UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Franciéli Pereira Fernandes

Um estudo de retas do plano e uma abordagem para o ensino médio com o software GeoGebra

São José do Rio Preto
2016

Franciéli Pereira Fernandes

Um estudo de retas do plano e uma abordagem para o ensino médio com o software GeoGebra

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Flávia Souza Machado da Silva.

São José do Rio Preto
2016

Fernandes, Franciéli Pereira.
Um estudo de retas do plano e uma abordagem para o ensino médio com o software GeoGebra / Franciéli Pereira Fernandes. -- São José do Rio Preto, 2016
76 f. : il.

Orientador: Flávia Souza Machado da Silva
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria plana - Estudo e ensino. 3. Matemática – Metodologia. 4. Tecnologia educacional. 5. Ensino auxiliado por computador. I. Silva, Flávia Souza Machado da. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Franciéli Pereira Fernandes

Um estudo de retas do plano e uma abordagem para o ensino médio com o software GeoGebra

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP – São José do Rio Preto

Profª. Drª. Ana Paula Tremura Galves
UFU – Uberlândia

São José do Rio Preto
17 de Fevereiro de 2016

Dedico este trabalho à minha mãe Maria Inês que nunca deixou que eu desistisse, esteve sempre ao meu lado apoiando-me nas dificuldades, com palavras de incentivo e amor, e alegrando-se como ninguém em cada uma de minhas vitórias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por tudo que Ele tem me proporcionado, por ter me dado saúde e paciência para cumprir todas as etapas e chegar até aqui, e ao Espírito Santo que me iluminou em cada momento, durante as aulas e provas, protegendo-me nas estradas e derramando tantas bênçãos em minha vida.

Agradeço aos meus pais, que dedicaram sua vida para que eu pudesse estudar e me tornar a pessoa que hoje sou.

Agradeço a minha irmã e às minhas sobrinhas, pela paciência que tiveram comigo em vésperas de provas e quando eu não podia dar-lhes a atenção que mereciam.

Ao meu noivo, meu grande incentivador, o ombro amigo que me apoiou nos momentos de fraqueza e dúvida, agradeço por ter entendido as tantas vezes que não pude estar ao seu lado para me dedicar aos estudos e por estar presente nessa tão grande conquista.

Aos colegas que ingressaram comigo em 2013, e em especial aos grandes e essenciais amigos que ganhei nesta jornada: Evandro, Matheus, Natânia e Viviane, obrigada por alegraram meus dias e apoiar nas dificuldades.

Agradeço aos alunos da 3ª Série A – turma de 2015 - da Escola Estadual Izabel Lerro Ortenblad, peças fundamentais para que esse projeto fosse desenvolvido. Aprendi muito com vocês.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce-UNESP, Câmpus de São José do Rio Preto, que estiveram conosco durante todo o Profmat, sendo fontes de inspiração e nossos orientadores em grandes aprendizagens.

Em especial, agradeço à minha orientadora a Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva, presente em minha vida acadêmica desde o primeiro ano da graduação, sempre muito paciente, amiga e disposta a ajudar. Obrigada pela atenção com que me atendeu nas inúmeras dúvidas que surgiram e pelo profissionalismo com o qual me orientou neste trabalho.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro através da bolsa de estudos.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente estiveram comigo, ou que mesmo em pensamentos e orações torceram por mim na conclusão de mais essa importantíssima etapa!

“Força, em frente,

a vida é um caminho,

penoso, mas bonito.

E tem um sentido”.

(Papa Francisco)

RESUMO

No presente trabalho é apresentado um estudo analítico sobre retas no plano, tendo em vista a sua representatividade no significado da Geometria Analítica como um método de abordagem de problemas geométricos. Durante o desenvolvimento desse estudo, é visto que, a partir da escolha de um sistema de coordenadas de um plano, as retas do mesmo podem ser representadas por equações lineares com duas incógnitas e coeficientes reais, e vice-versa. Também são abordados os tópicos: equação reduzida, inclinação, coeficientes angular e linear, e as posições relativas de duas retas. Nas orientações dadas pelo Currículo de Matemática da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE), um estudo das retas, com suas equações, propriedades e aplicações deve ser introduzido no ensino básico, mais precisamente, no início da 3ª Série do Ensino Médio. Baseados nessas orientações e objetivando sempre tornar o processo de ensino-aprendizagem de matemática mais interessante e prazeroso, são propostas e desenvolvidas atividades em sala de informática, para se explorar retas no plano com o auxílio das ferramentas do software GeoGebra.

Palavras-chaves: Retas no plano, Equação linear com duas incógnitas, Coeficiente angular, GeoGebra.

ABSTRACT

In the present work, it is presented an analytical study on lines in the plane, bearing in mind its representativeness in the Analytic Geometry meaning as a method of geometrical problems approach. During the development of this study it is seen that, from the selection of a coordinate system of a plane, the lines of the same plane can be represented by linear equations with two unknowns and real coefficients, and vice versa. The following topics are also discussed: reduced equation, inclination, angular and linear coefficients, and the relative positions of two lines. At the guidelines given by the Mathematics Curriculum of São Paulo State Education (SEE), a study of the lines, with their equations, properties and applications should be introduced in basic education, more precisely, at the beginning of the 3rd grade of high school. Based on the guidelines and always aiming to become the mathematic's teaching-learning process more interesting and enjoyable, activities in computer room are proposed and developed, to explore lines in the plane with the support of the GeoGebra software tools.

Keywords: *Lines in the plane, Linear equation with two unknowns, Angular coefficient, GeoGebra.*

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^2$: conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais

$\overleftrightarrow{AB}$: reta determinada pelos pontos A e B

$\overline{AB}$: segmento com extremidades nos pontos A e B

AB: medida do segmento AB

$\overrightarrow{AB}$: semirreta com origem no ponto A e contendo o ponto B

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação dos pontos X e X' de um eixo e de suas coordenadas x e x', respectivamente. 16
Figura 2: Sistema ortogonal de coordenadas (cartesianas). 16
Figura 3: Coordenadas cartesianas de um ponto P do plano. 17
Figura 4: Distância entre dois pontos cujo segmento é paralelo ao eixo Ox. 17
Figura 5: Distância entre dois pontos cujo segmento é paralelo ao eixo Oy. 18
Figura 6: Distância entre dois pontos – segmentos não paralelos aos eixos. 18
Figura 7: Alinhamento de três pontos. 20
Figura 8: Alinhamento de pontos. 21
Figura 9: Equação geral da reta a partir de dois pontos. 22
Figura 10: Reta com ângulo de inclinação nulo $(\alpha = 0°)$. 27
Figura 11: Reta com ângulo de inclinação agudo $(0° < \alpha < 90°)$. 27
Figura 12: Reta com ângulo de inclinação obtuso $(90° < \alpha < 180°)$. 27
Figura 13: Reta com ângulo de inclinação reto $(\alpha = 90°)$. 28
Figura 14: Feixe de retas com coeficiente angular $m = \sqrt{3}$. 28
Figura 15: Feixe de retas com coeficiente angular $m = -\sqrt{3}$. 29
Figura 16: Determinação do coeficiente angular de uma reta horizontal por dois pontos distintos. 30
Figura 17: Determinação do coeficiente angular de retas não verticais por dois pontos distintos. 30
Figura 18: Coeficiente angular e linear de uma reta. 31
Figura 19: Equação de uma reta r passando por $P(x_0, y_0)$. 32
Figura 20: Equação de uma reta vertical r passando por $P(x_0, y_0)$. 32
Figura 21: Possíveis posições relativas de duas retas coplanares. 33
Figura 22: Retas paralelas distintas e não verticais. 36
Figura 23: Retas paralelas coincidentes e não verticais. 36
Figura 24: Retas verticais paralelas distintas. 37
Figura 25: Retas verticais paralelas coincidentes. 38
Figura 26: Retas concorrentes. 38
Figura 27: Retas concorrentes no ponto P com coeficientes lineares iguais. 39
Figura 28: Retas concorrentes no ponto P com coeficientes lineares distintos. 39
Figura 29: Retas perpendiculares. 40
Figura 30: Duas retas perpendiculares formando um ângulo θ. 41
Figura 31: Reta r perpendicular ao eixo Ox, e $r \perp s$. 41

Figura 32: Distância do ponto $P(2,10)$ à reta $r: 2x + 3y - 21 = 0$. 43
Figura 33: Interseção de três retas coplanares. 44
Figura 34: Duas retas coincidentes concorrendo com uma terceira. 45
Figura 35: Três retas coplanares paralelas coincidentes. 46
Figura 36: Três retas distintas concorrentes duas a duas. 47
Figura 37: Duas retas paralelas concorrentes a uma terceira. 48
Figura 38: Três retas coplanares paralelas entre si. 49
Figura 39: Duas retas coincidentes paralelas a uma terceira. 50
Figura 40: Barra de Ferramentas do GeoGebra.. 52
Figura 41: Fotos das atividades na sala de informática com os alunos. 62
Figura 42: Conclusão do trabalho em sala de aula. 62
Figura 43: Construção de uma reta a partir de um ponto. 68
Figura 44: Construção de infinitas retas a partir de um ponto. 68
Figura 45: Construção da reta dados os pontos $A(-1,6)$ e $B(2,-3)$. 69
Figura 46: Construção da reta dados os pontos $C(1,3)$ e $D(-2,-3)$. 69
Figura 47: Determinação dos ângulos de inclinação das retas dadas na Tabela 6. 71
Figura 48: Uso da ferramenta Controle Deslizante. 71
Figura 49: Ferramenta Controle Deslizante variando b. 72
Figura 50: Representação das retas dadas na Tabela 7. 73
Figura 51: Representação das retas da Tabela 8 e determinação dos ângulos com a reta r. 74
Figura 52: Construindo uma reta e sua paralela passando por um ponto dado.................... 75
Figura 53: Construindo uma reta e sua perpendicular passando por um ponto dado........... 76

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Equação reduzida da reta e seu ângulo de inclinação. 55
Tabela 2: Retas paralelas. 57
Tabela 3: Retas concorrentes. 58
Tabela 4: Construindo retas paralelas. 59
Tabela 5: Construindo retas perpendiculares. 60
Tabela 6: Relacionando o ângulo de inclinação à equação da reta. 70
Tabela 7: Construindo retas paralelas e analisando suas propriedades. 73
Tabela 8: Construindo retas concorrentes e analisando suas propriedades. 74
Tabela 9: Obtenção de retas paralelas distintas por meio da movimentação de ponto. 75
Tabela 10: Obtenção de retas perpendiculares distintas por meio da movimentação de ponto. 76

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 13
1 UM ESTUDO DE RETAS DO PLANO 15
1.1 Preliminares 15
1.2 Condição para alinhamento de três pontos 19
1.3 Equação Geral e Equação Reduzida 22
1.4 Coeficiente Angular 26
1.5 Posições relativas de duas retas coplanares 33
1.6 Três equações lineares com duas incógnitas 43
2 UMA ABORDAGEM COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA 51
2.1 Proposta de atividades para o ensino de retas com o uso do software GeoGebra . 51
2.2 Relato de Experiência 60
3 CONSIDERAÇÕES FINAIS 66
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 67
APÊNDICE 68

INTRODUÇÃO

Diversas propostas curriculares costumam separar a Geometria Plana das Geometrias Espacial e Analítica, alegando que a primeira é assunto do Ensino Fundamental enquanto as outras são temas do Ensino Médio. No Currículo do Estado de São Paulo, esta interpretação não está presente; por exemplo, a Geometria Analítica já aparece desde a apresentação do plano cartesiano na metade do Ensino Fundamental, entrelaçando-se e aproximando-se à Álgebra e às outras geometrias no decorrer das séries seguintes.

> Consideramos que a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, em abordagem espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nas séries/anos do Ensino Fundamental quanto nas do Ensino Médio, sendo a diferença a escala do tratamento dada ao tema. (SÃO PAULO (ESTADO), 2010, p.39)

A Geometria Analítica é introduzida aos alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental II, através da localização de pontos do plano por meio de pares ordenados, da localização em mapas e do estudo das simetrias, sendo aprofundada nas séries finais do Ensino Médio, mais especificamente no início da 3ª série. Com a finalidade de tratar algebricamente muitas questões geométricas, além de interpretar de forma geométrica algumas situações algébricas, o tema das retas, aliado ao estudo de suas características, propriedades e aplicações passa a ser especialmente abordado nesta nova etapa de desenvolvimento da Geometria Analítica.

O objetivo desse trabalho é apresentar um estudo sobre retas do plano, do ponto de vista da Geometria Analítica. O trabalho está dividido em seções. Na seção 1 é abordado: localização de pontos na reta e no plano cartesiano; distância entre dois pontos; condição de alinhamento de três pontos; equação geral da reta; equação reduzida da reta; coeficiente angular de uma reta; posições relativas de duas retas coplanares; interpretação geométrica de sistemas lineares com três equações e duas incógnitas. As principais referências utilizadas nesta seção são (LIMA e CARVALHO, 2011); (IEZZI, 2002); (DELGADO, FRENSEL, CRISSAF, 2013); (BARBOSA, 2012) e (REZENDE e QUEIROZ, 2008).

Vinculados à ideia de que a tecnologia é um grande e poderoso instrumento para o estudo da matemática, e a fim de tornar as aulas de matemática mais interessantes, elaboramos roteiros de atividades a serem desenvolvidas com o auxílio do software GeoGebra, que são apresentados também na seção 2. Vale ressaltar que, as atividades propostas não contemplam todos os tópicos abordados na seção 1, sendo destinadas especialmente ao desenvolvimento e construção do conhecimento referente às características de uma reta, tais como cálculo de seus coeficientes angular e linear e às posições relativas entre retas (isto é, propriedades de concorrência, perpendicularidade e paralelismo entre duas retas coplanares). No entanto, para que haja o resultado esperado em cada parte dos roteiros, é extremamente necessário que os tópicos iniciais e conceitos introdutórios da Geometria Analítica, suas habilidades e competências sejam antes desenvolvidos em sala de aula, apoiados no Livro Didático e no Caderno do Aluno (SEE), de modo que os estudantes compreendam o que está sendo trabalhado e saibam realizar diversos cálculos presentes nas atividades. Finalizando esta seção, apresentamos o relato de experiência sobre a aplicação e desenvolvimento dos roteiros de atividades com uma turma de alunos da 3ª série do Ensino Médio, da Escola Estadual da cidade de Novais, discorrendo sobre as vantagens e dificuldades encontradas. As referências utilizadas na seção 2 são: os Cadernos do Aluno e do Professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SÃO PAULO (Estado), 2014); o Livro Didático (DANTE, 2013); (SÃO PAULO (ESTADO), 2010) e (BALDIN e FURUYA, 2011).

Na seção 3, apresentamos as considerações finais a respeito de nosso trabalho, refletindo sobre os resultados obtidos, que em geral foram positivos, quando utilizamos a tecnologia - mais precisamente o software GeoGebra - aliada ao ensino, como recurso ao estudo das retas, tornando as aulas de Matemática mais agradáveis. Ao final, temos o Apêndice, contendo as resoluções detalhadas das atividades apresentadas.

1 UM ESTUDO DE RETAS DO PLANO

Inicialmente, faremos uma breve recordação sobre coordenadas na reta e no plano, ou seja, de como representar pontos da reta por meio de números reais e pontos do plano por pares ordenados de números reais.

Iremos admitir que sejam conhecidos os axiomas e os principais resultados da Geometria Euclidiana Plana, relativos a pontos, retas e planos, os quais podem ser encontrados em REZENDE; QUEIROZ (2008) e BARBOSA (2012).

Apresentaremos um estudo de retas e suas propriedades procurando realizar um estudo analítico, geométrico e algébrico, de modo que o leitor possa embasar-se nestes temas a fim de executar as atividades que se seguem com clareza e objetividade. Escolhido um sistema de coordenadas Oxy de um plano, as retas desse plano podem ser representadas por equações. Nesse trabalho, apresentaremos apenas a equação geral e a equação reduzida de uma reta, pois, em geral, a equação segmentária e a equação paramétrica de uma reta são obtidas a partir da sua equação geral.

1.1 Preliminares

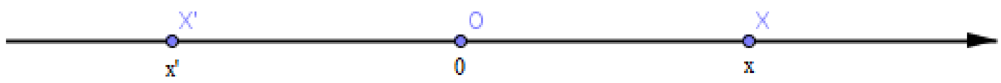
Suporemos fixada uma unidade de comprimento. Dados dois pontos A, B quaisquer, o comprimento do segmento de reta AB chama-se a ***distância*** entre os pontos A e B. Denotamos por $d(A, B)$ essa distância, que é um número real.

Uma reta diz-se ***orientada*** quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado *positivo*; o sentido inverso chama-se *negativo*. Numa reta orientada, diz-se que o ponto B está à direita do ponto A quando o sentido do percurso de A para B é positivo. Assim sendo, um ***eixo*** é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, chamado a *origem*.

Obtemos uma correspondência biunívoca entre um eixo e o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ do seguinte modo: à origem O do eixo faz-se corresponder o número zero; a cada ponto X do eixo situado à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$ e a cada ponto X do eixo situado à esquerda de O corresponde o número real negativo $x = -d(O, X)$.

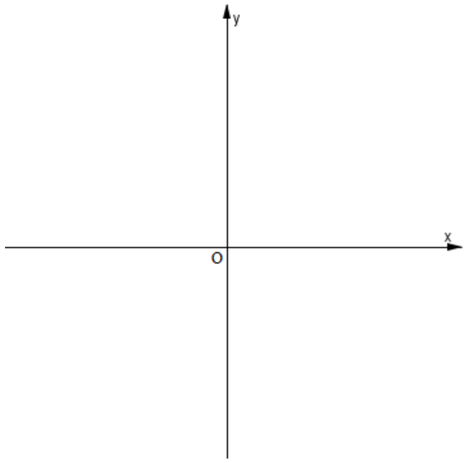
O número real x que corresponde ao ponto X de um eixo, da maneira mencionada anteriormente, chama-se a ***coordenada*** desse ponto.

Figura 1: Representação dos pontos X e X' de um eixo e de suas coordenadas x e x', respectivamente.



Um ***sistema ortogonal de coordenadas*** (cartesianas) num plano α consiste num par de eixos Ox e Oy, contidos em α, com a mesma origem O, tais que as retas Ox e Oy são perpendiculares em O. O sistema é indicado por Oxy.

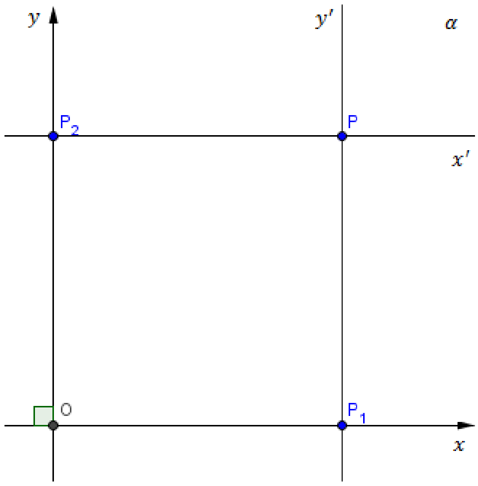
Figura 2: Sistema ortogonal de coordenadas (cartesianas).



Indicaremos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais.

A escolha de um sistema ortogonal de coordenadas num plano α, permite determinar, de modo natural, uma correspondência biunívoca entre α e $\mathbb{R}^2$. Dado um ponto P do plano, a reta y' paralela ao eixo Oy, passando por P, intersecta o eixo Ox no ponto P_1 de coordenada x. A reta x' paralela ao eixo Ox, passando por P, intersecta o eixo Oy no ponto P_2 de coordenada y. Ao ponto *P* faz-se então corresponder o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Reciprocamente, a cada par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associa-se um ponto P do plano obtido pela intersecção da paralela ao eixo Oy traçada pelo ponto do eixo Ox cuja coordenada é x com a paralela a Ox traçada a partir do ponto do eixo Oy cuja coordenada é y. Os números x e y são chamados de **coordenadas cartesianas** do ponto $P \in \alpha$ relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado. Nessas condições, escrevemos $P(x, y)$ sendo x denominado de **abscissa** de *P* e y de **ordenada** de *P*.

Figura 3: Coordenadas cartesianas de um ponto P do plano.

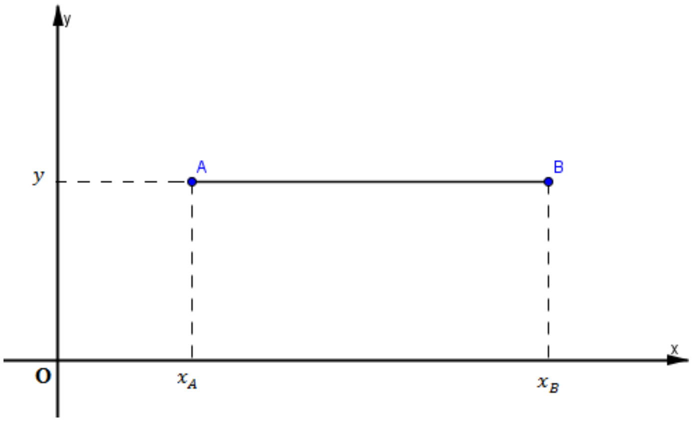


Daqui em diante admitiremos fixado um sistema ortogonal de coordenadas Oxy em um plano α.

Sejam A e $B \in \alpha$ tais que $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para obtermos uma expressão para calcular a **distância entre dois pontos** conhecendo suas coordenadas, temos que considerar os seguintes casos:

<u>1º caso</u>: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo Ox.

Figura 4: Distância entre dois pontos cujo segmento é paralelo ao eixo Ox.

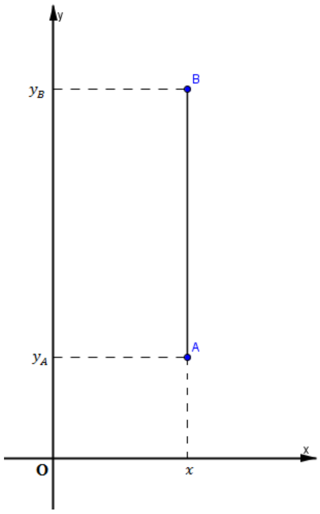


Nesse caso, as ordenadas dos pontos A e B são iguais, isto é, $y_A = y_B = y$. Assim, $A(x_A, y)$ e $B(x_B, y)$, e portanto,

$$d(A, B) = |x_B - x_A|.$$

<u>2º caso</u>: O segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo Oy.

Figura 5: Distância entre dois pontos cujo segmento é paralelo ao eixo Oy.

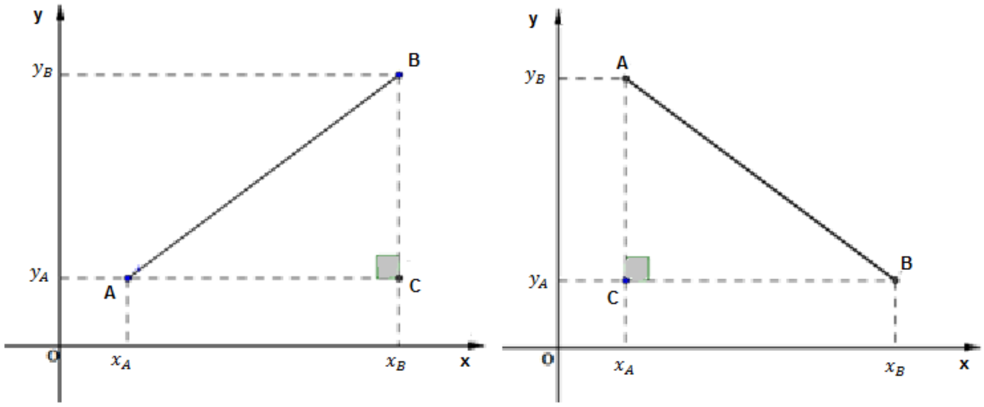


Aqui, as abscissas dos pontos A e B são iguais, isto é, $x_A = x_B = x$. Então $A(x, y_A)$ e $B(x, y_B)$. Logo,

$$d(A, B) = |y_B - y_A|.$$

<u>3º caso</u>: *O segmento $\overline{AB}$ não é paralelo ao eixo Ox e nem ao eixo Oy.*

Figura 6: Distância entre dois pontos – segmentos não paralelos aos eixos.



Considere o ponto $C(x_B, y_A)$. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo com hipotenusa AB. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, obtemos:

$$d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2,$$

ou seja,

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Em particular, a distância de um ponto $P(x, y)$ à origem $O(0,0)$ é dada por:

$$d(O,P)=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \Rightarrow d(O,P)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Exemplo 1.1: A distância entre os pontos $A(1,1)$ e $B(5,4)$ é:

$$d(A,B)=\sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5.$$

1.2 Condição para alinhamento de três pontos

Pontos de uma mesma reta são chamados **pontos colineares**. O resultado a seguir dá uma condição necessária e suficiente para que três pontos sejam colineares.

Teorema 1.1: Três pontos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$ são colineares se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Demonstração: Considere os pontos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$, a matriz $M=\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$ e o seu determinante $D=\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Note que

$$D=x_Ay_B+x_Cy_A+x_By_C-x_Cy_B-x_Ay_C-x_By_A.$$

Por hipótese, suponhamos que os pontos A,B e C são colineares. Mostremos que $D=0$. Para isso devemos considerar os seguintes três casos possíveis:

1º caso: dois dos pontos coincidem.

Então, $D=0$, pois a matriz M possui duas linhas paralelas formadas por elementos respectivamente iguais.

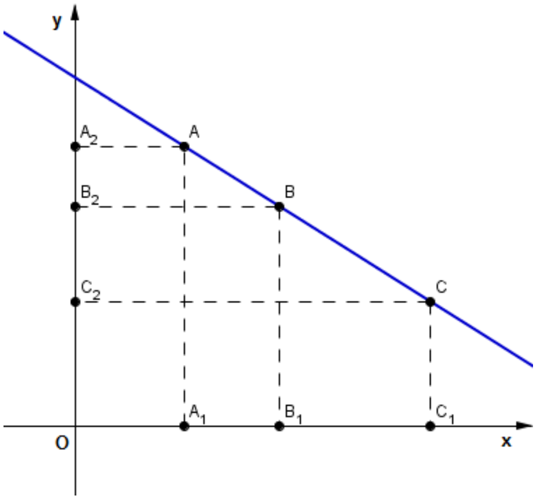
2º caso: os três pontos são distintos e pertencem a uma reta paralela a um dos eixos.

Logo, $D=0$, pois a matriz M possui duas colunas paralelas formadas por elementos respectivamente proporcionais.

3º caso: os três pontos são distintos e pertencem a uma reta não paralela ao eixo Ox e nem ao eixo Oy.

Considere sobre o eixo Ox os pontos $A_1(x_A,0)$, $B_1(x_B,0)$ e $C_1(x_C,0)$ e sobre o eixo Oy os pontos $A_2(0,y_A)$, $B_2(0,y_B)$ e $C_2(0,y_C)$.

Figura 7: Alinhamento de três pontos.



Aplicando o teorema de Tales às transversais $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ do feixe de paralelas $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ e $\overleftrightarrow{CC_1}$ e notando que se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ "concordam ou não em sentido" o mesmo ocorre com as semirretas $\overrightarrow{A_1B_1}$ e $\overrightarrow{B_1C_1}$, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Analogamente, aplicando o teorema de Tales para as transversais $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A_2C_2}$ do feixe de paralelas $\overleftrightarrow{AA_2}$, $\overleftrightarrow{BB_2}$ e $\overleftrightarrow{CC_2}$, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$.

Logo,

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2} \Longrightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x_By_C - x_By_B - x_Ay_C + x_Ay_B = x_Cy_B - x_Cy_A - x_By_B + x_By_A \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x_By_C - x_By_B - x_Ay_C + x_Ay_B - x_Cy_B + x_Cy_A + x_By_B - x_By_A = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A = 0.$$

Portanto, $D = 0$, pois o primeiro termo da última igualdade acima corresponde ao determinante da matriz M.

Reciprocamente, suponhamos que $D = 0$. Mostremos que os pontos A, B e C são colineares.

Notemos que

$$D = 0 \Longleftrightarrow x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A + x_By_B = x_By_B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C + x_By_B - x_Cy_B - x_Ay_C - x_By_A - x_By_B = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x_B(y_C - y_B) - x_A(y_C - y_B) - x_C(y_B - y_A) + x_B(y_B - y_A) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_B) - (x_C - x_B)(y_B - y_A) = 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A) \qquad (*)$$

Consideremos os seguintes três casos possíveis:

1º caso: $x_C - x_B = 0$ (ou seja, $x_B = x_C$).

Assim, de (*) segue que $(x_B - x_A)(y_C - y_B) = 0$ e então, $x_B - x_A = 0$ ou $y_C - y_B = 0$.

Se $x_B - x_A = 0$, resulta que $x_A = x_B = x_C$ e então A, B, C pertencem à mesma reta paralela ao eixo Oy, isto é, A, B, C são colineares.

Se $y_C - y_B = 0$, então $y_B = y_C$. Assim, os pontos B e C coincidem, uma vez que $x_B = x_C$ e $y_B = y_C$. Logo, existe uma reta contendo $B = C$ e A. Portanto, os pontos A, B, C são colineares.

2º caso: $y_B - y_A = 0$ (ou seja, $y_A = y_B$).

De (*), obtemos$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = 0$ e então, $x_B - x_A = 0$ ou $y_C - y_B = 0$.

Se $x_B - x_A = 0$, segue que $x_A = x_B$. Logo, os pontos A e B coincidem, uma vez que $x_A = x_B$ e $y_A = y_B$. Assim, existe uma reta contendo $A = B$ e C. Portanto, os pontos A, B, C são colineares.

Se $y_C - y_B = 0$, resulta $y_C = y_B = y_A$ e então, A, B, C são colineares por pertencerem à mesma reta paralela ao eixo Ox.

3º caso: $x_C - x_B \neq 0$ e $y_B - y_A \neq 0$.

De (*), resulta$(x_B - x_A)(y_C - y_B) \neq 0$, o que implica $x_B - x_A \neq 0$ e $y_C - y_B \neq 0$. E assim,

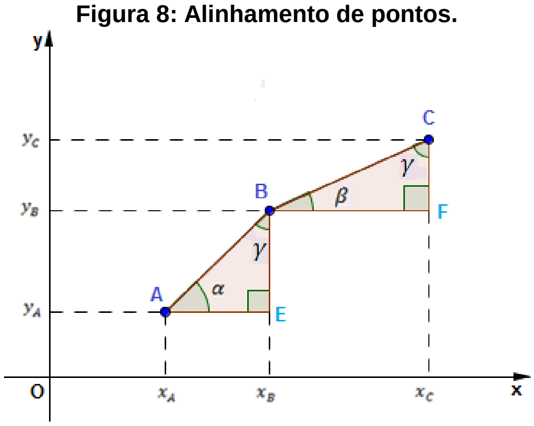
$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A) \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_B}.$$

Consideremos os pontos $E(x_B, y_A)$ e $F(x_C, y_B)$. Assim, os triângulos ABE e BCF são triângulos retângulos em E e F, respectivamente, e têm lados proporcionais, logo são semelhantes. Por isso, sendo α e β, respectivamente, as medidas dos ângulos $B\hat{A}E$ e $C\hat{B}F$, temos $\alpha = \beta$. E ainda, os ângulos $A\hat{B}E$ e $B\hat{C}F$ são congruentes.

Seja $A\hat{B}E = B\hat{C}F = \gamma$. No triângulo BCF, temos $\beta + \gamma + 90° = 180°$. Logo, $\beta + \gamma = 90°$.

Note que, por construção, $E\hat{B}F = 90°$.

Figura 8: Alinhamento de pontos.



Como, $A\hat{B}C = \gamma + E\hat{B}F + \beta$, segue que $A\hat{B}C = 90° + 90° = 180°$.

Portanto, o ângulo $A\hat{B}C$ é um ângulo raso e resulta que os pontos A, B e C são colineares.

■

Exemplo 1.2: Os pontos $A(1{,}3)$, $B(3{,}7)$ e $C(4{,}9)$ são colineares.

De fato, temos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 + 12 + 27 - 28 - 9 - 9 = 46 - 46 = 0.$$

Como $D = 0$, segue pelo Teorema 1.1, que os pontos estão alinhados.

1.3 Equação Geral e Equação Reduzida

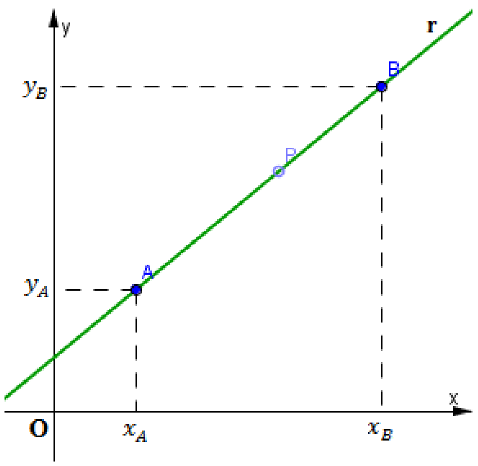
Veremos a seguir, nos próximos dois resultados, que em Geometria Analítica Plana “dar (ou pedir) uma reta” significa dar (ou pedir) uma das equações da reta.

Teorema 1.2: A toda reta r do plano está associada ao menos uma equação da forma $ax + by + c = 0$ onde a, b e c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e (x, y) representa um ponto genérico de r.

Demonstração: Seja r uma reta qualquer de um plano. Podemos tomar $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos pertencentes à reta r.

Considere $P(x, y)$ um ponto genérico da reta r.

Figura 9: Equação geral da reta a partir de dois pontos.



Assim, os pontos P, A *e* B são pontos colineares e, portanto, pelo Teorema 1.1:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo esse determinante, obtemos:

$$xy_A + x_B y + x_A y_B - x_B y_A - xy_B - x_A y = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_A y_B - x_B y_A) = 0.$$

Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_A y_B - x_B y_A = c$, decorre a equação

$$ax + by + c = 0.$$

Note que $a, b, c \in \mathbb{R}$. Além disso, a e b não são simultaneamente nulos, pois, caso contrário, $x_B = x_A$ e $y_A = y_B$ e assim $A = B$, o que não ocorre visto que A e B são pontos distintos.

■

Observação 1.1: A equação obtida na demonstração do Teorema 1.2 para uma reta dada não é única, pois poderíamos ter tomado $A'(x_A', y_A')$ e $B'(x_B', y_B')$ dois pontos distintos pertencentes à reta r sendo $A' \neq A$ e $B' \neq B$ e assim obteríamos outra equação: $a'x + b'y + c' = 0$, que é equivalente à equação: $ax + by + c = 0$.

Vimos que, dada uma reta r, podemos determinar pelo menos uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0,$$

sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ com a e b não simultaneamente nulos, a qual é satisfeita por todos os pontos $P(x, y)$ pertencentes à reta r. Essa equação é denominada ***equação geral*** da reta r.

Observação 1.2: Uma maneira de como devemos proceder para obter uma equação geral de uma reta, quando conhecemos dois pontos distintos que a determinam, é a dada na demonstração do Teorema 1.2.

Exemplo 1.3: Determine uma equação geral da reta que passa pelos pontos $A(2,3)$ e $B(-2,-1)$.

Resolução: Seja $P(x, y)$ um ponto genérico dessa reta. Como A, B e P pertencem à reta, então eles estão alinhados, ou seja, são colineares. Logo, pelo Teorema 1.1,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 2y - 2 + 6 + x - 2y = 0 \Longrightarrow 4x - 4y + 4 = 0.$$

Assim, $x - y + 1 = 0$ é uma equação geral da reta determinada pelos pontos $A(2,3)$ e $B(-2,-1)$.

Exemplo 1.4: Se tomarmos os pontos $C(3,4)$ e $D(-5,-4)$ pertencentes à reta do exemplo anterior, obteremos a equação $8x - 8y + 8 = 0$, que é equivalente à equação $x - y + 1 = 0$.

O próximo resultado nos diz que a recíproca do Teorema 1.2 é válida.

Teorema 1.3: A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, está associada uma única reta r do plano cartesiano cujos pontos $P(x, y)$ são as soluções da equação dada.

Demonstração: Sejam $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ três pontos, dois a dois distintos, que satisfazem a equação dada. Então:

$$ax_A + by_A + c = 0 \Longrightarrow ax_A = -by_A - c$$
$$ax_B + by_B + c = 0 \Longrightarrow ax_B = -by_B - c$$
$$ax_C + by_C + c = 0 \Longrightarrow ax_C = -by_C - c$$

Temos dois casos a considerar:

1º caso: um dentre os coeficientes a e b é não nulo e o outro é nulo ($a \neq 0$ e $b = 0$, por exemplo).

Nesse caso, obtemos que

$$x_A = -\frac{c}{a}, \qquad x_B = -\frac{c}{a} \quad \text{e} \quad x_C = -\frac{c}{a}.$$

Logo, a matriz $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{x_A} & \mathrm{y_A} & 1 \\ \mathrm{x_B} & \mathrm{y_B} & 1 \\ \mathrm{x_C} & \mathrm{y_C} & 1 \end{pmatrix}$ possui duas colunas paralelas formadas por elementos respectivamente proporcionais e daí seu determinante é nulo. Portanto, pelo Teorema 1.1, os pontos A, B e C são colineares.

A situação em que $a = 0$ e $b \neq 0$ é análoga.

2º caso: os coeficientes a e b são ambos não nulos ($a \neq 0$ e $b \neq 0$).

Assim

$$x_A = \frac{-by_A - c}{a}, \qquad x_B = \frac{-by_B - c}{a} \quad \text{e} \quad x_C = \frac{-by_C - c}{a}.$$

Temos ainda:

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = \frac{(-by_B - c) - (-by_A - c)}{a}.(y_C - y_B) = \frac{b(y_A - y_B)(y_C - y_B)}{a}$$

$$(x_C - x_B)(y_B - y_A) = \frac{(-by_C - c) - (-by_B - c)}{a}.(y_B - y_A) = \frac{b(y_B - y_C)(y_B - y_A)}{a}.$$

Como

$$\frac{b(y_A - y_B)(y_C - y_B)}{a} = \frac{b(y_B - y_C)(y_B - y_A)}{a}$$

então,

$$(x_B - x_A)(y_C - y_B) = (x_C - x_B)(y_B - y_A) \Rightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e, portanto, pelo Teorema 1.1, os pontos A, B e C são colineares.

Dessa forma, está provado (em qualquer um dos casos) que todo ponto C (variável), que satisfaz a condição $ax + by + c = 0$, pertence necessariamente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ (que existe e é única), a qual nomearemos de r.

■

Exemplo 1.5: Verifiquemos se os pontos $A(-2,4)$, $B(5,3)$ e $C(6,1)$ pertencem à reta de equação $3x + 8y - 26 = 0$. Para isso devemos substituir na equação da reta, as coordenadas de cada ponto dado. Se a igualdade obtida for verdadeira, o ponto pertence à reta dada; caso contrário, o ponto não pertence à reta. Temos:

$A(-2,4)$: $3x + 8y - 26 = 3.(-2) + 8.(4) - 26 = -6 + 32 - 26 = 0$,

$B(5,3)$: $3x + 8y - 26 = 3.5 + 8.3 - 26 = 15 + 24 - 26 = 13 \neq 0$,

$C(6,1)$: $3x + 8y - 26 = 3.6 + 8.1 - 26 = 18 + 8 - 26 = 0$.

Logo, os pontos A e C pertencem à reta de equação $3x + 8y - 26 = 0$, enquanto o ponto B não pertence.

Observação 1.3: O anulamento de um dos coeficientes da equação geral da reta revela uma propriedade especial da reta. Assim, temos:

- $a = 0 \Leftrightarrow y_A - y_B = 0 \Leftrightarrow y_A = y_B \Leftrightarrow r \parallel Ox$, isto é, quando a equação não tem o termo em x (exemplos: $3y - 4 = 0$; $7y + 11 = 0$), a reta é paralela ao eixo das abscissas.
- $b = 0 \Leftrightarrow x_B - x_A = 0 \Leftrightarrow x_A = x_B \Leftrightarrow r \parallel Oy$, isto é, quando a equação não tem o termo em y (exemplos: $7x + 5 = 0$; $9x - 4 = 0$), a reta é paralela ao eixo das ordenadas.
- $c = 0 \Leftrightarrow ax + by = 0 \Leftrightarrow (0,0)$ satisfaz a equação, pois $a.0 + b.0 = 0 \Leftrightarrow (0.0) \in r$, isto é, quando a equação não tem o termo independente (exemplos: $3x + 4y = 0$; $2x + 13y = 0$), a reta passa pela origem.
- $(a = 0 \; e \; c = 0) \Rightarrow (r \parallel Ox \; e \; (0,0) \in r) \Rightarrow r$ é o eixo Ox.
- $(b = 0 \; e \; c = 0) \Rightarrow (r \parallel Oy \; e \; (0,0) \in r) \Rightarrow r$ é o eixo Oy.

Assim, $x = 0$; $7x = 0$; $\sqrt{2}.x = 0$ são equações do eixo Oy. E $y = 0$; $5y = 0$; $-513y = 0$ são equações do eixo Ox.

Dada uma equação geral da reta $r: ax + by + c = 0$, se $b \neq 0$ obtemos a equação:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Fazendo $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$, decorre a equação:

$$y = mx + n$$

a qual é denominada ***equação reduzida*** da reta r.

Reciprocamente, seja $y = mx + n$ uma equação reduzida de uma reta r. Tomando $a = m$, $b = -1$ e $c = n$, obtemos uma equação equivalente e da forma

$$ax + by + c = 0,$$

ou seja, uma equação geral de r.

Exemplo 1.6: Considere a reta r de equação geral dada por $5x + y - 9 = 0$. Uma equação reduzida dessa reta é $y = -5x + 9$.

Da mesma forma, dada a equação reduzida da reta $r: y = -5x + 9$, obtemos $5x + y - 9 = 0$, uma equação geral da reta r.

1.4 Coeficiente Angular

Dada uma reta r, fixemos em r dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Se $y_A = y_B$, r é paralela ao eixo Ox; neste caso adotaremos como sentido positivo da reta r o sentido positivo do eixo Ox.

Se $y_A \neq y_B$, então $y_A > y_B$ ou $y_B > y_A$; neste caso, adotaremos como sentido positivo da reta r aquele em que se parte do ponto de menor ordenada (A ou B) e se chega ao ponto de maior ordenada (B ou A, respectivamente).

Definição 1.1: O ***ângulo de inclinação*** de uma reta r é o ângulo $\widehat{rx}$ que ela forma com o eixo Ox, assim definido:

i) Se r é paralela ao eixo Ox, $\widehat{rx}$ é nulo;

ii) Se r não é paralela ao eixo Ox, $\widehat{rx}$ é o menor ângulo formado pelas semirretas Ix e Ir, em que I é o ponto de interseção de r com eixo Ox.

De acordo com a definição anterior, a medida do ângulo $\widehat{rx}$, que denotaremos por α, em graus é tal que $0° \leq \alpha < 180°$ e denomina-se ***inclinação*** da reta r.

Figura 10: Reta com ângulo de inclinação nulo $(\alpha = 0°)$**.**

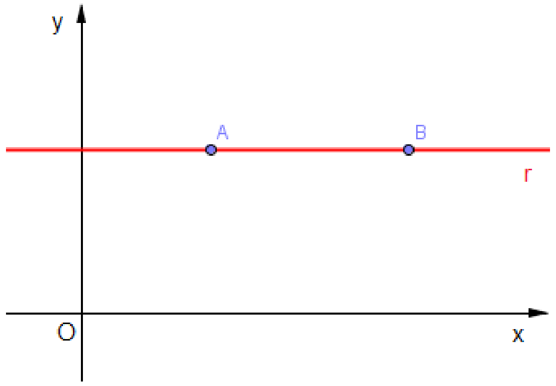


Figura 11: Reta com ângulo de inclinação agudo $(0° < \alpha < 90°)$**.**

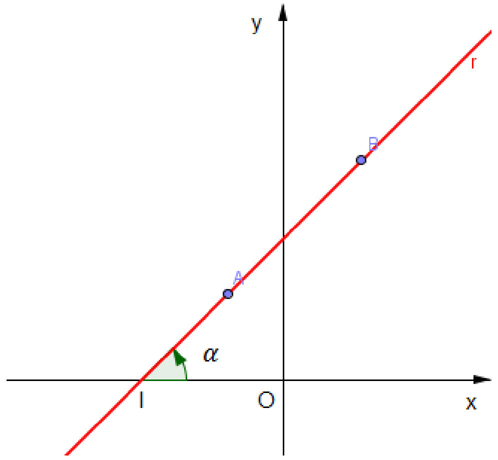


Figura 12: Reta com ângulo de inclinação obtuso $(90° < \alpha < 180°)$**.**

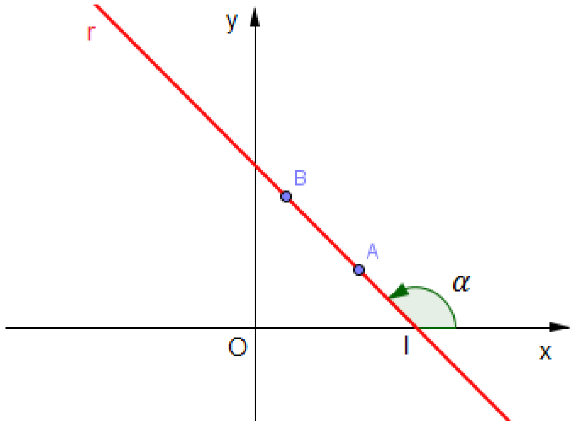
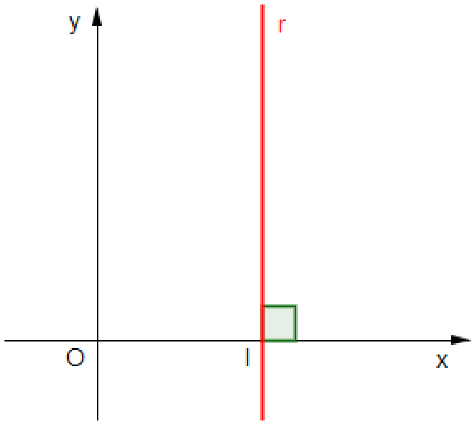


Figura 13: Reta com ângulo de inclinação reto ($\alpha = 90°$).



Definição 1.2: Diz-se que uma reta é ***vertical*** quando ela é paralela ao eixo Oy ou coincide com ele. Analogamente, diz-se que uma reta é ***horizontal*** quando ela é paralela ao eixo Ox ou coincide com ele.

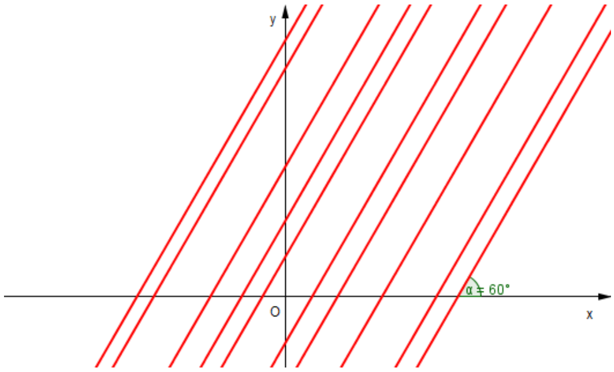
Definição 1.3: Seja α a inclinação de uma reta r (não vertical). O **coeficiente angular** ou o **declive** dessa reta r é o número real m que expressa a tangente trigonométrica de sua inclinação α, ou seja, $m = tg\ \alpha$.

Observação 1.4: Determinar o coeficiente angular de uma reta equivale a dar a direção da reta. E da definição de coeficiente angular segue que:

- Se $0° < \alpha < 90°$, então $m > 0$;
- Se $90° < \alpha < 180°$, então $m < 0$;
- Se $\alpha = 0°$ (ou seja, a reta é horizontal), então $m = 0$;
- Se $\alpha = 90°$ (ou seja, a reta é vertical), então m não está definido.

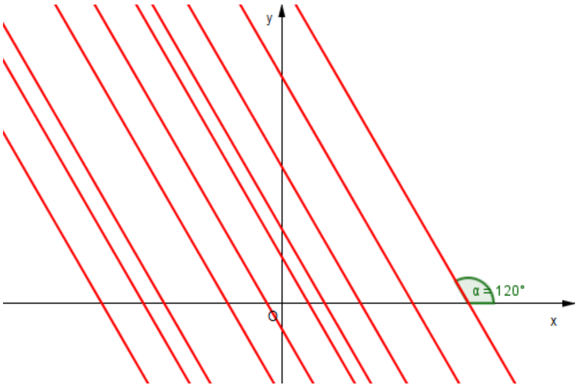
Exemplo 1.7: Uma reta r que tem coeficiente angular $m = \sqrt{3}$, forma com o eixo Ox um ângulo de $60°$, portanto r é qualquer reta do feixe de paralelas abaixo:

Figura 14: Feixe de retas com coeficiente angular $m = \sqrt{3}$.



Exemplo 1.8: Se o coeficiente angular de uma reta r é $m = -\sqrt{3}$, então $\alpha = 120°$; logo, r pode ser qualquer reta do seguinte feixe de retas paralelas:

Figura 15: Feixe de retas com coeficiente angular $\boldsymbol{m} = -\sqrt{3}$.



Seja r uma reta com coeficiente angular m. Caso a inclinação α da reta r seja conhecida, calculamos $m = tg\,\alpha$. Veremos a seguir que também podemos obter o coeficiente angular m quando se conhece de r dois pontos distintos ou uma equação geral.

Proposição 1.1: Seja r uma reta com coeficiente angular m. Se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois pontos distintos de r, então:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Demonstração: Seja α a inclinação da reta r.

Se a reta r é horizontal, então $\alpha = 0$ e $y_B = y_A$.

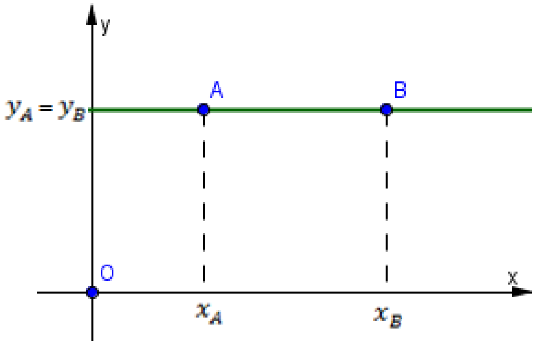
Temos

$$m = tg\,0° = 0 \quad \text{e} \quad \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0}{x_B - x_A} = 0.$$

Portanto,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Figura 16: Determinação do coeficiente angular de uma reta horizontal por dois pontos distintos.

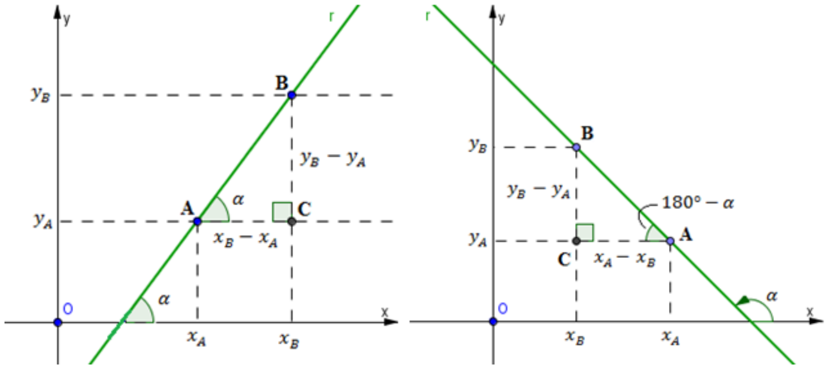


Vejamos agora o caso em que a reta r não é horizontal. Considere o ponto $C(x_B, y_A)$. Então o triângulo ABC é um triângulo retângulo e, portanto:

$$m = tg\ \alpha = \frac{d(C,B)}{d(A,C)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ se } 0° < \alpha < 90°, \text{ e}$$

$$m = tg\ \alpha = -tg(180° - \alpha) = -\frac{d(C,B)}{d(A,C)} = -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \text{ se } 90° < \alpha < 180°.$$

Figura 17: Determinação do coeficiente angular de retas não verticais por dois pontos distintos.



■

Observação 1.5: Note que na proposição anterior a ordem em que as subtrações são efetuadas não altera o resultado, pois $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

Exemplo 1.9: Considere a reta s, que passa pelos pontos de coordenadas $A(1,3)$ e $B(4,-3)$. O coeficiente angular de s pode ser obtido da seguinte maneira:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 3}{4 - 1} = \frac{-6}{3} \Longrightarrow m = -2.$$

Proposição 1.2: Seja $ax + by + c = 0$ uma equação geral de uma reta r. Se $b \neq 0$ e m é o coeficiente angular de r, então $m = -\frac{a}{b}$.

Demonstração: Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos de r. Na demonstração do Teorema 1.2, vimos que $y_A - y_B = a$ e $x_B - x_A = b$.

Pela Proposição 1.1, temos $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

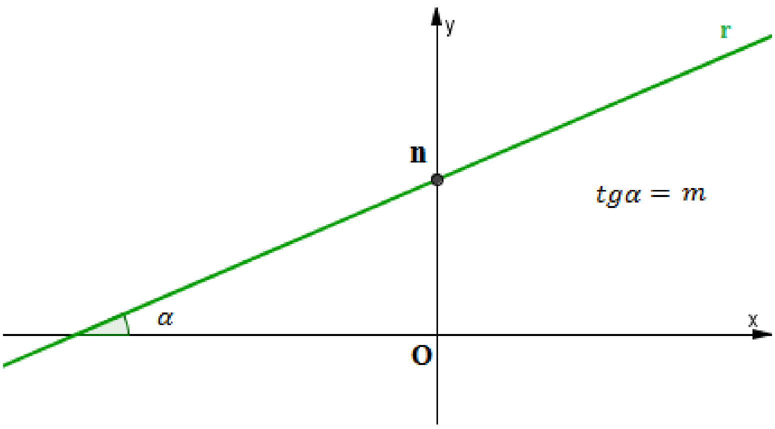
Portanto,

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-(y_A - y_B)}{x_B - x_A} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}.$$

■

Observação 1.6: Da proposição acima e da maneira vista anteriormente, para se obter uma equação reduzida de uma reta, segue que: se m é o coeficiente angular de uma reta r (não vertical) e n é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo Oy, então $y = mx + n$ é uma equação reduzida de r. Esse número real n é denominado coeficiente linear da reta r. Reciprocamente, sempre que uma reta tiver equação reduzida, ao expressarmos y em função de x, o coeficiente de x é o coeficiente angular da reta.

Figura 18: Coeficiente angular e linear de uma reta.



Exemplo 1.10: Dada a equação reduzida da reta $r: y = -3x + 6$, os coeficientes -3 e 6, representam respectivamente, o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta.

Observação 1.7: Seja r uma reta no plano cartesiano. Então:

i) se a reta r é horizontal, ela forma um ângulo nulo com o eixo das abscissas; assim, $m = tg\ 0° = 0$ e a equação reduzida da reta torna-se simplesmente $y = n$.

ii) se a reta r é vertical, ela forma um ângulo reto com o eixo das abscissas; como não existe $tg\ 90°$, é impossível escrever a forma reduzida da equação de qualquer reta vertical.

Exemplo 1.11: A equação da reta s que cruza o eixo Oy no ponto $P(0,5)$ é dada por $y = 5$, já que s é paralela ao eixo Ox, e tem $m = 0$.

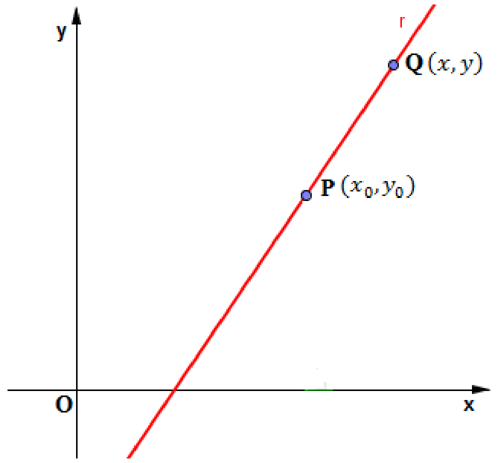
Observação 1.8: Para obter uma equação de uma reta r que, entre outras propriedades, passa por um ponto $P(x_0, y_0)$ conhecido, devemos considerar os seguintes dois casos:

1º caso: a reta r não é perpendicular ao eixo Ox (isto é, r não é vertical).

Nesse caso, seja $Q(x, y)$ um ponto genérico pertencente à reta r. Então, o coeficiente angular de r é $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$. Logo, uma equação da reta é dada por:

$$(y - y_0) = m(x - x_0).$$

Figura 19: Equação de uma reta r passando por $P(x_0, y_0)$.

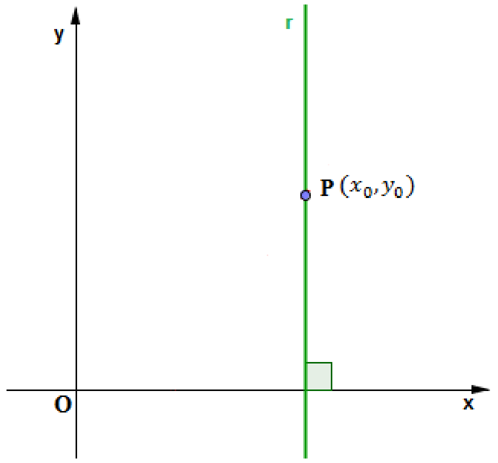


2º caso: a reta r é perpendicular ao eixo Ox (ou seja, r é vertical).

Nesse caso, o coeficiente angular da reta não está definido. Logo, sua equação é:

$$x = x_0.$$

Figura 20: Equação de uma reta vertical r passando por $P(x_0, y_0)$.



Exemplo 1.12: Determinar uma equação da reta que passa pelo ponto $P(2,9)$ e tem coeficiente angular igual a 4.

Temos:

$(y - y_0) = m(x - x_0) \Longrightarrow (y - 9) = 4(x - 2) \Longrightarrow y - 9 = 4x - 8,$

o que nos dá a equação reduzida $y = 4x + 1$, ou a equação geral $-4x + y - 1 = 0$, com ambas representando algebricamente a reta procurada.

1.5 Posições relativas de duas retas coplanares

Nessa seção, consideraremos apenas retas que estão contidas num mesmo plano, ou seja, ***retas coplanares***.

Dadas duas retas r e s coplanares, cujas equações são:

$$r: a_1x + b_1y = c_1$$

$$s: a_2x + b_2y = c_2$$

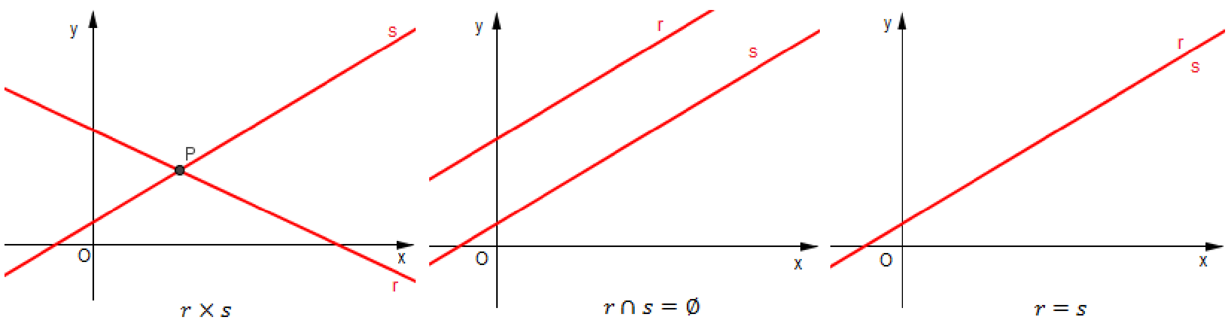
elas podem ocupar apenas três posições relativas no plano cartesiano. Essas posições são definidas com base no número de pontos comuns às retas, isto é:

r e s concorrentes $\Leftrightarrow$ um único ponto em comum;

r e s paralelas e distintas $\Leftrightarrow$ nenhum ponto em comum;

r e s coincidentes $\Leftrightarrow$ infinitos pontos comuns.

Figura 21: Possíveis posições relativas de duas retas coplanares.



Com o símbolo $r \times s$ indicaremos que r e s são concorrentes; com $r \cap s = \emptyset$ indicaremos que r e s são paralelas e distintas; com $r = s$ indicaremos que r e s são coincidentes (ou paralelas coincidentes).

Notemos que $r \parallel s$ significa $r \cap s = \emptyset$ ou $r = s$.

Todo ponto de interseção de duas retas tem de satisfazer às equações de ambas as retas. Portanto, obtemos o ponto comum $P(x_0, y_0)$ a duas retas concorrentes resolvendo o sistema formado pelas suas equações:

$$(\Sigma)\begin{cases} r:\ a_1x + b_1y = c_1 \\ s:\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira e a segunda equação do sistema (Σ), respectivamente, por b_2 e $-b_1$ e depois somando-as, obtemos:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = (c_1b_2 - c_2b_1). \qquad \boxed{\mathrm{I}}$$

Agora, multiplicando a primeira e a segunda equação do sistema (Σ), respectivamente, por $-a_2$ e a_1 e depois somando-as, obtemos:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = (a_1c_2 - a_2c_1). \qquad \boxed{\mathrm{II}}$$

Fazendo:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D,$$

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_1,$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_2,$$

o sistema (Σ) fica reduzido a:

$$(\bar{\Sigma})\begin{cases} D.x = D_1 \\ D.y = D_2 \end{cases}$$

cuja discussão é imediata. Temos três possíveis casos:

<u>1º caso</u>: $D \neq 0 \Leftrightarrow (\bar{\Sigma})$ tem uma única solução $\Leftrightarrow r \times s$.

<u>2º caso</u>: $\left.\begin{matrix} D = 0 \\ D_1\ (ou\ D_2) \neq 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (\bar{\Sigma})$ não tem solução $\Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$.

<u>3º caso</u>: $\left.\begin{matrix} D = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (\bar{\Sigma})$ tem infinitas soluções $\Leftrightarrow r = s$.

Quando $a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, temos:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow c_1b_2 = c_2b_1 \Leftrightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1c_2 = a_2c_1 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

e a teoria pode ser simplificada para:

$$r \times s \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$r \cap s = \emptyset \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$r = s \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Exemplo 1.13: Dadas as retas r e s coplanares, com respectivas equações $x + y - 3 = 0$ e $-2x + y - 9 = 0$, determinemos a posição relativa de ambas.

Resolução: Com base no que foi apresentado acima, vemos que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-2}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad e \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3},$$

o que nos dá

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow r \times s.$$

O ponto de interseção das retas r e s pode ser determinado resolvendo o sistema formado pelas suas equações. Vejamos:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

Pelo método da adição, obtemos

$$\begin{cases} x + y = 3 & .(-1) \\ -2x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = -3 \\ -2x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2 \text{ e } y = 5.$$

Logo, as retas r e s são concorrentes no ponto $P(-2{,}5)$.

Proposição 1.3: Duas retas, não verticais, são paralelas se, e somente se, seus coeficientes angulares são iguais.

Demonstração: Considere r e s duas retas não verticais com coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente.

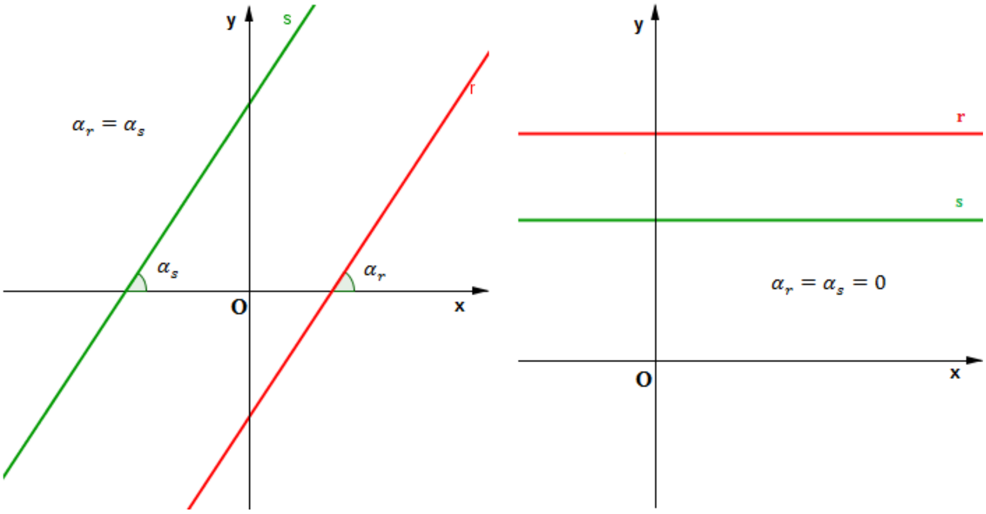
Sejam α_r e α_s as inclinações das retas r e s, respectivamente.

Se uma das retas r ou s for paralela ao eixo Ox, então r e s são paralelas entre si, se e somente se, ambas forem paralelas ao eixo Ox, ou seja, $m_r = 0 = m_s$.

Agora, se as retas r e s não são paralelas ao eixo Ox, note que o eixo Ox é uma transversal às retas r e s e os ângulos de inclinação das retas r e s são ângulos correspondentes. Assim, as retas r e s são paralelas se, e somente se, suas inclinações são iguais. Logo:

$$r \parallel s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow tg\ \alpha_r = tg\ \alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s.$$

Figura 22: Retas paralelas distintas e não verticais.

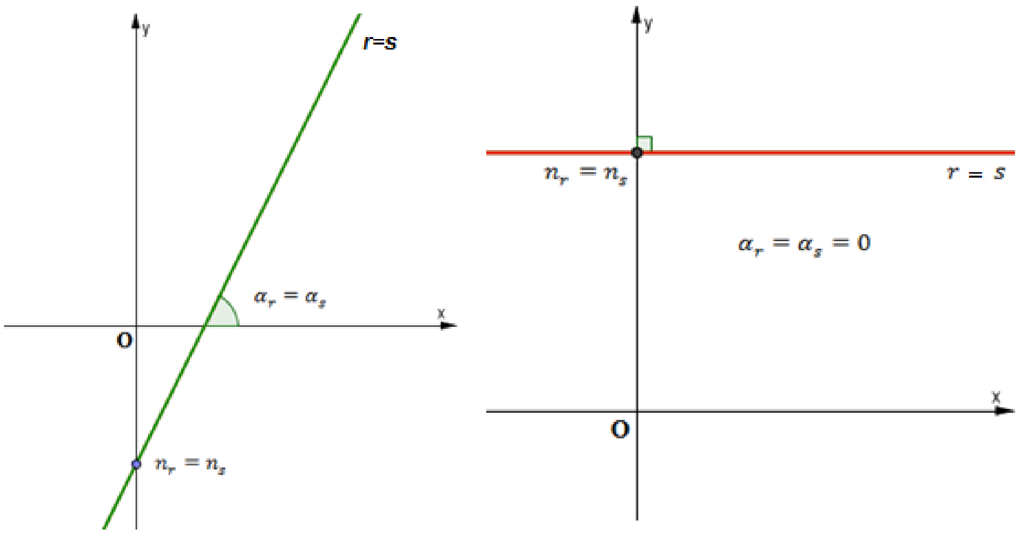


■

Observação 1.9: Se duas retas possuem os mesmos coeficientes angulares e lineares, então as retas são paralelas coincidentes. Para termos duas retas paralelas distintas, elas devem ter mesmo coeficiente angular, porém coeficientes lineares distintos.

Ainda, as equações reduzidas de retas paralelas coincidentes são exatamente idênticas ou têm coeficientes igualmente proporcionais. O mesmo vale para as equações gerais de duas retas paralelas coincidentes.

Figura 23: Retas paralelas coincidentes e não verticais.



Exemplo 1.14: Determinar a equação geral da reta s, sabendo que passa pelo ponto $A(3,-2)$ e é paralela à reta r, de equação $4x + 3y - 1 = 0$.

Resolução: Uma equação reduzida para r é $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

Logo, $m_r = -\frac{4}{3}$ e $n_r = \frac{1}{3}$.

Como $s \parallel r$, então $m_s = m_r$ e, daí, $m_s = -\frac{4}{3}$.

A partir de $(y - y_0) = m(x - x_0)$, obtemos:

$$\big(y - (-2)\big) = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow y + 2 = -\frac{4}{3}x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 6 = 0,$$

a qual é uma equação geral da reta s.

Ainda, se observarmos também a equação reduzida da reta s, podemos perceber que $n_s = 2$. Logo, como $n_r \neq n_s$ com $m_r = m_s$, conclui-se que as retas são paralelas *distintas*.

Observação 1.10: Caso uma reta r (ou s) seja perpendicular ao eixo Ox, passando pela abscissa k, a condição para que r seja paralela distinta a s, ou vice-versa, é que r (ou s) também seja perpendicular ao eixo Ox, passando pela abscissa k', com $k' \neq k$. E a condição para que r seja paralela coincidente a s, ou vice-versa, é que r (ou s) também seja perpendicular ao eixo Ox, passando pela abscissa k.

Figura 24: Retas verticais paralelas distintas.

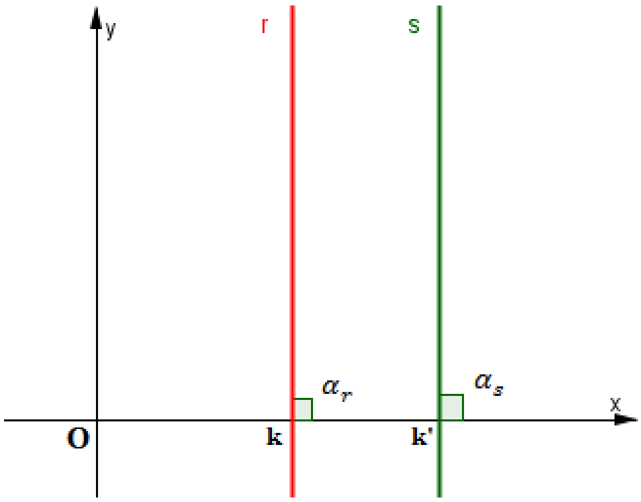
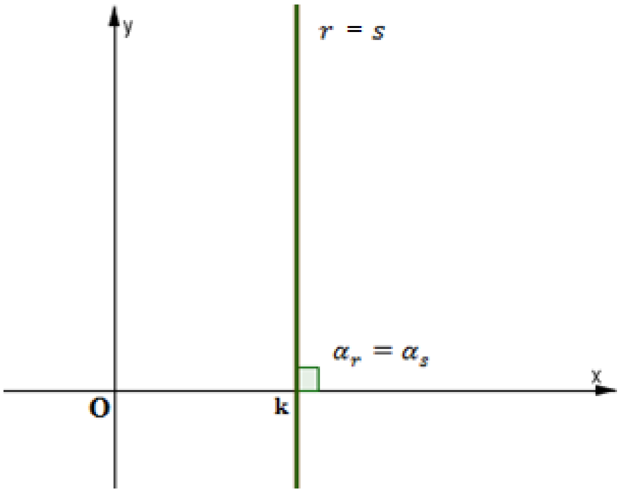


Figura 25: Retas verticais paralelas coincidentes.

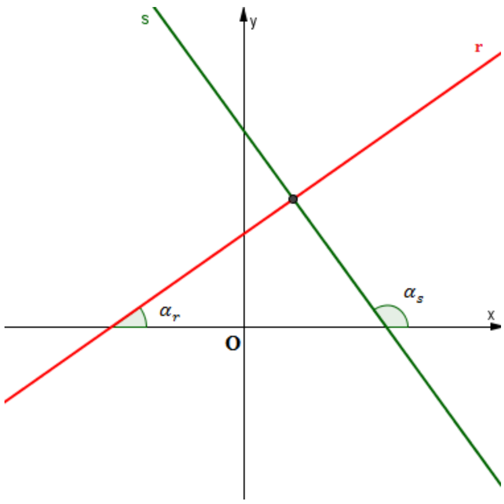


Corolário 1.1: Duas retas, não verticais, são concorrentes se, e somente se, seus coeficientes angulares são diferentes.

Demonstração: Sejam r e s duas retas não verticais com coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente. Temos que, duas retas coplanares ou são paralelas (distintas ou coincidentes) ou são concorrentes. Logo, r e s são retas concorrentes, se e somente se, r e s não são paralelas. Portanto, pela proposição anterior,

$$r \times s \Leftrightarrow m_r \neq m_s.$$

Figura 26: Retas concorrentes.



■

Observação 1.11: Retas concorrentes podem ter coeficientes lineares iguais ou distintos, conforme ilustrado nas retas das figuras a seguir:

Figura 27: Retas concorrentes no ponto P com coeficientes lineares iguais.

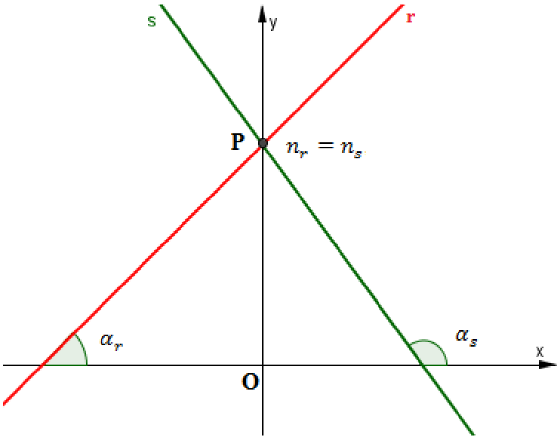
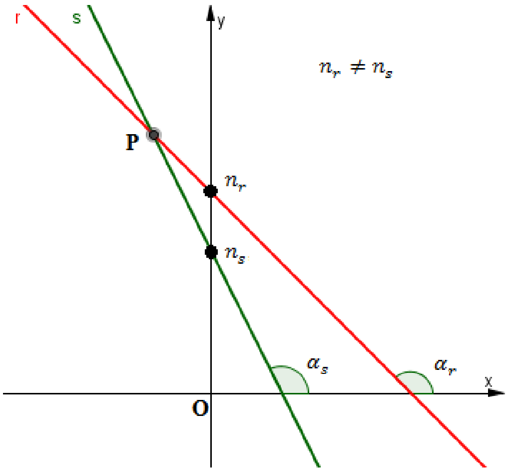


Figura 28: Retas concorrentes no ponto P com coeficientes lineares distintos.



Exemplo 1.15: As retas r e s de equações dadas, respectivamente, por $4x - 7y + 4 = 0$ e $2x + 9y - 27 = 0$ são concorrentes pois, ao observarmos suas equações reduzidas,

$$r: 4x - 7y + 4 = 0 \Longrightarrow y = \frac{4}{7}x + \frac{4}{7}$$

$$s: 2x + 9y - 27 = 0 \Longrightarrow y = -\frac{2}{9}x + 3$$

vemos que $m_r = \frac{4}{7}$ e $m_s = -\frac{2}{9}$, isto é $m_r \neq m_s$.

A perpendicularidade entre duas retas coplanares é um caso particular de concorrência.

Teorema 1.4: Duas retas, não verticais, são perpendiculares entre si se, e somente se, o produtos de seus coeficientes angulares é -1.

Demonstração: Sejam r e s duas retas não verticais. Considere que a reta r tem inclinação α_r e coeficiente angular m_r, e a reta s, inclinação α_s e coeficiente angular m_s.

Suponha que r e s são perpendiculares entre si. Note que nenhuma delas é perpendicular ao eixo Ox, pois elas são não verticais.

Sejam A e B os pontos de intersecção do eixo Ox com as retas r e s, respectivamente, e P o ponto de intersecção da reta r com a reta s.

O ângulo α_r (ou α_s) é um ângulo externo do triângulo APB. Vide figura abaixo.

Se o ângulo α_s é externo ao triângulo APB, então $\alpha_s = 90° + \alpha_r$.

Daí,

$$tg(\alpha_s) = tg(90° + \alpha_r) \Rightarrow tg(\alpha_s) = \frac{sen(90° + \alpha_r)}{cos(90° + \alpha_r)} \Rightarrow$$

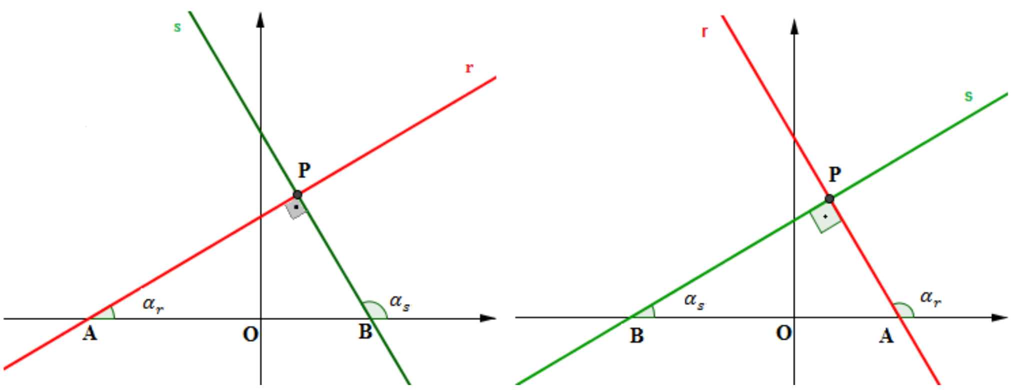
$$\Rightarrow tg(\alpha_s) = \frac{sen90°.cos(\alpha_r) + sen(\alpha_r).cos90°}{cos90°.\cos(\alpha_r) - sen90°.sen(\alpha_r)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(\alpha_s) = -\frac{cos(\alpha_r)}{sen(\alpha_r)} = -cotg(\alpha_r) \Rightarrow tg(\alpha_s) = -\frac{1}{tg(\alpha_r)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(\alpha_r)\,.\,tg(\alpha_s) = -1 \Rightarrow m_r\,.\,m_s = -1.$$

No caso em que α_r é ângulo externo do triângulo APB, obtemos de modo análogo que $m_r\,.\,m_s = -1$.

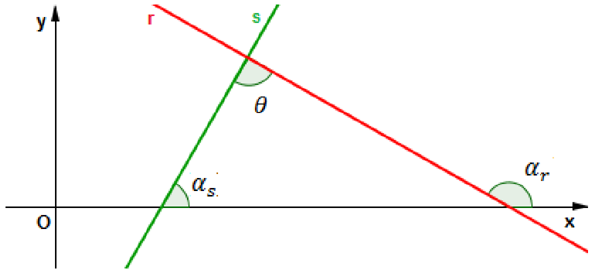
Figura 29: Retas perpendiculares.



Reciprocamente, suponha que $m_r.m_s = -1$. Então $m_r = -\frac{1}{m_s}$, isto é, $m_r \neq m_s$, e, portanto, as retas r e s são concorrentes e formam um ângulo θ tal que:

$$\alpha_r = \theta + \alpha_s. \qquad \boxed{\text{I}}$$

Figura 30: Duas retas perpendiculares formando um ângulo θ.



Temos,

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Longrightarrow tg(\alpha_r) = -\frac{1}{tg(\alpha_s)} \Longrightarrow tg(\alpha_r) = -cotg(\alpha_s) \Longrightarrow$$

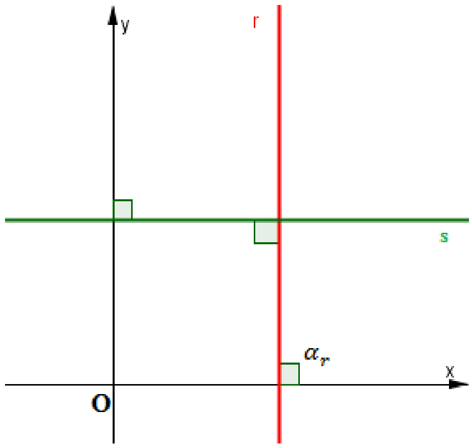
$$\Longrightarrow tg(\alpha_r) = tg(90° + \alpha_s) \Longrightarrow \alpha_r = 90° + \alpha_s \qquad \boxed{\text{II}}$$

Logo, comparando $\boxed{\text{I}}\, e\, \boxed{\text{II}}$, obtemos $\theta = 90°$ e daí r e s são perpendiculares entre si.

■

Observação 1.12: No caso em que temos duas retas sendo uma delas perpendicular ao eixo Ox (ou seja, uma reta vertical), a condição para que ambas sejam perpendiculares entre si é que uma delas tenha coeficiente angular nulo e a outra não possua coeficiente angular.

Figura 31: Reta r perpendicular ao eixo Ox, e $r \perp s$.



Exemplo 1.16: Considere a reta $r: y = -2x + 11$. Vamos determinar a equação da reta s que passa por $A(-1,2)$ e é perpendicular à r.

Resolução: Seja m_s o coeficiente angular da reta s. Temos que o coeficiente angular da reta r é -2. Pelo Teorema anterior,

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \,.\, m_s = -1.$$

Então,

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, conhecidos o coeficiente angular da reta s e um ponto pelo qual ela passa, temos:

$$(y-2) = \frac{1}{2}(x+1) \Longrightarrow y-2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

que é uma equação reduzida da reta s.

Exemplo 1.17: Seja $P(2,10)$ um ponto e r uma reta de equação geral $2x+3y-21=0$. Calcule a distância d do ponto P à reta r.

Resolução*:* Recordemos que a distância de um ponto P a uma reta r é a medida do segmento de extremidades em P e P', em que P' é a projeção ortogonal de P sobre r, isto é, P' é o ponto de interseção da reta r com a reta que é perpendicular à r passando por P.

Vamos determinar, primeiramente, a equação da reta s que passa pelo ponto P dado e é perpendicular à reta r. A partir da equação reduzida da reta r, dada por $y = -\frac{2}{3}x + 7$, obtemos que seu coeficiente angular é $m_r = -\frac{2}{3}$.

Como $r \perp s$, segue que o coeficiente angular da reta s é

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Uma equação da reta s é:

$$(y-10) = \frac{3}{2}(x-2) \Longrightarrow y-10 = \frac{3}{2}x - 3 \Longrightarrow$$

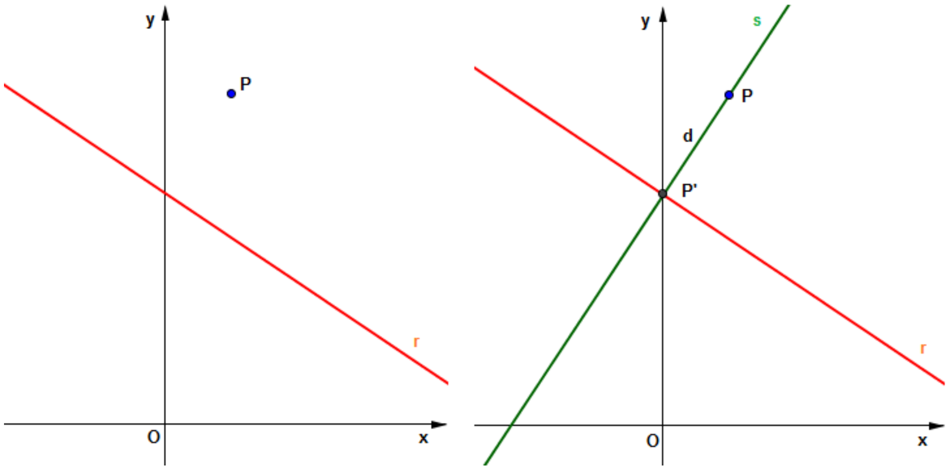
$$\Longrightarrow y - 10 - \frac{3}{2}x + 3 = 0 \Longrightarrow -\frac{3}{2}x + y - 7 = 0 \Longrightarrow 3x - 2y + 14 = 0.$$

As retas r e s são perpendiculares entre si por construção e, portanto, interceptam-se em um único ponto P'. Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} 2x+3y=21 \\ 3x-2y=-14 \end{cases}$$

obtemos que $P'(0,7)$.

Figura 32: Distância do ponto $P(2,10)$ à reta $r: 2x+3y-21=0$.



Logo,

$$d = d(P,P') = \sqrt{(0-2)^2+(7-10)^2} = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13}.$$

Portanto, a distância do ponto $P(2,10)$ à reta $r: 2x+3y-21=0$ é igual a $\sqrt{13}$.

1.6 Três equações lineares com duas incógnitas

Veremos a interpretação geométrica dos sistemas de três equações lineares com duas incógnitas. Sabemos que um sistema linear pode ser classificado em: *possível determinado* (o sistema possui uma única solução); *possível indeterminado* (o sistema possui infinitas soluções) *ou impossível* (o sistema não possui nenhuma solução). Assim, classificar um sistema linear com duas ou mais equações e com duas incógnitas é o mesmo que analisar a posição relativa de retas coplanares que representam cada uma das equações do sistema. As possibilidades que temos no caso de um sistema linear com três equações e com duas incógnitas são:

1º) Sistema Possível e Determinado: temos duas situações.

Situação 1: ocorre quando as três retas se interseccionam em um único ponto. Como por exemplo, no sistema dado pelas equações:

$$\begin{cases} 3x+4y=18 & (r) \\ x-2y=-4 & (s) \\ 3x-y=3 & (t) \end{cases}$$

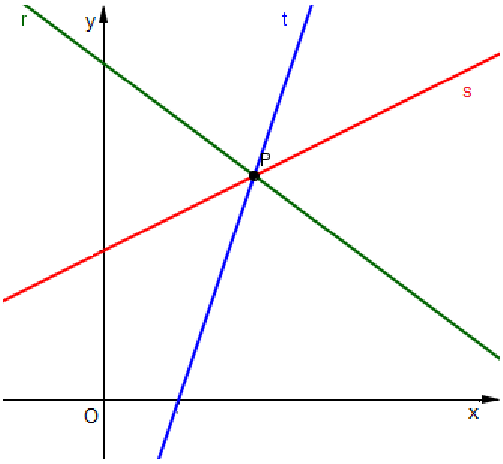
Resolvendo o sistema através do escalonamento da matriz dos coeficientes,

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 18 \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3.L2+L1\to L2]{} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 18 \\ 0 & 10 & 30 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L1-L3\to L3]{} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 18 \\ 0 & 10 & 30 \\ 0 & 5 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2.L3+L2\to L3]{} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 18 \\ 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 10y = 30 \end{cases}$$

obtemos $y = 3$ e $x = 2$, isto é, o ponto de intersecção das retas concorrentes é $P(2,3)$.

Figura 33: Interseção de três retas coplanares.



Situação 2: Quando duas retas coincidentes concorrem com uma terceira em um único ponto.

Sejam r, s e t, três retas nas seguintes condições: $r = s$ e $r \times t$, com respectivas equações: $2x + 3y = 7$;$-10x - 15y = -35$ e $3x + y = 4$.

O sistema formado pelas equações é dado por:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -10x - 15y = -35 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

Resolvendo-o,

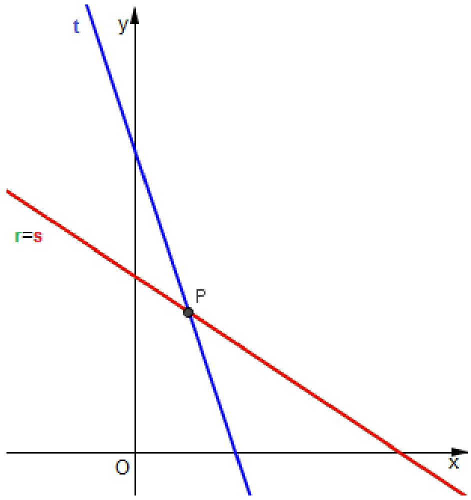
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ -10 & -15 & -35 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[5.L1+L2 \to L2]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3.L3+L1 \to L3]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -7x = -5 \end{cases},$$

de onde, $x = \frac{5}{7} \cong 0{,}71$ e $y = \frac{13}{7} \cong 1{,}86$.

Figura 34: Duas retas coincidentes concorrendo com uma terceira.



Logo, o Sistema é Possível e Determinado e sua solução é dada pelo ponto $P(\frac{5}{7},\frac{13}{7})$.

2º) Sistema Possível e Indeterminado: as três retas são coincidentes, isto é, não apresentam somente um ponto em comum, mas sim, infinitos pontos.

Sejam r, s e t, retas coplanares, cujas equações são: $3x-2y=8$; $-15x+10y=-40$ e $-6x+4y=-16$, respectivamente. O sistema,

$$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ -15x+10y=-40 \\ -6x+4y=-16 \end{cases}$$

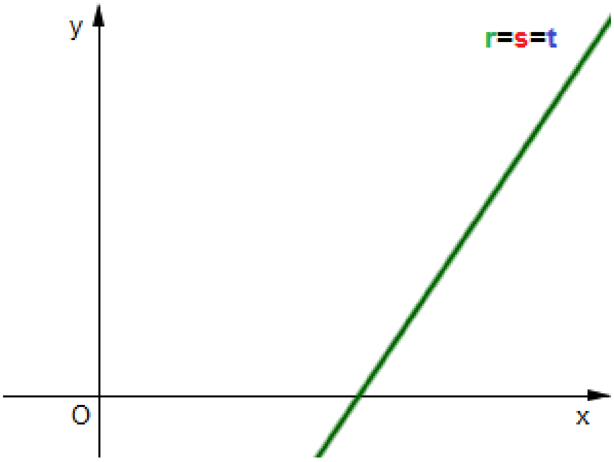
formado pelas equações das retas dadas não possui uma única solução, conforme podemos ver:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -15 & 10 & -40 \\ -6 & 4 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow[5.L1+L2\to L2]{} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow[2.L1+L3\to L3]{} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow 3x-2y=8 \Longrightarrow y=\frac{3}{2}x-4.$$

Logo, a solução do sistema é dada por todos os pontos da forma $(x;\frac{3}{2}x-4)$, $x \in \mathbb{R}$..

Figura 35: Três retas coplanares paralelas coincidentes.



3º) Sistema Impossível: neste caso ocorrem quatro situações distintas.

Situação 1: Quando três retas distintas não se interseccionam em um único ponto, mas são concorrentes duas a duas.

Sejam as retas r, s e t dadas pelas equações $x - 3y = -2$; $4x - y = 3$ e $3x + 2y = 16$, respectivamente.

Se analisarmos o sistema formado pelas três equações, teremos

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 4x - y = 3 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases}$$

Escalonando a matriz dos coeficientes,

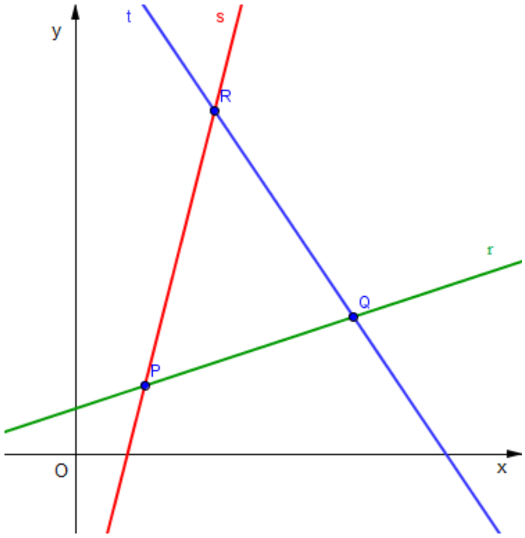
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[L2-4.L1 \to L2]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 11 \\ 3 & 2 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3.L1 \to L3]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 11 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow[L2-L3 \to L3]{} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

obtemos,

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 11y = 11 \\ 0 = -11 \end{cases}$$

Logo, o sistema é impossível (SI) e as três retas não são concorrentes em um único ponto.

Figura 36: Três retas distintas concorrentes duas a duas.



Neste caso, observemos que os pontos de interseção dos pares de retas formam os vértices de um triângulo, bem como as retas são suportes para os lados do mesmo.

Situação 2: Quando duas retas paralelas distintas são concorrentes a uma terceira reta.

Sejam as retas e suas equações $r: x + y = 1$, $s: -x + y = -3$ e $t: -x + y = -7$.

Se analisarmos o sistema formado pelas três equações, teremos

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y = -3 \\ -x + y = -7 \end{cases}$$

Escalonando a matriz dos coeficientes,

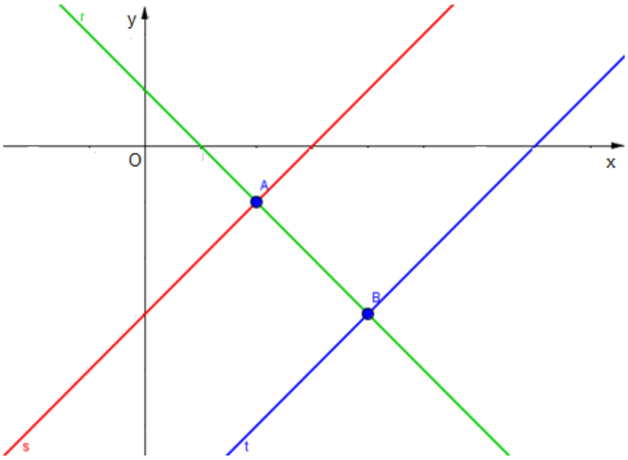
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L1+L2\to L2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3+L1\to L3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$\begin{cases} \mathrm{x} + y = 1 \\ 2y = -2 \\ 2y = -6 \end{cases}$$

isto é, $y = -1, y = -3$, $x = 2$ e $x = 4$. Absurdo!

Figura 37: Duas retas paralelas concorrentes a uma terceira.



Logo, o sistema é impossível (SI) e as três retas não são concorrentes em um único ponto.

Situação 3: Quando há três retas paralelas entre si.

Consideremos r, s e t, retas distintas e coplanares e suas respectivas equações dadas no sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 23 \\ -6x - 9y = -15 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares acima pode ser escalonada da seguinte forma:

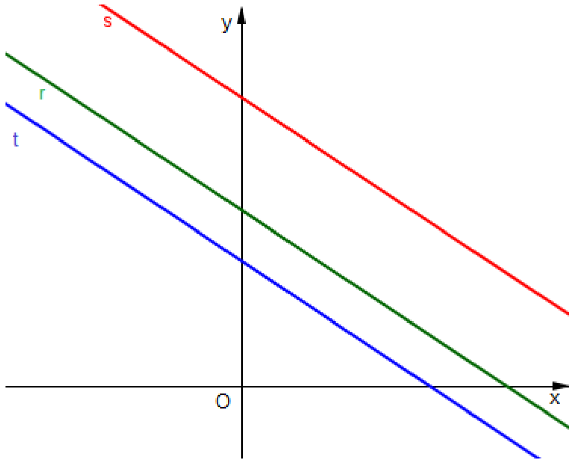
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 23 \\ -6 & -9 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2.L1+L2\to L2]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \\ -6 & -9 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[3.L1+L3\to L3]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Obtemos então,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 0 = 9 \\ 0 = 6 \end{cases}$$

Absurdo. O sistema linear não admite solução e, portanto, é impossível.

Figura 38: Três retas coplanares paralelas entre si.



Situação 4: Quando há duas retas coincidentes paralelas a uma terceira.

Sejam r, s e t, retas coplanares com $r = s$, $t \parallel r$ e $t \parallel s$, dadas pelas equações

$$r: 2x + 3y = 7$$

$$s: 8x + 12y = 28$$

$$t: -6x - 9y = -15$$

que formam o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 8x + 12y = 28 \\ -6x - 9y = -15 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por meio do escalonamento da matriz de seus coeficientes,

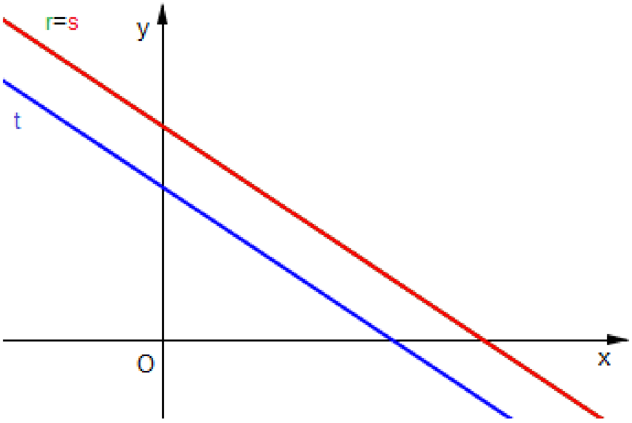
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 12 & 28 \\ -6 & -9 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4.L1+L2 \to L2]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -9 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[3.L1+L3 \to L3]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 0 = 0 \\ 0 = 6 \end{cases}$$

O que não pode ocorrer.

Figura 39: Duas retas coincidentes paralelas a uma terceira.



Assim, o sistema é impossível (SI), ou seja, não tem solução.

2 UMA ABORDAGEM COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

A Matemática e a língua materna representaram desde sempre os componentes básicos dos currículos escolares, fato visivelmente claro quando se dizia que a escola devia ser o lugar onde se aprendia a ler, escrever e contar. Atualmente, o que se espera da escola incorpora, além da aprendizagem das letras e dos números, o interesse pelas múltiplas formas de linguagem, a compreensão das ciências e das tecnologias, particularmente as informáticas.

> Uma razão para o tratamento da Matemática como área específica é a possibilidade de tal opção facilitar a incorporação crítica dos inúmeros recursos tecnológicos atualmente existentes para a representação de dados e o tratamento das informações disponíveis, na busca da transformação de informação em conhecimento. (SÃO PAULO (ESTADO), 2010, p.27)

Apesar de serem considerados instrumentos extremamente necessários para o desenvolvimento de inúmeros trabalhos e ramos profissionais, é na Matemática que os computadores tornam-se instrumentos imprescindíveis quanto aos novos recursos e possibilidades, seja na área algorítmica ou no terreno da Educação.

> Ao respeitar a rica história da disciplina e alçá-la a uma área do conhecimento, busca-se apenas criar as condições para uma exploração mais adequada das possibilidades de a Matemática servir às outras áreas, na grande tarefa de transformação da informação em conhecimento em sentido amplo, em todas as suas formas de manifestação. (SÃO PAULO (ESTADO), 2010, p.28)

Visando entrelaçar o ensino da Geometria Analítica ao uso e interpretação tecnológica da Matemática, apresentaremos uma proposta para se abordar retas do plano com o auxílio do software GeoGebra, tendo como **público alvo** os alunos das terceiras séries do Ensino Médio, com o **objetivo** de introduzir à realidade escolar dos mesmos, o contato com instrumentos tecnológicos como computadores, tablets e celulares, de modo que os estudantes percebam a tecnologia a serviço da aprendizagem, facilitando processos diversos, inclusive matemáticos, e tornando-os mais interessantes. Ainda, espera-se que os alunos enxerguem a importância da tecnologia não somente no uso das redes sociais, para diversão e entretenimento, mas que observem que a tecnologia e seus recursos estão a dispor de nosso crescimento pessoal e profissional.

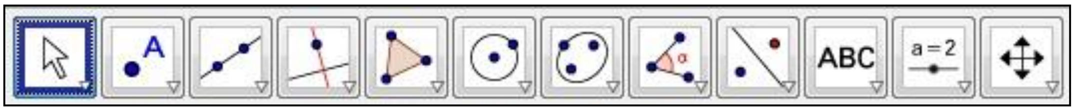
Para a realização das atividades **os materiais necessários** são computadores contendo software GeoGebra e o roteiro de atividades elaborado para que sigam passo a passo as instruções e orientações visando a construção do novo conhecimento.

2.1 Proposta de atividades para o ensino de retas com o uso do software GeoGebra

O programa GeoGebra foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, professor da Universidade de Salzburg, com o intuito de dinamizar o estudo da Matemática. Ele é um software livre que pode ser encontrado com facilidade em sites de busca ou no endereço: www.geogebra.org.

Ao abrir a área de trabalho do GeoGebra, nos deparamos com uma página (tela de trabalho), nesta página, podemos notar a presença de uma barra de menus (Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela, Ajuda) e um pouco abaixo uma barra de ferramentas (figura 40). Essas ferramentas é que permitem as construções e para se ter acesso a uma delas clique na setinha localizada abaixo, à direita, em cada caixa de ferramentas e selecione a opção desejada.

Figura 40: Barra de Ferramentas do GeoGebra.



Para iniciar um trabalho selecione a(s) janela(s) de interesse (se não estiverem habilitadas ao abrir a tela), para isso clique em Exibir, na barra do menu, e selecione a(s) janela(s). O nosso caso de interesse serão a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização. Também podemos representar os eixos coordenados: eixo x (ou eixo Ox) e eixo y (ou eixo Oy). Para exibi-los clique com o botão direito do mouse sobre a tela, dentro da Janela de Visualização, e selecione a opção Eixos. Na mesma opção, é possível selecionar Malha (caso ela não esteja ativada e seja conveniente).

Na seção 1 deste trabalho, apresentamos ao leitor a equação reduzida de uma reta dada pela equação $y = mx + n$, onde m e n representam os coeficientes angular e linear, respectivamente. Ao trabalharmos com o software GeoGebra vamos observar que ele trata a equação reduzida da reta através da expressão $y = ax + b$, com a representando seu coeficiente angular e b representando seu coeficiente linear.

ATIVIDADE 1: Coeficiente angular e coeficiente linear de uma reta

Objetivo: Com esta atividade pretende-se que os alunos percebam a relação entre o valor encontrado por eles no cálculo do coeficiente angular através de dois pontos da reta, e o escalar (coeficiente) que multiplica x na equação reduzida da reta, isto é, que enxerguem que este valor que “acompanha o x” é o próprio coeficiente angular da reta. Ao mesmo tempo, é necessário que observem que o termo independente que aparece na equação reduzida de uma reta é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo Oy.

Material necessário: Computadores com o software GeoGebra.

Tempo previsto: 1 aula de 50 minutos.

Desenvolvimento:

1- Represente o ponto $A(-1,6)$. Para isso, insira ***Eixos*** e ***Malha*** (caso não estejam ativados), depois selecione ***Ponto*** e clique sobre o local da malha que representa o ponto pedido. Utilize a ferramenta ***Reta*** para construir uma reta passando pelo ponto A. Agora, faça o mesmo para pelo menos outros três pontos. Baseado nas construções obtidas, responda: marcado um ponto no plano, quantas retas existem passando por esse ponto?____.

2- Agora, represente os pontos $A(-1,6)$ e $B(2,-3)$. Utilizando a ferramenta ***Reta*** construa uma reta r passando pelos pontos A e B. Faça o que se pede:

i) Responda, com base na construção obtida: quantas retas existem passando pelos pontos A e B?____.

ii) Observe na "***Janela de Álgebra***" que a equação da reta r é: _____________. Depois, clique com o botão direito sobre a equação da reta na "***Janela de Álgebra***" e selecione a opção "***Equação:*** $\boldsymbol{y = ax + b}$", obtendo assim a equação: ________________________________. Qual o nome que se dá a esse tipo de equação? ____.

iii) Calcule, algebricamente, o coeficiente angular m da reta r, obtendo assim que m é igual a _______________________.

iv) O que representa o valor (coeficiente) que multiplica x na equação obtida no item **ii**?________________________________.

v) Observe a reta r na "***Janela de Visualização***". Em que ponto a reta r intercepta o eixo Oy?___________. O que representa a ordenada desse ponto quando olhamos para a equação reduzida da reta?____________________.

3- Repita o que foi feito no item 2 agora para os pontos $C(1,3)$ e $D(-2,-3)$ e anote abaixo as suas respostas:

i) Com base na construção obtida: quantas retas existem passando pelos pontos C e D?____.

ii) As equações da reta obtida são: ________________e ________________.

iii) Calculando algebricamente, o coeficiente angular da reta é igual a _______________________.

iv) O valor (coeficiente) que multiplica x na equação obtida no item **ii** representa ________________________________.

v) A reta intercepta o eixo Oy no ponto _______________. A ordenada desse ponto, quando olhamos para a equação reduzida da reta, representa _______________________________.

Conclusão:

- Como é chamado o escalar (coeficiente) que multiplica x na equação reduzida de uma reta?____.
- O que indica o termo independente na equação reduzida de uma reta?____.
  Esse termo é chamado "*coeficiente linear*" da reta.

<u>ATIVIDADE 2:</u> Construindo retas quando conhecemos os coeficientes

Objetivo: Com esta atividade espera-se que os alunos familiarizem-se com o programa GeoGebra no que diz respeito à construção de retas através da equação reduzida da mesma, observando o que muda de uma reta para a outra de acordo com seus valores de coeficientes; é interessante e muito importante também que através desta atividade os alunos observem que o ângulo de inclinação da reta depende diretamente do sinal do coeficiente angular.

Material necessário: Computadores com o software GeoGebra.

Tempo previsto: 2 aulas de 50 minutos cada.

Desenvolvimento:

1- Preencha a tabela abaixo com as equações reduzidas das retas obtidas conhecendo-se os coeficientes (angular e linear), em cada caso. Logo após, proceda seguindo os passos:

a) No campo "***Entrada***" digite a equação reduzida e dê ***Enter***.

b) Selecione a ferramenta ***Ponto*** na <u>CAIXA 2</u>, clique sobre a reta obtida e depois sobre o eixo Ox, obtendo assim, dois pontos distintos. O outro ponto é o ponto de interseção da reta com o eixo Ox, que pode ser obtido usando a ferramenta ***Interseção de Dois Objetos*** da <u>CAIXA 2</u> clicando sobre a reta e o eixo Ox.

c) Selecione agora na <u>CAIXA 8</u> a ferramenta ***Ângulo*** e clique sobre os três pontos criados – primeiramente no ponto do eixo Ox, depois no ponto de interseção e por último no ponto pertencente à reta obtida; o valor referente à medida do ângulo aparecerá entre as retas na "***Janela de Visualização"*** e também será indicado na ***"Janela de Álgebra"***. Complete a **Tabela 1** com o ângulo de inclinação da reta.

OBS: Para uma melhor visualização da reta e seu ângulo de inclinação, atribua a ela uma cor. Clique sobre a reta com o botão direito do mouse, vá em "Propriedades" e depois em "Cor".

Ainda, afim de uma melhor visualização, na ***"Janela de Álgebra"***, clique com o botão direito do mouse sobre cada um dos pontos marcados e selecione a opção **"*Exibir Objeto*"**. Realize este processo para cada uma das retas e preencha a tabela.

Tabela 1: Equação reduzida da reta e seu ângulo de inclinação.

Reta	**Coeficiente angular**	**Coeficiente linear**	**Equação reduzida:** $\boldsymbol{y = ax + b}$	**Ângulo de inclinação da reta**
$\mathbf{r_1}$	**1**	**0**		
$\mathbf{r_2}$	**2**	**0**		
$\mathbf{r_3}$	**2**	**3**		
$\mathbf{r_4}$	**-2**	**4**		
$\mathbf{r_5}$	**-1**	**6**		
$\mathbf{r_6}$	**0.5**	**-5**		
$\mathbf{r_7}$	**-0.5**	**4**		

Observe as retas obtidas e responda:

i) O que acontece com o ângulo de inclinação formado entre cada reta construída e o eixo Ox, nos casos que $\boldsymbol{a < 0}$?_______________________

ii) E quando $\boldsymbol{a > 0}$?____

2- Selecione a ferramenta ***Controle Deslizante***, na CAIXA 11, clique na tela e digite "a" na caixa que aparece (deixe a variando de -5 a 5), em seguida clique em ***OK***. Novamente, selecione a ferramenta ***Controle Deslizante***, clique na tela e digite b (deixe b variando de -7 a 7), em seguida clique em ***OK***.

i) Digite na caixa de ***Entrada*** "$r: y = a * x$" e dê ***Enter***. Selecione a ferramenta ***Mover*** na CAIXA 1 e movimente o a no controle deslizante. Observe: o que ocorre com o ângulo de inclinação da reta quando $a > 0$, o que ocorre com o ângulo quando $a < 0$ e o que acontece quando $a = 0$? ____

ii) Digite na caixa de **Entrada** "$s: y = a * x + b$" e dê ***Enter***. Escolha um valor fixo para "a". Selecione ***Mover*** e movimente o b no segundo controle deslizante. Observe o que ocorre com a reta na ***Janela de Visualização*** e também sua equação na ***Janela de***

Álgebra a cada variação de b. Repita para pelo menos outros três valores de a, inclusive $a = 0$. O que você observa?_______________________________________

Conclusão:

- Quando o coeficiente angular da reta é positivo ($a > 0$), temos que o ângulo de inclinação da reta obtida é maior que ____º e menor que ____º; Quando o coeficiente angular da reta é negativo ($a < 0$) temos que o ângulo de inclinação da reta obtida é maior que ____º e menor que ____º;
- Quando $a = 0$, a reta é ________________________ ao eixo Ox;

ATIVIDADE 3: Observando a posição relativa entre duas retas

Objetivo: Esta atividade, dividida em duas partes, tem como objetivo a interpretação gráfica e algébrica das retas e suas equações, identificando através da observação de dados, tais como coeficientes e ângulos, se as retas construídas são paralelas a uma reta dada, ou não. Caso não sejam paralelas, as retas chamadas concorrentes formam entre si ângulos que podem ser medidos e relacionados aos produtos dos coeficientes angulares dos pares de retas em questão. Aqui, damos uma introdução ao estudo das características de retas perpendiculares.

Material necessário: Computadores com o software GeoGebra.

Tempo previsto: 1 aula de 50 minutos.

Desenvolvimento PARTE I:

1 - Represente a reta r de equação $\mathbf{y = 2x - 6}$. Para isso digite **"$\boldsymbol{r}$: $\mathbf{y = 2x - 6}$"** no campo ***Entrada.*** Qual o coeficiente angular da reta r?_____________________

2 - Represente cada uma das retas dadas na **Tabela 2**. Basta digitar a equação na caixa ***Entrada*** e dar ***Enter***. Para que as retas já apareçam nomeadas, antes da equação da reta, digite ***"r_1:"*** para a reta $\boldsymbol{r_1}$, e assim por diante**.** Para uma melhor visualização represente cada reta com uma cor diferente, para isso clique com o botão direito do mouse sobre a reta obtida, selecione "***Propriedades***", em seguida "***cor***" e escolha uma cor.

3 - Após obter as retas, preencha a tabela abaixo comparando cada uma das retas com a reta r de equação $\mathbf{y = 2x - 6.}$

Tabela 2: Retas paralelas.

Reta	Equação Reduzida	Coeficiente angular	Relação com o coeficiente angular de r	Posição relativa com a reta r	Ângulo de inclinação da reta com o eixo Ox
r_1	$\mathbf{y = 2x + 3}$				
r_2	$\mathbf{y = 2x - 15}$				
r_3	$\mathbf{y = 2x + 0}$				
r_4	$\mathbf{y = 2x - 24}$				
r_5	$\mathbf{y = 2x + 6}$				

4 - Agora, responda:

i) Os coeficientes angulares das retas obtidas são iguais ou diferentes?______________

ii) Qual a medida do ângulo de inclinação da reta r com o eixo Ox?_________________

iii) Comparando os ângulos de inclinação de cada reta com o eixo Ox, eles são iguais, ou diferentes?________________________

iv) As retas dadas na tabela acima são concorrentes ou são paralelas à reta r?_______________________

Desenvolvimento PARTE II:

Inicialmente no programa GeoGebra, vá em ***"Arquivo"*** e selecione ***"Nova Janela".***

1 - Represente a reta r de equação $\mathbf{y = 2x - 6}$. Para isso digite **"**$\boldsymbol{r}$: $\mathbf{y = 2x - 6}$**"** no campo ***Entrada.*** Qual o coeficiente angular da reta r?_____________________

2 - Represente cada uma das retas dadas na **Tabela 3**. Basta digitar a equação na caixa ***Entrada*** e dar ***Enter***. Nomeie cada reta, e escolha cores diferentes para cada uma delas, da mesma forma que na PARTE I desta atividade.

OBS: Nesta parte da Atividade 3, não mais mediremos o ângulo formado entre as retas obtidas e o eixo Ox, mas sim, mediremos o ângulo formado entre cada reta da tabela e a reta r, dada inicialmente. Para tanto, após digitar a equação da reta no campo entrada, selecione a ferramenta ***"Ponto"*** na CAIXA 2, clique sobre a reta r, depois sobre a reta obtida, e também sobre a interseção das duas, obtendo três pontos distintos. Selecione então, na CAIXA 8 a ferramenta ***"Ângulo"*** e clicando sobre os pontos demarcados, obtenha a medida do ângulo entre as retas. Para uma melhor visualização, na ***"Janela de Álgebra"***, clique com o botão direito do mouse sobre os pontos e selecione ***"Exibir Objeto"***.

3 - Complete a tabela com as informações necessárias.

Tabela 3: Retas concorrentes.

Reta	**Equação Reduzida**	**Coeficiente angular**	**Relação com o coeficiente angular da reta r**	**Produto com coeficiente angular da reta r**	**Posição relativa com a reta r**	**Ângulo formado com a reta r**
r_1	$\mathbf{y = -0.5x + 3}$					
r_2	$\mathbf{y = -0.5x - 1}$					
r_3	$\mathbf{y = -0.5x + 0}$					
r_4	$\mathbf{y = 0.2x - 4}$					
r_5	$\mathbf{y = -x + 7}$					

4- Agora, responda:

i) O coeficiente angular de cada reta é igual ou diferente ao coeficiente angular da reta r dada inicialmente?____.

ii) As retas obtidas através das equações dadas na **Tabela 3** são concorrentes ou paralelas à reta r?____.

iii) Quando os produtos dos coeficientes angulares obtidos na tabela são iguais a -1, qual a medida do ângulo formado entre a reta dada e a reta r?__________; O mesmo ocorre quando o produto dos coeficientes não é igual a -1?______________________.

ATIVIDADE 4: Construindo retas paralelas e retas perpendiculares

Objetivo: Nesta atividade espera-se que, através do uso das ferramentas “Reta Paralela” e “Reta Perpendicular”, os alunos possam criar retas paralelas a uma reta dada sua equação (PARTE I), e criar retas perpendiculares dada inicialmente uma equação de reta (PARTE II). Logo após, com base nas observações de seus coeficientes, informações tabeladas e da parte gráfica, deseja-se que os alunos interpretem as características e relações entre os coeficientes angulares e também seus produtos, concluindo assim quando duas retas são paralelas e quando são perpendiculares.

Material necessário: Computadores com o software GeoGebra.

Tempo previsto: 1 aula de 50 minutos.

Desenvolvimento PARTE I:

1- Represente o ponto $A(1,2)$. Para tanto, digite $A = (1,2)$ no campo ***Entrada.***

2- Represente a reta r de equação $y = 3x + 8$. Para isso digite “$\boldsymbol{r}$: $\mathbf{y = 3x + 8}$” no campo ***Entrada.***

3- Na CAIXA 4 selecione ***Reta Paralela,*** clique sobre o ponto A e depois sobre a reta r, representando assim a reta que é paralela à reta r passando pelo ponto A. Nomeie esta reta de s (para nomear clique com o botão direito do mouse sobre a reta e selecione ***Renomear,*** digite "s" e clique em "OK").

4- Observe na ***Janela de Álgebra*** as equações reduzidas das retas r e s. Responda:

i) O coeficiente angular das retas r e s são _______ e ________, respectivamente.

ii) Compare os coeficientes angulares das retas r e s. O que você concluiu? ____.

iii) Será que isso só acontece para a reta paralela s? Vejamos.

5- Movimente o ponto A e analise o que acontece com os coeficientes angulares das retas r e s. Para isso, na <u>CAIXA 1</u> selecione ***Mover*** e mova o ponto A. Observe que ao mover o ponto A, a nova reta s obtida continua sendo paralela à reta r. Faça pelo menos 3 movimentações com o ponto A e preencha a tabela a seguir.

Tabela 4: Construindo retas paralelas.

Movimento	**Equação reduzida da reta s obtida**	**Coeficiente angular da reta s obtida**	**Relação entre os coeficientes angulares das retas r e s**
1			
2			
3			

Desenvolvimento PARTE II:

Inicialmente, no programa GeoGebra, vá em ***"Arquivo"*** e selecione ***"Nova Janela"*.**

1- Represente o ponto $B(2, -3)$.

2- Represente a reta r de equação $\mathrm{y} = -2\mathrm{x} + 6$. Para isso digite "$\boldsymbol{r}$: $\mathbf{y} = -\mathbf{2x} + \mathbf{6}$" no campo ***Entrada.***

3- Na <u>CAIXA 4</u> selecione ***Reta Perpendicular,*** clique sobre o ponto B e depois sobre a reta r, representando assim a reta que é perpendicular à reta r passando por este ponto. Nomeie esta reta de s (para nomear clique com o botão direito do mouse sobre a reta e selecione ***Renomear,*** digite "s" e clique em "OK").

4- Observe na ***Janela de Álgebra*** as equações reduzidas da reta r e s. Responda:

i) O coeficiente angular das retas r e s são _________ e __________, respectivamente.

ii) Compare os coeficientes angulares das retas r e s. O que você concluiu? ____.

iii) Qual é o produto dos coeficientes angulares das retas r e s?____________________.

iv) Será que isso só acontece para a reta perpendicular s ? Vejamos.

5- Movimente o ponto B e analise o que acontece com os coeficientes angulares das retas r e s. Para isso, na CAIXA 1 selecione ***Mover*** e mova o ponto B. Observe que ao mover o ponto B, a nova reta s obtida continua sendo perpendicular à reta r. Faça pelo menos 3 movimentações com o ponto B e preencha a tabela a seguir.

Tabela 5: Construindo retas perpendiculares.

Movimento	**Equação reduzida da reta s obtida**	**Coeficiente angular da reta s obtida**	**Relação entre os coeficientes angulares das retas r e s**	**Produto dos coeficientes angulares**
1				
2				
3				

Conclusão: Diante das observações realizadas nas Atividades 3 e 4, pode-se concluir que:

- Duas retas distintas e não verticais são ***paralelas***, se e somente se, seus coeficientes angulares são __________________________.
- Duas retas distintas e não verticais são ***concorrentes***, se e somente se, seus coeficientes angulares são __________________________.
- Duas retas não verticais e não horizontais são **perpendiculares** (ou seja, são concorrentes e o ângulo formado entre elas mede 90^0), se e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é _____________________.

OBS: As retas verticais têm equações do tipo $x = a;\ a \in \mathbb{R}$ e são sempre paralelas ao eixo Oy e também são paralelas entre si. As retas horizontais têm equações do tipo $y = b;\ b \in \mathbb{R}$, e são sempre paralelas ao eixo Ox e paralelas entre si. Ainda, duas retas, sendo uma delas vertical e a outra horizontal, são perpendiculares entre si.

Para refletir: Se duas retas, além de terem o mesmo coeficiente angular, têm também o mesmo coeficiente linear, as retas são coincidentes (paralelas iguais).

2.2 Relato de Experiência

As atividades apresentadas anteriormente foram desenvolvidas no final do primeiro bimestre do ano letivo de 2015 com uma turma da 3ª Série do Ensino Médio de uma Escola Estadual da cidade de Novais-SP, onde atuo como professora efetiva na disciplina de Matemática.

Antes da aplicação das atividades, foram trabalhados em sala de aula, com o apoio do Caderno do Aluno e livro didático, conteúdos introdutórios da Geometria Analítica, a saber:

- Sistema cartesiano ortogonal e a localização de pontos no mesmo;
- Cálculo da distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano e a dedução da fórmula geral;
- Inclinação e coeficiente angular de uma reta;
- Condição de alinhamento de três pontos e o cálculo da equação geral da reta através do determinante;
- Cálculo da equação da reta pela fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$;
- Formas da equação da reta;

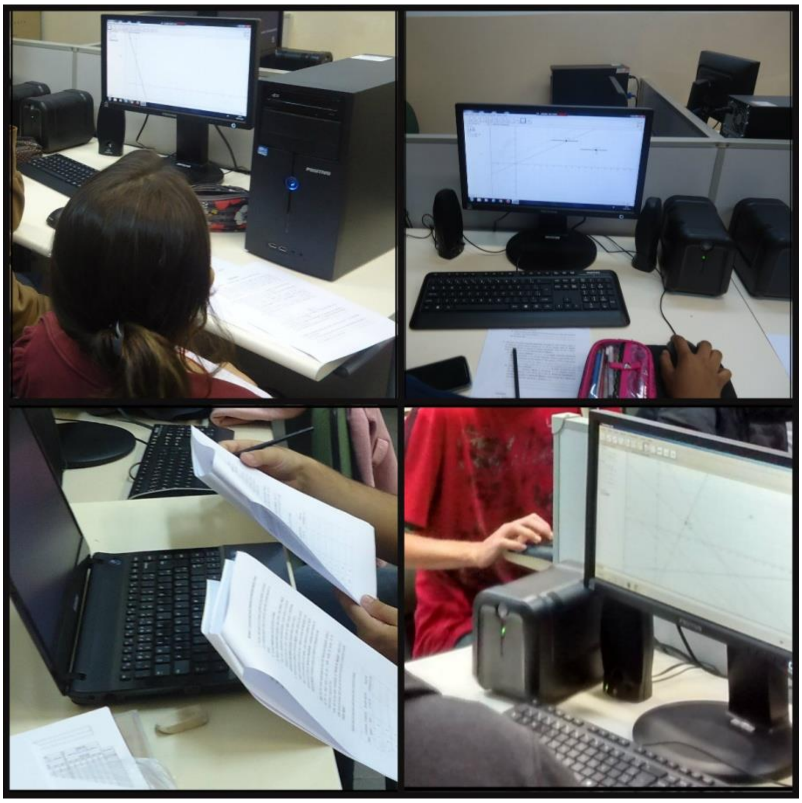
Logo, para que os alunos pudessem participar e interagir de forma satisfatória na aplicação e desenvolvimento desta parte mais prática do estudo de retas com o auxílio do software GeoGebra, os mesmos deveriam trazer consigo toda bagagem matemática teórica construída na primeira parte do estudo da Geometria Analítica realizado em sala de aula.

Para iniciar este projeto e, a fim de relacionar e apresentar alguns comandos do software, até então desconhecido pelos alunos, com o auxílio do reto-projetor, foi realizada uma aula dinâmica com a turma toda, mostrando algumas características do programa GeoGebra, como suas ferramentas poderiam ser utilizadas e algumas de suas finalidades.

Diante da dificuldade encontrada em relação à quantidade disponível de computadores em funcionamento na Sala de Informática – chamada Acessa Escola – e a fim de tornar o melhor possível a realização das atividades, após uma conversa com a Coordenadora Pedagógica da escola, decidiu-se dividir a turma de 34 alunos em dois grupos. Enquanto um grupo desenvolvia as atividades no computador, o outro grupo ficava em sala de aula desenvolvendo atividades iniciais presentes no caderno do aluno.

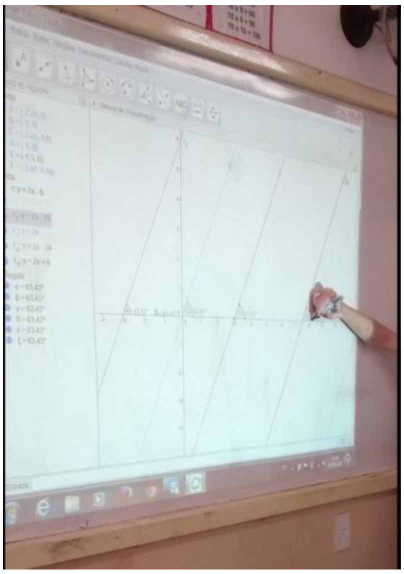
Foram necessárias 5 aulas, na sala de informática com cada grupo de alunos, para a realização de todas as atividades. Inicialmente, os alunos exploraram aleatoriamente algumas das ferramentas do GeoGebra. Em cada uma das atividades foi entregue, para cada aluno, um roteiro a ser seguido e preenchido. De um modo geral, os alunos participaram ativamente, perguntaram, questionaram e interpretaram cada uma das orientações, concluindo de forma satisfatória o que era esperado em cada parte da atividade. As colocações, deduções, raciocínios e dúvidas apresentados no decorrer das atividades foram praticamente os mesmos nos dois grupos, porém os alunos de um dos grupos se mostraram mais interessados e com maior domínio dos conteúdos abordados.

Figura 41: Fotos das atividades na sala de informática com os alunos.



Além das aulas na sala de informática, foram utilizadas 2 aulas em sala de aula com a turma completa, para retomada de conclusões e descobertas obtidas com as atividades, realizando uma revisão, aperfeiçoamento e esclarecimento de dúvidas que restaram. Bem como, para correções e discussões de todas as atividades que foram desenvolvidas em sala de aula enquanto a outra turma estava na sala de informática.

Figura 42: Conclusão do trabalho em sala de aula.



A interação dos alunos com o software GeoGebra facilitou o entendimento da localização de pontos e da representação de retas no plano cartesiano; o significado dos coeficientes angular e linear de uma reta – e o que eles representam geometricamente. E ainda, possibilitou a descoberta pelos alunos da condição necessária e suficiente para que duas retas sejam paralelas, concorrentes ou perpendiculares, deixando clara a relação existente entre a Álgebra e Geometria.

Todo novo trabalho realizado com alunos está à mercê de dificuldades e incertezas. De forma geral, a aceitação por parte dos estudantes em relação ao uso das tecnologias e ao aprendizado de um software matemático, até então desconhecido por eles, foi quase que total. Porém, é importante observar quais foram as maiores dificuldades e problemas com os quais nos deparamos, sempre salientando que o sucesso ou insucesso do trabalho depende de muitos fatores, bem como o tempo necessário para a realização do mesmo, que pode variar de acordo com a realidade dos alunos, dos materiais disponíveis, da infra-estrutura da escola, etc. As dificuldades encontradas pelos dois grupos, em geral, foram as mesmas. Vejamos algumas delas:

a) Disponibilidade de recursos tecnológicos

Apesar do incentivo por parte das escolas ao uso de recursos tecnológicos no desenvolvimento das aulas, a realidade ainda deixa um pouco a desejar. Como não há computadores suficientes, e nem todos os que estão instalados têm um bom funcionamento, não é possível trabalhar com a turma toda já que faltam aparelhos. Ainda, como a sala do acessa escola (onde ficam os computadores) está sem monitor - aluno selecionado através de processo seletivo para trabalhar como estagiário em período oposto ao de suas aulas, monitorando e auxiliando o professor e os alunos na utilização dos computadores - para que as atividades fossem realizadas tive que recorrer à coordenação a fim de que me auxiliasse no que diz respeito às senhas e uso dos aparelhos. Tudo isso requer um tempo e desgaste maior por parte do professor.

b) Falta de domínio das ferramentas do software

Podendo ser pautada como dificuldade inicial de aplicação, a falta de conhecimento do software GeoGebra utilizado para a realização das atividades propostas, tornou o início do desenvolvimento um pouco mais trabalhoso, pois os alunos não conheciam as ferramentas e mesmo tendo o roteiro de atividades, ainda demonstravam certa insegurança em executá-las. Sendo assim, as primeiras atividades levaram um maior tempo para serem efetuadas, e foram as que apresentaram maior dificuldade por parte da turma em geral.

c) Falha na interpretação das orientações e linguagem utilizada no roteiro de atividades

A linguagem matemática (utilizada no roteiro de atividades, e de necessária utilização na parte de desenvolver, responder e completar o trabalho) também foi motivo de dúvidas no desenvolvimento do mesmo. Durante a realização das atividades foi perceptível a dificuldade nas interpretações de termos algébricos, muitas vezes confundidos pelos alunos. Infelizmente, essa dificuldade é observada também nas aulas em sala com atividades comuns como resolução de problemas e precisam ser trabalhadas pelo professor, a fim de melhorar a interpretação matemática que é o primeiro passo para o entendimento e resolução de problemas matemáticos diversos.

d) Resistência por parte dos alunos em observar, interpretar e raciocinar

No processo de ensino-aprendizagem o aluno é constantemente colocado diante de situações que requerem a busca por soluções, e em nosso caso, o estudante devia utilizar ferramentas de um software, seguindo um roteiro contendo perguntas a serem respondidas e tabelas a serem preenchidas para que, passo a passo, obtivessem um novo conhecimento, nos deparamos com a resistência de alguns alunos com essa forma de “ensinar e aprender”. Acostumados com a antiga realidade onde o conhecimento é lançado para eles já pronto e sem a construção detalhada, sem exigir muito de seu raciocínio e compreensão, alguns estudantes (uma minoria) se mantiveram sem interesse para a realização de certas atividades propostas.

e) Falta de domínio com a ferramenta Controle Deslizante do software GeoGebra

Na realização da “Atividade 2 – Construindo retas quando conhecemos os coeficientes”, quando se fez necessário a utilização da ferramenta Controle Deslizante, os alunos tiveram dificuldade em perceber a relação que se estabelece entre a variação dos valores do coeficiente angular a e do coeficiente linear b, presentes nas equações das retas $r: y = a * x$ e $s: y = a * x + b$.

Foi perceptível o fato que os alunos ainda não se acostumaram ter que lidar com expressões e equações compostas somente por letras, sendo a interpretação matemática mais complexa e dificultosa por parte dos estudantes; as dúvidas surgiram principalmente quando tiveram que relacionar os coeficientes com valores numéricos, ao mesmo tempo em que tinham os coeficientes representados por letras: *“Como isso é possível? É um número ou uma letra? Quem é o x? O que representa o a? O que representa o b?”* – foram perguntas muito comuns nesta parte da atividade.

Isso nos mostra a defasagem matemática presente na realidade da maior parte de nossos alunos. Neste caso, vemos estudantes da 3ª Série do Ensino Médio que ainda não tem o discernimento e a compreensão matemática algébrica que se espera ter.

f) *Medir ângulos entre duas retas*

Na parte II da "Atividade 3 – Observando a posição relativa entre duas retas" foi necessário que os alunos trabalhassem com a ferramenta "Ângulo" do software GeoGebra, a fim de medir os ângulos formados entre as retas construídas e uma reta r dada inicialmente. Os alunos foram orientados para que marcassem pontos quaisquer sobre as retas em questão e depois, marcassem o ponto de interseção das retas com um terceiro ponto, pois era necessário que eles obtivessem a medida do menor dos ângulos formados entre as retas. Mesmo com essas orientações, alguns alunos encontraram grandes dificuldades para determinar as medidas solicitadas.

Durante a aplicação e desenvolvimento das atividades, assim que tornar-se perceptível se há, e quais são as maiores dificuldades dos alunos, uma opção é trabalhar simultaneamente com o reto-projetor na sala de informática, de modo que o professor possa exemplificar passos do roteiro orientando os alunos em sua realização.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar de termos nos deparado com algumas dificuldades na aplicação das atividades propostas neste trabalho, julgo termos tido grande sucesso. As aulas de matemática, tachadas por alguns alunos de chatas e sem novidades, ficaram diferentes com o uso do software GeoGebra, proporcionando e facilitando o aprendizado de novos conhecimentos. Os alunos em geral gostaram do software GeoGebra, e muitos se interessaram em baixá-lo em casa em seu computador particular a fim de conhecer mais um pouco das outras inúmeras ferramentas que não foram utilizadas.

As atividades que se seguiram em sala de aula, sem a utilização do software tornaram-se visivelmente mais fáceis de serem desenvolvidas, pois os próprios alunos já dominavam conceitos antes desconhecidos e tinham construído todos os novos conhecimentos trazidos pelas atividades que serviriam de base para resolução de problemas e exercícios sobre os assuntos abordados, tanto do Livro Didático, quanto do Caderno do Aluno. Questionamentos saudáveis feitos pelos alunos durante o desenvolvimento, tornaram as aulas muito mais interessantes e foram cruciais para a orientação das atividades e também para a confecção deste trabalho.

Os próprios alunos quando questionados sobre a utilização do programa GeoGebra e da utilização dessas atividades como complementação e apoio didático no processo ensino-aprendizagem da Geometria Analítica, disseram ter gostado de desenvolver este trabalho, visto que puderam construir o conhecimento, visualizando a aplicação, enxergando melhor cada detalhe algébrico e geométrico.

A maior parte da turma demonstrou ter aprendido com propriedade cada novo conceito abordado nas atividades, cada novo conhecimento que o trabalho de aplicação permitiu que eles construíssem; pois foi isso o que aconteceu: a construção do conhecimento, vista passo a passo, detalhe por detalhe.

Alguns alunos que ainda preferem copiar, ter tudo pronto, resistem a realizar a atividade quando percebem que têm que “raciocinar”, “interpretar”, “observar”. Essa cultura antiga de que para aprender matemática basta somente decorar fórmulas e aplicá-las, ainda está presente na vida escolar de parte dos estudantes e dificulta a introdução de novas metodologias e do desenvolvimento do trabalho de atividades investigativas e de construção do novo conhecimento, onde o professor atua como mediador do processo de ensino-aprendizagem, e o aluno é a peça principal de todo o processo.

Cabe, portanto, a nós professores, profissionais preocupados com a educação que procuremos utilizar de todos os recursos - tecnológicos ou não - que estiverem ao nosso alcance, de modo a tornar as aulas mais prazerosas, desenvolvendo em nossos alunos um maior interesse pela Matemática e suas tecnologias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. **Geometria Analítica para todos e atividades com Octave e GeoGebra**. São Carlos: EdUFSCAR, 2011.

BARBOSA, J. L. M. ***Geometria Euclidiana Plana.*** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

DANTE, L.R. ***Matemática: contexto & aplicações***. Vol.3. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAF,. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

GEOGEBRA. Disponível em <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em 18 de Janeiro de 2016.

IEZZI, G. ***Fundamentos de Matemática Elementar, 7: geometria analítica*****.** 5. ed. São Paulo: Atual, 2005.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.***Matemática*****.** Vol. Único. Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2002.

LIMA, E. L. ***Geometria Analítica e Álgebra Linear*****.** Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P. ***Coordenadas no Plano.*** Rio de Janeiro: SBM, 2011.

MARTINS, V. ***Portal da Matemática da Obmep. Vídeo-aulas Geometria Analítica 1.*** Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=41>. Acesso em 08 Dez. 2015.

MUNIZ NETO, A.C.***Tópicos de Matemática Elementar:geometria euclidiana plana.*** Vol. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. de. ***Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas.*** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2008.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Caderno do Aluno: Matemática.*** *Ensino Médio 3ª série.* Vol. 1. Nova Edição: 2014-2017. Secretaria da Educação; Coordenação geral. São Paulo: SEE, 2014.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Caderno do Professor: Matemática.*** *Ensino Médio 3ª série.* Vol.1. Nova Edição: 2014-2017. Secretaria da Educação; Coordenação geral. São Paulo: SEE, 2014.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. ***Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.*** Secretaria da Educação; Coordenação Geral, Maria Inês Fini; Coordenação de Área, Nilson José Machado. São Paulo: SEE, 2010.

APÊNDICE

Apresentaremos a seguir a resolução das atividades propostas neste trabalho.

<u>ATIVIDADE 1:</u> Coeficiente angular e coeficiente linear de uma reta

1-

Figura 43: Construção de uma reta a partir de um ponto.

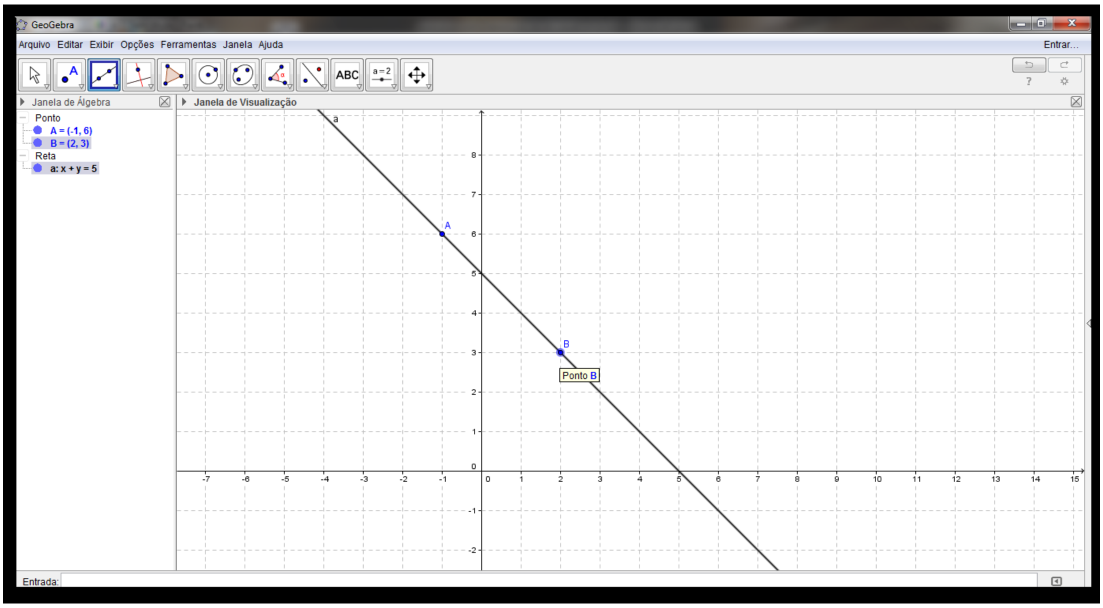
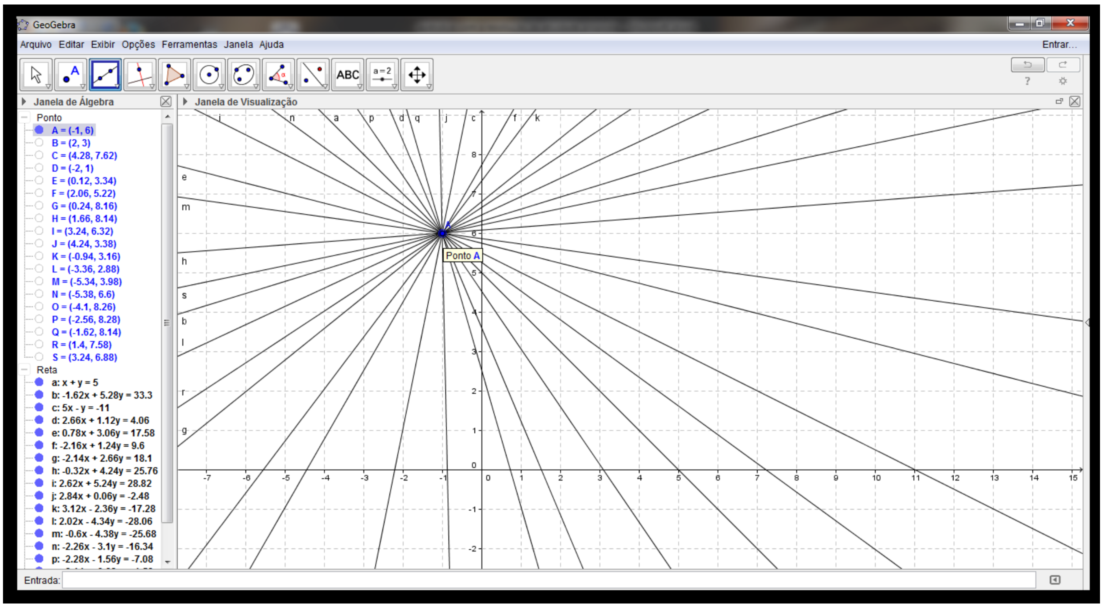


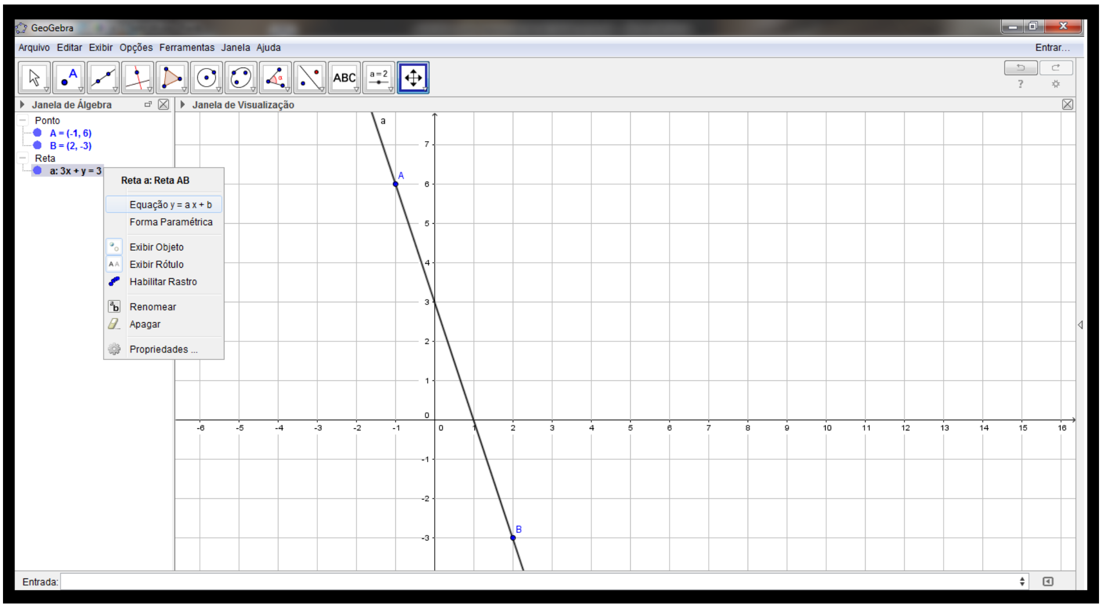
Figura 44: Construção de infinitas retas a partir de um ponto.



Infinitas.

2-

Figura 45: Construção da reta dados os pontos $A(-1,6)$ e $B(2,-3)$.



i) *Uma única reta.*

ii) $3x + y = 3$; $y = -3x + 3$; *equação reduzida da reta.*

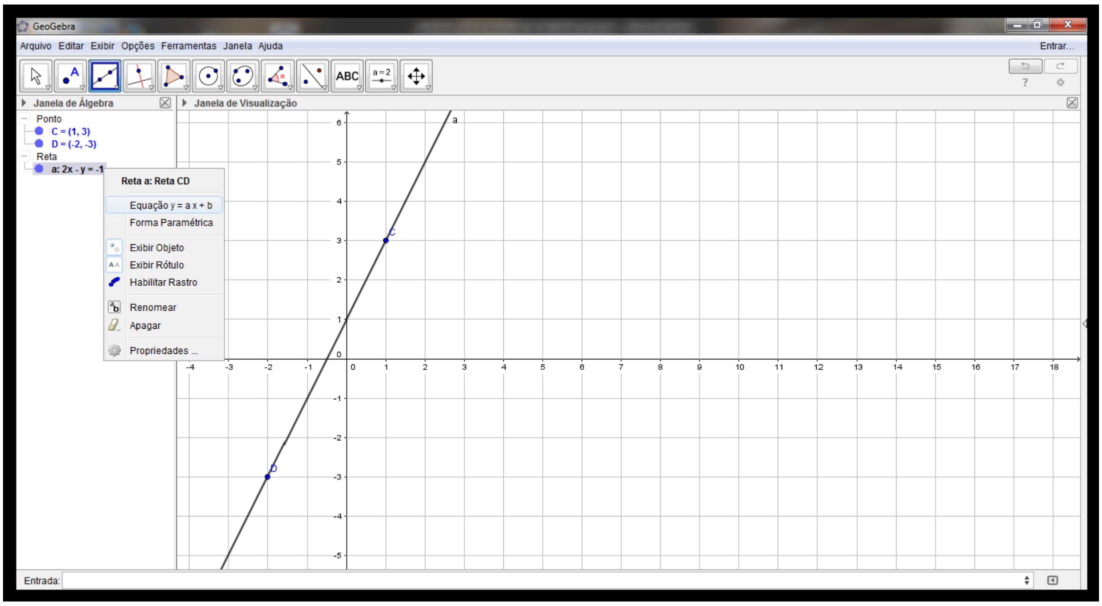
iii) $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{6-(-3)}{-1-2} = \frac{9}{-3} = -3.$

iv) *Coeficiente angular.*

v) *No ponto* $(0{,}3)$; *representa o coeficiente que não acompanha o* x.

3-

Figura 46: Construção da reta dados os pontos $C(1,3)$ e $D(-2,-3)$.



i) *Uma única reta.*

ii) $2x - y = -1$ e $y = 2x + 1$.

iii) $m = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{3-(-3)}{1-(-2)} = \frac{6}{3} = 2$.

iv) O *coeficiente angular.*

v) $(0,1)$*; o coeficiente que não acompanha o* x.

Conclusão:

- *Coeficiente angular;*
- *É a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo* $0y$.

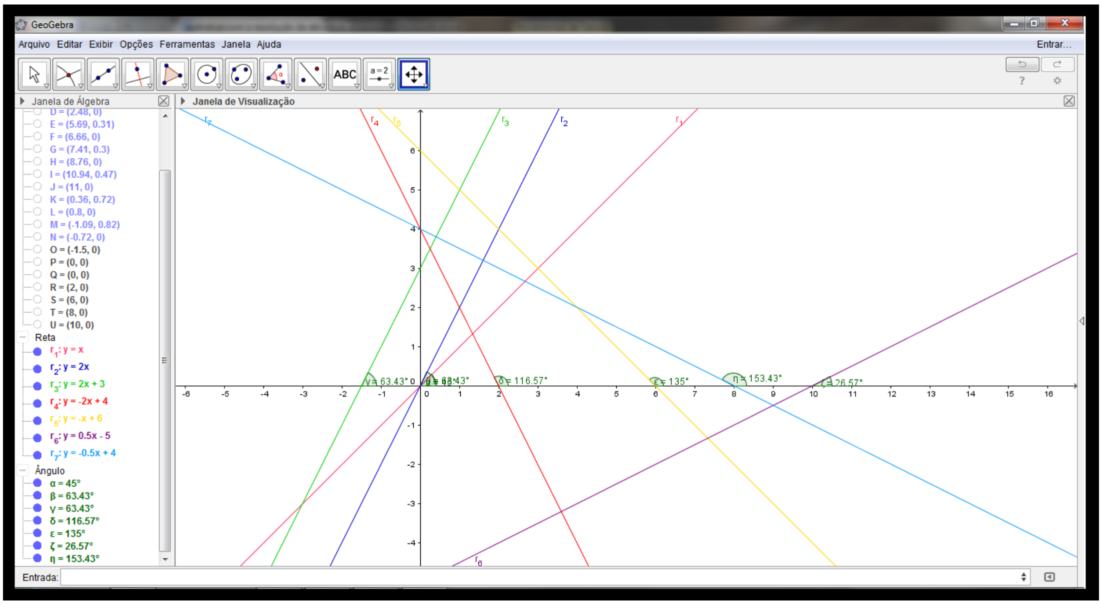
ATIVIDADE 2: Construindo retas quando conhecemos os coeficientes

1-

Tabela 6: Relacionando o ângulo de inclinação à equação da reta.

Reta	**Coeficiente angular**	**Coeficiente linear**	**Equação reduzida: $y = ax + b$**	**Ângulo de inclinação da reta**
r_1	1	0	$y = 1x$	$45°$
r_2	2	0	$y = 2x$	$63{,}43°$
r_3	2	3	$y = 2x + 3$	$63{,}43°$
r_4	-2	4	$y = -2x + 4$	$116{,}57°$
r_5	-1	6	$y = -1x + 6$	$135°$
r_6	0.5	-5	$y = 0{,}5x - 5$	$26{,}57°$
r_7	-0.5	4	$y = -0{,}5x + 4$	$153{,}43°$

Figura 47: Determinação dos ângulos de inclinação das retas dadas na Tabela 6.

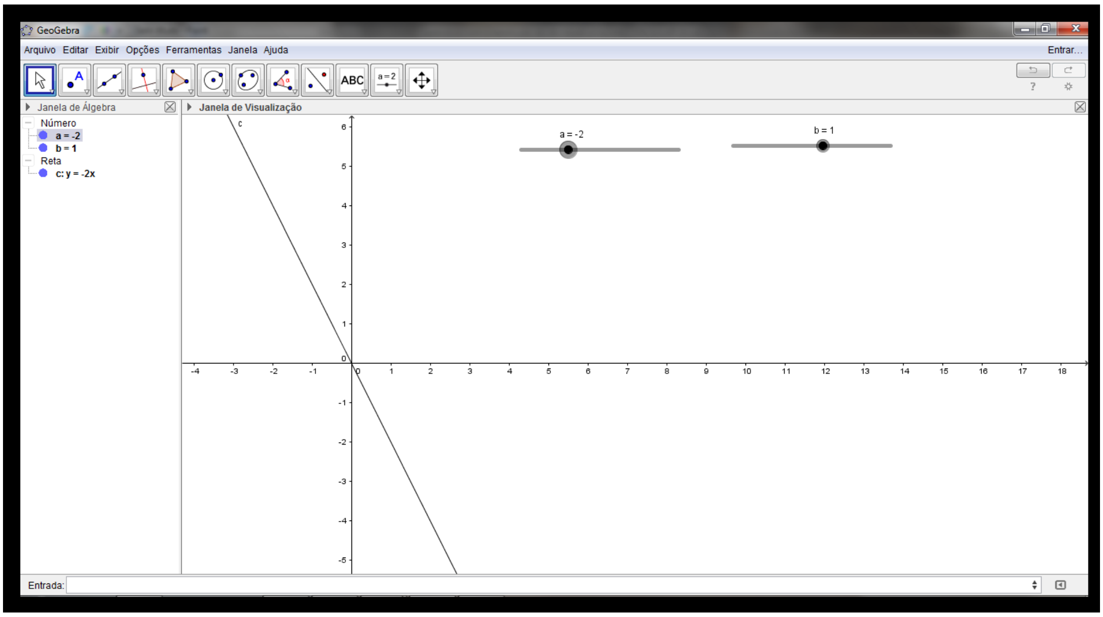


i) *O ângulo formado é maior que 90º.*

ii) *O ângulo formado é menor que 90º.*

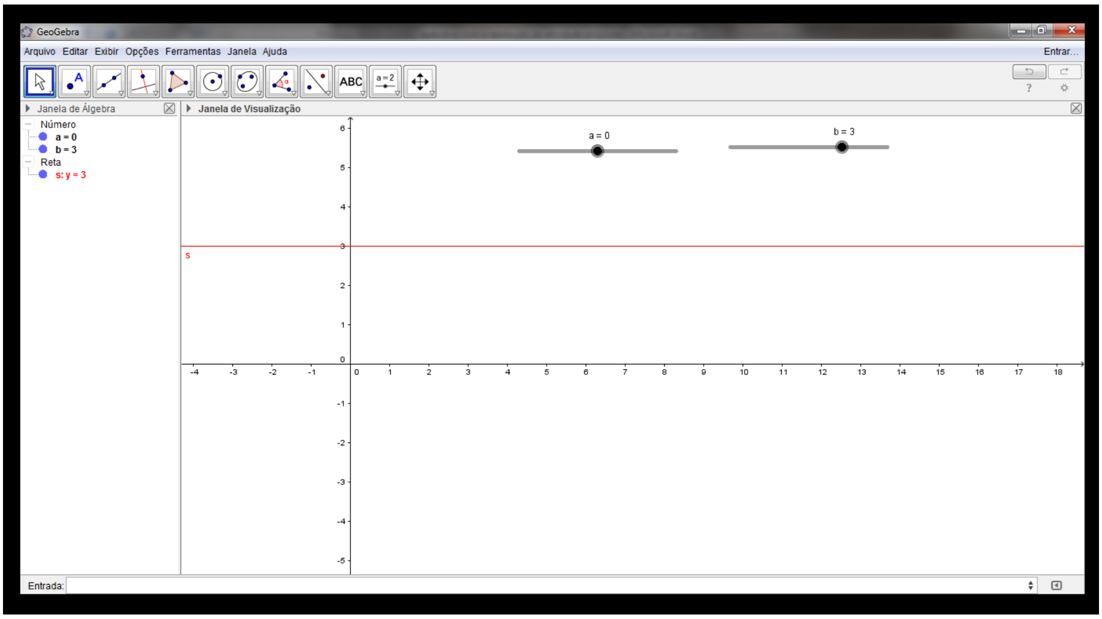
2-

Figura 48: Uso da ferramenta Controle Deslizante.



i) *Quando* $a > 0,$ *o ângulo de inclinação da reta não ultrapassa a medida de 90º; Quando* $a < 0,$ *o ângulo de inclinação da reta torna-se maior que 90º (ficando entre 90º e 180º), e; quando* $a = 0$ *a reta torna-se paralela ao eixo* Ox*, ficando neste caso, exatamente sobre o eixo* Ox*.*

Figura 49: Ferramenta Controle Deslizante variando b.



ii) $a\ fixo; a = 2$: *Observa-se que a cada valor atribuído a "b", na Janela de Visualização obtemos uma nova equação para a reta construída, enquanto a mesma movimenta-se verticalmente, interceptando o eixo Oy num novo ponto, de ordenada igual ao valor de b. Isso ocorre para qualquer que seja o valor atribuído para a, inclusive $a = 0$ (com a particularidade que quando $a = 0$, as retas obtidas sempre serão paralelas ao eixo Ox).*

Conclusão:

- *Maior que 0º e menor que 90º;*
- *Maior que 90º e menor que 180º;*
- *Paralela ao eixo Ox.*

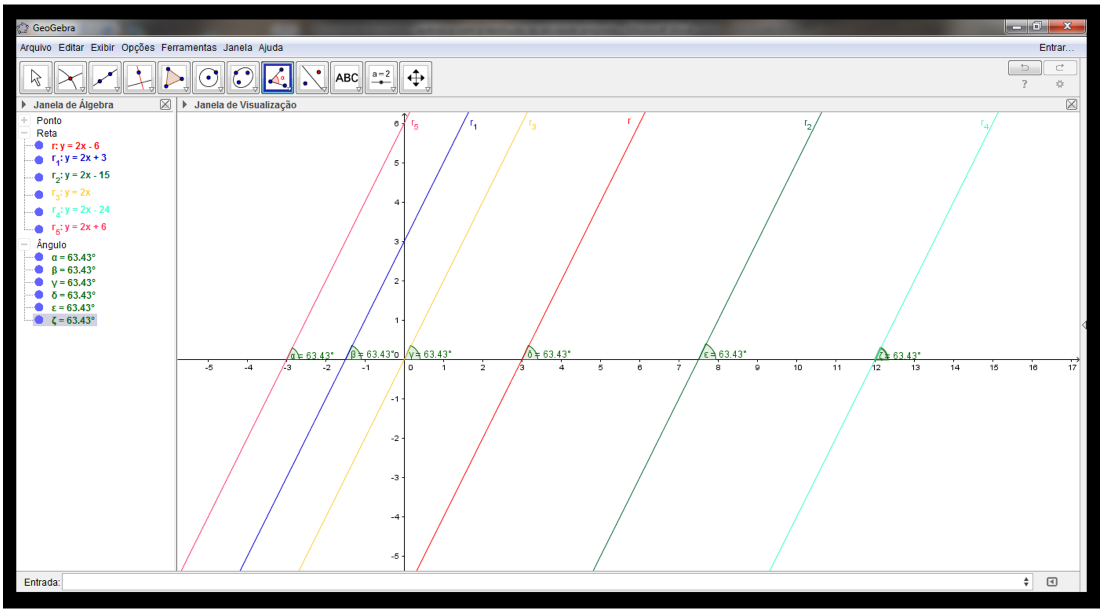
<u>ATIVIDADE 3:</u> Observando a posição relativa entre duas retas

PARTE I:

1- *O coeficiente angular da reta r é 2;*

2-

Figura 50: Representação das retas dadas na Tabela 7.



3-

Tabela 7: Construindo retas paralelas e analisando suas propriedades.

Reta	Equação Reduzida	Coeficiente angular	Relação com o coeficiente angular da reta r	Posição relativa com a reta r	Ângulo de inclinação da reta com o eixo Ox
r_1	$y = 2x + 3$	*2*	*São iguais*	*São paralelas*	*63,43º*
r_2	$y = 2x - 15$	*2*	*São iguais*	*São paralelas*	*63,43º*
r_3	$y = 2x + 0$	*2*	*São iguais*	*São paralelas*	*63,43º*
r_4	$y = 2x - 24$	*2*	*São iguais*	*São paralelas*	*63,43º*
r_5	$y = 2x + 6$	*2*	*São iguais*	*São paralelas*	*63,43º*

4- i)*São iguais.*

ii) *63,43º.*

iii) *São iguais.*

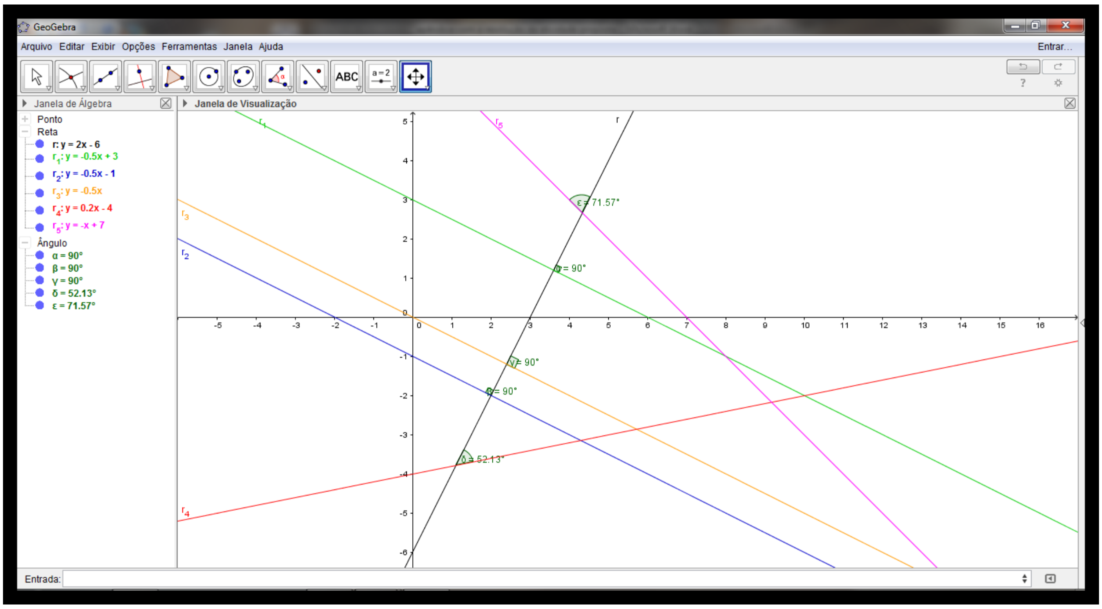
iv) *Paralelas à reta* r.

PARTE II:

1- *O coeficiente angular da reta* r *é 2.*

2-

Figura 51: Representação das retas da Tabela 8 e determinação dos ângulos com a reta r.



3-

Tabela 8: Construindo retas concorrentes e analisando suas propriedades.

Reta	**Equação Reduzida**	**Coeficiente angular**	**Relação com o coeficiente angular da reta r**	**Produto com coeficiente angular da reta r**	**Posição relativa com a reta r**	**Ângulo formado com a reta r**
$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{y = -0.5x + 3}$	*- 0,5*	*São diferentes*	$-0{,}5.2 = -1$	*Concorrentes*	*90º*
$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{y = -0.5x - 1}$	*- 0,5*	*São diferentes*	$-0{,}5.2 = -1$	*Concorrentes*	*90º*
$\mathbf{r_3}$	$\mathbf{y = -0.5x + 0}$	*- 0,5*	*São diferentes*	$-0{,}5.2 = -1$	*Concorrentes*	*90º*
$\mathbf{r_4}$	$\mathbf{y = 0.2x - 4}$	*0,2*	*São diferentes*	$0{,}2\ .\ 2 = 0{,}4$	*Concorrentes*	*52,13º*
$\mathbf{r_5}$	$\mathbf{y = -x + 7}$	*-1*	*São diferentes*	$-1\ .2 = \ -2$	*Concorrentes*	*71,57º*

4- i) *Diferente.*

ii) *São todas concorrentes à reta r.*

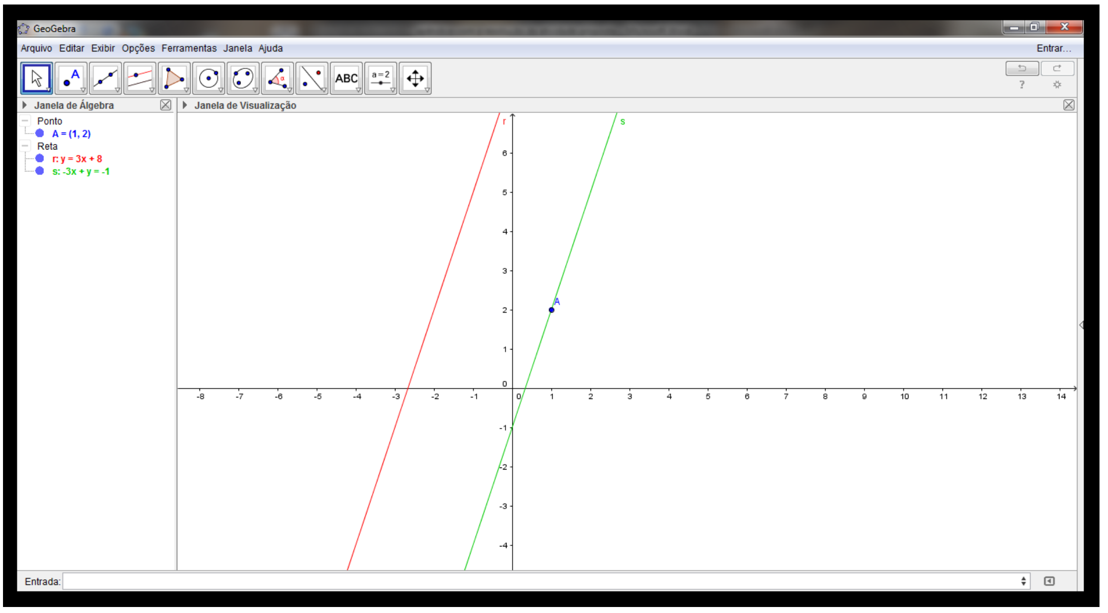
iii) *90º; Não.*

<u>ATIVIDADE 4:</u> Construindo retas paralelas e retas perpendiculares

PARTE I:

Exercícios 1, 2 e 3:

Figura 52: Construindo uma reta e sua paralela passando por um ponto dado.



4- i) *3 e 3.*

ii) *Os coeficientes angulares são iguais.*

5-

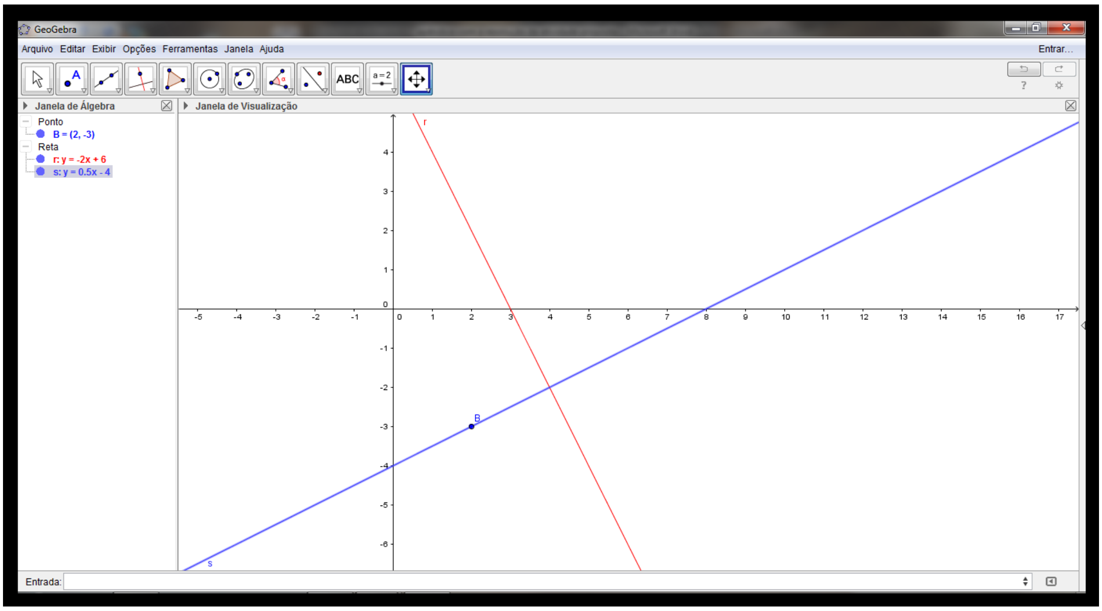
Tabela 9: Obtenção de retas paralelas distintas por meio da movimentação de ponto.

Movimento	**Equação reduzida da reta s obtida**	**Coeficiente angular da reta s obtida**	**Relação entre os coeficientes angulares das retas r e s**
1	$y = 3x - 6$	*3*	*São iguais*
2	$y = 3x + 15$	*3*	*São iguais*
3	$y = 3x$	*3*	*São iguais*

PARTE II:

Exercícios 1, 2 e 3:

Figura 53: Construindo uma reta e sua perpendicular passando por um ponto dado.



4- i) *-2 e 0,5.*

ii) *Os coeficientes angulares das retas r e s são diferentes;*

iii) $-2 \,.\, 0{,}5 = -1$;

5-

Tabela 10: Obtenção de retas perpendiculares distintas por meio da movimentação de ponto.

Movimento	Equação reduzida da reta s obtida	Coeficiente angular da reta s obtida	Relação entre os coeficientes angulares das retas r e s	Produto dos coeficientes angulares
1	$y = 0{,}5x - 2$	*0,5*	*São diferentes*	$-2 \,.\, 0{,}5 = -1$
2	$y = 0{,}5x + 5$	*0,5*	*São diferentes*	$-2 \,.\, 0{,}5 = -1$
3	$y = 0{,}5x - 4{,}5$	*0,5*	*São diferentes*	$-2 \,.\, 0{,}5 = -1$

Conclusão:

- *iguais;*
- *diferentes;*
- *-1.*