

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fita de Moebius: Desenrolar de matemática superior no Ensino Médio

Roberto Cesar Cucharero Peregrina

Rio de Janeiro

2015

Roberto Cesar Cucharero Peregrina

Fita de Moebius: Desenrolar de matemática superior no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Fabio Simas
Doutor em Matemática - UNIRIO

Rio de Janeiro

2015



Este trabalho está licenciado sob uma Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional. Para ver uma cópia desta licença, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

P435 Peregrina, Roberto Cesar Cucharero.
Fita de Moebius : desenrolar de matemática superior no ensino médio /
Roberto Cesar Cucharero Peregrina, 2015.
31 f. ; 30 cm

Orientador: Fabio Simas.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade
Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

1. Geometria. 2. Fita de Moebius. 3. Superfícies (Matemática).
4. Matemática – Instrução e estudos. 5. Orientabilidade. I. Simas, Fábio.
II. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Centro de Ciências
Exatas e Tecnologia. Curso de Mestrado Profissional em Matemática.
III. Título.

CDD – 516

ROBERTO CESAR CUCHARERO PEREGRINA

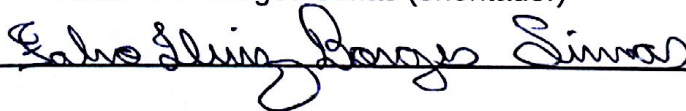
Fita de Moebius: Desenrolar de matemática superior no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

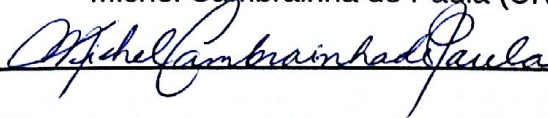
Aprovada em 11 de dezembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA:

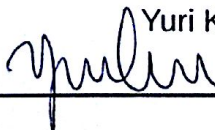
Fabio Luiz Borges Simas (orientador)



Michel Cambrinha de Paula (UNIRIO)



Yuri Ki (UFF)



Dedicatória

A cada momento de luta, noites
sem dormir , alegrias, exaltações e
pensamentos, ideias e contradições que
se amontoaram no formar de tal obra.

RESUMO

Esta sequência didática apresenta de maneira informal o conceito de superfície regular no espaço euclidiano tridimensional como uma extensão do conteúdo de geometria espacial estudado na escola, traz diversos exemplos visuais ilustrando este objeto e, a seguir, define precisamente o conceito de orientabilidade para estas superfícies com campos de vetores normais à mesma. A ênfase é dada para a Faixa de Moebius em oposição ao cilindro sobre os quais são desenvolvidas quatro atividades que vão desde a construção utilizando uma fita de papel até a representação de um campo de vetores unitários e perpendiculares às superfícies com alfinetes para a visualização da descontinuidade do campo na Faixa de Moebius.

Palavras-chave: Fita de Moebius, Superfície Regular, Orientabilidade.

ABSTRACT

This teaching sequence has informally the concept of regular surface in three-dimensional Euclidean space as an extension of spatial geometry content studied in school, adding many visual examples illustrating this object, following precisely defines the concept of orientability for these surfaces normal vector fields to it. Emphasis is given to the Moebius Strip in opposition to the cylinder on which are developed four activities ranging from the construction using a paper tape to the representation of a unit vector field and perpendicular to the surfaces with pins to discontinue preview the field in the Moebius Strip.

Keyword: Moebius strip, Regular Surfaces, Orientability.

Sumário

| | |
|---|----|
| INTRODUÇÃO..... | 10 |
| 1. SUPERFÍCIES REGULARES | 11 |
| 2 ORIENTABILIDADE | 15 |
| Atividade 1: Construção da Faixa de Moebius e de um Cilindro | 15 |
| Atividade 2: Colorindo os lados do Cilindro e da Fita de Moebius | 16 |
| Atividade 3: Demarcando campo de vetores com alfinete | 21 |
| Teorema de Poincaré (da esfera peluda)..... | 23 |
| Atividade 4: Cortando a fita de Moebius pela metade e a um terço das bordas..... | 26 |
| CONCLUSÃO | 29 |
| BIBLIOGRAFIA | 30 |

Introdução

A geometria que se estuda na Educação Básica brasileira é aquela axiomatizada por Euclides há mais de dois mil anos. Sendo anterior a Galileu e Copérnico, desenvolve-se ainda sobre um mundo plano. Para o estudante fica a ideia de que a disciplina está pronta, é imutável e pouco atual. Contudo este ramo da Matemática vem sendo construído e novas descobertas acontecem com frequência até os dias de hoje. Deste modo há um distanciamento de 2 mil anos entre a geometria da escola e a que se pesquisa atualmente.

Apresentamos aqui uma discussão informal sobre orientabilidade de superfícies regulares no espaço euclidiano tridimensional para ser desenvolvida com estudantes do Ensino Médio ao final do estudo de geometria espacial em aproximadamente 5 horas de aula. Pecaremos deliberadamente na conceituação de superfície regular em prol da intuição pois a definição precisa depende de elementos de Cálculo Vetorial, geralmente estudados apenas no segundo ano dos cursos de matemática e engenharia.

O primeiro capítulo vale-se de figuras e analogias para construir o conceito (informal) de superfície regular. O Capítulo 2 trata da orientabilidade de superfícies regulares através de quatro atividades. Nas primeiras o estudante deve construir e pintar a Faixa de Moebius e o cilindro para desenvolver a noção de lado de uma superfície. Depois definimos precisamente superfície orientável utilizando campos de vetores. O conceito é ilustrado em exemplos e na Atividade 3 usamos alfinetes para representar campos de vetores normais às superfícies. Aproveitamos a noção de campo de vetores para apresentar o enunciado do Teorema de Poincarè (Teorema da Esfera Peluda) e também alguns exemplos visuais. Na última atividade discutimos um fato curioso: cortando a Faixa de Moebius de duas maneiras diferentes obtendo novas superfícies que podem ou não ser orientáveis dependendo da maneira que o corte for feito.

Este trabalho deve contribuir para uma gradual modernização dos conteúdos trabalhados na Educação Básica e também possibilitar que os estudantes vejam a Matemática como uma ciência em construção. De modo mais imediato, serve para apresentar um desdobramento da geometria estudada na escola e dar um pouco o tom do que se estuda em matemática hoje em dia.

1. Superfícies Regulares

Nesta seção esperamos introduzir de maneira intuitiva a noção de superfície regular. A conceituação precisa deste objeto depende de noções de Cálculo Vetorial e, portanto, está fora do escopo do Ensino Médio. Deste modo, pecaremos deliberadamente na conceituação em prol de uma visão intuitiva deste objeto.

Alguns exemplos de superfícies regulares no espaço euclidiano tridimensional já são conhecidos da geometria escolar: um plano, um círculo sem a circunferência do bordo, uma esfera sem o miolo, um hemisfério sem o círculo do bordo, um cilindro infinito, um cilindro finito sem os bordos, um cone sem o vértice. Não são superfícies regulares objetos bidimensionais que possuem bicos ou arestas como os poliedros ou o cone (com o vértice). Uma superfície regular possui duas características principais que passaremos a descrever com um pouco mais de detalhes, a saber, é um objeto *bidimensional* e é um objeto *regular*.

Dizemos que uma figura é unidimensional (tem apenas uma dimensão), ou seja, quando puder ser descrita através de um parâmetro, seu comprimento, mas não possuir largura nem altura. O número de dimensões é associado ao número de parâmetros necessários para descrever o objeto. Como exemplos podemos citar uma reta, uma linha poligonal sem autointerseções, uma semicircunferência e uma circunferência (veja a Figura 1).

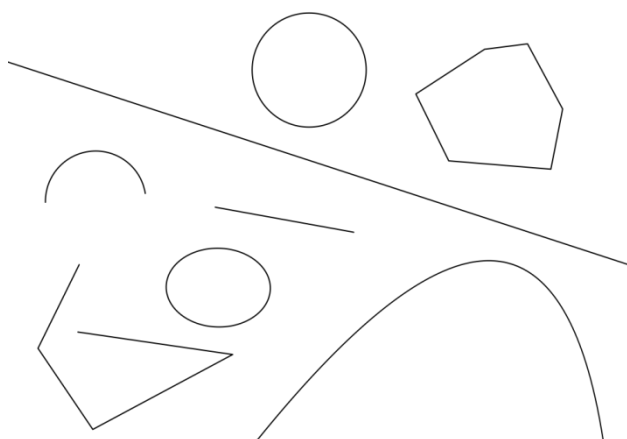


Figura 1: Objetos unidimensionais

Já um objeto bidimensional pode ser descrito por apenas dois parâmetros: comprimento e largura. Uma superfície é um objeto bidimensional, ou seja, possui largura e comprimento sem possuir altura. Veja alguns exemplos de superfícies regulares na Figura 2 abaixo.

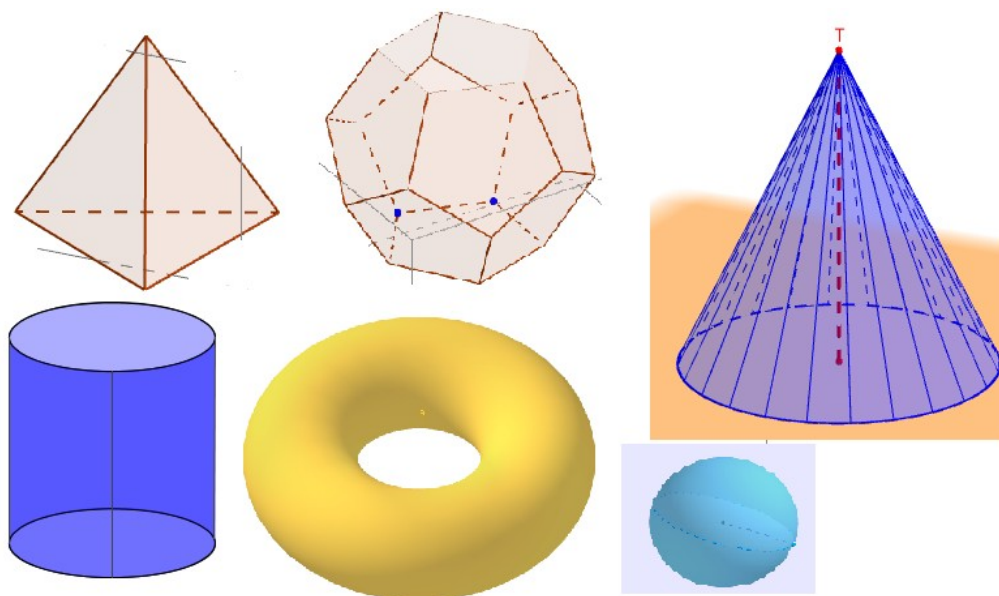


Figura 2: Objetos bidimensionais

Estabelecida a noção de superfície discutamos a ideia de regularidade. Usando uma analogia com pequenos insetos uma superfície é *regular* quando o mesmo ao caminhar sobre a superfície acreditar que se encontra sobre um plano. Este plano será chamado o *plano tangente* à superfície no ponto em questão. Esta é a mesma ideia que tínhamos quando olhando para o horizonte acreditávamos que a Terra era plana. A verdade é que somos pequenos o suficiente perto do tamanho de nosso planeta para acreditarmos que estamos sobre o plano que somente toca a esfera apenas sob nossos pés. O plano, o cilindro e a esfera são superfícies regulares. O cubo não pois em seus vértices e arestas não há plano tangente bem definido. Por exemplo, cada vértice está em exatamente 3 faces, cada uma das quais está contida num candidato a plano tangente ao cubo no vértice em questão (veja a Figura 3). Analogamente, um ponto em uma aresta do cubo possui dois candidatos a plano tangente, a saber os planos que contém as duas faces (veja Figura 4). Do mesmo jeito o cone de uma folha possui plano tangente bem definido em todos os seus pontos exceto no vértice, onde há uma infinidade de candidatos a

plano tangente que passem pelo vértice. Assim, uma superfície regular não possui bicos ou arestas. (Veja Figura 5)

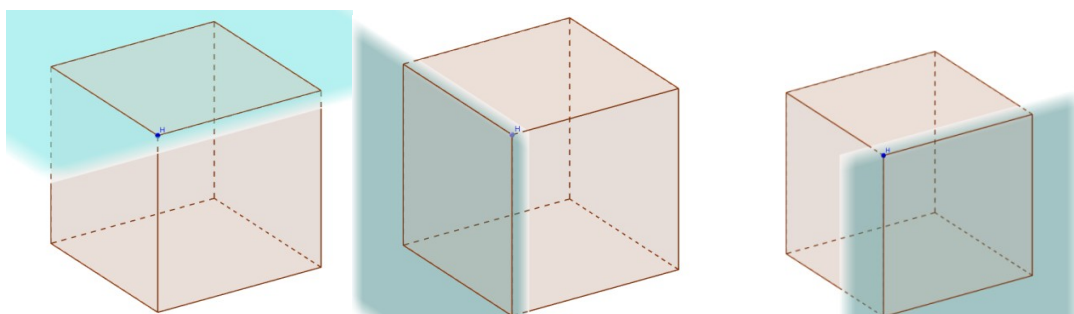


Figura 3: Três planos tangentes num vértice do cubo

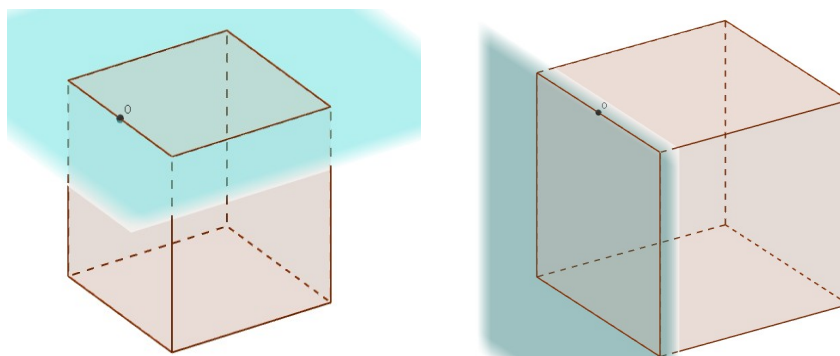


Figura 4: Dois planos tangentes num ponto de uma aresta do cubo

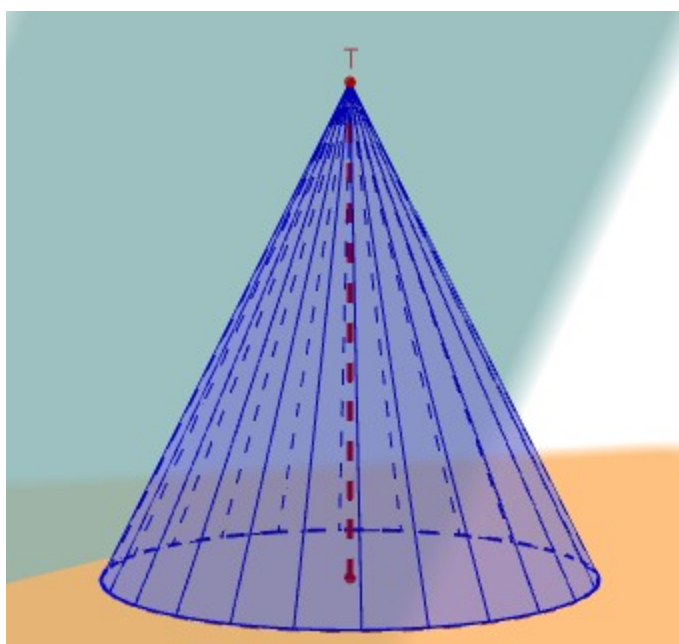


Figura 5: Infinitos planos tangentes no vértice do cone

A faixa de Moebius, principal objeto de estudo deste trabalho, é a superfície regular representada pela identificação de duas extremidades de uma fita retangular após efetuar meia volta numa delas. Este objeto será um modelo para exploração de noções modernas da matemática na escola.

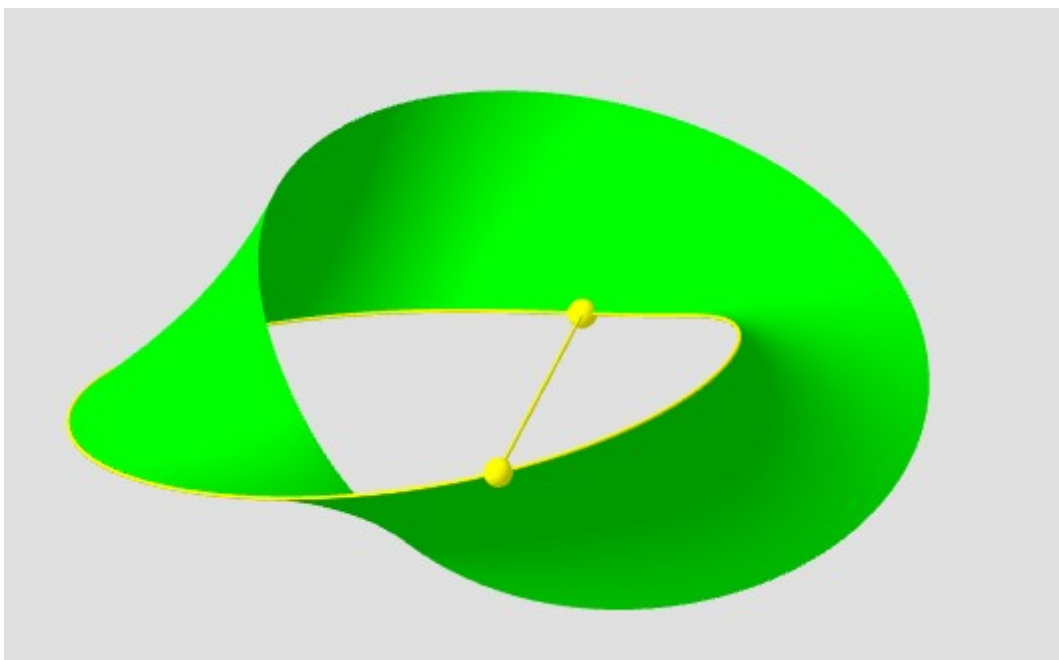


Figura 6: Fita de Moebius

2 Orientabilidade

Neste capítulo exploraremos o conceito de orientabilidade através de quatro atividades com a fita de Moebius em contraste com o cilindro regular reto. Na primeira atividade construímos a faixa de Moebius e o cilindro com uma folha de papel, na segunda os estudantes pintam os objetos construídos e observam que a noção de *lado de dentro* e *lado de fora* são mais sutis do que imaginá-va-se inicialmente. Na seqüência, tornamos mais precisa a noção de *lado de uma superfície* e o conceito de orientabilidade valendo-se para isso de campos de vetores para consolidar este conceito, na terceira atividade o estudante coloca alfinetes na faixa de Moebius e no cilindro para representar um campo de vetores na superfície. Neste momento discutimos o Teorema da Esfera Peluda. Na Atividade 4 recortamos, a título de curiosidade, a faixa de Moebius de duas maneiras para obter novas superfícies regulares e observar que, dependendo de como cortamos, as novas superfícies podem ser orientáveis ou não.

Observando os primeiros exemplos apresentados de superfície regular nos recordemos do fato de que eles apresentam dois lados, o de dentro e um lado externo. Tomando o cilindro como exemplo, podemos colori-lo com duas cores distintas a fim de identificar visualmente o lado de dentro e o lado de fora. (Figura 7)

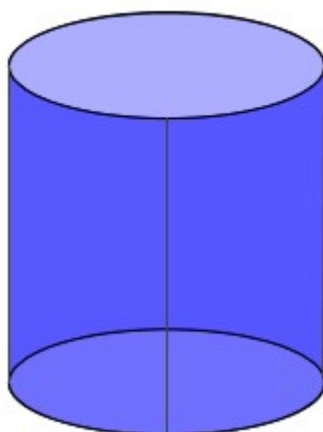


Figura 7: Cilindro

Será que todas as superfícies são assim? Volte na seção anterior e tente identificar aquelas que possuem um lado e as que possuem dois.

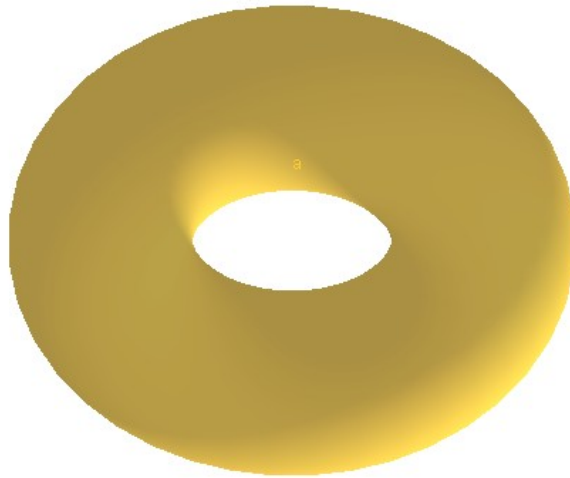


Figura 8: Toro

Atividade 1: Construção da faixa de Moebius e de um cilindro (1h aula)

Passo 1: Corte duas tiras de papel como na Figura 9.

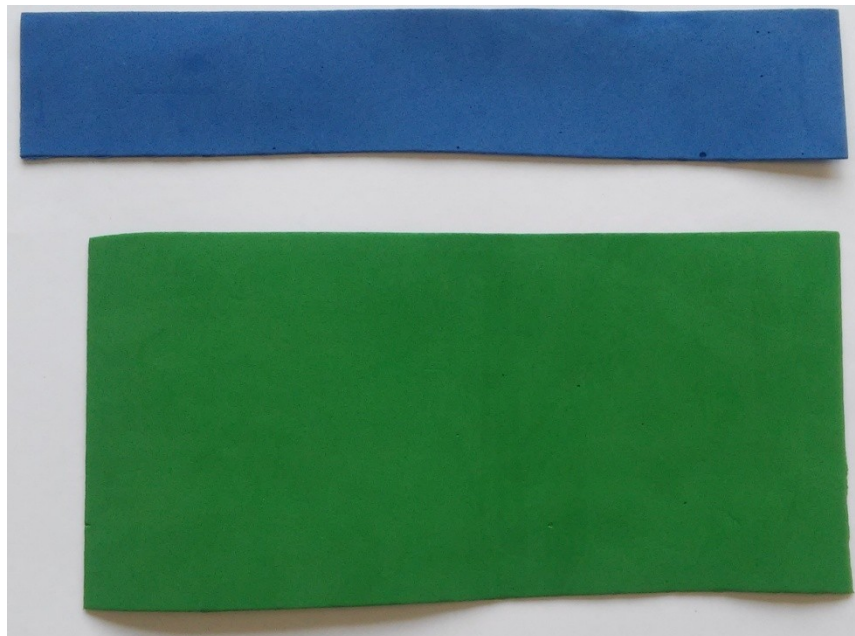


Figura 9: Duas Tiras de papel

Passo 2: Com uma das tiras enrole e faça um cilindro e com a outra tira enrole de maneira análoga ao cilindro porém antes de fechar torça a fita ligando o ponto A ao ponto A e o ponto B ao ponto B do nosso modelo a seguir colando os pontos respectivos formamos as duas superfícies:

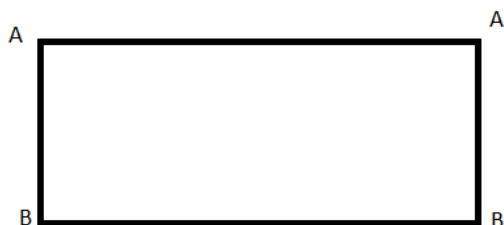


Figura 10: Esquema de montagem do cilindro



Figura 11: Cilindro



Figura 12: Esquema de montagem da Fita de Moebius

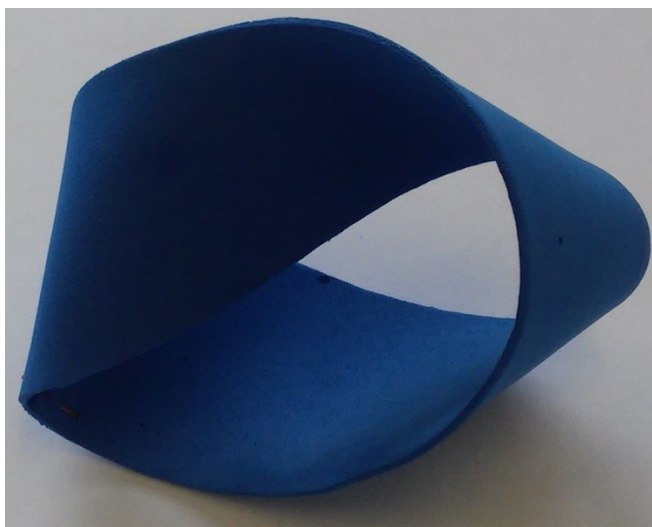


Figura 13: Fita de Moebius

Atividade 2: Colorindo os lados do cilindro e da fita de Moebius (1h aula)

Nesta atividade veremos a quantidade de lados no cilindro e na fita de Moebius.

Passo 1: Uma vez montado o cilindro vamos usar duas cores, por exemplo verde e azul, para colorir os lados externo e interno do mesmo. Observe que conseguimos aplicar uma coloração para a parte de dentro e outra para a parte de fora.

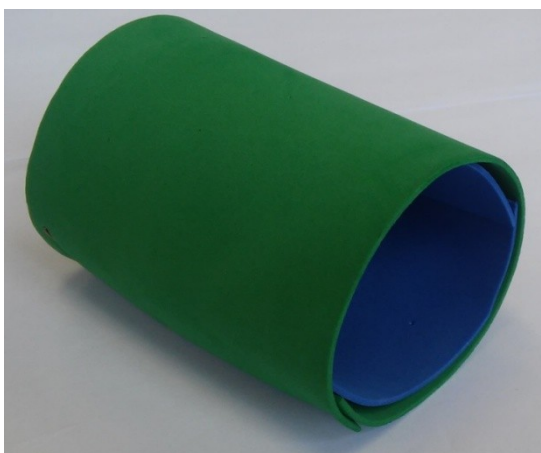


Figura 14: Colorindo lado de dentro e de fora do cilindro

Passo 2: Agora façamos o mesmo com a fita de Moebius. Escolha uma das cores e comece a pintá-lo pela parte interna por exemplo. Observe o que acontece. Agora tente inserir a segunda cor (Exercício para o leitor).

O efeito visualizado no experimento evidencia o fato de que nem todas as superfícies apresentam dois lados. A faixa de Moebius é uma superfície em que a noção de lado de dentro e o lado de fora se confundem. Podemos dizer que somente possui um lado. Neste momento sentimos a necessidade de tornar mais precisa esta ideia de *lado de uma superfície*. Fixado um ponto P numa superfície é fácil obter a diferença entre um lado e outro da superfície neste ponto. Basta escolher um vetor perpendicular ao plano tangente naquele ponto apontando para o lado escolhido. O problema é fazer isso em todos os pontos da superfície de modo *contínuo*, isto é, de modo que a pontos “próximos” correspondam o mesmo lado (vetores “parecidos”).

Um *campo de vetores* X numa superfície S é uma correspondência que a cada ponto P da superfície associa um único vetor $X(P)$ que tem origem no ponto P . Isto é, um campo de vetores é uma função $X: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ em que representamos a imagem $X(P)$ como um vetor com origem em P .

Exemplo 1: Na esfera S de centro O e raio unitário considere o campo de vetores X tal que para cada P da esfera como ilustrado na figura 15.

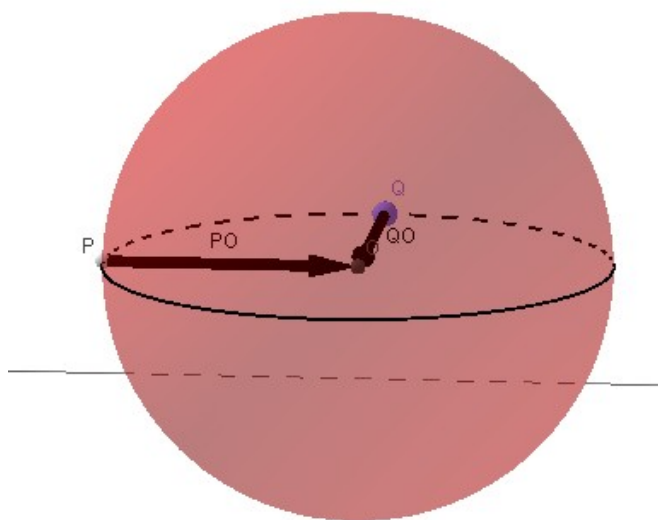


Figura 15: Campo de vetores perpendiculares

Seja X é um campo de vetores, qualquer que seja o ponto P da esfera existe um vetor do campo com origem em P . O campo X é um exemplo de *campo unitário* pois qualquer que seja P pertencente a S , o vetor tem comprimento 1, ou seja, todos os vetores do campo têm comprimento 1.

Este é um exemplo de *campo perpendicular à superfície*, isto é, um campo em que o vetor em cada ponto é perpendicular ao plano tangente naquele ponto. De fato, as retas que passam pelo centro da esfera são perpendiculares ao plano tangente nos pontos em que intersectam a esfera.

No presente trabalho, os campos vetoriais serão contínuos, isto significa, a grosso modo, que para pontos próximos os vetores nestes pontos são similares. Assim, se num ponto o campo aponta para dentro então em todos os pontos suficientemente próximos os vetores apontam para dentro também. Caso contrário este campo não será contínuo como no exemplo a seguir.

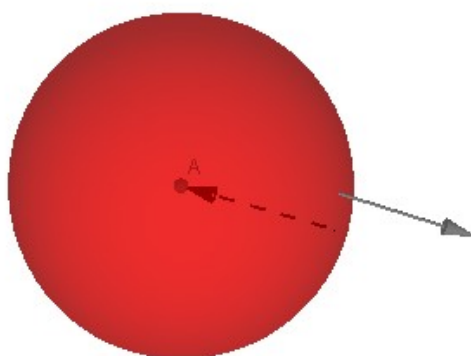


Figura 16 Campo de vetores não contínuo

Definição 3: Uma superfície será dita orientável quando existir um campo contínuo de vetores unitário e perpendicular à superfície.

Observe que este campo deve ser definido em toda a superfície pois numa vizinhança de cada ponto sempre podemos definir um campo de vetores perpendicular à superfície e unitário. Mas um tal campo nem sempre existe em toda a superfície.

O campo de vetores na esfera do Exemplo 1 garante que a esfera é uma superfície orientável. Observando a esfera podemos fazer uma analogia com a

superfície terrestre. Ao percorrermos qualquer caminho no globo, quando voltarmos para o ponto de partida a orientação *do pé para a cabeça* será a mesma do momento de nossa partida. Isso pode parecer óbvio porque vivemos num planeta com superfície aproximadamente esférica. O mesmo não ocorreria se o planeta tivesse a forma da fita de Moebius. Ao percorrermos uma volta ocorrerá algo interessante.

Na Atividade 3 abaixo confirmaremos que o cilindro possui dois lados e, portanto, é orientável no sentido da Definição 3. Por outro lado, veremos que a Faixa de Moebius não é orientável.

Atividade 3: Demarcando Campo de Vetores com alfinetes (1h ½ aula)

Nesta atividade teremos como objetivo demarcar o campo de vetores nas superfícies construídas e verificar em qual situação o sentido dos vetores permanece ou sofre inversão.

Passo 1: Inicialmente tomemos o cilindro e marquemos uma região em qualquer parte de sua superfície como na Figura 16. Com esta prática estamos mostrando o campo de vetores local.

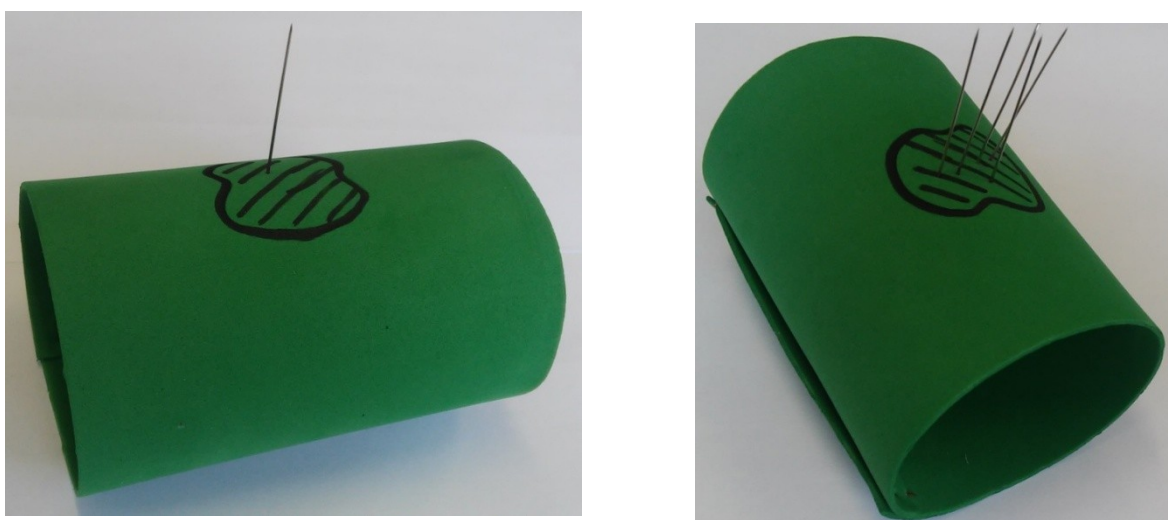


Figura 17: Campo de vetores no cilindro

Passo 2: Em seguida devemos produzir um rastro que percorra a sua superfície de forma contínua, ou seja, percorrermos uma curva fechada dando a volta na superfície. Observe que por qualquer caminho levado os alfinetes preservam os sentidos nos apontando a característica orientável do cilindro. Não há inversão de direção .

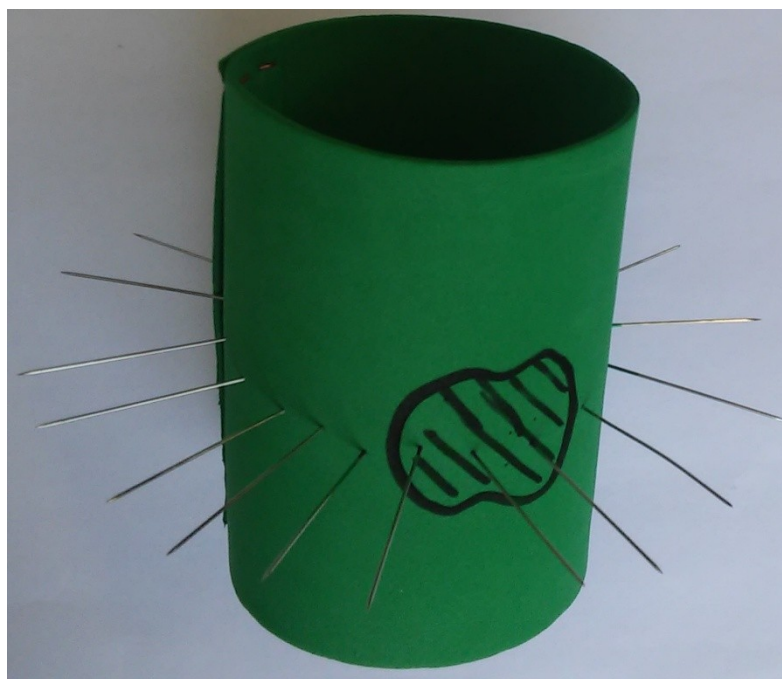


Figura 18: Campo de vetores percorrendo toda a superfície do cilindro.

Passo 3: Fazemos o mesmo com a fita de Moebius. Tome uma região inicialmente. É necessário observar que o campo de vetores se preserva num determinado conjunto tomado pela superfície da fita.

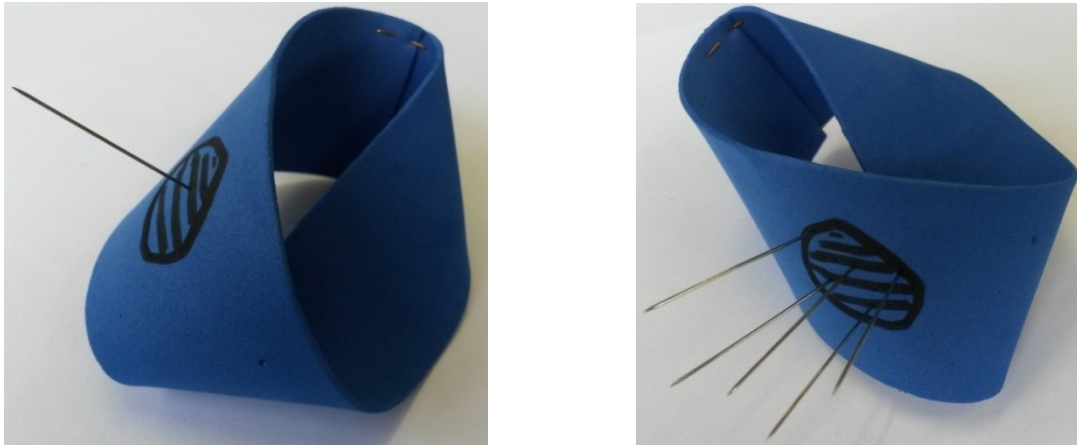


Figura 19: Campo de vetores local a superfície da Fita de Moebius

Passo 4: Agora produza um rastro de maneira a tentar percorrer a superfície como um todo. Faça isso adotando um marco zero e tentando percorrer um caminho pela superfície da mesma. Observe que ao percorrer a fita o sentido do alfinete é invertido fazendo com que ele se desloque no outro sentido. Esta característica determina que a fita de Moebius é não orientável. Vamos explorá-la na próxima atividade.

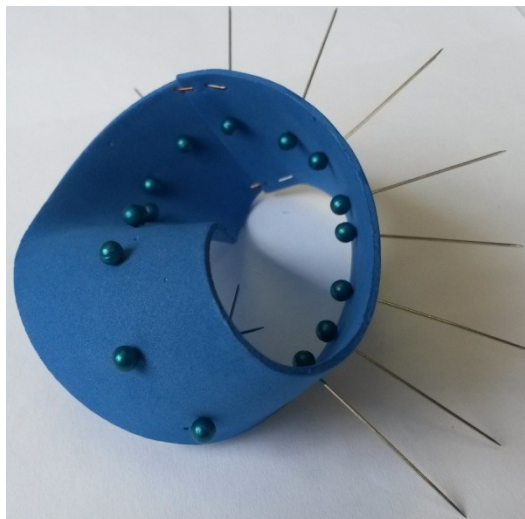


Figura 20: Campo de vetores percorrendo toda a extensão da Fita de Moebius (não orientável)

TEOREMA DE POINCARÈ (DA ESFERA PELUDA)

Aproveitaremos o conceito já estabelecido de campo de vetores para apresentar o Teorema de Poincarè. Antes de enunciar o Teorema precisamos dos conceitos de campo tangente à superfície e singularidade de um campo de vetores.

Exemplo 2: No globo terrestre podemos considerar um campo de vetores unitários que em qualquer ponto diferente do pólo norte e do pólo sul aponte para o leste. Nos pólos norte (N) e sul (S) definimos o campo como vetor nulo, NN e SS. Este campo é contínuo, exceto no Norte e Sul.

Este é um exemplo de um *campo de vetores tangente* pois qualquer que seja o ponto P da superfície o vetor $X(P)$ pertence ao plano tangente em P. Isto poderia por analogia ser um campo de direções de vento num planeta com a forma esférica.

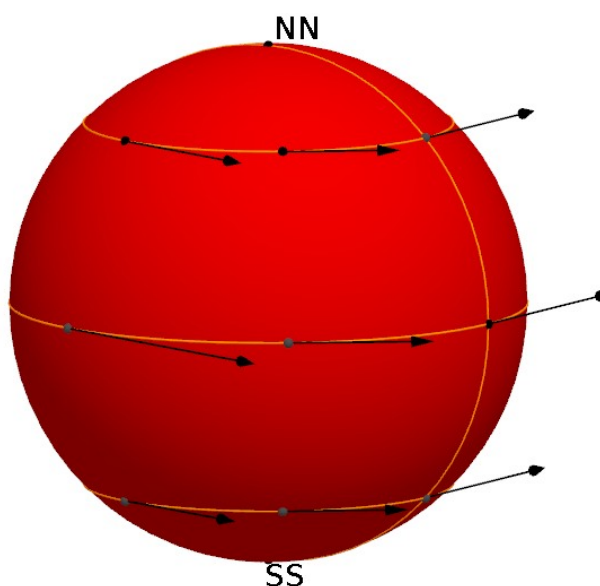


Figura 21: Campo de vetores tangente na esfera

Pontos em que o campo é nulo (é o vetor nulo), como N e S no Exemplo 2 são chamados de *singularidades* do campo. Assim podemos apresentar o Teorema de Poincaré, e que é informalmente tratado como o Teorema da Esfera Peluda.



Figura 22: Henri Poincaré

Teorema: Todo campo de vetores tangentes na esfera possui alguma *singularidade*.

Não existe um teorema análogo no cilindro, na faixa de Moebius ou no toro como podemos intuir dos campos indicados nas figuras abaixo.

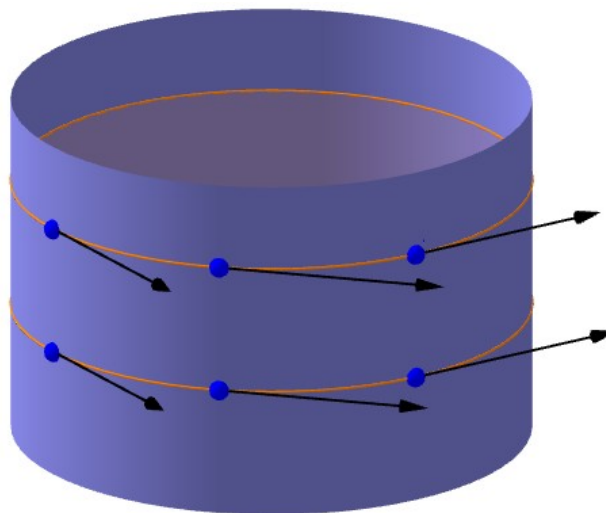


Figura 23: Campo de vetores tangentes sem singularidades no cilindro

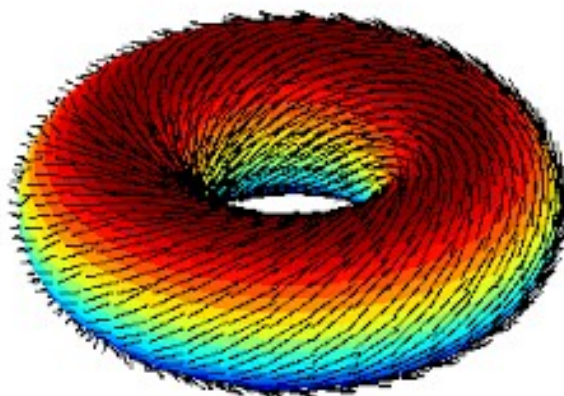


Figura 24: Campo de vetores tangentes no toro sem singularidades

A atividade a seguir mostra que na fita de Moebius estão contidas outras superfícies interessantes como uma fita torcida de 360° antes de colar dois lados opostos, como feito para a faixa de Moebius, entre outros fatos curiosos.

Atividade 4: Cortando a fita de Moebius pela metade e a um terço das bordas (1h30 aula)

Ao realizarmos esta prática estaremos mostrando fatos curiosos que ocorrem observando que cortes na fita de Moebius que produzem superfícies que podem ou não ser orientáveis. Faremos de maneira a compor uma parte ilustrativa das características do objeto estudado

Passo 1: Começamos com o corte pelo meio. Tomando a fita montada faça um furo no meio da junção das duas pontas. Comece a partir daí a recortar a fita em qualquer sentido mantendo uma divisão ao meio entre as duas partes da fita percorrendo toda a sua superfície. Com esta prática obteremos uma fita com o dobro do tamanho da anterior porém não mais a de Moebius já que a nova fita obtida tem dois lados devido a uma segunda torção produzida pelo corte. Neste processo é como se houvesse uma nova torção que transforma a faixa em um segundo cilindro, alterando a característica de orientabilidade presente na fita.

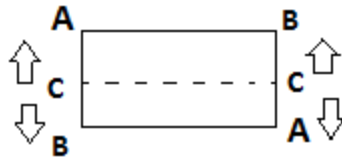


Figura 25: Esquema de corte pela metade da Fita de Moebius



Figura 26: Resultado do corte pela metade na Fita de Moebius

Com esta segunda movimentação a fita passa a ser orientável, ou seja, preserva o campo de vetores não somente local, mas por toda a superfície, assim como no cilindro e na esfera.

Passo 2: Em uma nova fita produza o próximo corte, a um terço das bordas. Tomando a junção da fita tome um ponto a um terço de uma das bordas e percorra toda a superfície da fita tentando manter a distância de um terço. Isto fará com que a fita gere dois pedaços. Com tal procedimento verificaremos que teremos dois pedaços uma fita de Moebius e uma fita torcida novamente. Exceto no ponto médio qualquer corte produzirá tal estrutura, duas fitas sendo uma torcida de Moebius e outra uma fita torcida. Isto se deve a sobreposição das posições que quando torcidas e recortadas produzem tal estrutura.

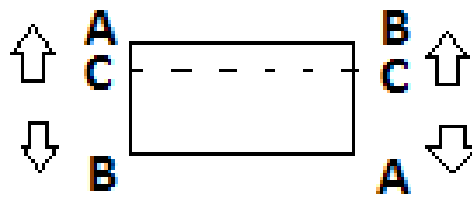


Figura 27: Esquema de corte a um terço da extremidade na Fita de Moebius

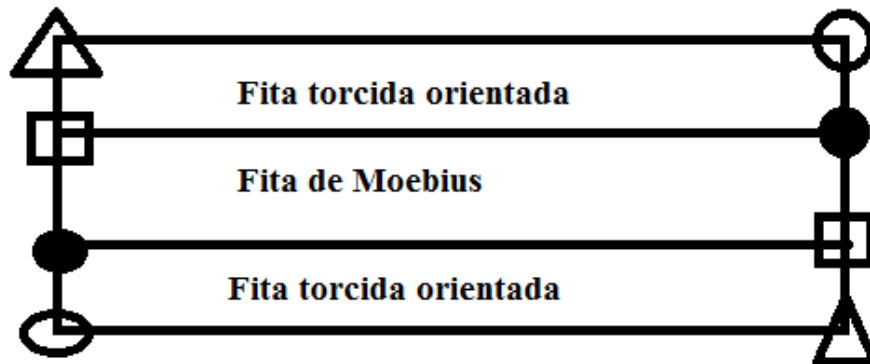


Figura 28: Esquema da Fita cortada a um terço da extremidade e partes formadas



Figura 29: Resultado do corte a um terço da extremidade na Fita de Moebius

Conclusão

Com o presente trabalho espera-se apresentar ao aluno do Ensino Médio uma ideia das atividades desenvolvidas em pesquisa matemática.

O intuito geral, antes de tudo não é aprofundar o conhecimento do mesmo mas apresentá-lo a um vasto mundo que pode ser descoberto em questão da decisão de sua carreira. Desta forma conceitos, definições e figuras transformaram algo que poderá ser aprofundado por aqueles que quiserem conhecer esta vasta ciência.

Alunos e professores podem utilizar desta experiência como uma forma de nortear estudos avançados ou complementares a formação do Ensino Médio, seja de forma a contextualizar a produção do matemático, seja como forma de introduzir de forma empírica assuntos de nível superior.

A partir deste ponto cada um contribuirá mais e mais para que o campo de conhecimento matemático não seja somente contemplado como algo transcendente mas torne-se uma ferramenta que esta disposta a ser conhecida e explorada.

Bibliografia

- [1] CARMO, MANFREDO P. Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. xiv 620 p. (Coleção Textos Universitários; 4)
- [2] CARMO, MANFREDO P. Geometria Riemanniana. 5 Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011, 335 p.; (Coleção Projeto Euclides)
- [3] LIMA, ELON LAGES et al A matemática do Ensino Médio 6. Ed. Rio de Janeiro: SBM 2006, 308 p. (Coleção do Professor de Matemática; 14)
- [4] STEWART, IAN Incríveis passatempos matemáticos 1 Ed Rio de Janeiro: Zahar, 2010, 353 p.
- [5] Canal Isto é Matemática, Youtube. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=aZZ_d-FF0Bc. Acesso em 2 de novembro de 2015.