TÓPICOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES: DIVISÃO DE FRAÇÕES

Michael Cristian Soares dos Santos

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2013

Trabalho de conclusão de curso do Profmat

TÓPICOS SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES: DIVISÃO DE FRAÇÕES

Discente: Michael Cristian Soares dos Santos

Orientador: Marcelo Viana

Co-orientadora: Letícia Rangel

Trabalho de conclusão de curso apresentado como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática.

Rio de Janeiro - RJ

Março de 2013

Agradecimentos

Agradeço a Deus.

Agradeço aos meus pais, Jorge e Vera, pelo incentivo aos estudos

Agradeço à minha esposa, Alessandra, pelo companherismo

Agradeço aos meus orientadores, Marcelo e Letícia, pela dedicação e atenção

Agradeço aos meus amigos Sandro e Wagner, pela colaboração

Agradeço aos demais professores e colegas de PROFMAT, pela troca de conhecimentos.

Conteúdo

Introdução

O foco do presente estudo é o ensino de frações, tema fundamental dada a sua importância na concepção dos números racionais. É um assunto de extrema relevância na formação do cidadão, devido ao seu caráter elementar, constando nos currículos escolares desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, permeando toda a matemática da educação básica, em conteúdos como razão, proporção, probabilidade entre outros.

De fato, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, um dos objetivos do ensino da matemática para o segundo ciclo do Ensino Fundamental (atuais 4^o e 5^o anos) é:

> *construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social* (MEC [1], 2001, p. 80).

Sendo assim, a aprendizagem do tema se torna imprescindível, não só para a matemática da escola básica, mas para o desenvolvimento intelectual do estudante, pois segundo BEHR et al. ([2], 1983, p. 91):

> *Os conceitos associados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir*

de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas.

Reconhecidamente, é um tema considerado difícil de ser ensinado por muitos docentes. Nessas dificuldades, podemos destacar dois aspectos: a complexidade do tema em si, que envolve a passagem da contagem para a medida e o fato de que, na formação acadêmica do professor, os números racionais são tratados de forma abstrata, totalmente diferente do contexto da Educação Básica. Segundo MOREIRA ([3], 2004, p. 94), em seu trabalho sobre a abordagem dos números racionais na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG):

Do ponto de vista da preparação do futuro professor para o trabalho pedagógico de construção dos racionais positivos nas salas de aula da escola, a abordagem que se desenvolve na licenciatura pode ser, também, submetida a fortes questionamentos. Ao longo de todo o processo de formação na licenciatura, o conjunto dos números racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da matemática escolar.

Ensinar frações envolve diversos desafios. Um deles certamente é o conceito de medida. No âmbito do ensino dos números naturais (conjunto a que os estudantes estão familiarizados), ou seja, em relação à contagem, a identificação da unidade não oferece um desafio maior, com forte referência intuitiva e concreta.

> *O problema da contagem consiste em controlar a quantidade de um conjunto finito de objetos. Uma primeira estratégia para tratar este problema é estabelecer uma correspondência um a um com um conjunto de referência. [...] Um número natural é um rótulo dado a todos os conjuntos de objetos que podem ser postos em correspondência um a um entre si. [...] Desta forma, o conceito matemático de número natural é uma abstraçao que emerge da contagem por meio de correspondências um a um. O problema da medida consiste em comparar o tamanho de uma grandeza com o de uma unidade, isto é, uma grandeza u de referência, de mesma espécie da grandeza a ser medida a. Neste sentido, medir é verificar quantos vezes a unidade "cabe" na grandeza a ser medida. [...] No caso particular de grandezas comensuráveis, o problema da medida pode ser resolvido por contagem [...]. O valor da medida pode [...] ser representado por uma comparação, ou razão de números naturais. Desta forma, o conceito matemático de número racional emerge do problema concreto da medida, no caso particular de grandezas comensuráveis.*(GIRALDO et al. [4], 2012, p.13)

Outro desafio para o ensino e a aprendizagem de números racionais se apresenta na própria escrita das frações. Não é tão trivial a associação de uma quantidade a dois números (inteiros) "separados" por um pequeno traço e escritos na vertical.

> *a introdução de números fracionários nas séries iniciais pelo procedimento da dupla contagem das partes, em superfícies totalmente divididas em partes congruentes, conduz a criança a entender os fracionários, como se fossem dois números naturais: um que se coloca em cima e outro abaixo de um traço.*(SILVA [5],2005, p.15)

Tentando facilitar o entendimento por parte dos alunos, muitos professores limitam o ensino dos racionais à memorização de regras, alcançando justamente o contrário do pretendido, comprometendo a compreensão do assunto. Ao tratar o tópico de comparação de frações, por exemplo, muitos professores e livros didáticos tratam o assunto apenas como uma sequência mecânica, reduzindo as frações envolvidas a um denominador comum, sem explicitar que, para tal procedimento, está sendo utilizado o conceito de frações equivalentes. Por exemplo, para se comparar $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, primeiro se reduz a um denominador comum:

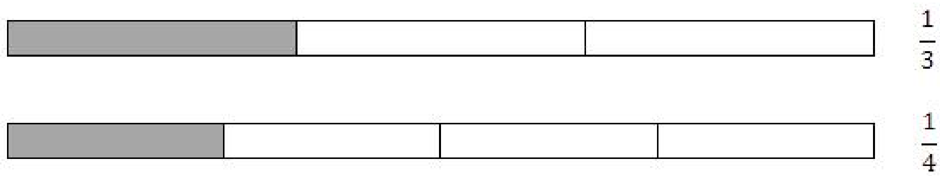
$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

(multiplica-se numerador e denominador por quatro, pois este é o denominador da outra fração) e, de maneira análoga,

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}.$$

Como o 4 é maior que 3, conclui-se que $\frac{4}{12}$ é maior que $\frac{3}{12}$, ou seja, $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{4}$.

Neste caso mais simples, poderíamos comparar a quantidade de partes em que a unidade foi dividida. Comparando a terça parte com a quarta parte, é possível perceber que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{4}$, pois quanto mais dividirmos a unidade, menor será o tamanho de cada parte, conforme pode ser visualizado na figura a seguir.



Ao optar pelo ensino por meio de regras, o professor faz o aluno pular várias etapas, como a experimentação, a manipulação de materiais concretos, a formulação e a verificação de conjecturas num ambiente em que o professor e aluno passam a discutir sobre o assunto abordado, que são importantes e conduzem à compreensão do conceito. Segundo MONTEIRO & COSTA ([6], 1996, p.62):

> *A utilização prematura das regras no estudo das frações e decimais, tem sido detectado como outro fator que atrasa a compreensão dos números racionais, visto que os alunos não reconhecem a ligação entre o seu conhecimento dos números e as respectivas regras na resolução de situações na sala de aula de matemática.*

O grupo composto pelos professores Michael Cristian Soares dos Santos, Sandro da Costa Loyola e Wagner Rohr Garcez, desenvolveu em parceria e colaboração a reflexão sobre os Números Racionais e o ensino do assunto no ensino fundamental. Assim, os trabalhos de conclusão de curso desses professores têm interseção não vazia. Nos três trabalhos, o Capítulo 1 trata dos números racionais e o Capítulo 2, do ensino de frações na escola básica, compondo juntos a parte comum. Como temas de atenção específica de cada autor foram eleitos os tópicos **Unidade**, **Equivalência** e **Divisão de Frações**, que mereceram investigação de cada membro para compor três trabalhos individuais. Os critérios adotados para a escolha dos temas foram a relevância para a fundamentação do assunto e a dificuldade do ensino. Certamente, a Unidade e a Equivalência são elementares para a compreensão dos conceitos de fração e de número racional. E o conceito de divisão é um dos que mais oferece dificuldade para o ensino e a aprendizagem do tema no ensino básico.

Com objetivo de investigar o ensino das Frações, foram elaboradas seqüências didáticas contendo orientações ao professor que se interessar em sua aplicação. Estas atividades foram aplicadas em turmas do ensino fundamental com o objetivo de avaliar o seu desenvolvimento como recurso didático para o ensino do tema.

Certamente, não é objetivo deste trabalho propor um caminho conclusivo para o ensino dos tópicos em atenção, mas sim propor um debate sobre o tema, buscando contribuir para a reflexão sobre esse conteúdo e o seu ensino.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

No ensino básico, a ideia de número aparece, inicialmente, como era usada desde a pré-história, a partir da contagem. Mesmo antes da representação simbólica dos números, o pastor já contava suas ovelhas comparando com um punhado de pedras, para conferir se não havia perdido alguma. Dessa maneira, estabelecia a noção concreta da contagem que funda e sustenta o conceito de número natural.

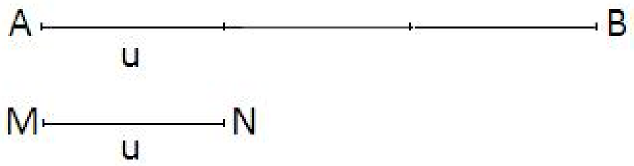
O conceito de número natural é uma abstração da ideia e da ação concreta de contagem. O número é uma propriedade abstrata, uma ideia, não existe concretamente e sim, representa uma classe de elementos com uma mesma característica.

> *"O número 5, por exemplo, é uma propriedade (abstrata) que têm em comum cinco cadeiras, cinco pessoas, cinco quadrados, ou qualquer conjunto com cinco objetos; que independe das características particulares e da organização mútua desses objetos. Entretanto, o número 5 não é nem as cinco cadeiras, nem as cinco pessoas nem os cinco quadrados. Não podemos ver, nem sentir, nem ouvir o número 5 no mundo concreto, apenas abstraí-lo como uma propriedade abstrata da qual certos conjuntos compartilham."* (GIRALDO, [7],p.2)

Com o passar do tempo, surgiu a necessidade de novos números, decorrente do aparecimento de problemas associados a medição. Para medir, comparamos uma grandeza a uma unidade de mesma espécie estabelecida como referência. Por exemplo, dado um segmento AB, para determinarmos a medida deste segmento, é preciso determinar quantas vezes um segmento u, de mesma espécie, que por definição é tomado como unidade, cabe dentro de AB.

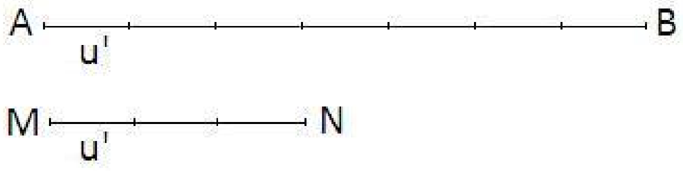
Quando o segmento AB pode ser subdividido em uma quantidade inteira n de segmentos congruentes a u, a medida de AB em relação a u é igual ao número $n \in \mathbb{N}$.

Considerando o segmento AB e $u = MN$, conforme a figura a seguir, temos que $AB = 3u$.



Quando o segmento AB não pode ser subdividido em partes congruentes a u então verificamos se existe u', isto é, existe uma subdivisão de u, que cabe um número inteiro de vezes em AB tal que AB e u possam ser divididos em partes congruentes a u'. Desta forma, $AB = n.u'$, como $u = k.u'$ então $AB = \frac{n}{k}u$. Neste caso, os números naturais não são suficientes para este registro.

Neste caso, temos $AB = 7u'$ e $MN = 3u'$, conforme a figura a seguir. Então, $AB = \frac{7}{3}MN$:



Nos dois exemplos anteriores, dizemos que AB e MN são comensuráveis, pois existe uma sub-unidade comum entre eles. No primeiro, a sub-unidade considerada foi u e no segundo, u'. Quando isto acontece, a medida do segmento AB fica determinada por um número racional.

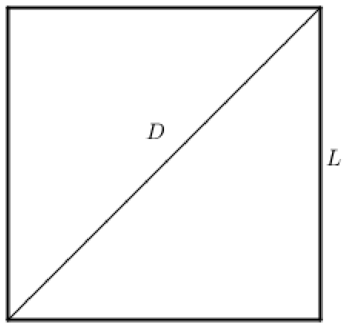
O conjunto dos números racionais pode ser formalizado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a \text{ e } b \text{ inteiros e } b \neq 0\}.$$

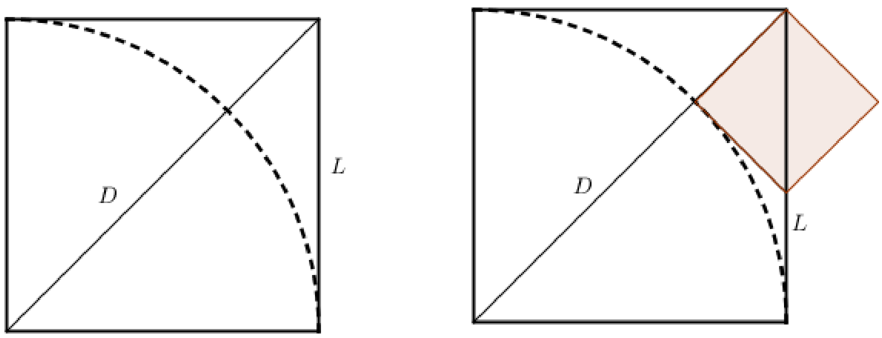
Nem sempre AB e u são comensuráveis, isto é, múltiplos inteiros de uma unidade comum u'. Neste caso, a medida de AB em releçao a u não é representada por uma razão de números naturais.

Desde a Grécia antiga, já se sabia que a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis, isto é, que não podem ser simultaneamente expressos como múltiplos inteiros de nenhuma unidade comum. Surge assim um novo conceito de números: os números irracionais.

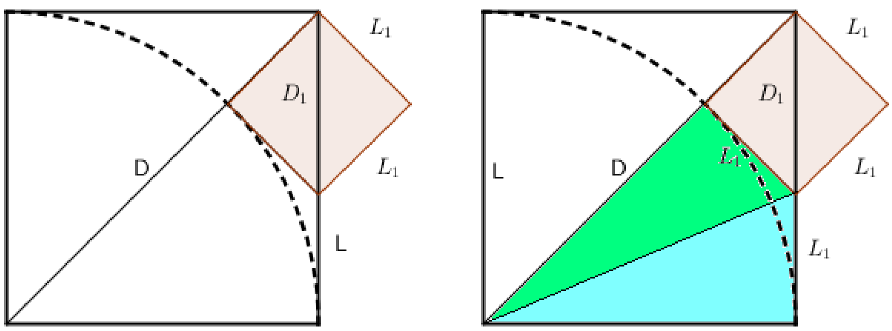
Dado um quadrado de lado L e a sua diagonal D, vamos demonstrar que os segmentos L e D são incomensuráveis. Supondo por absurdo, que os segmentos D e L são comensuráveis, isto é, que exista uma medida u tal que $D = nu$ e $L = mu$, para m e n inteiros positivos.



Com o auxílio de um compasso, vamos marcar na diagonal D, um segmento congruente a L, formando um novo quadrado de lado $D - L$.

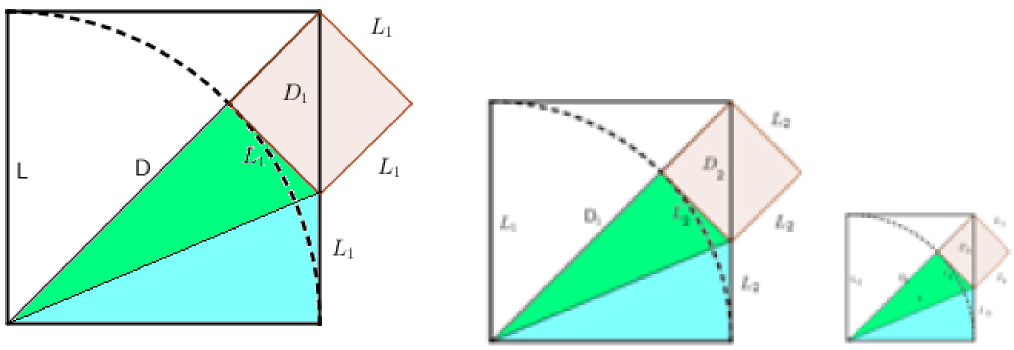


Considere $L_1 = D - L$. Como supomos D e L comensuráveis, dizemos que $L_1 = nu - mu$, então $L_1 = (n - m)u$, e, finalmente, chamando $n - m$ de m_1, temos $L_1 = m_1 u$, onde m_1 é um número inteiro positivo.



A diagonal D_1 do novo quadrado é igual a $D_1 = L - L_1$, devido à congruência dos triângulos em destaque. Então $D_1 = mu - m_1u$, e $D_1 = n_1u$, onde $n_1 = m - m_1$ é um número inteiro positivo.

Repetindo este processo infinitamente, obtemos uma sequência infinita de quadrados, cujos lados L_i, $i = 1, 2, 3, ...$, isto é, L_i fica tão pequenos quanto se queira.



Como todos os lados podem ser expressos na forma $L_i = m_iu$, com m_i, inteiro positivo, neste caso, para i suficientemente grande, m_i seria menor que u, contradizendo o fato de ser seu múltiplo inteiro, logo, concluímos que D e L são incomensuráveis.

Essa demonstração, fundamentalmente geométrica, certamente não é a mais adequada para a abordagem do assunto no ensino fundamental, uma vez que envolve a noção de limite. No entanto, a verificação de que a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não é um número racional é possível nesta etapa do ensino a partir de argumentos algébricos e aritméticos.

Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado é $\sqrt{2}$. De fato, considerando um quadrado de lado l e diagonal d, temos:

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$

Demonstraremos que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito como o quociente de dois números inteiros. Para isso, suponhemos por absurdo que existem m e $n \epsilon \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, tais que $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$, em que m e n são primos entre si, isto é, $mdc(m, n) = 1$. Dessa forma, teríamos:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

$$(\frac{m}{n})^2 = 2$$

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

Como m^2 é par, m também é par, logo, podemos escrevê-lo como $m = 2p$, em que $p \ \epsilon \ \mathbb{Z}^*$. Fazendo a substituição:

$$(2p)^2 = 2n^2$$

$$4p^2 = 2n^2$$

$$2p^2 = n^2$$

Como n^2 é par, n também é par, logo, podemos escrevê-lo como $n = 2q$, em que $q \ \epsilon \ \mathbb{Z}^*$.

Dessa forma, concluímos que m e n são números pares, chegando a um absurdo, pois supomos que m e n são primos entre si. Não é possível escrever a razão entre a diagonal do quadrado e o seu lado como um número racional. Temos que m e n são segmentos incomensuráveis.

Capítulo 2

O Ensino de Frações

É consenso entre os professores que a aprendizagem de frações representa uma grande dificuldade para o aluno. Na sala de aula, mesmo após o tema já ter sido apresentado de maneira exaustiva, ainda é possível observar as mais variadas dúvidas, inclusive em anos mais avançados da educação básica, etapa em que se supõe que o conceito já está compreendido. Tal fator também revela a dificuldade que os professores encontram ao abordar o tema. Segundo FAVERO & NEVES ([8], 2012, p. 36):

> *Os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de* 1980 *e* 1990*: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo [...]*

De fato, este assunto tem levado um grande número de educadores a pesquisarem o tema sem que seja apontado um caminho conclusivo. No entanto, é consenso que realmente este não é um tema cujo aprendizado é simples nem trivial. Outro ponto de concordância é que existem alguns fatores que ressaltam tal dificuldade. Abaixo, fazemos referência a três artigos em que os autores destacam alguns destes obstáculos.

Segundo MONTEIRO e COSTA ([6],1996), alguns dos fatores relacionados à dificuldade dos alunos em trabalhar com os números racionais, e consequentemente às frações: A multiplicidade de significados dos números racionais, a concepção da unidade em vários problemas ou situações envolvendo números racionais e a utilização precoce de regras e algoritmos no estudo dos números racionais e frações.

Segundo LOPES ([9],2008), um grave problema é *"a prescrição de regras e macetes para realizar operações"* (p. 4). O mesmo autor também aponta para o fato de que *"a palavra fração esta relacionada a muitas ideias e constructos"* (p. 7). Quando o autor utiliza a palavra constructo, ele faz menção às diferentes intepretações da fração.

MONTEIRO et al.([10],2005) salientam que os significados das frações são dificuldades inerentes ao estudo deste tema e explicam:

> *"Analisemos, por exemplo, os diversos significados que uma fracção pode ter dependendo do contexto onde se insere.* $\frac{3}{5}$ *pode referir-se a uma parte de um todo,* $\frac{3}{5}$ *de um bolo,* $\frac{3}{5}$ *da superfície da terra, etc., ou pode representar o quociente entre dois números naturais. Se tivermos* 3 *pizas a partilhar por* 5 *pessoas,* $\frac{3}{5}$ *representa o quociente que resulta de dividir* 3 *por* 5 *e que é a parte de piza que cabe a cada um. Por outro lado,* $\frac{3}{5}$ *representa também, neste contexto, a razão entre o número de pizas e o número de pessoas:* 3 *pizas para* 5 *pessoas equivale a* 6 *pizas para* 10 *pessoas. Uma fracção pode ainda representar a razão entre duas partes de um mesmo todo: a relação entre o número de raparigas e o número de rapazes num conjunto de* 8 *jovens numa festa, por exemplo. No*

caso de querermos saber quanto é $\frac{3}{5}$ de meio milhão de euros, por exemplo, ou $\frac{3}{5}$ de meia piza, a fracção funciona como um operador aplicado a um conjunto discreto ou contínuo" (p. 47).

Assim, destacamos dentre as dificuldades para o ensino e a aprendizagem de frações os seguintes pontos:

a) A multiplicidade de interpretações das frações;

b) concepção de unidade (reconhecimento da unidade);

c) a utilização de regras e de algoritmos;

Com certeza, esta lista não se encontra completa, mas acreditamos que os três pontos citados acima destacam de maneira objetiva as questões que nos aflingem em relação ao ensino de frações, os quais serão discorridos.

2.1 A Multiplicidade de interpretações das frações

É comum os autores fazerem menção aos múltiplos significados das frações. Em nosso trabalho, optamos tratar como múltiplas interpretações, pois entendemos que uma fração não possui diversos significados, mas interpretações distintas de acordo com o contexto a que estão atreladas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais ([11], 1998, p.66), o ensino de frações, *"deve requerer atenção especial no 3º ciclo (6º e 7º ano), partindo da exploração dos seus significados: relação parte-todo, razão, quociente, medida e operador"*. Os PCN sinalizam que as frações, dependendo do contexto em que se encontram, se apresentam como registro numérico de diversas situações, que precisam ser consideradas pelos professores no momento em que estes se propõem a ensinar.

MOREIRA & FERREIRA ([12] 2008, p.105), dizem que a literatura matemática sobre o ensino de racionais, entre os anos de 1975 e 1995, se destacou por apresentar "*um grande conjunto de trabalhos que partem de uma premissa comum: para que desenvolva uma compreensão efetiva desse sistema numérico, a criança deve ser exposta a uma diversidade de interpretações do que seja uma razão de inteiros (essas interpretações constituem os chamados subconstrutos da noção de número racional)*".

Esta lista das diferentes interpretações das frações, chamados por BEHR et al. ([2], 1983), ROMANATTO ([13], 1997) e MOREIRA & FERREIRA ([12], 2008) de subconstrutos, foi constantemente alterada ao longo dos anos. Estes educadores matemáticos, baseados nos estudos realizados por KIEREN ([14], 1980), declaram a existência de cinco subconstrutos básicos: relação parte/todo, razão, quociente, medida e operador, os mesmos citados nos PCN, sendo estes suficientes para esclarecer o sentido de número racional.

Diante de tantas situações envolvendo um único conceito, é inevitável que haja dúvida sobre o que, de fato, é esse conceito. Afinal, o que são frações? Frações representam quantidades/números, e precisam ser compreendidas como tal.

2.1.1 Medida

Quando medimos, realizamos uma comparação de uma grandeza com uma unidade de mesma espécie. Por exemplo, quando medimos um comprimento, podemos utilizar como referência o passo, o palmo ou uma unidade pré estabelecida como o metro. Se tomarmos o metro como unidade de medida, podemos dizer que a distância entre determinados dois pontos é de 50 metros, isto é, a unidade metro cabe 50 vezes dentro da distância dada.

Generalizando, quando medimos um dado comprimento AB, precisamos tomar como unidade um segmento CD verificando quantas vezes este cabe no comprimento dado, podendo chegar a algo do tipo $\text{AB} = \frac{2}{3}\,\text{CD}$.

2.1.2 Relação parte/todo

Neste caso, a unidade deve ser dividido em partes congruentes em que, na representação fracionária, o denominador representa o total de partes em que a unidade foi dividida e o numerador representa o número de partes consideradas. Podemos utilizar como unidade uma barra de chocolate ou um saco de bolas de gudes, que serão divididos em partes iguais. Dessa forma, se um todo for divido em três partes e uma destas partes for destacada, temos a representação da fração $\frac{1}{3}$.

2.1.3 Razão entre duas partes de um mesmo todo

Razão é uma relação de comparação entre duas quantidades ou medidas de mesmo tipo. Elas podem expressar comparações entre uma parte de um todo à outra parte do mesmo todo, como por exemplo, a razão entre o número de meninas e o número de meninos em uma sala de aula.

2.1.4 Quociente entre dois números inteiros

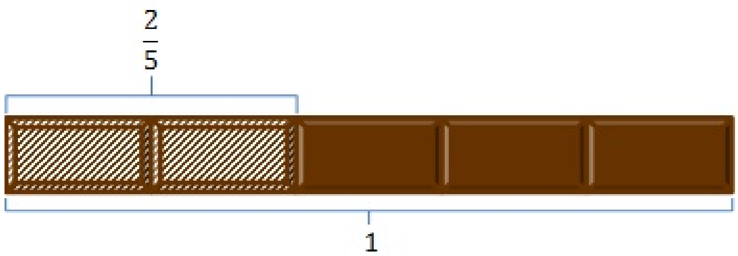
Nesta situação, um objeto, ou alguns destes, devem ser divididos de maneira igual a um grupo de receptores. Podemos tomar como exemplo três pizzas a serem distribuidas entre duas pessoas em que a quantidade de pizzas é representada no numerador e o número de pessoas no denominador. O quociente representa a relação entre a quantidade de pizzas e o número de crianças, assim como o resultado da divisão das pizzas para as crianças.

2.1.5 Operador partitivo multiplicativo

Neste caso, a fração torna-se um multiplicador de uma determinada quantidade, sendo vista como uma sucessão de operações. Por exemplo, se queremos encontrar $\frac{2}{3}$ de 30, devemos multiplicar $\frac{2}{3}$ por 30, obtendo 20 como resultado.

2.2 Concepção de unidade

No contexto do ensino de frações na escola básica, a compreensão do conceito de unidade é fundamental e é pré-requisito para o bom entendimento das frações. Para realizar a comparação que determina a medida, faz-se um dupla contagem a partir de uma unidade pertinente, que viabilize a comparação. A contagem a partir desta unidade determina os termos da fração, numerador e denominador. No entanto, observando a medida realizada, esta unidade não é, de maneira geral, associada ao número 1. Por exemplo, na divisão de uma barra de chocolate em 5 pedaços equivalentes dos quais 2 foram comidos, a fração $\frac{2}{5}$ identifica a quantidade de chocolate comida. Os números 2 e 5 são obtidos por contagem de "pedaços". Portanto, o pedaço tem o papel de sub-unidade nessa contagem. No entanto, não correspondem, no contexto geral da medida realizada, ao número 1. Nesse caso, o número 1 corresponde à barra de chocolate inteira, ou seja, ao todo.



No caso anterior, a quinta parte da barra de chocolate é usada como unidade na comparação entre parte/todo, mas é a barra de chocolate que é associada ao número 1. Para o aluno, identificar a unidade correspondente ao número 1 não é intuitivo, cabendo ao professor orientá-lo explorando este conceito em diversas situações em sala de aula.

2.3 O Uso de regras e de algorítmos

Durante o ensino de alguns tópicos da Matemática, muitas vezes, nós professores, tomamos o caminho errado ao apresentarmos a aplicação de algoritmos aos nossos alunos sem que antes estes compreendam o sentido dos passos que estão prestes a tomar. A princípio, mecanizar o procedimento pode parecer o caminho mais prático e rápido, mas nem todo atalho é viável, podendo trazer prejuízo à aprendizagem do aluno.

Quando falamos de algoritmos, estamos nos referindo a passos ordenados que, seguidos sistematicamente, conduzem para a resolução de um problema. Na Matemática, não são poucas as situações em que somos apresentados a eles. Não que sejam errados, mas em muitos casos eles são apresentados prematuramente. Como exemplo, podemos citar o algoritmo para a soma ou a subtração de frações, que geralmente é apresentado aos alunos da seguinte maneira:

a) Calcule o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores das frações a serem somadas e/ou subtraídas.

b) Divida o MMC pelo denominador de cada fração.

c) Tome o resultado de cada divisão e multiplique pelo numerador de sua respectiva fração.

d) Coloque os resultados obtidos como numeradores de uma fração cujo denominador é o MMC

e) Efetue as operações solicitadas.

Vamos aplicar esse procedimento para calcular, por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

a) MMC (2,3) = 6

b) 6 : 2 = 3 e 6 : 3 = 2

c) 3 x 1 = 3 e 2 x 1 = 2

d) $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

e) $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

A despeito de sua funcionalidade, casos como a mecanização vista acima podem ser prejudiciais aos alunos. Segundo uma pesquisa realizada por DAMICO ([15] 2007), aproximadamente metade dos alunos avaliados, quando questionados sobre o porquê de se calcular o MMC para resolver uma determinada adição de frações, não souberam responder ou deram respostas erradas ou confusas. MONTEIRO & COSTA ([6] 1996), comentando outra pesquisa semelhante, afirmam que “uma possível explicação para este fato poderá ser que a memorização da regra impeça a interiorização do conceito” (p.62).

A memorização de regras, não obstante a limitação que determina no processo de aprendizagem, acaba ganhando a preferência de alunos e professores, que buscam evitar os desafios e as dificuldades inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem. De igual modo, muitos professores, esquivando-se da árdua tarefa de mostrar o porquê, incentivam a memorização e a aplicação dos algoritmos. Conforme destaca DAMICO ([15] 2007, p.90):

> *O objetivo destas observações é ressaltar a ideia de que no processo de ensino o algoritmo seja o resultado final, a síntese da evolução das estratégias pessoais conquistadas a partir da resolução de problemas contextualizados e significativos para os alunos. Além disso, estes algoritmos não podem ficar só como sínteses de procedimentos vinculados a situações mais ou menos concretas, mas devem fazer parte de um repertório de estratégias conquistadas com o objetivo de serem reinvestidas em outras situações.*

Mais uma vez destacamos que a valorização da memorização e da aplicação de regras em detrimento da compreensão do conceito matemático pode ser um forte obstáculo à aprendizagem.

Capítulo 3

A divisão de frações

Ao introduzir o tópico divisão de frações em um livro de 6º ano do ensino fundamental, IEZZI et. Al (2009, [16], p.188) relembram que a operação de divisão pode ser usada para:

- *sabendo em quantas partes se quer dividir, descobrir quanto haverá em cada parte.*
- *sabendo quanto haverá em cada parte, descobrir em quantas partes se deve dividir.*

Na escola básica, a abordagem da operação de divisão está asociada a situações que envolvem a divisão de uma quantidade em partes iguais e para saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra, que WALLE ([17], 2009, p. 355) identifica como "Partição e Medida. Por exemplo, se eu gastei 75 reais na compra de quinze produtos de mesmo valor e desejo saber quanto custou cada produto, basta dividir o 75 em 15 partes iguais. O que dará como resultado que cada produto custou 75:15= 5 reais. Por outro lado, se eu possuo 75 reais e desejo saber quantos produtos de 5 reais poderei comprar com essa quantia, preciso saber quantas vezes o 5 reais cabe em 75. Ou seja, poderei comprar 75:5=15 produtos.

O ensino da divisão de frações no Ensino Fundamental exige a distinção dessas duas situações e a associação de ambas à operação de divisão. O algoritmo da divisão de frações certamente faz parte do aprendizado desse conteúdo e exige um criterioso processo. Não se quer que o estudo do tema seja baseado apenas no algoritmo. Acreditamos que é importante que os professores ofereçam aos estudantes várias situações problemas envolvendo as ideias de Partição e de Medida para que eles possam desenvolver suas próprias estratégias de cálculo e que fundamente a "regrinha": mantém-se a primeira fração e multiplica-se pelo inverso da segunda.

Para WALLE ([17], 2009, p.358), consonante com Lipping Ma ([18], 1999) em um estudo que investiga o conhecimento de professores chineses e americanos em relação a temas como subtração, multiplicação e divisão de frações, o algorítmo da divisão de frações pode ser um dos procedimentos pior compreendidos no currículo do ensino fundamental. É importante observar que a divisão de frações envolve a operação de divisão, certamente a mais complicada dentre as operações básicas, e frações, assunto que não fica distante em complexidade nem na revelação de dificuldades por parte os alunos. Para Ma ([19], 2009, p.135), o conhecimento inadequado do procedimento de cálculo da divisão de frações impede a criação de uma representação apropriada para ensino e que mesmo o conhecimento pedagógico não pode compensar a ignorância do conceito.

> *De maneira interessante, em um estudo muito discutido sobre professores chineses e norte-americanos, Liping Ma (1999) descobriu que a maioria dos professores chineses não só usam e ensinam esse algoritmo, mas também compreendem por que funciona. Os professores nos Estados Unidos se mostraram profundamente carentes em sua compreensão da divisão de fração.(WALLE, [17], 2009, p.358-359)*

Em muitos livros didáticos dos 6º e 7º anos, o algoritmo aparece logo após de um ou de alguns problemas, como se fosse algo trivial e intuitivo, sem respeitar uma sequência que se baseie no encadeamento das ideias associadas. Certamente, a matemática não se contenta apenas com regularidas, é necessário justificar de forma consistente os conceitos e resultados. A título de exemplo, no livro PROJETO RADIX – Matemática 7º ano, encontramos um problema que envolve dividir o conteúdo de 2 litros de suco em garrafas de $\frac{1}{2}$ litro. A explicação para a solução do problema, baseada na ideia de medida e com o suporte da representação gráfica, leva o leitor a concluir que serão necessárias 4 garrafas. Em seguida, repete-se o problema, mas agora para a quantidade de 3 litros, sem que seja apresentada uma solução, como no caso anterior. Na sequência, com apenas esses exemplos, passa-se à generalização:

> *Para calcular, de maneira prática, o resultado da divisão de um número natural por uma fração (diferente de zero), basta multiplicar esse número pelo inverso da fração. Veja o exemplo:* $5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$. *(RIBEIRO, [20], 2009, p.32)*

Já no livro Matemática e Realidade de 6º ano, a seção intitulada "Repartindo muito leite", que trata da divisão de número natural por fração, apresenta seis exemplos de divisão de 40 litros de leite, em que todos apresentam ilustrações. Os dois primeiros exemplos tratam da ideia de divisão em partes iguais, divisão do leite para 10 famílias e depois para 2 famílias. Os demais exemplos remetem à ideia de quantas vezes uma quantidade cabe em outra, a divisão do leite em recipientes de 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{5}$ de litro. Ao final das explicações, os seis exemplos de divisão ($40 : 10$, $40 : 2$, $40 : 1$, $40 : \frac{1}{2}$, $40 : \frac{1}{4}$ e $40 : \frac{4}{5}$) são novamente analisados para apresentar ao leitor algumas regularidades. Como, por exemplo, dividir 40 por 10 é o mesmo que multiplicar 40 por $\frac{1}{10}$ e dividir 40 por $\frac{4}{5}$ é o mesmo que multiplicar 40 por $\frac{5}{4}$. Comparado com o livro didático analisado anteriormente, este demonstrou o mesmo erro, pois utilizou apenas alguns exemplos citados para concluir que:

O quociente de um número natural por uma fração é igual ao produto desse número natural pelo inverso da fração. (IEZZI et. Al, [16], 2009, p.190)

Uma outra forma de tratar o algoritmo é observada no livro Matemática - 6º ano de Edwaldo Bianchini. No tópico "Quando o divisor é um número natural"é apresentado um exemplo que consiste em dividir $\frac{1}{8}$ de um doce em duas partes iguais. Através de argumentos gráficos, o texto conduz à conclusão de que $\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{16}$, em seguida, o autor busca justificar a resposta encontrada:

Consideremos a seguinte expressão: $\frac{\frac{1}{8}}{2}$. *Em seguida, vamos proceder como se ela fosse uma fração e considerar válidas as seguintes igualdades:* $\frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{16} : \frac{2}{2} = \frac{1}{16} : 1 = \frac{1}{16}$.
Dividir um número na forma de fração por um número natural é equivalente a obter uma parte de outra parte: $\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{2}$ *de* $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$. *Note que esse quociente também pode ser obtido multiplicando-se* $\frac{1}{8}$ *pelo inverso de 2:* $\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$. *Nesse exemplo, usamos a divisão para repartir* $\frac{1}{8}$ *de um inteiro (tabuleiro de doce) em* 2 *duas partes iguais.(BIANCHINI, [21], 2009, p. 201).*

Aqui também observamos problemas na abordagem do assunto. Certamente, não há suporte matemático na expressão "vamos proceder com se ela fosse uma fração". Além disso, todo processo se baseia em um único exemplo, ainda que sejam dadas duas explicações para se concluir o algoritmo. A primeira, apesar de um pouco complexa para alunos de 6º e 7º anos, é muito comum em livros que falam do assunto e pode ser generalizada da seguinte forma:

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com b e d diferentes de zero, temos que: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \dfrac{\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}{1} =$ $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Mesmo sabendo que exemplos não são suficientes para se chegar a uma regra ou a um algoritmo, os livros analisados utilizam, de maneira errônea, essa estratégia para apresentar generalizações.

Explicar o porquê da validade do algoritmo é necessário para uma aprendizagem significativa. Investigar regularidades encontradas em diversos exemplos e propor que os alunos façam suas próprias conjecturas é uma estratégia interessante para séries mais elementares. No entanto, a conjectura baseada em reconhecimento de regularidades de alguns exemplos não é suficiente para garantir que o resultado observado na regularidade valha em quaisquer exemplos. Não se deve permitir que o aluno pense que na matemática alguns exemplos são suficientes para se chegar a generalizações e que esta se resume a memorização de regras.

No contexto formal, tradicionalmente a divisão não é considerada como uma operação primitiva, mas sim um caso particular da multiplicação:

> *O conjunto dos números racionais está munido das duas operações, adição e multiplicação. Podemos definir a partir dessas operações, mais duas, a subtração e a divisão, simbolizadas por "-"e ":", respectivamente, da seguinte forma: se* $r, s \in \mathbb{Q}$*, defini-se* $r - s = r + (-s)$ *(como em Z) e, se* $s \neq 0, r : s = r \times s^{-1}$*. (Estritamente falando, a divisão não seria uma operação em* $\mathbb{Q}$*, uma vez que seu domínio não é* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$*, mas sim* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$*. (FERREIRA, [22], 2011, p.76)*

O distanciamento entre a abordagem formal e as demandas da escola básica em relação ao ensino do assunto certamente contribui para que o ensino do tema na escola básica seja centrado no algoritmo.

Capítulo 4

Sequência didática e Orientações ao professor

Com a intenção de investigar o ensino e a aprendizagem da introdução da divisão no contexto dos números racionais, elaboramos uma sequência didática em que usaremos o recurso da representação gráfica e as atividades propostas estarão divididas nos seguintes casos:

- Divisão de fração por natural
- Divisão de natural por fração
- Divisão de fração por fração (com resultados inteiros)
- Divisão de fração por fração (com resultados não inteiros).

Para o estudo de divisão de frações tomemos como pré-requisito que o aluno tenha a compreensão de divisão de naturais, do conceito de unidade, de frações equivalentes e de adição, subtração e multiplicação de frações.

O referencial de divisão dos estudantes alvo desse estudo (6º e 7º anos) se dá no âmbito dos números naturais. Assim, o objetivo da sequência didática é utilizar as ideias associadas à divisão com naturais, quantas vezes uma quantidade cabe em outra e de divisão em partes iguais, para dar sentido a essa operação no campo das frações.

Nas atividades propostas que envolvem divisão de fração por número natural, o aluno é levado a estudar a divisão como partição, repartir igualmente. E nas atividades que envolvem divisão de número natural por fração e divisão de fração por fração, usa-se a ideia de divisão como medida, ver quantas vezes uma quantidade cabe em outra. Essa maneira de tratar o assunto não é a única possível, mas a que consideramos a mais recomendada ao nível de ensino estudado. O recurso de representação gráfica é amplamente utilizado nas atividades e se justifica pelo fato de entendermos como a abordagem mais adequada para esta etapa da aprendizagem.

Aos professores que se interessarem pelo trabalho, constarão aqui orientações de como as aplicações das atividades foram pensadas para atingir os objetivos propostos.

Para melhor utilizar o tempo as atividades propostas foram divididas em quatro partes, sendo que para cada parte é aconselhado um tempo de aula de 50 minutos. Dependendo do avanço da turma, pode se usar apenas uma aula de 50 minutos para as duas primeiras partes.

Na parte 1, as atividades consistem na divisão de fração por número natural e utilizam a ideia de divisão como partição. Já as partes 2 e 3 tratam da divisão de número natural por fração e da divisão de fração por fração, respectivamente, e nelas utilizamos a divisão como medida. Há ainda a parte 4 que envolve o caso de divisão de frações em que o número de vezes que uma fração cabe na outra não é inteiro.

A sequência didática encontra-se na íntegra no Anexo 2 e é uma versão melhorada, após a aplicação em turmas do ensino fundamental, da sequência didática que consta no Anexo 1.

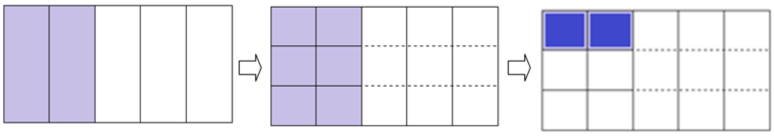
PARTE 1

Antes das atividades da parte 1 constam três situações para a discussão com a turma.

Exemplo 1: Um álbum tem espaço para 72 figurinhas distribuídas igualmente em 6 páginas. Quantas figurinhas cabem em cada página?
Exemplo 2: Três irmãos possuem uma barra de chocolate para repartir igualmente entre eles. Que fração da barra cada um comerá? Represente por meio de um desenho.
Exemplo 3: Agora, os três irmãos têm a metade de uma torta circular para repartir igualmente entre eles. Que fração da torta inteira caberá a cada um? Represente por meio de uma figura.

Com o primeiro, deseja-se verificar se os alunos identificam a ideia de divisão em partes iguais para operar com números naturais. No segundo, de maneira elementar, começamos a usar as frações através de um problema cuja resolução consiste em dividir a unidade em três partes iguais, obtendo como resultado uma fração da unidade. Inicia-se também o apelo à representação gráfica dos resultados. Já no terceiro exemplo, os alunos se depararão com uma situação que consiste em dividir uma fração em partes iguais, dividir metade de uma torta para três pessoas. Cabe ao professor direcionar a atenção do aluno para a unidade (nesse caso, a torta inteira) e não apenas para fração dada, muitos alunos poderão responder $\frac{1}{3}$ de meia torta em vez de $\frac{1}{6}$ da torta inteira.

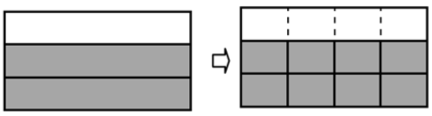
Atividade 1. Um estudante usou o esquema abaixo para calcular $\frac{2}{5} : 3$.



Qual foi o resultado obtido?

Na primeira atividade é sugerido ao aluno, através de um esquema, um procedimento para calcular $\frac{2}{5} : 3$. Primeiro, se identifica a fração $\frac{2}{5}$ usando um retângulo como unidade. Depois, a parte correspondente a fração é dividida em três partes congruentes. E, na última figura do esquema, fica destacado o resultado obtido. O foco dessa atividade é que o aluno observe o raciocínio utilizado e, principalmente, o resultado do cálculo em relação à unidade, $\frac{2}{15}$ do retângulo. Se aparecer $\frac{1}{3}$ como resposta, o professor poderá usar a analogia do retângulo como uma barra de chocolate. Pois se temos três pessoas e cada uma tem $\frac{1}{3}$ da barra, elas juntas terão uma barra inteira e não apenas $\frac{2}{5}$.

Atividade 2. Ao efetuar uma divisão, um aluno fez as seguintes figuras. Ele acertou a resposta.



Que divisão ele pode ter feito? E que resultado ele encontrou? Represente.

A atividade 2 é parecida com a anterior, mas nela consta apenas um esquema com duas figuras. É pedido que o aluno identifique a divisão sugerida e também o resultado do cálculo. Na primeira figura, espera-se que o aluno identifique a fração $\frac{2}{3}$. Na ilustração seguinte, a fração está dividida em quatro partes congruentes. Nesse momento, é esperado que aluno visualize a divisão $\frac{2}{3} : 4$. Talvez, a principal dificuldade a ser observada nessa tarefa seja a interpretação do resultado em relação à unidade, encontrando,assim, $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12}$.

Atividade 3. Efetue as divisões a seguir. Justificando graficamente suas respostas.		
a) $\frac{1}{3} : 2 =$	c) $\frac{2}{5} : 4 =$	e) $\frac{1}{2} : 6 =$
b) $\frac{1}{4} : 3 =$	d) $\frac{3}{10} : 3 =$	

Espera-se que os esquemas desenvolvidos nas atividades 1 e 2 sirvam de inspiração para a realização da terceira atividade proposta. Dando prosseguimento, os alunos irão se deparar com cálculos ($\frac{1}{3} : 2$, $\frac{1}{4} : 3$, $\frac{2}{5} : 4$, $\frac{3}{10} : 3$ e $\frac{1}{2} : 6$) desacompanhados de figuras. É esperado que por meio de argumentos gráficos os alunos consigam obter as respostas corretas.

Essas atividades têm como finalidade introduzir o tema. Mas em um segundo momento, o professor pode, e deve, encaminhar o pensamento da turma para a generalização do cálculo envolvendo divisão de fração por número natural a partir da multiplicação de frações. Assim, na atividade 1 dividir $\frac{2}{5}$ por 3 é o mesmo que calcular a terça parte de $\frac{2}{5}$, ou seja, $\frac{2}{5} : 3 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1 \times 2}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$. Na ativdade 2, é calculado a quarta parte de $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

De forma geral, quando dividimos a fração $\frac{a}{b}$, com a e b naturais e b não nulo, pelo número natural n, queremos achar a n-ésima parte de $\frac{a}{b}$. Concluímos, que $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \times \frac{1}{n} = \frac{a}{b \times n}$.

PARTE 2

Assim como a parte 1, a segunda sequência de atividades é introduzida com três exemplos a serem discutidos com a classe.

Exemplo 1: Em um álbum cabem 85 figurinhas. Sabendo que em cada página cabem 5 figurinhas, quantas páginas há no álbum?

O primeiro exemplo, envolvendo apenas números naturais, é para perceber se os alunos associam a ideia de "quantas vezes cabe" à divisão.

Exemplo 2: Um comerciante possui 7 quilogramas de açúcar que serão divididas em embalagens de $\frac{1}{2}$ kg. Quantas embalagens ele terá para vender?

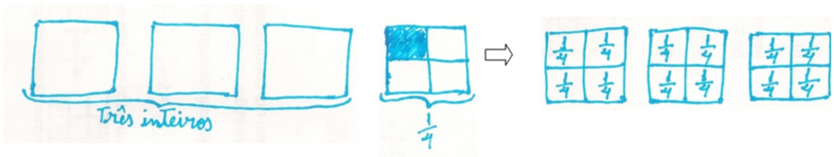
A divisão de natural por fração é explicitamente trabalhada no exemplo 2, que pergunta quantas embalagens de $\frac{1}{2}$ kg é possível encher com 7 kg. A solução desse problema fica determinada pela divisão, ou seja, pelo cálculo de quantas vezes $\frac{1}{2}$ kg "cabe"em 7 kg. É claro que não faz sentido dividir em $\frac{1}{2}$ partes iguais. A interpretação adequada nesse contexto é a da divisão como medida. Os alunos devem ser levados a entender que $\frac{1}{2}$ kg cabe 14 vezes em 7 kg, ou seja, $7 : \frac{1}{2} = 14$.

Exemplo 3: Em uma sala de leitura há 4 estantes iguais completamente cheias de livros. Essas estantes serão substituídas por outras que possuem $\frac{1}{3}$ da capacidade das atuais. Quantas estantes novas serão necessárias para acomodar todos os livros guardados nas estantes antigas?

O terceiro exemplo consiste em uma situação mais complexa, tem-se 4 estantes completamente cheias de livros a serem substituídas por outras que possuem apenas um terço da capacidade das atuais. Espera-se que os alunos percebam que para cada estante serão necessárias outras 3 de capacidade menor, concluindo que serão necessárias um total de 12 estantes novas, ou seja, que $\frac{1}{3}$ cabe 12 vezes em 4.

Atividade 1: Um aluno utilizou o esquema abaixo para resolver o seguinte problema: Três quilogramas de café serão colocados em embalagens de $\frac{1}{4}$kg. Quantas embalagens serão necessárias?

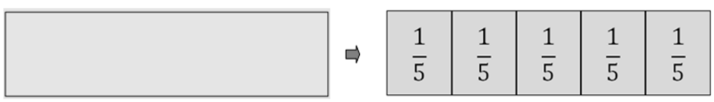
“Para resolver o problema devo dividir 3 por $\frac{1}{4}$”:



Sabendo que ele acertou, qual foi o resultado encontrado? Explique o que você entendeu sobre a forma que o aluno pensou.

A primeira atividade é semelhante ao exemplo 2 que sugere uma estratégia de resolução ao problema de dividir 3 quilogramas de café em embalagens de $\frac{1}{4}$ de quilograma. O esquema gráfico pretende que o aluno conclua, e justifique com suas palavras, que $3 : \frac{1}{4} = 12$, pois $\frac{1}{4}$ cabe 12 vezes em 3.

Atividade 2. Observando a figura abaixo, responda as questões a seguir. Justifique suas respostas.



a) Qual o resultado de $1 : \frac{1}{5}$?

b) Qual o resultado de $2 : \frac{1}{5}$?

c) Qual o resultado de $2 : \frac{2}{5}$?

d) Qual o resultado de $4 : \frac{1}{5}$?

Na atividade 2, dividida em quatro itens, é sugerida uma forma de encontrar a resposta da divisão de 1 por $\frac{1}{5}$ (item a), através da representação gráfica. Ou seja, o aluno verá que $1 : \frac{1}{5} = 5$, pois $\frac{1}{5}$ cabe 5 vezes na unidade. O primeiro item é o principal, pois se espera que o estudante a partir dele obtenha a resposta para os demais. Ou seja, se $\frac{1}{5}$ cabe 5 vezes em 1 unidade, caberá 10 vezes em 2 e 20 vezes em 4 e a partir disso concluir que $2 : \frac{1}{5} = 10$, no item b, e que $4 : \frac{1}{5} = 20$, no item d. No item c, um pouco diferente dos demais, o professor deve sugerir que os alunos façam esquemas gráficos para possibilitar a visualização de que $\frac{2}{5}$ cabe 5 vezes em duas unidades e, portanto, $2 : \frac{2}{5} = 5$.

Atividade 3. Efetue as divisões a seguir. Justifique graficamente suas respostas.

a) $2 : \frac{1}{3} =$

b) $2 : \frac{1}{7} =$

c) $4 : \frac{2}{5} =$

d) $6 : \frac{3}{4} =$

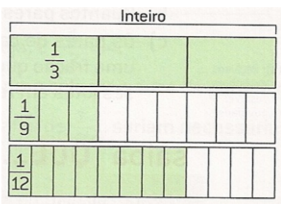
e) $3 : \frac{3}{2} =$

É esperado que, para realizar a terceira atividade, o estudante utilize os itens anteriores como inspiração.

De forma geral, utilizamos frações equivalentes para generalizar o cálculo da divisão de um número natural por fração. Na divisão $n : \frac{a}{b}$, em que n, a e b são naturais e b não nulo, temos: $n : \frac{a}{b} = \frac{nb}{b} : \frac{a}{b} = nb : a = \frac{nb}{a}$.

PARTE 3

Atividade 1 (*). Observe as imagens e responda as questões:



a) Quantas vezes $\frac{1}{9}$ cabem em $\frac{1}{3}$?

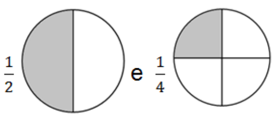
c) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabem em $\frac{2}{3}$?

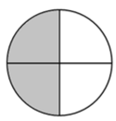
b) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabem em $\frac{1}{3}$?

(*)(RIBEIRO, [20], 2009, p.32)

Na atividade 1 trabalha-se visualmente a noção de divisão como medida. Na figura que ilustra a atividade, observamos três retângulos, um abaixo do outro, que representam uma unidade, cada um. O primeiro dividido em terços, o do meio, em nonos, e o último em doze partes congruentes, deixando visual e explicitamente as seguintes equivalências: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ e $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$. Espera-se que o aluno, ainda que de maneira intuitiva, tenha a percepção e identifique que $\frac{1}{9}$ cabe três vezes em $\frac{1}{3}$, que $\frac{1}{12}$ cabe quatro vezes em $\frac{1}{3}$ e que $\frac{1}{12}$ cabe oito vezes em $\frac{2}{3}$. Essas ideias serão utilizadas nas atividades seguintes.

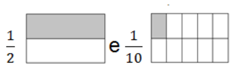
Atividade 2. Observe as figuras:

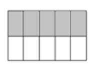




A partir de frações equivalentes, constatamos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Portanto, $\frac{1}{4}$ cabe duas vezes em $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ dividido por 2 é igual a $\frac{1}{4}$.
Ou seja, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{2}{4} : \frac{1}{4} = 2$ e $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$.
Da mesma forma, temos:





A partir de frações equivalentes, observamos que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$.
Portanto, $\frac{1}{10}$ cabe cinco vezes em $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ e $\frac{1}{2}$ dividido por 5 é igual a $\frac{1}{10}$.

Ou seja, $\frac{1}{2} : \frac{1}{10} = \frac{5}{10} : \frac{1}{10} = 5$ e $\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$.
Agora, calcule (utilize argumentos gráficos para justificar sua resposta):

a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} =$

b) $\frac{1}{3} : 2 =$

c) $\frac{7}{2} : \frac{1}{2} =$

d) $\frac{7}{2} : 7 =$

e) $\frac{2}{5} : \frac{2}{10} =$

f) $\frac{1}{4} : \frac{2}{8} =$

g) $\frac{2}{3} : \frac{1}{9} =$

h) $\frac{2}{3} : 6 =$

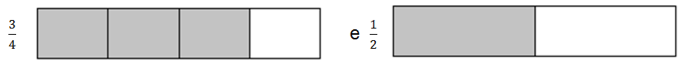
A atividade 2 apresenta dois exemplos para serem discutidos com a turma. No primeiro exemplo, observa-se a representação gráfica das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. Utiliza-se o recurso de redução ao mesmo denominador para melhor compará-las. Assim, passamos a ter $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. A partir da representação gráfica é possível perceber que $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{2}{4} : \frac{1}{4} = 2$, pois $\frac{1}{4}$ cabe duas vezes em $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e, também, que $\frac{1}{2} : 2 = \frac{2}{4} : 2 = \frac{1}{4}$. No outro exemplo, utiliza-se raciocínio análogo para mostrar que $\frac{1}{2} : \frac{1}{10} = \frac{5}{10} : \frac{1}{10} = 5$ e que $\frac{1}{2} : 5 = \frac{5}{10} : 5 = \frac{1}{10}$. Com base nesses exemplos, espera-se que os alunos obtenham graficamente as respostas para os seguintes cálculos: $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} : 2$, $\frac{7}{2} : \frac{1}{2}$, $\frac{7}{2} : 7$, $\frac{2}{5} : \frac{2}{10}$, $\frac{1}{4} : \frac{2}{8}$, $\frac{2}{3} : \frac{1}{9}$ e $\frac{2}{3} : 6$.

Novamente utilizaremos as frações equivalentes para generalizar o cálculo envolvendo a divisão entre duas frações. Na divisão $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, com a, b, c e d naturais e b e d não nulos, temos: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$. Como as frações $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$ possuem o mesmo denominador, determinar quantas vezes $\frac{bc}{bd}$ cabe em $\frac{ad}{bd}$ é o mesmo que determinar quantas vezes bc cabe em ad. Assim, $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$. Na parte 3 foram analisadas situações em que os resultados das divisões envolvendo frações são números inteiros e na parte 4 foram analisadas situações em que os resultados não são números inteiros, são frações.

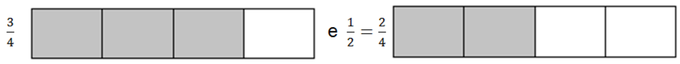
PARTE 4

Observe: (i) $\dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{2} =$

Vamos representar graficamente as frações acima:



Se representarmos as duas frações com um mesmo denominador,

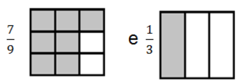


podemos perceber que em $\dfrac{3}{4}$ cabe uma vez $\dfrac{1}{2}$ mais a metade de $\dfrac{1}{2}$ (ou seja, $\dfrac{1}{4}$).

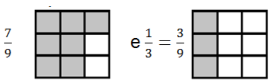
Então, $\dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{4} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

(ii) $\dfrac{7}{9} : \dfrac{1}{3} =$

Vamos representar graficamente as frações acima:



Se representarmos as duas frações com um mesmo denominador,



podemos perceber que em $\dfrac{7}{9}$ cabe duas vezes $\dfrac{1}{3}$ mais a terça parte de $\dfrac{1}{3}$ (ou seja, $\dfrac{1}{9}$).

Então, $\dfrac{7}{9} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{9} : \dfrac{3}{9} = 2 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{6}{3} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{7}{3}$.

Efetue as divisões a seguir. Justifique graficamente suas respostas:

Dica: se julgar necessário, encontre frações equivalentes as frações dadas que possuam um denominador comum.

a) $\dfrac{7}{9} : \dfrac{2}{9} =$

c) $\dfrac{5}{4} : \dfrac{2}{3} =$

e) $\dfrac{7}{2} : \dfrac{2}{6} =$

b) $\dfrac{5}{4} : \dfrac{1}{2} =$

d) $\dfrac{5}{3} : \dfrac{1}{2} =$

Para um melhor aproveitamento da atividade que compõe a última etapa, é aconselhável que os alunos estejam familiarizados com exercícios semelhantes aos das partes 1, 2 e 3 e que compreendam a equivalência e a adição de frações.

A parte 4 envolve a divisão de frações em que os resultados não são inteiros. Para trabalhar esse conceito usaremos a ideia de quantas vezes uma unidade cabe em outra.

Inicia-se a atividade 1 por meio de dois exemplos que o professor deve discutir com a turma antes de propor as atividades. No exemplo (i), seguimos um raciocínio acompanhado da representação gráfica para calcular $\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. O primeiro passo sugerido é a representação gráfica das duas frações, em que é esperado que o aluno com a ajuda do professor, caso seja necessária, perceba a equivalência $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Então, a partir das representações gráficas de $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ é concluir que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ cabe uma vez inteira mais a metade em $\frac{3}{4}$, sendo $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ o resultado dessa divisão.

Para o segundo exemplo segue-se o mesmo raciocínio. Para dividir $\frac{7}{9}$ por $\frac{1}{3}$, faz-se a representação gráfica de ambas e espera-se que os estudantes percebam a equivalência $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$. Depois, verifica-se que em $\frac{7}{9}$ cabe duas vezes inteiras mais a terça parte de $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$. Então, $\frac{7}{9} : \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Espera-se que os alunos sigam os exemplos como guia para calcular $\frac{7}{9} : \frac{2}{9}$, $\frac{5}{4} : \frac{1}{2}$, $\frac{5}{4} : \frac{2}{3}$, $\frac{5}{3} : \frac{1}{2}$ e $\frac{7}{2} : \frac{2}{6}$.

Vale ressaltar que espera-se que o professor explore bastante as atividades sugeridas e que a partir delas formule situações-problema diversas.

Capítulo 5

Análise da aplicação das atividades

A sequência didática contida no anexo 1 foi aplicada no dia 28 de janeiro de 2013 em duas turmas do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAP-UFRJ). Uma de 6º ano e outra de 7º com 30 alunos cada.A turma de 6º ano não tinha estudado frações durante o ano letivo. Os conhecimentos que os alunos tinham do tema eram oriundos do primeiro segmento do ensino fundamental. Já na turma de 7º ano, tinha ocorrido o estudo de frações durante o ano letivo. Em relação ao tema Divisão de frações, eram duas realidades bem distintas.Para a aplicação da atividade foram usadas duas aulas de 50 minutos, que se mostraram insuficientes para a realização todas as tarefas propostas.

As duas turmas demonstraram participação e interesse. Na primeira turma (6º ano), um obstáculo inicialmente encontrado foi a falta de familiaridade que os alunos demonstraram com as frações e em relação à escrita fracionária. E na outra turma, como os alunos se sentiram mais à vontade com o tema, alguns ficaram dispersos em relação às atividades, não obedeceram a ordenação proposta. Os fatores citados contribuiram para uma análise das atividades, indicando adequação em relaçào ao tempo para a execução e divisão das atividades em blocos, para centrar a atenção do aluno.

Análise das respostas dos estudantes

Todos os alunos fizeram o exemplo 1, sem demostrar dificuldade. Mostraram, também, entendimento da ideia de divisão em partes iguais.

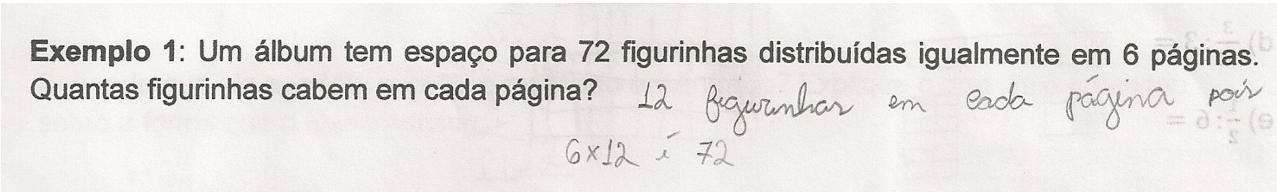
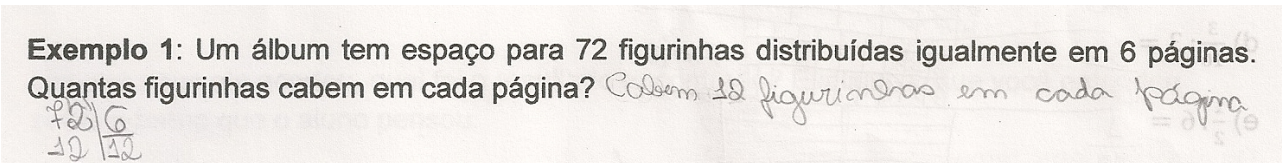

Exemplo 1: Um álbum tem espaço para 72 figurinhas distribuídas igualmente em 6 páginas. Quantas figurinhas cabem em cada página? 12 figurinhas em cada página pois 6x12 é 72

Figura 5.1: Resposta de um aluno do 6º ano


Exemplo 1: Um álbum tem espaço para 72 figurinhas distribuídas igualmente em 6 páginas. Quantas figurinhas cabem em cada página? Cabem 12 figurinhas em cada página

72|6
12 |12

Figura 5.2: Resposta de um aluno do 7º ano

Os alunos do 6º ano sentiram falta de um número a ser dividido no exemplo 2 (que consistia em dividir um barra de chocolate para três pessoas). Alguns chegaram a perguntar quantos pedaços tinha a barra de chocolate. A sugestão dada à turma foi que eles resolvessem o problema por meio de um desenho, como é ilustrado na figura 5.4. Mesmo com dificuldades em relação à escrita fracionária, a maioria conseguiu resolver o problema. O 7º ano, em geral, não demonstrou dificuldade nessa atividade.

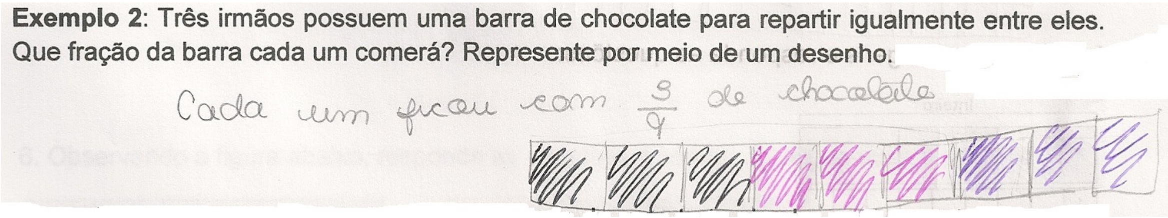


Figura 5.3: Resposta de um aluno do 7º ano

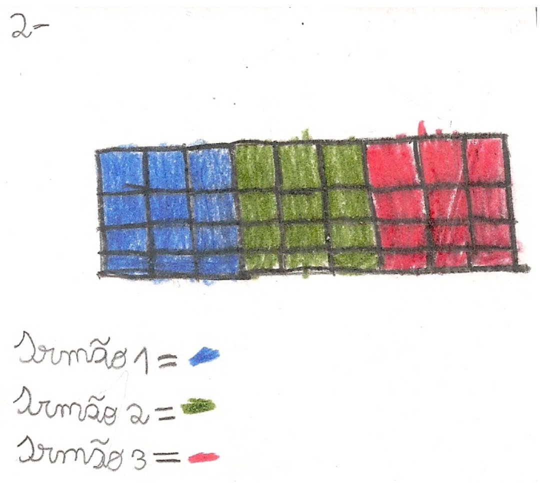


Figura 5.4: Resposta de um aluno do 6º ano

Ao analisar o exemplo 3, foi comum que alguns alunos de ambas as turmas respondessem $\frac{1}{3}$. Mas quando a atividade foi aberta para discussão com todos, os estudantes entenderam que a resposta deveria ser dada em relação à torta toda, sendo $\frac{1}{6}$ a resposta correta. Ou seja, a dúvida apresentada não era em relação à divisão, mas sim, sobre o conceito de unidade.

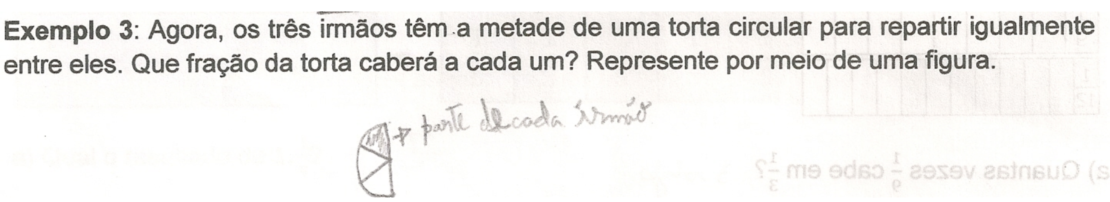


Figura 5.5: Resposta de um aluno do 6º ano

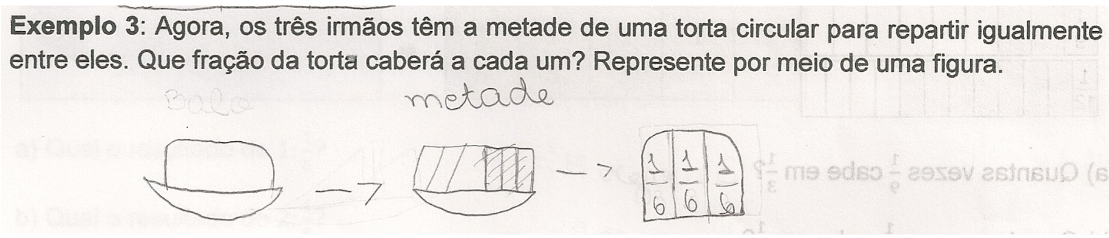


Figura 5.6: Resposta de um aluno do 7º ano

Na atividade proposta 1, a maior parte dos alunos entendeu o procedimento gráfico usado para calcular $\dfrac{2}{5} : 3$. Com a discussão do exemplo 3 e, também, pelo fato de o resultado obtido estar destacado pela figura, os estudantes não tiveram dificuldades para interpetar a resposta em relação à unidade, obtendo a resposta correta $\dfrac{2}{15}$.

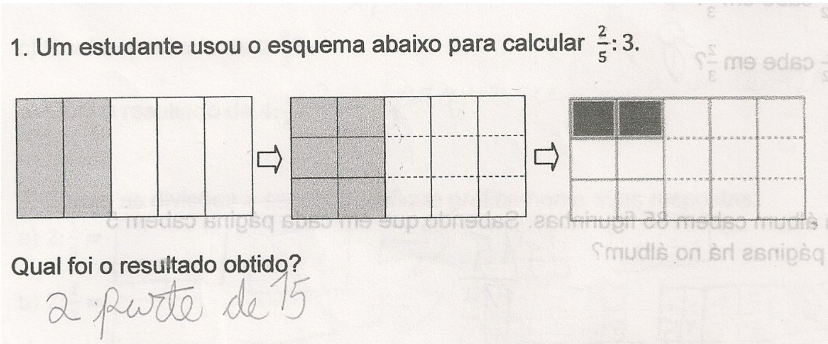


Figura 5.7: Resposta de um aluno do 6º ano

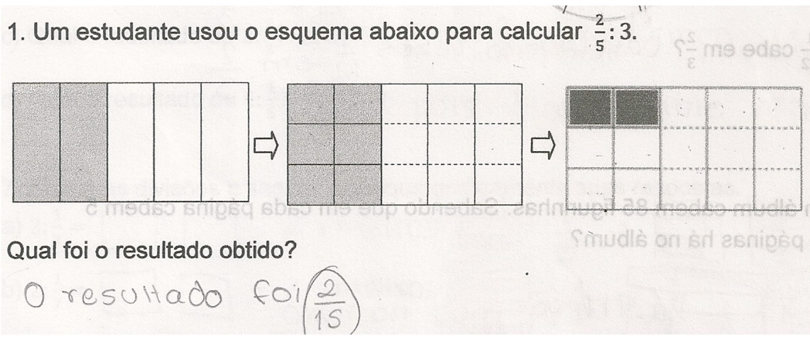


Figura 5.8: Resposta de um aluno do 7º ano

Em geral, os alunos entenderam o exemplo 3 e a atividade 1 e conseguiram usá-los como referência na realização da atividade 2.

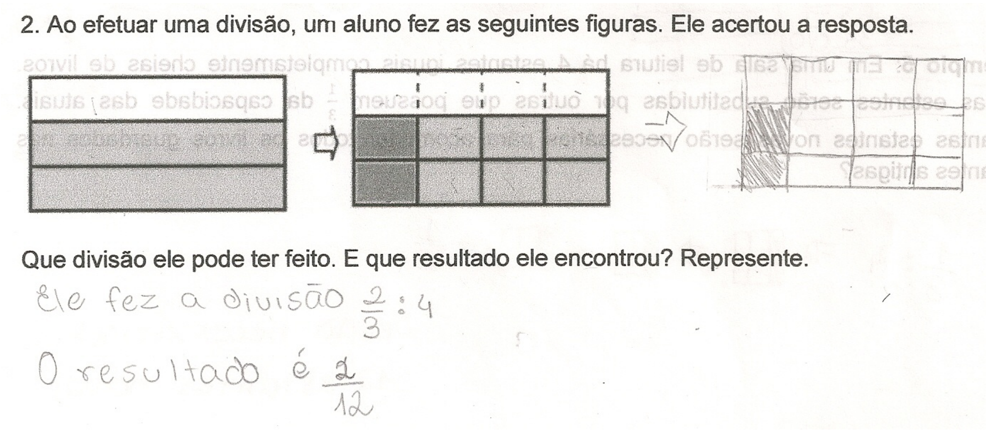


Figura 5.9: Resposta de um aluno do 6º ano

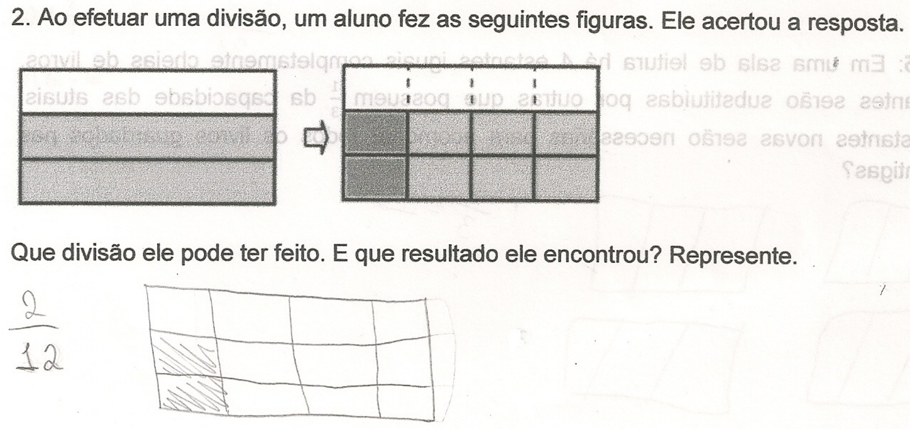


Figura 5.10: Resposta de um aluno do 7º ano

Na atividade 3, alguns alunos se sentiram inseguros e pediram ajuda. O conselho dado, e seguido pela maioria dos estudantes, foi que utilizassem as atividades 1 e 2 como referência.

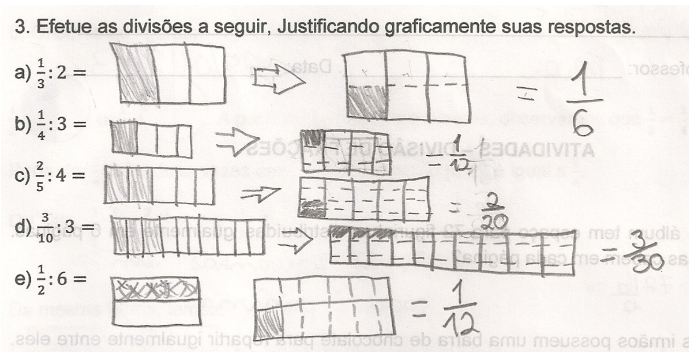
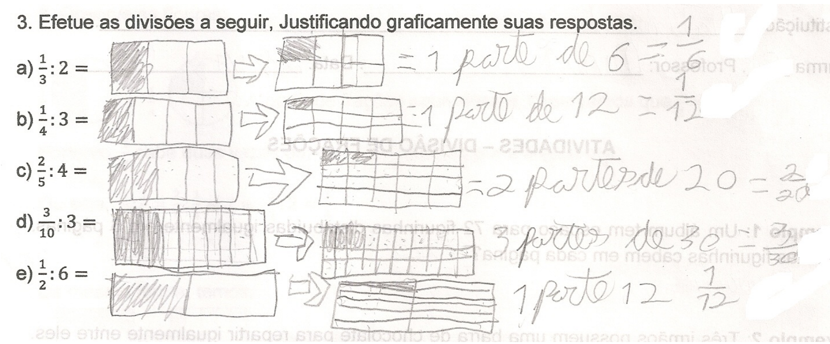


Figura 5.11: Resposta de um aluno do 6º ano


3. Efetue as divisões a seguir, Justificando graficamente suas respostas.

a) $\frac{1}{3}:2 =$ $= 1$ parte de $6 = \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}:3 =$ $= 1$ parte de $12 = \frac{1}{12}$

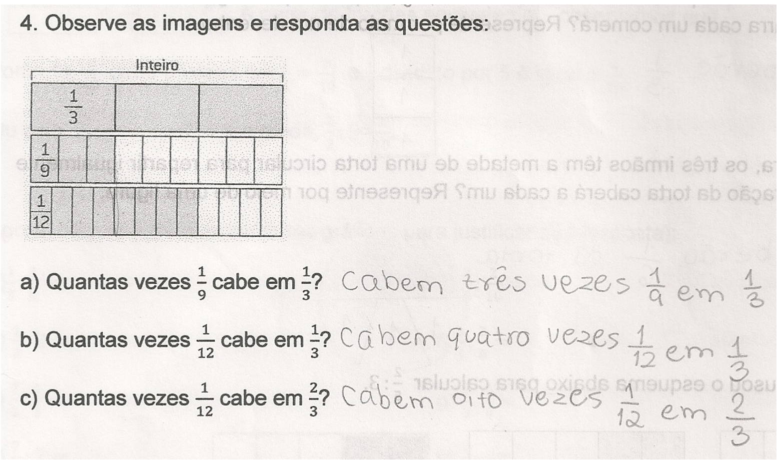
c) $\frac{2}{5}:4 =$ $= 2$ partes de $20 = \frac{2}{20}$

d) $\frac{3}{10}:3 =$ 3 partes de $30 = \frac{3}{30}$

e) $\frac{1}{2}:6 =$ 1 parte 12 $\frac{1}{12}$

Figura 5.12: Resposta de um aluno do 7º ano

Não foram observadas dúvidas em relação a atividade 4. O apelo visual foi suficiente para que todos conseguissem respondê-la.

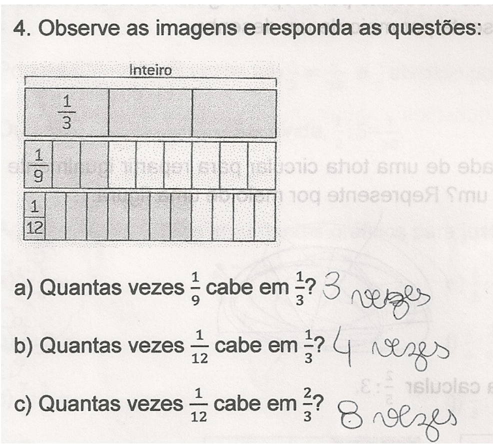

4. Observe as imagens e responda as questões:

a) Quantas vezes $\frac{1}{9}$ cabe em $\frac{1}{3}$? Cabem três vezes $\frac{1}{9}$ em $\frac{1}{3}$

b) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{1}{3}$? Cabem quatro vezes $\frac{1}{12}$ em $\frac{1}{3}$

c) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{2}{3}$? Cabem oito vezes $\frac{1}{12}$ em $\frac{2}{3}$

Figura 5.13: Resposta de um aluno do 6º ano


4. Observe as imagens e responda as questões:

a) Quantas vezes $\frac{1}{9}$ cabe em $\frac{1}{3}$? 3 vezes

b) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{1}{3}$? 4 vezes

c) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabe em $\frac{2}{3}$? 8 vezes

Figura 5.14: Resposta de um aluno do 7º ano

Os estudantes, também, não demonstraram dificuldades para responder o exemplo 4, que trata apenas da divisão de números naturais. Durante a discussão da atividade, mostraram compreender a ideia de "quantas vezes cabe"associada à divisão.

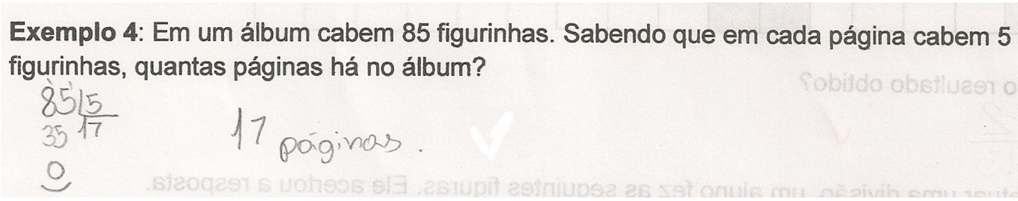


Figura 5.15: Resposta de um aluno do 6º ano

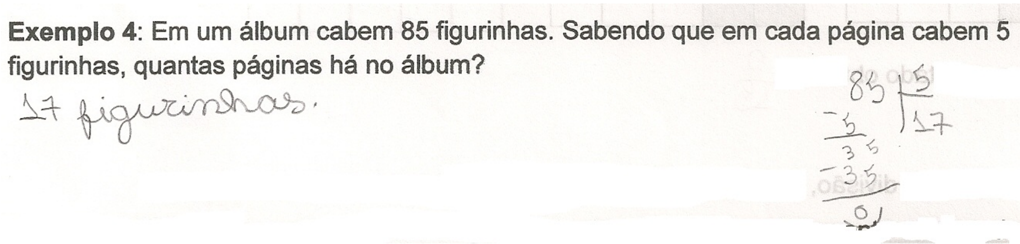


Figura 5.16: Resposta de um aluno do 7º ano

No exemplo 5, os alunos do 7º ano mostraram bom entendimento. Já os alunos do 6º ano, mesmo com dificuldade, observaram que para cada estante velha seriam necessárias 3 estantes novas, assim, para substituir as 4 estantes seriam necessárias $4 \times 3 = 12$ estantes novas.

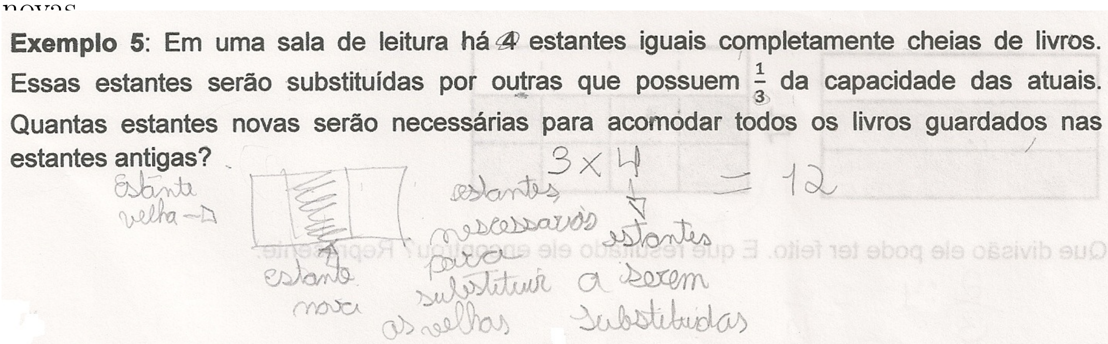


Figura 5.17: Resposta de um aluno de 6º ano

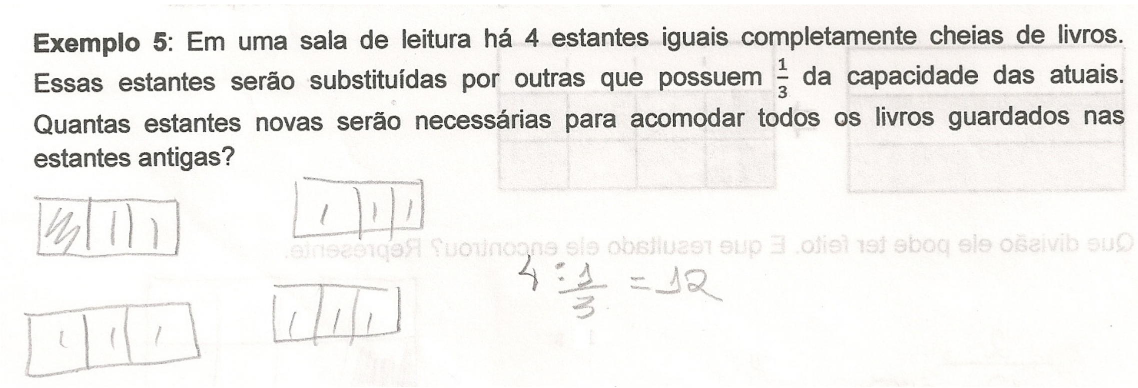


Figura 5.18: Resposta de um aluno de 7º ano

A maioria dos estudantes mostraram entendimento do raciocínio apresentado na atividade 5 e a responderam corretamente.

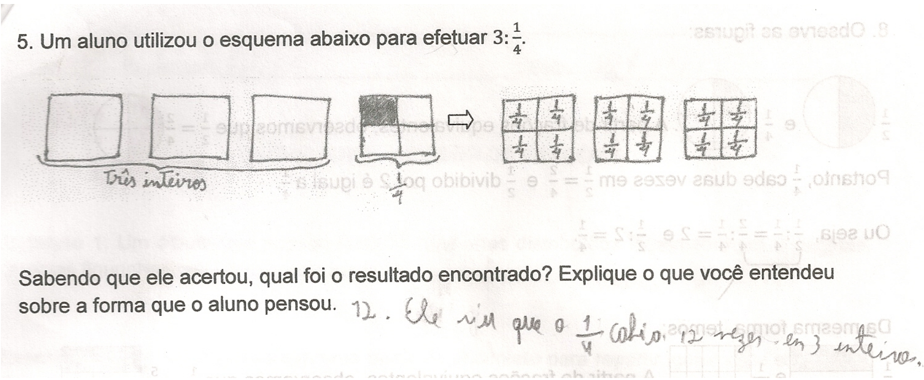


Figura 5.19: Resposta de um aluno de 6º ano

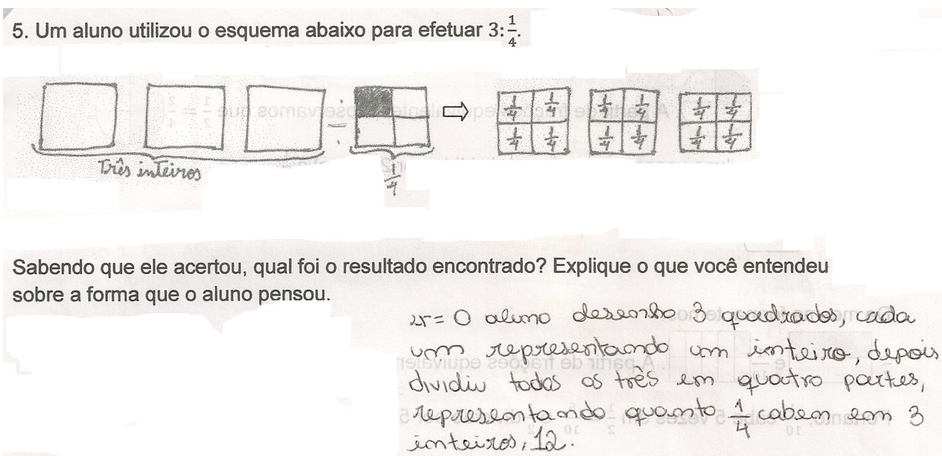
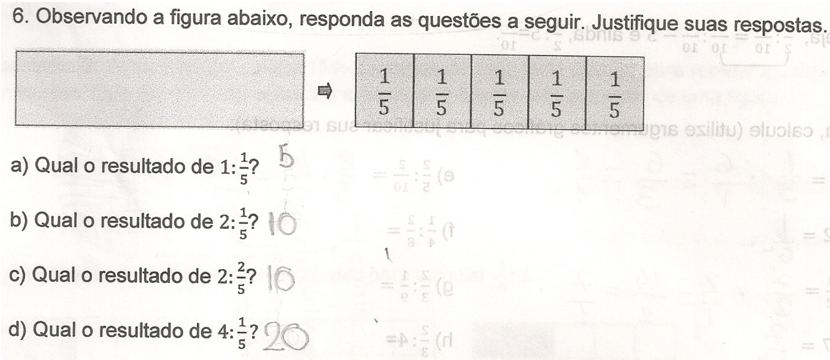


Figura 5.20: Resposta de um aluno de 7º ano

Na atividade 6 foi sugerido que os alunos observassem a figura e que usassem o raciocínio da atividade anterior. As turmas compreenderam bem. As dificuldades se concentraram no item c), que se diferenciava dos demais por possuir o numerador diferente de 1.


6. Observando a figura abaixo, responda as questões a seguir. Justifique suas respostas.

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$

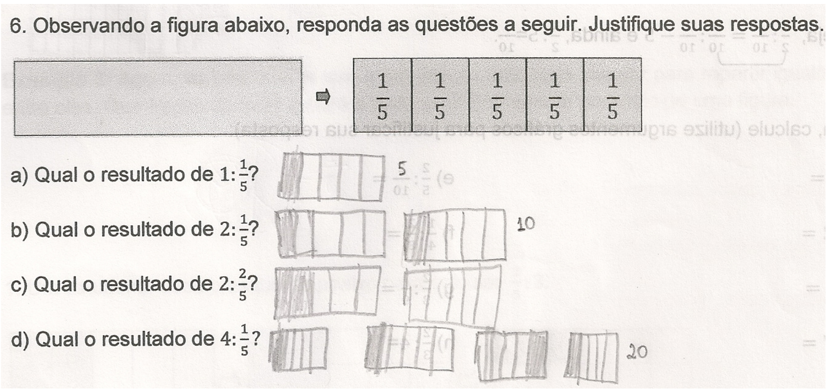
a) Qual o resultado de $1:\frac{1}{5}$? 5

b) Qual o resultado de $2:\frac{1}{5}$? 10

c) Qual o resultado de $2:\frac{2}{5}$? 10

d) Qual o resultado de $4:\frac{1}{5}$? 20

Figura 5.21: Resposta de um aluno de 6º ano


6. Observando a figura abaixo, responda as questões a seguir. Justifique suas respostas.

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$

a) Qual o resultado de $1:\frac{1}{5}$? 5

b) Qual o resultado de $2:\frac{1}{5}$? 10

c) Qual o resultado de $2:\frac{2}{5}$?

d) Qual o resultado de $4:\frac{1}{5}$? 20

Figura 5.22: Resposta de um aluno de 7º ano

Devido ao tempo, que foi insuficiente, poucos alunos conseguiram concluir as atividades 7 e 8.

Em relação aos itens a) e b) da atividade 7, os alunos não demostraram dificuldade. As dúvidas, principalmente dos alunos do 6ºano, se concentraram nos itens com numerador diferente de 1, como é ilustrado na figura 5.23 em que o aluno não conseguiu desenvolver os itens c),d) e e). Pois as frações com numerador igual a um cabem um número inteiro de vezes em uma unidade (esse número é igual ao denominador da fração), sendo a resposta mais fácil de ser identificada. Já as frações com numeradores diferentes de um, exigem um raciocínio um pouco mais complexo. Para dividir graficamente $2 : \frac{2}{3}$, ou seja, verificar quantas vezes $\frac{2}{3}$ cabe em 2, observamos que em cada unidade o $\frac{2}{3}$ cabe uma vez e sobra $\frac{1}{3}$. Como temos duas unidades, sobram ao todo $\frac{2}{3}$, concluindo que $\frac{2}{3}$ cabe 3 vezes em 2, ou seja, $2 : \frac{2}{3}$.

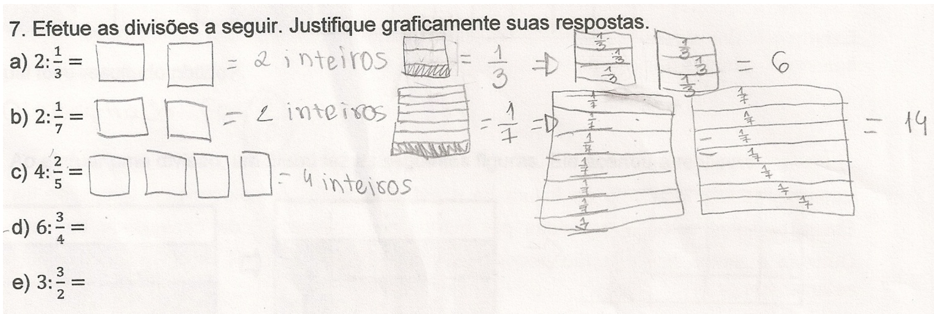


Figura 5.23: Resposta de um aluno de 6º ano

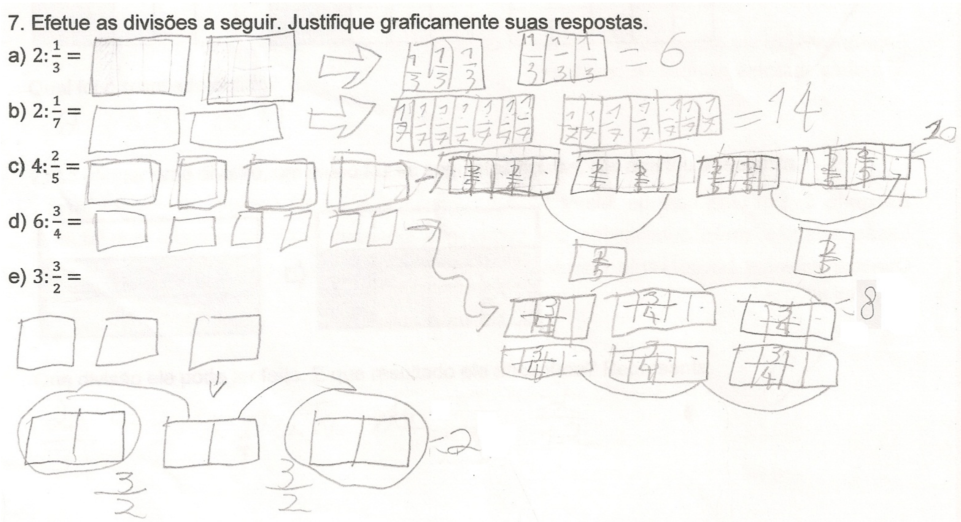


Figura 5.24: Resposta de um aluno de 7º ano

A atividade 8 foi feita por poucos do 7º ano. Os alunos que a responderam, usaram o algoritmo da divisão de frações. Mesmo assim, alguns tentaram obter a representação gráfica dos resultados. Na figura 5.25 temos o exemplo de um aluno que utilizou o algoritmo, mas que também representou graficamente os resultados obtidos. E na figura 5.26, um aluno que utilizou apenas o algoritmo.

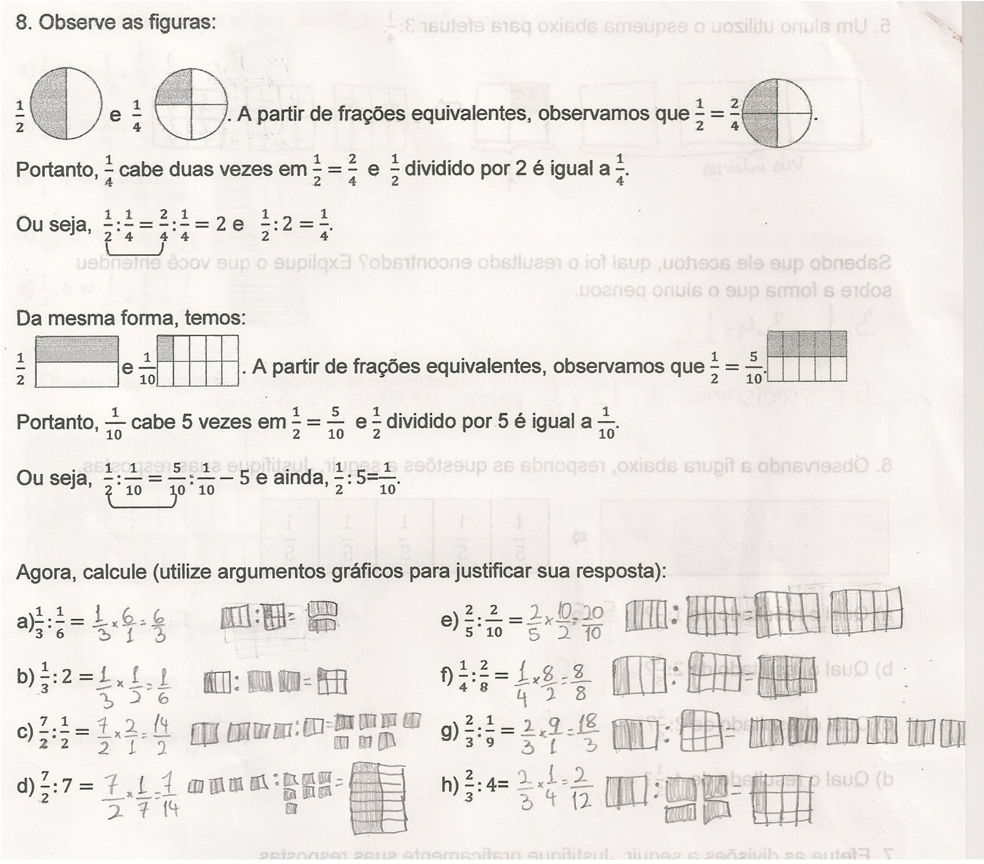


Figura 5.25: Resposta de um aluno de 7º ano

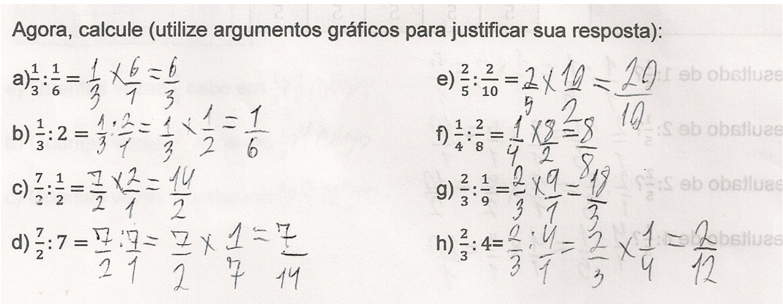


Figura 5.26: Resposta de um aluno de 7º ano

A última etapa da sequência didática, denominada atividade extra, não foi aplicada por falta de tempo.

Em geral, a atividade mostrou-se adequada para atingir os objetivos propostos. A representação gráfica foi bastante utilizada pelos estudantes na obtenção das respostas. E mesmo alguns alunos que não estavam familiarizados com as frações, conseguiram desenvolver as atividades propostas.

Considerações finais

Por ser elementar, frações e cálculos envolvendo frações estão presentes em toda a matemática da escola básica. O aprendizado desse conteúdo é imprescindível para os estudantes desse nível de ensino. Neste trabalho, buscamos uma reflexão sobre as frações e o seu ensino. Através dessa pesquisa e da nossa prática docente, percebemos que o assunto não é fácil de ser ensinado e nem de ser aprendido, mesmo sendo um conteúdo que compõe a grade curricular do ensino fundamental. Não se trata de um problema local ou, até mesmo, nacional. Pesquisadores de outros países também se dedicam ao tema.

As frações podem ser interpretadas de diferentes maneiras, o que torna o assunto bastante complexo para os estudantes do ensino fundamental. Dependendo do contexto em que está inserida, pode se referir a relação parte-todo ou a razão entre dois números. Compreender as frações é fundamental para a consolidação dos números racionais, que, por sua vez, é um dos conteúdos matemáticos mais importantes da educação básica.

O conteúdo Divisão de frações foi eleito para delimitar esse estudo. Vimos que o ensino desse tema é, muitas vezes, reduzido à memorização de regras. Os três livros didáticos, brevemente analisados nesse trabalho, tratam de forma inadequada a divisão de frações. Um deles, se utiliza de um único exemplo para se chegar a um algoritmo, o que é matematicamente inaceitável.

Visando investigar o ensino de frações, elaboramos e aplicamos uma sequência didática sobre divisão de frações. Nosso objetivo foi utilizar as ideias, já conhecidas, relacionadas à divisão (divisão em partes iguais e de quantas vezes uma quantidade cabe em outra), aliadas a outros conteúdos, como a soma e a equivalência de frações, para que os alunos conseguissem dar sentido à divisão de frações. Não foi tarefa fácil selecionar as atividades a serem propostas. Todas foram amplamente discutidas e analisadas com a expectativa de contribuir efetivamente para o ensino deste tópico. Além disso, foram indicados alguns comentários e orientações aos professores que se interessarem em aplicar ou aprimorar esse trabalho.

Os resultados observados pela a aplicação da sequência didática em turmas de 6º e 7º anos foram satisfatórios, pois alunos que ainda não haviam estudado o conteúdo conseguiram desenvolver as atividades e, também, se mostrou proveitosa para quem já tinha estudado. Além disso, a análise da aplicação contribuiu para reforçar a importância das representações gráficas no ensino das frações e para o aprimoramento e melhor adequação em relação ao tempo necessário para a realização das atividades.

Anexo 1 - Sequência didática aplicada

Instiuição: .

Turma: . Professor: . Data: .

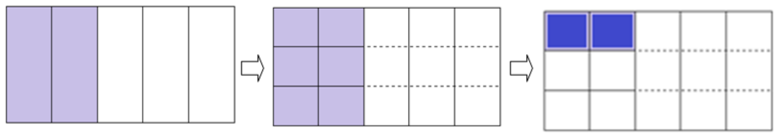
Atividades - Divisão de frações

Exemplo 1: Um álbum tem espaço para 72 figurinhas distribuídas igualmente em 6 páginas. Quantas figurinhas cabem em cada página?

Exemplo 2: Três irmãos possuem uma barra de chocolate para repartir igualmente entre eles. Que fração da barra cada um comerá? Represente por meio de um desenho.

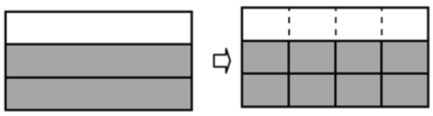
Exemplo 3: Agora, os três irmãos têm a metade de uma torta circular para repartir igualmente entre eles. Que fração da torta caberá a cada um? Represente por meio de uma figura.

1. Um estudante usou o esquema abaixo para calcular $\frac{2}{5} : 3$.



Qual foi o resultado obtido?

2. Ao efetuar uma divisão, um aluno fez as seguintes figuras. Ele acertou a resposta.



Que divisão ele pode ter feito? E que resultado ele encontrou? Represente.

3. Efetue as divisões a seguir, Justificando graficamente suas respostas.

a) $\frac{1}{3} : 2 =$

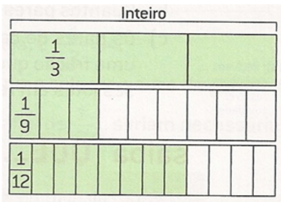
b) $\frac{1}{4} : 3 =$

c) $\frac{2}{5} : 4 =$

d) $\dfrac{3}{10} : 3 =$

e) $\dfrac{1}{2} : 6 =$

4. Observe as imagens e responda as questões:



a) Quantas vezes $\dfrac{1}{9}$ cabem em $\dfrac{1}{3}$?

b) Quantas vezes $\dfrac{1}{12}$ cabem em $\dfrac{1}{3}$?

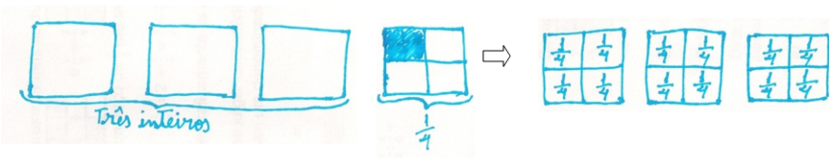
c) Quantas vezes $\dfrac{1}{12}$ cabem em $\dfrac{2}{3}$?

Exemplo 4: Em um álbum cabem 85 figurinhas. Sabendo que em cada página cabem 5 figurinhas, quantas páginas há no álbum?

Exemplo 5: Em uma sala de leitura há 4 estantes iguais completamente cheias de livros. Essas estantes serão substituídas por outras que possuem $\dfrac{1}{3}$ da capacidade das atuais.

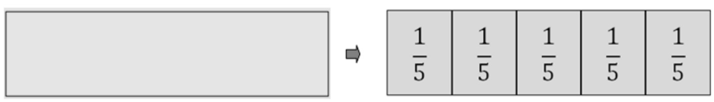
Quantas estantes novas serão necessárias para acomodar todos os livros guardados nas estantes antigas?

5. Um aluno utilizou o esquema abaixo para efetuar $3 : \frac{1}{4}$.



Sabendo que ele acertou, qual foi o resultado encontrado? Explique o que você entendeu sobre a forma que o aluno pensou.

6. Observando a figura abaixo, responda as questões a seguir. Justifique suas respostas.



a) Qual o resultado de $1 : \frac{1}{5}$?

b) Qual o resultado de $2 : \frac{1}{5}$?

c) Qual o resultado de $2 : \frac{2}{5}$?

d) Qual o resultado de $4 : \frac{1}{5}$?

7. Efetue as divisões a seguir. Justifique graficamente suas respostas.

a) $2 : \frac{1}{3} =$

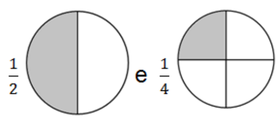
b) $2 : \frac{1}{7} =$

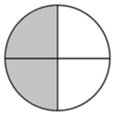
c) $4 : \frac{2}{5} =$

d) $6 : \frac{3}{4} =$

e) $3 : \frac{3}{2} =$

8. Observe as figuras:

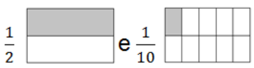


A partir de frações equivalentes, observamos que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$. 

Portanto, $\dfrac{1}{4}$ cabe duas vezes em $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$ e $\dfrac{1}{2}$ dividido por 2 é igual a $\dfrac{1}{4}$.

Ou seja, $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} : \dfrac{1}{4} = 2$ e $\dfrac{1}{2} : 2 = \dfrac{1}{4}$.

Da mesma forma, temos:



A partir de frações equivalentes, observamos que $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$. 

Portanto, $\dfrac{1}{10}$ cabe cinco vezes em $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$ e $\dfrac{1}{2}$ dividido por 5 é igual a $\dfrac{1}{10}$.

Ou seja, $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{10} = \dfrac{5}{10} : \dfrac{1}{10} = 5$ e $\dfrac{1}{2} : 5 = \dfrac{1}{10}$.

Agora, calcule (utilize argumentos gráficos para justificar sua resposta):

a) $\dfrac{1}{3} : \dfrac{1}{6} =$

e) $\dfrac{2}{5} : \dfrac{2}{10} =$

b) $\dfrac{1}{3} : 2 =$

f) $\dfrac{1}{4} : \dfrac{2}{8} =$

c) $\frac{7}{2} : \frac{1}{2} =$

g) $\frac{2}{3} : \frac{1}{9} =$

d) $\frac{7}{2} : 7 =$

h) $\frac{2}{3} : 4 =$

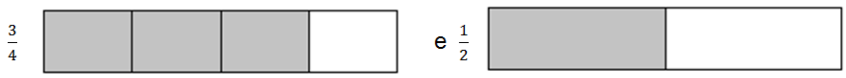
Instiuição: .

Turma: . Professor: . Data: .

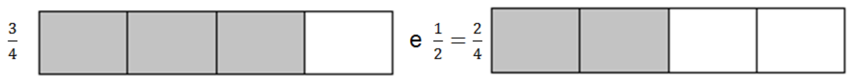
Atividade extra

Observe: (i) $\dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{2} =$

Vamos representar graficamente as frações acima:



Se representarmos as duas frações com um mesmo denominador,

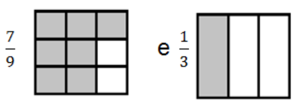


podemos perceber que em $\dfrac{3}{4}$ cabe uma vez $\dfrac{1}{2}$ mais a metade de $\dfrac{1}{2}$ (ou seja, $\dfrac{1}{4}$).

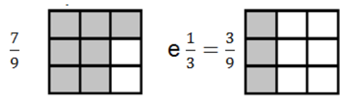
Então, $\dfrac{3}{4} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{4} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

(ii) $\dfrac{7}{9} : \dfrac{1}{3} =$

Vamos representar graficamente as frações acima:



Se representarmos as duas frações com um mesmo denominador,



podemos perceber que em $\frac{7}{9}$ cabe duas vezes $\frac{1}{3}$ mais a terça parte de $\frac{1}{3}$ (ou seja, $\frac{1}{9}$).

Então, $\frac{7}{9} : \frac{1}{3} = \frac{7}{9} : \frac{3}{9} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Efetue as divisões a seguir. Justifique graficamente suas respostas:

Dica: se julgar necessário, encontre frações equivalentes as frações dadas que possuam um denominador comum.

a) $\frac{7}{9} : \frac{2}{9} =$

b) $\frac{5}{4} : \frac{1}{2} =$

c) $\frac{5}{4} : \frac{2}{3} =$

d) $\frac{5}{3} : \frac{1}{2} =$

e) $\frac{7}{2} : \frac{2}{6} =$

Anexo 2 - Sequência didática reformulada

Instiuição: .

Turma: . Professor: . Data: .

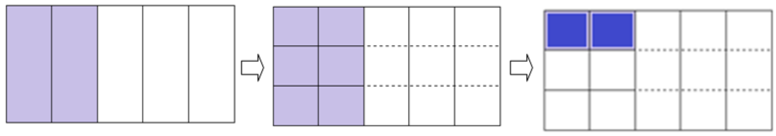
Divisão de frações - Parte 1

Exemplo 1: Um álbum tem espaço para 72 figurinhas distribuídas igualmente em 6 páginas. Quantas figurinhas cabem em cada página?

Exemplo 2: Três irmãos possuem uma barra de chocolate para repartir igualmente entre eles. Que fração da barra cada um comerá? Represente por meio de um desenho.

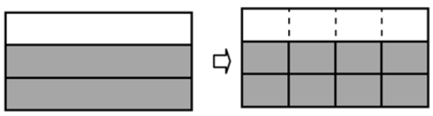
Exemplo 3: Agora, os três irmãos têm a metade de uma torta circular para repartir igualmente entre eles. Que fração da torta inteira caberá a cada um? Represente por meio de uma figura.

1. Um estudante usou o esquema abaixo para calcular $\frac{2}{5} : 3$.



Qual foi o resultado obtido?

2. Ao efetuar uma divisão, um aluno fez as seguintes figuras. Ele acertou a resposta.



Que divisão ele pode ter feito? E que resultado ele encontrou? Represente.

3. Efetue as divisões a seguir, Justificando graficamente suas respostas.

a) $\frac{1}{3} : 2 =$

b) $\dfrac{1}{4} : 3 =$

c) $\dfrac{2}{5} : 4 =$

d) $\dfrac{3}{10} : 3 =$

e) $\dfrac{1}{2} : 6 =$

Instiuição: .

Turma: . Professor: . Data: .

Divisão de frações - Parte 2

Exemplo 1: Em um álbum cabem 85 figurinhas. Sabendo que em cada página cabem 5 figurinhas, quantas páginas há no álbum?

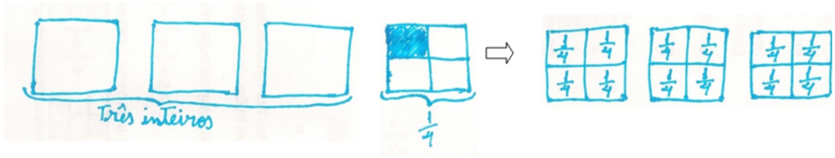
Exemplo 2: Um comerciante possui 7 quilogramas de açúcar que serão divididas em embalagens de $\frac{1}{2}$ kg. Quantas embalagens ele terá para vender?

Exemplo 3: Em uma sala de leitura há 4 estantes iguais completamente cheias de livros. Essas estantes serão substituídas por outras que possuem $\frac{1}{3}$ da capacidade das atuais. Quantas estantes novas serão necessárias para acomodar todos os livros guardados nas estantes antigas?

1. Um aluno utilizou o esquema abaixo para resolver o seguinte problema:

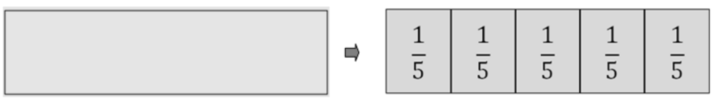
Três quilogramas de café serão colocados em embalagens de $\frac{1}{4}$kg. Quantas embalagens serão necessárias?

Para resolver o problema devo dividir 3 por $\frac{1}{4}$“:



Sabendo que ele acertou, qual foi o resultado encontrado? Explique o que você entendeu sobre a forma que o aluno pensou.

2. Observando a figura abaixo, responda as questões a seguir. Justifique suas respostas.



a) Qual o resultado de $1 : \frac{1}{5}$?

b) Qual o resultado de $2 : \frac{1}{5}$?

c) Qual o resultado de $2 : \frac{2}{5}$?

d) Qual o resultado de $4 : \frac{1}{5}$?

3. Efetue as divisões a seguir. Justifique graficamente suas respostas.

a) $2 : \frac{1}{3} =$

b) $2 : \frac{1}{7} =$

c) $4 : \frac{2}{5} =$

d) $6 : \frac{3}{4} =$

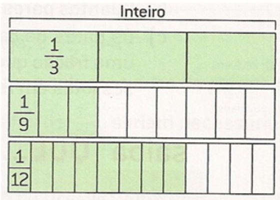
e) $3 : \frac{3}{2} =$

Instiuição: .

Turma: . Professor: . Data: .

Divisão de frações - Parte 3

1. Observe as imagens e responda as questões:

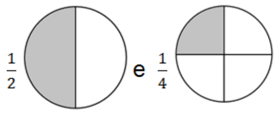


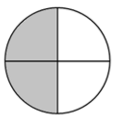
a) Quantas vezes $\frac{1}{9}$ cabem em $\frac{1}{3}$?

b) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabem em $\frac{1}{3}$?

c) Quantas vezes $\frac{1}{12}$ cabem em $\frac{2}{3}$?

2. Observe as figuras:



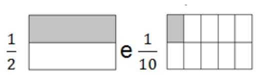


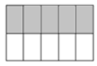
A partir de frações equivalentes, observamos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Portanto, $\frac{1}{4}$ cabe duas vezes em $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ dividido por 2 é igual a $\frac{1}{4}$.

Ou seja, $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{2}{4} : \frac{1}{4} = 2$ e $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$.

Da mesma forma, temos:



A partir de frações equivalentes, observamos que $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$. 

Portanto, $\frac{1}{10}$ cabe cinco vezes em $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ e $\frac{1}{2}$ dividido por 5 é igual a $\frac{1}{10}$.

Ou seja, $\frac{1}{2} : \frac{1}{10} = \frac{5}{10} : \frac{1}{10} = 5$ e $\frac{1}{2} : 5 = \frac{1}{10}$.

Agora, calcule (utilize argumentos gráficos para justificar sua resposta):

a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} =$

b) $\frac{1}{3} : 2 =$

c) $\frac{7}{2} : \frac{1}{2} =$

d) $\frac{7}{2} : 7 =$

e) $\frac{2}{5} : \frac{2}{10} =$

f) $\frac{1}{4} : \frac{2}{8} =$

g) $\frac{2}{3} : \frac{1}{9} =$

h) $\frac{2}{3} : 6 =$

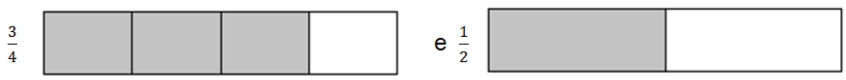
Instiuição: .

Turma: . Professor: . Data: .

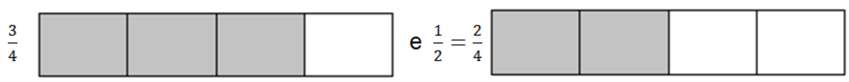
Divisão de frações - Parte 4

Observe: (i) $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} =$

Vamos representar graficamente as frações acima:



Se representarmos as duas frações com um mesmo denominador,

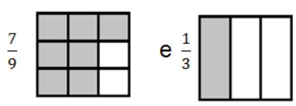


podemos perceber que em $\frac{3}{4}$ cabe uma vez $\frac{1}{2}$ mais a metade de $\frac{1}{2}$ (ou seja, $\frac{1}{4}$).

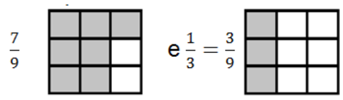
Então, $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(ii) $\frac{7}{9} : \frac{1}{3} =$

Vamos representar graficamente as frações acima:



Se representarmos as duas frações com um mesmo denominador,



podemos perceber que em $\frac{7}{9}$ cabe duas vezes $\frac{1}{3}$ mais a terça parte de $\frac{1}{3}$ (ou seja, $\frac{1}{9}$).

Então, $\frac{7}{9} : \frac{1}{3} = \frac{7}{9} : \frac{3}{9} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

Efetue as divisões a seguir. Justifique graficamente suas respostas:

Dica: se julgar necessário, encontre frações equivalentes as frações dadas que possuam um denominador comum.

a) $\frac{7}{9} : \frac{2}{9} =$

b) $\frac{5}{4} : \frac{1}{2} =$

c) $\frac{5}{4} : \frac{2}{3} =$

d) $\frac{5}{3} : \frac{1}{2} =$

e) $\frac{7}{2} : \frac{2}{6} =$

Bibliografia

[1] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** - 3. ed. - Brasília: Secretaria da Educação Fudamental, 2001.

[2] BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard; POST, Thomas R. & SILVER, Edward A. Rational-Number Concepts. In LESH, R.; LANDAU, M. (eds) **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes**. p.91-126. New York: Academic Press, 1983. Disponível em: https://gismodb.fi.ncsu.edu/gismodb/files/articles/e69810947cbdb9a788e72b100bd8-7b46.pdf. Acesso em: 23 de janeiro de 2013.

[3] Moreira, Plínio Cavalcanti. **O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática Docente na escola básica** (Tese de Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), 2004. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/EABA-6ABMUH/2000000078.pdf;jsessionid=618DB190C0897D69E8ABE64FD755B3EE?sequence=1. Acesso em: 22 de janeiro de 2013.

[4] GIRALDO, Victor; RIPOLL, Cydara; PITOMBEIRA, João Bosco; RANGEL, Letícia. **Livro companheiro do professor de matemática** Volume 1 - Números Reais. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[5] SILVA, Maria José Ferreira da. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série** (Tese de Doutorado). PUC-SP, 2005. Disponível em: http://www4.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/maria_jose_ferreira_silva.pdf. Acesso em: 23 de janeiro de 2013.

[6] MONTEIRO, Cecília & COSTA, Cristolinda. **Dificuldades na aprendizagem dos números racionais**. IN: Revista Educação e Matemática, nº40, p.60-63. APM: Portugal, 4º trimestre de 1996.

[7] GIRALDO, Victor. **O Desenvolvimento do Conceito de Número na Escola Básica** 24ª Semana de Matemática da UFRN.

[8] FAVERO, Maria Helena; NEVES, Regina da Silva Pina. A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise. In Revista Zetetiké. v.20, n. 37, p.35-71. São Paulo: FE/Unicamp, jan/jun 2012.

[9] LOPES, Antônio José. **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações**. IN: Revista Bolema, Ano 21, nº31, p.01-22. UNESP: Rio Claro, 2008.

[10] MONTEIRO, Cecília; COSTA, Cristolinda; FIGUEIREDO, Nisa. **As frações e o desenvolvimento do sentido de númrero racional**. IN: Revista Educação e Matemática, nº84, p. 47-51. APM: Portugal, Setembro e Outubro de 2005. Disponível em: http://arquivo.ese.ips.pt/ese/projectos/sentidonumero/Fraccoes_EM.pdf. Acesso em: 20 de março de 2013.

[11] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série)**. Brasília: Secretaria de Educação Fudamental, 1998.

[12] MOREIRA, Plínio Cavalcanti FERREIRA, Maria Cristina Costa. **A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas**. IN: Revista Bolema, Ano 21, nº31, p.103-127. UNESP: Rio Claro, 2008.

[13] ROMANATTO, Mauro Carlos. **Número Racional: Relações Necessárias à sua Compreensão** (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1997.

[14] KIEREN, T. E. **The rational number construct – its elements and mechanisms**. In: KIEREN, T. (ed.) Recent Research on Number Learning. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

[15] DAMICO, Alécio. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental** (Tese de Doutorado). PUC/SP, 2007

[16] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade, 6º ano**. -6. ed. - São Paulo: Atual, 2009.

[17] WALLE, John A. Van de. **Matemática no ensino fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula** Tradução de Paulo Henrique Colonese. - 6. ed. - Porto Alegre: Artmed, 2009.

[18] MA, Liping. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher's understanding of fundamental mathematics in China and the United States**. Mahwab, NJ: Lawrence Earlbaum, 1999.

[19] MA, Liping. **Saber e ensinar matemática elementar**. Coleção: Temas de Matemática. Portugal: Gradiva Publicações, 2009.

[20] RIBEIRO, Jackson da Silva. **Projeto Radix: Matemática, 7º ano**. São Paulo: Scipione, 2009.

[21] BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática, 6º ano**. - 6. ed. - São Paulo: Moderna, 2009.

[22] FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**. - 2. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2011.