Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

Estudo Sistemático das Parábolas †

por

Helder Rodrigues Macedo

sob orientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2015
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Estudo Sistemático das Parábolas

por

Helder Rodrigues Macedo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. João Bosco Batista Lacerda - UFPB

Prof. Dr. Turíbio José Gomes dos Santos - UNIPÊ

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exata e da Natureza
Departamento de Matemática
Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - Profmat

Agosto/2015

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela oportunidade de realização deste trabalho com saúde e disposição e por haver Ele escolhido o livro do Universo da Matemática como um presente ao nosso dom oportunizando a nós um pouco da sua admirável obra.

Agradeço, em especial a minha esposa Suellen Macedo, pelo incentivo e pela compreensão dos tempo que me fiz ausente ao me dedicar aos estudos na vida acadêmica do Mestrado em Matemática.

Agradeço aos meus filhos, Lucas Gabriel e Júlia Macedo pela felicidade que me dão na natureza límpida que eles possue, a minha mãe Vilma Macedo, aos meus irmãos Hugo Macedo e Hilma Vasconcelos Macedo que apostaram muito no meu trabalho e na perseverança passado para mim diariamente na jornada acadêmica que escolhi.

Agradeço ao meu Orientador, Napoleon Caro, pelo prazer, prontidão, entusiasmo em orientar-me nesse trabalho a cada momento de forma objetiva e segura nas suas indagações e na sua brilhante competência acadêmica que atua.

Agradeço a todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica durante a pós-graduação, passando para nos seus conhecimentos de maneira brilhante.

Agradeço a todos os meus amigos da pós-graduação, em especial a Fabrício de Paula e Antônio Morais que semanalmente estavam comigo estudando, incentivando, brigando, batalhando para construir esse trabalho, essa pós-graduação.

Agradeço ao Departamento de Matemática da UFPB, por apostar nessa pós-graduação com a parceria no PROFMAT e a CAPES, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha Esposa Suellen Macedo aos meus filhos Lucas Gabriel e Júlia Macedo, a minha Mãe Vilma Macedo, aos meus irmãos Hugo e Hilma Macedo pela solidariedade e pelo amor a mim dedicado.

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de abordagem que permite tanto ao professor quanto ao aluno do ensino médio um estudo histórico da construção das Cônicas desenvolvidas pelo Matemático e Astrônomo Apolônio de Perga que contribuiu imensamente com as definições hoje estudadas na Matemática. No segundo momento, já bem mais definidas as Cônicas por Pierre Fermat o estudo tem como objetivo abordar o conteúdo da Geometria Analítica como é ensinado nas séries básicas e nas disciplinas de Cálculo. No terceiro momento, a abordagem é feita através do estudo das Funções Quadráticas, uma revisão da primeira série do Ensino Médio.

Palvras-chave: Apolônio de Perga, Geometria Analítica, Função Quadrática.

Abstract

This work presents one proposal that allows High School teachers and students a historical study of the construction of Conics, developed by Apollonius of Perga, the Mathematician and Astronomer that contributed immensely with the definitions we study nowadays in Mathematics. In a second moment, with Conics well defined by Pierre Fermat, the goal of the work is to address the content of Analytical Geometry as taught in the initial school years and Calculus courses. In a third moment, the approach is done through the study of Quadratic Functions, using a review of the content taught in Sophomore year of High School.

Keywords: Apollonius of Perga, Analytical Geometry, Quadratic Functions.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

Motivado por perguntas feitas por alunos do ensino médio nos conteúdos de Funções Quadráticas e na Geometria Analítica, em especial, o conteúdo de Parábolas, procuramos escrever nesse trabalho, um Estudo Sistemático das Parábolas, começando uma Abordagem Sintética, ao destacar o espetacular trabalho de Apolônio de Perga pela forma brilhante como veio a destacar o cone, as secções nele produzidas e à definição que o mesmo chamou de "sintoma"da cônica. Os sintomas de uma curva podem-se estender como uma caracterização algébrica de dedução geométrica, isto é, na linguagem moderna, uma relação característica entre a ordenada e a abscisa de um ponto arbitrário da curva.

Apesar de antecessores como Menecmo, Euclides, dentre outros, trabalharem com as cônicas, a abordagem histórica desse conteúdo foi enfatizado a partir dos trabalhos de Apolônio, em especial sua obra prima *As Cônicas* por servir de estudos para Pierre Fermat introduzir na matemática a Geometria Analítica.

Segue-se no segundo momento a abordagem da Geometria Analítica feita por Pierre Fermat, quando passou a escrever as secções cônicas por meios de equações do segundo grau nas coordenadas (x, y). Trabalhamos a definição, os elementos da Parábola, as equações canônicas, as equações de translação e rotação e a forma polar da parábola. Por fim, nesse capítulo, utilizando-e das informações obtidas, construímos a parábola através do software Geogebra, mostramos como construir a parábola por meio de dobraduras com papel, muito interessante para aplicação na sala de aula e pelo desenho geométrico através da régua T e uma prancheta de desenho.

No terceiro capítulo, agora já bem definida a parábola, fizemos um estudo da Função Quadrática desde a construção do seu gráfico por meio de atribuição à variável x, seus conceitos iniciais, sua forma canônica e, através dela os zeros da função quadrática, bem como a apresentação da fórmula de Bháskara. Ainda na forma canônica, apresentamos o vértice da parábola com seu valor máximo ou mínimo, a imagem da função, seu eixo de simetria e um estudo da monotonicidade para mostrar o momento de crescimento e decrescimento de uma parábola. Finalmente, a caracterização da parábola por meio da progressão aritmética de segunda ordem, concretizando ainda mais o estudo desse conteúdo.

Capítulo 1

As Cônicas de Apolônio de Perga

Apolônio nasceu em Perga, cidade ao sul do que hoje é a Turquia (262-190 a.C.), conhecido já na Antiguidade como o Grande Geômetra, foi um célebre matemático e astrônomo que viveu grande parte da sua vida em Alexandria, primeiro como discípulo e mais tarde como professor na escola dos sucessores de Euclides. Seis das obras de Apolônio são referidas no Tesouro da Análise, da Coleção Matemática de Papus: Sobre a Secção duma Razão, Sobre a Secção duma Área, Sobre a Secção Determinada, Sobre as Tangências, Sobre as Inclinações e Sobre os Lugares Planos. Para a maioria dos historiadores da Matemática, as Cônicas de Apolônio constituem um tratado de grande amplitude e profundidade. Trata-se de uma obra extensa e rigorosa, comparável aos Elementos de Euclides pelo seu conteúdo e rigor. Essa obra passou a ser o tratado por excelência sobre as secções cônicas e substituiu os escritos anteriores de Menecmo, Aristeu e Euclides, pois Apolônio estudou tão profundamente as propriedades das cônicas que tornou as obras anteriores obsoletas.

A origem das cônicas está relacionada ao problema da duplicação do cubo que consiste em construir, com o uso de régua e compasso dada a aresta de um cubo, a aresta de um segundo cubo cujo volume é o dobro do anterior (Figura 1.1)

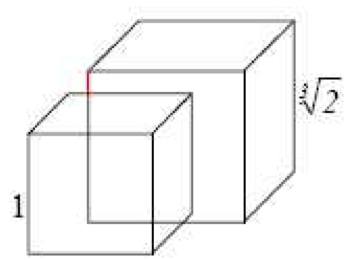
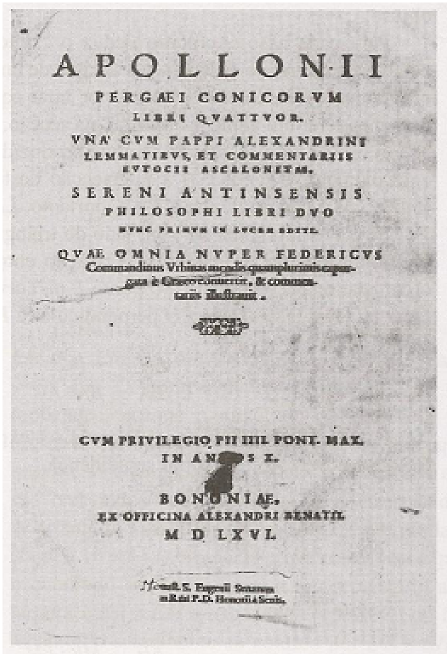


Figura 1.1: Duplicação do Cubo.

É difícil atualmente compreender como Apolônio podia descobrir e provar centenas de belos e difíceis teoremas sem o simbolismo algébrico moderno, no entanto, ele fez. Embora se trate de uma obra extensa e de difícil leitura, para quem está familiarizado com os métodos modernos, este tratado está a par do que mais brilhante conhecemos da geometria antiga.



APOLLONII
PERGÆI CONICORVM
LIBRI QVATTVOR.
VNA' CVM PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATIBVS, ET COMMENTARIIS
EVTOCII ASCALONITAE.
SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBRI DVO
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.
QVAE OMNIA NVPER FEDERICVS
Commandinus Vrbinas [illegible]
[illegible] & commen-
[illegible]

CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX.
IN AN[illegible]S X.

BONONIAE,
EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII.
M D LXVI.

Figura 1.2: Página do título da primeira edição impressa em latim das Cônicas de Apolônio.

Apolônio definiu as secções cônicas de modo diferente do que tinha sido adotado pelos seus antecessores. Com uma visão geométrica inovadora, demonstrou que não era necessária a restrição da perpendicularidade do plano de intersecção à geratriz do cone, e ainda que de um único cone era possível obter as três espécies de secções cônicas variando apenas a inclinação do plano de secção. Este foi um passo importante, pois contribuiu para relacionar os três tipos de curvas: a elipse, a parábola e a hipérbole. Outra generalização importante contida neste tratado é o fato de que o cone não precisar ser reto; Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar que as propriedades dessas curvas não eram diferentes conforme fossem cortados os cones oblíquos ou retos. Também alargou os seus estudos ao substituir o cone de uma só folha por um duplo, o que fez com que apresentasse as curvas antigas de forma mais próxima do ponto de vista usada hoje.

A obra *As Cônicas*, de Apolônio, foi duramente criticada por alguns sábios de sua época, que não viam nesse estudo nenhuma aplicação no mundo real. Mas o tempo se incumbiu de mostrar que esses sábios estavam enganados: por volta de 1605, o astrônomo alemão Johannes Kepler descobriu que os planetas descrevem órbitas **elípticas** em torno do Sol; em 1632, Galileu Galilei descreveu como **parabólica** a trajetória de projéteis; em 1662, Robert Boyle descobriu que, sob temperatura constante, a função que expressa a relação entre o volume de uma massa fixa de gás e a pressão exercida sebre ela é **hiperbólica**.

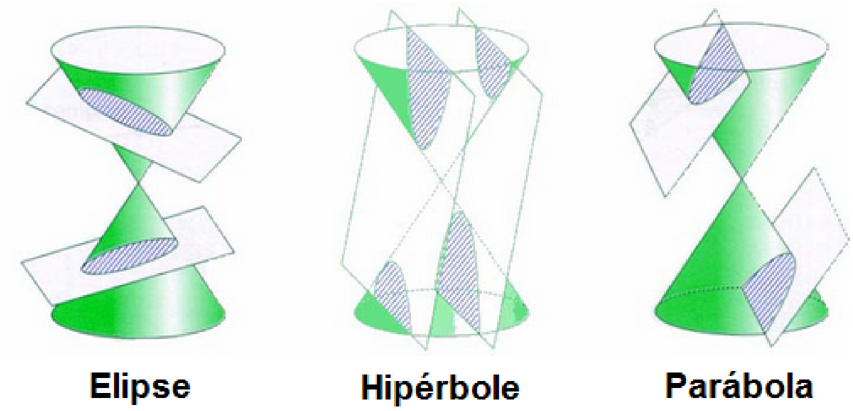


Figura 1.3: As Cônicas de Apolônio de Perga.

Apesar da notabilidade das Cônicas, tanto pelo conteúdo como pela inovação dos métodos, Apolônio ficou nos estudos das curvas muito aquém da flexibilidade e da generalidade de tratamento dado mais tarde por Renê Descartes (1596-1659) e Pierre Fermat (1601-1665). As limitações da Álgebra Geométrica e a ausência de simbolismo algébrico foram os fatores decisivos que impediram Apolônio de ter sido o criador da Geometria Analítica. Fato esse dado a Fermat e Descartes.

Hoje, podemos constatar a presença das cônicas em muitas outras situações do mundo real, como na construção das antenas parabólicas, espelhos e lentes parabólicos ou hiperbólicos; nas trajetórias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas de astros celestes, dentre outros.

Veja algumas cônicas que aparecem nas figuras abaixo:

Figura 1.4: Pilares da catedral de Brasilia. Forma de um hiperboloide.

Figura 1.5: Coliseu, em Roma, tem forma elíptica.

Figura 1.6: Ponte Juscelino Kubitschek, em Brasília, tem a forma da parábola.

Figura 1.7: Torres de Refrigeração de usinas nucleares, têm a forma do hiperboloide.

Das Cônicas de Apolônio, faremos um estudo sistemático relativo às Parábolas no advento da Geometria Analítica e as Funções Quadráticas, este, no conteúdo de Funções. Através das notações modernas apresentadas por Fermat e Descartes iremos desenvolver as teorias sobre as cônicas nas próximas seções, porém, muito próximas do que foi feito por Apolônio naquela época.

Capítulo 2

A Parábola na Geometria Analítica

Um dos maiores contribuintes para construção da Geometria Analítica, do Cálculo Diferencial, do Cálculo Integral e da Teoria das Probabilidade foi Pierre Fermat. Sem sombra de dúvida, ele foi o grande nome da fase inicial da moderna Teoria dos Números. Fermat cursou Direito em Toulouse na França em cujo parlamento começou a trabalhar no ano de 1631, primeiro como advogado e, posteriormente como conselheiro. Como dominava as duas atividades, ninguém poderia imaginar que sua vocação cultivada com grande talento nas horas de lazer era a Matemática.

Pela sua condição de amador na área da Matemática Fermat, recusava-se sistematicamente a publicar sues trabalhos e, se esses são reconhecidos hoje, é porque ficaram registrados em margens de livros, folhas avulsas e cartas.

A Geometria de Pierre Fermat a partir de 1629 empreendeu a reconstruir a obra de Apolônio *Lugares Planos*, mediante a referências contidas na *Coleção Matemática*, de Papus. Foi um pequeno tratado publicado em 1679, conhecido como *Introdução aos lugares planos e sólidos*. Nesse tratado, ao anunciar que dada uma equação com duas variáveis, uma destas descreve uma reta ou uma curva, revelava ele então, está de posse do princípio fundamental do novo método. Ele próprio mostrou que uma equação geral $ax + by = c$ em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ representava uma reta; e que equações do segundo grau em duas variáveis podem ser círculos, elipses, parábolas ou hipérboles.

Veremos então das cônicas de Apolônio um estudo Analítico da Parábola, a começar por algumas definições preliminares:

2.1 Coordenadas no Plano

Dado um ponto P do plano cartesiano, chama-se de "projeção ortogonal de P sobre um dos eixos Ox ou Oy"a intersecção desse eixo com a reta perpendicular a ele, traçado por P.

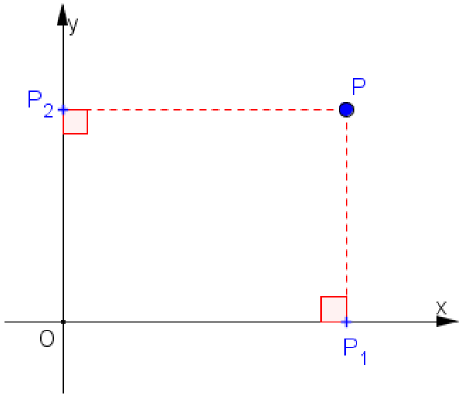


Figura 2.1: Coordenadas no Plano

Onde:

- P_1 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Ox.

- P_2 é a projeção ortogonal de P sobre o eixo Oy.

• Dizemos que as **coordenadas** do ponto P são os números associados a P_1 e P_2 nos eixo Ox e Oy, respectivamente. Portanto, representamos o ponto P da forma $P = (P_1, P_2)$.

2.2 Distância entre dois pontos

Na figura (2.2), temos um segmento $\overline{AB}$ não paralelo a nenhum dos eixos coordenados.

O triângulo ABC, com $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, é retângulo em C.

$\overline{AC}$ é paralelo ao eixo Ox. Assim, o comprimento AC é igual ao comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre o eixo Ox, ou seja, $AC = |x_B - x_A|$.

Analogamente, $\overline{CB}$ é paralelo ao eixo Oy; logo: $\overline{CB} = |y_B - y_A|$.

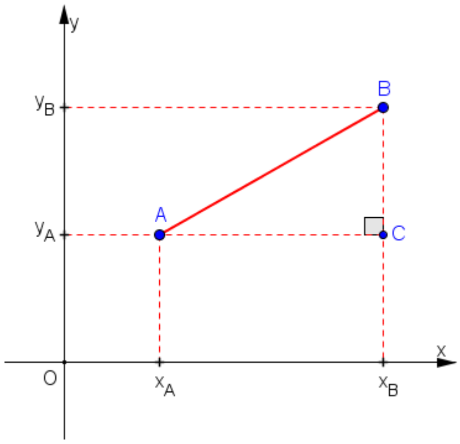


Figura 2.2: Distância de dois pontos

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

$$\therefore (AB)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \therefore AB = \pm\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Como o comprimento de um segmento não pode ser negativo, temos que:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Isto motiva a seguinte definição:

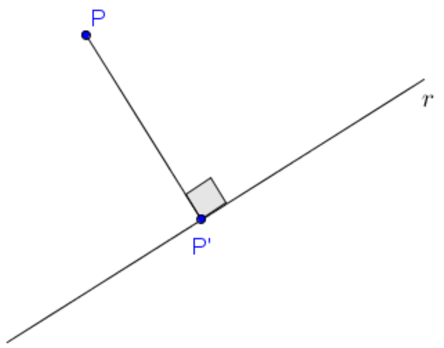
Definição 2.1 *A distância d_{AB} entre dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ é dada por:*

$$\boxed{\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}}$$

2.3 Distância entre ponto e reta

Vejamos agora o cálculo da distância entre um ponto P e uma reta r. Essa distância é definida a seguir.

Seja P um ponto e r uma reta. A distância d_{Pr}, do ponto P à reta r, é a medida do segmento $\overline{PP'}$, onde P' é a projeção ortogonal de P sobre r.



Teorema 2.1 *A distância d entre um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta $r : ax+by+c = 0$ é dada por:*

$$\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Demonstração: ***Primeiro caso:*** Consideremos um ponto $P = (x_0, y_0)$ e uma reta r de equação geral $ax + by + c = 0$, tais que $P \notin r$ e r não é vertical nem horizontal:

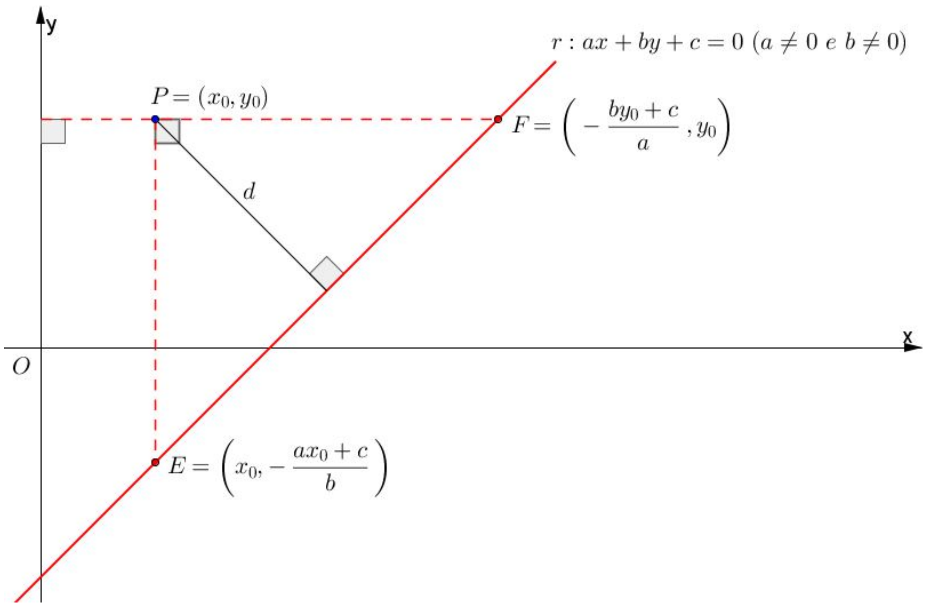


Figura 2.3: Distância de um ponto à reta

E é o ponto da reta r de abscissa x_0. Substituindo $x = x_0$ na equação r, temos:

$$ax_0 + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{ax_0 + c}{b}.$$

Logo, $E = \left(x_0, -\frac{ax_0 + c}{b}\right)$.

F é o ponto da reta r de ordenada y_0. Substituindo $y = y_0$ na equação de r, temos:

$$ax + by_0 + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{by_0 + c}{a}.$$

Logo, $F = \left(-\frac{by_0 + c}{a}, y_0\right)$.

Lema: Em todo triângulo retângulo, o produto da medida da hipotenusa pela medida de sua altura relativa a essa hipotenusa é igual ao produto das medidas dos catetos. Assim sendo, no triângulo retângulo PEF, temos:

$$EF \cdot d = PE \cdot PF$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(x_0 + \frac{by_0 + c}{a}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{ax_0 + c}{b}\right)^2} \cdot d = \sqrt{\left(y_0 + \frac{ax_0 + c}{b}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(x_0 + \frac{by_0 + c}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2} + \frac{(by_0 + ax_0 + c)^2}{b^2}} \cdot d = \sqrt{\frac{(by_0 + ax_0 + c)^2}{b^2}} \cdot \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(ax_0 + by_0 + c)^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right)} \cdot d = \sqrt{\frac{(by_0 + ax_0 + c)^2}{b^2}} \cdot \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2}}$$

$$\Rightarrow |ax_0 + by_0 + c| \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|a| \cdot |b|} \cdot d = \frac{|by_0 + ax_0 + c|}{|b|} \cdot \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|a|}.$$

O ponto P não pertence a r; então $ax_0 + by_0 + c \neq 0$.

Logo, temos $\sqrt{a^2+b^2}\cdot d = |ax_0+by_0+c| \Rightarrow d = \dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Segundo caso: (Casos particulares)

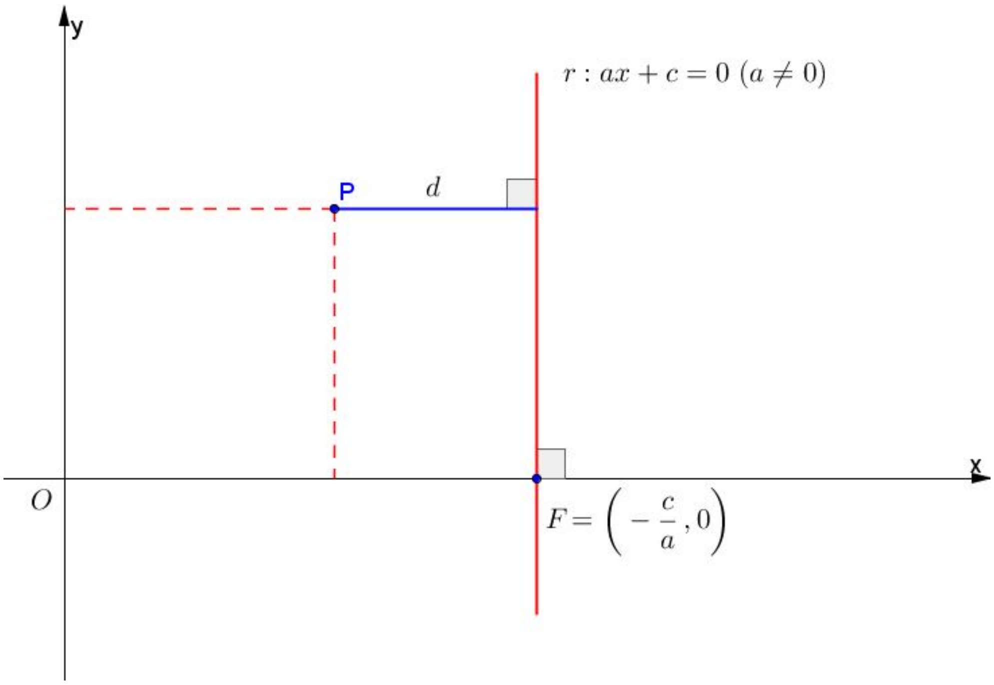
1°) $P \in r$

Se o ponto $P = (x_0, y_0)$ pertence à reta $r : ax + by + c = 0$, então temos que $ax_0 + by_0 + c = 0$ e que a distância de P a r é igual a zero. Note, portanto, que a fórmula deduzida no primeiro caso vale também para esse caso particular, pois:

$$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

2°) r é vertical

Se r é vertical, então sua equação geral é da forma $ax + c = 0$, com $a \neq 0$.



A distância d é dada por:

$$d = \left| x_0 + \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{ax_0 + c}{a} \right| = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}.$$

Note que a fórmula obtida na primeira parte vale também para esse caso, pois:

$$d = \frac{|ax_0 + 0y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + 0^2}} = \frac{|ax_0 + c|}{|a|}.$$

3°) r é horizontal

Analogamente ao segundo caso, prova-se que a fórmula obtida na primeira parte vale também para r horizontal.

■

2.4 Definição de Parábola

Definição 2.2 *Dado um ponto F e uma reta d de um plano α, com $F \notin d$, chama-se **parábola P** o lugar geométrico formados pelos pontos desse plano equidistante de d e F.*

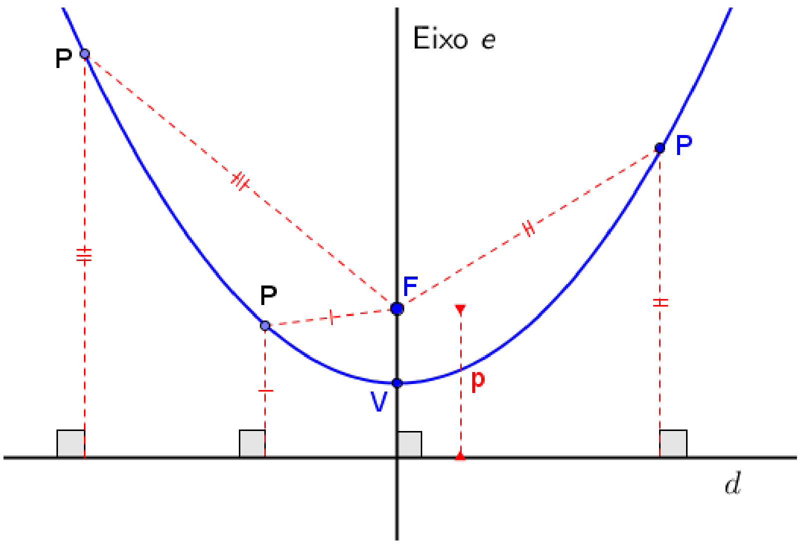


Figura 2.4: Definição de parábola

2.5 Elementos principais

Com base na definição 4.1, o ponto F e a reta d são o **foco** e a **diretriz** da parábola, respectivamente. A reta que passa por F e é perpendicular à diretriz d é o **eixo de simetria (Eixo** e**)** da parábola. O ponto V, intersecção da parábola com o eixo de simetria, é o **vértice** da parábola. A distância p do foco F à diretriz d é chamado de **parâmetro** da parábola.

Note que a distância entre o vértice V e o foco F é metade do parâmetro p, pois V pertence à parábola e, portanto, V equidista de F e d. Assim, temos:

$$\begin{cases} VF = Vd \\ VF + Vd = p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{VF} = \frac{p}{2}} \text{ e } \boxed{\text{Vd} = \frac{p}{2}}$$

Abaixo, temos a figura de uma parábola obtida através da secção transversal no cone.

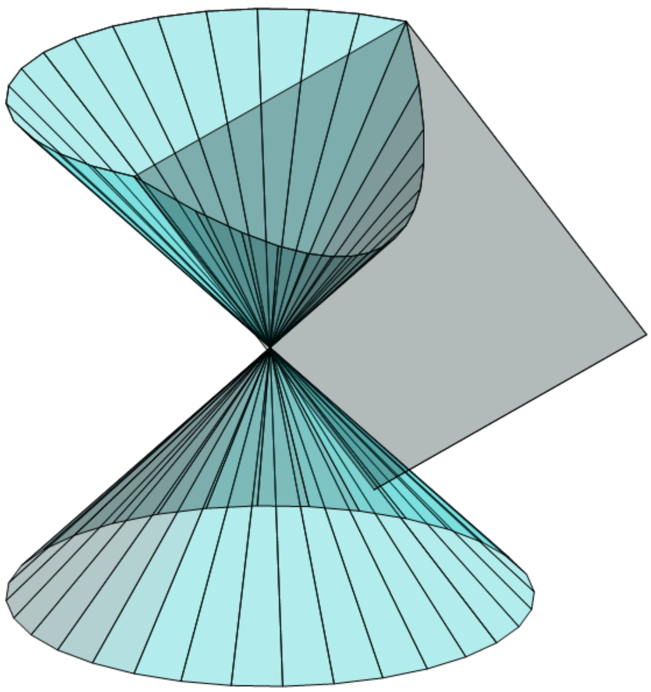
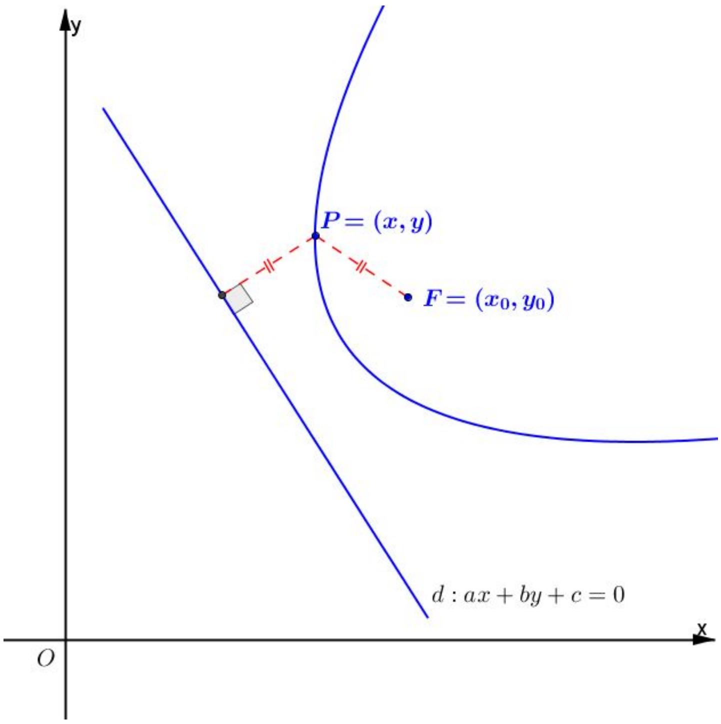


Figura 2.5: Secção do cone

2.6 Equação da parábola

Sejam $F = (x_0, y_0)$ e $d : ax + by + c = 0$ o foco e a diretriz de uma parábola, respectivamente.



Obtém-se uma equação dessa parábola considerando um ponto genérico $P = (x, y)$ e impondo que $PF = Pd$, ou seja:

$$\boxed{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \;=\; \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

Vamos mostrar a seguir que todas as cônicas não degeneradas, com exceção da circunferência, podem ser descritas de uma mesma maneira.

Proposição 2.1 *Seja d uma reta fixa (**diretriz**) e F um ponto fixo (**foco**) não pertencente a d. O conjunto dos pontos do plano P = (x, y) tais que*

$$\boxed{dist(P,\ F) = \ e \cdot dist(P, d)} \tag{2.1}$$

em que $e > 0$ *é uma constante fixa denominada excentricidade* [1],

(a) *se* $e = 1$*, então a cônica é uma parábola.*

(b) *se* $0 < e < 1$*, então a cônica é uma elipse.*

(c) *se* $e > 1$*, então a cônica é uma hipérbole.*

Reciprocamente, toda cônica que não seja uma circunferência pode ser descrita por uma equação da forma 2.1.

Demonstração: Se $e = 1$ a equação *2.1* é a própria definição da parábola. Vamos considerar o caso em que $e > 0$, com $e \neq 1$. Seja $D = dist(F, d)$. Sem perda de generalidade podemos tomar o foco como sendo o ponto $F = (p, 0)$ e a diretriz como sendo a reta vertical $d : x = \frac{p}{e^2}$, em que $p = \frac{De^2}{1 - e^2}$ se a reta d estiver a direita do foco F (Figuras 4.6 e 4.7) e $p = \frac{De^2}{e^2 - 1}$ se a reta d estiver a esquerda do foco F (Figuras 4.8 e 4.9).

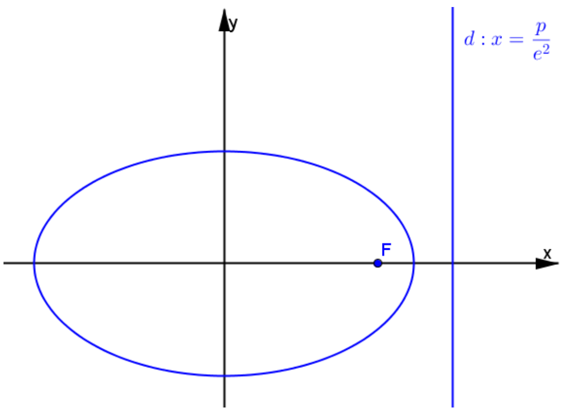


Figura 4.6: Elipse, um dos seus focos e a reta diretriz à direita.

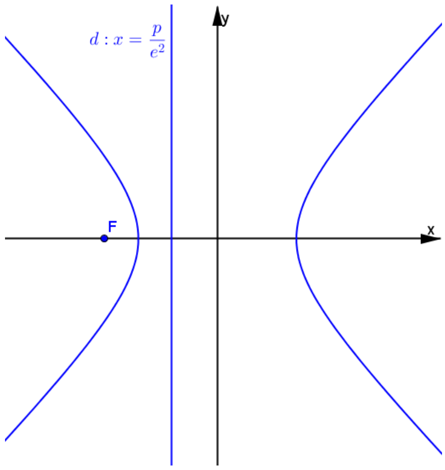


Figura 4.7: Hipérbole, um dos seus focos e a reta diretriz à direita.

[1]**Excentricidade** é um parâmetro associado a qualquer cônica, que mede o seu desvio em relação a uma circunferência.

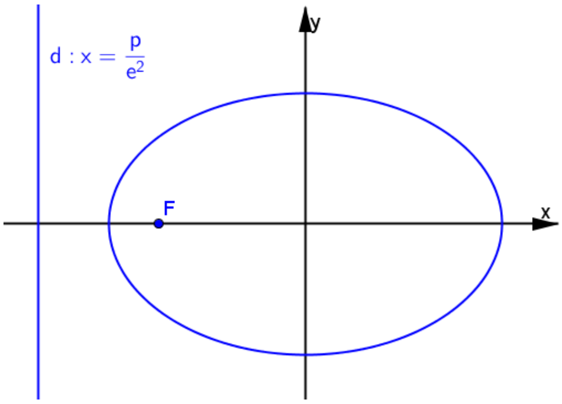


Figura 4.8: Elipse, um dos seus focos e a reta diretriz à esquerda.

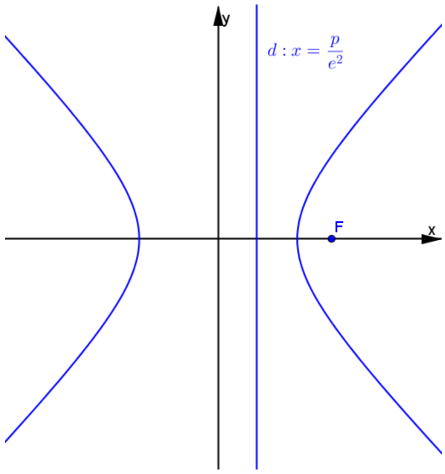


Figura 4.9: Hipérbole, um dos seus focos e a reta diretriz à esquerda.

Assim, o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$dist(P, F) \;=\; e \cdot dist(P, d),$$

pode ser escrito como sendo o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} \;=\; e\left|x - \frac{p}{e^2}\right|,$$

elevando ao quadrado e simplificando, obtemos

$$(1-e^2)x^2 + y^2 \;=\; p^2\left(\frac{1}{e^2} - 1\right),$$

que pode ainda ser escrita como

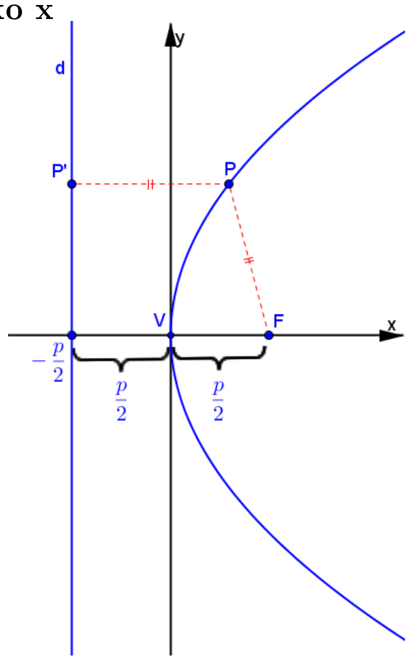
$$\frac{x^2}{\frac{p^2}{e^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2(1-e^2)}{e^2}}. \quad (2.2)$$

Se $0 < e < 1$, esta é uma equação de uma elipse. Se $e > 1$, é a equação de uma hipérbole. Para mostrar a recíproca, considere uma elipse ou hipérbole com excentricidade $e > 0$ e um dos focos $F = (p, 0)$. É fácil verificar que 2.2 é a equação desta cônica e portanto 2.1 também o é, com a reta diretriz sendo $d : x = \dfrac{p}{e^2}$. ■

2.7 Equações Canônicas da parábola com Vértice na origem

Vejamos então como determinar as equações canônicas ou equações reduzidas das parábolas estudando-as caso a caso.

1º Caso: O eixo de simetria coincide com o eixo x



Na figura ao lado tem-se uma parábola com concavidade voltada para a direita representada no sistema cartesiano xOy e cuja diretriz tem equação $x = -\dfrac{p}{2}$.

Temos também que:

$P = (x, y)$ é um ponto genérico da parábola.

$F = \left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ é o foco.

$P' = \left(-\dfrac{p}{2}, y\right)$ é o pé da perpendicular baixada do ponto P sobre a diretriz.

Por definição, temos que:

$d(P, F) = d(P, P')$, daí

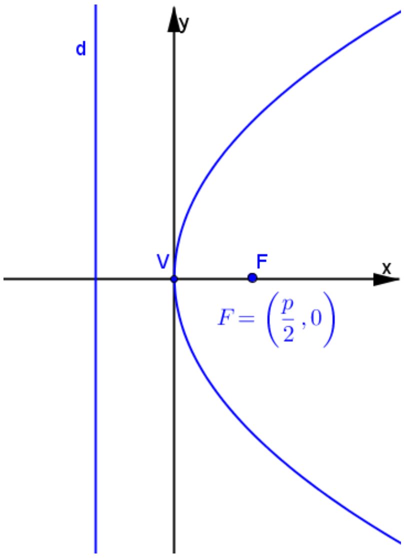
$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos que:

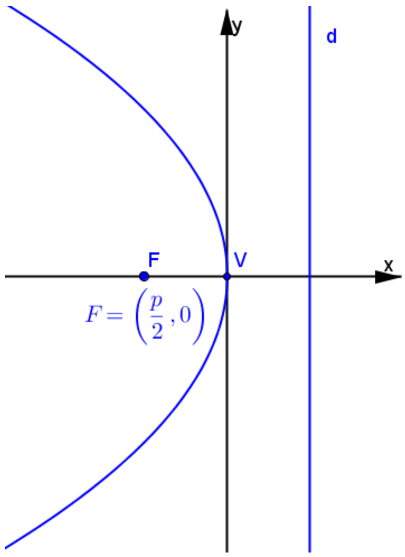
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Donde: $y^2 = 2px$, que representa a equação canônica da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo x.

Na equação $y^2 = 2px$, podemos ter as seguintes situações:



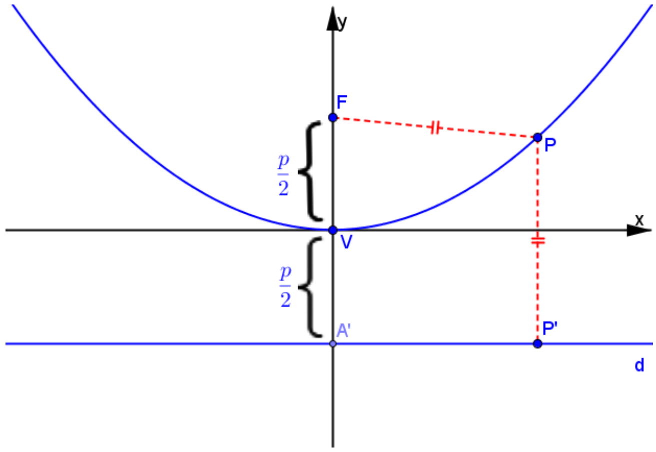
Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita,



Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

2º Caso: O eixo de simetria coincide com o eixo y

A figura ao lado tem-se uma parábola com concavidade voltada para cima representada no sistema cartesiano xOy e cuja diretriz tem equação $y = -\dfrac{p}{2}$.



Temos também que:

$P = (x, y)$.

$F = \left(0, \dfrac{p}{2}\right)$.

$P' = \left(x, -\dfrac{p}{2}\right)$.

Por definição, temos que:

$d(P, F) = d(P, P')$, daí

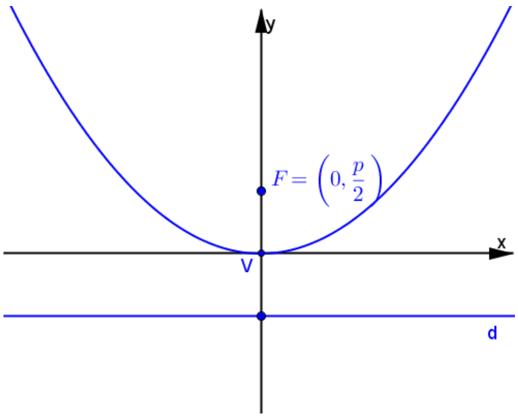
$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos que:

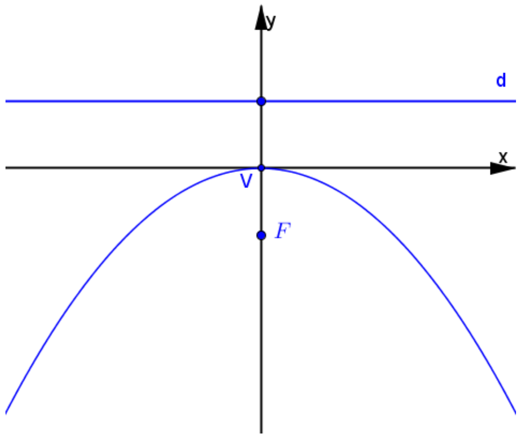
$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

Donde: $x^2 = 2py$, que representa a equação canônica da parábola com vértice na origem e cujo eixo de simetria é o eixo y.

Na equação $x^2 = 2py$, podemos ter as seguintes situações:



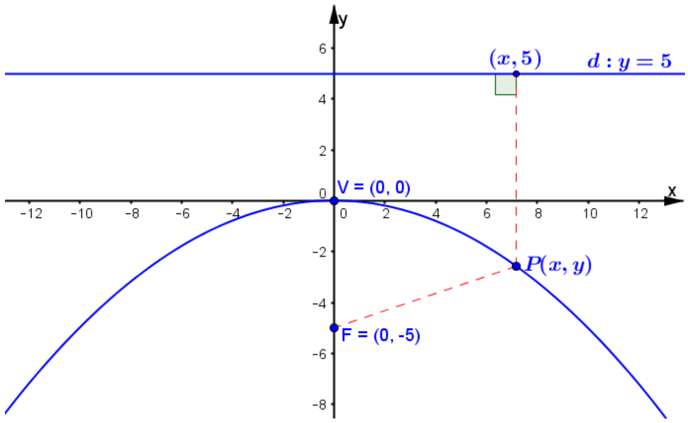
Se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima.



Se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Exemplo 1) Determine a equação da parábola de foco $F = (0, -5)$ e diretriz $d : y = 5$.

Resolução: *Ao marcarmos no plano cartesiano o foco* $F = (0, -5)$ *e diretriz* $y = 5$*, percebemos que o vértice estará na origem, como mostra a figura abaixo.*



Usando a definição de parábola, temos:

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{F}) = d(\mathrm{P},\ d)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+5)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-5)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 10y + 25 = y^2 - 10y + 25$$

$$\Rightarrow x^2 = -20y$$

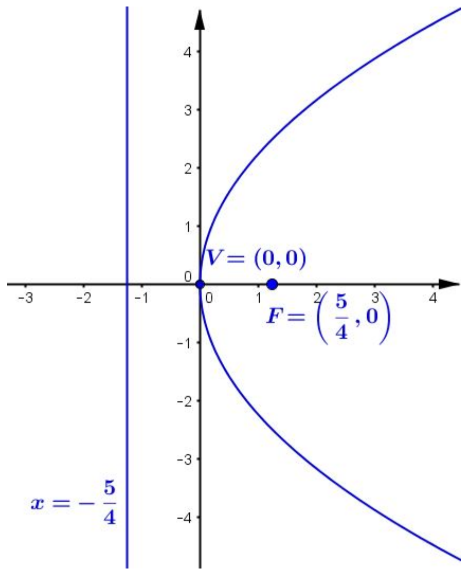
Exemplo 2) Determine o foco e a diretriz da parábola de equação $y^2 = 5x$.

Resolução: *A equação* $y^2 = 5x$ *é uma equação da forma* $y^2 = 2px$, *com* $p > 0$.

Comparando as equações, temos:

$$2p = 5 \;\Rightarrow\; p = \frac{5}{2} \;\Rightarrow\; \frac{p}{2} = \frac{5}{4}$$

Daí, as coordenadas do foco são $F = \left(\frac{5}{4}, 0\right)$ e a reta diretriz é $x = -\frac{5}{4}$.



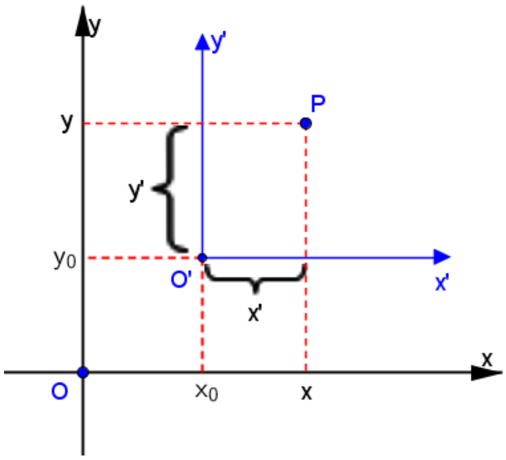
2.8 Translação de Eixos

Uma vez conhecida as coordenadas de um ponto ou a equação de uma curva em relação a um certo sistema de referência, podemos escrever as novas coordenadas desse ponto ou da nova equação da curva em relação a um novo sistema de referência. Assim, a curva cuja equação $f(x, y) = 0$ quando referida a um sistema de coordenadas cartesianas xOy transformar-se-á numa equação do tipo $F(x', y') = 0$, quando referida a um novo sistema de coordenadas cartesianas x'O'y'.

Esse novo sistema é obtido através de uma translação de eixos e/ou uma rotação de eixos. Enfatize-se que numa transformação de coordenadas (mediante uma translação ou rotação) não é afetada a forma da curva ou o gráfico da curva. No entanto, há alteração na equação dessa curva.

No Plano Cartesiano xOy, considere um ponto O' $= (x_0, y_0)$. Introduzindo um **novo** sistema x'O'y' tal que O' seja a nova origem e o eixo O'x' tenha a mesma direção e sentido de Ox e O'y' tenha a mesma direção e sentido de Oy.

Dizemos que o **novo** sistema x'O'y' foi obtido por uma **translação** do antigo sistema xOy. Em ambos os sistemas se conservam as unidades de medida. Na figura abaixo, podemos verificar o novo sistema de coordenadas dentro do plano xOy.



Dessa forma, as coordenadas do ponto P em relação aos sistema xOy e x'O'y' são relacionadas pelas fórmulas:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Vejamos então como determinar as formas canônicas das parábolas transladadas estudando os caso principais.

1º Caso: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Ox.

Para obtermos a forma canônica da parábola de vértice no ponto $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Ox, vamos considerar o sistema de eixos ortogonais x'O'y', com origem $O' = V = (x_0, y_0)$ e eixos O'x' e O'y' com a mesma direção e sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente.

Sabemos que, no sistema x'O'y', a equação da parábola é $P: y'^2 = 2px'$; o foco é $F' = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$; o vértice é $V' = (0,0)$; a diretriz $d': x' = -\frac{p}{2}$ e a reta focal é $y' = 0$.

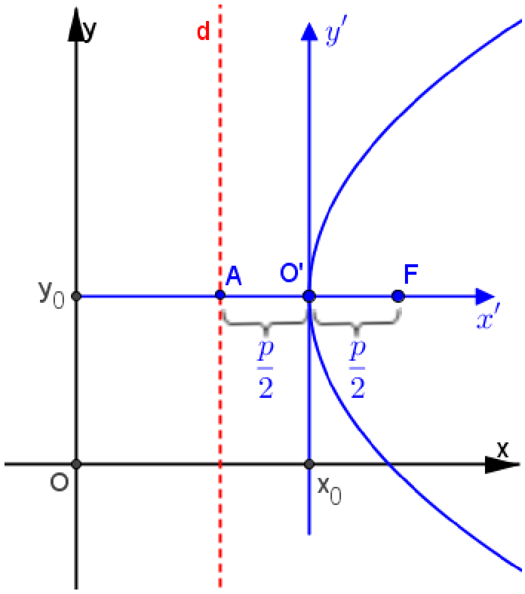
Substituindo, $x = x_0 + x'$ e $y = y_0 + y'$, na equação da parábola $y'^2 = 2px'$, temos:

$$\boxed{P: (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)}$$

O parâmetro p será positivo ou negativo se, respectivamente a concavidade da parábola estiver voltada para a direita ou para a esquerda.

E seus elementos nesse caso, são:

O Foco: $F = \left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$
O Vértice: $V = (x_0, y_0)$
A Diretriz: $d: x = x_0 - \frac{p}{2}$



Ao desenvolver a equação $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ e isolando a variável x, obtemos:

$$x = \underbrace{\frac{1}{2p}}_{a} y^2 - \underbrace{\frac{y_0}{p}}_{b} y + \underbrace{\frac{y_0^2 + 2px_0}{2p}}_{c} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{ou} \quad x = ay^2 + by + c \qquad \textbf{(2)}$$

Comparando os coeficientes de **(1)** e **(2)**, observe que:

$$a = \frac{1}{2p} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2a}}$$

$$b = -\frac{y_0}{p} \Rightarrow y_0 = -bp \Rightarrow \boxed{y_0 = -\frac{b}{2a}}$$

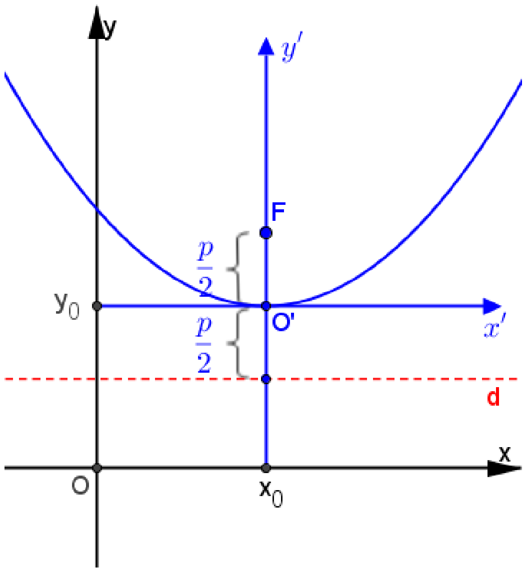
Esta última fórmula em destaque permite calcular a ordenada do vértice da parábola (y_0).

2º Caso: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy.

Como no caso anterior, considerando o sistema de eixos ortogonais x'O'y', com origem $O' = V = (x_0, y_0)$ e eixos O'x' e O'y' que têm a a mesma direção e sentido dos eixos Ox e Oy, respectivamente. Então, podemos obter as equações e os elementos das parábolas com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo Oy.

Da mesma forma, substituindo $x = x_0 + x'$ e $y = y_0 + y'$, na equação da parábola $x'^2 = 2py'$, temos:

$$\boxed{\boxed{P : (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)}} \qquad \textbf{(1)}$$



Analogamente, a parábola de concavidade voltada para cima (quando $p > 0$) ou concavidade voltada para baixo (quando $p < 0$) tem a forma:

No entanto, desenvolvendo **(1)** e isolando a variável y, temos:

$$y = \underbrace{\frac{1}{2p}}_{a} x^2 - \underbrace{\frac{x_0}{p}}_{b} x + \underbrace{\frac{x_0^2 + 2py_0}{2p}}_{c} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\text{ou} \quad y = ax^2 + bx + c \qquad \textbf{(3)}$$

Similarmente ao caso anterior, a comparação dos coeficientes de **(2)** e **(3)** permite concluir que:

$$a = \frac{1}{2p} \Rightarrow \boxed{\mathrm{p} = \frac{1}{2a}}$$

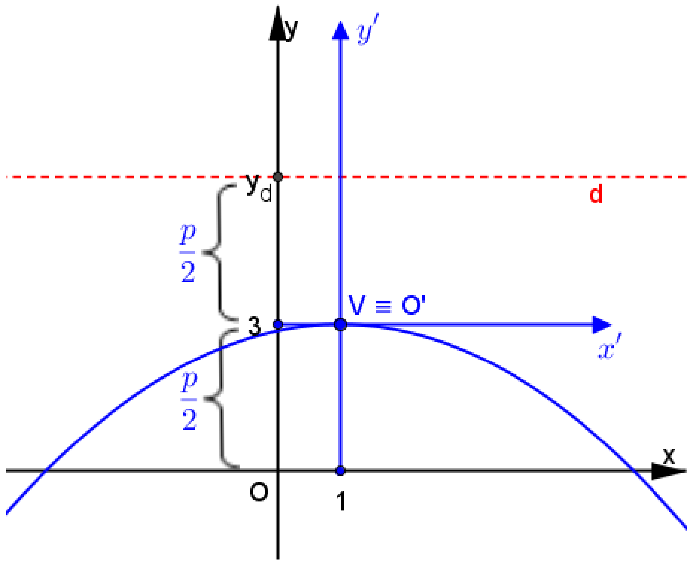
$$b = -\frac{x_0}{p} \Rightarrow x_0 = -bp \Rightarrow \boxed{\mathrm{x}_0 = -\frac{b}{2a}}$$

Exemplo: Esboce o gráfico da parábola $(x-1)^2 = -12(y-3)$.

Resolução:

Observe que a equação dada é da forma $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$
Pela comparação das fórmulas, podemos concluir que:
- o vértice é o ponto $V = (1, 3)$
- a parábola tem o eixo de simetria paralelo ao eixo y (variável do 1º grau)
- a concavidade da parábola é para baixo (segundo membro da equação é negativo)

Podemos então esboçar o gráfico dessa parábola a menos do seu foco e de sua diretriz.



- Coordenadas do foco:

$|2p| = 12 \;\Rightarrow\; |p| = 6 \;\Rightarrow\; \left|\frac{p}{2}\right| = 3$
Note que $x_F = x_0 = 1$

$$y_F = y_0 - \left|\frac{p}{2}\right| = 3 - |3| = 0$$

$$F = (1, 0)$$

- Equação da diretriz:

$$y_d = y_0 + \left|\frac{p}{2}\right| = 3 + |3| = 6$$

$$d : y - 6 = 0$$

2.9 Rotação de Eixos

Sejam Ox e Oy os eixos primitivos, do sistema cartesiano ortogonal com origem em O=(0,0). Sejam O'x' e O'y' os novos eixos coordenados depois que o sistema primitivo foi rotacionado por um ângulo θ em torno da origem O $\equiv$ O'. Logo, θ é o ângulo formado entre os eixos Ox e O'x'. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer do sistema primitivo. Portanto, o mesmo ponto P terá coordenadas $P = (x', y')$, em relação ao novo sistema.

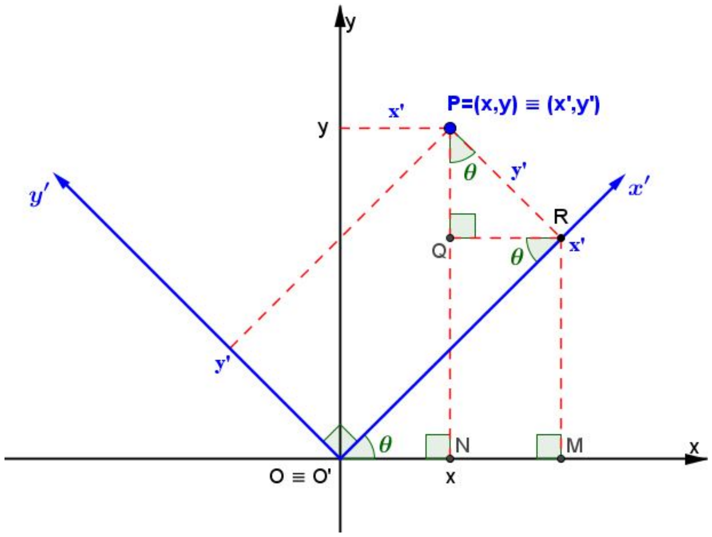


Figura 2.6: Rotação dos eixos coordenados.

Pela figura acima, temos: $\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}$

No triângulo OMR, temos: $\overline{MR} = \overline{NQ}$,

$$\cos\,\theta = \frac{\overline{OM}}{x'} \quad \Rightarrow \quad \overline{OM} = x' \cdot \cos\,\theta,$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{MR}}{x'} \quad \Rightarrow \quad \overline{MR} = \overline{NQ} = x' \cdot \text{sen}\,\theta.$$

No triângulo PQR, temos: $\overline{QR} = \overline{NM}$,

$$\text{sen } \theta = \frac{\overline{QR}}{y'} \;\Rightarrow\; \overline{QR} \;= \overline{NM} = y' \cdot \text{ sen } \theta,$$
$$\cos \theta = \frac{\overline{QP}}{y'} \;\Rightarrow\; \overline{QP} \;= y' \cdot \cos \theta.$$

Portanto, $\begin{cases} x = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \text{ sen } \theta \\ y = & x' \cdot \text{ sen } \theta + y' \cdot \cos \theta \end{cases}$

Assim, após uma rotação de um ângulo θ (positivo, a partir do eixo x no sentido anti-horário) temos as equações que relacionam qualquer ponto $P = (x, y)$ de coordenadas no sistema xOy com suas coordenadas no sistema $x'O'y'$. Chamadas equações de rotação $\mathbb{R}^2$.

$\begin{cases} x = & x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \text{ sen } \theta \\ y = & x' \cdot \text{ sen } \theta + y' \cdot \cos \theta \end{cases}$ *ou, equivalente,* $\begin{cases} x' = & x \cdot \cos \theta + y \cdot \text{ sen } \theta \\ y' = & -x \cdot \text{ sen } \theta + y \cdot \cos \theta \end{cases}$

Essas equações podem também serem escritas na forma matricial abaixo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

onde

$$M_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

é chamada **matriz de rotação de um ângulo** θ, que representa a matriz de passagem das coordenadas (x', y') para as coordenadas (x, y) e, por sua vez, M_θ^t é a matriz de passagem das coordenadas (x, y) para as coordenadas (x', y') onde, M_θ^t é a matriz transposta da matriz M_θ e portanto, a equação de rotação dessa passagem é da forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; M_\theta^t = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

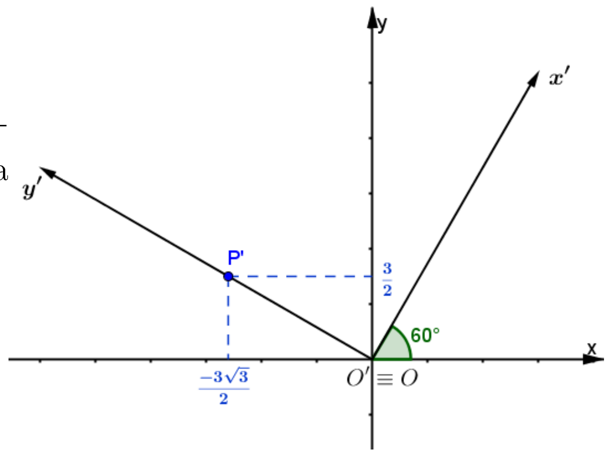
Exemplo$_1$: Vejamos o que acontece com as coordenadas do ponto $P' = (0,3)$ em relação ao sistema de coordenadas xOy rotacionado de um ângulo de 60°.

Solução: Observe que o ponto $P' = (0,3)$ tem coordenadas $x' = 0$ e $y' = 3$. Portanto, usando as equações de rotação, temos:

$$\begin{cases} x = & x'\cdot \text{ cos } \theta - y'\cdot \text{ sen } \theta \\ y = & x'\cdot \text{ sen } \theta + y'\cdot \text{ cos } \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & 0\cdot \text{ cos } 60° - 3\cdot \text{ sen } 60° \\ y = & 0\cdot \text{ sen } 60° + 3\cdot \text{ cos } 60° \end{cases}$$

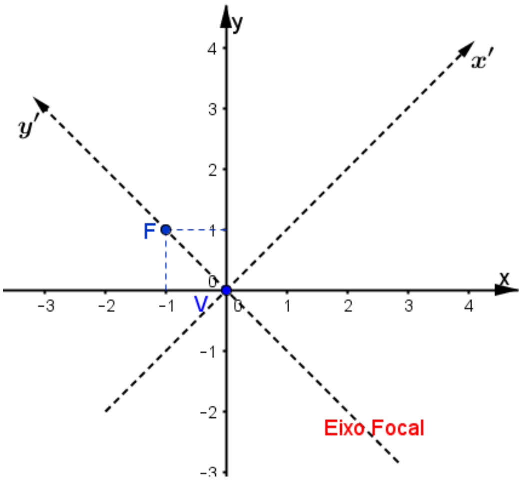
$$\Rightarrow \begin{cases} x = & 0\cdot\dfrac{1}{2} - 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = & 0\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto, $x = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$ e $y = \dfrac{3}{2}$ são as coordenadas do ponto P' em relação ao sistema xOy, como mostra a figura ao lado.



Exemplo$_2$: Determinar a equação e o gráfico da parábola que tem foco $F = (-1,1)$ e vértice $V = (0,0)$.

Solução: Como o foco está no ponto $F = (-1, 1)$ e o vértice, no ponto $V = (0, 0)$, podemos traçar o eixo focal e, deduzir que houve uma uma rotação do sistema xOy, como mostra a figura ao lado.



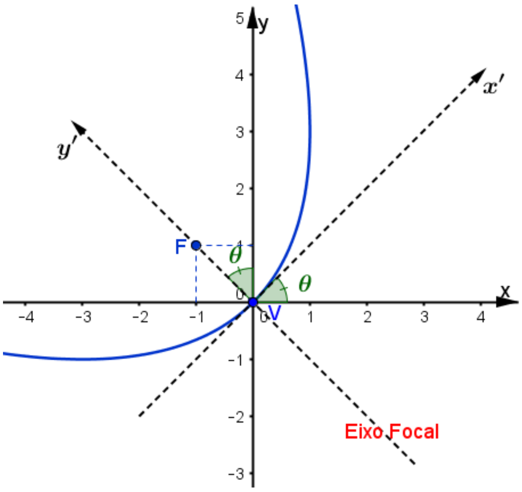
Da definição de parábola, temos que:

$$d(F, V) = \frac{p}{2} \Rightarrow \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \frac{p}{2}$$

$$\Rightarrow p = 2\sqrt{2}$$

No eixo $x'Oy'$ temos que a concavidade dessa parábola estará voltada para cima e o eixo focal coincide com o eixo Oy'. Portanto, a equação reduzida dessa parábola é do tipo $(x')^2 = 2py'$. Como $p = 2\sqrt{2}$, temos que $(x')^2 = 4\sqrt{2}y'$.

Como o eixo focal coincide com o eixo Oy', podemos utilizar as coordenadas do foco $F = (-1, 1)$ para obter o ângulo θ de rotação.



$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\ \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow sen\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Utilizando as equações ("de volta") da rotação, temos:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{y'} = -x \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Substituindo essas equações na equação $(x')^2 = 4\sqrt{2}y'$, temos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right).$$

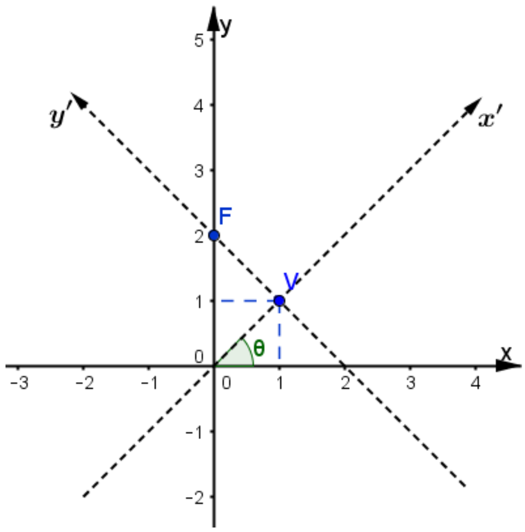
Daí, a equação dessa parábola no sistema xOy é dada por $x^2+2xy+y^2-8y+8x=0$.

Exemplo$_3$: Determinar a equação e o gráfico da parábola que tem foco $F = (0, 2)$ e vértice $V = (1, 1)$.

Solução: Como o foco está no ponto $F = (0, 2)$ e o vértice, no ponto $V = (1, 1)$, podemos deduzir que houve uma translação e uma rotação (ou vice-versa) do sistema xOy, como mostra a figura abaixo.

Como $d(F, V) = \frac{p}{2}$, temos:

$\sqrt{(1-0)^2 + (1-2)^2} = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 2\sqrt{2}.$



No sistema $x'O'y'$ temos a concavidade voltada para cima e o eixo focal coincidindo com o eixo $O'y'$. Dessa forma, a equação reduzida dessa parábola é do tipo $(x')^2 = 2py'$. Como $p = 2\sqrt{2}$, temos que $(x')^2 = 4\sqrt{2}y'$ $(*)$.

Rotação: Da figura, temos que:

$$\begin{cases} \cos\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow sen\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \overline{x}\cdot cos\theta + \overline{y}\cdot sen\theta \\ y' = -\overline{x}\cdot sen\theta + \overline{y}\cdot cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{y} \\ y' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{y} \end{cases}$$

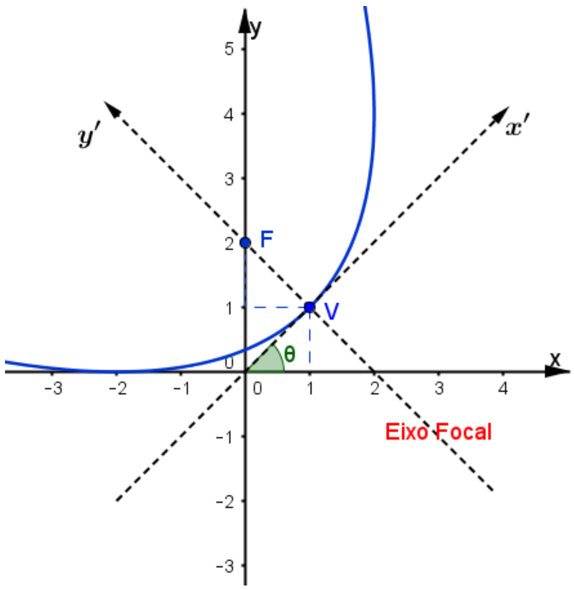
Substituindo as equações em $(*)$ e desenvolvendo esses cálculos, teremos as equações no sistema $\overline{x}\overline{O}\overline{y}$ dada por $\quad \overline{x}^2 + 2\overline{xy} + \overline{y}^2 - 8\overline{y} + 8\overline{x} = 0 \quad (**)$.

Translação: Como o vértice está no ponto $V = (1, 1)$, as equações de translação são dadas por: $\begin{cases} \overline{x} = x - 1 \\ \overline{y} = y - 1 \end{cases}$.

Dessa forma, substituindo essas equações em $(**)$, temos a equação da parábola no sistema xOy. Portanto,

$$(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2 - 8(y-1) + 8(x-1) = 0$$

$\Rightarrow \; x^2 + 2xy + y^2 - 12y + 4x + 4 = 0$. Cujo gráfico está representado na figura abaixo.

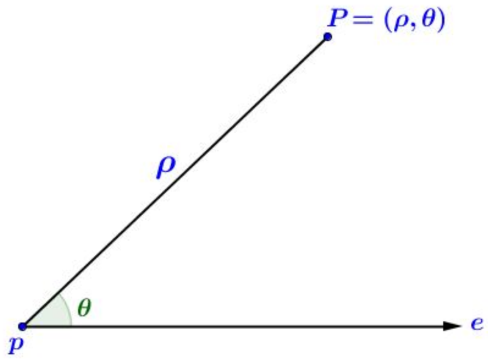


2.10 Coordenadas Polares

Existem outros sistemas de coordenadas capazes de representar o plano, um deles é o Sistema de Coordenadas Polares, o qual é constituído por um semi-eixo $\boldsymbol{e}$, denominado **semi-eixo polar** e um ponto de origem $\boldsymbol{p}$, chamado **Polo**.

Portanto, todo ponto **P** do plano é representado por um par ordenado (ρ, θ), onde ρ é a distância do ponto **P** ao Polo $\boldsymbol{p}$ e θ é o ângulo formado entre o segmento

$\overline{Pp}$ e o semi-eixo polar. O ângulo θ é medido em radianos a partir do eixo polar no sentido anti-horário. Portanto, $\rho \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Podemos relacionar o Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonais com o Sistema de Coordenadas Polares fazendo coincidir a origem $O = (0, 0)$ do Sistema Cartesiano com o polo $\boldsymbol{p}$ do Sistema Polar e o semi-eixo polar com o semi-eixo positivo do eixo cartesiano Ox.

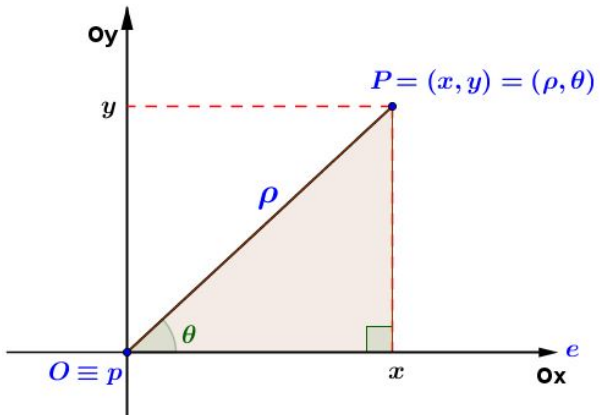


Figura 2.7: O Ponto em Coordenada Polares

Próximo passo, é determinar as coordenadas x e y do Sistema Cartesiano em função de ρ e θ do Sistema Polar.

No triângulo retângulo em destaque na figura (2.7), temos:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (1) \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos\,\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\ cos\theta \\ y = \rho\ sen\theta \end{array} \right. \quad (2)$$

Através dessas relações, podemos determinar o ângulo θ ou ainda por $\theta = \text{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, observando os sinais das coordenadas x e y para definir a qual quadrante pertence o ângulo θ.

Portanto, as relações (1) e (2), são consideradas as equações de transformação de coordenadas entre o Sistema Cartesiano e o Sistema Polar.

Exemplo) Transforme o ponto $P = \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

Solução: $\rho^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; \rho^2 = \left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; \rho = 5$ e

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{5} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{\frac{5}{2}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{2} \\ \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Portanto, o ponto é dado por $P = \left(5, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2.11 Equação Polar da Parábola

Vamos escrever a Equação Canônica da Parábola na forma de Equação Polar. Para isso, considere uma parábola de eixo de simetria horizontal com vértice V, foco F e parâmetro $\overline{DF} = \boldsymbol{p}$. Seja $P = (\rho, \theta)$ um ponto qualquer da parábola. Façamos coincidir o pólo p com o foco F e o eixo polar com o eixo de simetria da parábola. (Figura 2.8)

No triângulo PQF da figura 2.8, temos:

$$cos(180° - \theta) = -\; cos\;\theta = \frac{p - \rho}{\rho} \quad\Rightarrow\quad \rho = \frac{p}{1 - cos\theta}$$

Portanto, a **Equação Polar** da parábola é $\boxed{\rho = \dfrac{p}{1 - cos\theta}}$, onde p é o parâmetro da parábola.

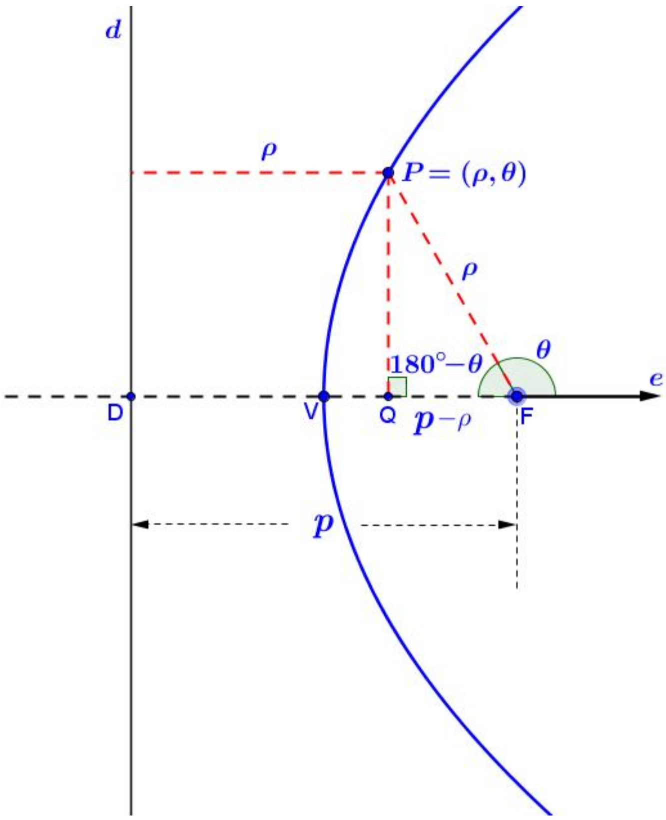


Figura 2.8: Parábola em Coordenadas Polares

2.12 Construção da Parábola por meio de Artifícios

Podemos construir uma Parábola através de sua caracterização e por meio de suas propriedades focais, justificando assim as construções por meio do Software Geogebra, por meio de dobraduras (conhecidas como Método de Van Schooten) e por meio do Desenho Geométrico ensinado nas séries do Ensino Fundamental II.

Software Geogebra: Através desse Software, vamos construir a parábola por duas maneira:

1) Construa uma reta d e um ponto F fora da reta d;

2) Utilize a ferramenta *Ponto em Objeto* e tome um ponto D fora da reta d;

3) Construa o segmento $\overline{DF}$ e nele, trace a **Mediatriz** t (Utilize a ferramenta *Mediatriz*);

4) Construa a **Perpendicular** l à reta d que passa por D (Utilize a ferramenta *Reta Perpendicular*);

5) Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, obtenha o ponto P, interseção de t e l; (Figura 2.9)

6) A Parábola é o Lugar Geométrico dos pontos P quando D se move ao longo da reta d; (Ver Definição 2.2).

7) Selecione a mediatriz t e nela utilize a ferramenta *Habilitar Rastro* e, em seguida, selecione o ponto D e utilize a ferramenta *Animar* fazendo o ponto D mover-se sobre a reta d. O rastro deixado pela reta t é a Parábola. (Figura 2.10)

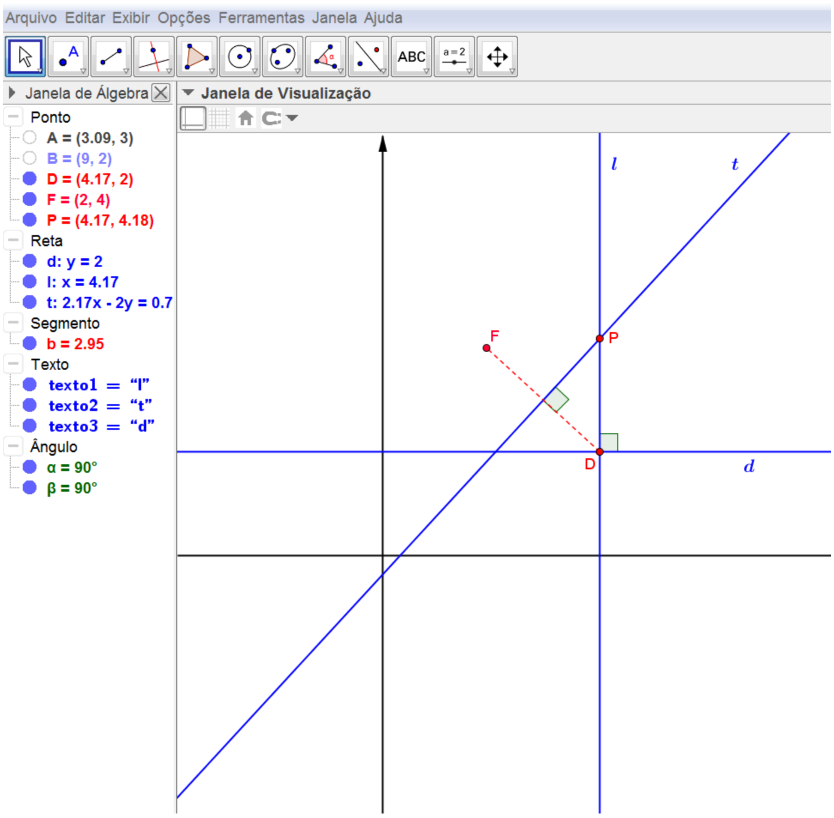


Figura 2.9: Construindo a Parábola

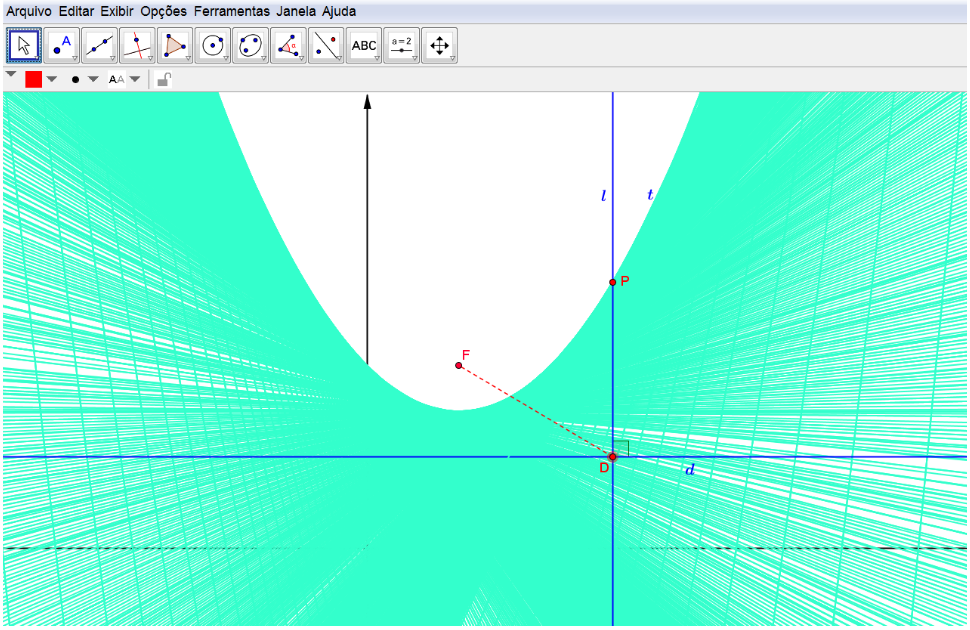
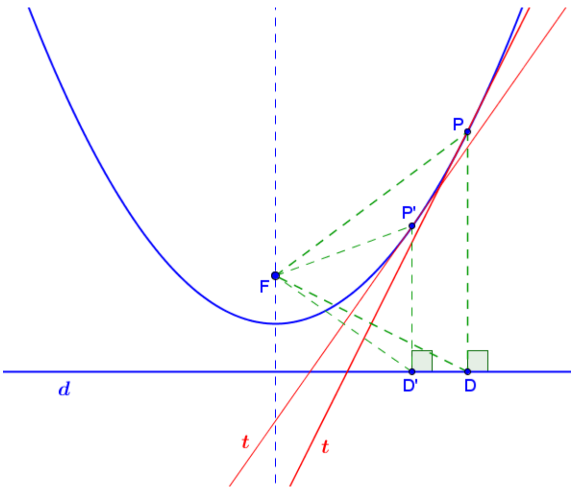


Figura 2.10: Parábola no Geogebra

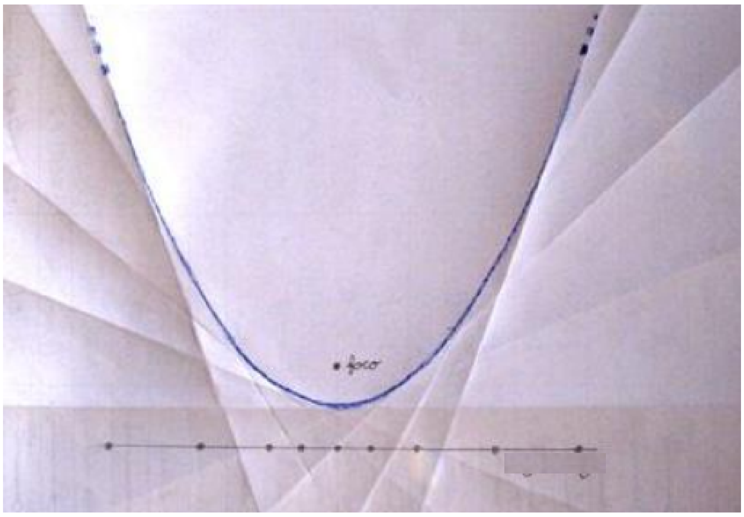
Método da Dobradura: Através de dobraduras numa folha de papel-manteiga, podemos construir a parábola através dos seguintes procedimentos:



1) Desenhe uma reta horizontal d (diretriz da parábola), numa folha de papel-manteiga e marque, fora dessa reta, um ponto fixo F (foco da parábola);

2) Selecione um ponto D sobre a reta d e dobre o papel-manteiga de forma a fazer coincidir os pontos D e F. Observe que essa dobra coincide com a reta t tangente à parábola;

3) Repita essa operação para diferentes escolhas de pontos sobre a diretriz d. Realizando esta operação um número suficiente de vezes, podemos observar que as dobras tangenciam uma curva que é a parábola, como mostra a figura abaixo.



Com o auxílio da régua T: Nessa construção, vamos precisar trabalhar numa prancheta de madeira. Também usaremos alguns materiais como: régua simples, uma régua no formato de T, tesoura, barbante, lápis e pregos ou percevejos.

1) Fixe um prego na prancheta representando o ponto F (foco da parábola);

2) Considere a lateral da prancheta como a diretriz d da parábola;

3) Corte um pedaço de barbante pouco maior que a régua T;

4) Prenda uma extremidade do barbante na extremidade do tronco da régua T e a outra no foco F, de modo que a parte livre do barbante tenha exatamente o comprimento da régua; (Figura 2.11)

5) Trace uma curva deslizando a régua T ao longo da diretriz d, enquanto mantemos o barbante esticado com o lápis e em contato com o tronco da régua T. A curva obtida é parte de uma parábola com foco F e diretriz a reta na qual desliza a régua T.

Notemos que ao longo do movimento a ponta do lápis mantém-se equidistante ao foco F e a diretriz d. Portanto, a curva que o lápis descreve é a parábola.

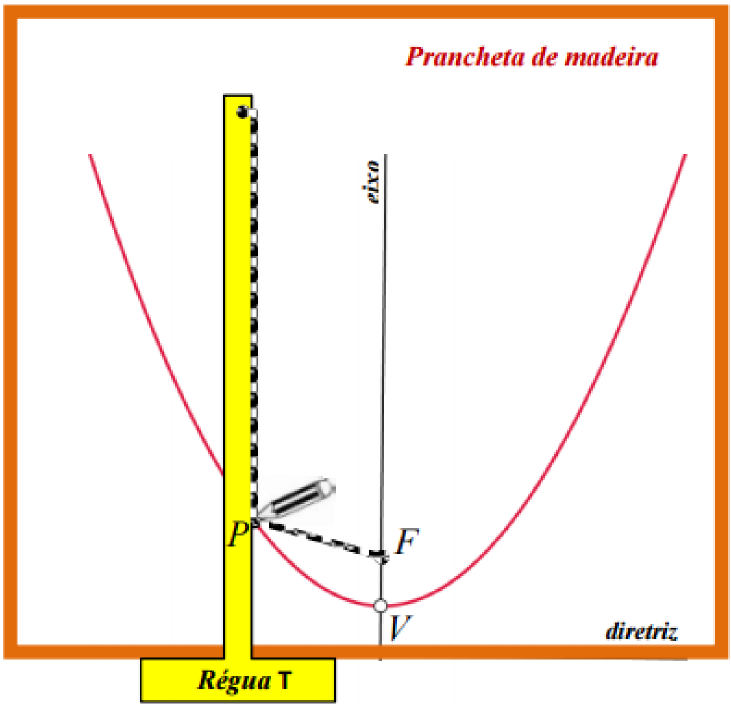


Figura 2.11: Parábola desenhada com a régua T

Capítulo 3

Função Quadrática

Estudaremos neste capítulo as Funções Quadráticas também conhecidas como Funções polinomiais do 2º Grau, dando ênfase nesse estudo ao seu Gráfico, conhecido como Parábola e sua aplicabilidade na Matemática.

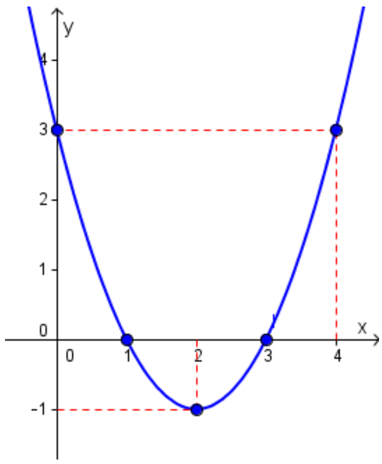
Definição 3.1 *Chamamos de Função Quadrática ou simplesmente Função polinomial do 2º Grau, a toda aplicação* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ *em que* a*,* b *e* c *são números reais e* $a \neq 0$.

3.1 O Gráfico

Para compreendermos o gráfico da função quadrática conhecido como **parábola**, vamos tomar como exemplos funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ onde serão atribuídos valores reais quaisquer à variável x, a fim de encontrar o resultado de $y = f(x)$.

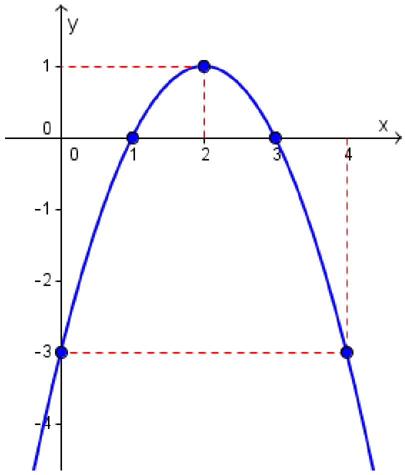
*Exemplo*1) O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

x_n	$y = x^2 - 4x + 3$	(x, y)
0	$y = 3$	(0,3)
1	$y = 0$	(1,0)
2	$y = -1$	(2,-1)
3	$y = 0$	(3,0)
4	$y = 3$	(4,3)



*Exemplo*2) O gráfico da função quadrática $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.

x_n	$f(x_n) = -x^2 + 4x - 3$	(x, y)
0	$y = 3$	(0,3)
1	$y = 0$	(1,0)
2	$y = -1$	(2,1)
3	$y = 0$	(3,0)
4	$y = 3$	(4,3)



O gráfico da Função Quadrática é uma parábola, que pode ser voltada para cima ou voltada para baixo. Essa concavidade é dada pelo sinal do coeficiente de x, ou seja, o sinal de a.

Se $a > 0$, dizemos que a parábola tem a concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, dizemos que a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

É fácil de verificar esses fatos analisando o sinal da derivada segunda conforme a definição de Concavidade de uma função em [4].

Definição 3.2 *Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que o gráfico de f tem **concavidade voltada para cima** em x_0 se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão acima da reta tangente à curva no ponto x_0.*

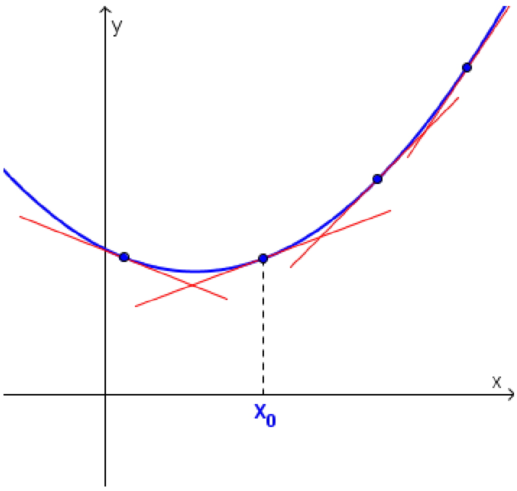
Analogamente, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão abaixo da reta tangente à curva no ponto x_0 que tem concavidade voltada para baixo.

Teorema 3.1 *Se f é uma função derivável até segunda ordem no intervalo $I = [a, b]$, x_0 é interno a $[a, b]$ e $f''(x_0) \neq 0$, então:*

a) *quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em x_0;*

Interpretação geométrica do Teorema.

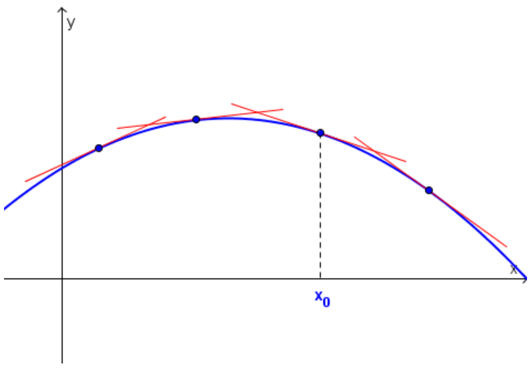
Se $f''(x_0) > 0$, então f' é crescente nas vizinhanças de x_0; portanto, as tangentes ao gráfico têm inclinação crescente e isto só é possível se a concavidade for voltada para cima.



b) *quando* $f''(x_0) < 0$, *o gráfico de* f *tem concavidade voltada para baixo em* x_0;

Demonstração geométrica do Teorema.

Analogamente, se $f''(x_0) < 0$, *então* f' *é decrescente nas vizinhanças de* x_0, *isto é, as retas tangentes à curva têm inclinação decrescente; portanto, a concavidade é voltada para baixo.*



3.2 Forma Canônica

A construção do gráfico de funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ com o uso da tabela de valores x e y, como foi mostrado nos exemplos acima, torna-se às vezes um trabalho impreciso, pois ao atribuirmos valores inteiros à variável x podemos encontrar resultados da ordenada y que não são números inteiros ou que são resultados que inviabilizam a construção desse gráfico.

Para que o estudo da função quadrática seja mais detalhado, vamos escrever primeiramente essa função de outra forma mais conveniente, chamada **forma canônica**.

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right] \end{aligned}$$

Podemos representar a expressão $b^2 - 4ac$ pela letra grega Δ, conhecido no mundo da álgebra como discriminante do trinômio do segundo grau. Então, a forma canônica pode ser escrita da seguinte maneira.

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$$

3.3 Zero(s) da Função Quadrática

O(s) zero(s) de uma função quadrática são os pontos onde a parábola intercepta o eixo x (eixo das abscissas). Então o(s) zero(s) da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, são as soluções (raízes) da equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Utilizando a fórmula canônica, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{x} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Essa fórmula é conhecida como **Fórmula de Bháskara** e, a quantidade de raízes de uma função quadrática depende do valor obtido para o discriminante **delta**(Δ). Podemos ter os seguintes casos:

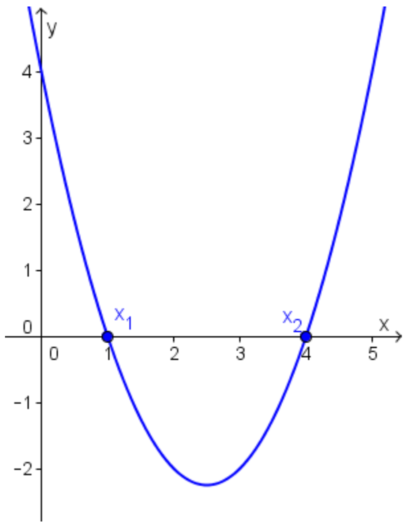
1º Caso) $\Delta > 0$, a equação possui duas raízes reais e diferentes. Com isso, a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos.

Seja a função $f(x) = x^2 - 5x + 4$
Calculando as raízes, temos:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{5-3}{2} \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{5+3}{2} \Rightarrow x_2 = 4$$



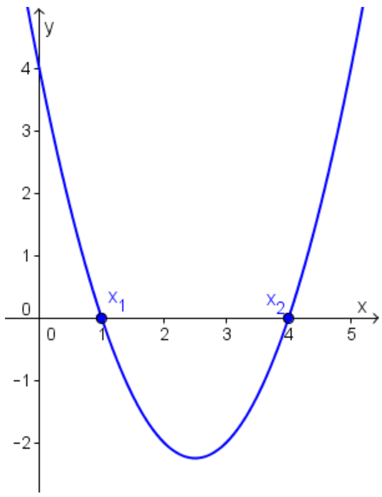
2º Caso) $\Delta = 0$, a equação possui duas raízes reais e iguais. Com isso, a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto.

Seja a função $f(x) = x^2 - 4x + 4$
Calculando as raízes, temos:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4-0}{2} \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{4+0}{2} \Rightarrow x_2 = 2$$

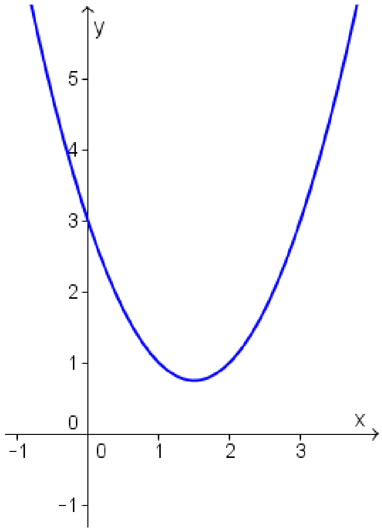


3º Caso) $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais. Com isso, a parábola não intercepta o eixo x, ela fica *"flutuando"*.

Seja a função $f(x) = x^2 - 3x + 3$
Calculando as raízes, temos:

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Como $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$, então $\nexists\ x_1$ e $x_2 \in \mathbb{R}$, tal que, $f(x) = 0$.



3.4 O Vértice da Parábola

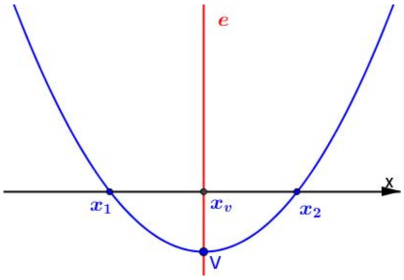
O vértice da parábola determina o ponto de máximo ou de mínimo de uma função quadrática. Tal vértice será o par ordenado $V = (x_v, y_v)$ que pertence ao eixo de simetria *e* que toda parábola possui.

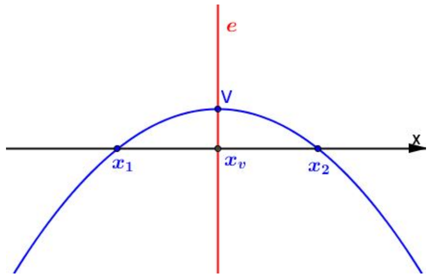
Considere a função $y = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos três casos a estudar: (I) $\Delta > 0$; (II) $\Delta = 0$ e (III) $\Delta < 0$.

(I) $\Delta > 0$

Nesse caso a função tem dois zeros reais e distintos $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

A parábola interecepta o eixo Ox nos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$





O vértice V da parábola pertence ao eixo de simetria e. Logo, a abscissa x_v é a do ponto médio do segmento de extremos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$. Essa abscissa é a média aritmética das abscissas x_1 e x_2, ou seja:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x}_v = \frac{\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)+\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)}{2} \quad \Rightarrow$$

$$x_v = \frac{-2b}{4a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{x}_v = \frac{-b}{2a}.}$$

Para determinar o y_v, basta substituir o $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, isto é:

$$y_v = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c \quad \Rightarrow \quad Y_v = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \quad \Rightarrow \quad y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

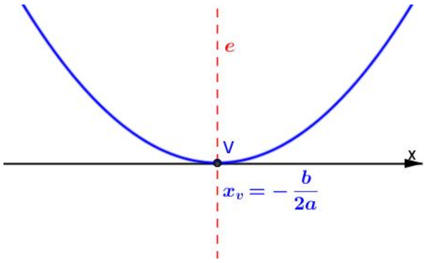
$$\Rightarrow y_v = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \quad \Rightarrow \quad y_v = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{y}_v = \frac{-\Delta}{4a}.}$$

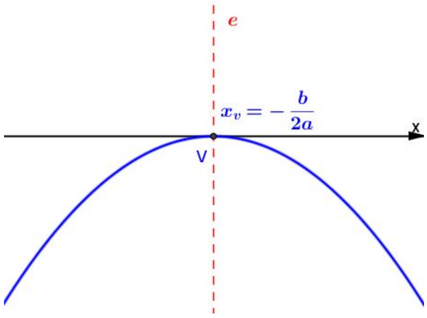
Portanto, as coordenadas do vértice são dadas por:

$$\boxed{\boxed{\mathrm{V} = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)}}$$

(II) $\Delta = 0$

Nesse caso a função tem dois zeros reais e iguais $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$. A parábola é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.



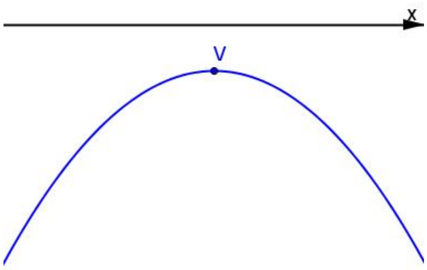


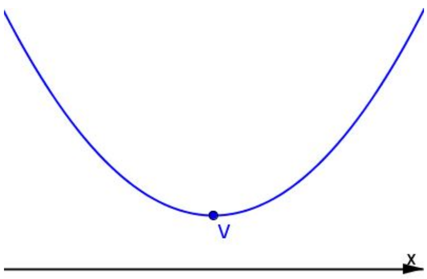
Assim, a abscissa x_v do vértice V é $\dfrac{-b}{2a}$. Vimos no caso (I) que, substituindo na função $y = ax^2 + bx + c$ o valor de $x = \dfrac{-b}{2a}$, obtém-se $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

Observação: Como $\Delta = 0$, temos que $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = 0$.

(III) $\Delta < 0$

Nesse caso a função não possui zeros reais; portanto a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.

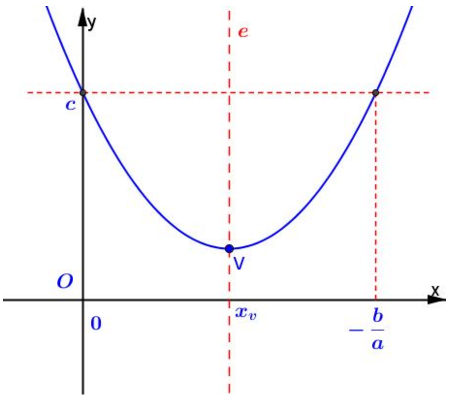


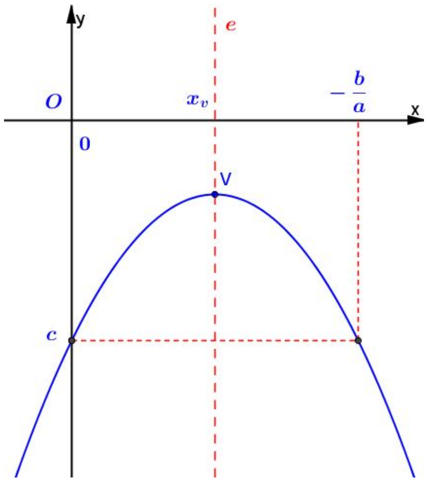


Um ponto importante para o esboço desse gráfico é o ponto de intersecção com o eixo Oy. Esse ponto acontece quando $x = 0$. Logo, na função $y = ax^2 + bx + c$ fazendo $x = 0$, temos $y = c$.

Para determinarmos as coordenadas dos pontos da parábola que têm ordenada c, basta substituir na função $y = ax^2 + bx + c$ o valor de $y = c$:

$$c = ax^2 + bx + c \;\Rightarrow\; 0 = ax^2 + bx \;\Rightarrow\; x(ax + b) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$





Como o vértice V pertence ao eixo de simetria e, temos que a abscissa x_v é a do ponto médio do segmento de extremos $(0, 0)$ e $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$, ou seja,

$$x_v = \frac{0 + \left(\frac{-b}{a}\right)}{2} \;\Rightarrow\; x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Como visto no caso (I), substituindo na função $y = ax^2 + bx + c$ o valor de $x = -\frac{b}{2a}$, obtém-se:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Exemplo) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 3$ destacando o vértice da parábola.

Resolução: *Primeiro vamos calcular o(s) zero(s) da função, se existirem.*

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 \Rightarrow \Delta = 4$

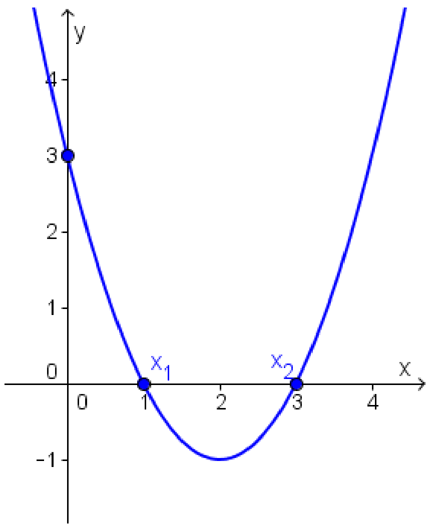
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 3.$

Já temos conhecimento onde o gráfico intercepta o eixo x, vamos determinar agora o vértice dessa parábola.

$x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{4}{2} \Rightarrow x_v = 2.$

$y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = \dfrac{-4}{4} \Rightarrow y_v = -1.$ Então o vértice é $V = (2, -1)$.

Portanto, essa função tem como gráfico:



Teorema 3.2 ***1)*** *Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_M = -\dfrac{\Delta}{4a}$ para $x_M = -\dfrac{b}{2a}$.*

Demonstração: Considremos a função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Sendo $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

Nessa diferença, $-\frac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x, só depende de a, b e c) e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$.

Ao substituirmos $x = -\frac{b}{2a}$ na forma canônica, temos:

$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$.

2) Se $a < 0$, a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\frac{b}{2a}$.

Prova-se de maneira análoga.

3.5 A Imagem da Função

O Conjunto Imagem **(Im)** da função $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Tomemos então a função na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

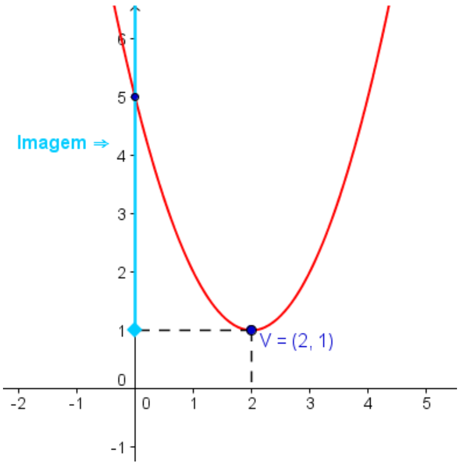
ou seja, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Obtemos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para qualque $x \in \mathbb{R}$; então temos que considerar dois casos:

1º Caso) Quando $\mathbf{a} > \mathbf{0} \Rightarrow \text{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}.\ \text{Daí,}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_v = \frac{-\Delta}{4a}\}$$

Veja como exemplo o gráfico da função definida de R em R dada por $f(x) = x^2 - 4x + 5$.



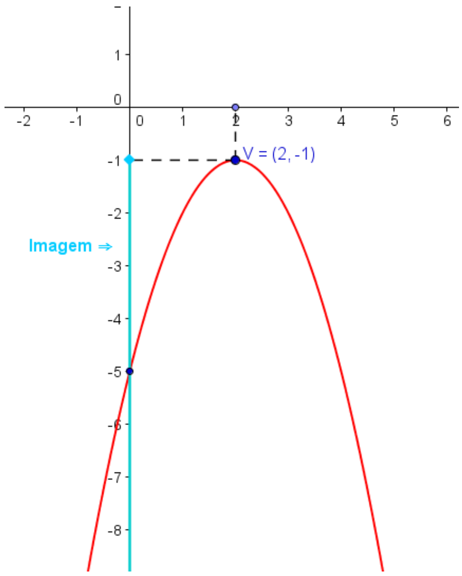
Portanto, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

2º Caso) Quando **a** $<$ **0** $\Rightarrow$a$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}.\ \text{Daí,}$$

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_v = \frac{-\Delta}{4a}\}$$

Veja como exemplo o gráfico da função definida de R em R dada por $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.



Portanto, $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1\}$

3.6 Eixo de Simetria

Teorema 3.3 *"O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo das abscissas e que passa pelo vértice."*

Os pontos da reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo vértice da parábola obedecem à equação $x = -\dfrac{b}{2a}$, pois todos os pontos dessa reta têm abscissa dada por $-\dfrac{b}{2a}$.

Para provarmos que a parábola tem eixo de simetria na reta $x = -\dfrac{b}{2a}$, devemos mostra que, dado um ponto $A\left(-\dfrac{b}{2a} - r, y\right)$, com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe $B\left(-\dfrac{b}{2a} + r, y\right)$ também pertencente ao gráfico da função.

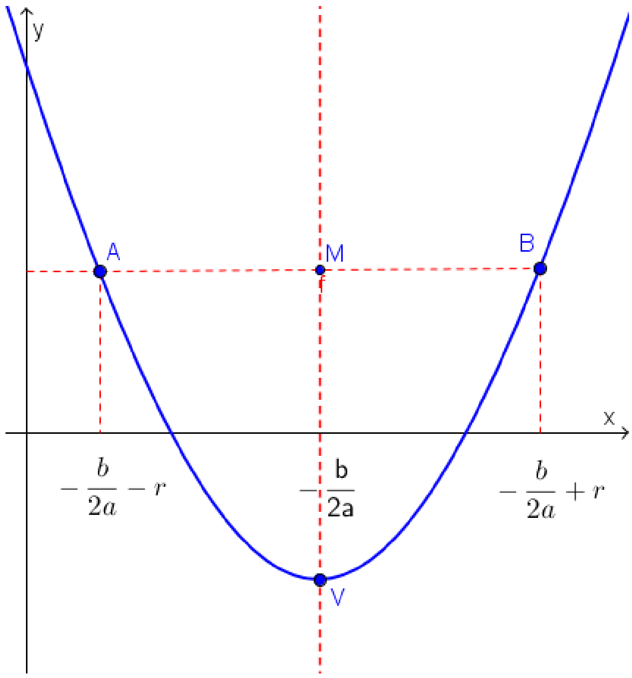


Figura 3.1: Eixo de Simetria

Tomando a função quadrática na forma canônica, temos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que $A\left(-\frac{b}{2a} - r, y\right)$ pertence ao gráfico da função, temos:

$$y = f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= \mathrm{a}\left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right)$$

Então, $f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right)$ provando que o ponto $B\left(-\frac{b}{2a} + r, y\right)$ também pertence ao gráfico da função.

Proposição 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática. Então f é contínua.*

Demonstração

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática. Então existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Primeiramente, vamos provar que a função $g(x) = ax^2$, com $a \neq 0$ é uma função contínua em qualquer $\omega \in \mathbb{R}$. Isto é, pretendemos provar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - \omega| < \delta$ então $|g(x) - g(\omega)| < \varepsilon$. Assim,

$$|g(x) - g(\omega)| = |ax^2 - a\omega^2| = |a(x^2 - \omega^2)| = |a(x - \omega)(x + \omega)|$$

$$= |a(x-\omega)(x+\omega-\omega+\omega)| = |a(x-\omega)(x-\omega+2\omega)| = |a(x-\omega)||(x-\omega+2\omega)|$$

$$\leqslant |a(x-\omega)|(|(x-\omega|+|2\omega|) = |a||x-\omega|(|(x-\omega|+|2\omega|) \leqslant |a|\delta^2+2\delta|a||\omega|.$$

Assim, basta considerar um δ tal que $|a|\delta^2 + 2\delta|a||\omega| < \varepsilon$.

Em seguida, provemos que $h(x) = bx + c$, com $b, c \in \mathbb{R}$ é contínua em qualquer $t \in \mathbb{R}$. Isto é, pretendemos provar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $|x - t| < \delta$ então $|h(x) - h(t)| < \varepsilon$.

Assim,

$$|h(x) - h(t)| = |bx + c - bt - c| = |bx - bt| = |b(x - t)| = |b||x - t| < |b|\delta.$$

Portanto, basta tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{|b|}$

Logo, a função f é a soma de funções contínuas pelo que f é contínua em $\mathbb{R}$.

∎

3.7 Monotonicidade da Função Quadrática

Como o gráfico da função quadrática é uma parábola, para o estudo da monotonicidade é preciso verificar os intervalos de crescimento e decrescimento dessa parábola.

Uma função num dado intervalo I é dita crescente, se para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 desse intervalo, sendo $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$ e a função é dita decrescente, se para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 desse intervalo, onde $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$. Um ponto fundamental para esse estudo é o x_v e o sinal do coeficiente a, pois, devemos analisar os casos antes e depois do x_v em que $a > 0$ e $a < 0$. Faremos apenas a análise de $a > 0$ com valores antes e depois do x_v.

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$.

Tome dois pontos quaisquer x_1 e x_2, tais que $x_1 < x_2 \leq x_v$. Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 < x_v \\ x_2 \leq x_v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 < -\dfrac{b}{2a} \\ x_2 \leq -\dfrac{b}{2a} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \ x_1 + x_2 < -\dfrac{b}{a} \right.$$

Como $a > 0$, podemos multiplicar essa desigualdade, dai

$a(x_1 + x_2) < -b$. Multiplicando agora por $(x_1 - x_2) < 0$, tem-se

$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > -b(x_1 - x_2)$. Desenvolvendo, temos

$a\big(x_1^2 - x_2^2\big) > -bx_1 + bx_2$

$ax_1^2 - ax_2^2 > -bx_1 + bx_2$

$ax_1^2 + bx_1 > ax_2^2 + bx_2$. Basta agora, somar c em ambos os lados

$ax_1^2 + bx_1 + c > ax_2^2 + bx_2 + c$. Então

$f(x_1) > f(x_2)$.

Como $x_1 < x_2$ e $f(x_1) > f(x_2)$, chegamos a conclusão que a função é decrescente no intervalo $]-\infty, x_v]$

Tomemos agora dois pontos quaisquer x_3 e x_4, tais que $x_v \leq x_3 < x_4$. Então:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 \geq x_v \\ x_4 > x_v \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 \geq -\dfrac{b}{2a} \\ x_4 > -\dfrac{b}{2a} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \ x_3 + x_4 > -\dfrac{b}{a} \right.$$

Como $a > 0$, podemos multiplicar essa desigualdade

$a(x_3 + x_4) > -b$. Multiplicando agora por $(x_3 - x_4) < 0$, tem-se

$a(x_3 + x_4)(x_3 - x_4) < -b(x_3 - x_4)$. Desenvolvendo, temos

$a\left(x_3^2 - x_4^2\right) < -bx_3 + bx_4$

$ax_3^2 - ax_4^2 < -bx_3 + bx_4$

$ax_3^2 + bx_3 < ax_4^2 + bx_4$. Basta agora, somar c em ambos os lados

$ax_3^2 + bx_3 + c < ax_4^2 + bx_4 + c$. Então

$f(x_3) < f(x_4)$.

Da mesma maneira, $x_3 < x_4$ e $f(x_3) < f(x_4)$, chegando a conclusão que a função é crescente no intervalo $[x_v, +\infty[$.

Podemos visualizar essa situação no gráfico abaixo.

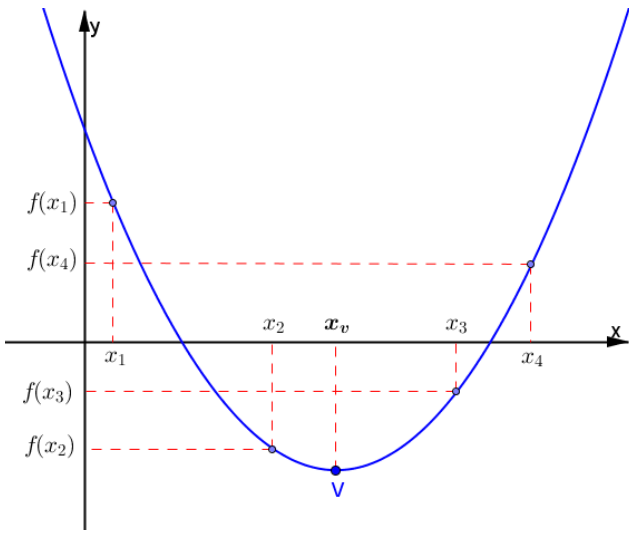


Figura 3.2: Monotonicidade da Parábola

De maneira análoga, temos o estudo para $a < 0$ e com isso, podemos escrever uma tabela de crescimento e decrescimento da função quadrática.

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$]-\infty, x_v]$	$[x_v, +\infty[$
$a < 0$	crescente	decrescente
$a > 0$	decrescente	crescente

Podemos também, estudar a monotonicidade da função quadrática através da derivada de primeira ordem.

Proposição 3.2 *Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no interior (a, b).*

1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$.

2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.

Demonstração: Considere dois números quaisquer x_1 e x_2 no intervalo $[a, b]$ com $x_1 < x_2$.

Pela definição de função crescente, devemos mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como estamos supondo que $f'(x) > 0$, sabemos que f é diferenciável em $[x_1, x_2]$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe c entre x_1 e x_2 tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \qquad (*)$$

Como $f'(c) > 0$ por hipótese e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$, o lado direito da equação $(*)$ é positivo, e

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ ou } f(x_1) < f(x_2). \qquad \blacksquare$$

A parte 2) é provada de maneira análoga.

Pela Proposição 2.2 e, sabendo que o domínio de f é o conjunto dos números reais e $f'(x) = 2ax + b$, temos que:

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-b}{2a}.$$

Podemos então, escrever a tabela de crescimento e decrescimento da função quadrática pelo estudo do sinal da derivada de primeira ordem.

$f'(x) = 2ax + bx$	$]-\infty, x_v]$	$[x_v, +\infty[$
$a < 0$	f' positiva $\Rightarrow$ f é crescente	f' negativa $\Rightarrow$ f é decrescente
$a > 0$	f' negativa $\Rightarrow$ f é decrescente	f' positiva $\Rightarrow$ f é crescente

3.8 A Caracterização da Função Quadrática

A caracterização de uma função quadrática não é de tão fácil compreensão, para tanto, faremos uma breve revisada no conteúdo de Sequências Numéricas, em especial, as Progressões Aritméticas.

Definição 3.3 *Uma Progressão Aritmética (PA) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante denominada de razão.*

Em outras palavras, uma sequência qualquer é uma **Progressão Aritmética** se, e somente se, a diferença entre os termos consecutivos $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é constante.

Uma **Progressão Aritmética de Segunda Ordem** é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de temos consecutivos $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ formam, entre si, uma progressão aritmética não estacionária.

Exemplo: A sequência $(a_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque as sequências das diferenças entre seus termos (Δa_n) é uma progressão aritmética não estacionária.

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = 6 - 3 = 3$$

$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = 10 - 6 = 4$$

$$\Delta a_4 = a_5 - a_4 = 15 - 10 = 5$$

$$\Delta a_5 = a_6 - a_5 = 21 - 15 = 6$$

Portanto, $(\Delta a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, ...)$ que é uma Progressão aritmética.

Vejamos o que acontece com as imagens de uma função quadrática quando atribuímos à variável x valores consecutivos de uma progressão aritmética.

Exemplo: Seja $f(x) = x^2 - 3x + 1$, tomando x números reais consecutivos de mesma razão, temos:

x_n	$f(x_n) = x^2 - 3x + 1$	(x, y)
-1	$f(-1) = 5$	(-1,5)
0	$f(0) = 1$	(0,1)
1	$f(1) = -1$	(1,-1)
2	$f(2) = -1$	(2,-1)
3	$f(3) = 1$	(3,1)
4	$f(4) = 5$	(4,5)

Observe a sequência (a_n) formada pelas imagens da função $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

$(a_n) = (5, 1, -1, -1, 1, 5)$, não é uma Progressão Aritmética, porém:

$$\Delta a_1 = a_2 - a_1 = 1 - 5 = -4$$

$$\Delta a_2 = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2$$

$$\Delta a_3 = a_4 - a_3 = -1 - (-1) = 0$$

$$\Delta a_4 = a_5 - a_4 = 1 - (-1) = 2$$

$$\Delta a_5 = a_6 - a_5 = 5 - 1 = 4$$

Observando agora a sequência formada pelos (Δa_n), temos:

$(\Delta a_n) = (-4, -2, 0, 2, 4)$, essa sequência é uma Progressão Aritmética de razão $r = 2$.

Teorema 3.4 (CARACTERIZAÇÃO) *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é quadrática se e só se toda progressão aritmética não constante $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ é transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...)$.*

Demonstração

($\Rightarrow$)

Seja (x_n) uma progressão aritmética de primeira ordem, com $x_n = x_1 + (n-1)\cdot r$, e $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma função quadrática arbitrária.

Queremos mostrar que $(f(x_1), f(x_2), f(x_3), ..., f(x_n), ...)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada e que as diferenças sucessivas

$$\Delta_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

$$\Delta_2 = f(x_3) - f(x_2)$$

$$\cdots$$

$$\Delta_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$$

$$\Delta_{n+1} = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1})$$

$$\cdots$$

formam uma progressão aritmética.

Para tal fato, devemos mostrar que $\Delta_{n+1} - \Delta_n$ é constante.

Como $\Delta_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$, vamos determinar os respectivos valores de $f(x_n)$ e $f(x_{n+1})$ para daí, determinar o valor de Δ_n.

$f(x_n) = f(x_1 + (n-1)r)$
$\Rightarrow f(x_n) = a(x_1 + (n-1)r)^2 + b(x_1 + (n-1)r) + c$
$\Rightarrow f(x_n) = a(x_1^2 + 2x_1r(n-1) + (n-1)^2r^2) + bx_1 + b(n-1)r + c$
$\Rightarrow f(x_n) = a(x_1^2 + 2x_1r(n-1) + (n^2 - 2n + 1)r^2) + bx_1 + bnr - br + c$
$\Rightarrow f(x_n) = ax_1^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c.$

$f(x_{n+1}) = f(x_1 + nr)$
$\Rightarrow f(x_{n+1}) = a(x_1 + nr)^2 + b(x_1 + nr) + c$
$\Rightarrow f(x_{n+1}) = a(x_1^2 + 2x_1nr + n^2r^2) + bx_1 + bnr + c$
$\Rightarrow f(x_{n+1}) = ax_1^2 + 2ax_1nr + an^2r^2 + bx_1 + bnr + c.$

Portanto,

$\Delta_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$
$\Rightarrow \Delta_n = ax_1^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c - (ax_1^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c)$
$\Rightarrow \Delta_n = ax_1^2 + 2ax_1rn - 2ax_1r + an^2r^2 - 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr - br + c - ax_1^2 - 2ax_1rn + 2ax_1r - an^2r^2 + 2anr^2 - ar^2 - bx_1 - bnr + br - c$
$\Rightarrow \Delta_n = 2arx_1 + 2anr^2 - ar^2 + br.$

E, como $\Delta_{n+1} = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1})$, vamos determinar apenas o valor de $f(x_{n+2})$ para daí, determinar o valor de Δ_{n+1}.

$f(x_{n+2}) = f(x_1 + (n+1)r)$
$\Rightarrow f(x_{n+2}) = a(x_1 + (n+1)r)^2 + b(x_1 + (n+1)r) + c$
$\Rightarrow f(x_{n+2}) = a(x_1^2 + 2x_1r(n+1) + (n+1)^2r^2) + bx_1 + b(n+1)r + c$
$\Rightarrow f(x_{n+2}) = a(x_1^2 + 2x_1r(n+1) + (n^2+2n+1)r^2) + bx_1 + bnr + br + c$
$\Rightarrow f(x_{n+2}) = ax_1^2 + 2ax_1rn + 2ax_1r + an^2r^2 + 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr + br + c.$

Portanto,

$\Delta_{n+1} = f(x_{n+2}) - f(x_{n+1})$
$\Rightarrow \Delta_{n+1} = ax_1^2 + 2ax_1rn + 2ax_1r + an^2r^2 + 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr + br + c - (ax_1^2 + 2ax_1nr + an^2r^2 + bx_1 + bnr + c)$
$\Rightarrow \Delta_{n+1} = ax_1^2 + 2ax_1rn + 2ax_1r + an^2r^2 + 2anr^2 + ar^2 + bx_1 + bnr + br + c - ax_1^2 - 2ax_1nr - an^2r^2 - bx_1 - bnr - c$
$\Rightarrow \Delta_{n+1} = 2arx_1 + 2anr^2 + ar^2 + br.$

Logo,

$\Delta_{n+1} - \Delta_n = 2arx_1 + 2anr^2 + ar^2 + br - (2arx_1 + 2anr^2 - ar^2 + br)$
$\Rightarrow \Delta_{n+1} - \Delta_n = 2arx_1 + 2anr^2 + ar^2 + br - 2arx_1 - 2anr^2 + ar^2 - br$
$\Rightarrow \Delta_{n+1} - \Delta_n = 2ar^2.$

$(\Leftarrow)$

Mostraremos agora que, reciprocamente, toda função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que transforma progressões aritméticas não constantes em progressões aritméticas de segunda ordem não degenerada é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Fazendo uma substituição de $f(x)$ por $g(x) = f(x) - g(0)$, vemos que a função $g(x)$ tem as mesmas propriedades de $f(x)$ e mais a propriedade adicional de que $g(0) = 0$.

Dessa forma, considerando a progressão aritmética de primeira ordem $(1, 2, 3, 4, ...)$, vemos que os valores de $g(1), g(2), ..., g(n)$... formam uma P.A. de segunda ordem não-degenerada. Portanto, existem números reais a e b (com $a \neq 0$) tais que $g(n) = an^2 + bn$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Note que deveria ser $g(n) = an^2 + bn + c$, mas como $g(0) = 0$.)

Em seguida, fixemos um número arbitrário $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a seguinte progressão aritmética:

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, ..., \frac{n}{p}, ...$$

Analogamente, existem números reais a' e b' (com $a' \neq 0$) tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, temos:

$$an^2 + bn = g(n)$$

$$\text{an}^2 + bn = g\left(\frac{np}{p}\right)$$

$$\text{an}^2 + bn = a'(np)^2 + b'(np)$$

$$\text{an}^2 + bn = (a'p^2)n^2 + (b'p)n.$$

As funções contínuas $g(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $g(r) = ar^2 + br$ para todo racional positivo $r = \dfrac{n}{p}$. Se p não pertence a $\mathbb{Q}$ então $p = \lim r_n$, onde $r_n \in \mathbb{Q}$. Portanto,

$$g(p) = g(\lim r_n)$$

Uma vez que a função g é contínua, temos que:

$$g(p) = \lim g(r_n))$$

$$g(p) = \lim(ar_n^2 + br_n)$$

$Comoafunoquadrticacontnua, temosque:$

$$g(p) = a \lim r_n^2 + b \lim r_n$$

$$g(p) = ap^2 + bp.$$

De maneira análoga, considerando a progressão aritmética de primeira ordem $(-1, -2, -3, ...)$, concluímos que $g(x) = ax^2 + bx, \forall x \leq 0$.

Logo, colocando $f(0) = c$, temos $f(x) = g(x)+c$, ou seja, $f(x) = ax^2+bx+c, \forall x \in \mathbb{R}$.

■

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, Gelson., MURAKAMI, Carlos., *Fundamentos de matemática Elementar*, Volume 1: Conjuntos e Funções, 9ª edição, Editora Atual, São Paulo, (2013).

[2] IEZZI, Gelson., MURAKAMI, Carlos., *Fundamentos de matemática Elementar*, Volume 4: Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas, 9ª edição, Editora Atual, São Paulo, (2013).

[3] IEZZI, Gelson., MURAKAMI, Carlos., *Fundamentos de matemática Elementar*, Volume 7: Geometria Analítica, 9ª edição, Editora Atual, São Paulo, (2013).

[4] IEZZI, Gelson., MURAKAMI, Carlos., *Fundamentos de matemática Elementar*, Volume 8: Limites, Derivas e Noções e Integral, 9ª edição, Editora Atual, São Paulo, (2013).

[5] IEZZI, G., DOLCE, Osvaldo., MACHADO, Antonio., *Matemática e realidade*, 8º ano, 6ª edição, 9ª reimpressão, Editora Atual, São Paulo, (2009).

[6] SILVA, Wellington., *Uma Abordagem Dinâmica e Inovadora para o Ensino da Geometria Analítica no Ensino Médio*. Dissertação em Matemática, UFAL, Alagoas, (2013).

[7] Lima, E.L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio* - Volume 1. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[8] Lima, E.L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E. e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio* - Volume 2. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[9] Eves, H, (1993). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*: Geometria. Atual, São Paulo.

[10] Ávila, G. S. (2010). *Várias Faces da Matemática: Tópicos para Licenciatura e Leitura em Geral*. Blucher, São Paulo, 2ª edição.