UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Andréia Perpétua Barboza Breseghello

Resolução de problemas com aplicações em funções

São José do Rio Preto
2016

Andréia Perpétua Barboza Breseghello

Resolução de problemas com aplicações em funções

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco

São José do Rio Preto
2016

Breseghello, Andréia Perpétua Barboza.
Resolução de problemas com aplicações em funções / Andréia Perpétua Barboza Breseghello. -- São José do Rio Preto, 2016
79 f. : il.

Orientador: Évelin Meneguesso Barbaresco
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática) - Estudo e ensino. 3. Aprendizagem baseada em problemas. 4. Matemática - Metodologia. I. Barbaresco, Évelin Meneguesso. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.5(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Andréia Perpétua Barboza Breseghello

Resolução de problemas com aplicações em funções

Dissertação de Mestrado Profissional apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Profª. Drª. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP - São José do Rio Preto

Profª. Drª. Ana Paula Tremura Galves
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto
18 de fevereiro de 2016

AGRADECIMENTOS

Primeiramente dirijo minha maior gratidão a DEUS, por mais do que me criar, deu propósito à minha vida;

Ao PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, pela oportunidade oferecida;

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro;

A todos os docentes do IBILCE-UNESP que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho;

À minha orientadora, Profª. Drª. Évelin Meneguesso Barbaresco, por seus ensinamentos, compreensão e pelo incentivo na orientação que tornaram possível o desenvolvimento e a conclusão deste trabalho;

A pessoa com quem amo partilhar a vida, Rogério, pelo carinho, paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria de cada dia, pois a minha formação inclusive pessoal, não teria sido a mesma sem você;

Às minhas filhas, Caroline e Yasmin, que são as maiores de todas as minhas conquistas, pela companhia constante e tão querida, sacrifício ilimitado em todos os sentidos, palavras, abraços e aconchego;

À minha mãe Zenaide, pela guerreira que é, por tudo que significa para mim e pelo que sou;

A todas as pessoas que contribuíram para meu crescimento como pessoa, pois esse trabalho é resultado da confiança e força de cada um de vocês.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo mostrar a importância da resolução de problemas como estratégia didática para o ensino de matemática, com enfoque particular em funções. A resolução de problemas é uma estratégia didática/metodológica importante e fundamental para o desenvolvimento intelectual do aluno e para o ensino da matemática. Para muitos educadores matemáticos, a resolução de problemas consiste em permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. Dessa forma, os alunos adquirem a oportunidade de ampliar seu conhecimento, desenvolver seu raciocínio lógico, enfrentar novas situações e conhecer as aplicações da matemática. O mesmo sucede para o professor, pois trabalhar com a resolução de problemas permite atingir os objetivos de aprendizagem definidos, além de tornar a aula mais interessante e motivadora. Neste trabalho particularizamos a utilização desta estratégia didática no ensino de funções, onde apresentamos a aplicação de uma atividade em sala de aula sobre esse conteúdo matemático.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Ensino de matemática. Funções.

ABSTRACT

This research aims to show the importance of the solving problem as a teaching strategy for mathematics education, with particular focus on functions. The solving problem is an important and fundamental didactic / methodological strategy for the intellectual development of the students and the teaching of mathematics. For many mathematics teachers the solving problem is allow the students to use their knowledge and develop the ability to deal with the information around than. So, the students gain the opportunity to expand their knowledge, develop their logical thinking, face new situations and learn about the applications of mathematics. The same applies to the teacher, because working with the problem solutions achieves the defined learning objectives, and make the class more interesting and motivating. In this research, we use this teaching strategy in teaching functions, where we present the application of an activity in class about this mathematical content.

Keywords: Problem solutions. Mathematics education. Functions.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sabe-se que muitos são os desafios para o ensino da Matemática e as técnicas de resolução de problemas estão voltadas para ajudar o professor na sua prática, a ser um pesquisador procurando soluções bem fundamentadas, um profissional com potencial transformador, com o objetivo de propor e implementar mudanças concretas e compreender a resolução de problemas como contribuição na construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática sugerem que “no processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las”. (BRASIL, 1998, p. 43).

É preciso, inicialmente, diferenciar problema de exercício: exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático, como algoritmo ou fórmula já conhecida, e envolve mera aplicação de resultados teóricos; problema, necessariamente, envolve invenção e/ou criação significativa. (BÚRIGO et al., 2012, p. 18).

Dante (1998) também faz esta diferenciação onde exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo e problema é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta a solução. Para este mesmo autor, a resolução de um problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Segundo Soares e Pinto (2001, p. 7), “tanto os exercícios quantos os problemas têm seu valor, cabe ao professor manter um equilíbrio dos mesmos durante o ano letivo”.

Para Dante (1998), os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática;
- Tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

Uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não se disponha de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou tomada de decisões sobre a sequência de passos a serem seguidos. (ECHEVERRÍA; POZO, 1998, p. 15).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - Parte III (Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias):

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e Álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio histórica que está na origem desses temas. Estes conteúdos estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (BRASIL, 2000, p. 44).

O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções.

O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. As sequências, em especial progressões aritméticas e progressões geométricas, nada mais são que particulares funções, assim como, as retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica, propriedades e gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de equações exponenciais e logarítmicas também podem ser incluídos no estudo de funções, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente.

Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

Assim, as funções da Matemática nos permitem afirmar que aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático. (BRASIL, 1998, p. 252).

Esse domínio passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada atividade sobre resolução de problemas de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, formalização do conhecimento matemático e para o desenvolvimento de habilidades essenciais à leitura e interpretação da realidade de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000, p. 42-43).

De acordo com os parâmetros Curriculares Nacionais as finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam, dentre outros, os objetivos de levar o aluno a:

> - compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> - analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> - desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> - utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> - reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações. (BRASIL, 2000, p. 42).

A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a ideia de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

É fácil constatar que a criação de centros de interesse nos alunos depende da ação do professor e que uma estratégia muito fecunda é a via da problematização, da formulação e do equacionamento de problemas, da tradução de perguntas formuladas em diferentes contextos em equações a serem resolvidas. Muito além dos problemas estereotipados em que a solução consiste em construir procedimentos para usar dados e com eles chegar aos pedidos, os problemas constituem, em cada situação concreta, um poderoso exercício da capacidade de inquirir, de perguntar.

Problematizar é explicitar perguntas bem formuladas a respeito de determinado tema. E, uma vez formuladas as perguntas, para respondê-las, é necessário discernir o que é relevante e o que não é no caminho para a resposta.

Um caso especialmente importante para a criação e a exploração de centros de interesse é o dos problemas que envolvem situações de otimização de recursos em diferentes contextos, ou seja, problemas de máximos ou de mínimos.

Assim a preocupação principal é procurar, em cada problema, não apenas uma solução, mas sim um atrativo a mais na busca de contextualização dos conteúdos estudados e das múltiplas inter-relações entre os mesmos.

Buscando alternativas para que seja possível desempenhar um trabalho de qualidade com o ensino da Matemática, a resolução de problemas com aplicações em funções foi escolhida nesse trabalho como eixo orientador, facilitador e interessante para os alunos da primeira série do Ensino Médio. Dessa maneira, o trabalho está estruturado em 3 capítulos, sendo que no primeiro apresenta-se a técnica da Resolução de Problemas, explorando seus pontos fundamentais. No segundo capítulo descreve-se os fundamentos teóricos envolvidos nas atividades aplicadas em sala de aula. No terceiro capítulo se expõe uma proposta de atividade para ser realizada em sala de aula, com alunos de 1ª série do Ensino Médio.

1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

1.1 Definição

De acordo com Romanatto (2012), para se caracterizar e entender um problema, é necessário destacar algumas afirmações ou definições, descritas no âmbito da Matemática, conforme:

> A Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos. (LUPINACCI; BOTIN, 2004, p. 1).

Quando se tem um problema denota procurar conscientemente alguma ação que possa ser apropriada para se chegar ao objetivo definido. (POLYA, 1978 apud DANTE, 1998). Para o mesmo autor, existem quatro etapas que são as principais na decisão de problema conforme descritas a seguir:

> 1) Compreender o problema
> - O que se pede no problema?
> - Quais são os dados e as condições do problema?
> - É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?
> - É possível estimar a resposta?
>
> 2) Elaborar um plano
> - Qual é o seu plano para resolver o problema?
> - Que estratégia você tentará desenvolver?
> - Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?
> - Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.
> - Tente resolver o problema por partes.
>
> 3) Executar o plano
> - Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.
> - Efetue todos os cálculos indicado no plano.
> - Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.
>
> 4) Fazer o retrospecto ou verificação
> - Examine se a solução obtida está correta.
> - Existe outra maneira de resolver o problema?
> - É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes? (POLYA, 1978 apud DANTE, 1998, p. 49).

Um problema, de modo geral, é algo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer como, por exemplo, quebra-cabeças, labirintos, sequências lógicas e atividades envolvendo uma variedade de abordagens que não devem depender só de elementos conhecidos, mas à busca e descoberta de novas ideias que envolvam desafios, diversões e também frustrações. (THOMPSON, 1989).

Assim, pode-se definir um problema como qualquer tarefa ou atividade, cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer, para a qual os estudantes não têm regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. (VAN DE WALLE, 2009).

Os problemas, de modo geral, envolvem o desconhecimento da resposta e a vontade de encontrá-la. Seguindo essas afirmações e definições, pode-se destacar esses aspectos como decisivos para o trabalho docente com a metodologia da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. Então, um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la. (SAVIANI, 2000).

Quanto à expressão Resolução de Problemas, se destaca também a sua caracterização e importância na perspectiva do trabalho de ensinar e de aprender Matemática.

É muito importante citar em um breve histórico que, desde a obra *Os Elementos de Euclides*, no século III a.C., o ensino de Matemática foi fortemente influenciado pela sequência: definições, axiomas, postulados, teoremas, exercícios e problemas. Assim sendo, a exposição (em livros) do conhecimento geométrico da época, feita por Euclides, acabou sendo utilizada como uma referência para o ensino da Matemática.

Portanto, sabe-se que a criação matemática e, principalmente, a sua aprendizagem seguem caminhos bem diferentes da sequência (lógica) em que os livros foram organizados. Na aprendizagem matemática, os caminhos iniciais do aprendizado são de natureza psicológica.

Sabe-se que é muito recente na educação matemática o recurso Resolução de Problemas como estratégia metodológica no trabalho docente e George Polya (2006), educador matemático húngaro, em seu livro *A arte de resolver problemas*, foi o primeiro grande incentivador. Isso aconteceu ainda na primeira metade do século passado. Sua proposta era apresentar técnicas de resolução de problemas matemáticos que motivam e desenvolvam em seus alunos a capacidade de resolver problemas. Houve avanços e recuos em relação a essa metodologia, mas a sua essência sempre foi mantida, ou seja, ensinar o estudante a resolver problema é o grande objetivo do ensino da Matemática.

O ensino de Matemática no Brasil e em outros países, foi influenciado pelo movimento conhecido como Matemática Moderna nas décadas de 1960 e 1970. Este movimento não teve tanto sucesso e continuou assim a busca por uma metodologia no ensino da matemática de modo a preparar os estudantes para um mundo que exigia cada vez mais conhecimentos transformadores e desafiadores.

É preciso destacar que a partir de década de 1990, um novo conceito sobre a resolução de problemas passou a ser divulgado na literatura sobre educação matemática, bem como em documentos e propostas oficiais, que citam a Resolução de Problemas como uma metodologia que permite ao estudante a alegria de vencer obstáculos, elaborar ideias, vivenciando dessa forma o “fazer matemática”, pois os problemas são tomados como desafios.

A apresentação do problema como ponto de partida da atividade matemática, e não como a definição no processo de ensinar e de aprender ideias, propriedades e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exposição de problemas, ou seja, de situações em que os estudantes necessitem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las por completo de forma significativa.

A transposição da sequência “definições, propriedades, exercícios e problemas” para “problemas, definições, propriedades, exercícios e novos problemas” trouxeram mudanças significativas no ensino da Matemática através de uma proposta metodológica da Resolução de Problemas como estratégias de ensino e aprendizagem, pois os problemas deixaram de dar ênfase nos aspectos envolvendo regras, fórmulas e algoritmos para apresentarem uma metodologia interdisciplinar da matemática com o mundo ou mesmo do cotidiano valorizando o meio em que vive.

Diz Polya (2006, p. 4) em seu livro *A arte de resolver problemas* que a resolução de problemas é uma “habilitação” que só adquiri por imitação e prática, tem-se que observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprender a resolver problemas, resolvendo-os. O professor que deseja desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas deve incutir em suas mentes algum interesse por problemas, seja ele por dramatização de suas ideias, orientações, sugestões ou indagações proporcionando-lhes muitas oportunidades de imitar e praticar e, ao fazê-lo, adquirirá algo mais importante do que simples conhecimento de um conteúdo matemático qualquer.

Pode-se convencer e acreditar que a metodologia Resolução de Problemas, como centro ou início do processo de ensinar e de aprender Matemática, será decisivo para essa disciplina adquirir um sentido para os estudantes em todos os níveis de ensino, porém, adotar esta estratégia implica em transformações nas concepções do professor.

1.2 Compreensão do problema

É preciso destacar, inicialmente, ao se propor um problema que ele seja bem compreendido, tem-se que entender seu enunciado verbal e perceber claramente o que é necessário para sua resolução, almejar resolvê-lo, por isso, o problema precisa ser bem escolhido, nem muito fácil, nem muito difícil, mas interessante e com uma linguagem adequada ao contexto.

É necessário destacar a importância de um problema em que o enunciado seja claro para traçar um plano que vai desde sua compreensão, resolução, até o retrospecto ou verificação de sua solução. O aluno precisa destacar as partes principais do problema e nesse momento as indagações entre o professor e aluno tendem a ser um facilitador.

Segundo Polya (2006, p. 6) esse diálogo pode principiar da seguinte maneira:

- Qual é a incógnita?
- Quais são os dados?
- Adote uma notação adequada. Qual letra deve denotar a incógnita?
- Qual é a condicionante?
- Trata-se de um problema razoável? Ou seja, a condicionante é suficiente para determinar a incógnita?

Esta etapa de compreensão do problema é muito importante, pois a partir da leitura e interpretação dos problemas, é possível o envolvimento do aluno na busca por estratégias de resolução, na persistência em encontrar uma solução, no avanço e na redefinição de conceitos e ideias já adquiridos.

A presença do professor nessa fase inicial de compreensão do problema é mais de retaguarda, mas para que o trabalho avance é essencial provocar a própria iniciativa do aluno, valorizar suas ideias e sugestões para que o mesmo não perca o interesse em resolver o problema.

Portanto, o professor preocupado em ajudar faz uma leitura conjunta do enunciado, relevante para uma boa compreensão e para garantir que todos entendam o problema e saibam resolvê-lo. No enunciado de um problema encontram-se informações e dados importantes, que levam o aluno a pensar produtivamente e que precisam ser destacados, é o que definimos por palavras chaves.

Mais do que nunca, as palavras chaves destacadas vão auxiliar como um resumo de modo mais esquemático e relevante para a elaboração de estratégias para o planejamento, encaminhando para a resolução do problema.

Os problemas podem apresentar experiências cotidianas envolvendo a vida dos alunos e as interações do meio em que vivem, bem como as ciências que ligam a Matemática com o mundo, porém bons problemas integrarão tópicos múltiplos e envolverão matemáticas significativas que operem com os conhecimentos construídos.

Pode-se citar algumas características dessas matemáticas significativas:

a) Ser construídas a partir de um conhecimento prévio;

b) Ressaltar o pensar e propiciar esse tempo;

c) Aguardar explicações ou justificativas para os possíveis questionamentos e fazer intervenções quando necessário;

d) Utilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos por meio da técnica de Resolução de Problemas.

Espera-se, naturalmente, que um problema leve o aluno a transpor obstáculos graças a uma aprendizagem inédita, quer se trate de uma simples transferência, de uma generalização ou, da construção de um conhecimento inteiramente novo. Dessa maneira, os problemas precisam estar ajustados ao nível e às possibilidades dos alunos, pois se conhecerem o problema trabalhará "simplesmente" a operacionalização ou a transferência de um conhecimento adquirido; se "chegarem perto" os alunos deverão construir a intuição de que provavelmente existe uma regra que lhes permitirá, se a encontrarem, resolver o problema sem hesitar, caso contrário, faltará descobri-la e depois formalizá-la, fase na qual o professor, sem dúvida, intervirá propondo questionamentos ou até mesmo outras situações semelhantes; agora se os alunos não tiverem nenhuma ideia de solução possível, até mesmo de qualquer pista ou método, será levado à impressão de que jamais se conseguirá alcançar soluções, se terá então que transformar ou modificar o problema para que o mesmo possa ser resolvido.

Ressalta-se a presença, cada vez maior, de alunos heterogêneos em todos os níveis e cuidadosamente precisa-se salientar, que as situações-problemas, necessitam ser interessantes e desafiadoras, mas que estejam ao alcance do aluno e que leve cada um a progredir e resolver futuros problemas por si próprio quando se fizer necessário.

1.3 Elaboração de um plano

Lembre-se que depois de compreender o problema e destacar as palavras chaves, tem-se que elaborar um plano que permita, de modo geral, traçar o caminho que precisa ser executado para obter sua solução. O interessante é que esse caminho pode ser longo e ineficaz através de cálculos, tabelas, tentativas ociosas até aparecer uma "ideia brilhante". Sendo assim, sabe-se da dificuldade de ter uma boa ideia quando pouco se conhecer do assunto e, impossível, se nada conhecer. Não basta ter simples lembrança, precisa-se recordar conteúdos importantes do conhecimento matemático, previamente adquiridos em outras situações como teoremas, algoritmos e propriedades, por exemplo.

Quando conhecer algum problema correlato, já resolvido anteriormente, pode-se fazer uma associação e utilizar informações pertinentes para dar partida. Mas nem sempre isso é possível, então pode ser útil propor um problema auxiliar adequado, tomando cuidado para não distanciar por completo do original e se perder, levando o aluno à desmotivação e à frustração.

Assumindo a dúvida e a incerteza do aluno na resolução do problema, pode-se propor algumas indagações, pois precisa-se compreendê-lo, tais como:

- Explorou todos os dados do problema?
- Qual é a incógnita?

- Conhece algum problema correlato?
- Representou as informações por meio da linguagem matemática?
- Compreendeu o que se pretende calcular?
- Estabeleceu critérios sobre os procedimentos a serem aplicados?

De qualquer modo, destaca-se que o processo precisa ser bem compreendido e suas diversas formas possíveis consideradas. Portanto, é importante que os alunos cumpram todas as etapas que compõem um problema, passo a passo, compreendendo-as e executando-as com o devido cuidado, pois o processo é contínuo e exige planejamento.

1.4 Desenvolvimento do plano

Sabe-se que elaborar um plano e desenvolvê-lo são duas coisas distintas. Na elaboração do plano de resolução, que não é fácil, é preciso, além de conhecimentos anteriores, bons hábitos mentais, concentração no objetivo e muita sorte. Não se deve nesse momento utilizar o raciocínio heurístico, cujo objetivo é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção, que é apenas plausível. O plano proporciona apenas um roteiro geral. Mas precisa-se mudar este ponto de vista quando se inicia o desenvolvimento do plano e, aí, somente deve-se aceitar os argumentos conclusivos e rigorosos, conceder atenção especial à ordem de preparação dos detalhes do plano, não omitir nenhum, e perceber a relação que há entre os que surgem e o problema como um todo; não se deve perder de vista a conexão entre os passos principais, prosseguir de acordo com uma ordem apropriada e utilizar pacientemente o raciocínio heurístico na sua concepção.

Admitindo que todas as informações foram selecionadas, relacionadas e compreendidas, o desenvolvimento do plano agora é muito mais fácil e ao fazê-lo, conta-se com a intuição ou com a demonstração formal. Algumas vezes a intuição vai adiante, outras vezes, a demonstração formal. Fazer as coisas das duas maneiras constitui um exercício interessante e instrutivo, pois tentar demonstrar formalmente aquilo que é percebido intuitivamente e vice-versa, constitui um estimulante exercício mental, mas infelizmente, em sala de aula nem sempre se dispõe de tempo para isso.

Buscando resgatar o prazer da descoberta nos alunos, recomenda-se, no desenvolvimento do seu plano, que tenham paciência, intencionalidade e executem, mesmo com alguma ajuda, sua ideia até o final, com clareza e nitidez para que não reste dúvida que o procedimento usado tenha resolvido o problema com êxito, favorecendo, assim, sua autoestima.

Sendo assim, salienta-se que o maior risco é aquele em que o estudante esquece seu plano, o que acontece quando ele recebe pronto por influência do professor ou de algum colega, por isso é preciso que o aluno mobilize seus conhecimentos adquiridos, construa seu passo a passo, elabore seu próprio plano e construa com eficiência todas as operações viáveis a partir do que se conhece até à resolução do problema.

1.5 Verificação

É conveniente ressaltar o que nos diz Polya (2006) nessa etapa da verificação do resultado, pois é um processo cuidadoso e excelente método de aprendizagem que serve para identificar e corrigir possíveis erros.

> Até mesmo alunos razoavelmente bons, uma vez chegados à solução do problema e escrita a demonstração, fecham os livros e passam a outro assunto. Assim fazendo eles perdem uma fase importante e instrutiva do trabalho de resolução. Se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. Um bom professor precisa compreender e transmitir a seus alunos o conceito de que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento, podemos melhorar a resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução. (POLYA, 2006, p. 12).

É evidente que o aluno precisa fazer a verificação da resolução passo a passo, e assim, ter boas razões para crer que resolveu corretamente o seu problema, pois o aluno tem o hábito de obter uma resposta e considerar como correta, mas é sempre possível haver erros. Mesmo quando se encontra uma resolução satisfatória, mais longa e de grande esforço, pode-se motivar o aluno a procurar outra com uma resolução mais curta e clara, ao reverem o seu raciocínio, testarem a solução encontrada e justificar como se fez até convencer que a solução está certa e adequada.

Realizar a correção coletiva também é uma boa ideia pois possibilita ao aluno perceber que para um mesmo problema encontra-se outras possibilidades de resolução. Nesse momento, verifica-se se o problema foi verdadeiramente resolvido, como foi feito, se a solução obtida está correta, se pode utilizar o resultado encontrado como solução do problema e se poderá haver para o mesmo problema várias soluções.

Como já foi citado anteriormente, para que essas habilidades e estratégias se desenvolvam é necessário que o professor esteja preparado para aceitar os diferentes procedimentos dos alunos, pois a forma de resolução destes pode ser totalmente diferente da maneira que o professor julgar ser a melhor, por isso é conveniente nesse momento que todas as soluções sejam discutidas e socializadas.

> A ciência está em constante movimento. Não se deve levar o aluno a pensar que só há uma forma de resolver um problema, até por que essa forma amanhã poderá estar superada. A dúvida, a pesquisa e a experimentação devem ser estimuladas em sala de aula para que nossos alunos compreendam que os conhecimentos matemáticos foram construídos por pessoas comuns e para que se sintam capazes de produzir novos conhecimentos (ROCHA, 2002, p. 26).

1.6 Problema correlato e problema auxiliar

A aprendizagem tem seu começo em algum lugar. Alguma coisa tem que ser conhecida e, em geral, aprofundada. Em outras palavras, relembrar ideias, perceber caminhos, reconhecer elementos, conceitos e algoritmos são pontos importantes para estabelecer conexão com o novo e aprofundar conhecimentos.

É neste contexto que a necessidade de se adotar um problema “antigo” para resolver um “novo” foi abordada e ressaltada por Polya na estratégia de Resolução de Problemas.

> É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. Além do que, naturalmente, o problema de que nos aproveitamos deve ser, de alguma maneira, relacionado com o nosso problema atual. Daí a pergunta: Conhece um problema correlato? (POLYA, 2006, p. 41).

No ensino da Matemática, questionar conhecimentos já estabelecidos em um problema correlato que seja mais ou menos semelhante com o que se propõe é uma alternativa consciente que poderá ser útil na resolução do problema. Vale ressaltar, por fim, que se precisa relacionar os dois problemas na tentativa de utilizar elementos auxiliares adequados já existentes num problema correlato como ideias e sugestões que venham facilitar a resolução do problema inicial.

Em suma define-se o problema auxiliar de acordo com Polya (2006, p. 136-137):

> É aquele de que tratamos, não por ele mesmo, mas porque esperamos que o seu tratamento nos auxilie a resolver um outro – o nosso problema original. Este último é o fim a que desejamos chegar; o problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo.
> A concepção de um problema auxiliar constitui uma importante operação mental, visto que, a superioridade humana consiste em contornar obstáculos que não podem ser superados frontalmente, em conceber um problema auxiliar quando o original parecer insolúvel. Fazer aparecer um novo problema preciso, subserviente a um outro, é uma refinada manifestação de inteligência e aprender ou ensinar a manipular com inteligência problemas auxiliares é uma tarefa importante.
> As vantagens de que nos advêm da consideração de um problema auxiliar podem ser de várias espécies. Podemos utilizar o resultado do problema auxiliar e deduzir a partir daí todos os possíveis valores, e em outros casos,

> introduzir um problema auxiliar na esperança que ele seja instrutivo, que nos dê a oportunidade de familiarizarmo-nos com certos métodos, operações ou instrumentos capazes de ser utilizados mais tarde na resolução do problema original.

1.7 Classificação de problemas

De acordo com Mercedes Carvalho (2010) além dos problemas que envolvem as ideias de juntar, de comparação, de combinação, de transformação, há outros tipos de problemas que apresentam maior complexidade para o aluno resolver e que podem ser classificados como:

> Problemas não convencionais - também chamados de problemas heurísticos, por alguns autores. Para resolver esse tipo de problema, há necessidade de elaborar um raciocínio mais complexo, pois as operações não estão evidenciadas no enunciado. Esse tipo de problema desafia o aluno a usar sua criatividade na elaboração de estratégias de resolução.
> Problemas do cotidiano - também chamados de problemas de aplicação, fazem parte do cotidiano da escola, do aluno. São os tipos de problemas mais interessantes, pois sua resolução envolve levantamento de dados, confecção de gráficos, tabelas, desenhos, aplicação das operações. Podem ser apresentados em forma de projetos envolvendo outras áreas do conhecimento. (CARVALHO, 2010, p. 30).

É importante também citar Dante (2003) que em seu livro classifica da seguinte forma os vários tipos de exercícios e problemas:

> - Exercícios de reconhecimento, onde o objetivo é fazer com que o aluno reconheça, identifique ou lembre um conceito;
> - Exercícios de algoritmos: servem para treinar a habilidade em executar um algoritmo e reforçar conhecimentos anteriores;
> - Problemas - padrão: a solução já está contida no enunciado, e a tarefa básica é transformar a linguagem usual em linguagem matemática, com o objetivo de recordar e fixar os fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações;
> - Problemas-processo ou heurísticos: sua solução envolve as operações que não estão contidas no enunciado, exigem do aluno um tempo para pensar e arquitetar um plano de ação;
> - Problemas de aplicação: também chamados de situações-problema, são aqueles que retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da Matemática para serem resolvidos;
> - Problemas de quebra-cabeça: constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende quase sempre de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum truque. (DANTE, 2003, p. 16).

Buscando apontar os diferentes tipos de problemas e evidenciar que cada tipo tem uma função no processo de aprendizagem do aluno, apresenta-se uma síntese segundo Resnick (apud SOUSA, 2005) de alguns tipos de problemas.

- sem algoritmização: aquele cujo caminho da resolução é desconhecido, pelo menos em grande parte.
- complexos: precisam de diferentes estratégias e de um conhecimento sistemático.
- exigentes: a solução só é encontrada após um intenso raciocínio e não por uma forma mecânica de resolução.
- exigem lucidez e paciência: um problema com uma grande multiplicidade de dados e incertezas que exigem observação e planejamento nas ações até encontrar um caminho ideal para sua resolução.

Ao se propor um problema matemático é importante diversificar os tipos propostos para que os alunos desenvolvam diferentes tipos de habilidades e estratégias de resolução.

1.8 A Resolução de Problemas como metodologia de ensino

No que tange o processo de ensino e aprendizagem, diversos autores da área da educação apontam a resolução de problemas como metodologia de ensino, nesse contexto Mauro Paulo Romanatto em seu artigo nos diz que:

> Nessa perspectiva, a resolução de problemas significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente. Para encontrar uma solução, os estudantes devem aplicar seus conhecimentos matemáticos. Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e, sim, fazê-la. Os estudantes deveriam ter oportunidades frequentes para formular, tentar e solucionar problemas desafiadores que requerem uma quantidade significativa de esforço e deveriam, então, ser encorajados a refletir sobre seus conhecimentos. Assim, solucionar problemas não significa apenas resolvê-los, mas aplicar sobre eles uma reflexão que estimule seu modo de pensar, sua curiosidade e seus conhecimentos. (ROMANATTO, 2012, p. 302-303).

Em relação a Resolução de Problemas, é possível admitir aos estudantes o “fazer matemática”. Sabe-se que as disciplinas possuem um conhecimento e uma coerência peculiar. Especificamente no caso da Matemática, no aspecto educacional existe uma condição especial a resolução de problemas. Conforme Descartes descreveu: “[...] não nos tornaremos matemáticos, mesmo que decoremos todas as demonstrações, se o nosso espírito não for capaz, por si, de resolver qualquer espécie de problema”. (ROMANATTO, 2012, p. 303).

De acordo com o autor acima referenciado é possível descrever que na resolução de problemas:

> [...] os estudantes vão exercitar as suas mais diversas capacidades intelectuais como também mobilizar estratégias das mais diversas naturezas para encontrar a resposta, tais como: criatividade, intuição, imaginação,

> iniciativa, autonomia, liberdade, estabelecimento de conexões, experimentação, tentativa e erro, utilização de problemas conhecidos, interpretação dos resultados, etc. Enfim, é o que a Matemática pode fazer pelo estudante e não o contrário.
> A resolução de problemas relaciona uma Matemática mais intuitiva, mais experimental com a Matemática formal.
> A resolução de problemas, como metodologia de ensino da Matemática, pode fazer com que os conceitos e princípios matemáticos fiquem mais compreensivos para os estudantes uma vez que eles serão elaborados, adquiridos, investigados de maneira ativa e significativa. É a apropriação compreensiva do conteúdo, pois é uma Matemática mais qualitativa em destaque. (ROMANATTO, 2012, p. 303).

A utilização dessa metodologia no processo de ensino-aprendizagem admite que o aspecto do problema possa ser diferente da representação da solução, contextualizada por regras, fórmulas e algoritmos. Nessa representação do problema, poderão ser utilizados desenhos, esquemas, diagramas, entre outros, auxiliando a expressão dos raciocínios empregados na resolução dos problemas propostos pelo professor.

> Cabe ressaltar que o papel do professor é essencial, pois deve propor bons problemas, deve acompanhar e orientar a busca de soluções, coordenar discussões entre soluções diferentes, valorizar caminhos distintos que chegaram à mesma solução, validando-os ou mostrando situações em que o raciocínio utilizado pode não funcionar.
> O professor precisa trabalhar as soluções individuais, grupais e coletivas, sendo as últimas aquelas aceitas pela comunidade dos matemáticos. Assim é tarefa prioritária do professor organizar, sintetizar, formalizar os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos presentes nos problemas apresentados.
> A metodologia de ensino através da resolução de problemas traz simultaneamente as principais dimensões do trabalho docente: o ensino, a aprendizagem e a avaliação. No entanto, o envolvimento dos estudantes nas tarefas de resolução de problemas é diferente: uns mais, outros menos e alguns até indiferentes. Nesse sentido, devem ser utilizados vários tipos de avaliação até mesmo aquelas mais formais. (ROMANATTO, 2012, p. 303).

Na metodologia de ensino da Resolução de Problemas se encontra explícito o trabalho do professor, por esse motivo, na aula de resolução de problemas, o docente deve estar preparado para o casual e, também, para situações adversas que podem surgir durante a procura das soluções para os problemas apresentados.

Para Borba e Penteado (2001), os professores, em geral, escolhem trabalhar na zona de conforto, onde quase tudo é previsível no decorrer das aulas, sendo assim possível prevenir qualquer situação não pensada que possa ocorrer. De acordo com esses autores, na questão da resolução de problemas, os docentes entram, quase sempre, nas áreas que eles denominam zona de risco, na qual prevalece a imprevisibilidade e também a incerteza e por isso existe a necessidade da avaliação constante em relação às ações propostas. Portanto, o surgimento de situações imprevistas pode ser constante e o docente deve estar sempre preparado para enfrentá-las.

Na concepção de Carvalho e Gil-Perez (2000), o docente deve ter um domínio amplo do conteúdo matemático, conforme:

> a) Conhecer os grandes problemas que originaram a construção de determinado assunto;
> b) Conhecer as orientações metodológicas empregadas na construção de determinada parte da Matemática;
> c) Conhecer os obstáculos epistemológicos ou didáticos relacionados aos mais diversos conteúdos da Matemática;
> d) Saber selecionar conteúdos adequados e que sejam acessíveis aos estudantes e suscetíveis de interesse;
> e) Ter algum conhecimento dos assuntos matemáticos atuais;
> f) Estar preparado para aprofundar conhecimentos assim como adquirir outros e
> g) Ter conhecimentos de pesquisas em educação matemática. (ROMANATTO, 2012, p. 304).

É importante destacar que na Resolução de Problemas, o docente deva ter uma postura de mudança: ao invés de solicitar que os estudantes façam perguntas para que ele possa responder, o mais correto é o docente perguntar para que os estudantes possam responder. Apresenta-se assim, um docente problematizador de conteúdos.

Dante (1998) descreve que ensinar a resolver problema é uma tarefa árdua e mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. O docente deve estar habilitado para realizar perguntas aos seus alunos, para que os mesmos possam compreender o problema e se sentirem seguros para realizar perguntas ao docente quando necessário e entre eles mesmos.

> Estudar Matemática é resolver problemas. Portanto, a incumbência dos professores de Matemática, em todos os níveis, é ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é colocar o problema adequadamente. (BUTTS apud DANTE, 2003, p. 43).

O docente deve conduzir esse processo, propiciando situações que admitam surgir diferentes estratégias de resolução em sala de aula, fazendo com que os alunos socializem e ao mesmo tempo comparem os procedimentos metodológicos usados, sempre proporcionando uma ênfase ao plano de resolução e não apenas à obtenção de respostas certas dos problemas.

> Essa metodologia de ensino pode ser operacionalizada nas aulas de Matemática a partir de alguns requisitos que são considerados essenciais para o seu sucesso. Se esses requisitos não forem atendidos, corre-se o risco de esse processo de ensinar e de aprender conteúdos matemáticos ser interpretado com referenciais inadequados, assim como, ser desenvolvido de maneira incorreta.
> Assim, primeiramente, concepções e conhecimentos presentes nos mais variados aspectos que envolvem o trabalho docente precisam ser modificados se não atendem a perspectiva dessa metodologia de ensino.

> Então, educação, Matemática, ensino, aprendizagem, avaliação, entre outros aspectos, necessitam ser entendidos de outra maneira.
> Desse modo, ao se apropriarem de concepções e conhecimentos coerentes com a metodologia de ensino através da resolução de problemas, os professores podem até mesmo em um simples exercício do tipo “adicione 30 + 28”, transformá-lo em um problema para os estudantes ao solicitar que eles o resolvam de várias formas e as justifiquem. (ROMANATTO, 2012, p. 304-305).

Sendo assim podemos identificar um ponto favorável para mudanças expressivas no trabalho do docente que leciona Matemática, ou seja, no primeiro momento não existe a necessidade de transformações radicais, mas sim de atitude em relação a prática diária, onde podem ir adicionando atividades não padronizadas ao currículo em cada aula.

> Outra condição importante para o professor implantar a metodologia de resolução de problemas em suas aulas é que ele mesmo deve ser um resolvedor de problemas. Assim, antes de utilizar essa metodologia, ele deve vivenciar a resolução de problemas para experimentar etapas ou aspectos que envolvem a resolução de um problema. Por exemplo, a questão da leitura de um problema pode ser um aspecto a ser considerado no trabalho com os estudantes. Dificuldades com o vocabulário ou com o simbolismo matemático podem ser determinantes para a compreensão ou não do enunciado do problema. O exercício da mobilização de capacidades intelectuais e dos conhecimentos matemáticos é imprescindível na busca da solução de um problema. A comunicação matemática na exposição do raciocínio, que levou a resposta ao problema, precisa ser expressa para possibilitar a legitimação ou a refutação da resolução. Nesse contexto, o professor sendo também um resolvedor de problemas pode entender melhor, especialmente, as dificuldades que os estudantes enfrentam diante de uma tarefa ou atividade cuja solução é desconhecida. (ROMANATTO, 2012, p. 305).

De acordo com o autor acima referenciado o docente deve ter uma constante reflexão em relação a Resolução de Problemas sobre os trabalhos concretizados em sala de aula. Em diversas oportunidades, essa reflexão deve ser efetivada por meio de especialistas que possam validar as suas experiências bem-sucedidas e também qual o melhor caminho se deverá seguir para se superar as dificuldades que surgem ao se utilizar esse tipo de metodologia. O docente que não tem esses períodos de reflexão pode ficar desestimulado perante alguma dificuldade no decorrer do trabalho e desistir de trabalhar com essa metodologia, o que ocasionaria um grande prejuízo para os alunos.

2 FUNÇÕES

2.1 Um pouco de história das funções

Podemos dizer que o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e é de grande relevância em vários de seus campos, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressar fenômenos físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções.

Os babilônios, por volta do ano 2000 a.C., já utilizavam a ideia de função quando faziam tabelas colocando alguns números na primeira coluna e o produto desses números por um valor constante na segunda coluna. Assim, se o multiplicador fosse o 3, x o número da primeira coluna e y o número da segunda coluna, a cada x corresponderia um y, de acordo com a função: $y = 3x$.

x	y
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
$\vdots$	$\vdots$

No cotidiano aplica-se o conceito de função, por exemplo, sempre que se paga por produtos que se compra, pois, o valor a ser pago, em geral, varia em função da quantidade de objetos comprados.

Ao longo da história, vários matemáticos contribuíram para que se chegasse ao conceito de função atual. Ao matemático alemão Leibiniz atribui-se a denominação função que se utiliza hoje. A representação de uma função pela notação $f(x)$ foi atribuída ao matemático suíço Euler, no século XVII. O matemático alemão Dirichlet, escreveu uma primeira definição de função muito semelhante àquela que se usa atualmente:

"Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável independente e y, variável dependente".

No fim do século XIX, com a disseminação da teoria dos conjuntos, tornou-se possível a definição formal do conceito de função por meio de conjuntos:

"Dados dois conjuntos X e Y, uma função $f: X \to Y$ é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$".

2.2 Definição de função por meio de conjuntos

Para se definir função precisa-se, inicialmente, de alguns conceitos preliminares. Conforme a seguir:

- **Par ordenado**: Chama-se *par* todo conjunto formado por dois elementos. Para cada elemento a e cada elemento b, associa-se a existência de um terceiro elemento (a, b), que se denomina *par ordenado*, de modo que se tenha $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

- **Produto cartesiano**: Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Denomina-se produto cartesiano de A por B o conjunto $A \times B$, cujos elementos são todos pares ordenados (x, y), em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{ (x, y) | x \in A \ e \ y \in B\}$$

- **Relação binária**: Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo subconjunto R de $A \times B$.

$$R \text{ é } uma\ relação\ binária\ de\ A\ em\ B \Leftrightarrow R \subset A \times B.$$

Agora pode-se definir função. Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma relação binária f de A em B recebe o nome de *aplicação* de A em B ou *função* definida em A com imagens em B ou correspondência de A em B se, e somente se, para todo $x \in$ A existe um único elemento $y \in$ B tal que $(x, y) \in f$.

$$\boxed{f \text{ é aplicação de } A \text{ em } B \Longleftrightarrow (\forall x \in A, \exists!\ y \in B \mid (x, y) \in f\ ).}$$

2.3 Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Considere que toda função f de A em B é uma relação binária, então f tem um domínio e uma imagem.

Dada uma função f de A em B, o conjunto A chama-se *domínio* (D) da função e o conjunto B, *contradomínio* (CD) da função. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se *imagem* de x pela função f ou o valor assumido pela função f para x, e representa-se por $f(x)$.

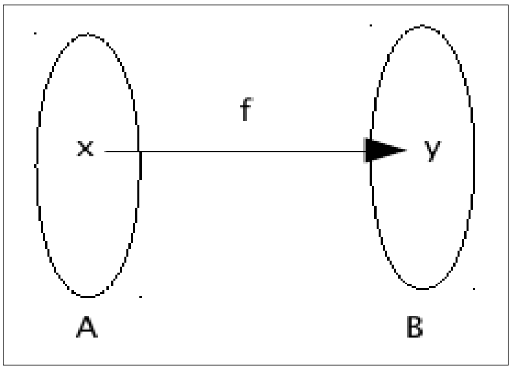


Figura 1: Domínio ($\boldsymbol{D = A}$) e contradomínio ($\boldsymbol{CD = B}$)

O conjunto de todos os y assim obtidos é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por $Im(f)$.

Observe que, feita a representação cartesiana da função f, tem-se:

- Domínio: conjunto D dos elementos $x \in A$ para os quais existe $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. Como, pela definição de função, todo elemento de A tem essa propriedade, tem-se nas funções que domínio é o conjunto de partida. Isto é, $D = A$.

- O conjunto D é o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f, isto é, é o conjunto formado por todas as abscissas dos pontos do gráfico de f.

- Imagem: o conjunto $Im(f)$ dos elementos $y \in B$ para os quais existe $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$; portanto o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio, isto é, $Im(f) \subset B$.

- O conjunto $Im(f)$ é o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de f, isto é, é o conjunto formado por todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f.

Observando o gráfico de uma função no plano cartesiano pode-se determinar o domínio D e o conjunto imagem $Im(f)$ da função, projetando o gráfico nos eixos. Veja:

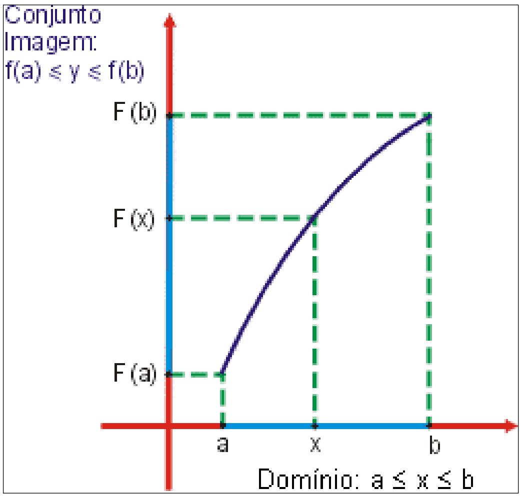


Figura 2: $\boldsymbol{D}\,(\boldsymbol{f}) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \,\}$ e $\boldsymbol{Im}\,(\boldsymbol{f}) = \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \leq \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \,\}$

- **Esquema de flechas:** Com o auxílio do esquema de flechas, observa-se quais as condições que devem satisfazer uma relação f de A em B para ser uma aplicação (ou função).

1) É necessário que todo elemento $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha.

2) É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha.

Uma relação binária f não é aplicação (ou função) se não satisfizer uma das condições acima, isto é:

1) se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma; ou

2) se existir um elemento de A do qual partam duas ou mais flechas.

Exemplos:

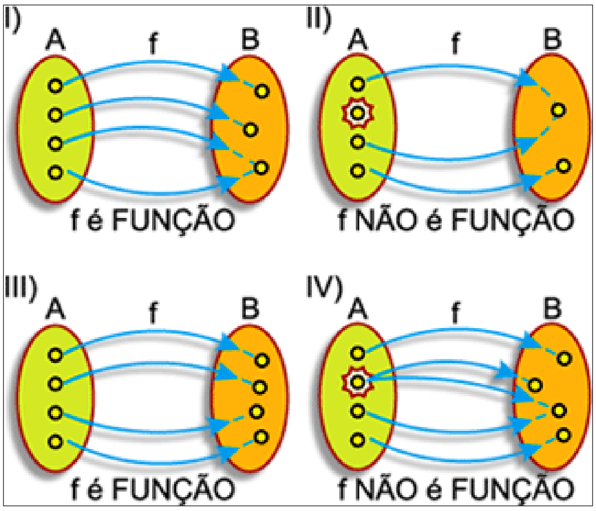


Figura 3: Diagrama de flechas

2.4 Definição de função através de gráficos cartesianos

Vejamos inicialmente o que é plano cartesiano: considera-se dois eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ perpendiculares em $\boldsymbol{O}$, os quais determinam o plano $\boldsymbol{\alpha}$. Dado um ponto $\boldsymbol{P}$ qualquer, $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\alpha}$, passa-se por ele duas retas: $\boldsymbol{x'}$ paralela a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y'}$ paralela a $\boldsymbol{y}$. Denomina-se $\boldsymbol{P_1}$ a interseção de $\boldsymbol{x}$ com $\boldsymbol{y'}$ e $\boldsymbol{P_2}$ a interseção de $\boldsymbol{y}$ com $\boldsymbol{x'}$. Sob essas condições, define-se:

a) *abscissa* de P é o número real x_P representado por P_1;

b) *ordenada* de P é o número real y_P representado por P_2;

c) *coordenadas* de P são os números reais x_P e y_P, geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P) em que x_P é o primeiro termo;

d) *eixo das abscissas* é o eixo x (ou Ox);

e) *eixo das ordenadas* é o eixo y (ou Oy);

f) *sistema* de eixos cartesianos ortogonal é o sistema xOy;

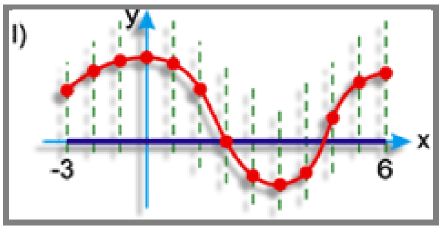
g) *origem* do sistema é o ponto O;

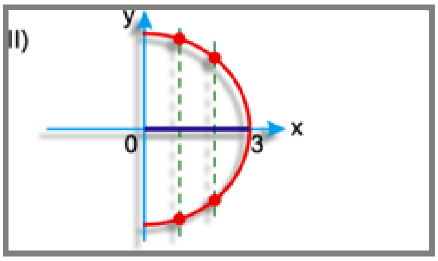
h) *plano cartesiano* é o plano α.

<u>*Observação*</u>: entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto dos pares ordenados (x_P, y_P) de números reais, existe uma correspondência biunívoca.

Pode-se verificar, pela representação cartesiana da relação binária f de A em B, se f é ou não função: basta verificar se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto $(x, 0)$, em que $x \in A$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto.

Exemplos:





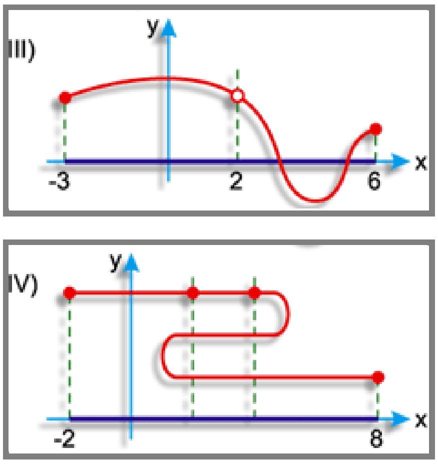


Figura 4: Representação cartesiana de relações

I) A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 6\}$, representada acima, é função, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de abscissa $x \in A$ encontra sempre o gráfico de f em um só ponto.

II) A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$, representada acima não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em mais de um ponto.

III) A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 6\}$, representada acima não é função, pois a reta vertical conduzida pelo ponto (2,0) não encontra o gráfico de f.

IV) A relação f de A em $\mathbb{R}$, com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 8\}$, representada acima não é função, pois há retas verticais que encontram o gráfico de f em mais de um ponto.

2.5 Notação

Em geral, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei pela qual, dado $x \in A$, determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B \ \ e \ \ y = f(x)\}$.

Isso significa que, dados os conjuntos A e B, a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Para indicar uma função f, definida em A com imagens em B segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usa-se uma das notações:

$$f: A \to B \qquad\qquad ou \qquad\qquad f: A \to B \ \mid y = f(x).$$
$$x \to f(x)$$

Exemplos:

I) $f: A \to B$ tal que $y = 2x$ é uma função que associa a cada x de A um y de B tal que $y = 2x$.

II) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $y = x^2$ é uma função que associa a cada x de $\mathbb{N}$ um y de $\mathbb{N}$ tal que $y = x^2$.

III) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$ é uma função que associa a cada x de $\mathbb{R}_+$ um y de $\mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$.

2.6 Funções numéricas

Algumas funções apresentam grande interesse na Matemática, por exemplo, as *funções numéricas*, isto é, aquelas em que o domínio A e o contradomínio B são subconjuntos de $\mathbb{R}$. As funções numéricas são também chamadas *funções reais de variável real.*

Observa-se que uma função f fica completamente definida quando são dados o seu domínio D, o seu contradomínio e a lei de correspondência $y = f(x)$.

Quando se refere à função f e dá-se apenas a sentença aberta $y = f(x)$ que a define, subentende que D é o conjunto dos números reais x cujas imagens pela aplicação f são números reais, isto é, D é formado por todos os números reais x para os quais é possível calcular $f(x)$.

2.7 Função composta

Considere os conjuntos A, B e C. Sejam $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow C$ funções. Chama-se *função composta* de f com g, denotada por $g \circ f: A \longrightarrow C$, a função definida por

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Observações:

1) A função composta $g \circ f$ só está definida quando a imagem da f está contida no domínio da g.

2) Em geral, $g \circ f \neq f \circ g$, isto é, a composição de funções não é comutativa.

Exemplos:

I) Considere os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0,1,2,3,4\}$ e $C = \{1,3,5,7,9\}$ e as funções: $f: A \to B$ definida por $f(x) = x^2$, $g: B \to C$, definida por $g(x) = 2x + 1$.

Assim temos $h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2x^2 + 1$, para $h: A \to C$. Porém, não é possível definir $f \circ g$, pois a imagem de g não está contida no domínio de f.

II) Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções dadas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$.

Assim, $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x + 1) = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 3$ e $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2$.

Notemos que as duas funções estão definidas, mas $g \circ f \neq f \circ g$.

2.8 Função inversa

Uma função $f: A \longrightarrow B$ é *inversível* se existe uma função $g: B \longrightarrow A$ tal que $(g \circ f)(x) = x,\ \forall\, x \in A$ e $(f \circ g)(y) = y,\ \forall\, y \in B$. A função g é chamada de *inversa* da função f.

Observações:

1) Se existir a inversa g de uma função f, então ela é única.

De fato, considere g' uma outra função, também inversa de f, ou seja, $(f \circ g')(x) = x$, $\forall\, x$ e $(g' \circ f)(x) = x$, $\forall\, x$.

Então,

$(f \circ g')(x) = x \Rightarrow g(f \circ g')(x) = g(x) \Rightarrow (g \circ f)(g'(x)) = g(x) \Rightarrow g'(x) = g(x), \forall\, x.$

Logo $g' = g$ e, portanto, a inversa de f é única.

2) A notação da inversa de f, quando existir, é dada por f^{-1}.

2.9 Função injetora, sobrejetora e bijetora

Uma função $f: A \longrightarrow B$ é injetora se, e somente se, para quaisquer x_1 e $x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em símbolos:

$$f \text{ é injetora } \Leftrightarrow [\forall\, x_1,\ x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)].$$

Notemos que a definição acima é equivalente à: uma função f de A em B é *injetora* se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e $x_2 \in A$, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Em símbolos:

$$f \text{ é injetora } \Leftrightarrow [\forall\, x_1,\ x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ ].$$

Uma função $f: A \longrightarrow B$ é *sobrejetora* se, e somente se, para todo $y \in B$ existe um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Em símbolos:

$$f \text{ é sobrejetora } \Leftrightarrow (\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \mid f(x) = y).$$

Notemos que $f: A \longrightarrow B$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(f) = B$.

Uma função f de A em B é *bijetora* se, e somente se, f é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo. Ou seja,

$$f \text{ é bijetora } \Leftrightarrow f \text{ é sobrejetora e injetora.}$$

A definição acima é equivalente a: uma função $f: A \longrightarrow B$ é bijetora se, e somente se, para qualquer elemento $y \in B$, existe um único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Em símbolos:

$$f \text{ é bijetora } \Leftrightarrow (\forall\, y \in B,\ \exists!\, x \in A \mid f(x) = y).$$

2.10 Tipos de funções

- **Função Afim ou Função Polinomial do 1º grau**

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *função afim* quando existem dois números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{f(x) = ax + b, \quad (a \neq 0).}$$

Teorema: O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b, (a \neq 0)$ é uma reta.

Demonstração: Basta verificar que três pontos quaisquer do gráfico de f são colineares. Sejam, P_1, P_2 e P_3 pontos do gráfico de f. Então temos:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b), \qquad P_2 = (x_2, ax_2 + b) \qquad e \qquad P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

Pela desigualdade triangular temos que: $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$, $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ e $d(P_2, P_3) \leq d(P_2, P_1) + d(P_1, P_3)$.

Assim, para verificar que os pontos $P_1, P_2\ e\ P_3$ são colineares é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2),\ d(P_2, P_3)\ e\ d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois (aqui está denotando $d(P_i, P_j)$ por distância do ponto P_i ao ponto P_j).

Sem perda de generalidade, pode-se supor que as abscissas $x_1, x_2\ e\ x_3$ foram ordenadas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

$$\mathrm{d}(P_2, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}.$$

$$\mathrm{d}(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Disso temos imediatamente que $\mathrm{d}(P_1, P_3) = \mathrm{d}(P_1, P_2) + \mathrm{d}(P_2, P_3)$.

Teorema: O conjunto imagem da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, com $(a \neq 0)$, é $\mathbb{R}$.

Demonstração: De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a.\frac{y-b}{a} + b = y.$$

O número a chama-se *taxa de variação* da função f, mas também é conhecido como *declividade* ou *coeficiente angular* dessa reta em relação ao eixo horizontal Ox.

O número b chama-se *valor inicial* da função f ou *coeficiente linear* dessa reta.

O valor de x, para o qual a função $f(x) = ax + b$ se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se *zero* da função afim. Para determinar o zero da função afim basta encontrar a raiz da equação $ax + b = 0$, que apresenta uma única solução $x = \frac{-b}{a}$.

Geometricamente, o zero da função afim $f(x) = ax + b$ é a abscissa do ponto $(\frac{-b}{a}; 0)$ de intersecção do gráfico da função com o eixo x, e b é a ordenada do ponto $(0, b)$ onde a reta, que é gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo Oy, pois para $x = 0$ tem-se $f(0) = a.0 + b = b$.

Uma função $f: A \to B$, definida por $y = f(x)$, é *crescente* se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. É *decrescente* se, para quaisquer dois valores x_1 e x_2 pertencentes a A, com $x_1 < x_2$, se tiver $f(x_1) > f(x_2)$.

Teoremas:

1) A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

Demonstração:

$$f(x) = ax + b \text{ é } crescente \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \forall x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0, \quad \forall x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \forall x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow a > 0.$$

2) A função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo.

Demonstração:

$$f(x) = ax + b \text{ é } decrescente \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \forall x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0, \forall x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \forall x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow a < 0.$$

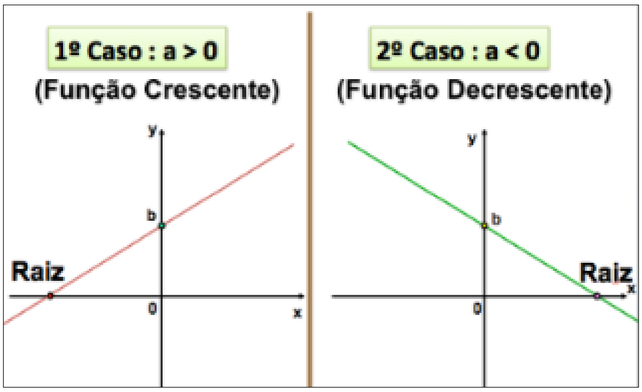


Figura 5: Função afim crescente e decrescente

- **Casos particulares de função afim**:

Função identidade: Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função *identidade* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x, isto é:

$$\boxed{f(x) = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.}$$

Em geral, denota-se tal função por $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $id_{\mathbb{R}}(x) = x$.

O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares. A imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$.

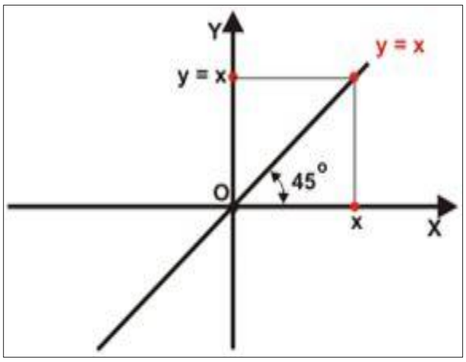


Figura 6: Função identidade

Função linear: Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função *linear* quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$, em que $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

$$\boxed{f(x) = ax, \quad (a \neq 0).}$$

O gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem e sua imagem é $\mathbb{R}$..

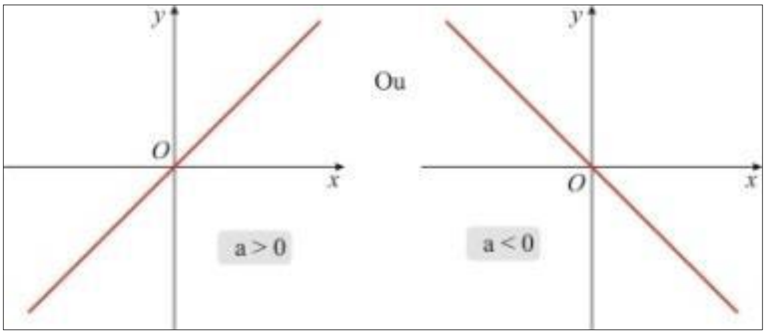


Figura 7: Função linear

- **Função Quadrática ou Função Polinomial do 2º grau**

Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática quando a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$ em que a, b, c são números reais dados e $a \neq 0$.

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ (a} \neq 0).}$$

O gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada *parábola*.

Ao construir o gráfico de uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, nota-se sempre que:

- Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.
- Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

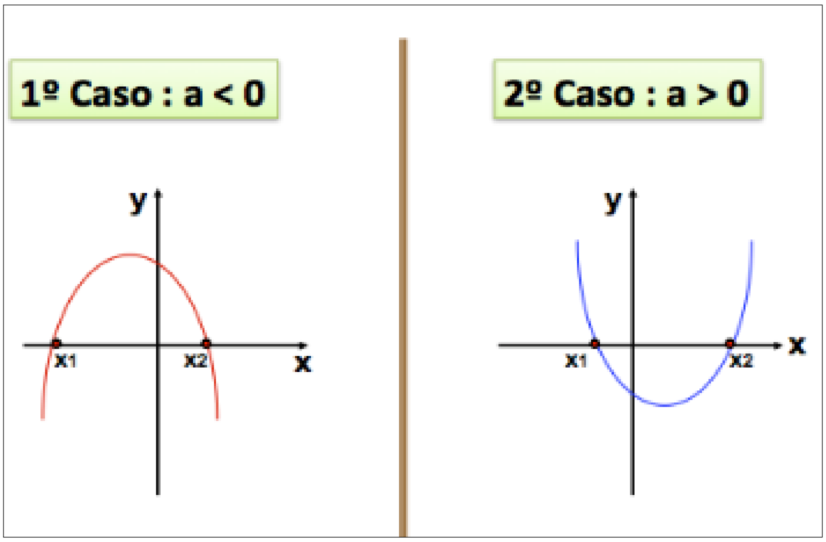


Figura 8: Concavidade da parábola

Para iniciar um estudo analítico mais detalhado da função quadrática é conveniente colocá-la em outra forma, chamada *forma canônica.*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right].$$

Representando $b^2 - 4ac$ por Δ, também chamado de *discriminante* do trinômio do segundo grau, tem-se a forma canônica.

$$\boxed{f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].}$$

Os *zeros* ou *raízes* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$, ou seja, as soluções da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Utilizando a forma canônica, tem-se:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

As raízes de uma função quadrática são, portanto, os valores de x para os quais $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, são as abscissas dos pontos $P_1 = (\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ e $P_2 = (\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0)$ em que a parábola intercepta o eixo Ox.

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática $ax^2 + bx + c = 0$ depende do valor obtido para o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, têm-se três casos a considerar:

- Quando Δ é positivo ($\Delta > 0$), há duas raízes reais e distintas que são:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

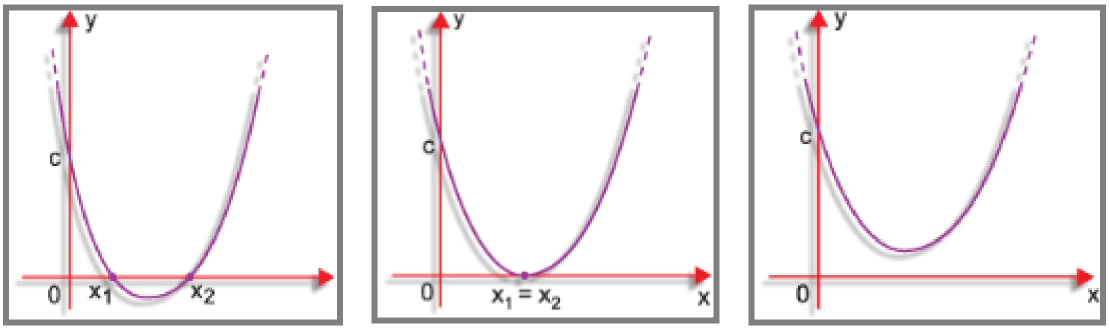
- Quando Δ é zero ($\Delta = 0$), há duas raízes reais e iguais (ou uma raiz dupla):

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

- Quando Δ é negativo ($\Delta < 0$), sabendo que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, pode-se afirmar que a equação não apresenta raízes reais.

Seguem os tipos de gráfico que se pode obter:

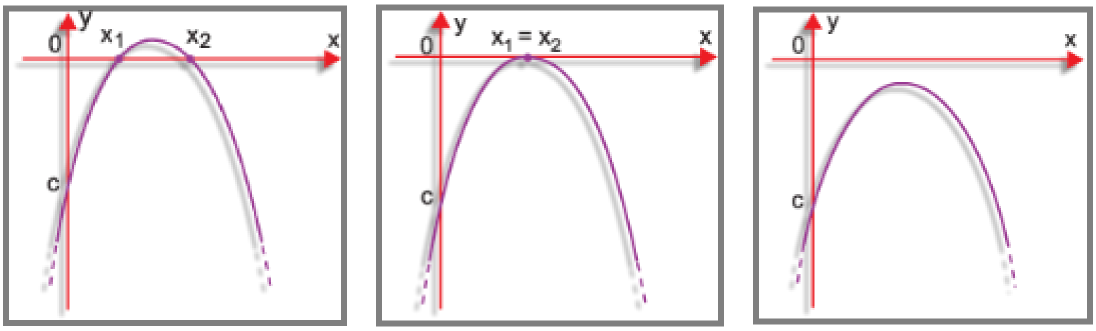
$a > 0$



$(\Delta > 0)$ $(\Delta = 0)$ $(\Delta < 0)$

Figura 9: Raízes reais da função quadrática $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, para $\boldsymbol{a > 0}$

$a < 0$



$(\Delta > 0)$ $(\Delta = 0)$ $(\Delta < 0)$

Figura 10: Raízes reais da função quadrática $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, para $\boldsymbol{a < 0}$

Define-se o número $y_m \in Im(f)$ como o *valor máximo* da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \geq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_m \in \mathrm{D}$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado *ponto de máximo* da função.

Na definição de que o número $y_m \in Im(f)$ é o *valor mínimo* da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_m \leq y$ para qualquer $y \in Im(f)$. O número $x_m \in \mathrm{D}$ tal que $y_m = f(x_m)$ é chamado *ponto de mínimo* da função.

Teoremas

1) Se $a < 0$, a função quadrática $y\ = ax^2 + bx + c$ admite o valor máximo $y_m = -\ \frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\ \frac{b}{2a}$.

2) Se $a > 0$, a função quadrática $y\ = ax^2 + bx + c$ admite o valor mínimo $y_m = -\ \frac{\Delta}{4a}$ para $x_m = -\ \frac{b}{2a}$.

Demonstração:

1) Considere a função quadrática na forma canônica:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad (1)$$

Sendo $a < 0$, o valor de y será tanto maior quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

Nessa diferença, $-\ \frac{\Delta}{4a^2}$ é constante (porque não depende de x, só depende de $a,\ b,$ c e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$)para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\ \frac{\mathrm{b}}{2a}$.

Para $x = -\ \frac{\mathrm{b}}{2a}$, tem-se na expressão (1):

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = \left[-\ \frac{\Delta}{4a}\right].$$

2) Prova-se de modo análogo, ou seja, considere a função quadrática na forma canônica:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad (1)$$

Como $a > 0$, o valor de y será tanto menor quanto menor for o valor da diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

Como citado acima, $-\ \frac{\Delta}{4a^2}$ é constante e $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo x real. Então a diferença assume o menor valor possível quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, ou seja, quando $x = -\ \frac{\mathrm{b}}{2a}$. E para $x = -\ \frac{\mathrm{b}}{2a}$, tem-se na expressão (1):

$$y = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = \left[-\ \frac{\Delta}{4a}\right].$$

O ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\ \frac{\Delta}{4a}\right)$ é chamado *vértice* da parábola representativa da função quadrática.

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como seu valor máximo ou mínimo. Uma das maneiras de determinar o vértice é lembrar que a parábola, que representa uma função quadrática, é simétrica em relação a um eixo vertical.

Teorema: O gráfico da função quadrática admite um eixo de simetria perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice.

Demonstração: Os pontos da reta perpendicular ao eixo dos x e que passa pelo vértice da parábola obedecem à equação $x = -\frac{b}{2a}$, pois todos os pontos dessa reta têm abscissa $-\frac{b}{2a}$.

Para provar que a parábola tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$, deve-se mostrar que dado um ponto $A = \left(\frac{-b}{2a} - r, y\right)$, com $r \in \mathbb{R}$, pertencente ao gráfico da função, existe um ponto $B = \left(\frac{-b}{2a} + r, y\right)$ também pertencente ao gráfico da função.

Tomando uma função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que $A = \left(\frac{-b}{2a} - r, y\right)$ pertence ao gráfico da função, tem-se:

$$y = f\left(\frac{-b}{2a} - r\right) = a\left[\left(\frac{-b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(\frac{-b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(\frac{-b}{2a} + r\right).$$

Provando, assim, que $B = \left(\frac{-b}{2a} + r, y\right)$ também pertence ao gráfico da função.

Determinando a posição desse eixo, encontra-se a abscissa do vértice, e com a abscissa do vértice pode-se obter a ordenada.

De modo geral, dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se $V = (x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola correspondente, tem-se então:

$a > 0 \iff y_v$ é o valor mínimo de $f \iff Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} | \ y \geq y_v\}$

$a < 0 \iff y_v$ é o valor máximo de $f \iff Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} | \ y \leq y_v\}$

De fato, para determinar a imagem da função quadrática, toma-se inicialmente a função na forma canônica:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ou seja, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Observa-se que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então tem-se que considerar dois casos:

- $a > 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ e, portanto, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$.
- $a < 0 \implies a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ e, portanto, $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a}$.

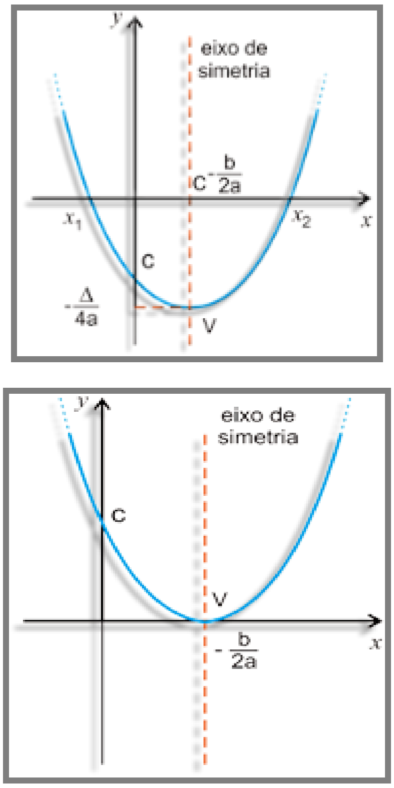
Resumindo:

$a > 0 \implies Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a} = y_v\}$,

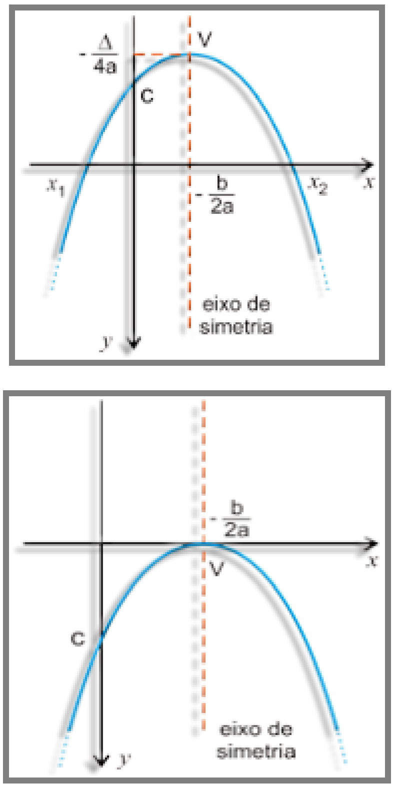
$a < 0 \implies Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a} = y_v\}$.

Observe que graficamente tem-se:

$\boxed{a > 0}$



$\boxed{a < 0}$



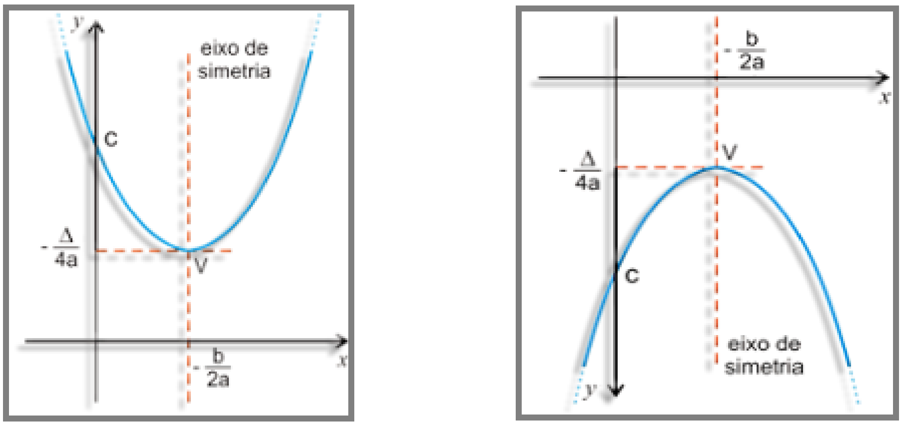


Figura 11: Gráficos possíveis de uma função quadrática

- **Função Exponencial**

Dentre os fenômenos naturais, um dos mais estudados atualmente pelos cientistas é o da radioatividade, que é uma propriedade que algumas substâncias têm de emitir radiações e se desintegrar, transformando-se em outras. Esse fenômeno tem sido de grande valia para geólogos e arqueólogos, auxiliando-os na determinação da idade das rochas e também dos objetos encontrados em suas escavações.

O tempo necessário para que uma substância desintegre metade de seus átomos é denominado *meia-vida*. Isso significa que a cada período transcorrido ocorrerá a desintegração de metade da quantidade dos átomos e, como esse processo continua, restará $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},$ etc. da substância original, conforme transcorra uma vez, duas vezes, três vezes meia-vida, e assim sucessivamente.

Nota-se nessa sequência de frações, o padrão das potências de base $\frac{1}{2}$, sendo o expoente de cada termo correspondente à quantidade de meias-vidas transcorridas. Assim, tem-se: $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots$, o que permite generalizar, escrevendo $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ para x meias-vidas transcorridas. A generalização desse padrão dará origem a uma função, chamada *função exponencial*.

Definição

Considerando um número a real positivo tal que $a \neq 1$, chama-se de *função exponencial de base* a a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada x real o número a^x, representada por $f(x) = a^x$.

Em símbolos:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow a^x$$

Propriedades

1ª) Na função $f(x) = a^x$, tem-se: $x = 0 \Longrightarrow f(0) = a^0 = 1$, isto é, o par ordenado $(0,1)$ pertence à função para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

2ª) A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$) . Portanto, dados os reais x_1e x_2, tem-se:

I) Quando $a > 1$:
$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

II) Quando $0 < a < 1$:
$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Para demonstrar esta propriedade precisa-se dos lemas e teoremas apresentados logo a seguir.

3ª) A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, é injetora pois, dados x_1 e x_2 tais que $x_1 \neq x_2$ (por exemplo $x_1 < x_2$), vem:

- se $a > 1$, tem-se: $f(x_1) < f(x_2)$;
- se $0 < a < 1$ tem-se: $f(x_1) > f(x_2)$ e, portanto, nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Lema 1: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1 \ e \ n \in \mathbb{Z}$, tem-se $a^n > 1$ se, e somente se, $n > 0$.

Demonstração:

1ª parte

Prova-se, por indução sobre n, a proposição: $n > 0 \Rightarrow a^n > 1$:

i) é verdadeira para $n = 1$, pois $a^1 = a > 1$;

ii) suponha-se que a proposição seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^p > 1$, e prova-se que é verdadeira para $n = p + 1$.

De fato, de $a > 1$, multiplicando ambos os membros desta igualdade por a^p e mantendo a desigualdade, pois a^p é positivo, tem-se:

$$a > 1 \Longrightarrow a.a^p > a^p \Rightarrow a^{p+1} > a^p > 1.$$

2ª parte

Prova-se, por redução ao absurdo, a proposição: $a^n > 1 \Rightarrow n > 0$.

Supondo $n \leq 0$, tem-se que $-n \geq 0$.

Nota-se que $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$ e, pela primeira parte, $-n > 0 \Rightarrow a^{-n} > 1$; portanto:

$$-n \geq 0 \Rightarrow a^{-n} \geq 1.$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a^n e mantendo o sentido da desigualdade, pois a^n é positivo, tem-se:

$$a^{-n} \geq 1 \Rightarrow a^n . a^{-n} \geq a^n \Rightarrow 1 \geq a^n$$

o que é um absurdo, pois contraria a hipótese $a^n > 1$. Logo, $n > 0$.

Lema 2: Sendo $a \in \mathbb{R},\ a > 1\ e\ r \in \mathbb{Q}$, tem-se $a^r > 1$ se, e somente se, $r > 0$.

Demonstração:

1ª parte

Prova-se a proposição $r > 0 \Rightarrow a^r > 1$.

Seja $r = \frac{p}{q}$ com $p,\ q \in \mathbb{N}^*$, então $a^r = a^{\frac{p}{q}}$. Pelo lema 1, se $a = (a^{\frac{1}{q}})^q > 1$ e $q > 0$, então $a^{\frac{1}{q}} > 1$. Ainda pelo mesmo lema, se $a^{\frac{1}{q}} > 1$ e $p > 0$, então $(a^{\frac{1}{q}})^p > 1$, ou seja, $(a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}} = a^r > 1$.

2ª parte

Prova-se a proposição $a^r > 1 \Rightarrow r > 0$.

Faça $r = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{Z}^*$, então $a^r = a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$.

Supondo $q > 0$ e considerando que na 1ª parte prova-se que $a^{\frac{1}{q}} > 1$, tem-se, pelo lema 1:

$$a^{\frac{1}{q}} > 1\ e\ (a^{\frac{1}{q}})^p > 1 \Rightarrow p > 0.$$

Logo, $q > 0\ e\ p > 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$.

Supondo agora $q < 0$, isto é, $-q > 0$, pelo lema 1 tem-se:

$$a^{-\frac{1}{q}} > 1\ e\ (a^{\frac{1}{q}})^p = (a^{-\frac{1}{q}})^{-p} > 1 \Rightarrow -p > 0 \Rightarrow p < 0.$$

Logo, $q < 0\ e\ p < 0 \Rightarrow r = \frac{p}{q} > 0$.

Lema 3: Sendo $a \in \mathbb{R}, a > 1, r\ e\ s$ racionais tem-se $a^s > a^r$ se, e somente se, $s > r$.

Demonstração:

$$a^s > a^r \Leftrightarrow a^s . a^{-r} > a^r . a^{-r} \Leftrightarrow a^{s-r} > 1 \overset{(lema\ 2)}{\Longleftrightarrow} s - r > 0 \Leftrightarrow s > r.$$

Lema 4: Sendo $a \in \mathbb{R},\ a > 1, e\ \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, tem-se $a^\alpha > 1$ se, e somente se, $\alpha > 0$.

Demonstração: Considere dois conjuntos que definem o número irracional α,

$A_1 = \{r \in \mathbb{Q}\ |r < \alpha\}$ e $A_2 = \{s \in \mathbb{Q}\ |s > \alpha\}$

e, também os conjuntos de potências de expoentes racionais que definem a^α,

$B_1 = \{ a^r \,|r \in A_1\}$ e $B_2 = \{ a^s \,|s \in A_2\}$.

<u>1ª parte</u>

Prova-se a proposição: $\alpha > 0 \implies a^\alpha > 1$.

Pela definição do número α irracional e positivo, existem $r \in A_1$e $s \in A_2$ tal que $0 < r < \alpha < s$.

Pelo lema 2, como $a > 1, r > 0 \; e \; s > 0$, tem-se a^r> 1 e a^s> 1.

Pelo lema 3, como $a > 1 \; e \; r < s$, tem-se $1 < a^r < a^s$ e, agora, pela definição de potência de expoente irracional, vem: $1 < a^r < a^\alpha < a^s$, isto é, $a^\alpha > 1$.

<u>2ª parte</u>

Prova-se agora a proposição: $a^\alpha > 1 \implies \alpha > 0$ (por redução ao absurdo).

Suponha-se $\alpha < 0$, isto é, - $\alpha > 0$.

Pela primeira parte deste teorema, tem-se:

$$\left.\begin{matrix} a > 1, -\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ -\alpha > 0 \end{matrix}\right\} \implies a^{-\alpha} > 1.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade obtida por $a^\alpha > 0$, tem-se que $a^{-\alpha}. a^\alpha > a^\alpha$, isto é, $1 > a^\alpha$, o que contraria a hipótese. Logo $\alpha > 0$.

Teorema 1: Sendo $a \in \mathbb{R},\ a > 1,\ b \in \mathbb{R}$, tem-se que $a^b > 1$ se, e somente se, $b > 0$.

Demonstração:

$$b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in \mathbb{Q} \overset{(lema\ 2)}{\Longleftrightarrow} \left(a^b > 1\right) \Leftrightarrow b > 0 \\ b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \overset{(lema\ 4)}{\Longleftrightarrow} \left(a^b > 1\right) \Leftrightarrow b > 0 \end{cases}$$

Teorema 2: Sendo $a \in \mathbb{R},\ a > 1, x_1 \in \mathbb{R} \; e \; x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se que $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 > x_2$.

Demonstração:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \overset{(teorema\ 1)}{\Longleftrightarrow} x_1 - x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 > x_2.$$

Teorema 3: Sendo $a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1 \; e \; b \in \mathbb{R}$, tem-se que $a^b > 1$ se, e somente se, $b < 0$.

Demonstração:

Se $0 < a < 1$, então $\frac{1}{a} > 1$.

Seja $c = \frac{1}{a} > 1$; pelo teorema 1, tem-se $c^{-b} > 1 \Leftrightarrow -b > 0$.

Substituindo $c = \frac{1}{a}$, tem-se $c^{-b} = (\frac{1}{a})^{-b} = a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$.

Teorema 4: Sendo $a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1, x_1 \in \mathbb{R}\ e\ x_2 \in \mathbb{R}$, tem-se que $a^{x_1} > a^{x_2}$ se, e somente se, $x_1 < x_2$.

Demonstração:

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} > 1 \Leftrightarrow a^{x_1 - x_2} > 1 \xLeftrightarrow{(teorema\ 3)} x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

Observações:

1) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, com $a > 1$, é crescente pois $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

2) A função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, é decrescente pois $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

3) Sabe-se, através do estudo de potências de expoente real, que se $a \in \mathbb{R}_+^*$ então $a^x > 0$, para todo x real.

Afirma-se então, que a imagem da função exponencial é: $Im = \mathbb{R}_+^*$.

Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = a^x$, pode-se dizer que:

1) a curva representativa está toda acima do eixo x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) intercepta o eixo y no ponto de ordenada 1, pois $f(0) = a^0 = 1$.

3) se $a > 1$, é o gráfico de uma função crescente, e se $0 < a < 1$, é de uma função decrescente e toma um dos seguintes aspectos:

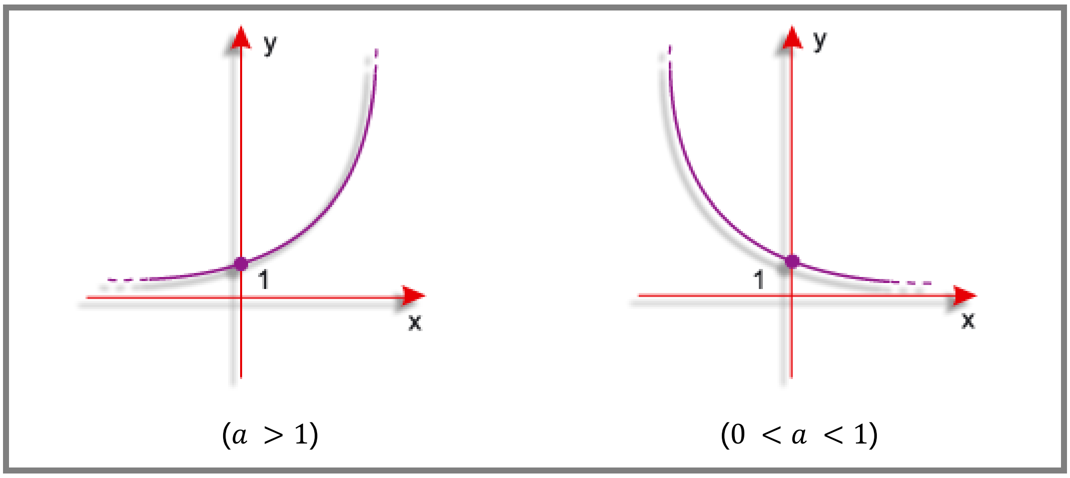


Figura 12: Representação gráfica de uma função exponencial

- **Função Logarítmica**

Desde a Antiguidade, época do auge da civilização babilônica, os cálculos relacionados à Astronomia eram muito trabalhosos.

Até o início do século XVII, multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes eram tarefas extremamente árduas, realizadas com base nos senos. Surgiram, então, as primeiras tábuas de logaritmos, criadas pelos matemáticos Jost Bürgi (1552-1632) e John Napier (1550-1617).

Apesar do logaritmo de Napier não ser exatamente como o logaritmo moderno que se verá, nem ser associado ao conceito de expoente, sua essência é a mesma, e contribuiu para facilitar os cálculos, principalmente, ao transformar as operações de multiplicação em adição e as de divisão em subtração.

Atualmente, com o uso das calculadoras eletrônicas, as operações de multiplicar, dividir, calcular potências e extrair raízes não representam mais dificuldade. Mas nem por isso os logaritmos tornaram-se inúteis, pois a possibilidade de definir logaritmos como expoente (mérito do inglês John Wallis, em 1685) e a ideia de base para os logaritmos (apresentada pelo galês William Jones, em 1742), transformam o logaritmo em um imprescindível instrumento de resolução de equações exponenciais.

Cálculos com logaritmos estão presentes em várias situações reais, como a medida da magnitude dos terremotos, feita por meio da escala Richter, assim batizada, e adotada em 1935, em homenagem ao físico norte-americano Charles F. Richer (1900-1985). Ela não mede os efeitos do terremoto, mas indica sua força em termos de energia liberada, conforme medida por sismógrafos. A escala começa em 1 e não tem limite superior. Como tem base logarítmica, cada aumento da magnitude em um número inteiro representa um aumento 10 vezes na amplitude do terremoto.

Definição

Sejam a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$. Chama-se *logaritmo de b na base a,* denotado por $\log_a b$, o expoente x que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Em símbolos:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Dado um número real a $(0 < a \neq 1)$, chama-se *função logarítmica de base a* a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada x o número $\log_a x$. Em símbolos:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \log_a x \end{aligned}$$

Propriedades

1ª) Se $0 < a \neq 1$, então as funções f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração: Para provar esta propriedade basta mostrar que $f \text{o}\, g = id_{\mathbb{R}}$ e $g\, \text{o} f = id_{\mathbb{R}_+^*}$.

De fato,

$$(f \text{o}\, g)(x) = f\big(g(x)\big) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x \text{ e}$$
$$(g \text{ o } f)(x) = g\big(f(x)\big) = a^{f(x)} = a^{\log_a x} = x.$$

2ª) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ ($0 < a < 1$).

Demonstração:

<u>1ª parte</u>

Prova-se inicialmente a implicação $a > 1 \Longrightarrow (\forall\, x_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, com\ x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2)$.

De fato, quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos com $x_1 < x_2$ tem-se, por consequência da definição de logaritmos, que $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ e, agora pelo teorema 2 de função exponencial, conclui-se que $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

Prova-se agora a implicação

$$(\forall\, x_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a x_1 < \log_a x_2 \Longrightarrow x_1 < x_2\ ) \Longrightarrow a > 1\,.$$

Considerando

$$\log_a x_2 = y_2 \Longrightarrow x_2 = a^{y_2}$$
$$\log_a x_1 = y_1 \Longrightarrow x_1 = a^{y_1}$$

Tem-se $y_1 < y_2 \Longrightarrow a^{y_1} < a^{y_2}$.

Pelo fato da função exponencial ser crescente para base maior que 1, conclui-se que $a > 1$.

<u>2ª parte</u>

Prova-se a implicação

$$0 < a < 1 \Longrightarrow (\forall\, x_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall\, x_2 \in \mathbb{R}_+^*, com\, x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2)\,.$$

De fato, quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos e $x_1 < x_2$ tem-se, por consequência da definição de logaritmos, que $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$. Assim, pelo teorema 4 de função exponencial, como $0 < a < 1$, conclui-se que:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2\,.$$

Prova-se agora a implicação

$$(\forall x_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x_2 \in \mathbb{R}_+^*, \quad \log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow x_1 < x_2) \Rightarrow 0 < a < 1\,.$$

Considerando

$$\log_a x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = a^{y_2}$$
$$\log_a x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = a^{y_1}$$

tem-se $y_1 > y_2 \Rightarrow a^{y_1} < a^{y_2}$.

Pelo fato da função exponencial ser decrescente para base maior que 0 e menor que 1, conclui-se que $0 < a < 1$.

Gráfico

Com relação ao gráfico cartesiano da função $f(x) = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$), pode-se dizer que:

1) está todo à direita do eixo y ($x > 0$);

2) corta o eixo x no ponto de abscissa 1 ($\log_a 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$);

3) se $a > 1$ a função é crescente, e se $0 < a < 1$ a função é decrescente, como mostram os gráficos abaixo:

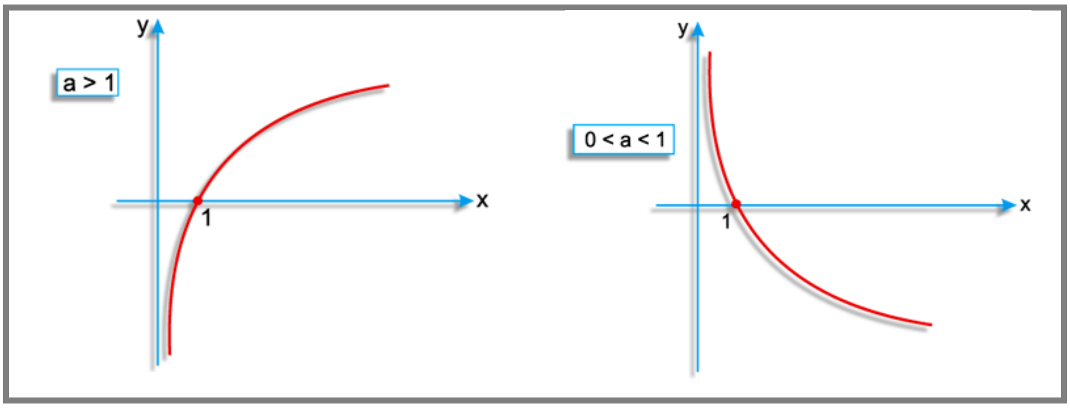


Figura 13: Representação gráfica de uma função logarítmica

4) é simétrico em relação à reta $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares) ao gráfico da função $g(x) = a^x$, e toma um dos aspectos a seguir:

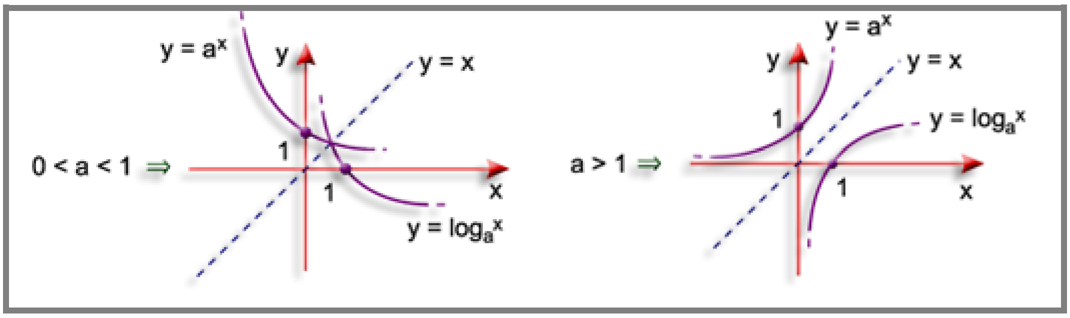


Figura 14: Simetria entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica

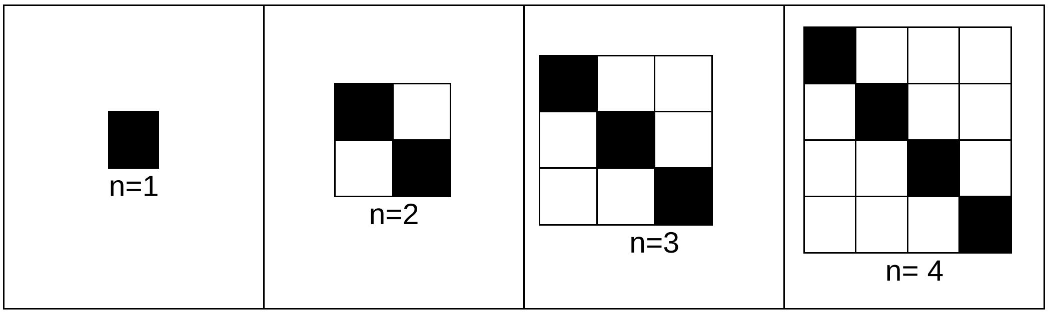
3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM APLICAÇÕES EM FUNÇÕES

Neste capítulo, será apresentado o desenvolvimento de uma atividade sobre Resolução de Problemas com aplicações em funções, proposta aos alunos da 1ª série do Ensino Médio de uma Escola Estadual pertencente à Diretoria de Ensino de Votuporanga, situada no município de Floreal/SP, onde atuo como professora efetiva do quadro do magistério da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, no decorrer do quarto bimestre do ano de 2015.

A seguir, serão apresentados alguns exemplos de problemas não convencionais e problemas do cotidiano, que foram utilizados nessa atividade.

3.1 Atividade

1) Observe a sequência de figuras. Em seguida, responda:



a) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 6ª figura dessa sequência?

b) Escreva uma função $y = f(n)$ que permita calcular a quantidade de quadradinhos brancos, em função da posição n da figura, na sequência.

c) Que tipo de função você encontrou?

d) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 39ª figura dessa sequência?

<u>Questionamentos para possíveis interferências</u>:

1.1) Que tipo de figura você observa no todo?

1.2) Existe alguma relação entre a posição n da figura e o número de quadradinhos pretos?

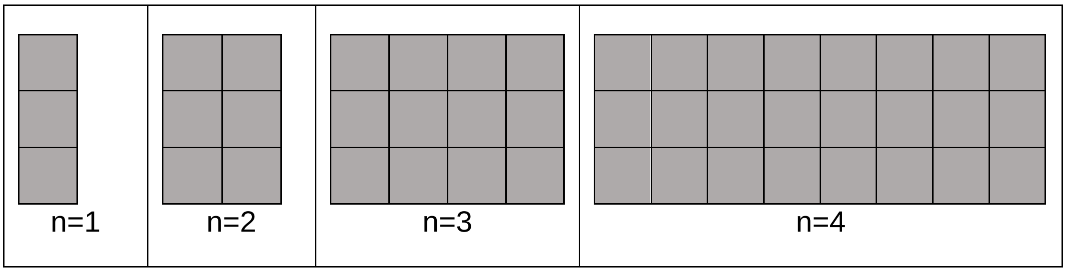
1.3) É possível calcular a área da figura toda tendo como unidade padrão o quadradinho?

1.4) E a área dos quadradinhos brancos?

(Sugestão: você pode organizar os dados em uma tabela como a que segue).

Posição da figura na Sequência	Nº de quadradinhos pretos	Nº de quadradinhos brancos y= $f(n)$	Nº de quadradinhos total
1			
2			
3			
4			
n			

2) Observe a sequência de figuras e responda às questões propostas.



a) Quantos quadradinhos comporão a quinta figura dessa sequência? E a sexta?

b) Associe a essa sequência uma outra que indique o número de quadradinhos de cada figura, essa sequência é conhecida? Justifique.

c) Determine uma função $f(n)$ que possa ser utilizada para determinar o número total de quadradinhos da n-ésima figura dessa sequência.

<u>Questionamentos para possíveis interferências:</u>

2.1) Que tipo de figura você observou?

2.2) Quais são suas dimensões?

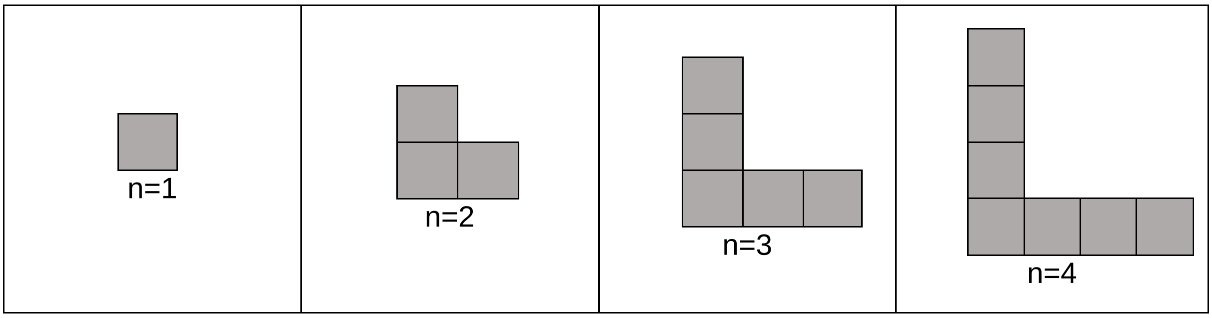
2.3) Observou algum padrão nas dimensões?

2.4) É possível calcular a área da figura toda tendo como unidade padrão o quadradinho?

2.5) É possível representar o número total de quadradinhos de cada figura por uma sequência conhecida?

2.6) Justifique se existe alguma relação entre a posição n da figura e sua área total.

3) Nesta figura, cada quadradinho é formado por quatro palitos de comprimentos iguais.



a) Quantos palitos serão necessários para a construção da sexta figura? E da sétima?

b) A sequência formada pelas quantidades de palitos necessárias para a construção das figuras resulta em uma sequência conhecida? Justifique sua resposta.

c) Escreva uma função $f(n)$ que expresse a quantidade total de palitos da figura que ocupa a posição n nessa sequência.

<u>Questionamentos para possíveis interferências:</u>

3.1) É possível representar o número total de palitos que compõe cada figura por uma sequência?

3.2) Observou algum padrão nessa sequência?

3.3) É possível calcular o número de palitos da n-ésima figura tendo como referência a sequência encontrada?

3.4) Justifique se existe alguma relação entre a posição n da figura e o número total $f(n)$ de palitos.

4) Para delimitar um galinheiro em um amplo quintal, dispõe-se de 80m (lineares) de uma tela. Deseja-se usar completamente a tela disponível e a região cercada deve ser um retângulo. A área A do retângulo é uma função do comprimento de seus lados.

a) Escreva uma função $y = f(x)$ que represente a área desse retângulo.

b) Quais devem ser as medidas dos lados do retângulo para que sua área seja a maior possível?

c) Qual é o valor da área máxima?

<u>Questionamentos para possíveis interferências:</u>

4.1) De quantas maneiras pode-se pensar nesse retângulo?

4.2) Observou alguma relação entre as possíveis dimensões desse retângulo?

4.3) É possível representar as dimensões desse retângulo por incógnitas?

4.4) De que forma pode-se relacionar as incógnitas com as informações do enunciado?

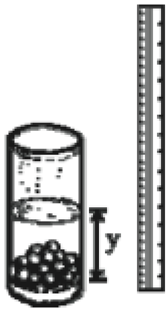
4.5) Utilizando a fórmula da área de um retângulo, é possível encontrar uma função que determina suas dimensões para que sua área seja máxima?
4.6) Existe alguma fórmula que pode-se aplicar para encontrar o valor máximo de uma função?

5) Um criador de gado tem um bezerro de determinada raça para vender. Esse bezerro pesa atualmente 200 kg e engorda 2 kg por dia. Inicialmente, o criador acha que, quanto mais tempo esperar para vender o bezerro, melhor será, pois, o bezerro ganhará mais peso. Entretanto, um de seus funcionários lembra ao criador de que o preço da venda, que hoje é de R$ 60,00 por kg, está caindo R$ 0,50 por dia. A escolha da melhor data para vender o bezerro depende, então, de duas variáveis: a engorda diária e a queda nos preços pagos por kg. Com base nas informações fornecidas, mantida a situação atual, pede-se:

a) Determine uma função $y = f(x)$, onde o valor y represente o valor a ser arrecadado pelo criador na venda do bezerro (em R$) em função do tempo x de espera (em dias).
b) Determine a melhor data para vender o bezerro, contada a partir de hoje.
c) Calcule o valor em R$ que será arrecadado em tal venda.

<u>Questionamentos para possíveis interferências:</u>
5.1) Quais são os dados do problema?
5.2) O que se precisa calcular?
5.3) É possível representar os valores desconhecidos por variáveis?
5.4) De que forma pode-se relacionar as variáveis com as informações do enunciado?
5.5) É possível encontrar uma função $f(x)$ que determina o preço a ser arrecadado pelo criador na venda do bezerro (em R$) em função do tempo x de espera (em dias).
5.6) Existe alguma fórmula que se pode aplicar para encontrar o valor (y) e a data (x) ideal para vender o bezerro?

6) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura abaixo. Como resultado do experimento, conclui-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. O quadro a seguir demonstra alguns resultados do experimento realizado.



Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

A expressão algébrica que permite calcular o nível de água (y) em função do número de bolas é:

a) $y = 30x$

b) $y = 25x + 20{,}2$

c) $y = 1{,}27x$

d) $y = 0{,}7x$

e) $y = 0{,}07x + 6$

<u>Questionamentos para possíveis interferências:</u>

6.1) Quais são os dados do problema?

6.2) O que se precisa calcular?

6.3) Observou alguma regularidade nos dados apresentados na tabela?

6.4) De que forma pode-se relacionar as variáveis do enunciado?

6.5) Qual seria o nível de água sem nenhuma bolinha?

6.6) É possível saber quantos centímetros o nível sobe ao acrescentar uma bolinha?

6.7) É possível encontrar uma função $y(x)$ que determina o nível de água (em cm) em função do número de bolas (x) colocadas dentro do copo?

7) Suponha que o total de sapatos produzidos por uma pequena indústria é dado, aproximadamente, pela função $S(t) = 1000log_{2}(1 + t)$, onde t é o número de anos e S é o número de sapatos produzidos, contados a partir do início da atividade da indústria. Determine o tempo necessário para que a produção da indústria seja de 3000 pares de sapatos.

a) 4 anos

b) 5 anos

c) 7 anos

d) 3 anos

e) 6 anos

<u>Questionamentos para possíveis interferências:</u>

7.1) Entendeu o enunciado do problema?

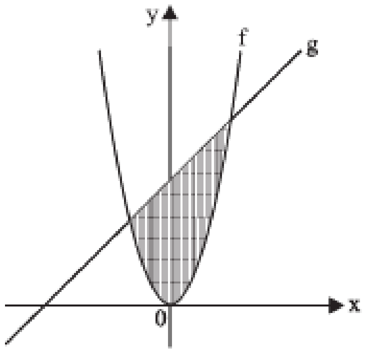
7.2) O que se precisa calcular?

7.3) De que forma pode-se substituir as informações dadas na função apresentada?

7.4) Precisa-se usar alguma propriedade para calcular o que se pede?

7.5) Já resolveu algum problema semelhante?

8) Na parte sombreada da figura, as extremidades dos segmentos de reta paralelos ao eixo y são pontos das representações gráficas das funções definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 6$, conforme indicado. A medida do comprimento do segmento de reta localizado no eixo das abscissas definido por esses pontos é:



a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

<u>Questionamentos para possíveis interferências:</u>

8.1) Entendeu o enunciado do problema?

8.2) O que se precisa calcular? Como pode-se fazer isso?

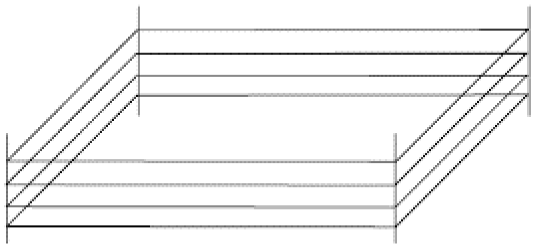
8.3) Quais os tipo de função estão representadas graficamente? Elas possuem pontos em comum?

8.4) Quais são os pontos de intersecção das funções?

8.5) De que forma pode-se usar esses pontos para calcular o comprimento desse segmento de reta?

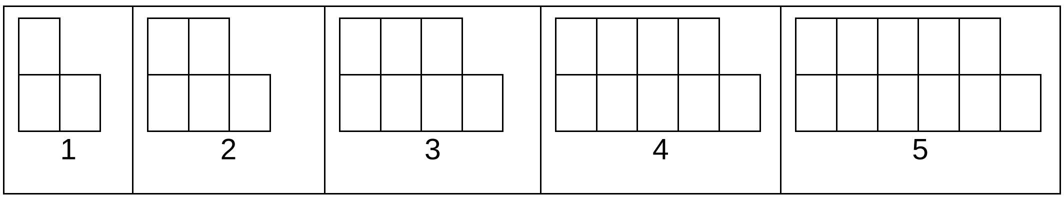
3.2 Sugestões de problemas auxiliares e problemas correlatos

1) (Problema auxiliar ao 4 da atividade aplicada). Com um rolo de tela de 26 metros de comprimento, seu José construiu um galinheiro retangular com área de $40m^2$.



Qual o comprimento e a largura desse galinheiro? Justifique sua resposta.

2) (Problema correlato ao 3 da atividade aplicada) A posição da figura na sequência a seguir está indicada por um número



O número de quadrículas de cada figura relaciona-se com o valor (n) de sua posição por:

a) $n + 1$ b) $2n$ c) $2n + 1$ d) $3n$ e) $3n - 1$

3) (Problema correlato ao 7 da atividade aplicada). Suponha que o preço de um automóvel sofra uma desvalorização em função do tempo (t) dado em anos e definido por $P(t) = 40.000(0,8)^t$. Depois de quanto anos aproximadamente seu preço cairá para cerca da metade do preço novo (fazendo $log\ 2 = 0,30$)?

a) 2 anos b) 3 anos c) 5 anos d) 6 anos e) 8 anos

4) (Problema correlato ao 5 da atividade aplicada). Uma indústria tem seu lucro mensal, $L(x)$, em reais, dado em função do número de peças produzidas (x) pela expressão $L(x) = 400x - x^2$. Responda:

a) O lucro para a venda de 300 peças é?

b) Qual o lucro máximo?

c) Quantas peças precisarão vender para obter o lucro máximo?

d) Quais são os zeros dessa função?

e) Para ter lucro de R$ 17.500,00, deve-se produzir quantas peças?

5) (Problema auxiliar ao 6 da atividade aplicada) Em uma indústria de autopeças, o custo de produção de peças é de R$ 12,00 fixos mais um custo variável de R$ 0,70 por unidade produzida. Se em um mês foram produzidas x peças, então a lei que representa o custo total dessas x peças é:

a) $\mathrm{f(x)} = 0{,}70 - 12\mathrm{x}$

b) $\mathrm{f(x)} = 12 - 0{,}70\mathrm{x}$

c) $\mathrm{f(x)} = 12 + 0{,}70\mathrm{x}$

d) $\mathrm{f(x)} = 0{,}70 + 12\mathrm{x}$

e) $\mathrm{f(x)} = 12 \cdot 0{,}70\mathrm{x}$

6) (Problema correlato ao 6 da atividade aplicada) O preço P (em reais) a cobrar em uma corrida de táxi é composto por uma quantia a fixada, igual para todas as corridas, mais uma parcela variável, que é diretamente proporcional ao número x de quilômetros rodados: $P = a + bx$ (onde b é o custo de cada quilometro rodado). Em certa cidade, tem-se que o preço cobrado por uma corrida de 10km é R$23,00 e de uma corrida de 20km é R$31,00. Determine:

a) Qual é o preço a cobrar por cada km rodado?

b) Qual é o preço fixo em uma corrida?

3.3 Relatório da atividade proposta

Existem diversos problemas que trabalham diferentes habilidades. Não tivemos a intenção de apresentar uma lista completa de tipos de problemas, mas sim mostrar algumas possibilidades de trabalho com problemas.

Como a interpretação de enunciados é uma preocupação, a atividade proposta teve por objetivo trabalhar o entendimento de funções em diferentes contextos por meio de situações-problema. Para resolver a atividade, a sala foi dividida em grupos de 2 e 3 alunos, os problemas foram apresentados por uma lista impressa, os alunos leram o enunciado e tiveram a oportunidade de estabelecer relações entre os conceitos matemáticos e as informações apresentadas para chegar à solução.

A atividade foi idealizada partindo do pressuposto de algumas habilidades serem primordiais na construção e encadeamento do processo de desenvolvimento do conhecimento matemático necessários para a aprendizagem formativa e processual sobre funções. Cada problema está relacionado a uma habilidade do conteúdo curricular de matemática, que já foram desenvolvidos em determinados períodos do ano letivo. A atividade proposta teve bom resultado pois em alguns problemas não foram necessários questionamentos e intervenções e os alunos utilizaram-se de diferentes estratégias de resolução e encontraram à solução. Mas tiveram problemas em que o percurso foi verbalizado por dúvidas, e direcionado por meio das apresentações de hipóteses, questionamentos e utilização de problemas auxiliares e correlatos. Os questionamentos, problemas auxiliares e os problemas correlatos foram apresentados em *data show* exposto no meio da sala com a finalidade de criar oportunidade, incentivar e conduzir o aluno a estabelecer relações mais adequadas e favoráveis para a compreensão do problema proposto, propiciando aos alunos desenvolverem um percurso mais prazeroso até a solução satisfatória do problema.

Possibilitar ao aluno lançar mão de diferentes estratégias para resolver os problemas propostos é permitir que use os seus conhecimentos e a sua criatividade. Escolher diferentes recursos para resolver o problema, como desenhos, gráficos, tabelas, esquemas, apoio de materiais concretos, são estratégias que possibilitam diferentes maneiras de encontrar a solução e torná-lo mais interessante.

Sendo assim, nos problemas apresentados foram trabalhadas as seguintes habilidades:

<u>Problema 1</u>

<u>Habilidades</u>: Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente por uma função quando possível.

<u>Observações:</u>

- O trabalho com sequências pode favorecer a compreensão da álgebra, uma vez que um dos processos de ensino e aprendizagem diz respeito à generalização de regularidades. É a partir da observação de casos particulares que o aluno poderá descobrir regularidades, padrões e, a partir deles, levantar hipóteses, fazer conjecturas etc. Enfim, esse trabalho favorece o desenvolvimento do raciocínio dedutivo.
- Assim sendo, essa poderá ser uma forma de generalizar quantidades indicadas por figuras, mesmo que estas sejam inacessíveis. Essa estratégia permite trabalhar conceitos de variáveis e até incógnitas expressas por uma lei de formação (função), desde que, seja solicitado indicar a posição em que determinada figura aparecer.

<u>Comentários</u>: Os alunos conseguiram interpretar a proposta do enunciado da questão, sabendo estruturar todas as situações apresentadas, desenvolvendo várias estratégias de resolução como a elaboração de tabelas, construção de figuras e cálculos algébricos expressos por uma lei de formação desenvolvida por um raciocínio dedutivo.

<u>Problemas 2 e 3:</u>

Habilidades: Conhecer as características principais das progressões aritméticas e geométricas; expressão do termo geral; soma dos n primeiros termos, entre outras; sabendo aplicá-las em diferentes contextos.

Observação:

- Ao desenvolver os conceitos relativos às habilidades descritas para à questão, é importante destacar que, além da aplicação de atividades similares ao problema apresentado, é importante que o aluno desenvolva uma capacidade de: organização da resolução e de identificar as informações pertinentes, saber organizá-las em tabelas e sequências, classificá-las quanto a sua natureza e realizar cálculos de acordo com os conhecimentos obtidos.

Comentários: No problema 2 os alunos conseguiram interpretar a proposta do enunciado da questão, identificaram o tipo de sequência, aplicaram o raciocínio dedutivo e expressaram por uma lei de formação a área da n-ésima figura, mas alguns não conseguiram estruturar todas as situações apresentadas, e foram necessários os questionamentos para auxiliar o desenvolvendo das estratégias de resolução como a definição de uma progressão geométrica e o cálculo de seu termo geral que representa nesse caso a área da figura apresentada. No problema 3 alguns alunos não interpretaram corretamente a proposta do enunciado da questão, identificaram a sequência como uma progressão aritmética de razão 2 que representa a área da figura e não como uma progressão aritmética de razão 6 que representa o número de palitos necessários para a construção da n-ésima, mas desenvolveram em ambos os casos estratégias diferentes de resolução como a aplicação da fórmula do termo geral de uma P.A., assim como o raciocínio dedutivo através do cálculo mental.

Problema 4:

Habilidades: Determinar área e perímetro de figuras planas; expressar problemas por meio de funções; descrever características fundamentais de uma função do 2º grau e seus valores máximo e mínimo.

Observações:

- O trabalho com medidas de áreas e perímetros perpassa todo ensino fundamental e é importante para consolidar conceitos geométricos mais acentuados em séries posteriores e no ensino médio.
- Espera-se que o aluno saiba modelar um problema matemático de áreas e perímetros, expressando-o numa linguagem algébrica e que demonstre conhecimento no tratamento dessas expressões. Além disso, o problema utiliza na sua resolução o conceito de máximo e mínimo de uma função do 2º grau.

Comentários: Os alunos conseguiram interpretar a proposta do enunciado da questão, mas tiveram dificuldade de estruturar as situações apresentadas, muitos não conseguiram associar a relação existente entre os lados de um retângulo e seu perímetro por isso foram necessários questionamentos para auxiliar o desenvolvendo das estratégias de resolução como, por exemplo, a construção de diferentes retângulos com mesmo perímetro até a dedução de uma possível relação entre suas dimensões para assim, poder calcular sua área máxima através do cálculo algébrico expresso por meio de uma função polinomial do 2 º grau, conteúdo que foi retomado por meio de um problema auxiliar.

Problema 5:

Habilidades: Expressar problemas por meio de funções; descrever características fundamentais de uma função do 2º grau e seus valores máximo e mínimo; saber resolver problemas em diferentes contextos.

Observações:

- Essa é uma questão que sua compreensão tem um caráter procedimental e sua resolução exige que os alunos empreguem o raciocínio algébrico no tratamento das informações, criando estratégias, reconhecendo incógnitas, aplicando conceitos matemático e realizando cálculos.
- É importante, no trato de problemas relacionados à função do 2º grau, não utilizar apenas o conceito matemático estudado, mas todas as dimensões envolvidas na resolução, como a competência leitora, que é fundamental para a interpretação dos enunciados. Ou ainda, a capacidade de expressão, seja na língua materna, seja na matemática usada para resolver as situações problemas.
- A intenção da questão é verificar a habilidade de expressar um problema por meio de uma função do 2º grau, contextualizada em uma situação-problema, que relaciona lucro máximo e mínimo em função do tempo de espera.

Comentários: Os alunos tiveram dificuldade de interpretar a proposta do enunciado da questão, de estruturar as situações apresentadas por meio de uma linguagem matemática, e muitos não conseguiram associar a relação existente entre o peso diário do bezerro e a queda do preço paga por quilo, por isso foram necessários questionamentos para auxiliar o desenvolvendo das estratégias de resolução para poder definir a relação entre essas duas variáveis para então encontrar uma função que represente o valor a ser arrecadado pelo criador na venda do bezerro em função do tempo de espera, e assim calcular o valor máximo arrecadado através do cálculo algébrico do ponto máximo de uma função polinomial do 2 º grau.

Problema 6:

Habilidades: Expressar problemas por meio de funções; descrever características fundamentais de uma função do1 º grau; saber resolver problemas em diferentes contextos.

Observação:

- O objetivo desta questão não se trata de verificar o conceito matemático de função e sim averiguar se o aluno faz a correta associação dos dados da tabela e consegue identificar os pares ordenados nas funções apresentadas segundo a sua lei de formação e a natureza da variação entre duas grandezas.

Comentários: Os alunos não tiveram dificuldade na interpretação do enunciado da questão, souberam estruturar as situações apresentadas, desenvolvendo diferentes estratégias ao associar a relação existente entre o número de bolas (x) e o nível da água (y). Alguns alunos utilizaram as alternativas como parâmetro e fizeram a verificação com os valores apresentados na tabela e outros calcularam o nível da água do copo sem nenhuma bolinha e o quanto o nível da água sobe por bolinha acrescentada através do cálculo algébrico e representaram por meio de uma função polinomial do 1º grau a relação entre as duas incógnitas.

Problema 7:

Habilidades: Saber resolver problemas em diferentes contextos que envolvam funções logarítmicas; aplicar conceitos e propriedades logarítmicas.

Observação:

- Para resolver o problema proposto é fundamental que os alunos reconheçam situações contextualizadas, que podem ser modeladas por meio de uma função e resolvidas usando a definição e as propriedades operatórias de logaritmos.

Comentários: Os alunos não tiveram dificuldade na interpretação do enunciado da questão, souberam estruturar as informações apresentadas, desenvolvendo a estratégia de substituir os valores dados no problema na função proposta e utilizaram com êxito o cálculo algébrico por meio de propriedades e definições de logaritmos obtendo assim, o valor da incógnita.

Problema 8:

Habilidades: Saber resolver problemas em diferentes contextos; ler e interpretar gráficos de funções.

Observações:

- Ao desenvolver os conceitos relativos à função, destaco a importância da representação gráfica de uma função e a sua análise e interpretação, contextualizadas numa situação-problema.
- É importante, que no trato de uma situação-problema o aluno saiba aplicar os cálculos matemáticos necessários para resolver uma equação do 2º grau.

Comentários: Os alunos não tiveram dificuldade na interpretação do enunciado da questão, souberam associar as funções apresentadas com seus respectivos gráficos, utilizaram a estratégia de igualar as duas funções e assim, poderem calcular os pontos em comum através do cálculo algébrico das raízes de uma equação do 2º grau por um processo padronizado como, por exemplo, a fórmula de Bháskara. Alguns alunos assinalaram a alternativa errada, pois os valores encontrados precisam ser analisados no contexto do enunciado e interpretados graficamente para assim, poder calcular o comprimento do segmento determinado por esses dois pontos, localizado no eixo das abscissas.

3.4 Conclusão da atividade proposta

Desse modo, percebe-se um pouco de dificuldade no aluno em modelar um problema matemático, expressando-o para uma linguagem algébrica. Sugere-se então, nesse caso, rever e até mesmo apresentar outros problemas que expressem a relação entre suas informações e sua escrita algébrica por meio de incógnitas e interdependência entre duas grandezas, e o quanto antes for detectado as dificuldades do aluno ao lidar com esse tipo de situação-problema, mais tempo e recursos poderão ser utilizados pelo professor para saná-las.

Em decorrência de tal fato, a Resolução de Problemas fundamenta-se em etapas que precisam ser corretamente encadeadas e de um certo traquejo no desenvolvimento das atividades, pois o aluno precisa aprender a lidar com situações novas, sendo motivado a pensar, conhecer, ousar até que se chegue ao resultado desejado, uma vez que a solução do problema não é imediata e o caminho não está definido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações realizadas ao longo deste trabalho, têm a intenção de destacar a importância da Resolução de Problemas como estratégia didática para um ensino que desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, estimula a curiosidade e prepara o aluno para lidar com situações novas, sendo motivado a pensar, conhecer, ousar e solucionar problemas matemáticos dentro e fora da escola.

Diante da importância de se trabalhar no processo de ensino e aprendizagem a resolução de problemas para o desenvolvimento intelectual do aluno, o professor, "peça" fundamental no ato de aprender, deve propor atividades que despertem o entusiasmo dos alunos, desenvolvendo sua capacidade de criar, atuar em conjunto, aproximando-os uns dos outros, demonstrando a importância de cada um.

Porém, essa aprendizagem só será possível se os problemas trabalhados desempenharem seu verdadeiro papel no processo de ensino, o de desenvolver no aluno posicionamento crítico e independência diante de situações novas e desafiadoras, pois a resolução de problemas tem se apresentado como uma atividade de reprodução por meio de procedimentos padronizados.

Desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas como ponto de partida fundamental da atividade Matemática são finalidades dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que visa construir referências nacionais comuns ao processo educativo para que os alunos possam ter acesso ao conjunto de conhecimentos necessários ao exercício da cidadania.

Destaca-se também, a importância de se estruturar os cursos de licenciatura em matemática sobre o prisma da resolução, pois os futuros professores de Matemática ao vivenciarem experiências de resolução de problemas, poderão proporcionar aos seus alunos, uma experiência de construção efetiva de conhecimentos.

O ponto central de se trabalhar com o processo de ensinar e de aprender Matemática por meio da resolução de problemas fundamenta-se na concepção de que a razão mais importante para utilizar esse tipo de metodologia de ensino é ajudar os estudantes a compreenderem efetivamente os conceitos, princípios e procedimentos matemáticos. A compreensão da Matemática envolve a ideia de relacionar. Assim sendo, a Matemática não é somente um caminho para resolver problemas, mas é um caminho para pensar, organizar e modelar experiências, descobrir padrões, estabelecer conexões.

Assim, concluímos que a Matemática precisa ser concebida pelo estudante como um conhecimento que favorece o desenvolvimento e aperfeiçoamento de seu raciocínio, sua capacidade expressiva, sua sensibilidade e sua imaginação, dessa forma a utilização da estratégia didática/metodologia da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática é importante por torná-las mais interessantes, desafiadoras, motivadoras e ainda ser um meio de adquirir conhecimento novo, utilizar àqueles que já haviam sido construídos previamente e acima de tudo, desenvolver em nossos alunos a técnica de resolver problemas matemáticos dentro e fora da escola.

REFERÊNCIAS

ABRIL.COM. **Simulado online**. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/idade/testes/simulado/matematica.html>. Acesso em: 5 jan. 2016.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BORTOLOSSI, Humberto José. **Pré-cálculo**. Aula 12. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2010.1/gma00116/aulas/gma00116-aula-12-4-up-color.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2016.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**: Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental**: Matemática Brasília: MEC/SEF, 1998.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. et al. **A matemática na escola novos conteúdos, novas abordagens**. Porto Alegre: UFRGS, 2012.

CARVALHO, Anna Maria Pessoa de; GIL-PEREZ, Daniel. **Formação de professores de ciências**: tendências e inovações. São Paulo: Cortez, 2000.

CARVALHO, Mercedes. **Problemas?** Mas que problemas?! Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula. 4. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1991.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 6. ed. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: ÁTICA, 1998.

ECHEVERRÍA, María Del Puy Pérez; POZO, Juan Ignacio. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

GLOBO. **Educação**. Disponível em: <http://educacao.globo.com/ provas/enem-2009/questoes/159.html>. Acesso em: 5 jan. 2016.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar**: Conjuntos e funções. 7. ed. São Paulo: Atual, 1996. v. 1.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar**: Logaritmos. 8 ed. São Paulo: Atual, 1997. v. 2.

LUPINACCI, Vera Lúcia Martins; BOTIN, Mara Lúcia Muller. Resolução de problemas no ensino de matemática. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, p. 1-5, 2004.

OBJETIVO. **Matemática**. Disponível em: <http://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/fgvsp/2007_economia_1fase/fgv2007_economia_1fase.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2016.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROCHA. Iara C. B. da. O ensino de matemática: Formação para a exclusão ou para a cidadania? **Educação Matemática em Revista**, n.9, ano 8, p. 22-31, 2002.

ROMANATTO, Mauro Carlos. Resolução de problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos: UFSCar, v.6, n.1, p. 299-311, mai., 2012.

SÃO PAULO. Secretaria da educação. **Caderno do aluno - 1º série do Ensino Médio**. 2014-2017. v. 1.

SAVIANI, Dermeval. **Educação**: do senso comum à consciência filosófica. Campinas: Autores Associados, 2000.

SOARES, Maria Teresa Carneiro, PINTO, Neuza Bertoni. Metodologia da resolução de problemas. **24ª Reunião ANPEd**, 2001, Caxambu. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2016.

SOUSA, Ariana Bezerra de. **A resolução de problemas como estratégia didática para o ensino da matemática**. 2005. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2016.

THOMPSON, Alba G. Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. In: CHARLES, Randall I.; SILVER, Edward A.

(Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERÇOSA, Marilia; ROCHA, Stela da; TELES, Rosinalda. **Resolução de problemas matemáticos**: aproximações e distanciamentos nos anos iniciais do ensino fundamental. Disponível em: <https://www.ufpe.br/ce/images/Graduacao_pedagogia/pdf/2009.1/resoluo%20de%20problemas%20matemticos%20aproximaes%20e%20distanciam.pdf>. Acesso em: 5 jan. 2016.

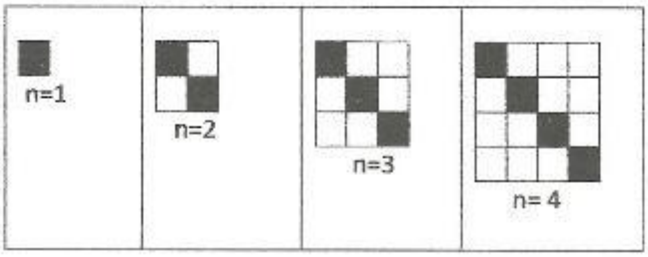
APÊNDICE

Neste tópico apresentamos as resoluções das atividades realizadas por alguns alunos.

ALUNO(A): Gabriella Z. de Matos 1ª SÉRIE - EM
ALUNO(A): Gabriel R. dos Reis. 1ª SÉRIE – EM
ALUNO(A): João Arthur Zj. de Paula. 1ª SÉRIE – EM
PROFESSORA: ANDRÉIA PERPÉTUA BARBOZA BRESEGHELLO

ATIVIDADE PROPOSTA: **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM APLICAÇÕES EM FUNÇÕES**

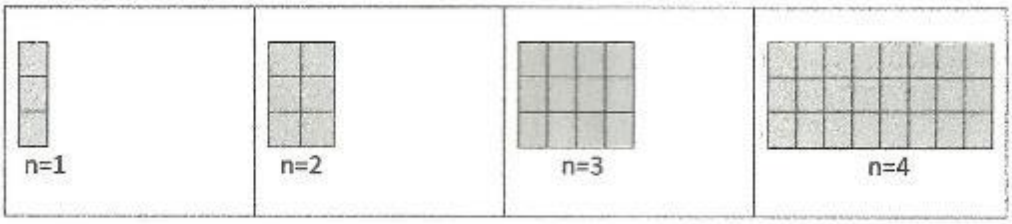
1-) Observe a sequência de figuras. Em seguida, responda:



a) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 6ª figura dessa sequência?
b) Escreva uma função f(n) que permita calcular a quantidade de quadradinhos brancos, em função da posição n da figura, na sequência.
c) Que tipo de função você encontrou?
d) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 39ª figura dessa sequência?

RESOLUÇÃO:
a) $6.6-6=30$ quadrados brancos.
b) $n.n-n=n^2-n=f(n)$.
c) Função do 2º grau.
d) $39^2-39=1521-39=1482$.

2-) Observe a sequência de figuras e responda às questões propostas.



a) Quantos quadradinhos comporão a quinta figura dessa sequência? E a sexta?
b) Associe a essa sequência de figuras uma outra sequência numérica que indique o número de quadradinhos de cada figura, essa sequência é conhecida? Justifique.
c) Determine uma função f(n) que possa ser utilizada para determinar o número total de quadradinhos da n-ésima figura dessa sequência.

RESOLUÇÃO:

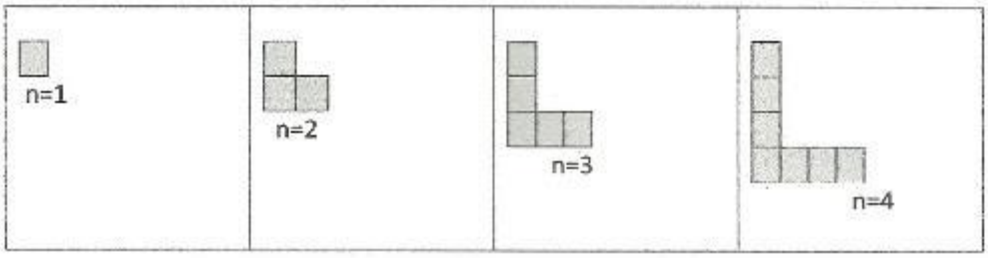
a) $A = 3.2^{5-1} = 3.2^4 = 3.16 = 48 \rightarrow 5^a$ figura

$A = 3.2^{6-1} = 3.2^5 = 3.32 = 96 \rightarrow 6^a$ figura

b) (3; 6; 12; 24; ...) Progressão Geométrica de razão = 2

c) $f(n) = 3.2^{n-1}$

3-) Nesta figura, cada quadradinho é formado por quatro **palitos** de comprimentos iguais.



a) Quantos palitos serão necessários para a construção da sexta figura? E da sétima?
b) A sequência formada pelas quantidades de palitos necessárias para a construção das figuras resulta em uma sequência conhecida? Justifique sua resposta.
c) Escreva uma função f(n) que expresse a quantidade total de palitos da figura que ocupa a posição n nessa sequência.

RESOLUÇÃO

a) 6^a figura $\rightarrow 4+(6-1)6 = 4+5.6 = 34$

7^a figura $\rightarrow 4+(7-1)6 = 4+6.6 = 40$

b) (4; 10; 16; 22; ...): Progressão Aritmética de razão = 6.

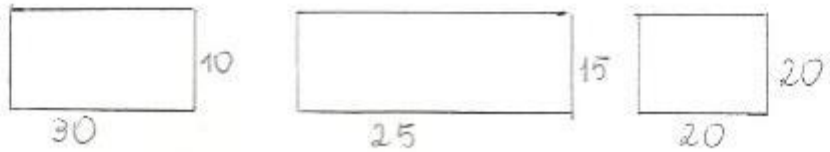
c) $f(n) = 4+(n-1)6$.

4-) Para delimitar um galinheiro em um amplo quintal, dispõe-se de 80m (lineares) de uma tela. Deseja-se usar completamente a tela disponível e a região cercada deve ser um retângulo. A área A do retângulo é uma função do comprimentos de seus lados.

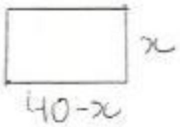
a) Escreva uma função y=f(x) que represente a área desse retângulo.
b) Quais devem ser as medidas dos lados do retângulo para que sua área seja a maior possível?
c) Qual é o valor da área máxima?

RESOLUÇÃO:

a) Possibilidades



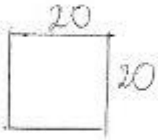
$30+10=25+15=20+20=40$



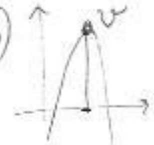
$f(x)=40x-x^2=(40-x)x$

$f(x)=40x-x^2$

$\rightarrow f(x)=-x^2+40$



b)



$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-40}{2(-1)}=\frac{-40}{-20}=+20$

$y_v=20$

$\rightarrow 20$ metros

c) $20\cdot 20=400m^2$

5-) Um criador de gado tem um bezerro de determinada raça para vender. Esse bezerro pesa atualmente 200kg e engorda 2kg por dia. Inicialmente, o criador acha que, quanto mais tempo esperar para vender o bezerro, melhor será, pois o bezerro ganhará mais peso. Entretanto, um de seus funcionários lembra ao criador de que o preço da venda, que hoje é de R$ 60,00 por kg, está caindo R$0,50 por dia. A escolha da melhor data para vender o bezerro depende, então, de duas variáveis: a engorda diária e a queda nos preços pagos por kg. Com base nas informações fornecidas, mantida a situação atual, pede-se:

a) Determine uma função y=f(x), onde o valor y represente o valor a ser arrecadado pelo criador na venda do bezerro (em R$) em função do tempo x de espera (em dias).
b) Determine a melhor data para vender o bezerro, contada a partir de hoje.
c) Calcule o valor em R$ que será arrecadado em tal venda.

RESOLUÇÃO:

a) Preço → $60 - 0,5x$

Peso → $200 + 2x$

$f(x) = (60 - 0,5x)(200 + 2x)$

$f(x) = -x^2 + 120x - 100x + 12000$

$\rightarrow f(x) = -x^2 + 20x + 12000$

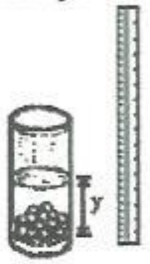
b) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{-2} = 10$ dias

c) Peso → $200 + 10 \cdot 2 = 220$ kg

Preço do kg → $6 - 0,5 \cdot 10 = 55\$$

Preço ideal → $220 \cdot 55 = \$ 12\,100 \leftarrow$

6-) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura abaixo. Como resultado do experimento, conclui-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível de água (y) em função do número de bolas (x) ?

a-) y = 30x b-) y = 25x + 20,2 c-) y = 1,27x d-) y = 0,7x ~~e~~-) y = 0,07x + 6

RESOLUÇÃO:

6,35 ↓ 0,35 → 5 bolinhas

6,70 ↓ 1 bolinha $= \frac{0,35}{5} = 0,07$

7,05

5 —— 6,35

0 —— 6

$\rightarrow y = 0,07 + 6$

7-)Suponha que o total de sapatos produzidos por uma pequena indústria é dado, aproximadamente, pela função S(t) = $1000 log_2 (1 + t)$, onde t é o número de anos e S é o número de sapatos produzidos, contados a partir do início da atividade da indústria. Determine o tempo necessário para que a produção da indústria seja de 3000 pares de sapatos.

a) 3 anos b) 4 anos c) 5 anos d) 6 anos e) 7 anos

RESOLUÇÃO:

$S(t)=1000\log_2(1+t)$
$S(t)=3000$
$t=?$

$S(t)=3000=1000\log_2(t+1)$

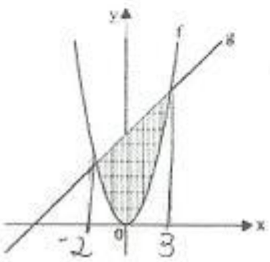
$\frac{3000}{1000}=\log_2(t+1)$

$3=\log_2(t+1)$

$2^3=t+1$

$8=t+1 \rightarrow t=7$

8-) Na parte sombreada da figura, as extremidades dos segmentos de reta paralelos ao eixo y são pontos em comum das representações gráficas das funções definidas por f(x)=x² e g(x) = x + 6, conforme indicado. As abscissas dos pontos em comum determinam um segmento de reta no eixo cujo comprimento é



a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

RESOLUÇÃO:

$\begin{cases} f(x)=x^2 \\ g(x)=x+6 \end{cases}$

$x^2=x+6$

$0=-x^2+x+6$

$\Delta=1^2-4.(-1)6$

$\Delta=1+24=25$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2(-1)}=-\frac{1\pm5}{-2}$

$x_1=\frac{-1+5}{-2}=\frac{4}{-2}=-2$

$x_2=\frac{-1-5}{-2}=\frac{-6}{-2}=3$

$\rightarrow 5$

$-2 \quad 0 \quad 3$

ALUNO(A): Amália Evellen S. Santos 1ª SÉRIE - EM

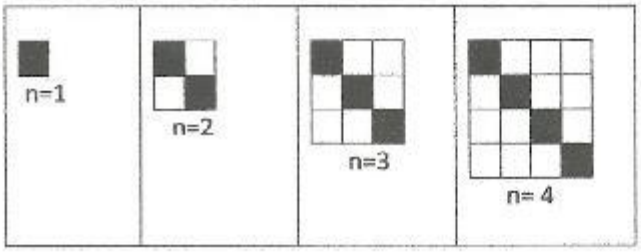
ALUNO(A): Beatriz Fernanda de O. Munhoz 1ª SÉRIE – EM

ALUNO(A):_______________ 1ª SÉRIE – EM

PROFESSORA: ANDRÉIA PERPÉTUA BARBOZA BRESEGHELLO

ATIVIDADE PROPOSTA: **RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM APLICAÇÕES EM FUNÇÕES**

1-) Observe a sequência de figuras. Em seguida, responda:



a) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 6ª figura dessa sequência?
b) Escreva uma função f(n) que permita calcular a quantidade de quadradinhos brancos, em função da posição n da figura, na sequência.
c) Que tipo de função você encontrou?
d) Quantos quadradinhos brancos deverá ter a 39ª figura dessa sequência?

RESOLUÇÃO:

a) Deverá ter na 6º figura 30 quadradinhos

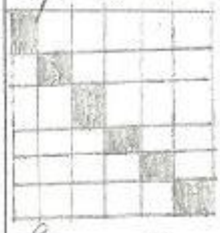


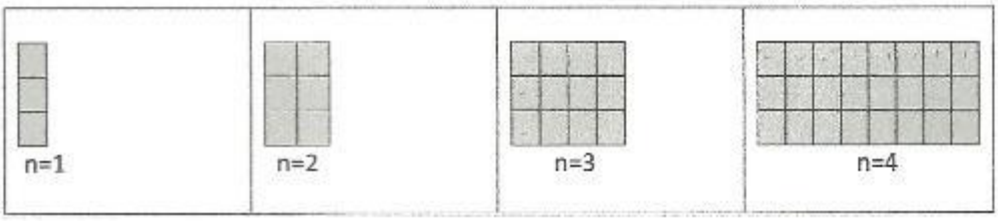
figura 6

b-) $f(n) = n^2 - n$

c-) Função do 2º grau

d-) $f(39) = 39^2 - 39$
$f(39) = 1521 - 39$
$f(39) = 1482$

2-) Observe a sequência de figuras e responda às questões propostas.



a) Quantos quadradinhos comporão a quinta figura dessa sequência? E a sexta?
b) Associe a essa sequência de figuras uma outra sequência numérica que indique o número de quadradinhos de cada figura, essa sequência é conhecida? Justifique.
c) Determine uma função f(n) que possa ser utilizada para determinar o número total de quadradinhos da n-ésima figura dessa sequência.

RESOLUÇÃO:

a) A 5º figura terá 48 quadradinhos e a 6º figura 96 quadradinhos.

b) É conhecida como PG, porque para descobrir o resultado dos quadradinhos é preciso multiplicar por uma constante (3, 6, 12, 24, ...)

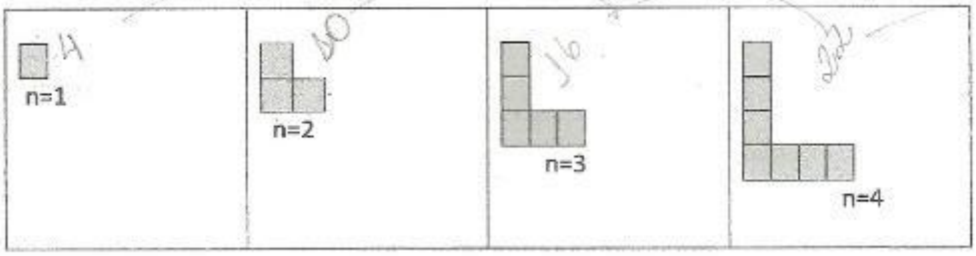
c) Posição { Quantidade

$n = 1$ { $3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot 2^0$

$n = 2$ { $6 = 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2^1$

n { $f(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$

3-) Nesta figura, cada quadradinho é formado por quatro **palitos** de comprimentos iguais.



a) Quantos palitos serão necessários para a construção da sexta figura? E da sétima?
b) A sequência formada pelas quantidades de palitos necessárias para a construção das figuras resulta em uma sequência conhecida? Justifique sua resposta.
c) Escreva uma função f(n) que expresse a quantidade total de palitos da figura que ocupa a posição n nessa sequência.

RESOLUÇÃO

a) Serão necessários para a construção da 6º figura 28 palitos e na 7º figura 34 palitos.

b) É conhecida como PA, porque para descobrir o resultado dos palitos da próxima figura é preciso somar uma constante (4, 10, 16, 22, ...)

c) Posição { Quantidade

$n = 1$ { $4 = 6 \cdot 1 - 2 = 4$

$n = 2$ { $10 = 6 \cdot 2 - 2 = 10$

n { $f(n) = 6 \cdot n - 2$

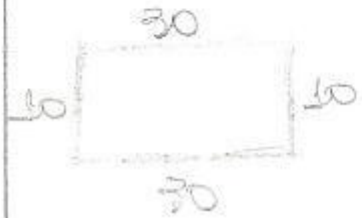
4-) Para delimitar um galinheiro em um amplo quintal, dispõe-se de 80m (lineares) de uma tela. Deseja-se usar completamente a tela disponível e a região cercada deve ser um retângulo. A área A do retângulo é uma função do comprimentos de seus lados.

a) Escreva uma função y=f(x) que represente a área desse retângulo.
b) Quais devem ser as medidas dos lados do retângulo para que sua área seja a maior possível?
c) Qual é o valor da área máxima?

RESOLUÇÃO:

a) $f(x) = (40 - x) \cdot x$

$f(x) = 40x - x^2$



b) $-x^2 + 40x = 0$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$a = -1$ $b = 40$ $c = 0$

$\Delta = 40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0$

$\Delta = 1600 + 0$

$\Delta = 1600$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$

$x = \frac{-40 \pm 40}{-2}$

$x_1 = \frac{-40+40}{-2} = 0$

$x_2 = \frac{-40-40}{-2} = \frac{-80}{-2} = 40$

$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+40}{2} = 20$

c-) $A = 20 \cdot 20 = 400\ m^2$

5-) Um criador de gado tem um bezerro de determinada raça para vender. Esse bezerro pesa atualmente 200kg e engorda 2kg por dia. Inicialmente, o criador acha que, quanto mais tempo esperar para vender o bezerro, melhor será, pois o bezerro ganhará mais peso. Entretanto, um de seus funcionários lembra ao criador de que o preço da venda, que hoje é de R$ 60,00 por kg, está caindo R$0,50 por dia. A escolha da melhor data para vender o bezerro depende, então, de duas variáveis: a engorda diária e a queda nos preços pagos por kg. Com base nas informações fornecidas, mantida a situação atual, pede-se:

a) Determine uma função y=f(x), onde o valor y represente o valor a ser arrecadado pelo criador na venda do bezerro (em R$) em função do tempo x de espera (em dias).
b) Determine a melhor data para vender o bezerro, contada a partir de hoje.
c) Calcule o valor em R$ que será arrecadado em tal venda.

RESOLUÇÃO:

a) $f(x) = (200+2x) \cdot (60-0{,}5x)$

$f(x) = 12000 - 100x + 120x - x^2$

$f(x) = 12000 + 20 - x^2$

$f(x) = -x^2 + 20x + 12000$

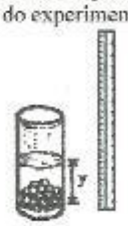
b) $x_v = \frac{-b}{2 \cdot a} = \frac{-20}{2 \cdot (-1)} = \frac{-20}{-2} = 10$

c) $f(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 12000$

$f(10) = -100 + 200 + 12000$

$-100 + 12.200 = 12.100$

6-) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura abaixo. Como resultado do experimento, conclui-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível de água (y) em função do número de bolas (x) ?

a-) y = 30x b-) y = 25x + 20,2 c-) y = 1,27x d-) y = 0,7x e-) y = 0,07x + 6

RESOLUÇÃO:

$y = 0{,}07x + 6$

$y = 0{,}07 \cdot 5 + 6$

$y = 6{,}35$

$y = 0{,}07x + 6$

$y = 0{,}07 \cdot 10 + 6$

$y = 6{,}70$

$y = 0{,}07x + 6$

$y = 0{,}07 \cdot 15 + 6$

$y = 7{,}05$

7-)Suponha que o total de sapatos produzidos por uma pequena indústria é dado, aproximadamente, pela função S(t) = $1000log_{2}(1 + t)$, onde t é o número de anos e S é o número de sapatos produzidos, contados a partir do início da atividade da indústria. Determine o tempo necessário para que a produção da indústria seja de 3000 pares de sapatos.

a) 3 anos b) 4 anos c) 5 anos d) 6 anos e) 7 anos

RESOLUÇÃO:

$S(T) = 1000 \log_2 (T+1)$

$3000 = 1000 \log_2 (T+1)$

$\frac{3000}{1000} = \log_2 (T+1)$

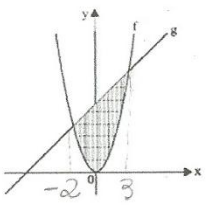
$3 = \log_2 (T+1)$

$2^3 = (T+1)$

$8 = T+1$

$T = 7$

8-) Na parte sombreada da figura, as extremidades dos segmentos de reta paralelos ao eixo y são pontos em comum das representações gráficas das funções definidas por f(x)=x^2 e g(x) = x + 6, conforme indicado. As abscissas dos pontos em comum determinam um segmento de reta no eixo cujo comprimento é



a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

$f(x) = x^2 = g(x) = x+6$

RESOLUÇÃO:

$-x^2+x+6$ $\quad -x^2+x+6$

$a = -1$

$b = 1$

$c = 6$

$\Delta = b^2-4.a.c$

$\Delta = 1^2-4.(-1).6$

$\Delta = 1+24$

$\Delta = 25$

$X = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

$X = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2.(-1)}$

$X' = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$

$X'' = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$