UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fábio da Silva Santos

Mediatriz e Bissetriz: uma proposta para o ensino de geometria no ensino fundamental

Rio de Janeiro

2015

Fábio da Silva Santos

Mediatriz e Bissetriz: uma proposta para o ensino de geometria no ensino fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Fábio Luiz Borges Simas
Doutor em Matemática - UNIRIO

Rio de Janeiro

2015

S237 Santos, Fábio da Silva.
Mediatriz e bissetriz: uma proposta para o ensino de geometria no ensino fundamental / Fábio da Silva Santos, 2015.
90 f. ; 30 cm

Orientador: Fábio Luiz Borges Simas.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

1. Geometria. 2. Triângulo. 3. Matemática – Estudo e ensino. I. Simas, Fábio Luiz Borges. II. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Mestrado Profissional em Matemática. III. Título.

CDD - 516

FABIO DA SILVA SANTOS

Mediatriz e Bissetriz: uma proposta para o ensino de geometria no Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovada em 27 de novembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA:

Fabio Luiz Borges Simas

Fabio Luiz Borges Simas

Luiz Amancio Machado de Sousa Junior

Luiz

Letícia Guimarães Rangel

Letícia Rangel

Leo Akio Yokoyama

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria C. da Silva Santos,
exemplo maior de honestidade, companheirismo e amor.

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, Nilo e Maria, e a minha tia Noeme, pela educação esmerada e pelos valores sem os quais eu jamais me tornaria a pessoa que sou.

Aos professores do PROFMAT, por contribuírem para o meu crescimento intelectual e profissional. Em especial, agradeço ao meu orientador, professor Dr. Fábio Simas, pela paciência, seriedade, perfeccionismo e manhãs de sábado sacrificadas.

Aos colegas do mestrado, tanto da UNIRIO, quanto da UFF (por onde também passei), por tornarem mais agradáveis e enriquecedores todos esses anos de estudo.

E por último, mas não menos importante, à minha amada Lílian, pela paciência e apoio incondicionais.

“Seja lá o que você venha a fazer, se você souber matemática, fará bem melhor.”

Arrabal

Resumo

Este trabalho apresenta uma sequência de atividades para estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental sobre mediatriz e bissetriz e suas principais propriedades. No final, complementamos o trabalho tratando das demais linhas notáveis de um triângulo e seus respectivos pontos notáveis. Diferente da maioria dos textos clássicos, em que a mediatriz e a bissetriz surgem como linhas dos triângulos, aqui estes dois objetos são protagonistas principais sobre os quais provamos afirmações que são aplicadas em polígonos em geral e nos triângulos, em particular. As principais aplicações que discutimos são as condições sob as quais um polígono é ou não inscritível ou circunscritível. A maioria das atividades faz uso de tecnologias como dobraduras, régua e compasso ou geometria dinâmica (GeoGebra).

Este trabalho tem por princípio que um dos principais objetivos do estudo da geometria na Escola Básica é desenvolver nos estudantes a habilidade da argumentação. Assim, em todas as atividades aqui propostas o estudante é levado a refletir, escrever, fazer e testar hipóteses e, eventualmente, fazer deduções.

Palavras-chave: Mediatriz, Bissetriz, Geometria, Dobraduras, GeoGebra, Cevianas, Pontos Notáveis do Triângulo.

Abstract

This paper presents a sequence of activities for students in the eighth grade of middle school about bisectrix and bisector and their main properties. At the end we complement the ideas presented by showing the other important lines of a triangle and their respective notable points. It differs from the majority of the classic texts in that the bisectrix and bisector appear as lines of triangles. Here these two objects are the main protagonists through which we can prove assumptions that are applicable to polygons and especially to triangles. The main applications discussed are those in which a polygon is not inscribable or circumscribable. The majority of these activities use techniques such as folding, ruler and compass or dynamic geometry (GeoGebra).

One of the main objectives of this project relates to the teaching of geometry in middle school, which is develop students' argumentative abilities. Thus, in all activities proposed here, the student is encouraged to reflect, write, make and test hypotheses and eventually make deductions.

Key words: Bisector, Bisectrix, Geometry, Folding, GeoGebra, Cevianas, Notable Points of a Triangle.

Sumário

INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é levar para o Ensino Fundamental aquilo que acreditamos ser um dos motivos primordiais para se estudar Geometria na escola. Referimo-nos às habilidades de criar hipóteses sobre situações concretas e testá-las, de expressar precisamente ideias e justificar as afirmações feitas com clareza e concisão. Para tal, elaboramos atividades em que o estudante deve investigar propriedades geométricas em exemplos, expressá-las inicialmente com suas próprias palavras e eventualmente também justificar as propriedades observadas. Estes objetivos estão de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1998:

> *"As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. [...]"* ([5] p. 126)

As atividades utilizam dobraduras, geometria dinâmica (com o GeoGebra), régua e compasso para abordar a mediatriz de um segmento, a bissetriz de um ângulo, suas propriedades como lugar geométrico, polígonos inscritíveis e circunscritíveis. No final, trabalhamos também o ortocentro e o baricentro de um triângulo. Tais atividades foram pensadas para estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental.

Ao pesquisar algumas coleções de livros didáticos, notamos que muitos dos textos que abordam estes assuntos fazem da geometria uma coleção de postulados e exercícios sem qualquer reflexão. Este trabalho busca despertar um espírito crítico e questionador no estudante. Como se sabe, não se aprende matemática de maneira passiva e para aprender é necessário desejar o conhecimento. Neste sentido, tentamos primeiro problematizar o assunto para aguçar a curiosidade do estudante, e então colocá-lo como protagonista de seu aprendizado oferecendo-lhe questões que devem orientá-lo para construir a teoria. Além disso, acreditamos que a maioria dos textos usuais dão uma ênfase excessiva aos triângulos conduzindo a falsas conclusões. Por exemplo, não é incomum que os estudantes acreditem que apenas triângulos possuem mediatrizes, que LLLL é caso de congruência de quadriláteros, que todos os polígonos são inscritíveis e circunscritíveis, etc. Aqui as discussões sobre as propriedades da mediatriz e da bissetriz como lugares geométricos ganham um papel central e são aplicadas na caracterização de polígonos inscritíveis e circunscritíveis.

O trabalho foi dividido em três seções: em *Estudo da Mediatriz*, começamos com uma atividade que leva à definição de mediatriz, depois exploramos a caracterização da mediatriz como lugar geométrico e várias atividades sobre a aplicação desta propriedade para identificar se polígonos são, ou não inscritíveis. Na segunda seção, *Estudo da Bissetriz*, propomos atividades que vão desde a definição de bissetriz, passando por sua construção, tanto com dobraduras, quanto pelo método tradicional (com régua e compasso). Em seguida, propomos atividades que conduzem o estudante a conjecturar (criar uma hipótese sobre) a propriedade da bissetriz como lugar geométrico e então justificamos esta caracterização. Intercalamos uma atividade sobre reta tangente, a fim de preparar uma importante aplicação da bissetriz, que é a determinação do incentro de triângulos e de polígonos em geral, quando existir. Finalmente, em *Cevianas e Ponto Notáveis de um Triângulo* discutimos atividades sobre altura e mediana e dos seus respectivos pontos notáveis (ortocentro e baricentro). Ainda na terceira seção, concluímos o trabalho com uma atividade de culminância dos pontos notáveis no triângulo equilátero, feita no GeoGebra.

Ao final do trabalho temos três anexos. No primeiro deles, inserimos os ícones do GeoGebra utilizados no texto, a fim de facilitar a leitura e o uso das atividades que requerem o programa. No segundo anexo, apresentamos uma dobradura para intuir a soma dos ângulos internos de um triângulo, o que será um pré-requisito de uma atividade. E no último anexo, apresentamos um método para construir uma reta perpendicular à uma reta dada, passando por um determinado ponto, tal construção será útil em atividades onde queremos determinar um ponto de tangência de uma circunferência inscrita num polígono, utilizando régua e compasso.

Neste trabalho, buscamos desenvolver diferentes habilidades nos estudantes. Ao trabalharmos com dobraduras, utilizamos um importante recurso para a aprendizagem de diversos conceitos matemáticos, pois ainda que não configurem provas matemáticas dos fatos estudados, acreditamos que as dobraduras formam um elo entre os objetos materiais e as representações mentais das formas ideais estudadas. Além do que, as dobraduras utilizam apenas papel, um material ao alcance de todos. Já o trabalho com o GeoGebra não é tão acessível quanto o papel, pois sabemos que a maior parte das escolas públicas do país não possuem laboratório de informática. No entanto, com o passar do tempo e com o consequente barateamento da tecnologia mais e mais escolas poderão ter acesso a esse tipo de mídia. Além disso, todas as atividades com GeoGebra podem ser feitas apenas com o computador do professor e um projetor. Tais atividades foram pensadas para situações onde a tecnologia configure um ganho de aprendizado sobre construções que possam ser feitas apenas com régua e compasso, como deslocamento de pontos e movimentação de figuras no plano, por exemplo.

Apesar de não demonstrarmos todos os fatos matemáticos apresentados no trabalho, entendemos que demonstrar nada mais é do que justificar e um texto, em matemática, sem justificativas é uma lista de postulados que não leva o estudante ao modo de pensar matemático. Por essa razão, buscamos fazer todas as atividades de modo que o estudante seja levado a pensar nos “porquês” de cada fato apresentado e tendo que justificá-los com suas próprias palavras. Posteriormente, ou sempre que se faça necessário, incentivamos a intervenção do professor nesse processo, seja corrigindo, ou ratificando e consolidando o aprendizado dos estudantes.

Temos clareza de que para a maioria das escolas o texto que aqui se apresenta é longo para o tempo dedicado a este conteúdo. Especialmente devido ao pouco tempo destinado às aulas de geometria.

> *"[...] No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações."* ([5] p. 122)

Este trabalho favorece o desenvolvimento destas capacidades e, por isso, acreditamos que o tempo gasto será recompensado. Todas as atividades podem ser trabalhadas em dois bimestres, visto que a maior parte das escolas de nível fundamental divide o ano letivo em quatro bimestres. Desta forma, numa escola que apresente uma carga horária de 4 aulas semanais de matemática, em duas poderiam ser trabalhadas as atividades aqui propostas. Em redes de ensino, que oferecem seis tempos semanais para matemática, esse cronograma pode ser ainda mais facilmente implementado. Nossa proposta encerra um total de 16 atividades que podem ser trabalhadas em 17 aulas (de 50 minutos cada). Como mostra a tabela a seguir:

Seções	**Atividades**	**Duração**
Seção 1	1.1 – Descobrindo a mediatriz.	Uma aula
	1.2 – Construção da mediatriz com régua e compasso.	Uma aula
	1.3 – Propriedade Fundamental da Mediatriz.	Uma aula
	1.4 – Circuncentro de um triângulo.	Uma aula
	1.5 – Circuncentro de um quadrilátero.	Uma aula
	1.6 – Circuncentro de um retângulo.	Uma aula
	1.7 – Circuncentro de um polígono.	Uma aula

Seção 2	2.1 – Descobrindo a bissetriz.	Uma aula
	2.2 – Construção da bissetriz com régua e compasso.	Uma aula
	2.3 – A bissetriz como lugar geométrico.	Duas aulas
	2.4 – Reta tangente.	Uma aula
	2.5 – Incentro de um triângulo.	Uma aula
	2.6 – Incentro de polígonos.	Uma aula
Seção 3	3.1 – Ortocentro de um triângulo.	Uma aula
	3.2 – Baricentro de um triângulo.	Uma aula
	3.3 – Pontos notáveis no triângulo equilátero	Uma aula

Embora o trabalho tenha sido pensado como uma sequência didática, diversas atividades podem ser trabalhadas de maneira independente. No entanto, acreditamos que a sequência em que as atividades foram propostas tende a enriquecer e otimizar o aprendizado dos estudantes.

SEÇÃO 1 – ESTUDO DA MEDIATRIZ

Nesta seção propomos atividades que visam facilitar o processo de ensino-aprendizagem do conceito de mediatriz. Para isso, mesclamos atividades que envolvem dobraduras, construções com régua e compasso e atividades com geometria dinâmica. Tais atividades seguem uma sequência lógica que vai desde a definição de mediatriz, passando pela sua propriedade fundamental, em que visualizamos a mediatriz como lugar geométrico e concluímos com atividades que mostram aplicações da mediatriz para determinar o *circuncentro* de polígonos.

- **Atividade 1.1:** Descobrindo a mediatriz

Material necessário: folha de papel (papel vegetal, de preferência) e régua.

Inicialmente, marque dois pontos quaisquer (A e B) na folha. Usando a régua, ligue esses dois pontos, formando um segmento de reta (AB).

Agora dobre a folha de modo a unir os dois pontos (colocar a folha contra a luz pode facilitar essa tarefa). Uma vez que os pontos estejam justapostos, faça um vinco no papel e depois retorne com a folha à posição original, como segue a sequência abaixo.

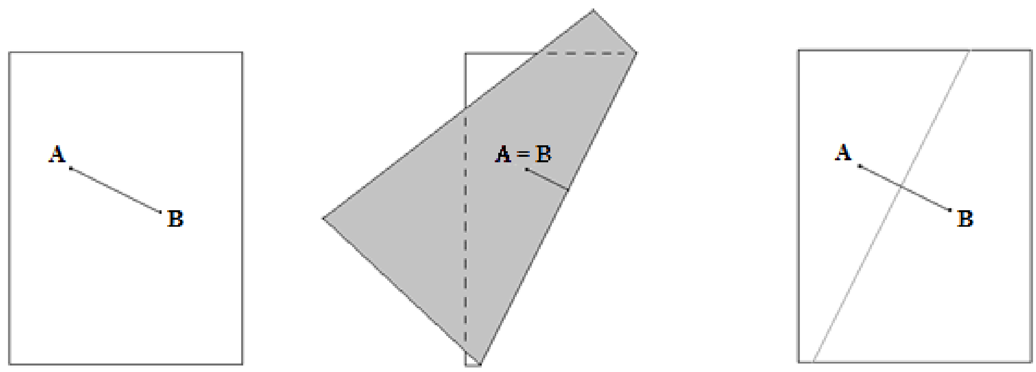


Fig. 1.1 – Segmento AB, dobra do papel sobrepondo A e B, mediatriz de AB.

Com o lápis e a régua, reforce a linha de dobra que chamaremos de reta m. Marque o ponto M de interseção de *m* com o segmento AB.

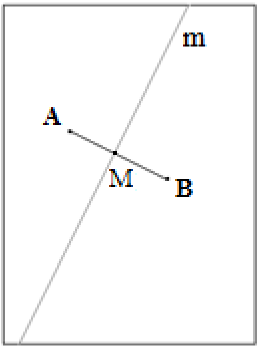


Figura 1.2 – Mediatriz do segmento AB com ponto médio M.

Os exercícios a seguir têm a finalidade de observar as propriedades da reta m. Sugerimos que sejam feitos em grupo.

a) O que podemos afirmar sobre os comprimentos dos segmentos AM e BM? Justifique a sua resposta usando a atividade que acabamos de realizar.

b) Marque um ponto P ($P \neq M$) sobre a reta m. Efetuando duas dobras, a primeira sobre a reta m (já feita anteriormente) e a segunda sobre o segmento AB. O que podemos afirmar sobre os ângulos AMP e BMP?

c) Sabendo que o ângulo AMB é um ângulo de meia volta, utilize o item anterior para determinar as medidas dos ângulos AMP e BMP.

<u>Observação ao professor</u>: Depois que os estudantes realizarem os exercícios e discutirem em grupo as respostas obtidas, caberá ao professor a sistematização desse conteúdo. Nesse caso, a formalização consiste em dar nome à reta m.

Sugestão: Recomendamos que o professor instigue seus estudantes a criticarem o rigor dos argumentos apresentados nesta atividade. Por exemplo: "Será que M é mesmo o ponto médio, ou será uma aproximação dele?" Deixe claro que esta é uma construção mecânica, portanto, não é uma justificativa matemática.

A reta m é chamada de *mediatriz do segmento AB*. Ou seja, a mediatriz de um segmento, é a reta que passa pelo ponto médio desse segmento (no caso, o ponto M) e é perpendicular ao segmento.

- **Atividade 1.2:** Construção da Mediatriz com régua e compasso.

Material necessário: folha de papel, régua e compasso.

Novamente, marque dois pontos distintos (A e B) não muito distantes um do outro. Ligue esses dois pontos formando o segmento AB. Usando o compasso, trace a circunferência com centro em A que passe em B. Sem mexer na abertura do compasso, trace também a circunferência, com centro em B, que passa pelo ponto A.

Essas duas circunferências se intersectam nos pontos, digamos, C e D, os quais determinam uma reta que parece muito ser a mediatriz de AB.

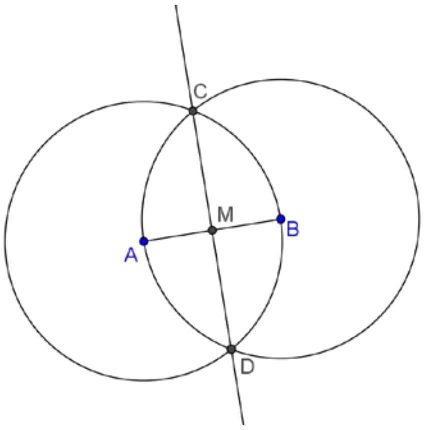


Figura 1.3 – Construção da mediatriz com régua e compasso.

Nos exercícios a seguir, você vai justificar que AB e CD se intersectam no ponto médio de AB e que AB e CD são perpendiculares, ou seja, que CD é realmente a mediatriz de AB.

Observação ao professor: Para realizar os exercícios, a seguir, é fundamental que os alunos já tenham estudado o conceito de congruência e conheçam os casos de congruência de triângulos.

Exercícios:

a) Na figura acima, os triângulos ACD e BCD, são congruentes? Justifique.

b) E os triângulos ACM e BCM, são congruentes? Justifique. (Dica: utilize o item anterior para obter ângulos iguais, que auxiliam nesta congruência).

c) Usando os itens anteriores, explique por que M é ponto médio de AB.

d) Usando congruência de triângulos, explique por que CD é perpendicular à AB.

e) Explique por que a reta CD é a mediatriz de AB.

- **Atividade 1.3:** Propriedade Fundamental da Mediatriz

Para essa atividade será necessário que a escola disponha de um laboratório de informática ou de um projetor de multimídia.

Nesta atividade, guiaremos o estudante no uso do GeoGebra, a fim de observar e, em seguida, justificar a propriedade da mediatriz como lugar geométrico. A saber: “A mediatriz de um segmento AB é, exatamente, o conjunto dos pontos do plano que são equidistantes dos pontos A e B.”

Para evitar confusão é importante que o professor esteja certo de que os estudantes compreenderam o conceito de mediatriz.

Ao iniciar o programa, veremos a tela de abertura do GeoGebra, como indicado no quadro abaixo, à esquerda. A fim de facilitar a visualização das construções, vamos fechar a *Janela de Álgebra* e clicando na *Janela de Visualização* vamos marcar a opção ESCONDER EIXOS. Fazendo isso, ficamos com a tela inicial indicada à direita.

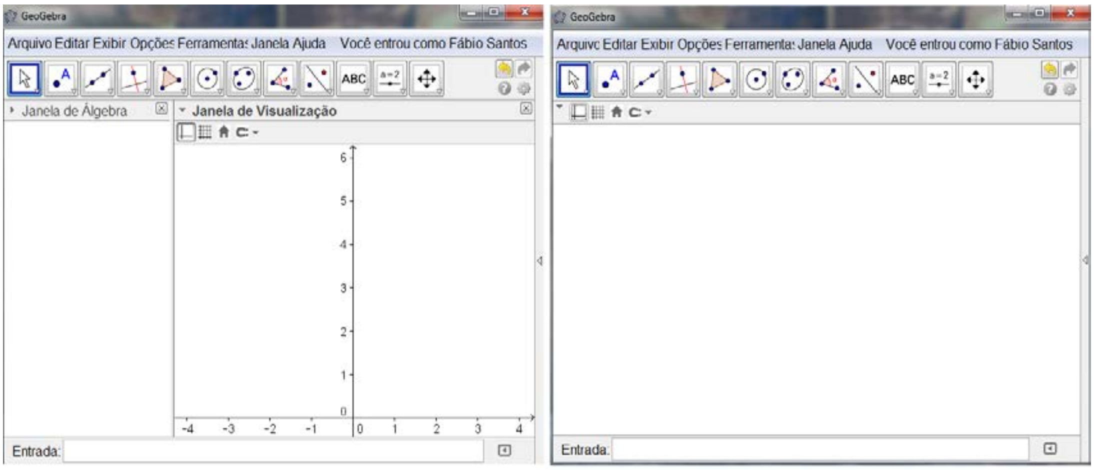


Fig. 1.4 – Janela de visualização do GeoGebra.

Selecione a ferramenta PONTO e marque dois pontos na janela de visualização. Clique com o botão direito do mouse sobre cada um dos pontos e ative a opção *Exibir Rótulo*. Fazendo isso, os pontos serão rotulados automaticamente como A e B.

Agora ative a ferramenta RETA e, posicionando o cursor sobre o triângulo situado no canto inferior direito do ícone, escolha a ferramenta SEGMENTO. Então, clique sobre o ponto A e depois no ponto B. Temos, então um segmento de reta AB.

Embora seja perfeitamente possível fazer a construção da mediatriz usando o programa (como sugerido na Atividade 1.2), o GeoGebra possui uma ferramenta que constrói automaticamente a mediatriz de um segmento de reta. Selecione a ferramenta RETA PERPENDICULAR e clique sobre o triângulo posicionado no canto inferior direito, escolha a opção MEDIATRIZ. Em seguida clique sobre o segmento AB.

Agora temos um segmento AB e sua respectiva mediatriz, como mostra a figura abaixo:

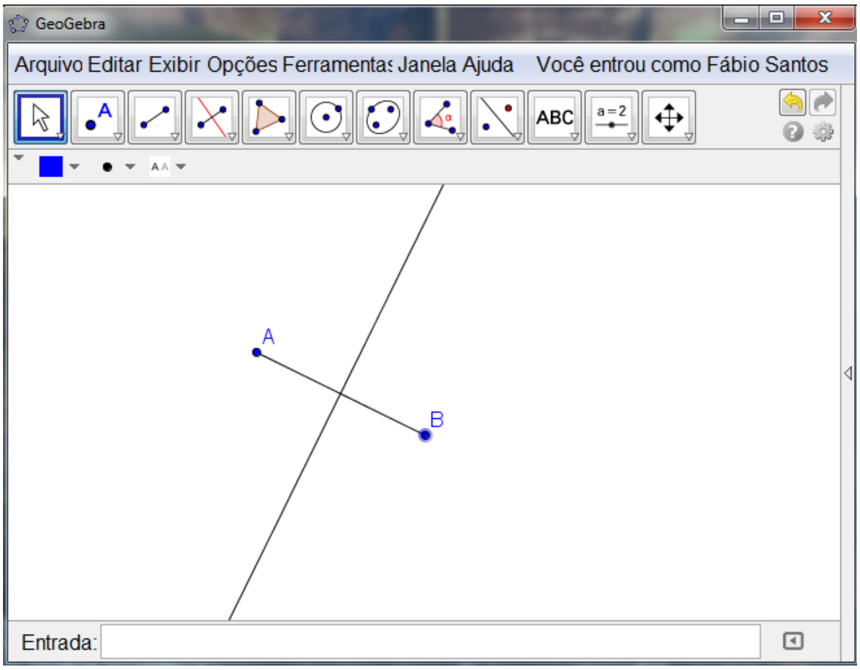


Figura 1.5 – Mediatriz do segmento AB no GeoGebra.

Os pontos A e B são objetos que podem ser movimentados livremente. Para isso, basta usar a ferramenta MOVER e em seguida arrastá-los (um de cada vez) segurando o botão esquerdo do mouse. Observe o que ocorre com a mediatriz quando movimentamos os extremos do segmento.

Vamos agora investigar para concluir uma propriedade interessante da mediatriz do segmento AB. Marque um ponto C qualquer sobre a mediatriz, mas não pertencente ao segmento AB. Assim como foi feito para construir o segmento AB, construa os segmentos AC e BC. A fim de conhecer o comprimento dos referidos segmentos, selecione a ferramenta ÂNGULO e posicionando o cursor sobre o triângulo situado no canto inferior direito do ícone, escolha a ferramenta DISTÂNCIA, COMPRIMENTO E PERÍMETRO e clique sobre os segmentos AC e BC.

Exercícios:

Considerando o que foi desenvolvido até então nesta atividade, faça o que se pede:

a) O que você observou sobre os comprimentos dos segmentos AC e BC?

b) Selecione novamente a ferramenta MOVER e arraste os pontos A, B e C e descreva o que ocorre com os comprimentos de AC e BC.

c) Marque um ponto D, em qualquer lugar fora da mediatriz do segmento AB. Construa os segmentos AD e BD e meça o comprimento desses segmentos (assim como fizemos com AC e BC, acima). Depois mova o ponto D em direção à mediatriz e descreva detalhadamente o que acontece com os comprimentos de AD e BD.

d) Escreva detalhadamente usando suas próprias palavras, que conclusão podemos tirar a respeito dessas observações?

Observação ao professor: Estimule os estudantes a darem respostas completas e gerais nas atividades acima. Por exemplo, no item b) o estudante pode simplesmente responder “são iguais”, o que está correto, mas não o leva à mesma reflexão que escrever algo como: “Para qualquer ponto C da mediatriz de AB, as distâncias AC e BC são iguais”. Neste momento é importante garantir que o estudante entendeu e consegue expressar as duas afirmações a seguir:

i) se C é um ponto da mediatriz, então a distância de A para C é igual a distância de B para C;

ii) se D não é um ponto da mediatriz, então a distância de A para D é diferente da distância de B para D.

Dessa forma, a Propriedade Fundamental da Mediatriz garante que:

a mediatriz de um segmento, é o lugar geométrico de todos os pontos que equidistam dos extremos do segmento.

Exercícios de Aprofundamento:

Os exercícios propostos a seguir têm como objetivo aprofundar o estudo da Propriedade Fundamental da Mediatriz.

Para os exercícios a seguir, considere um segmento AB e seu ponto médio M.

a) Dado um ponto C sobre a mediatriz de AB ($C \neq M$), será que é sempre verdade que $AC = BC$?

Na atividade com o GeoGebra, sob essas condições, pudemos observar que a medida que deslocávamos o ponto C sobre a mediatriz as distâncias de A até C e de B até C eram sempre iguais. No entanto, nosso experimento se deu apenas num pedaço da mediatriz. Será que tomando um ponto C sob a mediatriz que esteja extremamente distante dos pontos A e B essa relação continuará valendo? Será que o computador diz a verdade? E ainda que, sim, por que é verdade? Uma resposta incontestável a esta pergunta é o que chamamos de uma “Prova Matemática”.

Em matemática (e na vida), quando queremos justificar uma proposição, devemos fazê-lo utilizando fatos já conhecidos e uma lógica dedutiva que permita concluir que tal proposição seja válida, respeitando as condições iniciais da proposição, isto é, seu contexto. Nesse caso, a condição inicial é que o ponto C está sobre a mediatriz. Queremos verificar, para todos os infinitos pontos da mediatriz, que as distâncias de cada um desses pontos até os extremos A e B, são iguais.

Considerando um ponto qualquer (diferente de M) sobre a mediatriz, que chamaremos de C, podemos considerar dois triângulos: AMC e BMC. Como M é ponto médio de AB, então AM = BM. E como M pertence à mediatriz de AB, os ângulos AMC e BMC, são retos. O que nos leva a deduzir que os triângulos AMC e BMC são também congruentes (caso LAL). Logo, acabamos de provar que AC = BC, para qualquer C (diferente de M) que se considere sobre a mediatriz.

b) Dado um ponto D, tal que AD = BD, será que D pertence à mediatriz de AB?

Note que a nossa condição inicial agora é outra. Temos um ponto D que satisfaz à seguinte condição: AD = BD. Queremos verificar se é sempre verdade que nessa condição, o ponto D estará obrigatoriamente sobre a mediatriz de AB.

Vamos considerar os triângulos AMD e BMD. Já sabemos que M é ponto médio de AB e que por isso AM = BM. Pela condição inicial, AD = BD e DM é um lado comum a ambos os triângulos, logo os triângulos AMD e BMD são congruentes (pelo caso LLL). E, portanto, os ângulos AMD e BMD são congruentes e suplementares logo, têm que ser retos. Sendo assim, a reta que contém o segmento MD é perpendicular ao segmento AB e passa pelo seu ponto médio, ou seja, essa reta é a mediatriz de AB que passa pelo ponto D. Logo, qualquer ponto D tal que AD = BD pertence à mediatriz de AB.

Ao resolver esses dois exercícios, mostramos que a Propriedade Fundamental da Mediatriz (PFM) é válida. Ou seja, ao considerarmos dois pontos quaisquer A e B, o PFM nos garante que dado um ponto C qualquer, sobre a mediatriz de AB, sempre teremos que AC = BC. Além disso, dado um ponto D que equidiste dos extremos do segmento AB, o PFM garante que D pertence à mediatriz de AB.

- **Atividade 1.4:** <u>Circuncentro de um triângulo</u>

Materiais necessários: folha de papel (ofício, de preferência), régua, compasso, cola e tesoura.

Para esta atividade, precisamos lembrar que uma circunferência de centro O e raio r, é o conjunto dos pontos P do plano, tais que PO = r. Assim, para que exista uma circunferência passando por A, B e C, é necessário que exista um ponto O, tal que OA = OB = OC. Então, O será o centro e OA será o raio da circunferência.

Marque no papel, três pontos não colineares, digamos A, B e C. E, em seguida ligue os segmentos AB, AC e BC, formando um triângulo. Depois que o triângulo estiver pronto, recorte-o do papel e determine através de dobraduras, as mediatrizes dos três lados do triângulo, bastando para isso, que se repita a Atividade 1.1 para cada um dos lados do triângulo. Por exemplo, para determinar a mediatriz do segmento AB, basta fazer como segue:

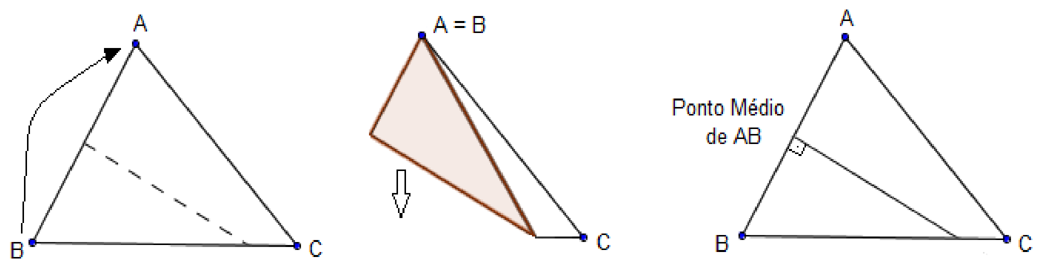


Fig. 1.6 – Dobradura para obter a mediatriz de um lado do triângulo.

Em seguida, repete-se o processo para os segmentos AC e BC.

Você deve ter observado que as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam todas num mesmo ponto. Confira se isso também aconteceu nos triângulos dos colegas à sua volta.

Agora, cole o triângulo em seu caderno. Represente o ponto de interseção das mediatrizes pela letra O, prolongue as mediatrizes, se necessário. Com a ponta seca do compasso sobre o ponto O, abra o compasso até o vértice A do triângulo e trace uma circunferência. Observe que essa circunferência também passa pelos pontos B e C. Quando isso ocorre, dizemos que a circunferência está *circunscrita* ao triângulo, ou que o triângulo está *inscrito* na circunferência. E, o centro da circunferência que circunscreve um triângulo, é chamado de *circuncentro do triângulo*. Ou seja, o ponto O é o circuncentro do triângulo ABC. Mas, será que esta é a única circunferência que passa nos pontos A, B e C? Será que as mediatrizes dos lados de um triângulo sempre vão se encontrar num único ponto?

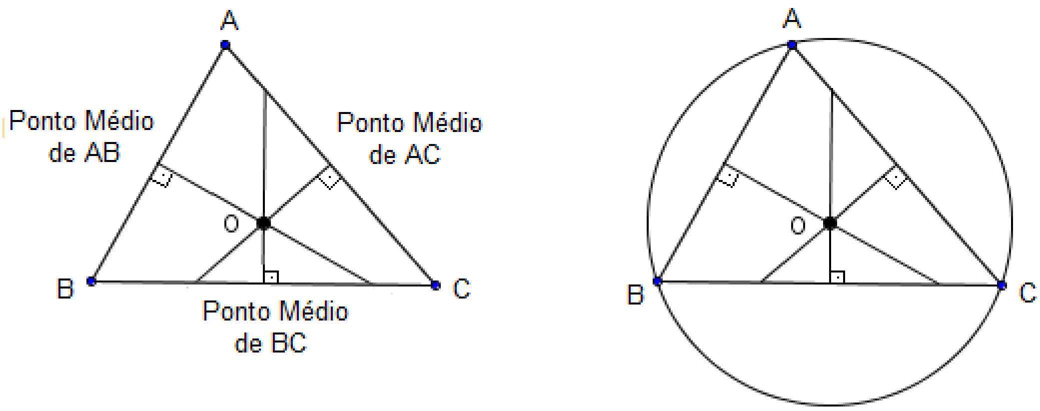


Fig. 1.7 – Mediatrizes dos lados do triângulo e circunferência circunscrita a ele.

O que fizemos até aqui nesta atividade, sugere que as mediatrizes dos lados de um triângulo se intersectam todas num mesmo ponto. Nos exercícios a seguir, você mesmo vai justificar este fato. Para isso, você vai precisar lembrar que, conforme visto na atividade anterior, a mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos do segmento, ou seja, para qualquer ponto P da mediatriz de AB, temos PA=PB e também, vale a recíproca, isto é, se para algum ponto P temos PA=PB, então P pertence à mediatriz de AB.

Exercícios:

a) No início da atividade, para formar um triângulo, pedimos que fossem marcados três pontos “não colineares”. Explique por que os três pontos não podem ser colineares.

b) Chamando de O o ponto de interseção das mediatrizes m_{AB} de AB e m_{BC} de BC, responda e justifique:

b.1) O que podemos afirmar sobre os comprimentos OA e OB?

b.2) O que podemos afirmar sobre os comprimentos OB e OC?

b.3) Usando os itens anteriores (a.1 e a.2) o que podemos afirmar sobre os comprimentos de OA e OC?

b.4) Por que quando colocamos a ponta seca do compasso em O e a outra em A e giramos, o compasso passa pelos pontos B e C?

b.5) Qual é o ponto de interseção das mediatrizes m_{BC} e m_{AC} dos segmentos BC e AC? (Sugestão: use a Propriedade Fundamental da Mediatriz e o item anterior).

c) Determine os pontos P do plano tais que PA=PB para os pontos A e B da figura abaixo.

Figura 1.8

d) Nas figuras abaixo, determine todos os pontos P tais que PA=PB, PB=PC e PA=PC, em cada caso.

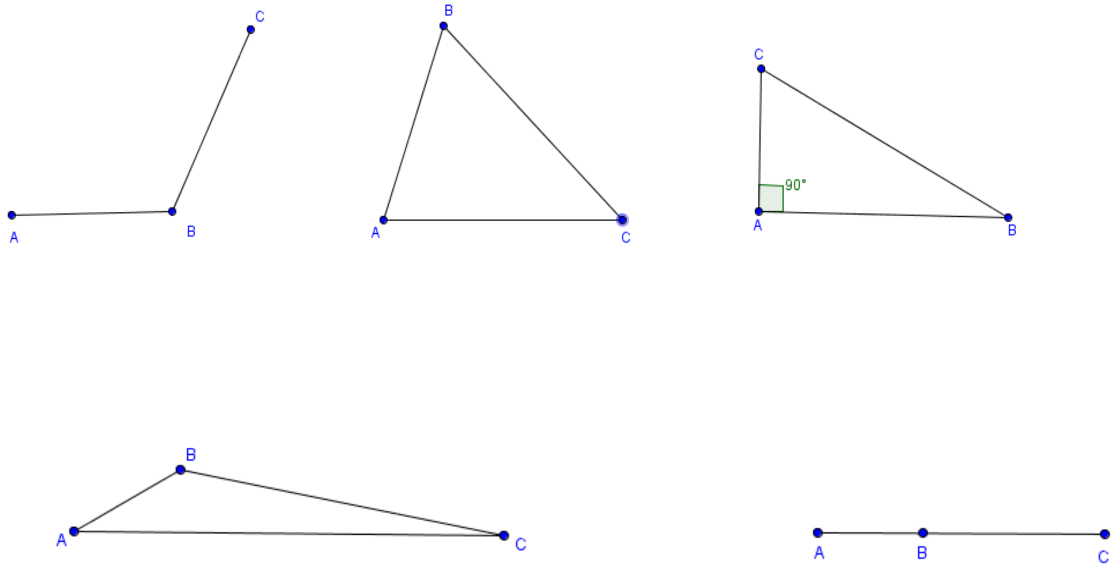


Figura 1.9

e) Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa e justifique (lembre-se, a justificativa é mais importante que a resposta):

e.1) Por dois pontos passa uma única circunferência. (_ _ _)

e.2) Por três pontos passa uma circunferência. (_ _ _)

e.3) Por três pontos não colineares passa uma circunferência. (_ _ _)

f) Dado um triângulo ABC, quantas circunferências passam por A, B e C? Justifique.

Observação ao professor: é fundamental a resolução detalhada do exercício f), antes de passar para a próxima atividade.

- **Atividade 1.5:** Circuncentro de um quadrilátero

Materiais necessários: papel, régua e compasso.

Na atividade anterior, vimos que é sempre possível traçar uma circunferência circunscrita a um triângulo. Nesta atividade, investigaremos se isso também é verdade para um quadrilátero qualquer. Ou seja, dado um quadrilátero, será que é sempre possível traçar uma circunferência circunscrita a ele?

Desenhe no papel um quadrilátero ABCD, que não seja retângulo. Vamos considerar o quadrilátero ABCD, dado abaixo:

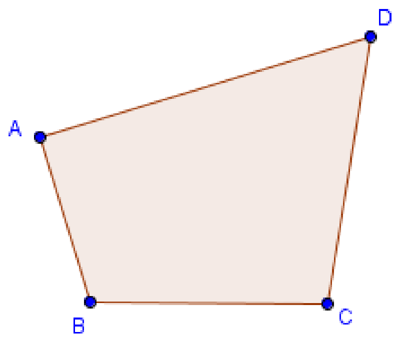


Figura 1.10 – Quadrilátero ABCD (não retângulo).

Será que existe uma circunferência que passe por A, B, C e D? Ou seja, queremos saber se existe alguma circunferência circunscrita a esse quadrilátero.

No último exercício da Atividade 1.4, vimos que existe uma única circunferência que passa por três pontos não colineares. Sendo assim, podemos afirmar que existe uma única circunferência que passa por três, dos quatro vértices do quadrilátero. Vamos construir a circunferência que passa pelos vértices A, B e C (poderíamos considerar qualquer outra combinação com três vértices).

Como vimos na Atividade 1.4, para determinar o circuncentro de um triângulo, precisamos traçar as mediatrizes dos lados desse triângulo. No entanto, como já sabemos que as três mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem num mesmo ponto, só precisamos traçar duas delas para determinar o circuncentro do triângulo ABC.

Traçando as mediatrizes dos lados AB e BC, elas se intersectam num ponto que chamaremos de O. Logo, o ponto O é o circuncentro do triângulo formado pelos vértices A, B e C.

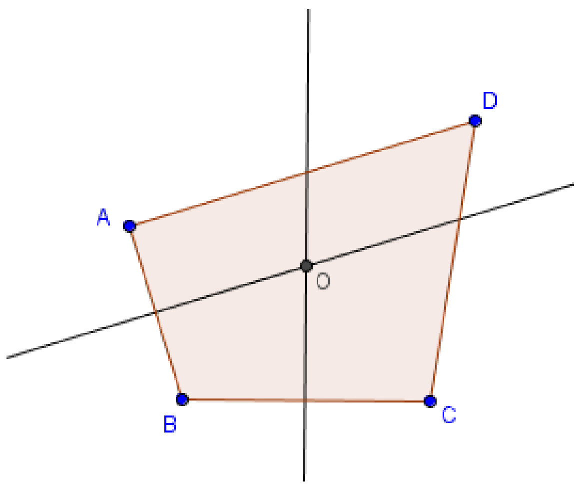


Figura 1.11

Ao traçar a circunferência que passa pelos vértices A, B e C teremos duas possibilidades:

1ª) a circunferência passa pelo vértice D. Dessa forma, o circuncentro do triângulo é também o *circuncentro do quadrilátero*. Sendo assim, dizemos que o quadrilátero é *inscritível*;

2ª) a circunferência não passa pelo vértice D e o quadrilátero não tem um circuncentro. Neste caso, o quadrilátero não é inscritível.

No caso do quadrilátero acima, temos o seguinte:

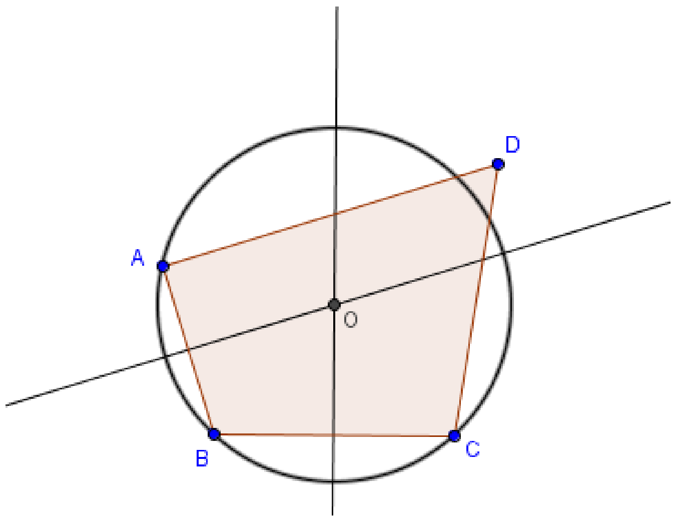


Figura 1.12 – Quadrilátero não inscritível.

O quadrilátero ABCD acima, se enquadra na 2ª possibilidade.

Exercícios:

a) Pode existir uma circunferência que circunscreva o quadrilátero ABCD acima? Justifique.

b) Você consegue imaginar um quadrilátero que seja inscritível? Qual seria? Observe o quão especial é o quadrilátero que você escolheu, fazendo o próximo item.

c) Dados 3 pontos não colineares A, B e C, escolha o ponto D de modo que o quadrilátero ABCD seja inscritível. Esta solução é única? Quantas soluções existem? Faça uma figura que indique todas as posições possíveis para o ponto D.

d) Analisando a solução do item anterior, fixados A, B e C não colineares você diria que existem mais quadriláteros ABCD inscritíveis ou não – inscritíveis?

Observação ao professor: nesta atividade, tomamos o cuidado de arbitrar um quadrilátero não retangular pois, por experiência, a maior parte dos alunos tem uma tendência a pensar em retângulos (na maioria das vezes no quadrado) quando falamos em quadriláteros.

No item a), dos exercícios desta atividade, esperamos que os alunos lembrem do item e) da Atividade 1.4, em que vimos que por três pontos não colineares passa uma única circunferência, logo como a circunferência apresentada passa por três vértices do quadrilátero, mas não passa pelo quarto, não pode haver outra que passe pelos quatro vértices do quadrilátero.

É também importante resolver o item c) da atividade anterior detalhadamente, a fim de que os alunos percebam que existe uma infinidade de quadriláteros inscritíveis que não são retangulares. No entanto, o objetivo da próxima atividade é ir ao encontro do pensamento da maioria dos alunos, mostrando que a intuição deles é de fato verdadeira.

Finalmente, no item d) esperamos que os alunos percebam que apenas tomando o ponto D sobre a circunferência que passa pelos pontos A, B e C, podemos ter um quadrilátero inscritível, de modo que, para que o quadrilátero ABCD não seja inscritível, basta tomar o ponto D em qualquer lugar do plano, fora da referida circunferência.

- **Atividade 1.6:** Circuncentro de um retângulo

Materiais necessários: papel retangular, cola, régua e compasso.

O objetivo desta atividade é fundamentalmente justificar para o estudante aquilo que ele já sabe. Isto porque, quando pedimos a um aluno um exemplo de quadrilátero inscritível, a resposta que obtemos é quase sempre a mesma: o quadrado. No entanto, apesar da resposta estar correta, nem sempre esse aluno é capaz de justificar tal fato. Sendo assim, nesta atividade seremos um pouco mais gerais do que o senso comum e mostraremos que qualquer retângulo é inscritível.

Vamos começar com um pedaço de papel retangular ABCD, com dimensões quaisquer, utilizando o que foi aprendido em atividades com dobraduras anteriormente, vamos determinar as mediatrizes dos lados do retângulo. Para determinar a mediatriz dos lados AD e BC, basta unir os pares de vértices (A e D) e (B e C) fazendo um vinco no papel, como mostra a figura abaixo:

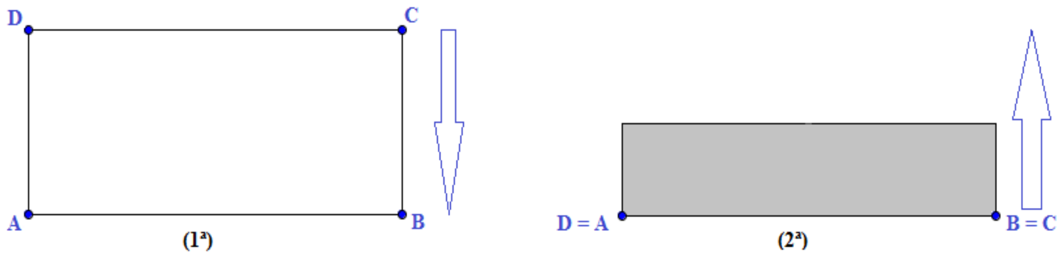
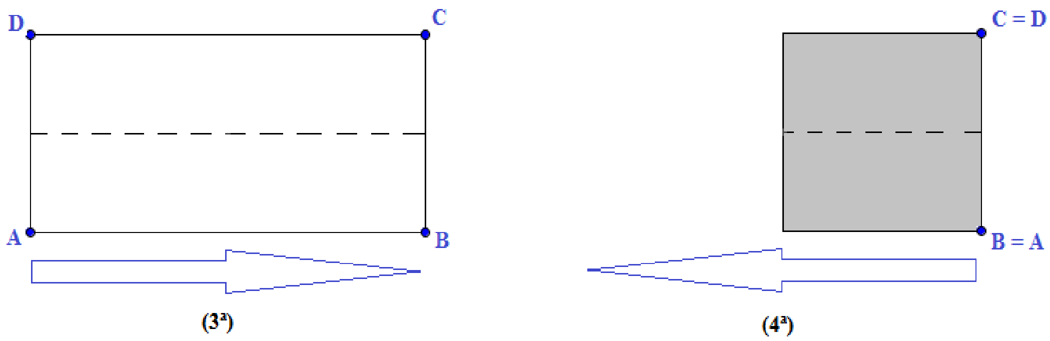


Figura1.13 – Dobradura do retângulo.

Em seguida, retornamos o retângulo à posição inicial e dobramos na outra direção, unindo os vértices A e B e também D e C, novamente marcando o papel, a fim de obter a mediatriz dos lados AB e DC, assim:



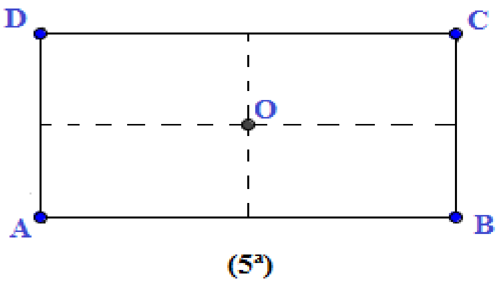


Fig. 1.14 – Dobradura do retângulo e retângulo com as mediatrizes marcadas.

Definimos o ponto O como a interseção das mediatrizes dos lados do retângulo. Sendo assim, temos que: OA = OB = OC = OD. Logo, o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos vértices do retângulo ABCD, ou seja, o ponto O é o *circuncentro do retângulo*. Cole o retângulo no caderno e trace uma circunferência com centro no ponto O, passando pelo ponto A, por exemplo.

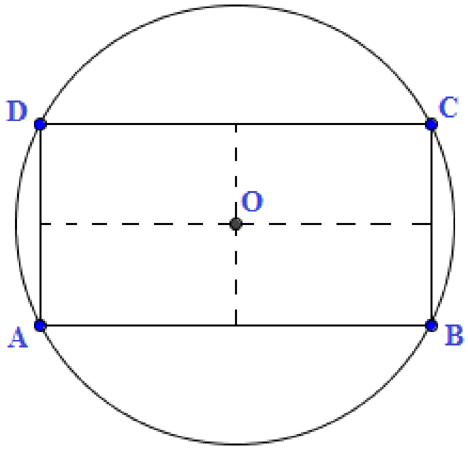


Figura 1.15 – Circunferência circunscrita ao retângulo.

Dessa forma, podemos notar que todo retângulo é inscritível.

Exercícios:

a) Será que também é sempre possível determinar o circuncentro de um quadrado? Justifique.

b) Será que é sempre possível determinar uma circunferência circunscrita a um polígono qualquer?

c) Um retângulo é um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos. Verifique, usando régua e compasso, se o paralelogramo ABCD (não retângulo), dado abaixo, é inscritível. E caso não seja, explique o porquê.

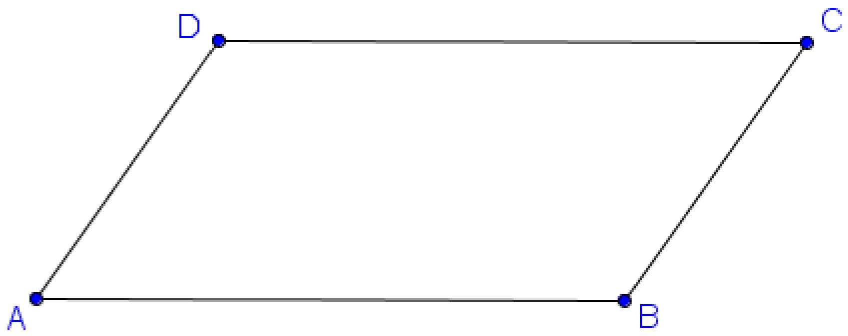


Figura 1.16 – Paralelogramo.

<u>Observação ao professor</u>: para responder ao item a), basta observar que todo quadrado é um retângulo. A experiência nos mostra que este fato, aparentemente óbvio, não é do conhecimento de muitos estudantes, até mesmo em anos de escolaridade mais avançados.

Para responder ao item b), basta utilizar um raciocínio análogo ao que utilizamos na Atividade 1.5. Por exemplo: será que é **sempre** possível determinar uma circunferência circunscrita a um pentágono?

A resposta é, nem sempre. Pois, embora exista uma infinidade de pentágonos inscritíveis, basta que um dos vértices não esteja na circunferência que passa pelos outros vértices, para que o polígono não seja inscritível. Por exemplo, na figura a seguir, temos dois pentágonos. O pentágono ABCDE é inscritível e o pentágono FGHIJ, não.

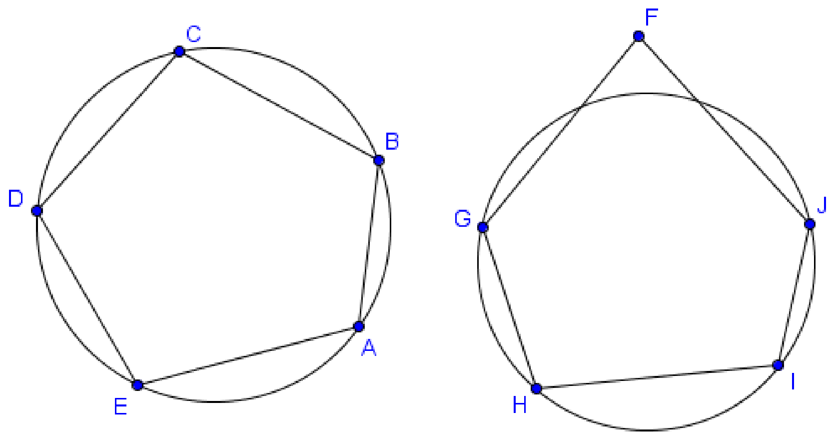


Figura 1.17 – Pentágono inscritível e não inscritível

No item c), as mediatrizes dos lados opostos são paralelas, duas a duas, logo é impossível que haja uma interseção das mesmas, o que faz com que seja impossível inscrever um paralelogramo não retângulo.

- **Atividade 1.7:** <u>Circuncentro de um polígono</u>

Materiais necessários: papéis (com circunferências já desenhadas) e régua e compasso para os exercícios.

Agora que já sabemos que um polígono, com mais de três lados, pode ou não ser inscritível, vamos considerar aqueles que o são. Nessa atividade, vamos investigar como determinar o circuncentro de um polígono sabendo que ele é inscritível.

Por exemplo, dado um pentágono inscrito numa circunferência, como podemos determinar o centro dessa circunferência (que é o circuncentro do pentágono)?

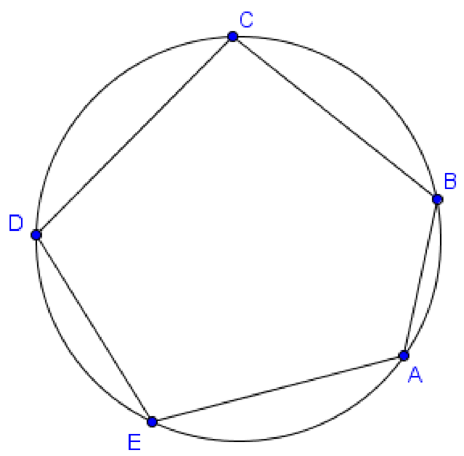


Figura 1.18

Vamos chamar de ponto O, o circuncentro do pentágono ABCDE. Para determinar a posição do ponto O, precisaremos relembrar a *Propriedade Fundamental da Mediatriz* (Atividade 1.3). Note que como o ponto O é o circuncentro do pentágono ABCDE, ele deve equidistar de A, B, C, D e E. Isto é, OA = OB = OC = OD = OE. Vamos por partes: como OA = OB, o ponto O pertence à mediatriz de AB. Como OB = OC, o ponto O também pertence à mediatriz de BC. Raciocinando analogamente chegaremos à conclusão que ponto O deve pertencer simultaneamente às mediatrizes dos segmentos AB, BC, CD, DE e EA.

Inicialmente, vamos marcar cinco pontos: A, B, C, D e E, sobre uma circunferência dada. Como fizemos na Atividade 1.4, vamos utilizar dobraduras para determinar a mediatriz de cada um dos lados do pentágono ABCDE. Para obter a mediatriz do lado AB, basta sobrepor os vértices A e B dobrando o papel e tomando cuidado para que ao marcar a mediatriz (fazendo um vinco no papel) a sobreposição dos vértices não seja desfeita. Procedendo de modo análogo para os outros lados do pentágono, iremos observar que todas as mediatrizes se intersectam no ponto O.

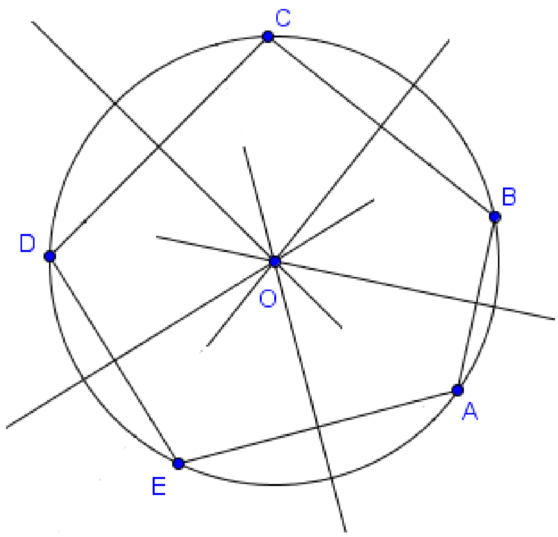


Figura 1.19 – Circuncentro do pentágono.

Exercícios:

a) Neste exercício são dados dois hexágonos. O primeiro é um hexágono *regular* (tem todos os lados e ângulos internos iguais) enquanto o outro é não regular. Usando régua e compasso, determine qual(is) desses hexágonos é (são) inscritível(is).

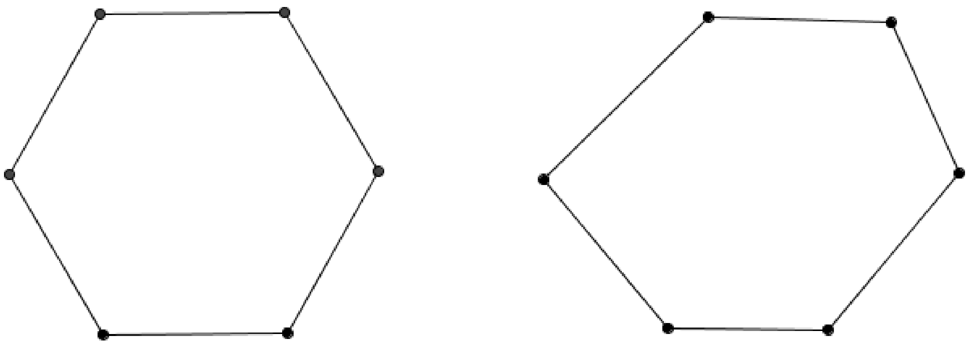


Figura 1.20 – Hexágono regular e não regular.

b) Na verdade, não é necessário traçar todas as mediatrizes dos lados para obter o circuncentro de um polígono. Sabendo disso, determine quantas mediatrizes dos lados de um polígono são necessárias para obter o circuncentro do mesmo.

c) Dados seis pontos sobre uma circunferência, determine utilizando régua e compasso, o circuncentro do hexágono formado por estes pontos.

<u>Observação ao professor</u>: Embora os itens a) e c) pareçam redundantes, pois em ambos utilizamos o PFM (estudado na Atividade 1.3), eles na verdade não o são. No item a) esperamos que os estudantes compreendam que, dado um hexágono ele pode ou não ser inscritível, ou seja, pode ou não existir um ponto que equidiste dos vértices do hexágono, ao passo que, nas condições do item c), isso é sempre possível.

No item b) esperamos que os estudantes percebam que o número de mediatrizes dos lados de um polígono necessárias para determinar o circuncentro é sempre uma unidade a menos que o número de lados do polígono, isto é, num polígono com n lados precisamos traçar n–1 mediatrizes, pois a última fica determinada.

É importante que após a realização destes exercícios, os alunos tenham compreendido e sejam capazes de expressar o seguinte fato: se um polígono é inscritível, então as mediatrizes dos lados do polígono se intersectam num mesmo ponto.

No próximo exercício desejamos verificar a recíproca dessa proposição.

d) Se num polígono todas as mediatrizes se intersectam num mesmo ponto, podemos afirmar que este polígono é inscritível? Justifique.

<u>Observação ao professor (continuação)</u>: A recíproca é verdadeira, pois se todas as mediatrizes se intersectam num mesmo ponto, pela Propriedade Fundamental da Mediatriz sabemos que esse ponto

equidista de todos os vértices do polígono, sendo assim o seu circuncentro.

Dessa forma, podemos concluir que:

se um polígono é inscritível, então as mediatrizes dos lados do polígono se intersectam num mesmo ponto.

E, reciprocamente,

se num polígono todas as mediatrizes se intersectam num mesmo ponto o polígono é inscritível.

Juntando as duas afirmações em uma só, escrevemos:

Um polígono é inscritível se, e somente se, as mediatrizes de seus lados se intersectam todas num mesmo ponto.

SEÇÃO 2 – ESTUDO DA BISSETRIZ

Nesta seção vamos propor atividades que visam facilitar a aprendizagem do conceito de bissetriz, fazendo com que o estudante conclua a partir de atividades reflexivas e orientadas as principais propriedades da mesma, tais como: a divisão de um ângulo em duas partes iguais (bissecção do ângulo); a bissetriz como lugar geométrico e também aplicações da bissetriz, para determinar o *incentro* de triângulos e polígonos em geral.

- **Atividade 2.1:** Descobrindo a bissetriz

Materiais necessários: papel, régua e tesoura.

O objetivo desta atividade é utilizar dobraduras para dividir um ângulo dado qualquer em dois ângulos iguais.

Utilizando a régua, construa no papel um ângulo AÔB de medida qualquer.

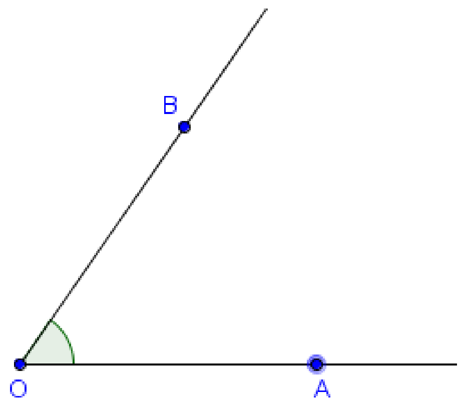


Figura 2.1 – Ângulo AÔB.

Agora dobre o papel fazendo com que a semirreta $\overrightarrow{OA}$ coincida (fique sobreposta) com a semirreta $\overrightarrow{OB}$.

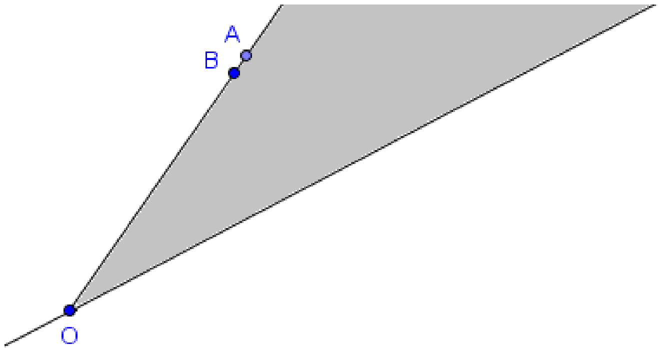


Figura 2.2 – Dobradura de bissecção do ângulo AÔB.

Em seguida, desdobre o papel retornando à posição inicial e marque um ponto P sobre a linha de dobra.

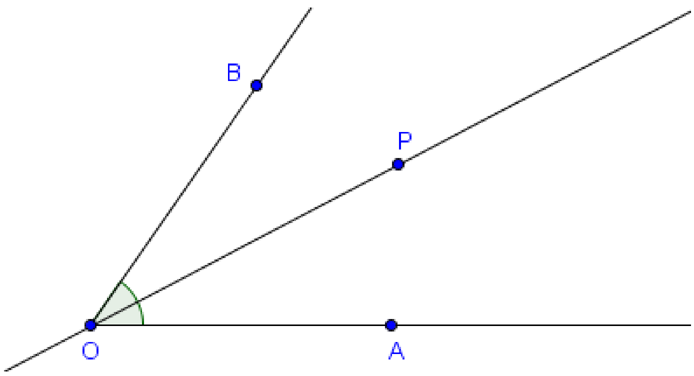


Figura 2.3 – Ângulo AÔB bissectado.

A reta $\overrightarrow{OP}$ é a *bissetriz* do ângulo AÔB. A bissetriz de um ângulo, é a reta que o divide em dois ângulos congruentes.

Exercícios:

a) É correto afirmar que os ângulos AÔP e BÔP são congruentes? Justifique utilizando a construção acima.

b) Compare o ângulo que você construiu com os de seus colegas e discuta as respostas do item anterior.

<u>Observação ao professor:</u> Na realização dos exercícios é importante que os alunos percebam que apesar de terem construído ângulos distintos, em todos os casos, os ângulos AÔP e BÔP serão congruentes, o que pode ser justificado pela perfeita sobreposição dos mesmos.

Depois que os alunos concluírem o exercício, caberá ao professor sistematizar o que foi observado pelos alunos e estabelecer o que vem a ser a bissetriz de um ângulo.

c) Recorte um triângulo de papel e use dobraduras para encontrar as três bissetrizes dos ângulos do triângulo. Observe que as bissetrizes se intersectam todas num mesmo ponto. Na Atividade 2.4 você vai justificar esse fato.

d) Construa um quadrado numa folha de papel e recorte-o. Use dobraduras para encontrar as quatro bissetrizes do quadrado. Elas se intersectaram num mesmo ponto, como ocorreu com o triângulo?

e) Agora construa um retângulo que não seja quadrado e recorte-o do papel. Novamente, use dobraduras para encontrar as bissetrizes do retângulo. As bissetrizes do retângulo se intersectam num mesmo ponto?

- **Atividade 2.2:** <u>Construção da bissetriz com régua e compasso</u>

Materiais necessários: papel, régua e compasso.

Nesta atividade construiremos a bissetriz de um ângulo qualquer utilizando régua e compasso. Marque um ponto O no papel e com a régua trace duas semirretas distintas partindo do ponto O. Com a ponta seca do compasso sobre o ponto O e uma abertura qualquer, trace um arco de circunferência intersectando ambas as semirretas. Vamos chamar os pontos de interseção da circunferência com as semirretas de A e B.

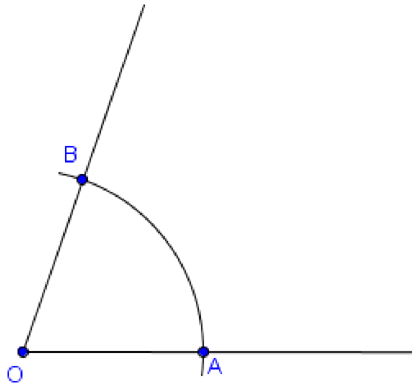


Figura 2.4 – Ângulo AÔB.

Trace outros dois arcos de circunferências com mesmo raio. Um com centro no ponto A e raio AB e outra com centro no ponto B e mesma medida de raio. Fazendo isso os arcos de circunferências se intersectarão em dois pontos, no entanto um deles já é suficiente para determinar a bissetriz do ângulo, chamaremos esse ponto de C.

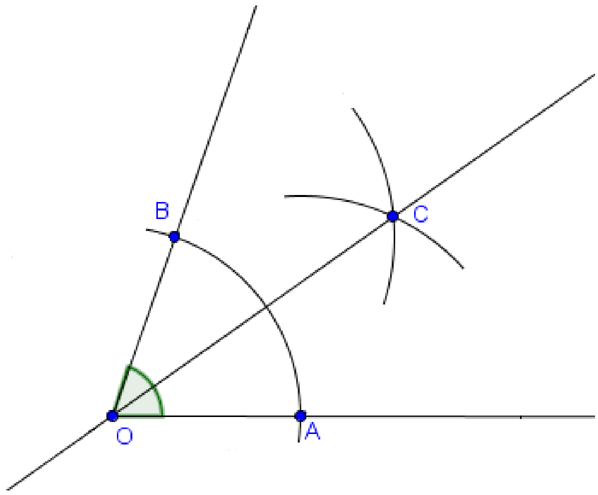


Figura 2.5 – Bissetriz do ângulo AÔB.

Nos exercícios a seguir, você vai justificar sozinho que a reta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo AÔB, isto é, vai mostrar que AÔC = BÔC.

Exercícios:

a) Tendo como base a construção feita acima, explique por que temos AC = BC.

b) Justifique a congruência dos triângulos AOC e BOC.

c) Por que os ângulos AÔC e BÔC são congruentes?

d) A figura acima sugere que a reta $\overrightarrow{OC}$, além de ser bissetriz de AÔB, seja também mediatriz de AB. Explique por que $\overrightarrow{OC}$ é mediatriz do segmento AB.

e) Construa com régua e compasso as bissetrizes internas do triângulo abaixo e diga o que você observou a cerca do encontro das bissetrizes?

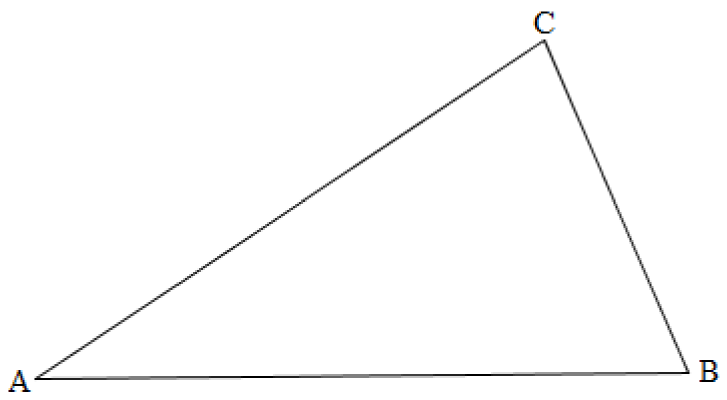


Figura 2.6

f) Construa com régua e compasso as bissetrizes internas do pentágono abaixo e diga o que você observou a cerca do encontro das bissetrizes?

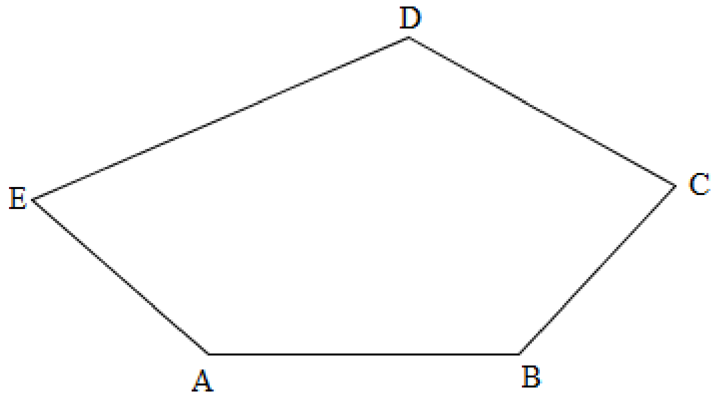


Figura 2.7

g) Faça o mesmo que o exercício anterior, mas com um pentágono *regular* (que tem todos os lados e todos os ângulos internos com a mesma medida). Descreva o que você observou a cerca do encontro das bissetrizes.

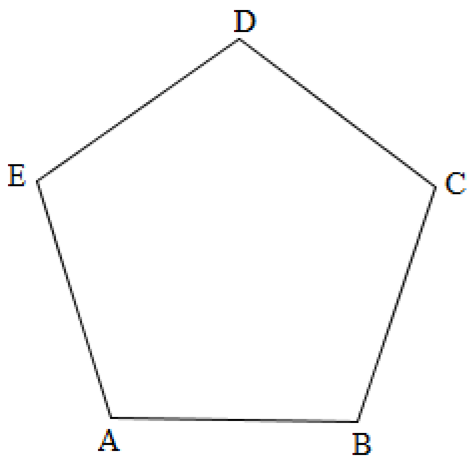


Figura 2.8

- **Atividade 2.3:** <u>A bissetriz como lugar geométrico</u>

Para essa atividade será necessário que a escola disponha de um laboratório de informática ou de um projetor de multimídia.

Nesta atividade, faremos uso do software GeoGebra, a fim de estudar a Propriedade Fundamental da Bissetriz, a saber: “A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados do ângulo.”

Agora traçaremos um ângulo AÔB qualquer e sua bissetriz utilizando o GeoGebra. Esta será a base para a atividade. Assim como fizemos na Atividade 1.3, logo após abrir o programa GeoGebra vamos fechar a *Janela de Álgebra* e ESCONDER EIXOS, a fim de deixar a Janela de Visualização em branco.

Selecione a ferramenta RETA e clique em dois pontos quaisquer na Janela de Visualização. Fazendo isso, aparecerá uma reta definida pelos dois pontos. Para construir uma reta concorrente, clique no primeiro ponto e em seguida num ponto fora da primeira reta traçada.

O GeoGebra nomeia automaticamente os pontos construídos e para visualizar o “nome” de cada ponto, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto e escolher a opção *Exibir Rótulo*. Mas também é possível renomear cada ponto e para isso basta clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto, escolher a opção *Renomear* e alterar o nome do ponto na caixa que será aberta. A fim de manter a mesma configuração das atividades anteriores, vamos nomear os três pontos construídos até aqui, como na figura abaixo:

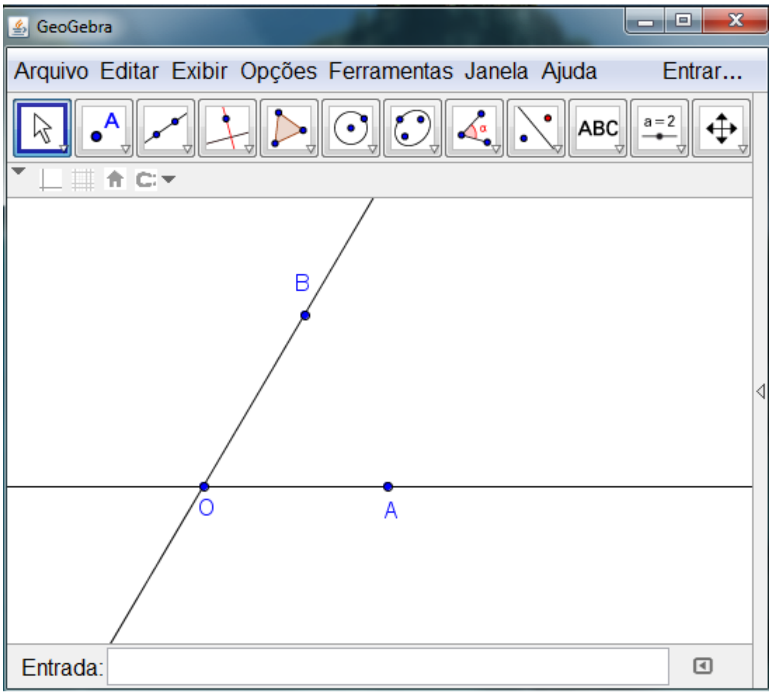


Figura 2.9

O GeoGebra permite que façamos a construção da bissetriz, como fizemos na Atividade 2.2 (anterior), no entanto nosso objetivo não é mais a construção da bissetriz, por isso vamos utilizar a ferramenta que constrói automaticamente a bissetriz. Selecione a ferramenta RETA PERPENDICULAR e posicionando o cursor sobre o triângulo situado na parte inferior direita do ícone, escolha a ferramenta BISSETRIZ. Depois clique sobre os pontos A, O e B, nessa ordem. Temos, assim, a bissetriz do ângulo AÔB.

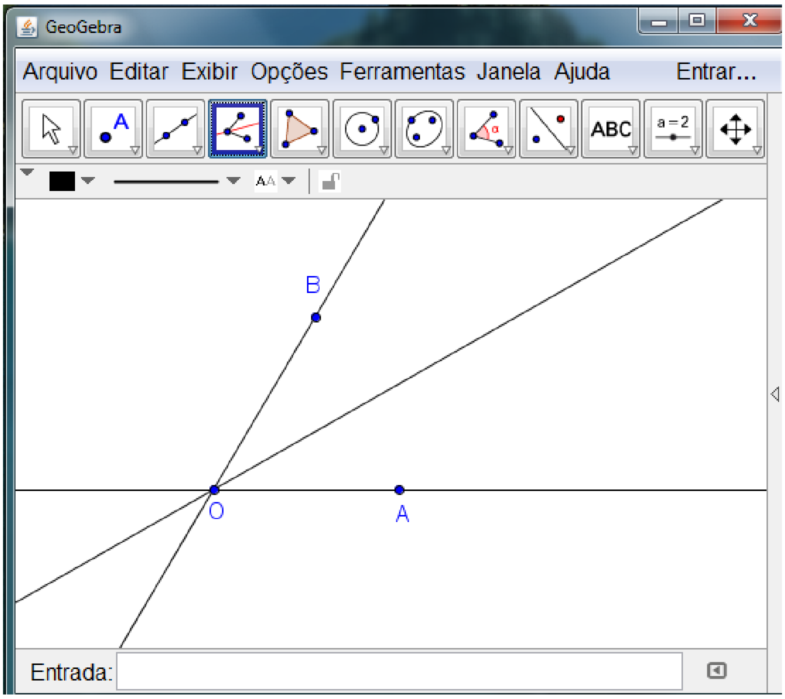


Figura 2.10

Em muitos livros didáticos, por uma questão de conveniência, define-se a bissetriz como uma semirreta que divide um ângulo ao meio. No entanto, para falar da Propriedade Fundamental da Bissetriz é importante tratar a bissetriz como uma reta, tal qual aparece no GeoGebra.

A fim de verificar a propriedade da bissetriz estudada nas atividades anteriores, marque um ponto C sobre a bissetriz de AÔB. Selecione a ferramenta ÂNGULO e clique nos pontos A, O e C, nesta ordem. O programa mostrará a medida do ângulo AÔC. Para obter a medida do ângulo CÔB, basta clicar logo em seguida nos pontos C, O e B, também nesta ordem. É provável que as medidas dos ângulos apareçam sobrepostas, mas é possível movimentá-las, bastando para isso selecionar a ferramenta MOVER e clicar sobre as medidas dos ângulos arrastando-as para uma posição conveniente.

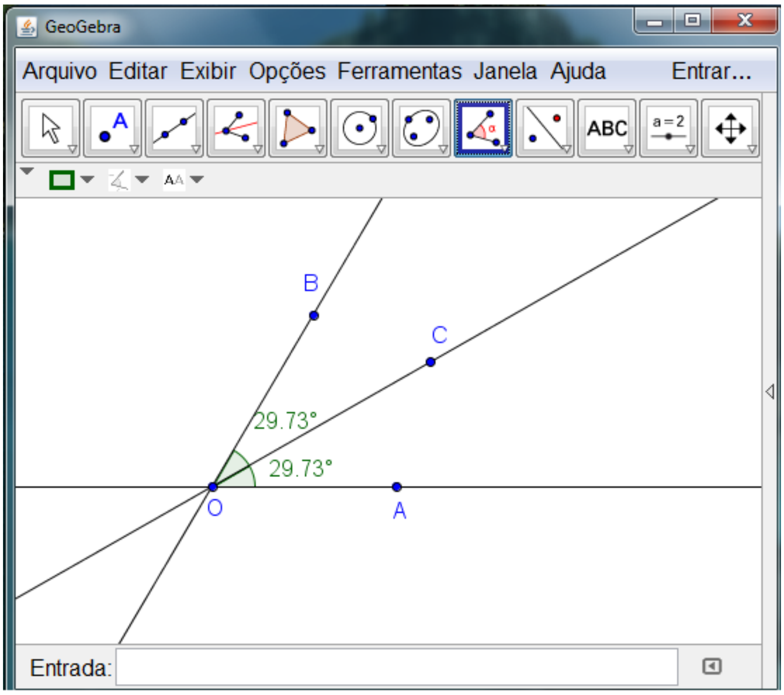


Figura 2.11

Observe que ao clicar e movimentar os pontos A, B ou O, os ângulos AÔC e CÔB são sempre congruentes, pois a reta $\overleftrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo AÔB.

Para fazermos a construção que mostrará a bissetriz como lugar geométrico, é importante salientar que quando falamos de distância entre dois objetos, em matemática, estamos nos referindo à menor distância, isto é, a distância entre um ponto e uma reta é o comprimento do segmento perpendicular à reta que inicia no ponto e termina na reta.

Apenas para não gerar problemas com relação à propriedade a qual desejamos mostrar, vamos marcar um outro ponto sobre a bissetriz do ângulo AÔB, que chamaremos de D. Para não poluir a construção, vamos ocultar o ponto C, clicando sobre ele com o botão direito do mouse e desmarcando a opção *Exibir Objeto*. Agora, vamos determinar a distância do ponto D aos lados do ângulo AÔB. Começaremos determinando a distância do ponto D até a reta $\overleftrightarrow{OA}$. Selecione o quarto ícone (da esquerda para a direita) na barra de ferramentas, o qual deverá estar destacando a ferramenta BISSETRIZ. Clique sobre o triângulo situado no canto inferior direito e escolha a ferramenta RETA PERPENDICULAR. Como queremos uma reta perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OA}$ passando pelo ponto D, basta clicar sobre a reta $\overleftrightarrow{OA}$ e em seguida sobre o ponto D. Para obter a medida da distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{OA}$, precisamos marcar o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{OA}$ com a perpendicular. Clique sobre a ferramenta PONTO e posicione o cursor na interseção das retas mencionadas anteriormente, quando ambas estiverem destacadas clique sobre elas. Teremos, então, um ponto E, a fim de melhorar a visualização vamos marcar o segmento DE e esconder o resto da perpendicular. Para isso selecione a ferramenta RETA e clicando no triângulo no canto inferior direito, selecione a ferramenta SEGMENTO e depois clique nos pontos D e E. Para esconder a perpendicular basta clicar sobre ela (num ponto fora do segmento DE) com o botão direito do mouse e escolher a opção *Exibir Objeto*. Para obter o comprimento do segmento DE (distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{OA}$), basta selecionar a ferramenta ÂNGULO, clicar sobre o triângulo situado na parte inferior direita, escolher a ferramenta DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO e clicar sobre o segmento DE.

Para determinar a distância do ponto D à reta $\overleftrightarrow{OB}$, basta determinar sobre a reta $\overleftrightarrow{OB}$ um ponto F, que pertença à reta perpendicular à $\overleftrightarrow{OB}$ que passa pelo ponto D. Para isso, basta seguir um procedimento análogo ao descrito no parágrafo anterior, finalizando com a medida do segmento DF.

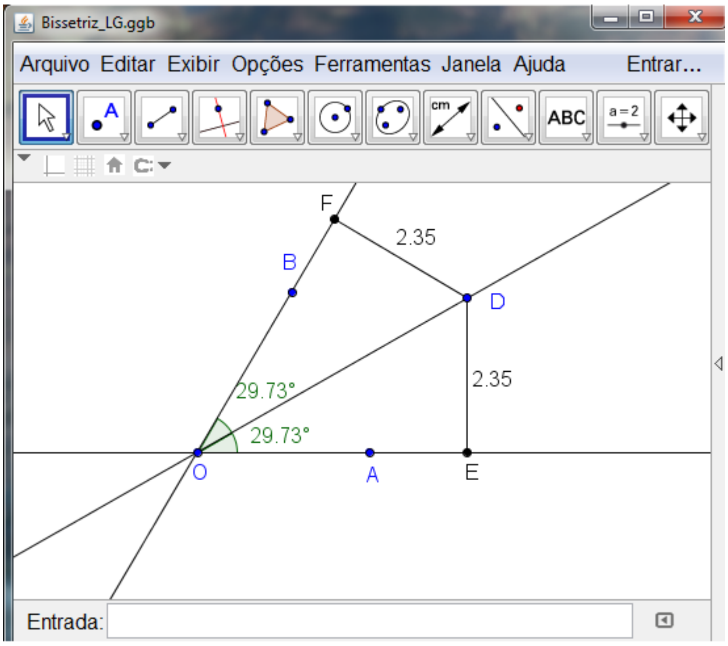


Figura 2.12

Exercícios:

a) Movimente os pontos livres (A, O e B) da figura obtida. O que você observou com relação aos ângulos e medidas assinalados?

b) Movimentando o ponto D ao longo da bissetriz do ângulo AÔB, o que você observa a respeito dos comprimentos dos segmentos DE e DF?

c) Crie um ponto F qualquer (fora da bissetriz de AÔB) e obtenha as distâncias do ponto F às retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$. Movimente o ponto F livremente e descreva quando as distâncias do ponto F aos lados do ângulo são iguais.

d) Descreva as propriedades da bissetriz do ângulo AÔB identificadas nos itens anteriores.

Observação ao professor: Após os alunos concluírem os exercícios é importante que fique claro para eles o enunciado da Propriedade

Fundamental da Bissetriz, isto é, que bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados do ângulo. O que também pode ser entendido através das duas afirmações a seguir:
Considerando um ângulo AÔB, qualquer:

i) se C é um ponto da bissetriz de AÔB, então as distâncias de C às retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ são iguais;

ii) se P não é um ponto da bissetriz de AÔB, então as distâncias de P às retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ são diferentes.

Recomenda-se que o professor faça os estudantes refletirem sobre a diferença entre as duas afirmações acima e que conduza seus estudantes a observarem que a afirmação ii) diz que se a distância(P , $\overleftrightarrow{OA}$) = distância(P , $\overleftrightarrow{OB}$), então P está na bissetriz de AÔB.

Os exercícios propostos a seguir têm como objetivo justificar a Propriedade Fundamental da Bissetriz.

Exercícios de aprofundamento:

Para os exercícios a seguir, considere um ângulo AÔB e sua respectiva bissetriz.

a) Dado um ponto D sobre a bissetriz de AÔB, será que é sempre verdade que D equidista dos lados do ângulo?

Assim como foi feito no desenvolvimento da Atividade 2.3, vamos considerar os segmentos perpendiculares aos lados do ângulo AÔB que passam pelo ponto D. Sejam E e F os pés das perpendiculares às retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$, baixadas de D respectivamente. Temos, então, que os triângulos OED e OFD são ambos retângulos, em E e F respectivamente. Como estes dois triângulos retângulos têm a hipotenusa (OD) em comum, podemos concluir que eles são congruentes. Note que, como o ponto D, por hipótese, está sobre a bissetriz do ângulo AÔB = EÔF, os ângulos EÔD e DÔF são congruentes e como os triângulos OED e OFD têm um ângulo reto cada um, o 3º ângulo de cada um desses triângulos retângulos fica sempre determinado, uma vez que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º (ver atividade no Anexo 2, para um argumento informal sobre a validade deste fato). É claro que o fato de ter todos os três ângulos internos congruentes ainda não provaria que os triângulos são congruentes, visto que o caso AAA, só prova que os triângulos OED e OFD são semelhantes, no entanto, como já dissemos anteriormente, esses triângulos compartilham o lado OD (hipotenusa de ambos), o que novamente prova que os triângulos OED e OFD são congruentes pelo caso ALA e consequentemente ED = FD. Ou seja, as distâncias do ponto D aos lados do ângulo EÔF = AÔB, são de fato iguais.

Observação: No próximo exercício, usaremos um caso especial de congruência de triângulos, válido somente para triângulos retângulos, a saber: “Se dois triângulos retângulos têm a hipotenusa e um dos catetos respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.” Vejamos o porquê. Considere dois triângulos retângulos (ABC e DEF) com as hipotenusas (AC e DF) e com os catetos (BC e EF), respectivamente congruentes, como mostra a figura a seguir:

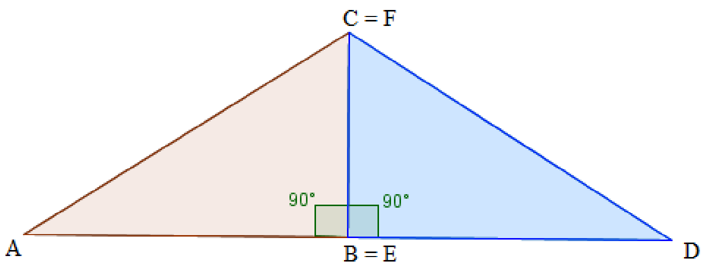


Figura 2.13: Inspirada em MUNIZ NETO, Antonio Caminha [10] (2012, p. 57).

Ao justapor os catetos BC e EF formamos um triângulo isósceles ADC (ou ADF, como quiser), de base AD. Como os ângulos da base de um triângulo isósceles são sempre congruentes, temos que os triângulos retângulos ABC e DEF, têm além do ângulo reto, o outro ângulo da base também congruente.

Logo, como a soma dos ângulos internos é constante, os dois triângulos retângulos têm todos os ângulos internos congruentes. Daí, pelo caso clássico de congruência LAL, temos que os triângulos retângulos são de fato congruentes. Ou seja, se dois triângulos retângulos têm a hipotenusa e um cateto iguais, o outro par de catetos sempre será igual. Chamaremos esse caso de congruência de C.H. (cateto – hipotenusa).

b) Dado um ponto P, tal que as distâncias de P até os lados do ângulo AÔB são iguais, será que é sempre correto afirmar que P pertence à bissetriz de AÔB?

Novamente, seguindo a notação utilizada na Atividade 2.3, vamos considerar o ponto E sobre a reta $\overleftrightarrow{OA}$ e o ponto F sobre a reta $\overleftrightarrow{OB}$, de tal forma que EP = FP e que os pontos E e F são os 'pés' das perpendiculares aos lados do ângulo AÔB que passam por P. Se considerarmos o segmento OP, teremos dois triângulos retângulos: OEP e OFP, os quais têm a hipotenusa (OP) comum e um par de catetos congruentes (EP = FP). Então pelo caso de congruência C.H. os triângulos retângulos são congruentes. Isso equivale a dizer que os ângulos EÔP e FÔP, são congruentes e consequentemente o segmento OP está sobre a bissetriz de EÔF = AÔB.

- **Atividade 2.4:** A reta tangente

Para essa atividade será necessário que a escola disponha de um laboratório de informática ou de um projetor de multimídia e compasso para um dos exercícios.

Esta atividade além de tratar de um importante tema da geometria plana, que também faz parte do conteúdo programático do 8º ano de escolaridade, tem como principal objetivo preparar e facilitar o entendimento de nossa próxima atividade. Ou seja, o estudo da reta tangente a uma circunferência, além de possibilitar o aprendizado de um importante fato geométrico, também nos servirá como pré-requisito para uma futura atividade.

Uma reta *tangente* a uma circunferência é uma reta que intersecta a circunferência num único ponto, chamado de ponto de tangência. Por exemplo, na figura abaixo, a reta *r* é tangente à circunferência com centro no ponto O e raio OT, no ponto T.

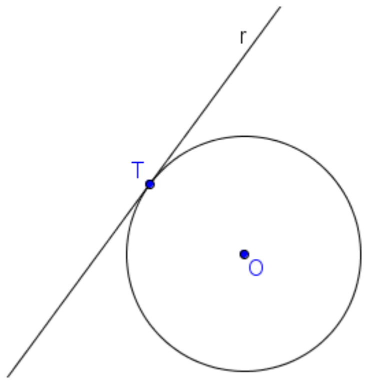


Figura 2.14 – Reta tangente à circunferência

Para estudarmos as propriedades da reta tangente, vamos utilizar novamente o software GeoGebra. Como sempre, para iniciar vamos fechar a *Janela de Álgebra* e ESCONDER EIXOS*,* a fim de melhorar a visualização. Iniciaremos construindo uma circunferência qualquer. Selecione a ferramenta CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS e depois clique e arraste o mouse até obter uma circunferência com o tamanho desejado. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto destacado na circunferência e desmarque a opção *Exibir Objeto,* para ocultar tal ponto, a fim de evitar confusão com outro ponto que criaremos sobre a circunferência. Vamos chamar o centro da circunferência de ponto O, clicando com o botão direito do mouse sobre esse ponto e escolhendo a opção *Renomear*. Feito isso, marque um ponto qualquer sobre a circunferência. Vamos chamá-lo de ponto T (o procedimento para renomear é análogo ao que fizemos para o ponto O). Agora, crie o segmento OT, clicando sobre o triângulo no canto inferior direito da ferramenta RETA e selecionando a opção SEGMENTO, em seguida clique nos pontos O e T. Assim, temos o segmento OT que é o *raio* da circunferência.

Vamos construir uma reta perpendicular ao raio OT, pelo ponto T. Para isso, selecione a ferramenta RETA PERPENDICULAR e clique sequencialmente sobre o segmento OT e sobre o ponto T. A reta criada é uma reta tangente à circunferência no ponto de tangência T, pois a distância desta reta ao centro O da circunferência é igual ao raio OT, assim todos os outros pontos da reta estão a uma distância maior que OT de O, portanto, são externos à circunferência. Chamaremos esta reta de *t*. Marque um ponto sobre a reta t. Vamos nomeá-lo como ponto A, de modo que t = $\overleftrightarrow{AT}$. Embora, já saibamos que a reta t é perpendicular ao raio OT, vamos evidenciar tal fato denotando o ângulo reto, bastando para isso, selecionar a ferramenta ÂNGULO e em seguida, clicar nos pontos A, T e O, nesta ordem.

Para finalizar, vamos definir os segmentos AT e AO. Selecione a ferramenta SEGMENTO e clique nos pontos A e T e posteriormente nos pontos A e O. Para denotar os comprimentos dos segmentos definidos até então, clique sobre o triângulo no canto inferior direito da ferramenta ÂNGULO e selecione a ferramenta DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO. Em seguida, clique sobre os segmentos: OT, AT e AO.

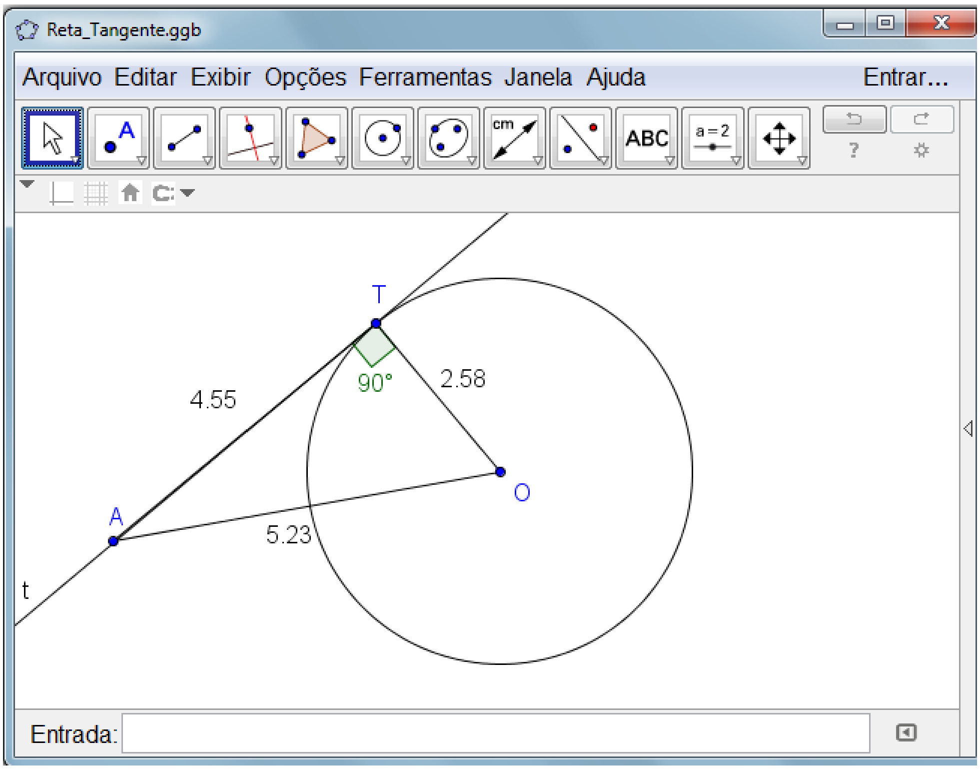


Figura 2.15

Exercícios:

a) Movimente o ponto T pela circunferência. O que ocorre com o ângulo reto?

b) Movimente o ponto A pela reta t. Quando a distância do ponto A ao centro da circunferência (ponto O) é mínima?

c) A figura abaixo mostra um ponto P que dista 2 cm de uma reta s. Utilizando um compasso, descreva o número de pontos na interseção da circunferência dada com a reta da figura em cada uma das situações a seguir.

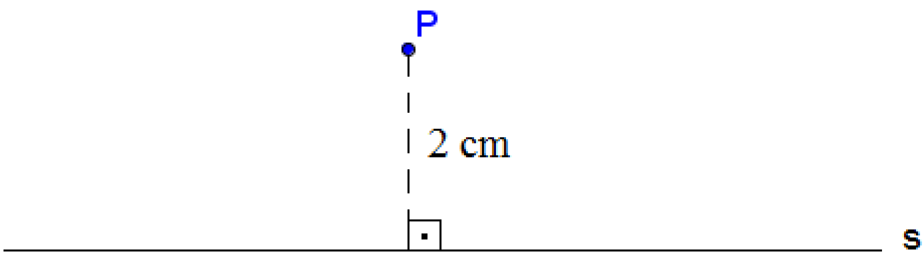


Figura 2.16

c.1) Trace uma circunferência com centro no ponto P e raio maior do que 2 cm.

c.2) Trace uma circunferência com centro no ponto P e raio menor do que 2 cm.

c.3) Trace uma circunferência com centro no ponto P e raio igual a 2 cm.

Cada um dos subitens do exercício c), trata de uma posição relativa entre uma circunferência e uma reta, da seguinte maneira: considerando uma reta *s* e uma circunferência com centro no ponto *O* e raio *r*, sendo *d* a distância do centro *O* à reta *s*, há três possibilidades para a reta *s*, em relação à circunferência:

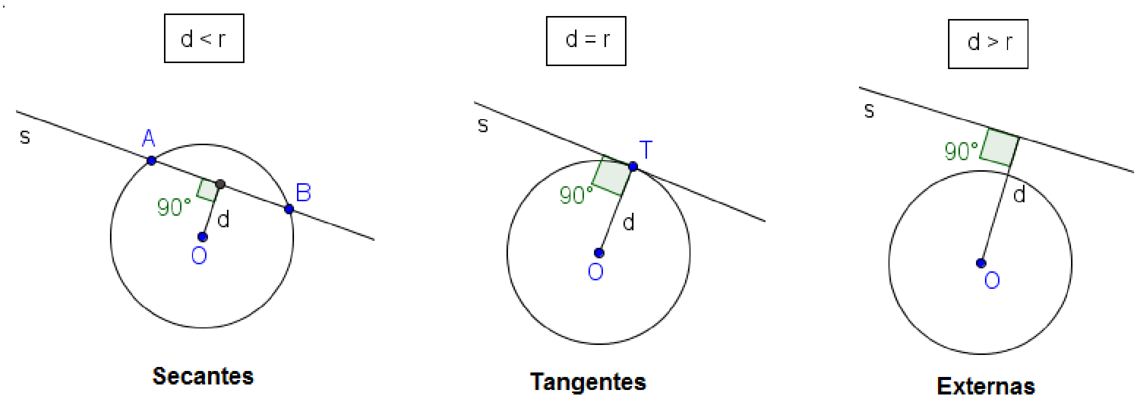


Figura 2.17 – Posições relativas entre uma reta e uma circunferência. Adaptado de DOLCE, Osvaldo [7] (1993, p. 154).

Uma observação interessante é que no primeiro caso, a reta s possui pontos que distam de O menos que o raio da circunferência e pontos que distam mais que o raio. No segundo caso, a reta s possui exatamente um ponto cuja distância a O é o raio e todos os demais estão à uma distância de O, que é maior que o raio da circunferência. Finalmente, no terceiro caso todos os pontos de s distam de O, mais que o raio da circunferência.

- **Atividade 2.5:** Incentro de um triângulo.

Para essa atividade novamente será necessário que a escola disponha de laboratório de informática ou de projetor de multimídia. Para realização dos exercícios propostos serão necessários: régua, compasso e tesoura.

Nesta atividade, mais uma vez faremos uso do software GeoGebra, a fim de estudar o *incentro de um triângulo (*que é ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo) e suas propriedades.

Como de costume, vamos fechar a *Janela de Álgebra* e ESCONDER EIXOS. Construa um triângulo qualquer. Clique na ferramenta POLÍGONO, depois clique em três pontos não colineares e volte a clicar no primeiro ponto a fim de fechar o triângulo. Clique com o botão direito do mouse sobre cada um dos vértices do triângulo e marque a opção *Exibir Rótulo*. Também é possível construir um triângulo utilizando a ferramenta PONTO e depois a ferramenta SEGMENTO para ligar os pontos e fechar o triângulo.

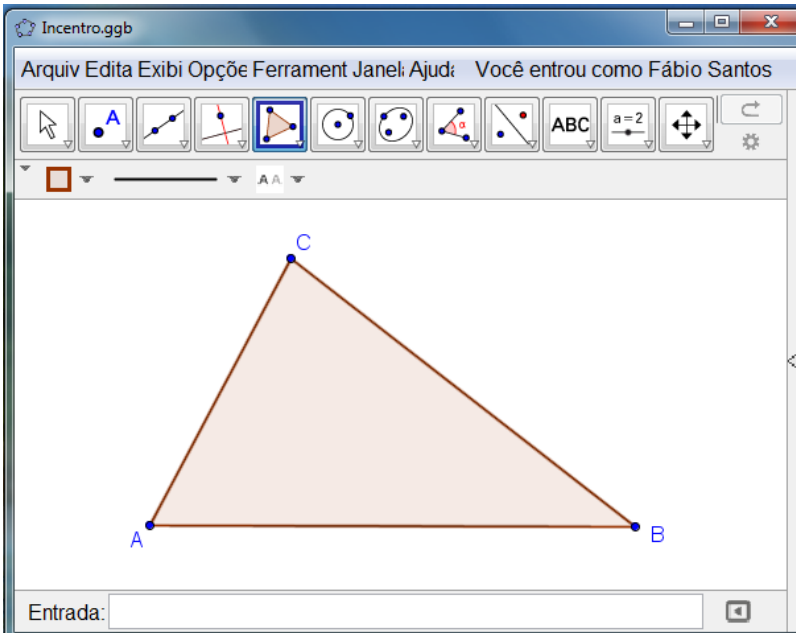


Figura 2.18

Para traçar as bissetrizes dos três ângulos internos do triângulo, basta clicar sobre o triângulo na parte inferior direita da ferramenta RETA

PERPENDICULAR e selecionar a ferramenta BISSETRIZ. Para construir a bissetriz do ângulo BÂC, basta clicar respectivamente nos vértices B, A e C. Para traçar as outras duas bissetrizes, basta proceder de modo análogo clicando em sequência nos vértices A, C e B e depois nos vértices C, B e A.

Note que as três bissetrizes internas se cruzam num mesmo ponto, que é chamado de *incentro do triângulo*. Sendo assim, vamos nomeá-lo com a letra I. Para isso selecione a ferramenta PONTO e mova o cursor com o mouse até o ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo e quando as três estiverem destacadas clique sobre elas. Depois clique sobre esse ponto com o botão direito do mouse e escolha a opção RENOMEAR, na caixa que aparecerá digite a letra I.

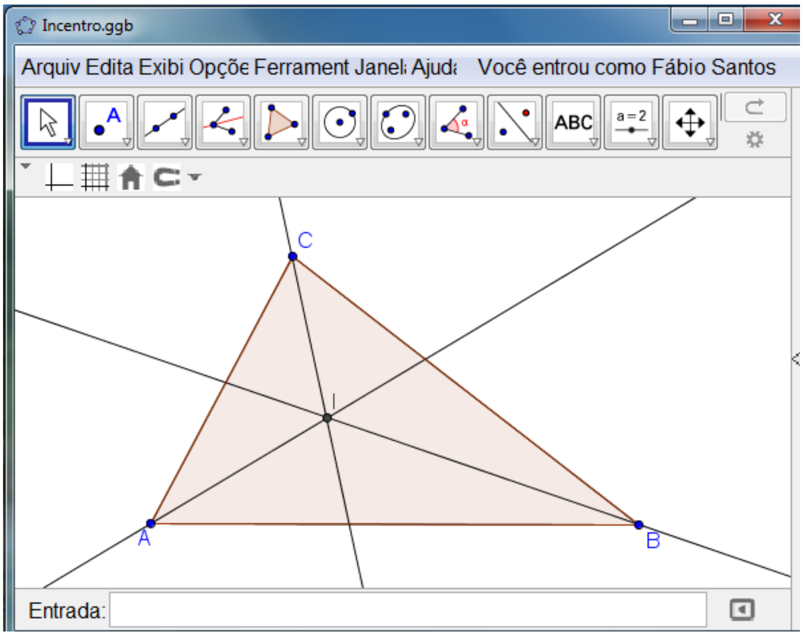


Figura 2.19

Exercícios:

a) Clique na ferramenta MOVER, movimente os vértices do triângulo (os pontos A, B e C) livremente pelo plano e observe que as bissetrizes ainda se intersectam, todas no mesmo ponto. Será que isto é sempre verdade?

A resposta é, sim e você justificará este fato nos exercícios b), c) e d), a seguir.

b) É correto afirmar que o ponto I equidista dos lados AB e AC do triângulo? Justifique a sua resposta. *Dica: utilize os resultados obtidos na Atividade 2.3.*

c) É correto afirmar que o ponto I equidista dos lados AB e BC do triângulo? E dos AC e BC?

d) Utilizando os dois itens anteriores, conclua que o incentro de um triângulo equidista dos três lados do mesmo.

e) Recorte um papel na forma de um triângulo qualquer e em seguida determine o incentro desse triângulo utilizando dobraduras (ver Atividade 2.1). Digamos que a distância do incentro a um lado qualquer do triângulo seja *r*. Qual é a posição relativa da circunferência de centro I e raio *r*, com os lados do triângulo?

<u>Observação ao professor</u>: No item a) dos exercícios, esperamos que os alunos percebam que independentemente da forma do triângulo, as 3 bissetrizes internas sempre se intersectam num mesmo ponto. Sugerimos ao professor, que esclareça aos estudantes que isto não se configura uma prova da existência do incentro, mas uma sugestão, assim como feito na Atividade 2.2 e).

Os itens b) e c), são uma preparação para o resultado mais importante que é cobrado no item d), onde esperamos que os alunos consigam concluir que como o ponto I (incentro do triângulo) pertence à bissetriz do ângulo BÂC, ele equidista dos lados AB e AC. E como o mesmo ponto I também pertence à bissetriz do ângulo ABC, ele está a uma mesma distância dos lados AB e BC. Logo, a distância do ponto I até o lado AC, é igual à distância de I até o lado AB, que por sua vez é igual a distância de I ao lado BC. Então, o incentro de um triângulo, de fato, equidista dos lados desse triângulo.

Novamente, ressaltamos que o aprendizado pode ser mais efetivo caso o estudante seja estimulado a se expressar por escrito e verbalmente com detalhes, de maneira clara e completa.

Finalmente no item e), é muito provável que a maior parte dos alunos utilizem o pé da bissetriz como ponto de tangência da circunferência, pois esse é um erro comum dos estudantes. Cabe, então, ao professor salientar que o ponto de tangência é obtido através da perpendicular ao lado do triângulo que passa pelo incentro. O que se pode obter dobrando um lado sobre ele mesmo até alcançar o incentro.

Retornando à construção com o GeoGebra, se quisermos determinar a distância do incentro até qualquer um dos lados do triângulo (visto que essas distâncias são todas iguais), precisamos obter uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo passando pelo ponto I. Vamos considerar a reta perpendicular ao lado AB que passa pelo ponto I. Para construí-la devemos selecionar a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicar sobre o lado AB e em seguida sobre o ponto I. Na interseção da perpendicular com o lado AB, vamos marcar um ponto D. Basta selecionar a ferramenta PONTO e posicionar o cursor na referida interseção e clicar. Para destacar o ponto D, vamos marcar o segmento ID e esconder a reta perpendicular à AB. Para isso, selecione a ferramenta SEGMENTO, clique no ponto I e em seguida no ponto D. Para esconder a reta perpendicular à AB, basta clicar com o botão direito do mouse sobre está reta (fora do segmento ID) e desmarcar a opção EXIBIR OBJETO.

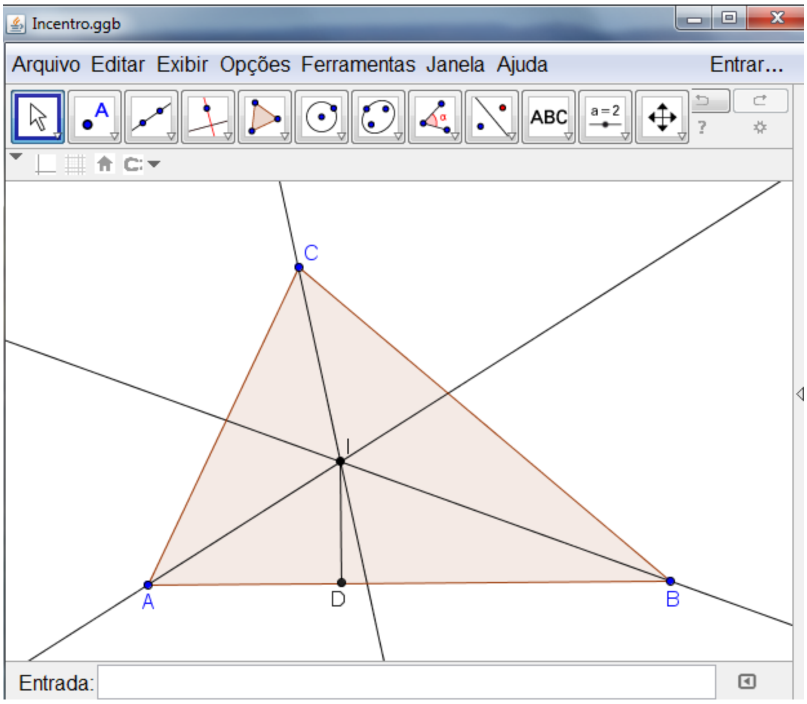


Figura 2.20

Esse ponto D é um dos *pontos de tangência* da *circunferência inscrita* no triângulo, pois ID é a distância de I ao lado AB. Ou seja, o ponto D, é um dos pontos onde a circunferência inscrita no triângulo toca um dos lados do mesmo. Para obter tal circunferência basta selecionar a ferramenta CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS e clicar no ponto I (centro da circunferência) e em seguida no ponto D.

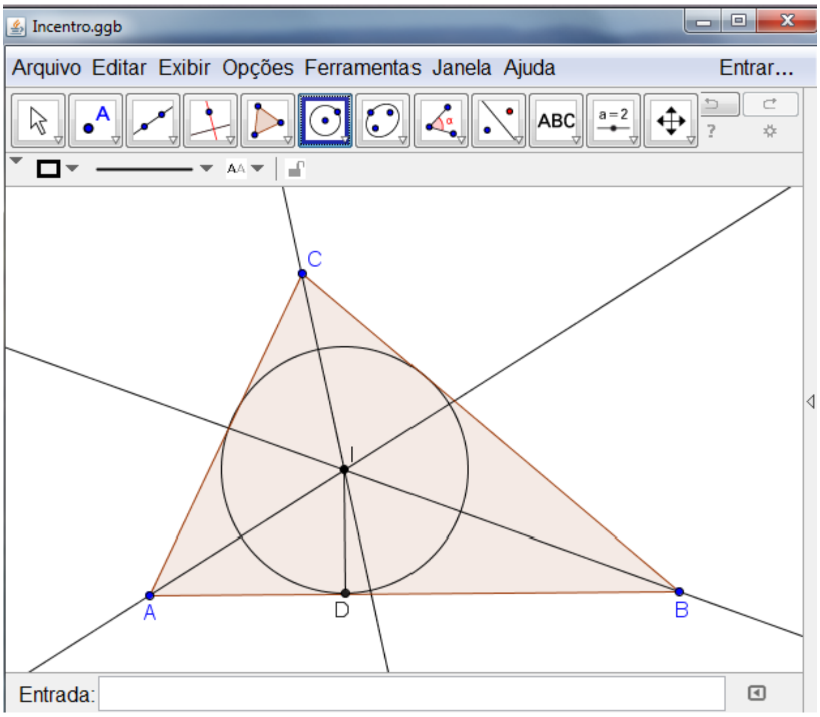


Figura 2.21

Se clicarmos na ferramenta MOVER e movimentarmos os vértices do triângulo, veremos que mesmo mudando a forma do triângulo, a circunferência está sempre tangenciando seus lados. Por isso dizemos que a circunferência está *inscrita* (por dentro) no triângulo.

Dessa forma, podemos concluir que o incentro (ponto de interseção das bissetrizes internas do triângulo) é o centro da circunferência inscrita neste triângulo.

Exercício (continuação):

f) Determine os outros dois pontos de tangência da circunferência inscrita no triângulo, procedendo de modo análogo ao que foi feito para determinar o ponto D, nesta atividade.

- **Atividade 2.6:** <u>Incentro de polígonos.</u>

Materiais necessários: papel, régua e compasso.

O objetivo desta atividade é fazer com que os alunos sejam capazes de determinar uma condição necessária para que um polígono qualquer seja *circunscritível.* Isto é, vamos obter uma propriedade de todos os polígonos *circunscritíveis*.

Na atividade anterior, vimos que todo triângulo é *circunscritível*, ou seja, é sempre possível inscrever uma circunferência num triângulo. O que também pode ser interpretado da seguinte maneira: dado um triângulo, é sempre possível determinar uma circunferência que tangencie os seus três lados simultaneamente. Como já sabemos, o centro da circunferência é o incentro (ponto de encontro das bissetrizes internas) do triângulo. Mas, será que todo polígono é circunscritível? Isto é, dado um polígono qualquer, é correto afirmar que existe uma circunferência tangente a todos os lados? Nessa atividade vamos responder não só esta pergunta, mas também encontrar uma condição necessária e suficiente para que exista uma tal circunferência.

Se pensarmos num retângulo (não quadrado), por exemplo, é fácil perceber que nem todo quadrilátero pode estar circunscrito a uma circunferência, como mostra a figura abaixo. Nesta figura, o centro da circunferência foi obtido na interseção das diagonais do retângulo. Note que a circunferência até tangencia dois lados (AB e CD) do retângulo ABCD, mas não tangencia os outros dois (DA e BC). Como só podemos afirmar que um polígono é circunscritível quando todos os seus lados (sem exceção) tangenciam uma mesma circunferência (o que equivale a dizer que a circunferência está inscrita no polígono), o retângulo não quadrado claramente não é circunscritível.

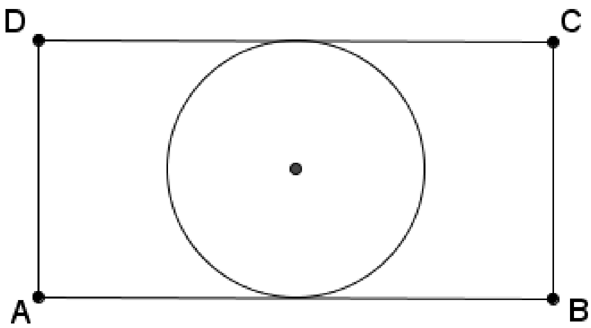


Figura 2.22

No entanto, se pensarmos num quadrado e novamente traçarmos uma circunferência cujo centro também seja dado pela interseção das diagonais do quadrado, veremos que este quadrilátero é circunscritível, como mostra a figura abaixo.

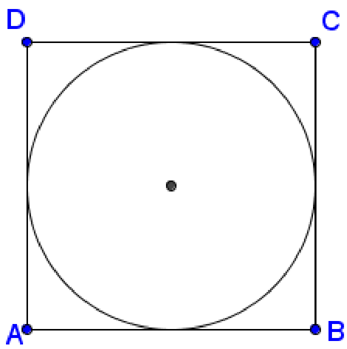


Figura 2.23

Isso nos mostra que um quadrilátero pode, ou não, estar circunscrito à uma circunferência. O que nos leva a uma outra pergunta: O que é necessário para que um quadrilátero (ou qualquer outro polígono) seja circunscritível?

Exercícios:

a) Numa folha de papel, construa uma circunferência qualquer, em seguida trace segmentos tangentes (com a melhor aproximação possível) formando um polígono circunscrito à circunferência com pelo menos quatro lados. Use dobraduras para construir as bissetrizes internas (basta sobrepor os lados adjacentes dois a dois).

b) O que você pode afirmar sobre a interseção das bissetrizes do polígono no item anterior? Com base na sua resposta, apresente uma condição necessária para que um polígono seja circunscritível, isto é, uma propriedade dos polígonos circunscritíveis.

c) Justifique o item anterior utilizando a Propriedade Fundamental da Bissetriz (ver Atividade 2.3).

d) Observe o pentágono dado abaixo, onde estão traçadas as bissetrizes internas de cada ângulo do mesmo. Esse pentágono é circunscritível, construa (utilizando de preferência régua e compasso) a circunferência inscrita nesse pentágono.

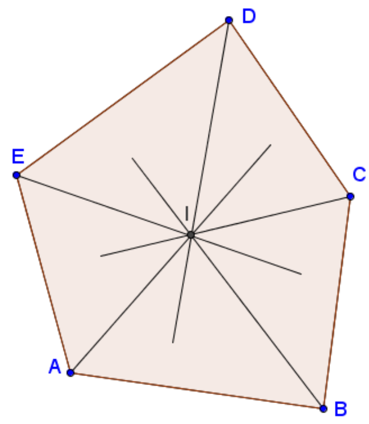


Figura 2.24

<u>Observação ao professor</u>: O objetivo central desta atividade é fazer com que os alunos compreendam que uma condição necessária para que um polígono seja circunscritível, é que as bissetrizes internas se intersectem num mesmo ponto, isto é, em todo polígono circunscritível, as bissetrizes se intersectam num só ponto. Na verdade, também vale a recíproca, ou seja, se todas as bissetrizes de um polígono se intersectam em um só ponto, então este polígono é circunscritível, mas a atividade acima não trata dessa condição.

No item b) a ideia central é mostrar que se um ponto pertence à todas as bissetrizes internas de um polígono, então ele equidista de todos os lados do polígono. Por exemplo, no caso do pentágono ABCDE, vamos chamar de I o ponto de interseção das bissetrizes internas. Como o ponto I pertence à bissetriz do ângulo DÊA, ele equidista dos lados DE e EA. E como o ponto I também pertence à bissetriz EÂB, ele equidista dos lados EA e AB. Logo, por transitividade, já sabemos que a distância do ponto I para os lados DE, EA e AB são iguais. Seguindo esse procedimento para os demais ângulos do pentágono, concluiremos que o ponto I equidista de todos os lados do pentágono e é chamado de *incentro do polígono.*

O item d) requer que o aluno saiba construir uma perpendicular a um segmento dado, passando por um ponto também dado. Tal construção pode ser vista no Anexo 3. Mas a utilização de dobraduras pode bastar para os objetivos do exercício e economizar um pouco de tempo.

SEÇÃO 3 – CEVIANAS E PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

Esta terceira e última seção tem como objetivo completar o trabalho até aqui desenvolvido, visto que nosso foco inicial foi estudar a mediatriz e a bissetriz de uma maneira geral e não só com relação às suas aplicações nos triângulos. No entanto, um dos principais assuntos de geometria estudado no 8º ano de escolaridade são as linhas e pontos notáveis dos triângulos.

Já vimos nas seções anteriores dois, dos quatro pontos notáveis mais famosos dos triângulos: o circuncentro, que é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados e o incentro, que é o ponto de interseção das bissetrizes internas. Dessa forma, falta estudar o ortocentro e o baricentro de um triângulo.

- **Atividade 3.1:** <u>Ortocentro de um triângulo.</u>

Materiais necessários: papel, tesoura, par de esquadros, lápis, e borracha.

Inicialmente construa no papel um *triângulo acutângulo* (triângulo com todos os ângulos internos agudos, ou seja, menores do que um ângulo reto) e recorte-o. Através de dobraduras, vamos obter às alturas relativas a cada um dos lados desse triângulo. Lembrando que cada altura é uma *ceviana.* Cevianas, são segmentos de reta com um extremo num vértice de um triângulo e outro no lado oposto ao vértice. As bissetrizes internas e as *medianas* (que veremos a seguir), juntamente com as alturas, são as cevianas mais importantes de um triângulo. A altura é a ceviana que é perpendicular ao lado do triângulo, isto é, cada altura de um triângulo corresponde à menor distância entre o vértice e o lado oposto a ele.

Para marcar uma das alturas do triângulo recortado, deve-se ter o cuidado de dobrar o papel fazendo com que o lado oposto ao vértice que delimita a altura seja dobrado sobre ele mesmo. Assim:

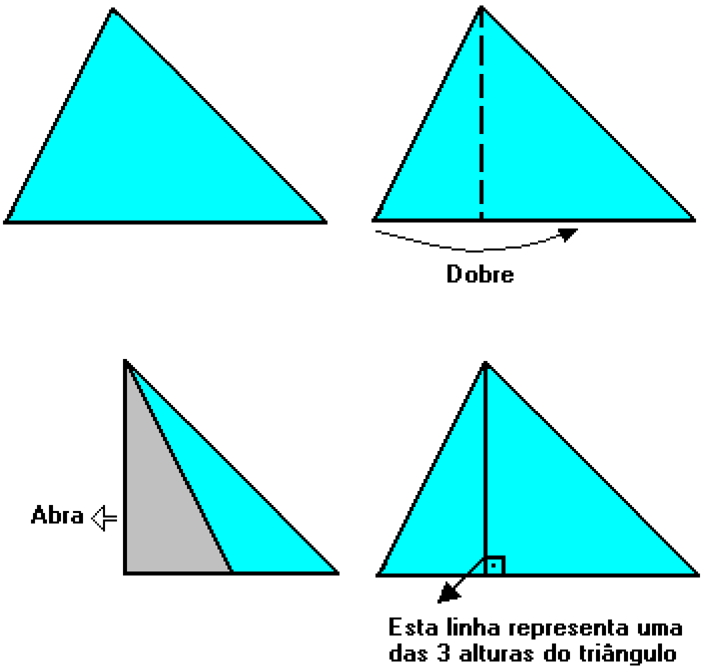


Figura 3.1 – Dobradura para obter uma das alturas de um triângulo.

Repita este procedimento para os outros dois lados do triângulo e observe o que acontece.

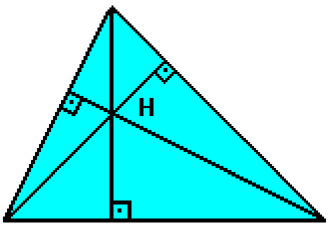


Figura 3.2 – Interseção das alturas do triângulo.
Adaptado de BIGODE, Antonio José Lopes [4] (2012, 8º ano, p. 126).

Note que as três alturas do triângulo se intersectam num mesmo ponto (na figura acima, representado como ponto H). O ponto H é chamado de *ortocentro do triângulo*, ou seja, o *ortocentro* é o ponto de interseção das alturas de um triângulo.

Exercícios:

a) Construa um triângulo retângulo, com o auxílio de um dos esquadros (para fazer o ângulo reto), recorte-o e através de dobraduras determine o ortocentro desse triângulo. O que você observou? Discuta o resultado obtido em grupo com seus colegas.

b) Construa um *triângulo obtusângulo* (triângulo com um dos ângulos maiores do que 90º) e, sem recortá-lo do papel, faça as dobraduras a fim de obter novamente o ortocentro do triângulo. O que você observou dessa vez? Discuta o resultado obtido com seus colegas.

Observação ao professor: apesar da atividade com dobraduras nos fazer intuir o fato verdadeiro de que as três alturas de um triângulo se intersectam num único ponto, optamos por não justificar tal fato neste texto.

Depois que os alunos realizarem as atividades e discutirem os resultados obtidos em grupo, é importante sistematizar o que foi observado por eles.

Por exemplo, no item a) esperamos que os alunos observem que o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto, pois dois lados do triângulo retângulo (seus catetos) são também alturas e por isso a única dobradura a ser feita nesse caso é da altura relativa ao maior lado (hipotenusa).

Já no item b) esperamos uma maior dificuldade por parte dos alunos para determinar o ortocentro, dado que num triângulo obtusângulo o mesmo se encontra fora do triângulo, por isso talvez seja importante alertar os alunos sobre o prolongamento de um dos lados do triângulo.

Exercícios adaptados de BIANCHINI, Edwaldo [3] (2011, 8º ano, p. 147).

- **Atividade 3.2:** Baricentro de um triângulo.

Materiais necessários: papel, tesoura, régua, lápis, borracha e cartolina, ou papelão.

Nesta atividade, vamos determinar a posição do *baricentro* (centro de gravidade) de um triângulo.

Construa um triângulo qualquer e recorte-o do papel. Vamos utilizar dobraduras para marcar as *medianas do triângulo.* A *mediana* é a ceviana que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto. Dessa forma, devemos inicialmente marcar os pontos médios de cada lado do triângulo. Para isso basta sobrepor os vértices do triângulo dois a dois, tomando o cuidado de dobrar apenas no ponto médio de cada lado.

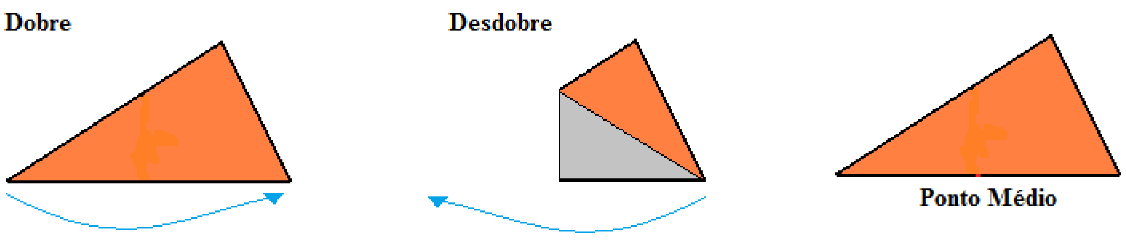


Figura 3.3 – Dobradura para obter o ponto médio do lado de um triângulo.

Sabendo a posição do ponto médio basta fazer uma dobra que ligue-o ao vértice oposto.

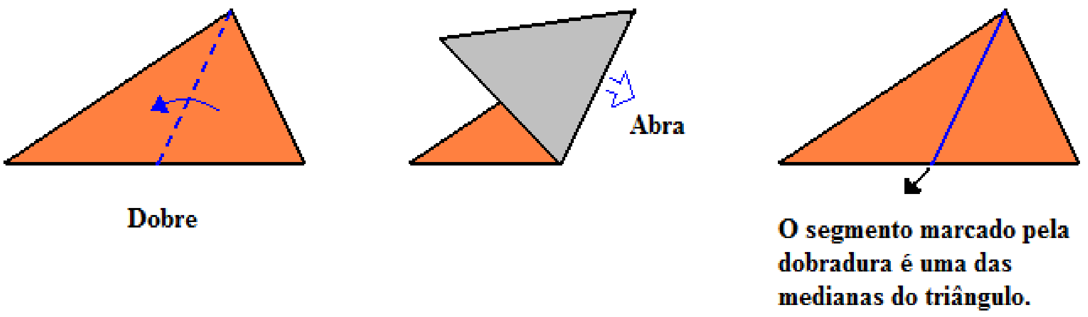


Figura 3.4 – Dobradura para obter uma mediana de um triângulo.

Repetindo esse procedimento nos outros dois lados do triângulo, veremos que as três medianas do triângulo se intersectam num mesmo ponto. Esse ponto é chamado de *baricentro do triângulo.* Na figura abaixo, o *baricentro do triângulo* está representado pelo ponto G.

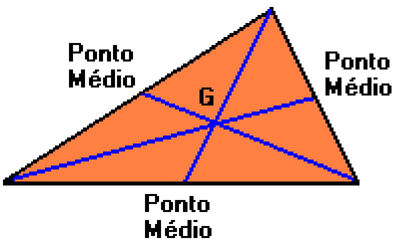


Figura 3.5 – Encontro das medianas de um triângulo.

Para entender por que o ponto de interseção das medianas de um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície, recorremos à LIMA, E. L. [8] (2006, p. 286 - 287):

"Imagine um triângulo ABC recortado de uma chapa de madeira homogênea e pendurado pelo vértice A. Por que a reta vertical que passa por A, passa também no ponto médio de BC?

Para responder, imagine o triângulo ABC cortado por fatias muito finas. Cada fatia é "quase" um segmento e, portanto só fica equilibrada se pendurada pelo seu ponto médio. Logo, a reta vertical que contém A passa pelos pontos médios de todas as fatias e, em particular, pelo ponto médio de BC.

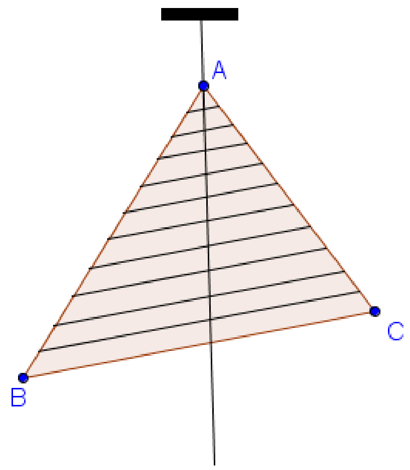


Figura 3.6

Ora, se o centro de gravidade da superfície de um triângulo pertence a uma mediana, então (repetindo-se a experiência) ele é o ponto de interseção das três medianas. Concluímos então que o ponto de interseção das medianas de um triângulo é o centro de gravidade de sua superfície."

Exercícios:

a) Na atividade anterior, vimos que dependendo do tipo de triângulo (acutângulo, retângulo, ou obtusângulo) o ortocentro pode estar no interior, sobre um vértice, ou exterior ao triângulo. Isso também ocorre com o baricentro? Discuta em grupo as respostas dadas.

b) Em cada uma das medianas, meça a parte que fica entre o vértice e o baricentro e compare com a parte que fica entre o baricentro e o ponto médio do lado oposto ao vértice considerado. O que você observou? Discuta em grupo os resultados obtidos pelos seus colegas de classe.

c) Recorte um triângulo de uma cartolina, ou qualquer outro material rígido (como papelão, por exemplo) e trace as medianas desse triângulo a fim de obter o seu baricentro. Depois faça um pequeno furo sobre o baricentro do triângulo, passe um barbante pelo furo e dê um nó na ponta do barbante para que o barbante não mais passe pelo furo por aquele lado. Finalmente, segure o barbante pela ponta oposta à que foi dado o nó. O que você observou?

Exercício adaptado de ANDRINI, Álvaro [1] (2012, 8º ano, p.199) e *DANTE, Luiz Roberto [6] (2012, 8º ano, p. 99).*

- **Atividade 3.3:** <u>Pontos notáveis no triângulo equilátero</u>

Para essa atividade será necessário que a escola disponha de laboratório de informática ou de projetor de multimídia.

O objetivo desta última atividade é aplicar o conhecimento adquirido até aqui sobre os pontos notáveis de um triângulo no caso especial do triângulo equilátero. Para isso, vamos utilizar o GeoGebra e suas funcionalidades para construir um triângulo equilátero e os seus quatro pontos notáveis, a saber: o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro.

Vamos começar construindo um triângulo equilátero.

> <u>Observação ao professor</u>: embora o GeoGebra tenha uma ferramenta que permita a construção de polígonos regulares de forma imediata, acreditamos que seja mais interessante para o aluno, sobretudo do Ensino Fundamental, que ele mesmo faça a construção do triângulo equilátero passo a passo. Caso o estudante apresente dificuldade, segue abaixo a construção.

Na *Janela de Visualização* do GeoGebra, selecione a ferramenta PONTO e marque dois pontos A e B. Em seguida, selecione a ferramenta SEGMENTO e clique sobre os pontos A e B, a fim de criar o segmento AB, que será um dos lados do triângulo equilátero. Para determinar o terceiro vértice do triângulo equilátero, selecione a ferramenta CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DE SEUS PONTOS, clique no ponto A e em seguida no ponto B, depois faça o procedimento contrário, clicando em B e logo depois em A. Teremos, então, duas circunferências que se intersectam em dois pontos. Logo, qualquer desses dois pontos de interseção pode ser considerado como o vértice C do triângulo equilátero. como ponto C, o ponto de interseção acima do lado AB. Mais uma vez, selecione a ferramenta SEGMENTO e construa os segmentos AC e BC fechando, assim, o triângulo equilátero.

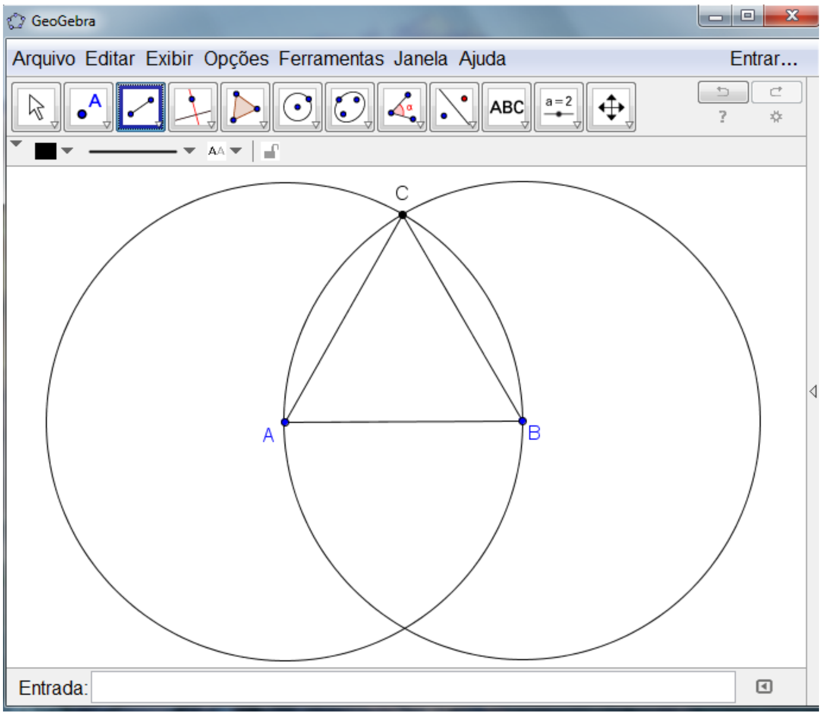


Figura 3.7 – Construção de um triângulo equilátero no GeoGebra.

Para valorizar a figura do triângulo equilátero, vamos esconder as construções auxiliares, clicando com o botão direito do mouse sobre cada uma das circunferências e desmarcando a opção *Exibir Objeto.*

Exercícios preliminares:

a) Selecione a ferramenta DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO e clique sobre os três lados do triângulo. Em seguida, selecione a ferramenta MOVER e clique e arraste livremente os vértices A e B. Descreva o que você observou com relação às medidas dos lados do triângulo.

b) De acordo com a construção geométrica feita para obter o vértice C, explique por que o triângulo ABC é equilátero.

Agora vamos determinar os pontos notáveis do triângulo equilátero, começando pelo incentro. Como já vimos anteriormente, o incentro é o ponto de interseção das bissetrizes internas de um triângulo. Então, selecione a ferramenta BISSETRIZ e clique nos vértices A, B e C (nesta sequência), assim teremos a bissetriz que passa pelo vértice B. Para obter as outras duas bissetrizes, basta clicar sequencialmente nos vértices B, A e C e finalmente A, C e B. Como já sabíamos, as três bissetrizes internas concorrem num mesmo ponto. Selecione a ferramenta PONTO e clique sobre o incentro do triângulo. Vamos chamar esse ponto de ponto P. Para isso, clique sobre ele com o botão direito do mouse e selecione a opção *Renomear.*

Na sequência, vamos determinar o circuncentro do triângulo equilátero, no entanto, para facilitar a visualização da propriedade que desejamos que seja observada, vamos esconder as três bissetrizes internas do triângulo deixando à mostra apenas o ponto P. Para isto, basta clicar com o botão direito do mouse sobre cada uma das bissetrizes e desmarcar a opção *Exibir Objeto*.

Para determinar o circuncentro, que como já vimos, é a interseção das mediatrizes dos lados do triângulo, selecione a ferramenta MEDIATRIZ. Há duas maneiras de traçar a mediatriz: ou clica-se diretamente sobre o segmento (lado do triângulo), ou clica-se em sequência nos pontos extremos do segmento (vértices do triângulo). Escolha um desses métodos e trace as três mediatrizes dos lados do triângulo. Note que as três mediatrizes também se intersectam no ponto P (dica: selecione a ferramenta MOVER e arraste os vértices A e B, a fim de observar melhor esse fato). Ou seja, num triângulo equilátero, as bissetrizes internas e as mediatrizes dos lados coincidem. Isto equivale a dizer que, num triângulo equilátero, o incentro e o circuncentro são o mesmo ponto.

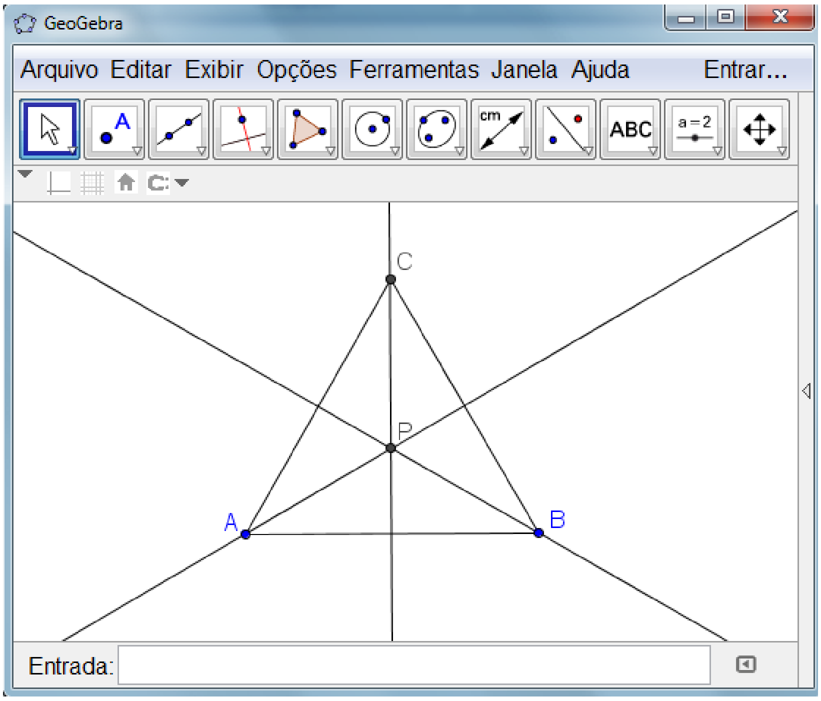


Figura 3.8 – Triângulo Equilátero.

Mas, o que ocorre com relação ao ortocentro e ao baricentro? Será que eles também coincidem no ponto P? Nos exercícios a seguir, você poderá responder essas perguntas.

Exercícios (continuação):

c) Tendo como base a figura anterior, marque os “pés das mediatrizes” dos lados (pontos de interseção das mediatrizes com seus respectivos lados). De tal forma que os pontos D, E e F, sejam os pés das mediatrizes dos lados AB, BC e CA, respectivamente.

d) Utilizando a definição de mediatriz (estudada na seção 1), explique por que os segmentos AE, BF e CD são as alturas do triângulo ABC.

e) Utilizando a mesma definição de mediatriz, explique por que os segmentos AE, BF e CD são também medianas do triângulo ABC.

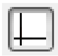
f) De acordo com o que foi desenvolvido nessa atividade e no que você fez nos itens d) e e) anteriores, que conclusão podemos tirar a respeito dos pontos notáveis de um triângulo equilátero?

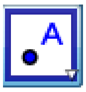
Atividade adaptada de ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de [2] (2010, p.116).

ANEXOS:

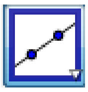
ANEXO 1

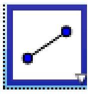
Ícones das ferramentas utilizadas no GeoGebra:

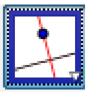
 ESCONDER EIXOS

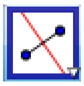


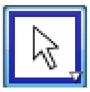
PONTO

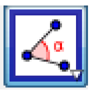
 RETA

 SEGMENTO

 RETA PERPENDICULAR

 MEDIATRIZ

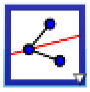
 MOVER

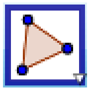


ÂNGULO

DISTÂNCIA, COMPRIMENTO OU PERÍMETRO

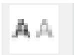
 CÍRCULO DADOS CENTRO E UM DOS SEUS PONTOS

 BISSETRIZ

 POLÍGONO

Ícones das opções de formatação utilizadas no GeoGebra:

 *Exibir Objeto*

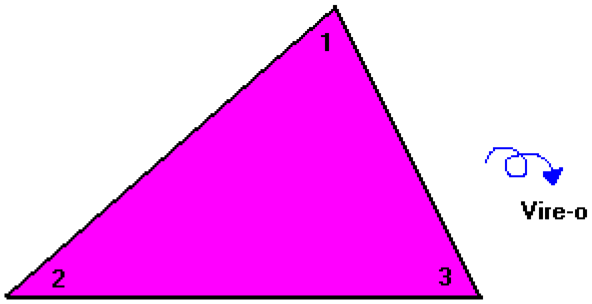
 *Exibir Rótulo*

 *Renomear*

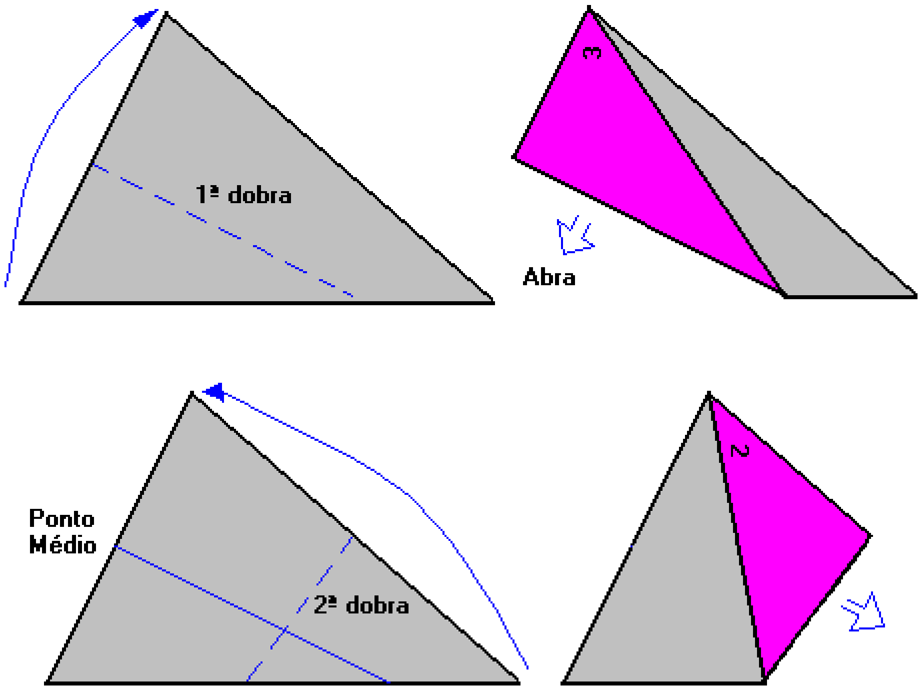
ANEXO 2

<u>Atividade para intuir a soma dos ângulos internos de um triângulo.</u>

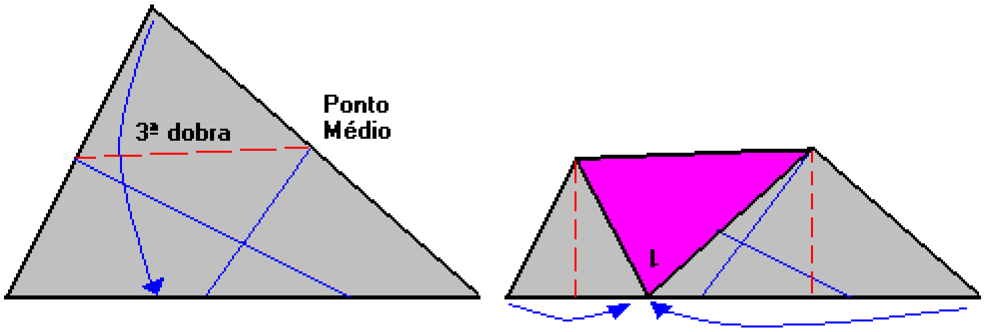
Recorte um triângulo qualquer e numere seus ângulos.



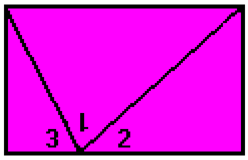
Depois, dobrando-o, marque os pontos médios dos dois lados menores.



Em seguida, dobre na linha que une os pontos médios dos lados menores do triângulo.

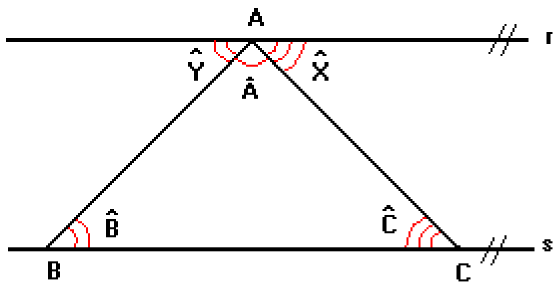


E, fazendo os dois outros vértices do triângulo coincidirem com o 1°, teremos o seguinte:



Os 3 ângulos do triângulo ficaram reunidos ao redor de um mesmo ponto. Ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo equivale à uma meia volta (180º).

Claro que isto não consiste em uma prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, por se tratar de um argumento visual. Contudo ela reflete bem a demonstração clássica usando a igualdade dos alternos internos em retas paralelas cortadas por transversais.



$$r//s \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{Y} \\ \hat{C} = \hat{X} \end{cases}$$

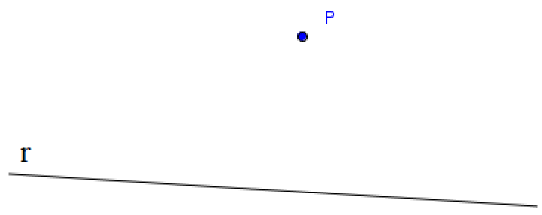
$$\hat{A} + \hat{Y} + \hat{X} = 180° \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

Adaptado de MORGADO, Augusto César [9] (1989, p. 42).

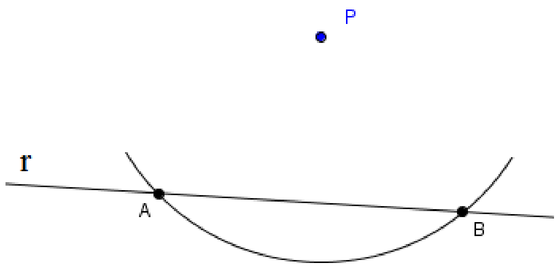
ANEXO 3

<u>Atividade para traçar a reta perpendicular à uma reta dada, passando por um determinado ponto.</u>

Sejam P um ponto qualquer e *r* uma reta que não contém P. Para traçar uma reta perpendicular à *r*, passando por P, basta fazer o seguinte:

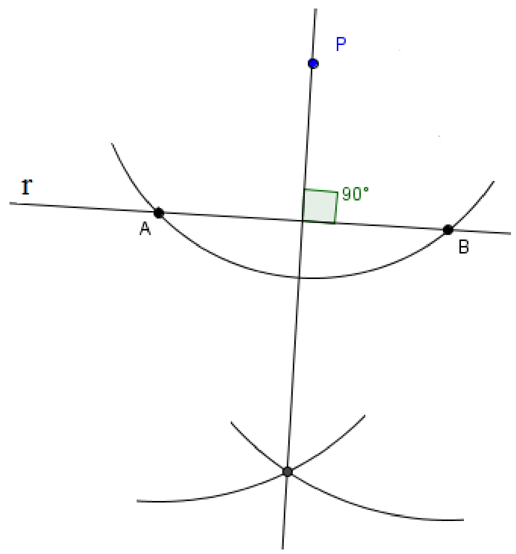


1º. Fazer uma abertura no compasso que seja maior do que a distância entre P e *r.* Com a ponta seca do compasso em P, traçamos um arco de circunferência que intersecte a reta dada em dois pontos (digamos A e B);



2º. Traçar a mediatriz de AB, ou seja, com a ponta seca do compasso sobre o ponto A, traçamos um arco de circunferência com medida de raio igual a AB (somente na direção oposta à P, pois a mediatriz passará por P). Depois, com centro em B e mesmo raio, traçamos outro arco de circunferência de modo que este intersecte o primeiro arco;

3º. No ponto de interseção dos arcos de circunferência temos o ponto que ligado ao ponto P, nos dá a perpendicular desejada.


P
r
90°
A
B

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Este trabalho foi elaborado como uma proposta de atividades educacionais voltadas principalmente para o oitavo ano de escolaridade básica. No entanto, não verificamos a aplicação dessa sequência didática em sala de aula, mas esperamos que num futuro próximo possamos avaliar os resultados efetivos da aplicação das atividades aqui propostas, em turmas regulares.

Esperamos que essa modesta proposta possa de alguma maneira contribuir para o desenvolvimento do ensino de geometria na escola básica, fazendo com que deixe de ser apenas coadjuvante e passe a desempenhar um papel à altura de sua importância nos currículos de matemática.

Para isso, contamos com o apoio dos colegas, professores de matemática, no sentido de se apropriar desse trabalho, aplicando-o e aprimorando-o, a fim de torná-lo mais eficaz na busca de seus objetivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

[1] ANDRINI, Álvaro, Vasconcellos, Maria José: Praticando Matemática (obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano) – 3ª ed. Renovada – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

[2] ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de, Nóbriga, Jorge Cássio Costa: Aprendendo matemática com o geogebra. - São Paulo: Editora Exato, 2010.

[3] BIANCHINI, Edwaldo: Matemática: Bianchini (obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano) – 7ª ed. – São Paulo: Moderna, 2011.

[4] BIGODE, Antonio José Lopes: Projeto Velear: Matemática (obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano) – 1ª ed. – São Paulo: Scipione, 2012.

[5] Brasil. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental (3º e 4º ciclos) – Brasília: MEC / SEF, 1998.

[6] DANTE, Luiz Roberto: Projeto Teláris: Matemática (obra em 4 v. para alunos do 6º ao 9º ano) - 1ª ed. – São Paulo: Ática, 2012.

[7] DOLCE, Osvaldo, Pompeo, José Nicolau: Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 9 – 7ª Ed. – São Paulo: Atual, 1993.

[8] LIMA, Elon Lages. Carvalho, Paulo Cezar Pinto. Wagner, Eduardo. Morgado, Augusto César. A matemática do ensino médio – volume 2 – 6ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] MORGADO, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel: Geometria I. 4. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

[10] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana. 1ª Ed – Rio de Janeiro: SBM, 2012.