

Guilherme Sada Ramos

# QUÁDRICAS: UM ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU EM TRÊS VARIÁVEIS

Dissertação submetida ao Programa  
de Mestrado Profissional em Matemática  
para a obtenção do Grau de Mestre  
em Matemática.

Universidade Federal de Santa Cata-  
rina

Orientador: Prof. Dr. Gilles Gonçalves  
de Castro

Florianópolis

2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ramos, Guilherme Sada

Quádricas: um estudo das equações do segundo grau em  
três variáveis / Guilherme Sada Ramos ; orientador, Gilles  
Gonçalves de Castro - Florianópolis, SC, 2015.

93 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade  
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e  
Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. I. Castro, Gilles Gonçalves de. II.  
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós  
Graduação em Matemática. III. Título.

Guilherme Sada Ramos

# QUÁDRICAS: UM ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU EM TRÊS VARIÁVEIS

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Florianópolis, 21 de dezembro de 2015.

---

Prof. Dr. Celso Melchhiades Dória  
Coordenador  
Universidade Federal de Santa Catarina

## **Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Orientador

---

Prof<sup>a</sup> Dra. Alda Dayana Mattos Mortari  
MTM - UFSC

---

Prof. Dr. Danilo Royer  
MTM - UFSC

---

Prof. Dr. Felipe Vieira  
UFSC - Blumenau

## AGRADECIMENTOS

A Edson e Mariza, que são a minha base de tudo.

Ao professor Gilles Gonçalves de Castro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

Aos professores Alda Dayana Mattos Mortari, Danilo Royer e Felipe Vieira pela leitura minuciosa, correções e sugestões que vieram a enriquecer e aprimorar esta dissertação.

Aos meus familiares e amigos, pelo carinho e torcida.

A todos os professores e colegas que tive na trajetória acadêmica, com os quais pude sempre aprender algo a mais. Deixo um obrigado especial ao professor Fernando de Lacerda Mortari, pela desmistificação da álgebra linear, essencial para que o objetivo deste trabalho fosse atingido.

Aos meus colegas e alunos do Instituto Federal de Santa Catarina, que hoje são o meu presente.



Este trabalho é dedicado a todas as pessoas - funcionários, gestores e, claro, aos meus alunos - do colégio Energia Palhoça, escola em que aprendi o quão maravilhoso é ser professor de matemática.





## RESUMO

Nesta dissertação, serão definidas as possíveis superfícies quádricas, através das equações do segundo grau em três variáveis. Para este estudo, será utilizado o teorema espectral da álgebra linear, e o problema da diagonalização de matrizes simétricas, bem como os elementos básicos de álgebra linear necessários para tal. Por fim, serão abordadas as possíveis intersecções entre cones de revolução e planos no espaço.

**Palavras-chave:** diagonalização, quádricas, secções cônicas.



## ABSTRACT

On this dissertation, it will be defined the possible quadric surfaces, through the second degree equation with three variables. For such study, it will be used the spectral theorem of linear algebra, and the problem of diagonalization of symmetric matrices, as well as the necessary basic elements of linear algebra. In the end, it will be covered the possible intersections between revolution cones and plans in the space.

**Keywords:** diagonalization, quadrics, conic sections.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Simetria em relação a um ponto.....	24
Figura 2	Simetria em relação a uma reta.....	24
Figura 3	Simetria em relação a um plano.....	25
Figura 4	Elipsóide.....	37
Figura 5	Esfera.....	39
Figura 6	Hiperbolóide de uma folha.....	41
Figura 7	Hiperbolóide de duas folhas.....	43
Figura 8	Cone elíptico.....	45
Figura 9	Cone de revolução.....	46
Figura 10	Cilindro elíptico.....	48
Figura 11	Cilindro de revolução.....	48
Figura 12	Reta.....	50
Figura 13	Cilindro hiperbólico.....	51
Figura 14	Par de planos concorrentes.....	52
Figura 15	Parabolóide elíptico.....	53
Figura 16	Parabolóide hiperbólico.....	55
Figura 17	Cilindro parabólico.....	57
Figura 18	Cilindro parabólico.....	58
Figura 19	Par de planos paralelos.....	59
Figura 20	Plano.....	60
Figura 21	Plano sector e cone vistos de frente.....	78
Figura 22	Hipérbole.....	79
Figura 23	Circunferência no cone.....	79
Figura 24	Rotacionando $Ox$ e $Oz$ .....	81
Figura 25	Delimitando ponto no cone.....	85
Figura 26	Delimitando reta no cone.....	85
Figura 27	Delimitando retas concorrentes no cone.....	85
Figura 28	Delimitando elipse no cone.....	86
Figura 29	Delimitando hipérbole no cone.....	86
Figura 30	Delimitando parábola no cone.....	87



## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	17
<b>1 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS - UM PANORAMA GERAL</b> .....	21
1.1 CENTRO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS .....	23
1.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS QUÁDRICAS CENTRADAS .....	26
<b>2 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS CENTRADAS</b> ....	35
2.0.1 Elipsóides e esferas e casos degenerados .....	36
2.0.2 Hiperbolóide de uma folha .....	39
2.0.3 Hiperbolóide de duas folhas .....	42
2.0.4 Cone elíptico e de revolução .....	44
<b>3 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NÃO CENTRADAS</b> .....	47
3.1 QUÁDRICAS COM DOIS COEFICIENTES QUADRÁTICOS NÃO NULOS .....	47
3.1.1 Cilindro elíptico e de revolução e casos degenerados .....	48
3.1.2 Cilindro hiperbólico e caso degenerado .....	50
3.1.3 Parabolóide elíptico .....	52
3.1.4 Parabolóide hiperbólico (“sela de cavalo”) .....	54
3.2 QUÁDRICAS COM UM COEFICIENTE QUADRÁTICO NÃO NULO .....	56
3.2.1 Cilindro parabólico e casos degenerados .....	57
<b>4 ELIMINANDO O TERMO MISTO</b> .....	61
4.1 ÁLGEBRA LINEAR POR TRÁS DO PROBLEMA .....	61
4.2 RESULTADO FUNDAMENTAL E APLICAÇÃO .....	70
<b>5 SECÇÕES PLANAS NO CONE DE REVOLUÇÃO</b> .....	77
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	89
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	91
<b>ANEXO</b> .....	93





## INTRODUÇÃO

A geometria analítica é uma das ferramentas modernas mais importantes da matemática. A associação direta entre elementos algébricos e geométricos, através de um sistema de eixos coordenados, permitiu a discussão de problemas muito mais sofisticados, tanto de álgebra como de geometria, nos últimos quatro séculos.

Um dos notáveis matemáticos que contribuíram decisivamente para o advento e desenvolvimento da geometria analítica foi René Descartes (1596-1650), francês nascido em La Haye, cidade situada na região de Touraine, no centro-oeste da França. Em 1637, escreveu a sua obra mais importante, “*O discurso sobre o método*”, em que ele descreve um tipo de pensamento que viria a ser conhecido como “cartesiano”.

Descartes passou a maior parte de sua vida produtiva na Holanda, e depois tornou-se conselheiro da rainha Cristina, da Suécia, onde veio a falecer, no ano de 1650. Para saber mais sobre a história deste ícone da história da matemática, recomendamos o livro (ACZEL, 2007).

Em nível de ensino médio, tratamos da geometria analítica bidimensional, restrita ao plano cartesiano, deixando a geometria analítica tridimensional de lado. No espaço com sistema de eixos coordenados, encontramos diversos entes geométricos, inclusive superfícies, que são representadas por equações de três incógnitas.

## OBJETIVOS

### Objetivo geral

Segundo o notável matemático Nikolai Lobachevsky (1792-1856), “não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real”. O presente trabalho tem por objetivo principal compreender as possíveis superfícies quádricas, bem como seus casos degenerados, através da equação geral do segundo grau em três variáveis. Superfícies especiais como elipsóides, parabolóides, possuem diversas aplicações práticas importantes no dia-a-dia. Como exemplo, uma antena parabólica é compreendida como a revolução de uma parábola em torno do seu eixo de simetria. Uma bola de futebol americano pode ser concebida como

um elipsóide. O parabolóide hiperbólico também é conhecido como “sela de cavalo”, por lembrar exatamente uma sela de montar. Além disso, também abordaremos, sob um ponto de vista analítico, a questão da intersecção entre planos no espaço e superfícies cônicas de revolução ilimitadas, mostrando, algebricamente, as formas das possíveis secções planas num cone. Este tema é frequentemente abordado na escola secundária, porém, a grade curricular do ensino médio não traz consigo as ferramentas matemáticas necessárias para uma compreensão mais formal e rigorosa desse problema. Para tanto, vamos nos utilizar das cônicas (elipses, hipérbolas e parábolas, e casos especiais) e seus elementos, que permitirão uma melhor visualização gráfica das quádricas no espaço.

## Objetivos Específicos

No capítulo 1, vamos apresentar os conceitos de simetria em relação a ponto, reta e plano, e de superfícies quádricas centradas e não centradas, que são deixados de lado nos livros de geometria analítica, mesmo em nível superior. A equação geral do segundo grau, com termos em  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , chamados “termos mistos” será reescrita com novas coordenadas, de modo que estes termos desapareçam. Isto está baseado no teorema espectral da álgebra linear, que será abordado mais à frente, no capítulo 4. Demonstraremos um importante teorema que relaciona as superfícies quádricas com a equação geral do segundo grau, já sem os termos mistos.

No capítulo 2, abordaremos as superfícies quádricas centradas (e os casos degenerados), que são:

- elipsóides e esferas,
- hiperbolóides,
- superfícies cônicas.

Já no capítulo 3, será a vez das superfícies quádricas não centradas (e casos degenerados), que são:

- superfícies cilíndricas,
- parabolóides.

No capítulo 4, vamos, enfim, desvendar como a álgebra linear e suas ferramentas permitem que, de fato, possamos escrever as equações

do segundo grau em três variáveis sem os termos mistos, de modo que possamos definir e identificar mais facilmente as superfícies quádricas determinadas por elas. Vamos apresentar a definição dos diversos elementos de álgebra linear que vão fazer desaparecer os termos mistos da equação do segundo grau em três variáveis. Este desaparecimento dos termos em  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  será possível em decorrência do teorema espectral da álgebra linear e da diagonalização de matrizes simétricas. Com isto, é possível definir as superfícies quádricas em função dos novos coeficientes da equação do segundo grau, após a diagonalização da sua forma quadrática.

Alguns elementos básicos de álgebra linear são necessários para que se conclua o resultado que relaciona a equação geral do segundo grau com a equação equivalente resultante da diagonalização, identificando a quádrica em questão. Desse modo, não falaremos dessas superfícies através das equações canônicas, comumente adotadas nos livros didáticos das disciplinas de geometria analítica e álgebra linear.

Uma dessas superfícies possíveis, as cônicas, possuem diferentes intersecções com planos no espaço, determinando as “secções cônicas”. Em nível secundário, habitualmente essas curvas são mencionadas em sala de aula, mas sem a devida comprovação analítica da questão. Estas curvas deverão, tão logo, ser identificadas também, através de rotação de eixos. No capítulo 5, vamos tratar destas intersecções, fazendo uma rotação necessária em dois dos três eixos cartesianos no espaço, de modo que a equação da cônica procurada permita-nos identificar a mesma neste novo sistema.

As figuras utilizadas em todos os capítulos foram confeccionadas com o software GeoGebra, versão 5.0.

Para a compreensão do texto, o leitor deve ter conhecimentos de geometria analítica plana e espacial e álgebra linear básicos.

As equações canônicas das secções cônicas, com os respectivos elementos básicos, estão inseridas em anexo.



## 1 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS - UM PANORAMA GERAL

Vamos iniciar nosso estudo sobre quádricas através das equações do segundo grau em três variáveis. Posteriormente, vamos compreender uma representação geométrica para cada situação, no que diz respeito ao valor e sinal dos coeficientes.

Mais adiante, utilizaremos mudanças de coordenadas, sempre que necessário, para identificar a quádrica gerada por cada equação. Como principais referências utilizadas para o desenvolvimento do texto, o leitor pode consultar o livro (ANTON & RORRES, 2001) e o site <http://www.solitaryroad.com/>, que constam nas referências bibliográficas.

**Definição 1.1.** *Uma equação da forma*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1.1)$$

*nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em que os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$  são números reais e não simultaneamente nulos, é uma equação quadrática em  $x$ ,  $y$  e  $z$ .*

$$\text{Definindo } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \text{ e } K = [ G \quad H \quad I ],$$

a equação(1.1) também pode ser escrita da forma matricial

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [ G \quad H \quad I ] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + J = 0$$

ou

$$X^t M X + K X + J = 0.$$

**Definição 1.2.** *A função*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*é dita uma forma quadrática associada à equação quadrática (1.1).*

Por exemplo, a equação quadrática

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz - 2yz + 8x + 6y - 4z + 1 = 0$$

tem a forma quadrática

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2xz - 2yz.$$

Matricialmente, a representação da equação fica

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 1 = 0.$$

**Definição 1.3.** A função  $g(x, y, z) = Gx + Hy + Iz + J$  é a **forma não quadrática da equação (1.1)**.

**Definição 1.4.** O conjunto dos pontos do espaço, correspondentes aos ternos ordenados  $(x, y, z)$ , que são soluções de uma equação quadrática em três variáveis da forma da equação (1.1), é denominado **superfície quádrlica**, ou simplesmente, **quádrlica**.

Como exemplos, temos as esferas, elipsóides, parabolóides, superfícies cilíndricas e cônicas, hiperbolóides de uma e duas folhas, entre outros, inclusive os casos degenerados. Nos dois próximos capítulos, cada uma dessas superfícies será estudada em detalhes.

Precisamos, agora, de três definições importantes, que servirão para melhor visualizarmos estas superfícies especiais, que serão objeto de nosso estudo.

Vamos adotar um sistema de eixos ortogonais  $Oxyz$  no espaço.

**Definição 1.5.** O **traço** de uma superfície quádrlica em um plano é a intersecção desta quádrlica com o plano.

**Definição 1.6.** Os **planos coordenados**, no sistema  $Oxyz$  são:

- $x = 0$ ,
- $y = 0$ ,
- $z = 0$ .

**Definição 1.7.** Para  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$ , os **planos paralelos aos planos coordenados**, no mesmo sistema  $Oxyz$ , são:

- $x = m$ ,

- $y = m$ ,
- $z = m$ .

Com o auxílio da álgebra linear, vamos poder, na equação (1.1), alterar o sistema de coordenadas, a fim de que os termos em  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , os chamados *termos mistos*, desapareçam. Vamos, para isso, substituir o sistema de eixos ortogonais  $Oxyz$  por um novo sistema de eixos ortogonais  $Ox_Ry_Rz_R$ , fruto de conveniente rotação do primeiro.

Com isto, poderemos identificar as quádricas, através das suas definições, e os traços das mesmas nos planos coordenados e planos paralelos. Esses traços consistirão nas curvas planas (retas, circunferências, elipses, hipérbolas, parábolas, entre outras, inclusive as cônicas degeneradas), cujas equações não possuem os termos mistos, uma vez que o sistema de eixos for convenientemente rotacionado.

De fato, verificaremos que toda equação da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

pode ser escrita da forma

$$A'x_R^2 + B'y_R^2 + C'z_R^2 + G'x_R + H'y_R + I'z_R + J' = 0 \quad (1.2)$$

sendo  $x_R$ ,  $y_R$  e  $z_R$  novas coordenadas do espaço, dadas em função de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, obtidas através de conveniente rotação dos eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , sendo  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  não simultaneamente nulos.

**Definição 1.8.** *Os coeficientes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  de (1.2), são denominados coeficientes quadráticos da mesma equação.*

A partir das equações na forma da equação (1.2), vamos definir cada tipo de superfície quádrica possível.

Agora, vamos abordar o conceito de superfícies quádricas centradas e não centradas.

## 1.1 CENTRO DE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Temos, do dia-a-dia, a noção intuitiva de simetria. Um círculo é simétrico em relação ao seu centro. Um losango, forma presente na bandeira do Brasil, é simétrico em relação às suas duas diagonais. Uma hipérbole é simétrica em relação às retas que contêm seus eixos, real e imaginário. Uma superfície cilíndrica não oblíqua é simétrica em relação ao seu eixo.

Vamos, então, definir o que vem a ser uma simetria em relação a três entes geométricos primitivos.

**Definição 1.9.** Um subconjunto de pontos  $S$  do espaço é dito **simétrico em relação a um ponto  $P$**  se, para todo ponto  $X$  pertencente a  $S$ , existir um ponto  $Y$ , também pertencente a  $S$ , de modo que  $P$  seja o ponto médio do segmento de reta  $XY$ .

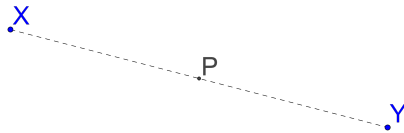


Figura 1 – Simetria em relação a um ponto.

Observação: Considere um sistema de eixos ortogonais qualquer do espaço. Neste caso, se o ponto  $P(a, b, c)$  pertencer ao conjunto de pontos  $S$  deste espaço, simétrico em relação ao ponto  $M(r, s, t)$  então o ponto  $P'(-a + 2r, -b + 2s, -c + 2t)$  também deverá pertencer a  $S$ . Isto ocorre para que o ponto  $M$  seja ponto médio do segmento  $PP'$ .

**Definição 1.10.** Um subconjunto de pontos  $S$  do espaço é dito **simétrico em relação a uma reta  $r$**  se, para todo ponto  $X$  pertencente a  $S$ , existir um ponto  $Y$ , também pertencente a  $S$ , de modo que o segmento de reta  $XY$  seja perpendicular a  $r$  e que o ponto médio  $M$  do segmento de reta  $XY$  pertença a  $r$ .

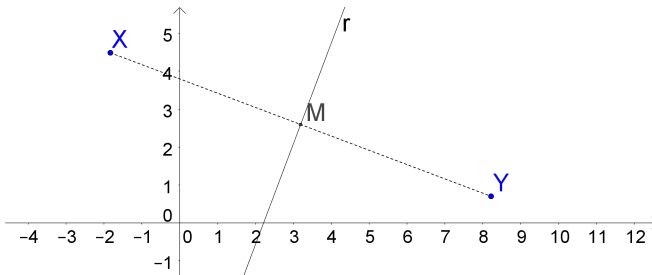


Figura 2 – Simetria em relação a uma reta.



**Definição 1.11.** Um subconjunto de pontos  $S$  do espaço é dito **simétrico em relação a um plano  $\alpha$**  se, para todo ponto  $X$  pertencente a  $S$ , existir um ponto  $Y$ , também pertencente a  $S$ , de modo que o segmento  $XY$  seja perpendicular a  $\alpha$  e que o ponto médio  $M$  do segmento de reta  $XY$  pertença a  $\alpha$ .

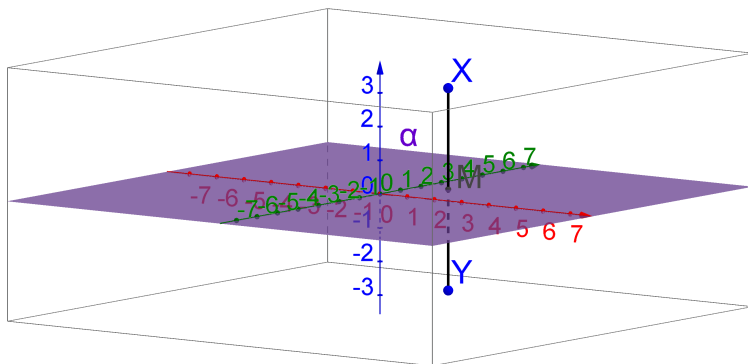


Figura 3 – Simetria em relação a um plano.

**Observação 1.12.** Neste caso, note que, se o ponto  $P(a, b, c)$  pertencer ao conjunto de pontos  $S$ ,

- simétrico em relação ao plano  $z = 0$ , então o ponto  $P'(a, b, -c)$  também deverá pertencer a  $S$ ;
- simétrico em relação ao plano  $y = 0$ , então o ponto  $P'(a, -b, c)$  também deverá pertencer a  $S$ ;
- simétrico em relação ao plano  $x = 0$ , então o ponto  $P'(-a, b, c)$  também deverá pertencer a  $S$ .

**Definição 1.13.** Se a superfície quádrlica for simétrica em relação a:

- um ponto  $P$ , dizemos que  $P$  é um **centro de simetria**;
- uma reta  $r$ , dizemos que  $r$  é um **eixo de simetria**;
- um plano  $\alpha$ , dizemos que  $\alpha$  é um **plano de simetria**.

**Definição 1.14.** Um **centro de uma superfície quádrlica** é um centro de simetria da mesma.

**Definição 1.15.** *Uma superfície quádrlica*

- *que possua um único centro, é dita uma **superfície quádrlica centrada**;*
- *que não possua nenhum centro, ou mais de um centro, é dita uma **superfície quádrlica não centrada**.*

Nos próximos dois capítulos, definiremos todas as quádrlicas centradas e não centradas, bem como seus casos degenerados.

## 1.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS QUÁDRICAS CENTRADAS

Nesta seção, vamos enunciar e demonstrar um importante teorema sobre as superfícies quádrlicas centradas. Assumimos aqui o fato de que a equação (1.1) pode ser escrita, conforme mudança de coordenadas já citada, como (1.2), sem os termos mistos.

**Teorema 1.16.** *Os coeficientes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  da equação*

$$A'x_R^2 + B'y_R^2 + C'z_R^2 + G'x_R + H'y_R + I'z_R + J' = 0$$

*são todos não nulos se, e somente se, a superfície quádrlica não vazia  $S$  relativa à equação quadrática for uma superfície quádrlica centrada.*

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Vamos, primeiramente, verificar que, se  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  forem todos não nulos,  $S$  é centrada, ou seja, que ela possui um único centro.

Fazendo

$$-J' + \frac{1}{4} \left( \frac{(G')^2}{A'} + \frac{(H')^2}{B'} + \frac{(I')^2}{C'} \right) = k$$

e completando os quadrados em (1.2), temos:

$$A' \left( x_R + \frac{G'}{2A'} \right)^2 + B' \left( y_R + \frac{H'}{2B'} \right)^2 + C' \left( z_R + \frac{I'}{2C'} \right)^2 = k.$$

Definindo  $x_R + \frac{G'}{2A'} = x_S$ ,  $y_R + \frac{H'}{2B'} = y_S$  e  $z_R + \frac{I'}{2C'} = z_S$ , podemos, por translação de eixos, mudar o sistema de coordenadas  $Ox_Ry_Rz_R$  para um novo sistema,  $O'x_Sy_Sz_S$ . Com isto, reescrevemos a equação anterior da forma

$$A'x_S^2 + B'y_S^2 + C'z_S^2 = k. \quad (1.3)$$

Note que os pontos da superfície quádrlica, no sistema  $O'xsyszS$ , são aqueles que satisfazem a equação (1.3). Se, na equação (1.3),  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  tiverem mesmo sinal, e este sinal for oposto ao sinal de  $k$ , então a equação não tem solução real. Neste caso, teríamos uma quádrlica vazia, que não interessa. Já se  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  tiverem mesmo sinal e  $k$  for igual a zero, então a equação tem uma única solução: o terno ordenado  $(0, 0, 0)$ . Neste caso, a quádrlica teria um único ponto, que seria o próprio centro da mesma.

Vamos supor que  $A'$ ,  $B'$  ou  $C'$  tenham mesmo sinal que  $k$ , ou que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  não tenham todos mesmo sinal, de modo que a equação (1.3) tenha infinitas soluções.

Suponha um ponto  $P(a, b, c)$  qualquer, no sistema  $O'xsyszS$  que pertença à superfície  $S$ , ou seja, suponha um terno ordenado qualquer  $(a, b, c)$  que seja solução da equação (1.3). Se o ponto  $C(r, s, t)$  for centro da superfície quádrlica, então o ponto

$$P'(-a + 2r, -b + 2s, -c + 2t)$$

também deverá estar na superfície (ou ainda, o terno ordenado  $(-a + 2r, -b + 2s, -c + 2t)$  deverá ser solução da equação), uma vez que o ponto  $C$  é ponto médio entre  $P$  e  $P'$ .

Vamos mostrar que  $C(r, s, t)$  é a origem do sistema  $O'xsyszS$ . Ou seja, averiguemos que  $r = s = t = 0$ . Vamos supor, por absurdo, que  $r$  não seja nulo.

Temos que o ponto  $Q(-a, b, c)$  também pertence à quádrlica, o que nos leva ao fato de que o ponto

$$Q'(a + 2r, -b + 2s, -c + 2t)$$

também está em  $S$ , ou ainda, o terno ordenado  $(a + 2r, -b + 2s, -c + 2t)$  também é solução de (1.3). Assim, temos que

$$\begin{aligned} A'(-a + 2r)^2 + B'(-b + 2s)^2 + C'(-c + 2t)^2 &= k \quad e \\ A'(a + 2r)^2 + B'(-b + 2s)^2 + C'(-c + 2t)^2 &= k. \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações, encontramos que  $8A'ar = 0$ , o que implica que  $a = 0$ .

Assim, mostramos que, para qualquer ponto  $P(a, b, c)$  de  $S$ , a primeira coordenada, representada por  $a$ , é zero. Isto é um absurdo, pois:

- se  $A'$  e  $k$  tiverem mesmo sinal, o ponto  $X \left( \sqrt{\frac{k}{A'}}, 0, 0 \right)$  também estará em  $S$ , já que  $\left( \sqrt{\frac{k}{A'}}, 0, 0 \right)$  é solução de (1.3);
- se  $A'$  e  $k$  tiverem sinais opostos, e  $B'$  tiver mesmo sinal de  $k$ , vejamos que existe uma solução de (1.3) em que  $z_S = 0$ . Nesta solução, ocorre que

$$A'x_S^2 = k - B'y_S^2$$

e, nesta igualdade, tomamos  $|y_S|$  tão grande quanto se queira, de modo que  $k - B'y_S^2$  tenha mesmo sinal que  $A'$ . Assim, ocorre que

$$x_S = \sqrt{\frac{k - B'y_S^2}{A'}} \neq 0$$

o que, novamente, acarreta num ponto de  $S$  em que a primeira coordenada não é nula. Neste caso, o ponto  $X \left( \sqrt{\frac{k - B'y_S^2}{A'}}, y_S, 0 \right)$  também estará em  $S$ .

Analogamente, para  $s$  ou  $t$  não nulos, podemos chegar a uma conclusão absurda. Logo, é necessário que  $r = s = t = 0$ , e assim, a superfície quádrlica possui um único centro, que, no sistema  $O'x_Sy_Sz_S$ , é a origem do mesmo.

( $\Leftarrow$ ) Agora, vamos mostrar que, se  $S$  é centrada, então os coeficientes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são todos não nulos.

Seja  $C(r, s, t)$  centro de  $S$ , que é centrada. Neste caso, para todo ponto  $P$  em  $S$ , existe um ponto  $P'$ , de modo que  $P$  e  $P'$  sejam simétricos em relação a  $C$ .

Vamos supor primeiro, por absurdo, que  $C' = 0$ , e  $A'$  e  $B'$  não nulos. Neste caso, na equação (1.2), não vamos completar o quadrado em  $z_R$ . Os casos em que não completariamos os quadrados em  $x_R$  (quando  $C' \neq 0$ ,  $B' \neq 0$  e  $A' = 0$ ), ou em  $y_R$  (quando  $C' \neq 0$ ,  $A' \neq 0$  e  $B' = 0$ ), são análogos.

Aqui, devemos definir uma constante  $t_z$  tal que  $z_R + t_z = z_S$ . Esta constante representará uma conveniente translação do eixo  $Oz_R$ . Com ela, poderemos escrever a equação de uma maneira mais sucinta e elegante.

Fazendo

$$-J' + \frac{1}{4} \left( \frac{(G')^2}{A'} + \frac{(H')^2}{B'} \right) = k$$

a equação (1.2) fica assim

$$A' \left( x_R + \frac{G'}{2A'} \right)^2 + B' \left( y_R + \frac{H'}{2B'} \right)^2 + I' z_R = k. \quad (1.4)$$

Além disso, assim como fizemos na ida, vamos definir  $x_R + \frac{G'}{2A'} = x_S$  e  $y_R + \frac{H'}{2B'} = y_S$ , variáveis estas dadas em função de conveniente translação dos eixos  $Ox_R$  e  $Oy_R$ , respectivamente.

Com isto, a equação (1.4), fica

$$A' x_S^2 + B' y_S^2 + I' (z_S - t_z) = k$$

que, equivalentemente, pode ser escrita como

$$A' x_S^2 + B' y_S^2 + I' z_S = k + t_z I'. \quad (1.5)$$

Aqui, temos duas situações possíveis:

- se, em (1.5),  $I' = 0$ , a equação resume-se a

$$A' x_S^2 + B' y_S^2 = k. \quad (1.6)$$

Neste caso, podemos efetuar cálculos análogos àqueles da ida do teorema, concluindo que  $r$  e  $s$  deverão ser, necessariamente, iguais a zero. Porém, como a equação (1.6) não possui termo na incógnita  $z_R$ , então para todo  $k$  real, o ponto  $(0, 0, k)$  é centro de  $S$ , já que os valores de  $x_R$  e  $y_R$  independem de  $z_R$ . Se há infinitos centros na quádrlica, esta é não centrada;

- já se em (1.5),  $I' \neq 0$ , podemos definir  $t_z = -\frac{k}{I'}$ , de modo que (1.5) possa ser escrita como

$$A' x_S^2 + B' y_S^2 + I' z_S = 0. \quad (1.7)$$

Seja novamente  $C(r, s, t)$  centro de  $S$ . Se, para todo ponto  $P$  em  $S$ , deve haver o simétrico  $P'$  em relação a  $C$ , então, em particular, os pontos  $K \left( 1, 0, -\frac{A'}{I'} \right)$  e  $L \left( -1, 0, -\frac{A'}{I'} \right)$  (que pertencem a  $S$ ) deverão ser simétricos a outros dois pontos,  $K'$  e  $L'$  respectivamente, de modo que:

$$\cdot K' \left( 2r - 1, 2s, 2t + \frac{A'}{I'} \right) \text{ pertença a } S,$$

·  $L' \left( 2r + 1, 2s, 2t + \frac{A'}{I'} \right)$  pertença a  $S$ .

Com isto, substituindo as coordenadas de  $K'$  e  $L'$  na equação (1.7) temos que:

$$\begin{aligned} A'(4r^2 - 4r + 1) + B'(2s)^2 + I' \left( 2t + \frac{A'}{I'} \right) &= 0 \quad \text{e} \\ A'(4r^2 + 4r + 1) + B'(2s)^2 + I' \left( 2t + \frac{A'}{I'} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações anteriores, chegamos a  $8A'r = 0$ , que só ocorre se  $r = 0$ .

Adotando os pontos  $N \left( 0, 1, -\frac{B'}{I'} \right)$  e  $R \left( 0, -1, -\frac{B'}{I'} \right)$ , que pertencem a  $S$ , verificamos, analogamente, que  $s = 0$ .

Então, o centro deverá ser um ponto da forma  $(0, 0, k)$ . Como  $V(0, 0, 0)$  pertence a  $S$ , então segue que  $N(0, 0, 2k)$  pertence a  $S$  também. Com isso, temos:

$$A'.(0)^2 + B'.(0)^2 + I'(2k) = 0$$

e, portanto,  $k = 0$ .

Assim sendo, concluímos que  $V(0, 0, 0)$  é o centro de  $S$ . Isto é absurdo, já que  $L \left( 1, 0, -\frac{A'}{I'} \right)$  pertence a  $S$ , e seu simétrico em relação a  $V$ ,  $L^* \left( -1, 0, \frac{A'}{I'} \right)$  não pertence a  $S$ , tão logo

$$A'.(-1)^2 + B'.0^2 + I' \left( \frac{A'}{I'} \right) = 0 \iff 2A' = 0 \iff A' = 0$$

contrariando a hipótese de  $A'$  ser não nulo.

E, por fim, vamos supor, também por absurdo, que  $C' = B' = 0$ , e  $A'$  é não nulo. Neste caso, na equação (1.2), vamos completar o quadrado apenas em  $x_R$ . Os casos em que completariamos os quadrados só em  $y_R$  (quando  $A' = C' = 0$  e  $B' \neq 0$ ) ou só em  $z_R$  (quando  $A' = B' = 0$  e  $C' \neq 0$ ) são análogos

Aqui, devemos definir as constantes  $t_y$  e  $t_z$ , tal que  $y_R + t_y = y_S$

e  $z_R + t_z = z_S$ . Fazendo

$$-J' + \frac{1}{4} \frac{(G')^2}{A'} = k$$

a equação (1.2) fica

$$A' \left( x_R + \frac{G'}{2A'} \right)^2 + H' y_R + I' z_R = k. \quad (1.8)$$

Da mesma forma como fizemos nos passos anteriores, vamos definir  $x_R + \frac{G'}{2A'} = x_S$ .

Com isto, a equação (1.8), fica

$$A' x_S^2 + H'(y_S - t_y) + I'(z_S - t_z) = k$$

que, equivalentemente, pode ser escrita como

$$A' x_S^2 + H' y_S + I' z_S = k + t_y H' + t_z I'. \quad (1.9)$$

Se, em (1.9),  $H' = I' = 0$ , a equação resume-se a  $A' x_S^2 = k$ . Se  $H' = 0$  e  $I' \neq 0$ , podemos definir  $t_z = -\frac{k}{I'}$ , de modo que (1.9) possa ser escrita como

$$A' x_S^2 + I' z_S = 0.$$

Se  $H' \neq 0$  e  $I' = 0$ , podemos definir  $t_y = -\frac{k}{H'}$ , de modo que (1.5) possa ser escrita como

$$A' x_S^2 + H' y_S = 0.$$

Já, se  $H' \neq 0$  e  $I' \neq 0$ , podemos definir  $t_y = -\frac{k}{2H'}$  e  $t_z = -\frac{k}{2I'}$ , de modo que (1.5) possa ser escrita como

$$A' x_S^2 + H' y_S + I' z_S = 0. \quad (1.10)$$

Nos três primeiros cenários, existirá uma (ou duas) variável(is) livre(s) na equação, o que nos leva ao fato de que, se houver centro na quádrlica, ele não será único, de modo análogo ao que deduzimos anteriormente. Portanto, essa quádrlica não será centrada.

Já no terceiro caso, caso realmente houvesse um centro  $C(r, s, t)$  para a quádrlica, teríamos que, como os pontos  $W \left( 1, -\frac{A'}{2H'}, -\frac{A'}{2I'} \right)$  e  $T \left( -1, -\frac{A'}{2H'}, -\frac{A'}{2I'} \right)$  pertencem à quádrlica, então, de modo análogo ao

caso anterior, ocorre que

$$W^* \left( 2r - 1, 2s + \frac{A'}{2H'}, 2t + \frac{A'}{2I'} \right)$$

e

$$T^* \left( 2r + 1, 2s + \frac{A'}{2H'}, 2t + \frac{A'}{2I'} \right)$$

também estariam em  $S$ , o que implicaria

$$A'(4r^2 - 4r + 1) + H' \left( 2s + \frac{A'}{2H'} \right) + I' \left( 2t + \frac{A'}{I'} \right) = 0 \quad e$$

$$A'(4r^2 - 4r + 1) + H' \left( 2s + \frac{A'}{2H'} \right) + I' \left( 2t + \frac{A'}{I'} \right) = 0.$$

Novamente, subtraindo as equações, temos que  $8A'r = 0$ , o que leva à conclusão de que, mais uma vez,  $r = 0$ .

Com isto, o centro  $C$  é da forma  $(0, s, t)$ . Como  $V(0, 0, 0)$  pertence a  $S$ , então  $Q(0, 2s, 2t)$  também pertence a  $S$ , o que implica em

$$A'.(0)^2 + H'(2s) + I'(2t) = 0 \iff 2H's + 2I't = 0.$$

Desta igualdade, também concluímos que  $H's + I't = 0$ .

Além disso, supondo um ponto  $P(a, b, c)$  em  $S$ , temos que o ponto  $P'(-a, -b + 2s, -c + 2t)$  também está em  $S$ . Com isso, temos que

$$\begin{aligned} A'(a)^2 + H'(b) + I'(c) &= 0 \\ A'(-a)^2 + H'(-b + 2s) + I'(-c + 2t) &= 0 \\ A'a^2 - H'b - I'c + \underbrace{2H's + 2I't}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Afirmamos que, para todo ponto  $(0, p, q)$  de tal forma que  $H'p + I'q = 0$ , temos que esse ponto  $(0, p, q)$  é centro de  $S$ . Isto pode ser verificado pelo fato de que o ponto  $(-a + 2.(0), -b + 2p, -c + 2q)$  pertence a  $S$ , tão logo ocorra,



$$\begin{aligned}
 A'(-a)^2 + H'(-b + 2p) + I'(-c + 2q) &= \\
 \underbrace{A'a^2 - H'b - I'c}_0 + \underbrace{2H'p + 2I'q}_0 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, se  $S$  possuir centro, ele não será único, já que existem infinitos pontos da forma  $(0, p, q)$  pertencentes a  $S$ , tão logo  $H'p + I'q$  seja zero. Isto por si só já implica numa quádrlica não centrada.

Com isso, vimos, em todos os casos possíveis que, se algum dos coeficientes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  forem nulos, a quádrlica não é centrada, como queríamos demonstrar.  $\square$



## 2 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS CENTRADAS

Neste capítulo, assim como no próximo, vamos analisar as possibilidades gráficas para as equações quadráticas da forma

$$A'x_R^2 + B'y_R^2 + C'z_R^2 + G'x_R + H'y_R + I'z_R + J' = 0$$

sendo  $x_R$ ,  $y_R$  e  $z_R$  as novas coordenadas do espaço cartesiano, obtidas através da rotação dos eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ .

É sempre importante frisar que, nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , as equações do segundo grau sempre representam quádricas, mesmo que degeneradas. Porém, estas equações contemplam os termos mistos, que dificultam que percebamos a quais superfícies as equações correspondem no espaço cartesiano. Estamos, portanto, assumindo a possibilidade de se fazer essa mudança de coordenadas, que visa identificar a quádrica correspondente à equação. No capítulo 4, mostraremos como fazer tal mudança.

A partir do momento em que podemos, através de mudança de coordenadas, reescrever a equação (1.1), de modo em que os termos mistos desapareçam, explicitaremos claramente os traços das quádricas nos planos cartesianos e paralelos, podendo assim entender as formas das superfícies quádricas centradas e não-centradas. Tudo isto será visto mais adiante, quando, munidos das ferramentas da álgebra linear, conseguiremos tal proeza.

Conforme teorema 1.16 demonstrado no capítulo anterior, se  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são todos não nulos em (1.2), a superfície quádrica correspondente é centrada.

Procedendo de modo análogo ao da ida da demonstração do teorema 1.16, vamos escrever a equação (1.2) da forma

$$A'x_S^2 + B'y_S^2 + C'z_S^2 = k. \quad (2.1)$$

Com uma translação de eixos, montaremos um novo sistema de coordenadas, de modo a termos  $x_R + \frac{G'}{2A'} = x_S$ ,  $y_R + \frac{H'}{2B'} = y_S$  e  $z_R + \frac{I'}{2C'} = z_S$ . Neste caso, já vimos que o centro das quádricas, no sistema  $O'x_Sy_Sz_S$ , será a origem do mesmo.

A equação (2.1), no caso  $k \neq 0$ , pode ser escrita da forma

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k}{C'}} = 1.$$

Vamos enunciar aqui uma caracterização importante das superfícies quádricas centradas.

**Proposição 2.1.** *Uma superfície quádrica centrada na origem do espaço cartesiano com um sistema de coordenadas  $O'x_Sy_Sz_S$ , possui simetria em relação aos planos  $O'x_Sy_S$ ,  $O'x_Sz_S$  e  $O'y_Sz_S$ .*

*Demonstração.* No teorema 1.16, vimos que, se uma quádrica for centrada, então, a sua equação geral pode ser escrita na forma  $A'x_S^2 + B'y_S^2 + C'z_S^2 = k$ , num sistema de eixos  $O'x_Sy_Sz_S$ , fruto de rotação e translação convenientes dos eixos cartesianos. Assim, nesse sistema, se uma quádrica possuir o ponto  $P$  de coordenadas  $(r, s, t)$ , então concluímos que

$$A'r^2 + B's^2 + C't^2 = k.$$

Temos, portanto, conforme a observação 1.12, que:

- $A'r^2 + B's^2 + C'(-t)^2 = k$ , logo o ponto  $Q(r, s, -t)$  também pertence à superfície. Assim, a quádrica é simétrica em relação ao plano  $O'x_Sy_S$ ;
- $A'r^2 + B'(-s)^2 + C't^2 = k$ , logo o ponto  $R(r, -s, t)$  também pertence à superfície. Assim, a quádrica é simétrica em relação ao plano  $O'x_Sz_S$ ;
- $A'(-r)^2 + B's^2 + C't^2 = k$ , logo o ponto  $S(-r, s, t)$  também pertence à superfície. Assim, a quádrica é simétrica em relação ao plano  $O'y_Sz_S$ .

□

Em (2.1), temos algumas possibilidades quanto aos sinais das constantes  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $k$ . Cada uma destas possibilidades resultará numa quádrica centrada, ou numa quádrica centrada degenerada.

### 2.0.1 Elipsóides e esferas e casos degenerados

**Definição 2.2.** *Se, em (2.1),  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $k$  forem todos de mesmo sinal, a superfície quádrica será dita um **elipsóide**.*

O traço do elipsóide nos planos coordenados são:

- no plano  $x_S = 0$ , uma elipse, de equação

$$\frac{y_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k}{C'}} = 1;$$

- no plano  $y_S = 0$ , uma elipse, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k}{C'}} = 1;$$

- no plano  $z_S = 0$ , uma elipse, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} = 1.$$

A seguir, a título de exemplo, mostraremos a figura de um elipsóide de equação  $x_S^2 + 4y_S^2 + 4z_S^2 = 4$ .

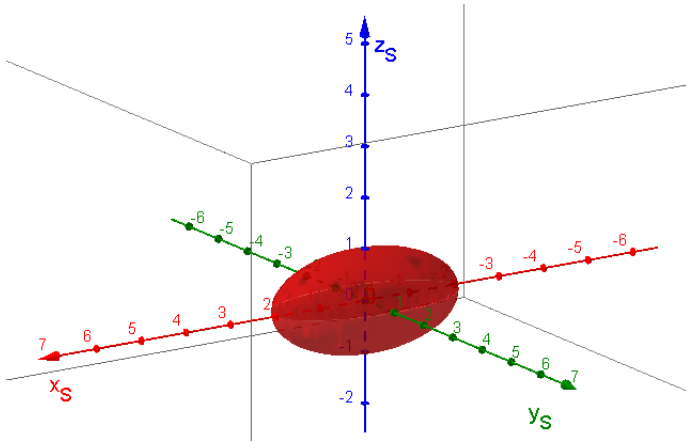


Figura 4 – Elipsóide.

Ao traçarmos planos paralelos aos planos coordenados, a partir de cálculos elementares, temos:

- no plano  $x_S = m$ :

– uma elipse, se  $(k - A'm^2)$  for de mesmo sinal que  $B'$  e  $C'$ .

A equação da elipse é, então,

$$\frac{y_S^2}{\frac{k-C'm^2}{A'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k-C'm^2}{B'}} = 1;$$

- um ponto, se  $(k - A'm^2) = 0$  (neste caso, dizemos que o ponto é um *vértice* do elipsóide;
- o conjunto vazio, se  $(k - A'm^2)$  for de sinal oposto a  $B'$  e  $C'$ .

• no plano  $y_S = m$ :

- elipse, se  $(k - B'm^2)$  for de mesmo sinal que  $A'$  e  $C'$ .  
A equação da elipse é, então,

$$\frac{x_S^2}{\frac{k-B'm^2}{A'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k-B'm^2}{C'}} = 1;$$

- ponto, se  $(k - B'm^2) = 0$  (neste caso, dizemos que o ponto é um *vértice* do elipsóide;
- conjunto vazio, se  $(k - B'm^2)$  for de sinal oposto a  $A'$  e  $C'$ .

• no plano  $z_S = m$ :

- elipse, se  $(k - A'm^2)$  for de mesmo sinal que  $A'$  e  $B'$ .  
A equação da elipse é, então,

$$\frac{x_S^2}{\frac{k-A'm^2}{B'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k-A'm^2}{C'}} = 1;$$

- ponto, se  $(k - A'm^2) = 0$  (neste caso, dizemos que o ponto é um *vértice* do elipsóide
- conjunto vazio, se  $(k - A'm^2)$  for de sinal oposto a  $A'$  e  $B'$ .

Se os coeficientes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  forem todos iguais, e  $k$  for de mesmo sinal que eles, teremos então a equação de uma *esfera*, com centro na origem, e traços em forma de circunferência, de raio  $\sqrt{\frac{k}{A'}}$  nos três planos coordenados.

Sendo  $R$  o raio da esfera, sua equação, neste caso, é da forma

$$x_S^2 + y_S^2 + z_S^2 = R^2.$$

Vejamos o exemplo de uma esfera de equação  $x_S^2 + y_S^2 + z_S^2 = 2,25$ .

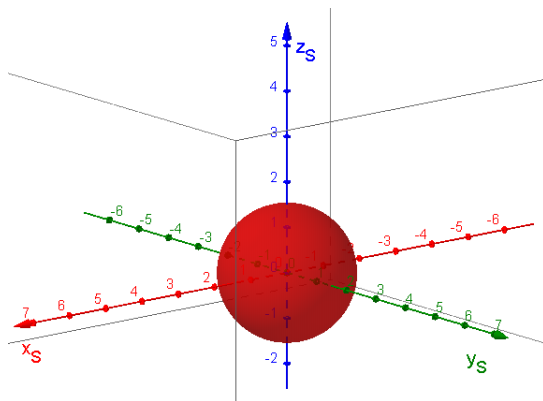


Figura 5 – Esfera.

Podemos ter dois casos degenerados aqui.

Se, em (2.1), os coeficientes  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  forem todos de mesmo sinal, e  $k = 0$ , a equação terá uma só solução (a trivial) e a superfície quádrlica degenerada será um **ponto**. Este ponto será a *origem* desse novo sistema de coordenadas adotado  $Ox_Sy_Sz_S$ .

Informalmente, poderia-se pensar neste ponto como um “elipsóide de eixos com medida zero”.

Se, em (2.1),  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  forem todos de mesmo sinal, e  $k$  tiver sinal oposto a estes três, a equação  $A'x_S^2 + B'y_S^2 + C'z_S^2 = k$  não tem solução. Representa, portanto, o conjunto vazio. Conforme definição apresentada no site [www.solitaryroad.com](http://www.solitaryroad.com), que consta nas referências, a quádrlica em questão consiste em um **elipsóide imaginário**.

Informalmente, poderia-se pensar neste ponto como um “elipsóide de eixos com medidas imaginárias”, já que haveria a necessidade de ser ter algum  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $p^2 < 0$ , o que não acontece.

## 2.0.2 Hiperbolóide de uma folha

**Definição 2.3.** *Se, em (2.1), apenas dois dos três coeficientes ( $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ ) tiverem mesmo sinal e  $k$  for tal que  $A'B'C'k < 0$ , a superfície quádrlica será dita um **hiperbóide de uma folha**.*

Neste caso, supondo que  $C'$  tenha sinal oposto a  $A'$  e  $B'$  (os

demais casos são análogos), a equação (2.1) pode ser escrita da forma

$$A'x_S^2 + B'y_S^2 - (-C')z_S^2 = k$$

ou

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} - \frac{z_S^2}{\frac{k}{-C'}} = 1.$$

O traço do hiperbolóide nos planos coordenados são:

- no plano  $x_S = 0$ , uma hipérbole, de equação

$$\frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} - \frac{z_S^2}{\frac{k}{-C'}} = 1;$$

- no plano  $y_S = 0$ , uma hipérbole, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} - \frac{z_S^2}{\frac{k}{-C'}} = 1;$$

- no plano  $z_S = 0$ , uma elipse, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} = 1.$$

Caso  $A'$  e  $B'$  sejam iguais, o traço será uma circunferência de raio  $\sqrt{\frac{k}{A'}}$ , e hiperbolóide de uma folha será dito de hiperbolóide de uma folha de **revolução**. Caso o hiperbolóide seja de revolução, esta se dará em torno do eixo imaginário de qualquer uma de duas hipérbolas, ou a no plano  $O'x_Sz_S$ , ou a no plano  $O'y_Sz_S$ .

Vejamos o exemplo de um hiperbolóide de uma folha com equação  $3x_S^2 + y_S^2 - z_S^2 = 1$ .



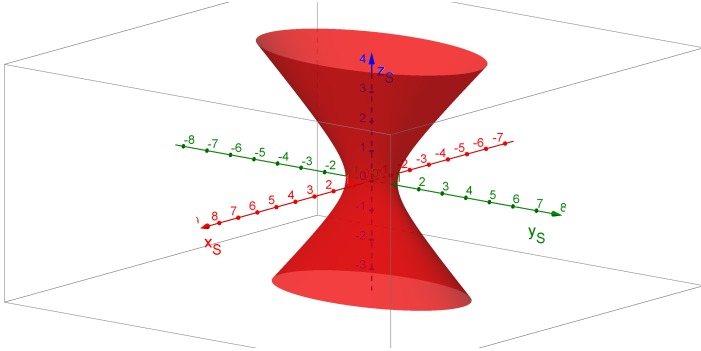


Figura 6 – Hiperbolóide de uma folha.

Ao traçarmos planos paralelos aos planos coordenados, temos:

- no plano  $x_S = m$ :

– se  $k - A'm^2 \neq 0$ , hipérbole, de equação

$$\frac{y_S^2}{\frac{k-A'm^2}{B'}} - \frac{z_S^2}{-C'} = 1;$$

– se  $k - A'm^2 = 0$ , um par de retas concorrentes, de equações

$$y_S = \pm \sqrt{\frac{-C'}{B'}} z_S;$$

- no plano  $y_S = m$ :

– se  $k - B'm^2 \neq 0$ , hipérbole, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k-B'm^2}{A'}} - \frac{z_S^2}{-C'} = 1;$$

– se  $k - B'm^2 = 0$ , um par de retas concorrentes, de equações

$$x_S = \pm \sqrt{\frac{-C'}{A'}} z_S;$$

- no plano  $z_S = m$ :

– elipse, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k-C'm^2}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k-C'm^2}{B'}} = 1$$

Note que  $k - C'm^2 \neq 0$ , uma vez que  $k$  e  $C'$  têm sinais opostos. Se  $k > 0$  e  $C' < 0$ ,  $k - C'm^2 > 0$ . Já se  $k < 0$  e  $C' > 0$ , então ocorre  $k - C'm^2 < 0$ .

Além disso, através da equação  $\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} - \frac{z_S^2}{-C'} = 1$ , equivalente a (2.1), verificamos que, tão logo  $1 + \frac{m^2}{-C'} > 0$  ( $k$  e  $C'$  têm sinais opostos), para todo  $m \in \mathbb{R}$ , a equação  $\frac{x_S^2}{\frac{k-C'm^2}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k-C'm^2}{B'}} = 1$  necessariamente consiste numa elipse.

Como a constante de sinal contrário está em  $z_S$ , então o eixo disjunto com o hiperbolóide de uma folha está sobre eixo  $O'z_S$ . Se essa constante estivesse em  $x_S$ , ou  $y_S$ , este eixo seria o  $O'x_S$ , ou  $O'y_S$ , respectivamente.

### 2.0.3 Hiperbolóide de duas folhas

**Definição 2.4.** *Se, em (2.1), apenas dois dos três coeficientes ( $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ ) tiverem mesmo sinal e  $k$  for tal que  $A'B'C'k > 0$ , a superfície quádrlica sera dita um **hiperbóide de duas folhas**.*

Neste caso, supondo que  $C'$  e  $k$  tenham sinais opostos a  $A'$  e  $B'$  (os demais casos são análogos), a equação (2.1) pode ser escrita da forma

$$-(-A')x_S^2 - (-B')y_S^2 + C'z_S^2 = k$$

ou

$$-\frac{x_S^2}{\frac{k}{-A'}} - \frac{y_S^2}{\frac{k}{-B'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k}{C'}} = 1.$$

O traço do hiperbolóide nos planos coordenados são:

- no plano  $x_S = 0$ , uma hipérbole, de equação

$$-\frac{y_S^2}{\frac{k}{-B'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k}{C'}} = 1;$$

- no plano  $y_S = 0$ , uma hipérbole, de equação

$$-\frac{x_S^2}{\frac{k}{-A'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k}{C'}} = 1;$$

- no plano  $z_S = 0$ , conjunto vazio, uma vez que a equação

$$-\frac{x_S^2}{\frac{k}{-A'}} - \frac{y_S^2}{\frac{k}{-B'}} = 1$$

não tem solução em  $\mathbb{R}$ .

A figura a seguir traz o exemplo de um hiperbolóide de duas folhas com equação  $2x_S^2 + y_S^2 - 3z_S^2 = -1$ .

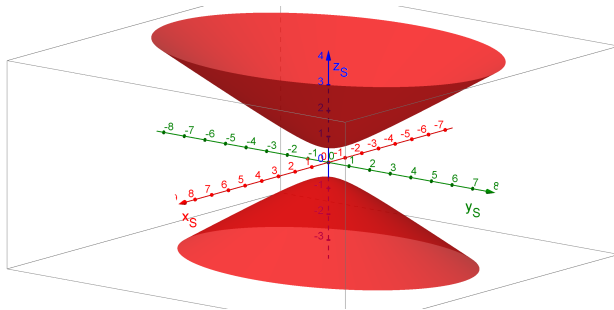


Figura 7 – Hiperbolóide de duas folhas.

Ao traçarmos planos paralelos aos planos coordenados, temos, observando que  $k - A'm^2 \neq 0$  e  $k - B'm^2 \neq 0$ , pela mesma razão mostrada ao final da sessão anterior:

- no plano  $x_S = m$ :

– hipérbole, de equação

$$-\frac{y_S^2}{\frac{k-A'm^2}{-B'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k-A'm^2}{C'}} = 1;$$

- no plano  $y_S = m$ :

– hipérbole, de equação

$$-\frac{x_S^2}{\frac{k-B'm^2}{-A'}} + \frac{z_S^2}{\frac{k-B'm^2}{C'}} = 1;$$

• no plano  $z_S = m$ :

– elipse, se  $(k - C'm^2)$  for de mesmo sinal que  $A'$  e  $B'$ .

A equação da elipse é, então,

$$\frac{x_S^2}{\frac{k-C'm^2}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k-C'm^2}{B'}} = 1;$$

– ponto, se  $(k - C'm^2) = 0$  (neste caso, dizemos que o ponto é um *vértice* do hiperbolóide;

– conjunto vazio, se  $(k - C'm^2)$  for de sinal oposto a  $A'$  e  $B'$ .

Caso  $A'$  e  $B'$  sejam iguais, a elipse do primeiro subitem será uma circunferência de raio  $\sqrt{\frac{k-C'm^2}{A'}}$ , e hiperbolóide de duas folhas será dito de hiperbolóide de duas folhas de **revolução**. Caso o hiperbolóide seja de revolução, esta se dará em torno do eixo real das hipérbolas nos planos  $O'x_Sz_S$  e  $O'y_Sz_S$ .

Como a constante de sinal contrário está em  $z_S$ , então o único eixo que não é disjunto com o hiperbolóide de duas folhas está sobre eixo  $O'z_S$ . Se essa constante estivesse em  $x_S$ , ou  $y_S$ , este eixo seria o  $O'x_S$ , ou  $O'y_S$ , respectivamente.

## 2.0.4 Cone elíptico e de revolução

**Definição 2.5.** *Se, em (2.1), apenas dois dos três coeficientes ( $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ ) tiverem mesmo sinal e  $k = 0$ , a superfície quádrlica será dita um **cone elíptico**. Caso os dois coeficientes de mesmo sinal tenham mesmo valor, o cone será **circular reto** ou de **revolução**.*

Neste caso, supondo que  $C'$  tenha sinal oposto a  $A'$  e  $B'$  (os demais casos são análogos), a equação (2.1) pode ser escrita da forma

$$A'x_S^2 + B'y_S^2 - (-C')z_S^2 = 0 \tag{2.2}$$

ou

$$A'x_S^2 + B'y_S^2 = (-C')z_S^2 \iff \frac{x_S^2}{\frac{-C'}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{-C'}{B'}} = z_S^2.$$

O cone da figura a seguir tem equação  $4x_S^2 + y_S^2 - z_S^2 = 0$ .

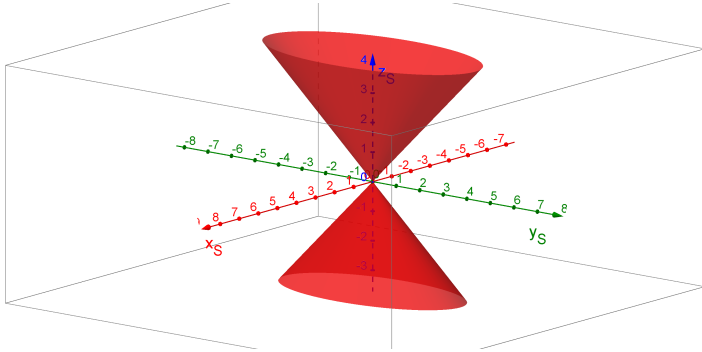


Figura 8 – Cone elíptico.

Os traços do cone nos planos coordenados são:

- no plano  $x_S = 0$ , um par de retas, de equações

$$z_S = \pm \sqrt{\frac{B'}{-C'}} y_S;$$

- no plano  $y_S = 0$ , um par de retas, de equações

$$z_S = \pm \sqrt{\frac{A'}{-C'}} x_S;$$

- no plano  $z_S = 0$ , um único ponto, a origem do novo sistema de coordenadas, já que a equação (2.2) tem uma única solução, no caso, a trivial. Esse ponto é denominado *vértice* da superfície cônica.

Ao traçarmos planos paralelos aos planos coordenados, temos:

- no plano  $x_S = m$ :
  - hipérbole, de equação

$$\frac{z_S^2}{\frac{A'm^2}{-C'}} - \frac{y_S^2}{\frac{A'm^2}{B'}} = 1;$$

- no plano  $y_S = m$ :
  - hipérbole, de equação

$$\frac{z_S^2}{\frac{B'm^2}{-C'}} - \frac{x_S^2}{\frac{B'm^2}{A'}} = 1;$$

- no plano  $z_S = m$ :
  - elipse, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{-C'm^2}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{-C'm^2}{B'}} = 1.$$

Caso  $A'$  e  $B'$  sejam iguais, a elipse do terceiro subitem será uma circunferência de raio  $\sqrt{\frac{-C'm^2}{A'}}$  e o cone será de revolução. Neste caso, a hipérbole em  $y_S = m$  é equilátera. Além disso, a elipse delimitada pelo cone e plano  $z_S = m$  será uma circunferência.

Se o cone for de revolução, esta se dará em torno do eixo cuja variável correspondente tenha o coeficiente de sinal oposto. Caso este coeficiente estivesse em  $x_S$ , ou  $y_S$ , a revolução se daria em torno dos eixos  $Ox_S$  e  $Oy_S$ , respectivamente.

Como exemplo, segue a figura de um cone de revolução de equação  $x_S^2 + y_S^2 - z_S^2 = 0$ .

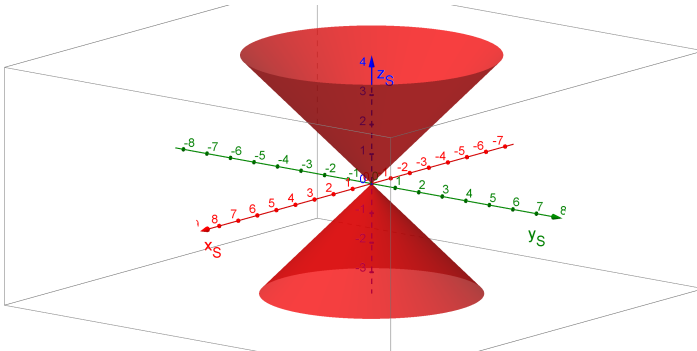


Figura 9 – Cone de revolução.

### 3 SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NÃO CENTRADAS

Novamente, vamos considerar as possibilidades gráficas para as equações quadráticas da forma

$$A'x_R^2 + B'y_R^2 + C'z_R^2 + G'x_R + H'y_R + I'z_R + J' = 0 \quad (1.2)$$

em que  $x_R$ ,  $y_R$  e  $z_R$ , são as novas coordenadas do espaço cartesiano, obtidas através da rotação dos eixos do sistema  $Oxyz$ . Assim como no capítulo anterior, assumimos a possibilidade de fazer tal mudança de coordenadas.

Vamos agora considerar o caso em que a equação (1.2), possua pelo menos um dos coeficientes quadráticos,  $A'$ ,  $B'$  ou  $C'$ , iguais a zero.

#### 3.1 QUÁDRICAS COM DOIS COEFICIENTES QUADRÁTICOS NÃO NULOS

Inicialmente, abordemos o caso em que apenas um daqueles três coeficientes seja nulo. Tomemos como exemplo, em todas as quádricas com dois coeficientes não nulos,  $C' = 0$ , e  $A'$  e  $B'$  não nulos.

Procedendo de modo análogo ao da volta da demonstração do teorema 1.16, a equação (1.2) fica da forma

- se, em (1.5),  $I' = 0$ , a equação resume-se a  $A'x_S^2 + B'y_S^2 = k$ ;
  - se  $I' \neq 0$ , podemos definir  $t_z = -\frac{k}{I'}$ , de modo que (1.5) pode ser escrita como
- $$A'x_S^2 + B'y_S^2 + I'z_S = 0. \quad (3.1)$$

A constante  $t_z$  tal que  $z_R + t_z = z_S$  representa uma conveniente translação do eixo  $Oz_R$ . Com ela, poderemos escrever as equações dos parabolóides (que serão vistas adiante no presente capítulo) de uma maneira mais sucinta e elegante.

Além disso, assim como fizemos no capítulo anterior, vamos definir  $x_R + \frac{G'}{2A'} = x_S$  e  $y_R + \frac{H'}{2B'} = y_S$ , variáveis estas dadas em função de conveniente translação dos eixos  $Ox_R$  e  $Oy_R$ , respectivamente.

Em (1.5), temos algumas possibilidades quanto aos sinais das constantes  $A'$ ,  $B'$ ,  $I'$  e  $k$ . Cada uma destas possibilidades resultará numa quádrica não centradas, ou numa quádrica não centrada degenerada.

### 3.1.1 Cilindro elíptico e de revolução e casos degenerados

**Definição 3.1.** Se, em (1.5),  $I' = 0$  e  $A'$ ,  $B'$  e  $k$  forem todos de mesmo sinal, a superfície quádrlica será um **cilindro elíptico**. Caso os dois coeficientes,  $A'$  e  $B'$ , tenham mesmo valor, o cilindro será **circular reto** ou de **revolução**.

Neste caso, como a equação (1.5) não tem nenhum termo em  $z_S$ , nem em  $z_S^2$ , então, para qualquer valor de  $z_S$ , a equação será de um elipse, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} = 1.$$

Este será, portanto, o traço do cilindro em todo plano da forma  $z_S = m$ , seja  $m = 0$  ou  $m \neq 0$ .

Vejamos um cilindro elíptico, de equação  $7x_S^2 + 3y_S^2 = 21$ .

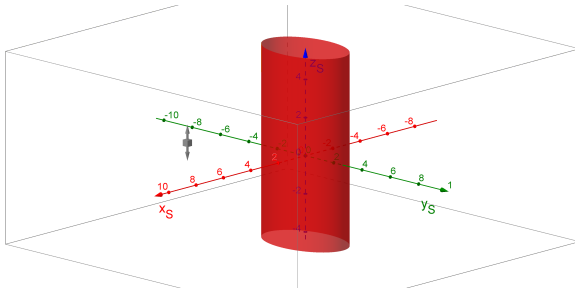


Figura 10 – Cilindro elíptico.

Agora, observemos um outro cilindro, este de revolução, de equação  $x_S^2 + y_S^2 = 9$ .

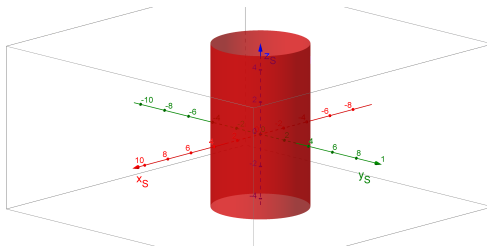


Figura 11 – Cilindro de revolução.



Já nos planos da forma:

- $x_S = m$ , para  $m$  qualquer:

- se  $(k - A'm^2)$  for de mesmo sinal que  $B'$ , um par de retas paralelas, de equações

$$y_S = \pm \sqrt{\frac{k - A'm^2}{B'}};$$

- se  $(k - A'm^2) = 0$ , o eixo  $Oy_S$ , uma reta, de equação

$$y_S = 0;$$

- se  $(k - A'm^2)$  for de sinal oposto a  $B'$ , conjunto vazio, uma vez que (1.5) não tem solução.

- $y_S = m$ , para  $m$  qualquer:

- se  $(k - B'm^2)$  for de mesmo sinal que  $A'$ , um par de retas paralelas, de equações

$$x_S = \pm \sqrt{\frac{k - B'm^2}{A'}};$$

- se  $(k - B'm^2) = 0$  o eixo  $Ox_S$ , uma reta, de equação

$$x_S = 0;$$

- se  $(k - B'm^2)$  for de sinal oposto a  $A'$ , conjunto vazio, uma vez que (1.5) não tem solução.

Podemos ter aqui dois casos degenerados.

Se, em (1.5),  $I' = 0$  e  $A'$ ,  $B'$  forem de mesmo sinal e  $k = 0$ , a superfície quádrlica será uma **reta**, já que, neste caso, as soluções da equação (1.5) seriam da forma  $(0, 0, z)$ . Todos os pontos no espaço correspondentes a ternos ordenados desta forma consistem numa reta, no caso, o eixo  $O'z_S$ .

Informalmente, teríamos um “cilindro elíptico” em que os eixos da elipse que o forma medindo zero.

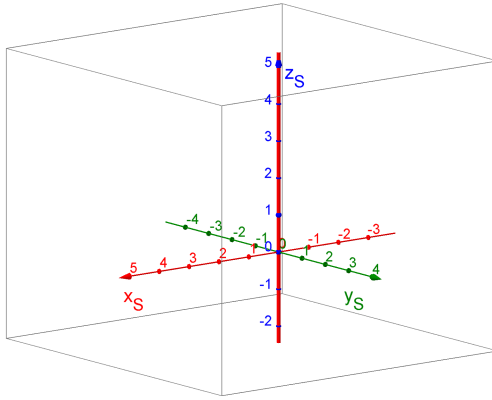


Figura 12 – Reta.

Se, em (1.5),  $I' = 0$  e  $A'$  e  $B'$  forem de mesmo sinal, e sinal oposto a  $k$ , a equação  $A'x_S^2 + B'y_S^2 = k$  não tem solução. Assim sendo, representa, o conjunto vazio. Novamente conforme definição apresentada no site [www.solitaryroad.com](http://www.solitaryroad.com), a quádrica em questão consiste em um **cilindro elíptico imaginário**.

Informalmente, poderia-se pensar que a “elipse” teria medidas imaginárias, já que haveria a necessidade de ser ter algum  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $p^2 < 0$ , o que não ocorre.

### 3.1.2 Cilindro hiperbólico e caso degenerado

**Definição 3.2.** *Se, em (1.5),  $I' = 0$ ,  $A'$  e  $B'$  forem de sinais opostos e  $k$  for não nulo, a superfície quádrica será um **cilindro hiperbólico**.*

Podemos aqui reescrever a equação (1.5) da forma

$$A'x_S^2 - (-B')y_S^2 = k.$$

Neste caso, como a equação (1.5) não tem nenhum termo em  $z_S$ , nem em  $z_S^2$ , então, para qualquer valor de  $z_S$ , a equação será de uma hipérbole, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{k}{A'}} - \frac{y_S^2}{\frac{k}{-B'}} = 1.$$

Nota: se  $A'k$  for positivo e  $B'k$  negativo, o eixo real da hipérbole

está contido no eixo  $Ox_S$ . Já se  $A'k$  for negativo e  $B'k$  positivo, o eixo real da hipérbole está contido no eixo  $Oy_S$ . Poderíamos escrever a equação da forma

$$\frac{y_S^2}{\frac{k}{B'}} - \frac{x_S^2}{\frac{k}{-A'}} = 1.$$

Este será, portanto, o traço do cilindro em todo plano da forma  $z_S = m$ , seja  $m = 0$  ou  $m \neq 0$ .

A equação do cilindro hiperbólico da figura a seguir é  $x_S^2 - y_S^2 = 1$ .

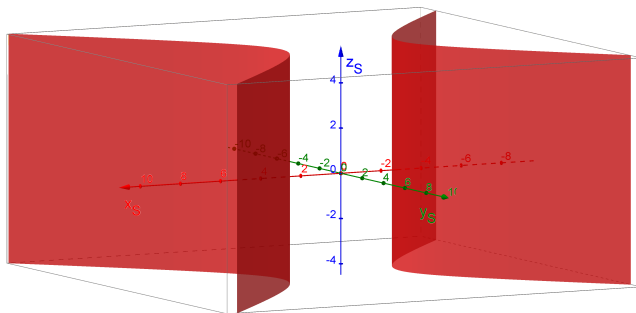


Figura 13 – Cilindro hiperbólico.

Já nos planos da forma:

- $x_S = m$ , para  $m$  qualquer
  - se  $(A'm^2 - k)$  for de mesmo sinal que  $-B'$ , um par de retas paralelas, de equações

$$y_S = \pm \sqrt{\frac{A'm^2 - k}{-B'}} = \pm \sqrt{\frac{k - A'm^2}{B'}};$$

- se  $(A'm^2 - k) = 0$  uma reta, de equação

$$y_S = 0;$$

- se  $(A'm^2 - k)$  for de sinal oposto a  $-B'$ , conjunto vazio, uma vez que (1.5) não tem solução.

- $y_S = m$ , para  $m$  qualquer

- se  $(B'm^2 - k)$  for de mesmo sinal que  $-A'$ , um par de retas paralelas, de equações

$$x_S = \pm \sqrt{\frac{B'm^2 - k}{-A'}} = \pm \sqrt{\frac{k - B'm^2}{A'}};$$

- se  $(B'm^2 - k) = 0$  uma reta, de equação

$$x_S = 0;$$

- se  $(B'm^2 - k)$  for de sinal oposto a  $-A'$ , conjunto vazio, uma vez que (1.5) não tem solução.

Podemos ter o seguinte caso degenerado:

- Se, em (1.5),  $I' = k = 0$ , e  $A'$  e  $B'$  forem de sinais opostos, a superfície quádrca degenerada será um par de **planos concorrentes**.

A equação dos mesmos será  $y_S = \pm \sqrt{\frac{-A'}{B'}} x_S$ .

Como exemplo, segue a figura do par de planos concorrentes de equação  $x_S^2 - 3y_S^2 = 0$ .

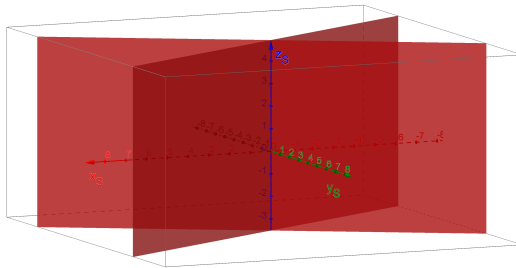


Figura 14 – Par de planos concorrentes.

### 3.1.3 Parabolóide elíptico

**Definição 3.3.** Se, em (1.5),  $I' \neq 0$ , e  $A'$ ,  $B'$  forem de mesmo sinal, a superfície quádrca será um **parabolóide elíptico**. Caso os dois coeficientes,  $A'$  e  $B'$ , tenham mesmo valor, o parabolóide será **circular** ou de **revolução**.

Através da equação (3.1), vemos que o traço do parabolóide nos planos coordenados são:

- no plano  $x_S = 0$ , uma parábola, de equação

$$y_S^2 = \frac{-I'}{B'} z_S;$$

- no plano  $y_S = 0$ , uma parábola, de equação

$$x_S^2 = \frac{-I'}{A'} z_S;$$

- no plano  $z_S = 0$ , um ponto (a origem, no caso). Este ponto é denominado o *vértice* do parabolóide.

A figura que veremos a seguir traz um parabolóide elíptico de equação  $9x_S^2 + y_S^2 - 2z_S = 0$ .

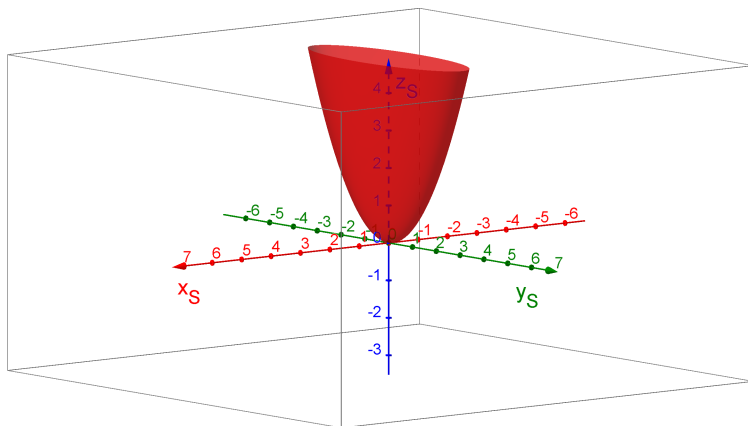


Figura 15 – Parabolóide elíptico.

Já nos planos paralelos,

- no plano  $x_S = m$ , uma parábola, de equação

$$y^2 = -\frac{I'}{B'} \left( z_S + \frac{A'm^2}{I'} \right);$$

- no plano  $y_S = m$ , uma parábola, de equação

$$x^2 = -\frac{I'}{A'} \left( z_S + \frac{B'm^2}{I'} \right);$$

- no plano  $z_S = m$ :

- se  $-mI'$  for de mesmo sinal que  $A'$  e  $B'$ , uma elipse, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{-mI'}{A'}} + \frac{y_S^2}{\frac{-mI'}{B'}} = 1;$$

- se  $-mI'$  for zero, um único ponto, no caso, a origem (neste caso, dizemos que o ponto é o *vértice* do parabolóide);
- se  $-mI'$  for de sinal oposto a  $A'$  e  $B'$ , não haverá traço no plano, uma vez que, neste caso, a equação anterior não tem solução.

### 3.1.4 Parabolóide hiperbólico (“sela de cavalo”)

**Definição 3.4.** *Se, em (1.5),  $I' \neq 0$ , e  $A'$ ,  $B'$  forem de sinais opostos, a superfície quádrlica será um **parabolóide hiperbólico**.*

Neste caso, podemos reescrever (1.5) da forma:

$$A'x_S^2 - (-B')y_S^2 + I'z_S = 0.$$

Novamente pela equação (3.1), vemos que o traço do parabolóide nos planos coordenados são:

- no plano  $x_S = 0$ , uma parábola, de equação

$$y_S^2 = \frac{-I'}{-B'}z_S;$$

- no plano  $y_S = 0$ , uma parábola, de equação

$$x_S^2 = \frac{I'}{A'}z_S;$$

- no plano  $z_S = 0$ : um par de retas concorrentes de equação

$$x_S^2 = \pm \sqrt{\frac{-B'}{A'}} y_S.$$

Neste caso, dizemos que o ponto de intersecção entre as retas é o *vértice* do parabolóide.

A figura a seguir representa um parabolóide hiperbólico de equação  $x_S^2 - 4y_S^2 - 2z_S = 0$ .

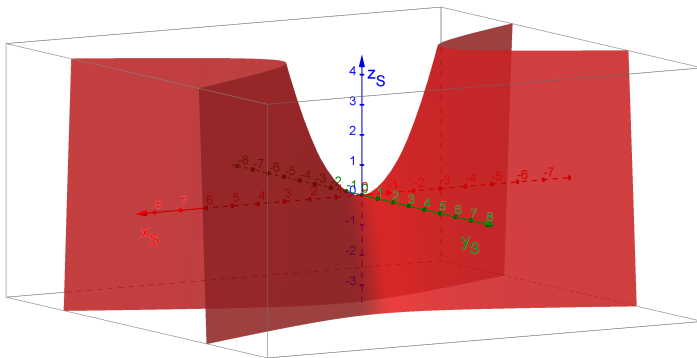


Figura 16 – Parabolóide hiperbólico.

Já nos planos paralelos,

- no plano  $x_S = m$ , uma parábola, de equação

$$y^2 = -\frac{I'}{B'} \left( z_S + \frac{A'm^2}{I'} \right);$$

- no plano  $y_S = m$ , uma parábola, de equação

$$x^2 = -\frac{I'}{A'} \left( z_S + \frac{B'm^2}{I'} \right);$$

- no plano  $z_S = m$ :

– se  $-mI' \neq 0$ , uma hipérbole, de equação

$$\frac{x_S^2}{\frac{-mI'}{A'}} - \frac{y_S^2}{\frac{-mI'}{-B'}} = 1;$$

– se  $-mI' = 0$  um par de retas concorrentes de equação

$$x_S^2 = \pm \sqrt{\frac{-B'}{A'}} y_S.$$

### 3.2 QUÁDRICAS COM UM COEFICIENTE QUADRÁTICO NÃO NULO

Agora, vamos ver o caso em que dois daqueles três coeficientes quadráticos ( $A'$ ,  $B'$  e  $C'$ ) sejam nulo. Tomemos como exemplo, em todas as quádricas com um coeficiente não nulo,  $B' = C' = 0$ , e  $A'$  não nulo. Neste caso, vamos completar o quadrado apenas em  $x_R$  (os casos em que completaríamos os quadrados só em  $y_R$ , ou só em  $z_R$ , são análogos).

Repetindo os cálculos na volta da demonstração do teorema 1.16, chegamos aos seguintes casos:

- se, em (1.5),  $H' = I' = 0$ , a equação resume-se a  $A'x_S^2 = k$ ;
- se  $H' = 0$  e  $I' \neq 0$ , podemos definir  $t_z = -\frac{k}{I'}$ , de modo que (1.5) pode ser escrita como

$$A'x_S^2 + I'z_S = 0;$$

- se  $H' \neq 0$  e  $I' = 0$ , podemos definir  $t_y = -\frac{k}{H'}$ , de modo que (1.5) pode ser escrita como

$$A'x_S^2 + H'y_S = 0;$$

- se  $H' \neq 0$  e  $I' \neq 0$ , podemos definir  $t_y = -\frac{k}{2H'}$  e  $t_z = -\frac{k}{2I'}$ , de modo que (1.5) pode ser escrita como

$$A'x_S^2 + H'y_S + I'z_S = 0. \quad (3.2)$$

As constantes  $t_y$  e  $t_z$ , tal que  $y_R + t_y = y_S$  e  $z_R + t_z = z_S$  representam conveniente translação dos eixos  $Oy_R$  e  $Oz_R$ , respectivamente, convenientemente transladados. Da mesma forma como fizemos nos capítulos anteriores, vamos definir  $x_R + \frac{G'}{2A'} = x_S$ , variável dada em função de conveniente translação do eixo  $Ox_R$ .

Em (1.9), temos algumas possibilidades quanto aos sinais das constantes  $A'$ ,  $H'$ ,  $I'$  e  $k$ . Tal qual fizemos anteriormente, cada uma destas possibilidades resultará numa quádrica não centrada, ou numa quádrica não centrada degenerada.



### 3.2.1 Cilindro parabólico e casos degenerados

**Definição 3.5.** *Se, em (1.9),  $H'$  e  $I'$  forem não simultaneamente nulos, a superfície quádrica será um **cilindro parabólico**.*

Temos dois casos: o caso em que  $H'$  e  $I'$  são ambos não nulos e caso em que um e só um destes coeficientes,  $H'$  ou  $I'$ , é nulo.

No primeiro caso, tendo em vista a equação (3.2), em que o cilindro será oblíquo com relação ao eixo  $O'z_S$ , os traços desse cilindro nos planos coordenados são:

- no plano  $x_S = 0$ , uma reta, de equação

$$H'y_S + I'z_S = 0;$$

- no plano  $y_S = 0$ , uma parábola, de equação

$$x_S^2 = \frac{-I'}{A'}z_S;$$

- no plano  $z_S = 0$ : uma parábola, de equação

$$x_S^2 = \frac{-H'}{A'}y_S.$$

Segue, como exemplo, a figura de um cilindro parabólico, oblíquo em relação ao eixo  $O'z_S$ , de equação  $x_S^2 + y_S - z_S = 0$ .

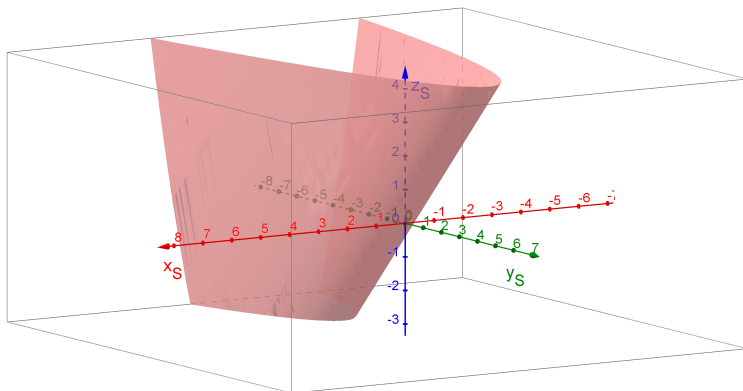


Figura 17 – Cilindro parabólico.

Nos planos paralelos, os traços ficam:

- no plano  $x_S = m$ , uma reta, de equação

$$H'y_S + I'z_S = -A'm^2;$$

- no plano  $y_S = m$ , uma parábola, de equação

$$x_S^2 = \frac{-I'}{A'} \left( z_S - \frac{mH'}{I'} \right);$$

- no plano  $z_S = m$ : uma parábola, de equação

$$x_S^2 = \frac{-H'}{A'} \left( y_S - \frac{-mI'}{H'} \right).$$

No segundo caso, em que o cilindro conterá o eixo  $O'z_S$ , vamos considerar que  $I' = 0$  e  $H' \neq 0$ . O outro caso é totalmente análogo.

Podemos aqui reescrever, como já mencionado, a equação (1.9) da forma  $A'x_S^2 + H'y_S = 0$ .

O cilindro parabólico da próxima figura, que contém o eixo  $O'z_S$ , tem equação  $x_S^2 + y_S = 0$ .

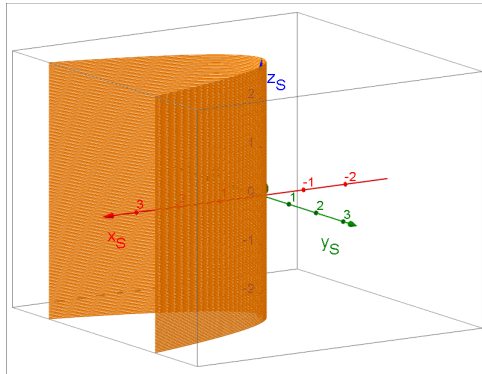


Figura 18 – Cilindro parabólico.

Aqui, como a equação (1.9) não tem nenhum termo em  $z_S$ , nem em  $z_S^2$ , então, para qualquer valor de  $z_S$ , a equação será de uma parábola, de equação

$$x_S^2 = -\frac{H'}{A'}y_S.$$

Já nos planos da forma, para  $m \in \mathbb{R}$  qualquer

- $x_S = m$ , uma reta, de equação  $y_S = \frac{-A'm^2}{B'}$ ;
- $y_S = m$ 
  - se  $-H'm$  for de mesmo sinal que  $A'$ , um par de retas paralelas, de equações

$$x_S = \pm \sqrt{\frac{-H'm}{A'}};$$

- se  $-H'm = 0$  uma reta, de equação

$$x_S = 0;$$

- Se  $-H'm$  for de sinal oposto a  $A'$ , não haverá traço no plano.

Podemos ter os seguintes casos degenerados:

- Se, em (1.9),  $H' = I' = 0$ , e  $k$  for de mesmo sinal que  $A'$ , a superfície quádrlica degenerada será um par de **planos paralelos**.

Neste caso, a equação (1.9) estará reduzida a  $A'x_S^2 = k$  que representa os planos de equação

$$x_S = \pm \sqrt{\frac{k}{A'}}.$$

O par de planos paralelos a seguir tem equação  $x_S^2 = 16$ .

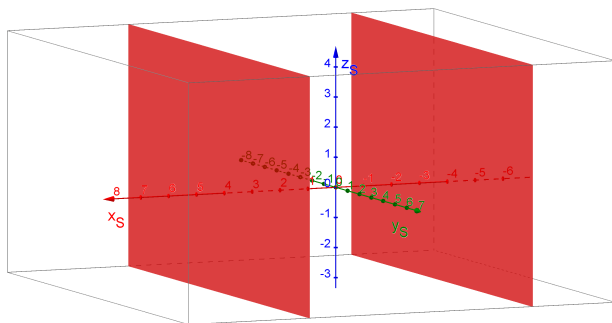


Figura 19 – Par de planos paralelos.

- Se, em (1.9),  $H' = I' = k = 0$ , a superfície quádrca degenerada será um **plano**.

A equação do plano é, aqui,

$$x_S = 0.$$

Neste caso, a equação (1.9) terá soluções da forma é  $(0, y_S, z_S)$ .

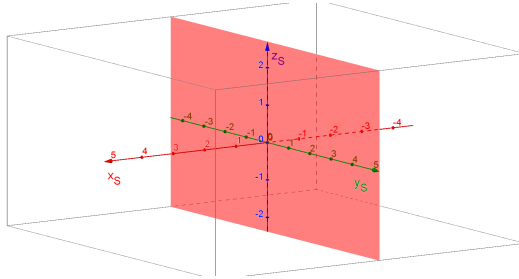


Figura 20 – Plano.

- Se, em (1.9),  $H' = I' = 0$ , e  $k$  for de sinal oposto a  $A'$ , a superfície quádrca degenerada será um par de **planos paralelos imaginários**.

Neste caso, a equação (1.9) não terá solução real.

Informalmente, poderia-se pensar que a equação do “plano” teria a propriedade de que haveria algum  $k$ , tal que  $k \in \mathbb{R}$  e  $k^2 < 0$ , ou seja,  $k$  seria uma constante imaginária.

## 4 ELIMINANDO O TERMO MISTO

### 4.1 ÁLGEBRA LINEAR POR TRÁS DO PROBLEMA

Neste capítulo, vamos, de fato, desvendar as condições necessárias para se reescrever, munido de todo o aparato da álgebra linear, a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

em novas coordenadas,  $x_R$ ,  $y_R$  e  $z_R$ , de tal modo que, nesse novo sistema  $Ox_Ry_Rz_R$ , a equação se torne

$$A'x_R^2 + B'y_R^2 + C'z_R^2 + G'x_R + H'y_R + I'z_R + J' = 0$$

sem nenhum termo misto. Como referência base para o desenvolvimento do texto, o leitor pode consultar os livros (ANTON & RORRES, 2001) e (STEINBRUCH & WINTERLE, 2012a).

Vamos considerar, durante todo o estudo,  $\mathbb{R}^n$  um espaço vetorial com as operações usuais. Além disso, qualquer vetor  $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  poderá ser escrito na forma de:

- matriz linha:  $[ x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n ]$ ;

- matriz coluna:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ .

Agora, façamos uma pequena relação das principais definições da álgebra linear, que servirão de alicerce para nosso estudo.

**Definição 4.1.** *Sejam dois vetores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\vec{v}_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  pertencentes a  $\mathbb{R}^n$ . O **produto interno entre  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$** , denotado por  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ , é dado por*

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

**Definição 4.2.** *Dois vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  em  $\mathbb{R}^n$  são ditos **ortogonais** se*

o produto interno entre os mesmos for nulo, ou seja, se

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0.$$

**Definição 4.3.** A **norma** de um vetor  $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , é o número

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

**Definição 4.4.** Um vetor  $\vec{v}$  é dito **unitário** se  $\|\vec{v}\| = 1$ .

**Definição 4.5.** Um conjunto de vetores  $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  é chamado de **ortonormal** se:

- quaisquer dois vetores  $\vec{v}_i$  e  $\vec{v}_j$ ,  $i \neq j$ , com  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , são ortogonais entre si;
- todos os vetores do conjunto  $V$  são unitários.

**Definição 4.6.** O **polinômio característico** de uma matriz quadrada  $M_{n \times n}$ , é o polinômio na variável  $\lambda$

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I_n),$$

em que  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

**Definição 4.7.** Um **autovalor**  $\lambda$  de uma matriz  $M$  é uma raiz do polinômio característico de  $M$ , ou seja, é uma raiz da equação

$$\det(M - \lambda I_n) = 0.$$

**Definição 4.8.** Um **autovetor**  $\vec{u}$  de uma matriz  $M$ , associado a um autovalor  $\lambda$  é o vetor  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  solução do sistema homogêneo

$$(M - \lambda I_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste definição, estamos acatando o vetor nulo de  $\mathbb{R}^n$  como sendo, também, autovetor de uma matriz  $M$ .

**Definição 4.9.** Uma matriz  $M_{n \times n}$  é dita **diagonalizável** se existir uma matriz  $P_{n \times n}$  inversível e uma matriz  $D_{n \times n}$  diagonal tal que:

$$M = PDP^{-1}.$$

Como estamos trabalhando com as quádricas em  $\mathbb{R}^3$ , vamos restringir nossos exemplos, em todas as definições apresentadas, a  $n = 3$ .

Retomando o capítulo 1, e a definição 1.2, temos que a equação geral do segundo grau em três variáveis

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

tem a forma quadrática correspondente

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \quad (4.1)$$

que matricialmente, pode ser escrita da forma

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

**Definição 4.10.** A matriz  $M = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}$  da equação (4.2) é dita *matriz associada à forma quadrática (4.1)*.

**Proposição 4.11.** A forma quadrática da equação geral do segundo grau pode ser escrita da forma

$$f(x, y, z) = \langle M(x, y, z), (x, y, z) \rangle,$$

em que  $M$  é a matriz associada à forma quadrática 4.1.

*Demonstração.* De fato, temos que

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + Dy + Ez \\ Dx + By + Fz \\ Ex + Fy + Cz \end{pmatrix}$$

Neste caso, colocando o vetor  $\begin{pmatrix} Ax + Dy + Ez \\ Dx + By + Fz \\ Ex + Fy + Cz \end{pmatrix}$  em linha,

vamos ter que:

$$\begin{aligned} & \left\langle M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, (x, y, z) \right\rangle = \\ & \langle (Ax + Dy + Ez, Dx + By + Fz, Ex + Fy + Cz), (x, y, z) \rangle = \\ & Ax^2 + Dxy + Exz + Dxy + By^2 + Fyz + Exz + Fyz + Cz^2 = \\ & Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz, \end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar.  $\square$

Aqui, nosso objetivo é estudar autovalores e autovetores da matriz da forma quadrática (4.1).

Vamos apresentar o que vem a ser uma matriz de rotação em  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 4.12.** Uma matriz  $P$  inversível é dita **ortogonal** se a sua transposta for igual a sua inversa, ou seja, se  $P^t = P^{-1}$ .

**Definição 4.13.** Uma **matriz de rotação** de ordem 3 é uma matriz ortogonal de ordem 3, com determinante igual a 1.

Na álgebra linear, uma matriz de rotação de ordem 3 é uma matriz que, ao se multiplicar por uma matriz coluna de ordem  $3 \times 1$ , ou seja, um vetor de 3 componentes, resulta numa rotação desse vetor no espaço euclidiano.

**Proposição 4.14.** Sejam os vetores  $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  e  $\vec{u}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ . Se a matriz  $G = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  for ortogonal, então ocorre:

- o conjunto  $W = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  é ortonormal;
- $\det(G) = 1$  ou  $\det(G) = -1$ .

*Demonstração.* De fato, se  $G$  é ortogonal, então ocorre

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 \\ a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 & a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$



$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, verificamos que:

- os vetores do conjunto  $W$  são todos unitários,
- o produto interno de dois vetores distintos é sempre zero, ou seja, dois vetores distintos de  $W$  são ortogonais.

Além disso, se  $G$  é matriz ortogonal, então  $GG^t = I_3$ . Lembrando que  $\det(G) = \det(G^t)$ , e utilizando a relação

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

sendo  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de mesma ordem, segue que

$$\begin{aligned} \det(I_3) &= \det(G).\det(G^t) \\ 1 &= (\det(G))^2 \\ \det(G) &= \pm 1. \end{aligned}$$

□

Munidos desta última proposição, afirmamos que, se o determinante de uma matriz ortogonal der  $-1$ , trocamos duas linhas de lugar (permutamos dois vetores), mudando o sinal do determinante, para que, então, a matriz torne-se matriz de rotação. Ou ainda, podemos simplesmente trocar o sinal das entradas de um desses vetores (alterar o sentido do mesmo), a fim da mesma coisa.

**Proposição 4.15.** *Se uma matriz  $P$  inversível for uma matriz de rotação, a matriz inversa  $P^{-1}$  também será uma matriz de rotação.*

*Demonstração.* Se  $P$  é matriz de rotação, então  $P$  é ortogonal. Logo,  $P^t = P^{-1}$ . Como  $(P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$ , segue que

$$(P^{-1})^{-1} = (P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$$

ou seja, a matriz  $P^{-1}$  também tem a propriedade de ter sua transposta igual à sua inversa. Assim sendo, ela também é ortogonal. Além disso, temos que  $\det(P) = 1$ . Como  $\det(P) = \det(P^t)$ , e, neste caso,  $P^t = P^{-1}$ , então  $\det(P^{-1}) = \det(P) = 1$ . Assim,  $P^{-1}$  é matriz ortogonal e tem determinante igual a 1, sendo, portanto, uma matriz de rotação. □

**Definição 4.16.** Uma matriz  $M_{n \times n}$  é dita **ortogonalmente diagonalizável** se existir uma matriz  $P_{n \times n}$  ortogonal e uma matriz  $D_{n \times n}$  diagonal tal que:

$$M = PDP^{-1} \quad \text{ou} \quad M = PDP^t.$$

**Teorema 4.17. (Teorema espectral da álgebra linear)** Toda matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável, ou seja, para qualquer matriz simétrica  $M$ , existe uma matriz  $P$  ortogonal tal que

$$M = PDP^{-1},$$

em que  $D$  é uma matriz diagonal.

Como referência, o leitor pode consultar o livro (STEINBRUCH & WINTERLE, 2012a).

Além disso, nesta matriz  $D$ , as entradas na diagonal principal são justamente os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , da matriz  $M$ . Já a matriz  $P$  contém, em cada coluna, autovetores unitários associados aos autovalores da matriz  $M$ , em ordem: na primeira coluna, um autovetor unitário associado ao autovalor  $\lambda_1$ ; na segunda coluna, um autovetor unitário associado ao autovalor  $\lambda_2$ , e assim, sucessivamente.

Dessa forma, a matriz  $P^{-1}$  terá os mesmos autovetores, na mesma ordem em que aparecem nas linhas de  $P$ , só que em linhas.

$$P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Dizemos que a matriz ortogonal  $P$  em (4.3) é uma matriz que **diagonaliza ortogonalmente** a matriz  $M$ . Além disso, ela será a matriz de rotação que precisamos para justamente eliminarmos os termos mistos, o que será visto um pouco mais adiante neste capítulo. Além disso, para que uma matriz ortogonal seja de rotação, então seu determinante deve ser igual a 1. Caso o mesmo seja  $-1$ , devemos, por exemplo, trocar o sinal de uma das linhas da matriz, de modo a multiplicar por  $-1$  seu determinante, tornando-o igual a 1.

Na realidade, vamos aplicar uma transformação linear chamada de **identidade** que associa, a cada vetor de  $\mathbb{R}^3$ , o mesmo vetor do mesmo conjunto. Consideraremos no domínio uma base  $\alpha$  ortonormal, enquanto que, no contradomínio, uma base ortonormal  $\beta$ . Os vetores desta base  $\beta$  podem ser obtidos através de uma simples rotação dos

vetores de  $\alpha$ . Para tanto, fazemos uma multiplicação matricial da forma

$$[I]_{\beta}^{\alpha}[v]_{\alpha} = [v]_{\beta}$$

em que:

- $[I]_{\beta}^{\alpha}$  é a matriz da transformação identidade, que associa os vetores na base  $\alpha$  a eles mesmos, só que na base  $\beta$ ,
- $[v]_{\alpha}$  é a matriz coluna, em que as entradas são as coordenadas dos vetores do domínio, na base  $\alpha$ ,
- $[v]_{\beta}$  é a matriz coluna, em que as entradas são as coordenadas dos vetores do contradomínio, na base  $\beta$ .

Vamos considerar a base canônica como sendo um conjunto  $\alpha$ . A matriz que transforma a identificação de um vetor de  $\alpha$ , na nova base ortonormal é a matriz  $P^t = P^{-1}$  do teorema espectral. Já a matriz que faz a transição inversa é a matriz  $P$ . É importante lembrar que a base canônica é formada pelos vetores  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ . De fato, considere que a base  $\alpha$  do domínio seja a base canônica, que vamos denominar como  $C$ , e a base  $\beta$  do contradomínio seja a nova base ortonormal, que vamos designar por  $W = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ , com  $w_1 = (a_1, b_1, c_1)$   $w_2 = (a_2, b_2, c_2)$   $w_3 = (a_3, b_3, c_3)$ . Neste caso, ocorre que cada vetor  $I(\vec{e}_1)$ ,  $I(\vec{e}_2)$  e  $I(\vec{e}_3)$  do contradomínio pode ser escrito como combinação dos vetores de  $\beta$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 = (1, 0, 0) = a_1(a_1, b_1, c_1) + a_2(a_2, b_2, c_2) + a_3(a_3, b_3, c_3) \\ I(\vec{e}_2) &= \vec{e}_2 = (0, 1, 0) = b_1(a_1, b_1, c_1) + b_2(a_2, b_2, c_2) + b_3(a_3, b_3, c_3) \\ I(\vec{e}_3) &= \vec{e}_3 = (0, 0, 1) = c_1(a_1, b_1, c_1) + c_2(a_2, b_2, c_2) + c_3(a_3, b_3, c_3). \end{aligned}$$

Vale lembrar que os cálculos que levam aos resultados  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são exatamente os mesmos desenvolvidos na proposição 4.14.

Portanto, as coordenadas dos autovetores aparecerão em linhas na matriz, dando-nos:

$$P^t = [I]_{W}^C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Agora, caso a base  $\alpha$  do domínio seja a base  $W$ , e a base  $\beta$  do contradomínio seja a base canônica, então cada vetor  $I(w_1)$ ,  $I(w_2)$  e

$I(w_3)$  do contradomínio pode ser escrito como combinação dos vetores de  $\beta$  assim:

$$\begin{aligned} I(\vec{w}_1) &= w_1 = (a_1, b_1, c_1) = a_1(1, 0, 0) + b_1(0, 1, 0) + c_1(0, 0, 1) \\ I(\vec{w}_2) &= w_2 = (a_2, b_2, c_2) = a_2(1, 0, 0) + b_2(0, 1, 0) + c_2(0, 0, 1) \\ I(\vec{w}_3) &= w_3 = (a_3, b_3, c_3) = a_3(1, 0, 0) + b_3(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Aqui, os autovetores constarão nas colunas da matriz

$$P = [I]_C^W = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Ao aplicarmos essa transformação linear cuja matriz é  $P^t$  no vetor  $(x, y, z)$  (cujas coordenadas estão representadas na base canônica), obteremos o mesmo vetor, só que em coordenadas  $(x_R, y_R, z_R)$ , conforme a nova base ortonormal formada pelos autovetores de  $M$ . Desse modo, temos que:

$$P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Com isso, sendo  $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $\vec{u}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  e  $\vec{u}_3 = (a_3, b_3, c_3)$  autovetores unitários da matriz  $M$ , temos que

$$\begin{cases} x_R &= a_1x + b_1y + c_1z \\ y_R &= a_2x + b_2y + c_2z \\ z_R &= a_3x + b_3y + c_3z. \end{cases}$$

Aplicando a transformação cuja matriz é  $P$ , que consiste na transformação linear inversa da transformação representada pela matriz  $P^t$ , no vetor  $\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix}$ , podemos obter novamente o vetor nas suas coordenadas originais, através da relação

$$P \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Precisamos agora de uma propriedade de produto interno que

diz o seguinte:

“Se  $M_{n \times n}$  é uma matriz, e  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são vetores de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\langle M\vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_1, M^t\vec{v}_2 \rangle$ ”.

Como referência, o leitor pode novamente consultar o livro (STEINBRUCH & WINTERLE, 2012a). Pela proposição 4.11, podemos escrever a forma quadrática de uma equação geral do segundo grau em três variáveis da forma

$$f(x, y, z) = \langle M(x, y, z), (x, y, z) \rangle.$$

Usando a diagonalização de  $M$ , temos que

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \langle M(x, y, z), (x, y, z) \rangle = \\ &= \langle PDP^t(x, y, z), (x, y, z) \rangle = \\ &= \langle DP^t(x, y, z), P^t(x, y, z) \rangle. \end{aligned}$$

Olhando para a equação (4.4), definimos uma nova forma quadrática  $f_R$  por

$$f_R(x_R, y_R, z_R) = \langle D(x_R, y_R, z_R), (x_R, y_R, z_R) \rangle$$

ou então,

$$\begin{aligned} f_R(x_R, y_R, z_R) &= \langle (\lambda_1 x_R, \lambda_2 y_R, \lambda_3 z_R), (x_R, y_R, z_R) \rangle = \\ &= \lambda_1 x_R^2 + \lambda_2 y_R^2 + \lambda_3 z_R^2. \end{aligned}$$

Definindo  $\vec{v} = (G, H, I)$ , e retomando a forma não quadrática  $g(x, y, z) = Gx + Hy + Iz + J$  de (1.1), esta pode ser escrita da forma

$$g(x, y, z) = \langle \vec{v}, (x, y, z) \rangle + J$$

Desse modo, a equação geral (1.1) pode ser escrita como sendo

$$\lambda_1 x_R^2 + \lambda_2 y_R^2 + \lambda_3 z_R^2 + \langle (G, H, I), (x, y, z) \rangle + J = 0$$

ou

$$\lambda_1 x_R^2 + \lambda_2 y_R^2 + \lambda_3 z_R^2 + \langle (G, H, I), P(x_R, y_R, z_R) \rangle + J = 0$$

ou

$$\lambda_1 x_R^2 + \lambda_2 y_R^2 + \lambda_3 z_R^2 + \langle P^t(G, H, I), (x_R, y_R, z_R) \rangle + J = 0.$$

Sendo

$$P^t \begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ga_1 + Hb_1 + Ic_1 \\ Ga_2 + Hb_2 + Ic_2 \\ Ga_3 + Hb_3 + Ic_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u}_3 \rangle \end{pmatrix},$$

temos que

$$\lambda_1 x_R^2 + \lambda_2 y_R^2 + \lambda_3 z_R^2 + \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle x_R + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle y_R + \langle \vec{u}_3, \vec{v} \rangle z_R + J = 0.$$

Todo o processo aqui apresentado é reversível. Assim, podemos mostrar também que, se temos

$$\lambda_1 x_R^2 + \lambda_2 y_R^2 + \lambda_3 z_R^2 + \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle x_R + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle y_R + \langle \vec{u}_3, \vec{v} \rangle z_R + J = 0 \quad (4.6)$$

então deduzimos

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (4.7)$$

o que nos leva a inferir que uma tripla da forma  $(x_R, y_R, z_R)$  satisfaz (4.6) se, e somente se, a tripla  $(x, y, z)$ , respeitadas as correspondências entre as incógnitas, satisfaz (4.7).

## 4.2 RESULTADO FUNDAMENTAL E APLICAÇÃO

Considerando a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

e a equação geral com os eixos rotacionados

$$\begin{aligned} A'x_R^2 + B'y_R^2 + C'z_R^2 + 2D'x_Ry_R + 2E'x_Rz_R + \\ + 2F'y_Rz_R + G'x_R + H'y_R + I'z_R + J' = 0, \end{aligned}$$

concluimos, que, sendo  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  e  $\vec{u}_3$  os autovetores unitários correspondentes aos autovalores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente, de  $M$ , matriz

associada à forma quadrática da equação geral, e o vetor  $\vec{v} = (G, H, I)$  podemos reescrever a equação da quádrlica em coordenadas  $x_R, y_R$  e  $z_R$ , do seguinte modo:

$$\lambda_1 x_R^2 + \lambda_2 y_R^2 + \lambda_3 z_R^2 + \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle x_R + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle y_R + \langle \vec{u}_3, \vec{v} \rangle z_R + J = 0.$$

Temos, portanto:

- $A' = \lambda_1$ ;
- $B' = \lambda_2$ ;
- $C' = \lambda_3$ ;
- termos mistos  $D' = E' = F' = 0$ ;
- $G' = \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle$ ;
- $H' = \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle$ ;
- $I' = \langle \vec{u}_3, \vec{v} \rangle$ ;
- $J' = J$ .

Com isto, podemos afirmar que:

- se os três autovalores da matriz associada à forma quadrática forem não nulos, a superfície quádrlica associada será **centrada**;
- se um, e somente um, dos autovalores da matriz associada à forma quadrática for nulo, a superfície quádrlica associada será uma quádrlica não centrada com **dois** coeficientes quadráticos não nulos;
- se exatamente dois dos autovalores da matriz associada à forma quadrática forem nulos, a superfície quádrlica associada será uma quádrlica não centrada com **um** coeficiente quadratico não nulo.

Observe que, se os três autovalores da matriz  $M$  fossem iguais a zero, pelo teorema espectral, a matriz  $M$  seria a matriz nula. Isto não ocorre, pois os coeficientes  $A, B, C, D, E$  e  $F$  da equação (1.1) não podem ser simultaneamente nulos.

**Exemplo 4.18.** *Vamos, por conveniente rotação e translação de eixos, reescrever a equação, nas incógnitas  $x, y$  e  $z$ , da quádrlica*

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz - 10x - 6y - 2z - 7 = 0$$

*nas novas incógnitas  $x_S, y_S$  e  $z_S$ , de modo que não haja termos mistos.*

Sendo  $A = 2$ ,  $B = 2$ ,  $C = 5$ ,  $2D = -4$ ,  $2E = -2$ ,  $2F = 2$ ,  $G = -10$ ,  $H = -6$ ,  $I = -2$  e  $J = -7$ , vamos determinar os autovalores da matriz

$$M = \begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix},$$

que no caso, é a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Para isso, vamos calcular os possíveis valores de  $\lambda$  de modo que  $\det(M - \lambda I_3)$ , em que  $I_3$  é a matriz identidade de ordem 3, seja igual a zero. Quer dizer, vamos resolver à equação

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)^2(5 - \lambda) + 2 + 2 - (2 - \lambda) - 4(5 - \lambda) - (2 - \lambda) &= 0 \\ (\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4)(5 - \lambda) + 2\lambda &= 0 \\ -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, as raízes do polinômio característico são

$$\begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

que são os autovalores da matriz  $M$ .

Resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda_i & -2 & -1 \\ -2 & 2 - \lambda_i & 1 \\ -1 & 1 & 5 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

obtemos os autovetores correspondentes a cada autovalor, tendo, portanto:



- para  $\lambda = 6$ , os autovetores são os elementos do conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 2z\}$ ;
- para  $\lambda = 3$ , os autovetores são os elementos do conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y = z\}$ ;
- para  $\lambda = 0$ , os autovetores são os elementos do conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ e } z = 0\}$ .

Com isso, os vetores  $\vec{u}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$  e  $\vec{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$  são os vetores unitários que são autovetores de  $M$ , referentes a  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 3$  e  $\lambda_3 = 0$ , respectivamente. Sendo  $\vec{v} = (-10, -6, -2)$ , temos

$$6x_R^2 + 3y_R^2 + \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle x_R + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle y_R + \langle \vec{u}_3, \vec{v} \rangle z_R - 7 = 0.$$

Portanto, a equação da quádrlica, em  $x_R$ ,  $y_R$  e  $z_R$ , é:

$$6\left(x_R - \frac{1}{6}\right)^2 + 3\left(y_R - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 8\sqrt{2}\left(z_R + \frac{49\sqrt{2}}{96}\right) = 0.$$

Sendo  $x_S = x_R - \frac{1}{6}$ ,  $y_S = y_R - \frac{\sqrt{3}}{3}$  e  $z_S = z_R + \frac{49\sqrt{2}}{96}$ , obtemos então:

$$6x_S^2 + 3y_S^2 - 8\sqrt{2}z_S = 0.$$

Esta equação, da forma (1.5), tem  $A' = 6$ ,  $B' = 3$  e  $C' = -8\sqrt{2}$ , não nulos e de mesmo sinal,  $C' = 0$  e  $I' \neq 0$ . Logo, ela representa um **parabolóide elíptico**.

**Exemplo 4.19.** *Vamos repetir o procedimento do exemplo anterior para a quádrlica de equação*

$$2xy + 2xz + 2yz - 6x - 6y - 4z + 9 = 0$$

*nas novas incógnitas  $x_S$ ,  $y_S$  e  $z_S$ , de modo que não haja termos mistos.*

Neste caso,  $\vec{v} = (-6, -6, -4)$ . Temos  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ ,  $2D = 2$ ,  $2E = 2$ ,  $2F = 2$ ,  $G = -6$ ,  $H = -6$ ,  $I = -4$  e  $J = 9$ . Neste caso, vamos determinar os autovalores da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo em  $\lambda$  a equação  $\det(M - \lambda I_3) = 0$ , temos

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

e, portanto, as raízes do polinômio característico são

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

que são os autovalores da matriz  $M$ .

Resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda_i & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

obtemos os autovetores correspondentes a cada autovalor. Serão eles:

- para  $\lambda = 2$ , os autovetores são os elementos de  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ .
- para  $\lambda = -1$ , os autovetores são os elementos de  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ .

Com isso, os vetores  $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ,  $\vec{u}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$  e  $\vec{u}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  são vetores unitários que são autovetores de  $M$ , referentes a  $\lambda = 2$  (o primeiro),  $\lambda = -1$  (os dois últimos), formando uma base ortonormal. Sendo  $\vec{v} = (-6, -6, -4)$ , temos

$$2x_R^2 - y_R^2 - z_R^2 + \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle x_R + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle y_R + \langle \vec{u}_3, \vec{v} \rangle z_R + 9 = 0$$

Portanto, a equação da quádrlica, em  $x_R$ ,  $y_R$  e  $z_R$ , é:

$$2 \left( x_R - \frac{4}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left( y_R - \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 - \left( z_R - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{6}.$$

Fazendo  $x_S = x_R - \frac{4}{\sqrt{3}}$ ,  $y_S = y_R - \frac{1}{\sqrt{6}}$  e  $z_S = z_R - \frac{1}{\sqrt{2}}$ , a equação, em  $x_S$ ,  $y_S$  e  $z_S$ , fica

$$2x_S^2 - y_S^2 - z_S^2 = \frac{1}{6}.$$

Esta equação, da forma (2.1), tem  $A'$ ,  $B'$  e  $C$ , não nulos e apenas dois deles com mesmo sinal e  $k = \frac{1}{6}$ , de modo que  $A'B'C'k > 0$ . Logo, ela representa um **hiperbolóide de duas folhas**.

**Exemplo 4.20.** Novamente, para a quádrlica de equação

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 8yz + 2x - 2y = 0$$

vamos reescrevê-la nas incógnitas  $x_S$ ,  $y_S$  e  $z_S$ , obtidas através de rotação e translação.

Aqui, o vetor  $\vec{v}$  é o terno ordenado  $(2, -2, 0)$ . Sendo  $A = 1$ ,  $B = 4$ ,  $C = 4$ ,  $2D = 4$ ,  $2E = 4$ ,  $2F = 8$ ,  $G = 2$ ,  $H = -2$ ,  $I = 0$  e  $J = 0$ , vamos determinar os autovalores da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo em  $\lambda$  a equação  $\det(M - \lambda I_3) = 0$ , temos

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda & 4 \\ 2 & 4 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante, encontramos:

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 = 0$$

e, portanto, as raízes do polinômio característico são

$$\begin{cases} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

que são os autovalores da matriz  $M$ .

Resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_i & 2 & 2 \\ 2 & 4 - \lambda_i & 4 \\ 2 & 4 & 4 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

concluimos que:

- para  $\lambda = 9$ , os autovetores são os elementos de  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = y = z\}$ ;
- para  $\lambda = 0$ , os autovetores são os elementos de  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 2z = 0\}$ .

Com isso, os vetores  $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ,  $\vec{u}_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}\right)$  e  $\vec{u}_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  são vetores unitários que são autovetores de  $M$ , referentes a  $\lambda = 9$  (o primeiro),  $\lambda = 0$  (os dois últimos), novamente formando um conjunto ortonormal. Com  $\vec{v} = (2, -2, 0)$ , temos

$$9x_R^2 + \langle \vec{u}_1, \vec{v} \rangle x_R + \langle \vec{u}_2, \vec{v} \rangle y_R + \langle \vec{u}_3, \vec{v} \rangle z_R = 0$$

Portanto, a equação da quádrlica, em  $x_R$ ,  $y_R$  e  $z_R$ , é:

$$9 \left( x_R - \frac{1}{\sqrt{27}} \right)^2 + \frac{10}{\sqrt{18}} \left( y_R - \frac{\sqrt{18}}{1620} \right) - \sqrt{2} \left( z_R - \frac{1}{162\sqrt{2}} \right) = 0.$$

Fazendo  $x_S = x_R - \frac{1}{\sqrt{27}}$ ,  $y_S = y_R - \frac{\sqrt{18}}{1620}$  e  $z_S = z_R - \frac{1}{162\sqrt{2}}$ , a equação, em  $x_S$ ,  $y_S$  e  $z_S$ , fica

$$9x_S^2 + \frac{10}{\sqrt{18}}y_S - \sqrt{2}z_S = 0.$$

Esta equação, da forma (1.9), tem  $A'$  não nulo e  $B'$  e  $C$  nulos, sendo  $H'$  e  $I'$  não nulos. Logo, ela representa um **cilindro parabólico**, no caso, oblíquo em relação ao eixo  $O'z_S$ .

## 5 SECÇÕES PLANAS NO CONE DE REVOLUÇÃO

Neste capítulo, vamos analisar as possíveis intersecções entre planos e uma superfície cônica de revolução. Ao fazermos a intersecção entre duas superfícies no espaço, devemos resolver o sistema formado pelas equações das mesmas. Neste caso, em se tratando de um sistema com três incógnitas e duas equações, o sistema terá uma infinidade de soluções. O conjunto de todas estas soluções, representadas graficamente por seus respectivos ternos ordenados correspondentes, consistirá na cônica procurada.

Para efeito de simplificação de cálculos, vamos considerar a superfície cônica  $C$  de revolução com eixo de simetria no eixo  $Oz$ , centrada na origem do sistema  $Oxyz$ , e o plano  $\alpha$  paralelo ao eixo  $Oy$ , ou contendo-o. Retomando a definição de cone de revolução do capítulo 2, temos que a equação

$$A'x_S^2 + B'y_S^2 + C'z_S^2 = k,$$

neste caso, tem

- $k = 0$ ;
- $A'$  e  $B'$  de mesmo sinais e iguais, com  $C'$  de sinal oposto àqueles dois coeficientes.

Neste caso, a equação da superfície cônica, para a constante  $q = \sqrt{\frac{A'}{-C'}} \neq 0$ , será da forma

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{q^2} \iff q^2(x^2 + y^2) = z^2$$

uma vez que estas equações são equivalentes à

$$q^2x^2 + q^2y^2 - z^2 = 0.$$

É importante notar que, tomando a equação da superfície cônica de modo conveniente, é desnecessária qualquer rotação de eixos, permitindo-nos manter o sistema ortogonal  $Oxyz$ .

Haverá uma rotação de eixos neste capítulo, mais adiante, mas com outra finalidade.

Neste caso, vamos dizer que  $|q| \neq 0$  é a **inclinação** das geratrizes do cone em relação ao plano  $Oxy$ .

Vamos considerar a equação do plano que secciona o cone da seguinte forma:

$$x = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

ou

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

ou

$$z = mx + n, \quad \text{com } m, n \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0.$$

Aqui,  $m$  é a inclinação da reta intersecção entre o plano sector e o plano  $Oxz$ .

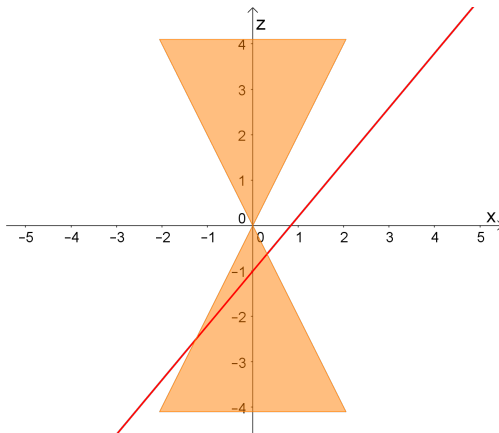


Figura 21 – Plano sector e cone vistos de frente.

Para planos da forma  $x = t$ , já vimos na subsecção 2.0.4 que a intersecção será

- hipérbole, se  $t \neq 0$ ;
- par de retas concorrentes (geratrizes do cone), se  $t = 0$ .

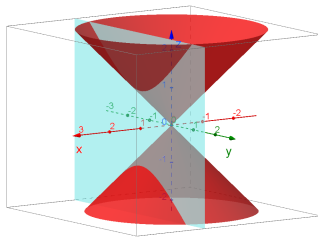


Figura 22 – Hipérbole.

No caso de planos da forma  $z = t$ , os pontos em comum do plano e do cone formarão:

- circunferência, se  $t \neq 0$ ;
- ponto (vértice do cone), se  $t = 0$ .

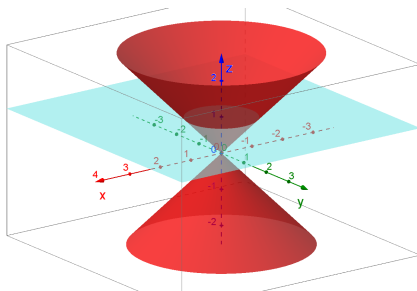


Figura 23 – Circunferência no cone.

Estas duas situações já foram abordadas no capítulo 2.

Vamos analisar agora a situação em que a equação do plano é da forma  $z = mx + n$ , com  $m \neq 0$ . Em outras palavras, vamos analisar as soluções do sistema:

$$\begin{cases} q^2(x^2 + y^2) = z^2 \\ z = mx + n \end{cases} \quad (5.1)$$

Neste caso, a curva definida pela intersecção entre o plano  $\alpha$  e a superfície  $C$  estará oblíqua em relação ao plano  $Oxy$ . Não temos uma

forma precisa da equação de uma cônica quando o plano que a contém forma um ângulo  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  com o plano  $Oxy$ .

Então, deveremos fazer uma rotação dos eixos  $Ox$  e  $Oz$  do espaço cartesiano, obtendo assim dois novos eixos,  $Ox_R$  e  $Oz_R$ , de modo que, no sistema  $Ox_R y_R z_R$ , o plano  $Ox_R y_R$  seja paralelo, ou coincidente, com o plano  $\alpha$ . Assim sendo, o eixo  $Oz_R$  será perpendicular aos planos  $Ox_R y_R$  e  $\alpha$ . Portanto, na equação da curva plana, a variável  $z_R$  será constante.

Como  $\alpha$  é paralelo ao eixo  $Oy$ , este não precisará ser rotacionado. Ou seja, os eixos  $Oy$  e  $Oy_R$  serão absolutamente os mesmos.

Consideremos os vetores canônicos  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Vamos rotacionar, portanto, os eixos  $Ox$  e  $Oz$  em  $\theta$  radianos, para obter os eixos  $Ox_R$  e  $Oy_R$ . Considerando os vetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_3$  unitários e ortogonais, frutos da rotação dos eixos canônicos  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ , vamos determinar as medidas dos catetos dos triângulos retângulos  $OAB$  e  $ODC$ . Este cálculo é similar àquele em que se obtém a matriz de rotação, de ordem 2,

$$R_{OT_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

da álgebra linear.

Observe a figura a seguir.

Neste caso, as coordenadas  $x_A$  e  $z_B$  de  $\vec{u}_1$ , no sistema  $Oxyz$ , podem ser calculadas do seguinte modo:

$$\cos\theta = \frac{x_A}{\|\vec{u}_1\|} \implies x_A = \cos\theta.$$

Como  $\vec{OA}$  e  $\vec{e}_1$  têm mesma direção e sentido, temos que:

$$\vec{OA} = \cos\theta \vec{e}_1.$$

Além disso, temos que:

$$\text{sen}\theta = \frac{z_B}{\|\vec{u}_1\|} \implies z_B = \text{sen}\theta.$$

Como  $\vec{AB}$  e  $\vec{e}_3$  têm mesma direção e sentido, temos que:

$$\vec{AB} = \text{sen}\theta \vec{e}_3.$$

Com isso, deduzimos que:



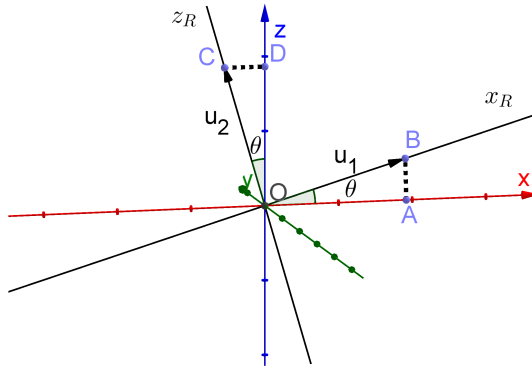


Figura 24 – Rotacionando Ox e Oz.

$$\vec{u}_1 = \vec{OA} + \vec{AB} = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_3.$$

Para encontrar as coordenadas  $x_C$  e  $z_D$  de  $\vec{u}_3$ , no sistema  $Oxyz$ , façamos:

$$\sin\theta = -\frac{x_C}{\|\vec{u}_3\|} \implies x_C = -\sin\theta.$$

Já que  $\vec{DC}$  e  $\vec{u}_1$  têm mesma direção e sentido, temos:

$$\vec{DC} = -\sin\theta\vec{u}_1.$$

E também:

$$\cos\theta = \frac{z_D}{\|\vec{u}_3\|} \implies z_D = \cos\theta.$$

Como  $\vec{OD}$  e  $\vec{u}_3$  têm mesma direção e sentido, encontramos:

$$\vec{OD} = \cos\theta\vec{u}_3.$$

Logo, temos que:

$$\vec{u}_3 = \vec{DC} + \vec{OD} = -\text{sen}\theta\vec{e}_1 + \text{cos}\theta\vec{e}_3.$$

Como não houve rotação em relação ao eixo  $Oy$ , vamos ter que:

$$\vec{u}_2 = \vec{e}_2.$$

No sistema  $Ox_Ry_Rz_R$ , vamos escrever as coordenadas dos vetores de  $\mathbb{R}^3$  da seguinte maneira:

- $x_R = x\text{cos}\theta + z\text{sen}\theta$ ;
- $y_R = y$ ;
- $z_R = -x\text{sen}\theta + z\text{cos}\theta$ .

Isto quer dizer que a matriz  $R_{OT}$  de rotação do sistema  $Oxyz$ , em torno do eixo  $Oy$ , de  $\theta$  radianos, no sentido anti-horário, é:

$$R_{OT} = \begin{bmatrix} \text{cos}\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \text{cos}\theta \end{bmatrix},$$

já que

$$\begin{bmatrix} \text{cos}\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \text{cos}\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix},$$

Fazendo a rotação invertida, tomando a transposta da matriz  $R_{OT}$ , temos que:

$$\begin{bmatrix} \text{cos}\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \text{cos}\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Neste caso, temos que:

- $x = x_R\text{cos}\theta - z_R\text{sen}\theta$ ,
- $y = y_R$ ,
- $z = x_R\text{sen}\theta + z_R\text{cos}\theta$ .

Substituindo  $z$  no sistema 5.1, ocorre:

$$\begin{aligned} q^2(x^2 + y^2) &= z^2 \\ q^2(x^2 + y^2) &= (mx + n)^2 \\ q^2x^2 + k^2y^2 &= m^2x^2 + 2mnx + n^2 \\ (q^2 - m^2)x^2 + q^2y^2 - 2mnx &= n^2. \end{aligned}$$

No plano  $Oxz$ , a tangente do ângulo  $\theta$  entre a reta de equação  $z = mx + n$  (com  $m \neq 0$ ) e o eixo  $Ox$ , definido no sentido anti-horário, é justamente  $m$ . Porém, o plano que secciona o cone é paralelo ao eixo  $Oy$ , sendo, assim, perpendicular ao plano  $Oxz$ . Logo, da mesma forma, o ângulo delimitado pelo plano  $z = mx + n$  (que secciona o cone) e o eixo  $Ox$  do espaço cartesiano também é  $\theta$ . Ou seja, no plano  $Oxz$ , temos que a tangente do ângulo formado pelo plano que corta o cone e o plano  $Oxy$  é  $m$ .

Pela relação fundamental da trigonometria, temos que:

- $tg\theta = m$ ,
- $sen\theta = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$ ,
- $cos\theta = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$ .

Substituindo  $x$ , e estabelecendo  $z_R = c$  constante, encontramos:

$$\begin{aligned} (q^2 - m^2)(x_R cos\theta - z_R sen\theta)^2 + q^2 y_R^2 - 2mn(x_R cos\theta - z_R sen\theta) &= n^2 \\ (q^2 - m^2)(x_R cos\theta - c sen\theta)^2 + q^2 y_R^2 - 2mn(x_R cos\theta - c sen\theta) &= n^2 \\ (q^2 - m^2)(cos\theta)^2 \left( x_R - c \frac{sen\theta}{cos\theta} \right)^2 + q^2 y_R^2 - 2mncos\theta \left( x_R - c \frac{sen\theta}{cos\theta} \right) &= n^2 \\ \frac{q^2 - m^2}{m^2 + 1} (x_R - cm)^2 + q^2 y_R^2 - \frac{2mn}{\sqrt{m^2 + 1}} (x_R - cm) &= n^2. \end{aligned}$$

Na equação anterior, temos duas possibilidades:

- $q^2 - m^2 = 0 \iff |q| = |m|$ , em que a inclinação de uma das geratrizes é igual à inclinação do plano sector;
- $q^2 - m^2 \neq 0 \iff |q| \neq |m|$  em que a inclinação das duas geratrizes é diferente da inclinação do plano sector.

No primeiro caso, a equação da cônica será

$$q^2 y_R^2 - \frac{2mn}{\sqrt{m^2 + 1}}(x_R - cm) = n^2.$$

Esta equação representará:

- no caso de  $n \neq 0$ , uma parábola, com eixo de simetria paralelo ao eixo  $Oy$ , de equação

$$y_R^2 = \frac{2mn}{q^2 \sqrt{m^2 + 1}} \left( x_R - \left( cm - \frac{n^2 \sqrt{m^2 + 1}}{2mn} \right) \right);$$

- se  $n = 0$ , uma reta, de equação  $y_R = 0$ , no plano  $O'x_R y_R$ .

Já na hipótese de  $q^2 - m^2 \neq 0$ , a equação fica da forma:

$$\begin{aligned} \frac{q^2 - m^2}{m^2 + 1}(x_R - cm)^2 - \frac{2mn}{\sqrt{m^2 + 1}}(x_R - cm) + q^2 y_R^2 &= n^2 \\ \frac{q^2 - m^2}{m^2 + 1} \left( (x_R - cm)^2 - \frac{2mn\sqrt{m^2 + 1}}{q^2 - m^2}(x_R - cm) \right) + q^2 y_R^2 &= n^2 \\ \frac{q^2 - m^2}{m^2 + 1} \left( (x_R - cm) - \frac{mn\sqrt{m^2 + 1}}{q^2 - m^2} \right)^2 + q^2 y_R^2 &= n^2 + \frac{(mn)^2}{q^2 - m^2}. \end{aligned}$$

Comparando com as equações das cónicas apresentadas em anexo, ocorre que a equação anterior representa:

- uma elipse, no caso em que  $q^2 > m^2$  e  $n \neq 0$ ,
- um ponto, quando  $q^2 > m^2$  e  $n = 0$ ,
- uma hipérbole, no caso em que  $q^2 < m^2$  e  $n \neq 0$ ,
- um par de retas concorrentes, quando  $q^2 < m^2$  e  $n = 0$ .

Com isso, deduzimos que:

- para  $n = 0$ 
  - se  $|q| > |m|$ , a intersecção é um ponto (vértice do cone);
  - se  $|q| = |m|$ , a intersecção é uma reta (geratriz do cone);
  - se  $|q| < |m|$ , a intersecção é um par de retas concorrentes (geratrizes do cone).

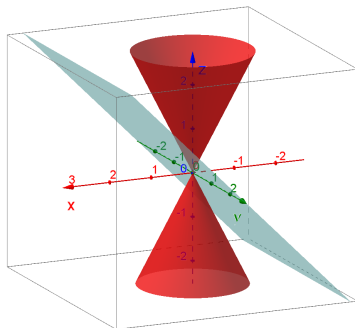


Figura 25 – Delimitando ponto no cone.

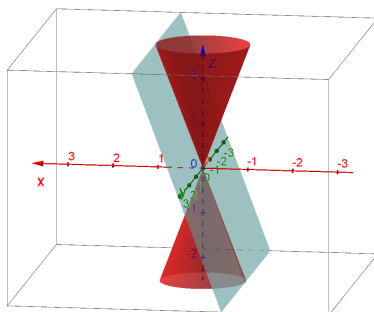


Figura 26 – Delimitando reta no cone.

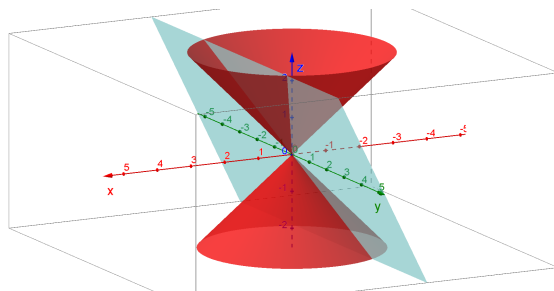


Figura 27 – Delimitando retas concorrentes no cone.

- para  $n \neq 0$ 
  - se  $|q| > |m|$ , a intersecção é uma elipse;
  - se  $|q| = |m|$ , a intersecção é uma parábola;
  - se  $|q| < |m|$ , a intersecção é uma hipérbole.

**Exemplo 5.1.** A intersecção da superfície cônica de equação  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$ , em que  $|q| = 2$ , com o plano de equação  $z = x - 1$  é uma elipse.

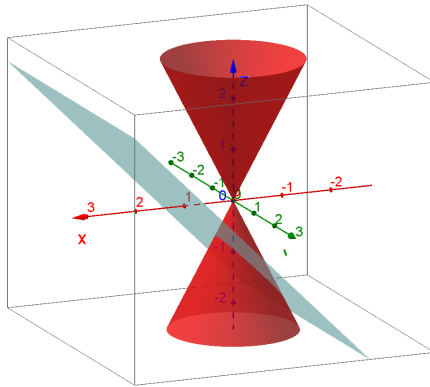


Figura 28 – Delimitando elipse no cone.

**Exemplo 5.2.** A intersecção da superfície cônica de equação  $x^2 + y^2 = z^2$ , em que  $|q| = 1$ , com o plano de equação  $z = 3x - 2$  é uma hipérbole.

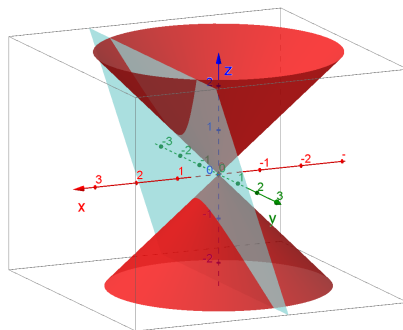


Figura 29 – Delimitando hipérbole no cone.

**Exemplo 5.3.** A intersecção da superfície cônica de equação  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{7}$ , em que  $|q| = \sqrt{7}$ , com o plano de equação  $z = \sqrt{7}x - 1$  é uma parábola.

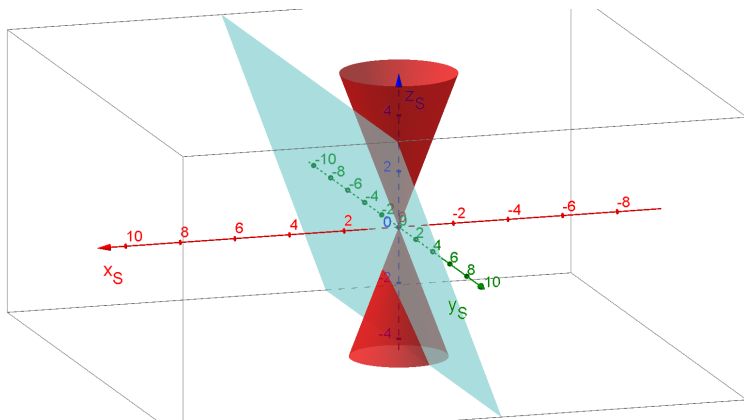


Figura 30 – Delimitando parábola no cone.





## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, pudemos constatar mais uma vez a estreita relação entre dois dos mais importantes ramos da matemática: a álgebra linear e a geometria analítica. Desde Descartes e seus contemporâneos, problemas de geometria passaram a ter um viés algébrico, e isto foi de suma importância para o desenvolvimento da matemática moderna.

O tratamento analítico, às vezes, requer ferramentas algébricas mais sofisticadas do que as ensinadas na escola secundária. O advento da álgebra linear, como parte formalmente estruturada da matemática, anos mais tarde que a geometria analítica, permitiu de problemas muito mais complexos, como a eliminação do termo misto nas equações do segundo grau em mais variáveis, abordado nesta dissertação. Munidos dela, pudemos definir formalmente todas as superfícies quádricas, centradas e não centradas, bem como seus casos degenerados, de modo simples, sem precisarmos borrifar equações canônicas, que apenas são úteis em determinadas situações, em que as figuras não estão sob efeito de rotação.

Além de definir as quádricas, as equações sem o termo misto contribuíram para uma melhor visualização algébrica - e, conseqüentemente, geométrica - das mesmas, uma vez que abordamos as diversas intersecções entre planos paralelos aos planos cartesianos.

E agora, podemos entender, matematicamente, porque um plano que intersecta um só ramo de um cone infinito (que não contenha seu vértice) gera uma elipse. É o caso em que a inclinação do plano sector (que não contém a origem do sistema  $Oxyz$ ) é menor que a inclinação das geratrizes do cone.

Esperamos portanto, que este trabalho possa servir de consulta e leitura para alunos de graduação e professores de ensino médio em geral.



## REFERÊNCIAS

ACZEL, Amir D. O caderno secreto de Descartes - Edição brasileira - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 2007. Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges

ANTON, Howard. RORRES, Chris. Álgebra Linear com Aplicações - 8ª edição - Porto Alegre: Bookman, 2001. Tradução: Claus Ivo Doering

DELGADO, Jorge. FRENSEL, Katia. CRISSAFF, Lhaylla. Geometria Analítica - SBM, Coleção PROFMAT - 2013.

HEFEZ, Abramo e FERNANDEZ, Cecília de Souza. Introdução à Álgebra Linear - SBM Coleção PROFMAT - 2013.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. Álgebra Linear - 2ª edição - São Paulo: Pearson, 2012a.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. Geometria Analítica - 2ª edição - São Paulo: Pearson, 2012b.

VENTURI, Jacir J. Cônicas e Quádricas - 5ª edição - Curitiba: Artes Gráficas Editora Unificado, 2003.

<http://www.solitaryroad.com/c413.html>, acessado em 20 de julho de 2015.

<http://www.solitaryroad.com/c411.html>, acessado em 20 de julho de 2015.



## ANEXO

A tabela a seguir contém a equação geral da reta e as equações canônicas das cônicas, centradas no ponto  $(x_O, y_O)$  (parábolas com vértice no ponto  $(x_O, y_O)$ ), sem rotação.

Tabela 1 – Cônicas e equações canônicas no plano  $Oxy$ 

Cônica	Equação
Reta	$ax + by = c$
Circunferência	$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = R^2$
Elipse	$\frac{(x - x_O)^2}{a^2} + \frac{(y - y_O)^2}{b^2} = 1$
Hipérbole (eixo real horizontal)	$\frac{(x - x_O)^2}{a^2} - \frac{(y - y_O)^2}{b^2} = 1$
Hipérbole (eixo real vertical)	$\frac{(y - y_O)^2}{a^2} - \frac{(x - x_O)^2}{b^2} = 1$
Parábola (concavidade para cima)	$(x - x_O)^2 = 4p(y - y_O)$
Parábola (concavidade para baixo)	$(x - x_O)^2 = -4p(y - y_O)$
Parábola (concavidade para direita)	$(y - y_O)^2 = 4p(x - x_O)$
Parábola (concavidade para esquerda)	$(y - y_O)^2 = -4p(x - x_O)$

- Na equação da circunferência,  $R$  é a medida do raio.
- Na equação da elipse,  $a$  e  $b$  são as medidas dos semieixos horizontal e vertical, respectivamente.
- Nas equações da hipérbole,  $a$  e  $b$  são as medidas dos semieixos real e imaginário (o sinal de menos precede o termo com a variável cujo eixo correspondente contém o eixo imaginário).
- Nas equações da parábola,  $p > 0$  é a medida do parâmetro, que é a distância entre o foco e o vértice da mesma.