes e unidos nos momentos mais importantes;

Aos professores que foram fundamentais para nosso crescimento e amadurecimento;

A todos os funcionários envolvidos nesse projeto, que propiciam as condições para que ele exista.

RESUMO

Este trabalho consiste em uma proposta metodológica para o ensino do princípio fundamental da contagem, partindo do concreto para o abstrato, com o objetivo de aprimorar nos alunos, os conhecimentos matemáticos referentes ao tema. Abordaremos o Princípio Fundamental da Contagem no ensino médio, por ser este conteúdo de fundamental importância na relação do aluno com o seu cotidiano e frequentemente abordado nos exames vestibulares. A abordagem do conteúdo a partir da resolução de problemas conforme orientações do PCNEM.

PALAVRAS–CHAVE: Princípio Fundamental da Contagem; Agrupamentos; jogos; situações problema.

ABSTRACT

This work consists of a methodology for teaching the rule of product, starting from the concrete to the abstract, with the aim of improving the students the mathematical knowledge on the topic. Discuss the Fundamental Counting Principle of high school, because this fundamental importance of content in the relationship of the student with his daily life and often approached in the entrance examination. The approach of the content from the problem-solving as PCNEM guidelines.
KEYWORDS: Fundamental Principle of Counting; groups; games; problem situations.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 9

SITUAÇAO PROBLEMA 1 14
SITUAÇAO PROBLEMA 2 16
SITUAÇAO PROBLEMA 3 19
SITUAÇAO PROBLEMA 4 21
SITUAÇAO PROBLEMA 5 22
SITUAÇAO PROBLEMA 6 24
SITUAÇAO PROBLEMA 7 25
SITUAÇAO PROBLEMA 8 26
SITUAÇAO PROBLEMA 9 27
SITUAÇAO PROBLEMA 10 29

2. CONCLUSÃO 32

3. BIBLIOGRAFIA 33

4. ANEXOS 34

1. INTRODUÇÃO

1.1 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO PROPOSTA DE ESTRATÉGIA DE ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

A escolha do tema deste trabalho surgiu quando solicitamos há vários professores da rede pública estadual que respondessem uma pesquisa perguntando qual conteúdo de matemática do ensino médio, é menos abordado em sua escola? Qual conteúdo já deixou de ser abordado no ensino médio de sua escola? Mediante as respostas, que mostrou que o assunto de análise combinatória dentre as opções, obteve 66,7% das respostas, decidimos pelo conteúdo de análise combinatória para ser nosso objeto de trabalho da dissertação[1]. Vimos propor um método de ensino do conteúdo de análise combinatória baseado na resolução de problemas, que de forma gradual, pode ser aplicado na educação básica, desde os níveis fundamentais, até o nível médio. Aqui abordaremos apenas sobre o princípio fundamental da contagem (PFC) no ensino médio, deixando para um próximo trabalho, as abordagens sobre os demais tipos de agrupamentos.

Feita essa decisão, precisávamos saber se dentro dos parâmetros curriculares nacionais ou do plano de desenvolvimento da educação, encontraríamos subsídios que fundamentassem nossa escolha, pois de nada valeria propor um método de ensino para algo que não fosse considerado relevante para a nossa educação básica.

Mediante essa busca, verificamos que de acordo com os parâmetros curriculares nacionais (PCNs página 37), algumas das finalidades do ensino de Matemática indicam, como objetivos do ensino fundamental, levar o aluno a:

> • Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
>
> • Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;

[1] O resultado das pesquisas encontra-se anexo a esta dissertação.

> - Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
> - Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
> - Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Ainda de acordo com os PCNs (página 38),

> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

De acordo com o Plano de desenvolvimento da educação PDE, (BRASIL/MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2011, p. 129),

> A reflexão sobre as estratégias de ensino deve considerar a resolução de problemas como eixo norteador da atividade matemática. A resolução de problemas possibilita o desenvolvimento de capacidades, tais como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos, além de estimular formas de raciocínio como intuição, dedução e estimativa. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.

De acordo com os PCNEM

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

Hoje em dia, percebe-se que as habilidades exigidas hoje nas avaliações do ENEM, valorizam a resolução de problemas que envolvam relação com o quotidiano dos alunos e verificamos que, das escolas públicas em nosso estado das quais tomamos conhecimento mediante pesquisa, algumas ainda não trabalham com essa metodologia em seus planos políticos pedagógicos. Alguns professores do ensino médio dessas escolas, adotam essa proposta metodológica por conta própria.

Consideramos, segundo nossa prática pedagógica, que o aluno é um sujeito ativo na construção de seu conhecimento, na estruturação de sua inteligência; ele aprende a partir de suas observações, ações e reflexões. Em interações com sigo próprio, o outro, com o ambiente, e deve ser respeitado como um ser que tem o direito de viver o seu próprio tempo, que tem sua própria dinâmica mas sem ficar alijado do que existe ao seu redor. Dessa forma, o estudo da matemática com base na proposta de resolução de problemas, pode proporcionar o desenvolvimento dessas habilidades cognitivas e proporcionar uma expansão do horizonte do educando, à medida que ele começa a perceber algumas dessas situações no seu cotidiano e com o conhecimento adquirido, pode de forma ativa intervir na sua realidade, melhorando-a de forma significativa.

Nossa pesquisa revelou que, dentre o rol de conteúdos trabalhados durante o ensino médio, o conteúdo de análise combinatória é pouco trabalhado e chega mesmo a não ser trabalhado em algumas escolas. Com a adoção da prova do ENEM pela maioria das universidades públicas, os professores se veem de frente com a tarefa de trabalhar esse conteúdo, o que ainda não acontece em todas as escolas.

O tema Análise Combinatória, por tudo o que foi elencado anteriormente nos PCNs e o PDE, é ferramenta poderosa e importante, de análise da realidade, que deve estudado desde o ensino fundamental e com maior profundidade no ensino médio. Esse assunto pode ser trabalhado desde as séries iniciais, por meio de manipulação de material concreto, juntamente com construção de esquemas, tabelas, diagramas ou desenhos, possibilitando ao aluno, o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo e do potencial criativo na procura de soluções de problemas contextualizados.

Pensando em auxiliar ao professor nessa tarefa, o presente trabalho se apresenta com a proposta de que ele possa compreender e utilizar os conceitos envolvidos nos problemas de contagem, em um nível dificuldade crescente para o ensino médio.

Dessa forma, o presente trabalho procura abordar o tema de análise combinatória durante o ensino médio, já com foco na resolução de problemas, por conta das avaliações por quais ele passará. Apresenta – se uma metodologia para desenvolver o estudo da combinatória, formalizar os conceitos e abstrair o raciocínio dos alunos. Apresentaremos aqui apenas uma abordagem para o princípio multiplicativo, deixando para trabalhos posteriores a extensão de uma metodologia para os demais temas envolvidos no estudo da análise combinatória.

SITUAÇÕES PROBLEMAS – UM PONTO DE PARTIDA PARA A CONTAGEM

A resolução de problemas pode mobilizar o aluno, ampliando a visão pela matemática, Segundo os PCN de matemática (BRASIL, 1998),

> A resolução de problemas proporciona com que o aluno possa desenvolver capacidades para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Sendo que, terão oportunidades de ampliar seus conceitos e conhecimentos pela Matemática, das situações problemas de seu cotidiano e desenvolvendo sua autoconfiança.

O aluno deve sobretudo conseguir compreender a situação problema e compreender o processo de formação dos grupos, para que possa aplicar esse processo nos problemas propostos pelos exames ao qual se submete. Para isso, o trabalho se desenvolverá mediante apresentação de diversas situações problemas em que o aluno possa perceber o método utilizado na resolução de cada situação. Propõe-se um nível de dificuldade crescente para que o aluno desenvolva as habilidades necessárias para enfrentar os exames vestibulares. Exames de diagnósticos vão permitir que o próprio aluno perceba sua evolução.

Na página 40 dos PCN,s tem-se o texto que diz: “Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.”

Um dos conteúdos citados nos PCN,s para o ensino fundamental é: Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.(PCNs PÁGINA 62)

Encontramos no PCNEM, na página 44 o seguinte texto:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística.
> Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem.
> • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
> • Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.

> • Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

Apresentaremos a seguir situações problemas, algumas com soluções, para que o professor possa compreender os processos de formação dos agrupamentos e ao apresentar o conteúdo aos alunos, que o aluno utilize esses procedimentos nas resoluções de questões que se apresentem a ele em qualquer situação. A medida que o aluno ou professor avancem, eles se depararão com situações desafiadoras que exigiram raciocínios diferentes e de forma gradual eles serão introduzidos no universo mágico da contagem. Os problemas são apresentados com um nível de dificuldade crescente para que facilite ao aluno partir de algo mais concreto, para uma situação totalmente abstrata. Os alunos começarão a ter contato com as situações problemas e resolvê – las mesmo sem saber que se trata de princípio fundamental da contagem, se assim o professor preferir. A medida que os problemas vão sendo apresentados, o professor consegue ir fazendo uma fundamentação teórica e introduzir o conceito de principio multiplicativo na resolução de problemas.ao mesmo tempo, o aluno vai desenvolvendo seu raciocínio combinatório a medida que busca resolver sozinho, as questões apresentadas e o professor deve conduzir o processo, alicerçando o aluno de modo que a aprendizagem se efetue.

Uma das grandes dificuldades dos alunos é identificar o tipo de habilidade matemática que deve utilizar para resolver os problemas. Essa capacidade de interpretação e contextualização, vai se desenvolvendo à medida que ele pratique problemas de diferentes níveis. Isso ajuda ao aluno durante a realização das avaliações as quais se submete, uma vez que não vem discriminado no enunciado da questão, qual conteúdo específico se trata na questão.

Utilizamos esse método com 6 turmas de 3º ano do ensino médio de uma escola pública estadual, também com alunos das turmas de 2º anos do ensino médio e no curso de preparação para o vestibular. A seguir apresentaremos os problemas.

Dividimos os problemas em categorias visando uma classificação crescente de abstração e dificuldade para melhor construção do raciocínio combinativo. Como primeira categoria, apresentamos os problemas sem restrição e com base em exemplos concretos. Segunda categoria, apresentam exemplos concretos mas com restrições. Terceira categoria, apresentam problemas de situações abstratas. Quarta categoria, apresentam situações abstratas com restrições e quinta categoria, apresentam situações abstratas, com restrições e a necessidade da divisão do processo de resolução em subcasos.

Este primeiro problema de nível bem simples, tem por objetivo introduzir a ideia de combinar, agrupar elementos. Ele deve tentar solucionar o problema sem qualquer interferência do professor a princípio. Caso a turma não esteja conseguindo a solução, o professor interfere e monta a tabela com auxílio dos alunos.

SITUAÇÃO PROBLEMA 1

As aulas vão começar e Marcelo vai comprar uma caneta da cor azul e outra da cor vermelha. Na loja, o atendente oferece 3 tipos de caneta da cor azul e 2 tipos de caneta da cor vermelha de traços de espessuras diferentes. Quantas escolhas ele pode fazer para comprar uma caneta de cada cor?

O professor pode sugerir aos alunos que se coloquem como os sujeitos ativos da situação como se fosse eles quem estivessem na loja. Para facilitar, chamaremos de A1, A2 e A3, os modelos de caneta azul e de V1 e V2, os modelos de caneta vermelha. Uma maneira de formar as duplas seria montar uma tabela de possibilidades. Observe:

Caneta azul	Caneta vermelha
A1	V1
A1	V2
A2	V1
A2	V2
A3	V1
A3	V2

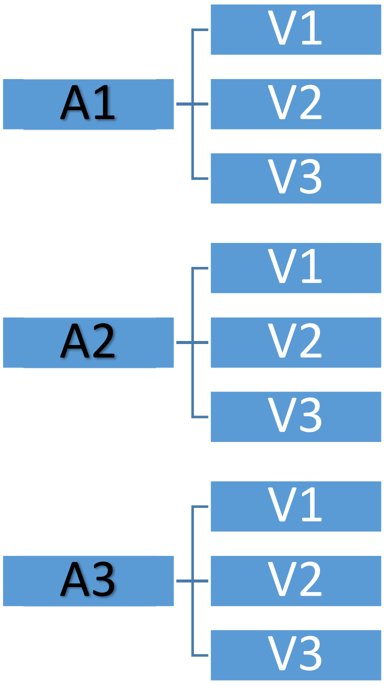
Marcelo pode fazer sua escolha de 6 maneiras diferentes.

Na construção da tabela, é possível que apareçam soluções feitas de formas diferentes, que devem ser aproveitadas pelo professor para que se percebam as diferentes maneiras de agrupar e se discutam se existe uma maneira mais simples de se fazer esses agrupamentos.

Percebemos que alguns alunos rapidamente começam a formar as duplas de canetas, outros não, só começam a montar depois que o professor faz o primeiro.

Outros ainda, apenas entendem após o quadro estrar pronto e o professor explicar o processo.

Também podemos representar a solução da situação, mediante um diagrama de árvores.



O professor deve passar ao segundo problema, a medida que perceber que os alunos conseguiram introduzir o raciocínio esperado. Para isso o professor deve utilizar de exemplos semelhantes, que estão presentes nos livros didáticos.

O segundo problema, utiliza o mesmo tipo de raciocínio para a resolução. A intenção não é introduzir uma nova maneira de pensar, mas fazê – lo perceber que a utilização de tabelas ou diagrama de árvores, passa a ser pouco atrativa quando a quantidade de elementos aumenta. Mesmo porque, o que os problemas costumam pedir, é a quantidades de agrupamentos. Embora o raciocínio seja o mesmo, é possível que o aluno sinta alguma dificuldade na criação da tabela. O professor então pode intervir sugerindo formas de organização dos dados. A organização dos dados é muito importante para que o aluno identifique o processo lógico que existe nos agrupamentos.

SITUAÇÃO PROBLEMA 2

Em um restaurante Self – Service, palavra da língua inglesa que pode ser traduzida como sirva a si mesmo, uma pessoa quer comer um tipo de salada, um tipo de acompanhamento e um tipo de carne. O restaurante oferece 3 tipos de salada diferentes: salda crua, salada de maionese e salada de frutas, 4 tipos de acompanhamento: arroz, feijão, macarrão e purê de batata e 3 tipos de carne: alcatra, cupim e picanha. Quantos tipos de pratos diferentes essa pessoa pode escolher que contenham uma salada, um acompanhamento e um tipo de carne?

Apresentamos um tipo de organização lógica desse problema, que o professor pode ser utilizar nos problemas subsequentes.

Vamos começar pela salada. Temos 3 opções de escolha. Para o acompanhamento temos 4 tipos. Vamos formar essas combinações entre salada e acompanhamento. Aqui apresentaremos a forma de tabela, mas em algumas aulas, utilizamos o diagrama de árvore.

Ordem	Salada	Acompanhamento
1	Crua	Arroz
2	Crua	Feijão
3	Crua	Macarrão
4	Crua	Purê
5	Maionese	Arroz
6	Maionese	Feijão
7	Maionese	Macarrão
8	Maionese	Purê
9	Frutas	Arroz
10	Frutas	Feijão
11	Frutas	Macarrão
12	Frutas	Purê

Para cada uma dessas 12 formas, temos ainda a opção de três tipos de carne.

Observe que podemos ter a seguinte tabela de possibilidades.

Ordem	Salada	Acompanhamento	Carne
1	Crua	Arroz	Alcatra
2	Crua	Arroz	Cupim
3	Crua	Arroz	Picanha
4	Crua	Feijão	Alcatra
5	Crua	Feijão	Cupim
6	Crua	Feijão	Picanha
7	Crua	Macarrão	Alcatra
8	Crua	Macarrão	Cupim
9	Crua	Macarrão	Picanha
10	Crua	Purê	Alcatra
11	Crua	Purê	Cupim
12	Crua	Purê	Picanha
13	Maionese	Arroz	Alcatra
14	Maionese	Arroz	Cupim
15	Maionese	Arroz	Picanha
16	Maionese	Feijão	Alcatra
17	Maionese	Feijão	Cupim
18	Maionese	Feijão	Picanha
19	Maionese	Macarrão	Alcatra
20	Maionese	Macarrão	Cupim
21	Maionese	Macarrão	Picanha
22	Maionese	Purê	Alcatra
23	Maionese	Purê	Cupim
24	Maionese	Purê	Picanha
25	Frutas	Arroz	Alcatra
26	Frutas	Arroz	Cupim
27	Frutas	Arroz	Picanha
28	Frutas	Feijão	Alcatra

29	Frutas	Feijão	Cupim
30	Frutas	Feijão	Picanha
31	Frutas	Macarrão	Alcatra
32	Frutas	Macarrão	Cupim
33	Frutas	Macarrão	Picanha
34	Frutas	Purê	Alcatra
35	Frutas	Purê	Cupim
36	Frutas	Purê	Picanha

Observe raciocínio utilizado para montagem das linhas.

Na primeira tabela, fixamos o primeiro e variamos o segundo. Fizemos isso para cada item da primeira coluna.

Na segunda tabela, deixamos fixos o primeiro e o segundo e variamos o terceiro. Após a permuta dos terceiros, permutamos os segundos e por último, permutamos os primeiros.

O professor deve perguntar aos alunos: - Que relação o número de linhas tem com a quantidade de opções?

Podemos afirmar que essa pessoa terá quantas maneiras de montar seu prato?

Essa pergunta servirá para que o professor avalies se os alunos já conseguiram relacionar o número de linhas com a quantidade de resultados. Embora possa parecer óbvio, essa associação não é feita automaticamente por alguns alunos.

O professor pode variar as perguntas e obter análises diferentes. Se essa pessoa quiser comer picanha independente das outras escolhas de salada e acompanhamento, de quantas formas ela poderá fazer essa escolha? Quais são elas?

Aqui o professor pode iniciar à abstração do raciocínio, fazendo com que os alunos determinem as quantidades sem utilizar a tabela. Sugerindo outras combinações particulares com salada fixa ou salada e carne. O professor pode discutir com os alunos, a dificuldade de se chegar ao conjunto solução, devido ao grande número de resultados. O professor pode então mostrar questões semelhantes e fazer o aluno perceber que tais questões, em quase sua totalidade, não pedem que se discriminem os agrupamentos e sim que se diga quantos agrupamentos podem ser formados.

SITUAÇÃO PROBLEMA 3

Ana Luiza vai para o cinema hoje. Ela está escolhendo a roupa que vai usar nessa ocasião. Ela quer usar uma camisa, uma calça e um par de tênis.

Ela tem 12 camisas, 5 calças e 3 pares de tênis. De quantas formas diferentes ela poderá escolher esse conjunto composto de camisa, calça e tênis?

Neste problema, embora o aluno se depare com o mesmo tipo de raciocínio, ele talvez se sinta desencorajado a resolvê-lo utilizando uma tabela, devido ao grande número de linhas que ela teria, por conta das diversas opções de escolha. Na sala, alguns alunos tentaram resolver a questão, fazendo um diagrama de árvore ou até mesmo a tabela, mas depois desistiram. Nesse momento o professor pode sugerir a busca de outra forma e fazer com que os alunos o utilizem na resolução deste problema. O professor então analisa os dois problemas anteriores e solicita aos alunos que digam como chegar ao total de opções, sem ter que construir uma tabela. Por exemplo utilizar a multiplicação para determinar as quantidades.

Retomando os 2 problemas anteriores o aluno deve completar as informações e dessa forma construir o raciocínio do princípio multiplicativo.

De acordo com os exemplos anteriores, descobrimos que na **situação problema 1** temos 6 maneiras de fazer a escolha e na **situação problema 2** temos 36 opções.

O professor, pede aos alunos que completem com os números de **possibilidades de escolha**, a tabela para cada situação

Situação 1. Veja o exemplo.

Caneta azul	Caneta vermelha	Total de opções
3	2	6

Situação 2

Salada	Acompanhamento	Carne	Total de opções
3	4	3	36

Agora para a situação 3

Camisa	Calça	Par de tênis	Total de opções
12	5	3	180

O professor deve preguntar aos alunos: Que operação deve ser feita entre as quantidades de opções de cada elemento da escolha a ser feita, para chegarmos ao total de opções?

Mediante a resposta o professor deve levar os alunos a concluir que podemos utilizar esse raciocínio para determinar as quantidades de escolha em outros exemplos de situações problemas e que esse modo de proceder recebe tem um nome. De acordo com esse princípio, essa maneira de calcular os agrupamentos, de fazer essa contagem é chamada de Princípio multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem. Esse princípio é um dos significados da multiplicação. A multiplicação é a soma de parcelas iguais que é o que é feito na contagem.

Utilizaremos esse princípio para determinar a quantidade de agrupamentos daqui em diante.

Segundo Elon, no livro A matemática do Ensino Médio volume 2, o princípio fundamental da contagem se define da seguinte forma:

“Se há x modos de tomar uma decisão D1 e, após essa decisão tomada, há y modos de tomar uma decisão D2, então há xy modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2”. José Plínio e outos, no livro Introdução à Análise Combinatória, desenvolve uma definição ampliada mostrando que em linguagem de conjuntos, Se A é um conjunto com *m* elementos e B é um conjunto com *n* elementos, então o conjunto A x B (lê-se A cartesiano B) dos pares ordenados (a, b), tais que a pertence a A e b pertence a B, tem cardinalidade *m.n*.

Essa definição é extendida ainda mais neste livro com a extensão do princípio multiplicativo

“Se um eventoA_i pode ocorrer de m_i maneiras diferentes para i = 1, 2, 3, ..., n, então esses *n* eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1.m_2 \dots m_n$maneiras diferentes. Em linguagem de conjuntos, se o conjunto $A_i$tem cardinalidade m_i, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1,\ a_2, \dots, a_n)/a_i \in A_i,\ para\ i = 1, 2, \dots, n\}$ tem cardinalidade $m_1.m_2 \dots m_n$.

A partir de agora vamos introduzir algumas variações nos problemas que se consideram como um aumento de dificuldade, com o objetivo de que o aluno possa ir se desenvolvendo na forma de pensar e construir o conceito de agrupamento. Uma dessas dificuldades, é a apresentação de restrições aos problemas apresentados.O aluno vai perceber que identificar as quantidades e multiplicá – las não será suficiente para resolver o problema, por conta das restrições.

SITUAÇÃO PROBLEMA 4

Mariana combinou com sua amiga Júlia, que para ir à festa Junina de sua escola calçaria cada par do tênis com uma cor diferente e faria o mesmo com as meias. Júlia perguntou: - quantos pares de meias e quantos pares de tênis você tem? Mariana disse que tinha 5 pares de tênis e 10 pares de meias todos de cores diferentes. De quantas formas ela poderá fazer essa escolha para se apresentar na quadrilha junina?

O professor deve esclarecer que cada escolha feita por Mariana, forma um grupo com um par de tênis (*t*) e um par de meias (*m*), mas que a escolha de cada lado do tênis e cada lado da meia devem ser escolhidos separadamente que pode ser escrito na forma (t,m) e solicitar que os alunos preencham na tabela de possibilidades. O professor pode perguntar aos alunos: Que colunas você deve colocar para descobrir quantas opções de escolha ela tem? Se o professor perceber que os alunos não estão conseguindo abstrair, ele deve perguntar: Como as meias escolhidas, devem ser de cores diferentes, quantas opções ela tem para a escolha da primeira meia? E da segunda? E deixar que eles tentem fazer isso para com os sapatos. A tabela a seguir pode ajudar ao aluno, na obtenção do resultado.

Sapato 1	Sapato 2	Meia 1	Meia 2	Total

O aluno deve preencher a tabela sozinho e depois o professor responde às perguntas também.

Sapato 1 = 5, sapato 2 = 4, meia 1 = 10, meia 2 = 9. Total 5 x 4 x 10 x 9 = 1.800. O professor pode questionar aos alunos: - Seu total ficou igual ao da resposta?

- Por que você acha que os valores de sapatos e meias ficaram com uma unidade a menos?

Porque como ela não pode utilizar o outro sapato da mesma cor do que ela escolheu o primeiro, ela tem uma opção a menos.

Aqui o professor pode explorar as variações que sofrem os problemas, dependendo do tipo de escolha a ser feita. Uma mudança na forma de escolher, ou seja, na regra de formação do agrupamento, possibilita resultados diferentes embora as quantidades de cada objeto permaneçam iguais.

Uma dúvida que pode surgir e cabe ao professor direcionar é se devemos considerar os lados direito e esquerdo na hora dela se vestir. Caso se leve em consideração, teremos o quádruplo do resultado pois temos duas opções para a escolha do pé tanto para a meia quanto para o sapato.

Ao apresentar o problema a seguir o professor deve perceber se o aluno já demonstra a habilidade para resolver sozinho a situação a seguir. O objetivo não é introduzir um raciocínio novo e sim fixar o raciocínio de o aluno, ficar atento para as restrições que aparecem no problema. É importante que o professor monitore individualmente a realização da atividade por parte do aluno.

SITUAÇÃO PROBLEMA 5

Usando as cores: amarela, azul e vermelha, sem as misturar, de quantas formas podemos pintar uma bandeira de 2 listras? Analise duas situações:

Situação 1: as cores podem ser repetidas;

Situação 2: as cores não podem ser repetidas.

Complete a tabela abaixo com as quantidades de opções de cada escolha.

<table>
<tr><td rowspan="2">Situação 1</td><td>Cor 1</td><td>Cor 2</td><td>Total</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Situação 2</td><td>Cor 1</td><td>Cor 2</td><td>Total</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Após os alunos preencherem a tabela sozinhos, o professor deve estimular a reflexão com perguntas, que podem ser.

O que você percebe com relação aos resultados da primeira linha e da segunda linha?

Os resultados são os mesmos?

Por que você acha que isso aconteceu?

Após os alunos responderem às perguntas a seguir, o professor pode justificar o resultado da seguinte forma:

Na situação 1 temos 3 x 3 = 9 opções

Na situação 2 temos 3 x 2 = 6 opções

Na segunda situação, como as cores não podem ser repetidas, a cor 2 fica com uma opção a menos depois da escolha da primeira cor.

Observe a tabela a seguir onde ilustramos a resolução.

Situação 1

Opções	Cor 1	Cor 2
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Situação 2

Opções	Cor 1	Cor 2
1		
2		
3		

4		
5		
6		

<u>SITUAÇÃO PROBLEMA 6 (Pode ser utilizado o número de alunos da turma)</u>

Em uma turma com 35 alunos, onde vai ser feita a escolha do representante e do vice, de quantas formas diferentes pode ser formada essa dupla? Chame as etapas de decisão de D1 e D2.

Neste problema, a restrição não está explícita. Ela existe, mas só será percebida pelo aluno, se ele em algum momento já passou por situação semelhante. Ela exigirá uma interpretação baseada no dia a dia de sala de aula.

O professor estimula o raciocínio perguntando quem pode ser representante? E depois de escolhido o representante, quem pode ser vice? É possível que surjam até outras restrições particulares da sala. Por exemplo: em uma das salas tinha um aluno que era deficiente visual.

Resposta: Primeira decisão: Representante 35 possibilidades. Segunda decisão: Vice - representante 34 possibilidades.

Os alunos devem responder: por que para o vice temos 34 opções e não 35?

O representante pode ser vice? E vice versa? Não deixe o trocadilho confundir você.

Total de opções 35 X 34 = 1.190

Aqui o professor pode intervir e esclarecer sobre os processos de formação de grupos até agora estudados. É importante saber que há processos de escolha, onde teremos que limitar o número de opções. Nem sempre poderemos utilizar todas as opções. O professor deve ficar atento a isso! A essas restrições.

O representante de turma não pode ser vice. Essa condição embora não estivesse explícita foi fundamental para a resolução do problema. Isso acontece em diversos problemas de contagem.

A situação problema a seguir encaminha o aluno para o mundo da abstração. A dificuldade aumenta e o professor deve perceber para intervir entre os alunos.

Embora ele ainda possa construir os exemplos, o raciocínio se passa muito mais no universo das ideias do que realmente do concreto. Por isso começaremos utilizando quantidades menores nos exemplos e vamos ampliando a medida que ele compreenda o exemplo dado. Importante salientar a diferença entre número, numeral e algarismo[2].

Número	Numeral	Algarismo
é a **idéia de quantidade** que nos vem à mente quando contamos, ordenamos e medimos. Assim, estamos pensando em números quando contamos as portas de um automóvel, enumeramos a posição de uma pessoa numa fila ou medimos o peso de uma caixa.	é toda **representação de um número**, seja ela escrita, falada ou indigitada.	é todo **símbolo numérico** que usamos para formar os numerais escritos

SITUAÇÃO PROBLEMA 7

Quantos números podem ser escritos com um algarismo?, e com dois? e com três algarismos?

O professor constrói primeiro com 1. Quantos são?

0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – são 10 no total.

Agora estenda para 2 algarismos. Pergunte aos alunos:

01, 02 são números de 2 algarismos? Por quê?

Os números acima não são considerados de 2 algarismos pois a ordem das dezenas está nula, ou seja, 01 tem uma unidade e zero dezenas, assim como o 02.

Por conta disso, não temos o algarismo 0 como opções para as dezenas.

O professor pede aos alunos que preencham a tabela.

Agora é com você! Conte as opções e escreva na tabela abaixo!

Opções para as dezenas	Opções para as unidades

[2] Tabela de conceitos extraída do site http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7a.html

D1 x D2 =

Podemos formar 90 números de dois algarismos. O professor pergunta agora:

E com 3 algarismos? Quantos podemos formar? Utilize a análise anterior e tente descobrir.

Caso haja dúvida o professor deve intervir esclarecendo que: Os números de 3 algarismos possuem 3 ordens. Unidade, dezena e centena. Para formar os números contamos com os algarismos de 0 a 9, ou seja, 10 algarismos. Para o algarismo das unidades, temos 10 opções, para o algarismo das dezenas temos 10 opções. Já para o algarismo das centenas temos apenas 9 opções pois um número com 3 algarismos não pobde iniciar pelo 0.

Dessa forma teremos

Situação problema 8 (Uma extensão do problema anterior)

Se os algarismos não puderem se repetir, ou seja, se os algarismos forem distintos, quantos números de 3 algarismos poderão ser formados?

Ordem	Centena	Dezena	Unidade	Total
Opções	9	10	10	9 X 10 X 10 = 900

O objetivo da atividade é abstrair mais e fazer o aluno analisar como se dá a uns dos processos de formação dos números. Professor: caso haja necessidade, repita a análise feita no exemplo anterior e esclareça que:

Para o algarismo das unidades temos 10 opções, para o algarismo das dezenas temos 9 opções pois não podemos repetir o algarismo escolhido anteriormente, para o algarismo das centenas naturalmente teríamos 8 opções. Mas ao fazermos essa análise, temos que responder à pergunta: O algarismo 0 já foi escolhido?

Percebemos que o uso ou não do algarismo 0 nas casas da dezena ou unidade, pode mudar nossa análise com relação à casa das centenas e nos dar repostas diferentes. Então devemos começar pela “dificuldade” maior e determinar a escolha do algarismo das centenas antes das outras.

Dessa forma temos 9 opções para as centenas, 9 opções para as dezenas pois dos 10 algarismos um já foi escolhido, e 8 para as unidades.

Ordem	Centena	Dezena	Unidade	Total
Opções	9	9	8	9 X 9 X 8 = 648

O professor pergunta aos alunos: Desses números acima, quantos são ímpares? Esse problema agora se apresenta com uma restrição implícita. E vai fazer com que o aluno pense no processo de formação dos números pares e ímpares, podendo inclusive se utilizada para uma análise de teoria os números.

O professor pode explicar que nem todo número é ímpar. Para ser ímpar o número o algarismo das unidades deve ser ímpar, ou seja, deve "terminar" com os algarismos 1, 3, 5, 7 ou 9. Essa restrição deve ser analisada antes das outras. Após essa etapa, vamos analisar as opções das centenas, já que o zero não pode ser escolhido para essa ordem e depois, escolheremos o algarismo das dezenas. Assim teremos

Ordem	Centena	Dezena	Unidade	Total
Opções	8	8	5	8 X 8 X 5 = 320

Professor responda agora: A metade de 648 é 324 e como você explicaria o fato dessa resposta encontrada ser menos da metade do total de números, analisando o fato de que todo número ou é par ou é ímpar? Após responder consigo próprio pergunte aos alunos.

Veremos que a resposta está na solução do próximo exemplo. O problema a seguir, devido às restrições, apresenta a necessidade de uma subdivisão em casos. Coisa que até agora, o aluno ainda não tinha se deparado.

SITUAÇÃO PROBLEMA 9

Quantos números pares de 3 algarismos distintos podemos formar?

Observe professor que não devemos analisar de acordo com o exemplo anterior onde temos 5 opções para a casa das unidades. 0, 2, 4, 6 ou 8. Pensando dessa forma cometeremos um erro. Como analisar a casa das centenas, sem saber se temos o algarismo 0 como opção no rol de números? O algarismo 0 poderia já ter sido escolhido para casa das unidades. Em sala, utilizou – se esse raciocínio equivocado para causar dúvidas aos alunos e assim fazê – los perceber a necessidade de subdivisão em casos.

Temos portanto, que dividir nosso cálculo em duas etapas. O princípio multiplicativo sozinho, não resolve o problema.

Quais são as decisões a serem tomadas? São duas.

Primeira etapa se o algarismo das unidades é 0 e segunda etapa se o algarismo das unidades está entre os algarismos 2, 4, 6 ou 8.

Primeira etapa terminando pelo algarismo 0.

Ordem	Centena	Dezena	Unidade	Total
Opções	9	8	1	9 X 8 X 1 = 72

Segunda etapa terminando por 2, 4, 6 ou 8.

Ordem	Centena	Dezena	Unidade	Total
Opções	8	8	4	8 X 8 X 4 = 256

Temos o total de 72 + 256 = 328 algarismos.

E para a pergunta feita anteriormente sobre as quantidades de pares e ímpares, a resposta está no fato que com essas condições conseguimos construir mais números pares que ímpares.

Esse exemplo nos mostra que as vezes o princípio multiplicativo sozinho não resolve. Dividir em etapas as análises, permite que se faça a contagem de forma ordenada e se determine essas quantidades corretamente. Mas isso não deve ser feito de qualquer modo pois pode causar mais problemas do que soluções de fato. Para que possamos ter um processo que nos auxilie, recorremos às aulas do professor do IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), Paulo Cezar.

O professor do IMPA Paulo Cezar, oferece um roteiro seguro para que essas análises possam ser feitas. Ele o chama de “mandamentos de Morgado” como referência ao grande mestre Augusto Cezar Morgado, com que teve aulas no ensino médio. Vamos aos “Mandamentos de Morgado”.

1 – Postura Ativa – Ao resolver um problema de contagem para determinar quantas são as formas de fazer alguma coisa, se colocar no lugar de quem vai efetivamente fazer aquela coisa.

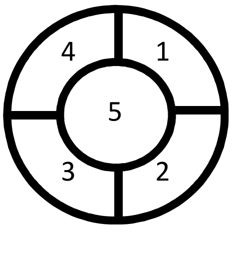
2 – Divisão em etapas – Divisão do processo em etapas de decisão. Uma solução bem construída geralmente passa pela formação dos agrupamentos em diversas etapas de decisão, com subdivisão em casos, se necessário.

3 – Não adiar dificuldades – Ao serem dividas as etapas, é possível que algumas etapas dependam de etapas anteriores. Nesse caso, analisar a de maior “dificuldade” antes das outras.

E aqui, acho oportuno acrescentar outro aprendido durante às aulas do PROFMAT com o Professor Doutor Walter Cárdenas. Se preciso for, para facilitar a compreensão, crie exemplos com uma quantidade menor de elementos para entender o processo de formação dos agrupamentos. Agora podemos analisar problemas utilizando essa perspectiva. O objetivo da próxima situação é aplicar as recomendações descritas acima para a sua resolução. Se trata de um problema de aprofundamento.

SITUAÇÃO PROBLEMA 10

Contando com 6 lápis de cores diferentes, um estudante quer colorir o desenho abaixo na ordem em que estão numeradas as regiões. De quantas formas ele pode fazer essa escolha de cores se não quer que regiões vizinhas fiquem de mesma cor?



O professor pode iniciar analisando com os alunos, as opções que existem para pintar cada região. Dessa forma a região 1 tem 6 opções, a região 2 tem 5 opções já que não pode repetir a cor da região anterior. A região 3 tem 5 opções pois pode repetir a cor da região 1 já que não é região vizinha a ela mas não pode repetir a cor da região 2. E para a região 4? A resposta é: ***depende***!

Se o aluno chegar à essa conclusão do depende, significa que ele está construindo de forma satisfatória o seu raciocínio.

Mas depende do quê?

Da cor das regiões 1 e 3. As regiões 1 e 3 podem ter a mesma cor ou não. A partir daí, percebemos que aquele roteiro nos orienta a ter que separar essa resposta em 4 caminhos. Ainda temos as regiões 3 e 4 que apresentam o mesmo tipo de pergunta

Primeira etapa. Se a cor das regiões 1 e 3 forem iguais e das regiões 2 e 4 forem iguais

Segunda etapa. Se a cor das regiões 1 e 3 forem iguais e das regiões 2 e 4 forem diferentes

Terceira etapa. Se a cor das regiões 1 e 3 forem diferentes e das regiões 2 e 4 forem iguais

Quarta etapa. Se a cor das regiões 1 e 3 forem diferentes e das regiões 2 e 4 forem diferentes.

Na primeira etapa. A cor das regiões 1 e 3 é igual e das regiões 2 e 4 também

Regiões	Opções
1	6
2	5
3	1
4	1
5	4

Total 6 X 5 X 1 X 1 X 4 = 120

Na segunda etapa. A cor das regiões 1 e 3 é igual e das regiões 2 e 4 diferentes

Região	Opções
1	6

2	**5**
3	**1**
4	**4**
5	**3**

Total 6 X 5 X 1 X 4 X 3 = 360.

Na terceira etapa a cor das regiões 1 e 3 forem diferentes e das regiões 2 e 4 forem iguais.

Região	Opções
1	6
2	5
3	4
4	1
5	3

Total 6 X 5 X 4 X 1 X 3 = 360

Quarta etapa. Se a cor das regiões 1 e 3 forem diferentes e das regiões 2 e 4 forem diferentes.

Região	Opções
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2

Total 6 X 5 X 4 X 3 X 2 = 720

Ou seja teremos 120 + 360 + 360 + 720 = 1560 formas diferentes de pintar esse desenho.

Se escolhêssemos outra sequencia numérica para a pintura das regiões, poderíamos chegar a um resultado diferente? Tente e descubra.

2. CONCLUSÃO

Percebemos, durante a execução da proposta, que temos muito a aprender enquanto professores e que o comportamento dos alunos, nos ensina mais do que supúnhamos. As vezes o professor ao terminar sua aula, nem sempre se pergunta se ele foi eficaz no que se propôs fazer enquanto prática pedagógica. Mas como precisávamos ter subsídios para esta dissertação, começamos a ficar mais atentos aos detalhes do processo de ensino aprendizagem.

Durante o desenvolvimento da proposta metodológica utilizada nas turmas de segundo e terceiro ano, percebemos o interesse demonstrado pelos alunos em comparação com outros conteúdos, funções trigonométricas por exemplo. Pudemos perceber o desenvolvimento do raciocínio a medida que foram conseguindo abstrair as ideias e resolvendo os exercícios. Atingimos até aqueles alunos que se declaram com grande dificuldade em matemática, pois conseguiram compreender os exemplos mais simples, resolver alguns exercícios. Não conseguimos atingir plenamente a turma, apesar dos esforços, por conta de particularidades de alguns. Na turma de pré-vestibular a aula transcorreu de forma mais simples ainda, uma parte dos alunos disse que conseguiu entender dessa forma, o que não havia entendido antes, quando assistiram as aulas de outros professores, vídeo aulas, ou estudando sozinhos. Dos que já tinham visto esse conteúdo de outra forma, disseram que ficou mais fácil o entendimento e que assim conseguiram resolver mais questões. Houve os que entenderam mais ou menos. E percebemos que em uma turma com 400 alunos, como acontece nos cursos preparatórios, não é possível fazer um acompanhamento individual.

Acreditamos que é possível então tornar o ensino de análise combinatória mais mais claro no entendimento no ensino médio. Aliado às propostas feitas por todos os autores e integrante no PCNs e sem esquecer da formalização conceitual, que solidifica o ensino, devemos tentar alavancar ainda mais a educação no nosso país para juntos conseguirmos uma grande e sonhada mudança social que surgirá no horizonte das consciências de seres mais esclarecidos por conta do esforço e dedicação dos professores brasileiros.

3. BIBLIOGRAFIA

BRASIL. Ministério da Educação; **PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação**: **SAEB: ensino Médio: Secretaria de Educação Básica matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília**: MEC, SEB; Inep, p.129, 2011

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME-USP,1996.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar.** 7 Ed. São Paulo. Atual, 2004. 5v.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 6 Ed. Rio de Janeiro. SBM. 2v.

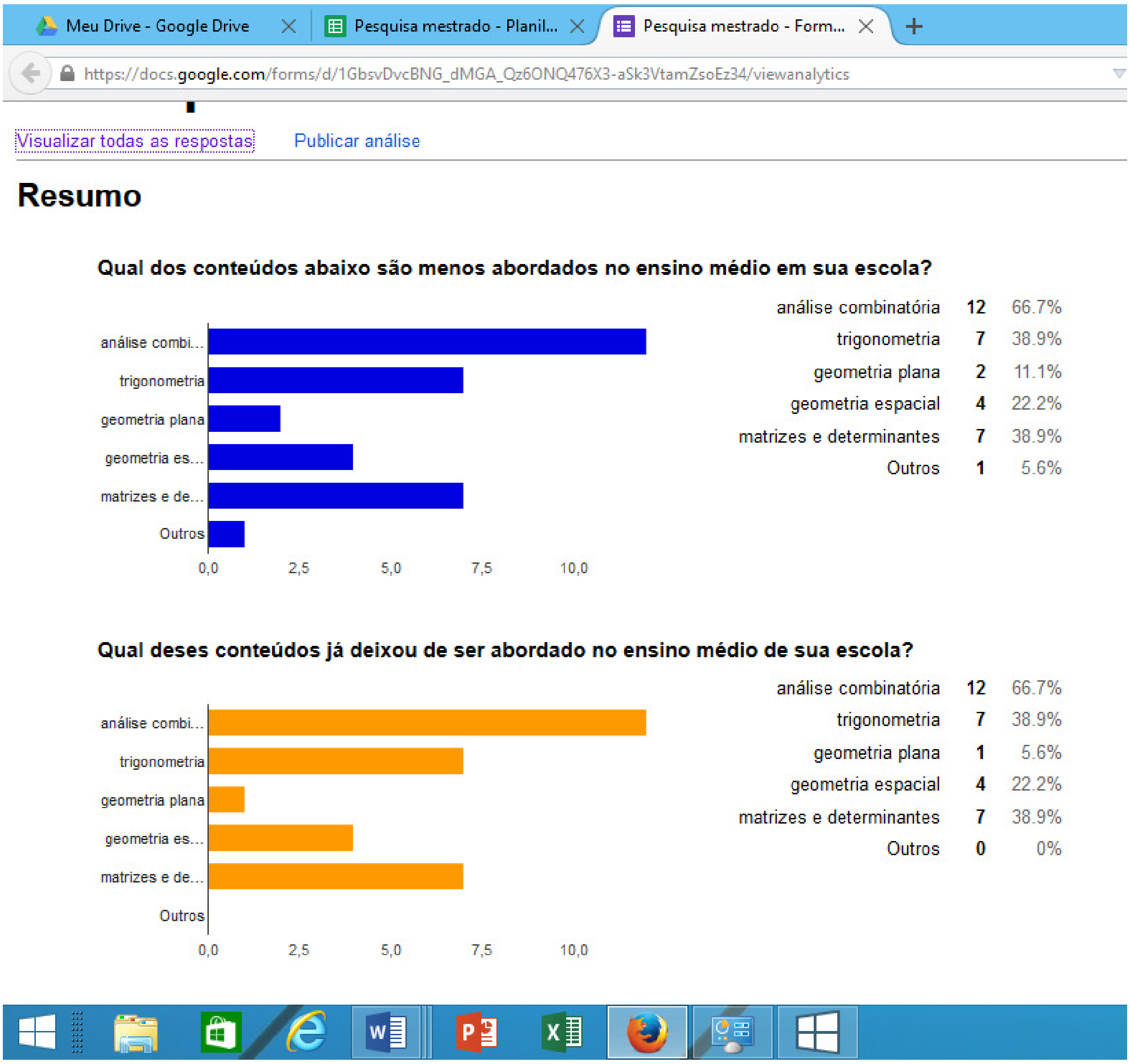
SANTOS, José Plínio O., Mello Margarida P. e Murari, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

SANTOS, Santa Marli Pires dos. **O lúdico na formação do educador**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1999

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF,1998.

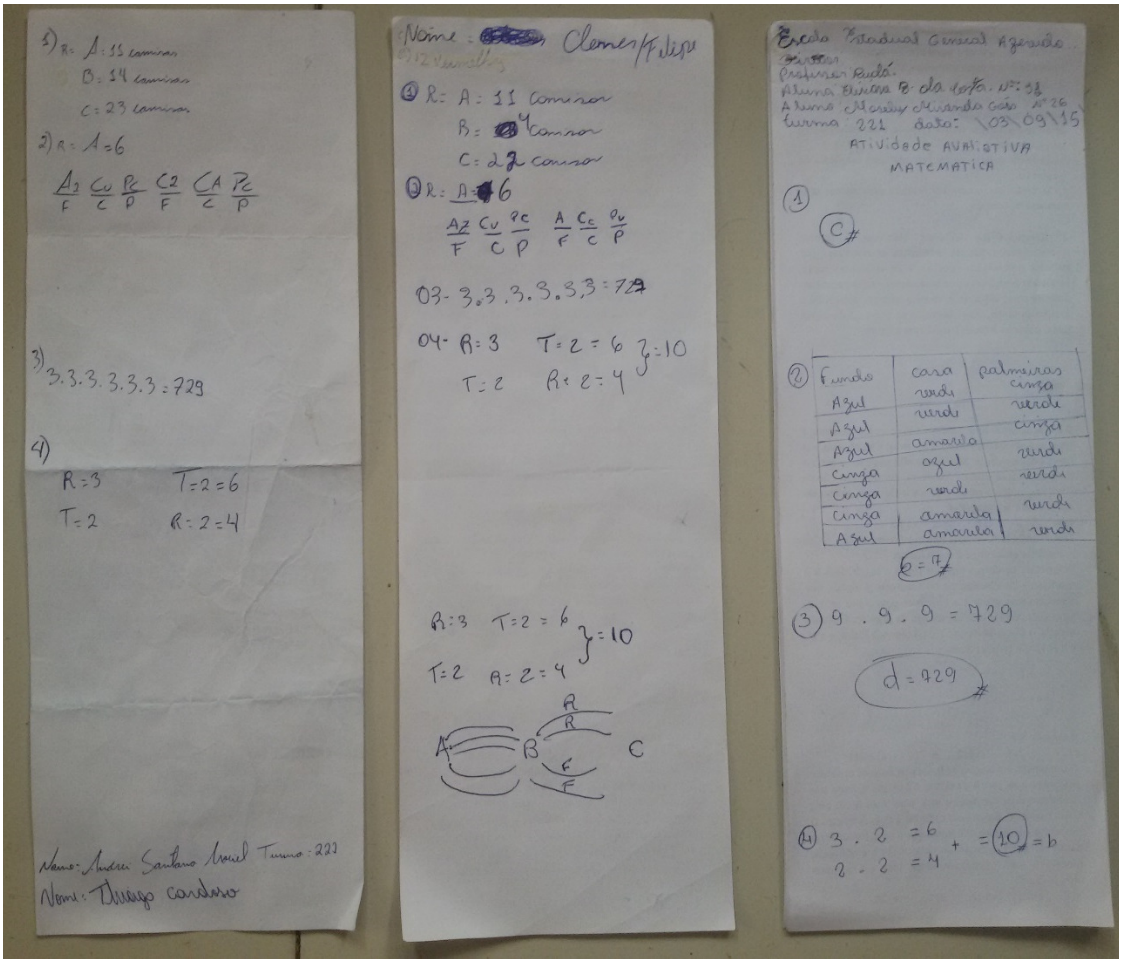
4. ANEXOS

Página do google drive com as respostas dadas pelos professores



Anexo 2 – alunos nas aulas de matemática

Anexo 3 – folha de exercícios


1) R: A: 11 camisas
B: 14 camisas
C: 23 camisas
2) R: A=6
3) 3.3.3.3.3.3 = 729
4)
R=3 T=2=6
T=2 R: 2=4

01 R: A: 11 camisas
03- 3.3.3.3.3.3 = 729
04- R=3 T=2=6 }=10
T=2 R: 2=4

ATIVIDADE AVALIATIVA
MATEMÁTICA
3) 9 . 9 . 9 = 729
d = 729
4) 3 . 2 = 6
2 . 2 = 4
+ = 10 = b

1) (FGV/2005) Em uma gaveta de armário de um quarto escuro há 6 camisetas vermelhas, 10 camisetas brancas e 7 camisetas pretas. Qual é o número mínimo de camisetas que se deve retirar da gaveta, sem que se vejam suas cores, para que:

a) Se tenha certeza de ter retirado duas camisetas de cores diferentes.

b) Se tenha certeza de ter retirado duas camisetas de mesma cor.

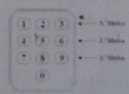
c) Se tenha certeza de ter retirado pelo menos uma camiseta de cada cor.

2) (Enem/2004)No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

a) 6. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

3) (UFES/2002) Num aparelho telefônico, as dez teclas numeradas estão dispostas em fileiras horizontais, conforme indica a figura a seguir. Seja N a quantidade de números de telefone com 8 dígitos, que começam pelo dígito 3 e terminam pelo dígito zero, e, além disso, o 2º e o 3º dígitos são da primeira fileira do teclado, o 4º e o 5º dígitos são da segunda fileira, e o 6º e o 7º são da terceira fileira.



O valor de N é

a) 27 b) 216 c) 512 d) 729 e) 1.331

4) Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade, C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

a) 9. b) 10. c) 12. d) 15. e) 20.