O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos

José Luiz Soares dos Santos

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

José Luiz Soares dos Santos

O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira

USP – São Carlos
Setembro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237o

Santos, José Luiz Soares dos
O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos / José Luiz Soares dos Santos; orientador Rogério Monteiro de Siqueira. - São Carlos - SP, 2015.
106 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. movimento da matemática moderna. 2. história do ensino de matemática. 3. história do livro didático. 4. números fracionários. 5. ilustrações. I. Siqueira, Rogério Monteiro de, orient. II. Título.

José Luiz Soares dos Santos

The modern mathematics movement and the teaching of operations with fractional numbers: a historical analysis of some textbooks

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Program in Mathematics Professional Master. *EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Rogério Monteiro de Siqueira

USP – São Carlos
September 2015

Este trabalho é dedicado ao
Seu Viturino e à Dona Fidela
que, na prática do amor incondicional,
concederam-me a oportunidade de
viver e amá-los.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente, pelas graças necessárias à realização desse trabalho, e a Nossa Senhora, Mãe e acolhedora de minhas limitadas ações.

Agradeço aos meus pais, Viturino Basílio dos Santos e Fidela Soares dos Santos, por todo amor e carinho a mim dedicados, e aos meus irmãos e irmãs, por me ensinarem o significado da palavra família.

Sou grato à minha esposa, Janete, e às minhas filhas, Ayana e Chiara, por serem presentes em minha vida e pela doação das valiosas horas, nas quais não pudemos estar juntos, para que essa etapa pudesse ser cumprida.

Agradeço aos professores, pelo respeito e responsabilidade dedicados aos alunos e ao curso, constituindo para nós exemplos de profissionalismo e paixão.

Minha gratidão especial ao professor Rogério, pela paciência, compreensão e ricas orientações, que tornaram possível esse trabalho.

Agradeço aos colegas de turma, por tornarem prazerosos momentos de intenso trabalho e serem fontes de ânimo e perseverança quando a tensão das avaliações nos ofertava a alternativa da desistência: vocês me inspiraram a prosseguir.

Agradeço à coordenação do PROFMAT, à CAPES e ao EACH pela oportunidade da realização de um dos meus sonhos.

Não posso deixar de agradecer aos meus alunos, professores, diretores, coordenadores, orientadores e demais colegas de trabalho, que me ensinam diariamente a ver a importância da Educação e das relações humanas.

Sou infinitamente grato à Igreja Católica Apostólica Romana, à Comunidade Kénosis, à RCC (Renovação Carismática Católica) e aos irmãos e irmãs, pelas orações, formações e acolhimento, que me auxiliam nesse caminho de busca da santidade, minha vocação primeira.

Por fim, agradeço aos familiares e amigos que, de alguma forma, contribuíram para que eu superasse as adversidades da vida, com alegria e presenças inestimáveis.

"A fé e a razão são as duas asas
com as quais o espírito humano alça vôo
para contemplar a verdade."
(João Paulo II)

RESUMO

SANTOS, J. L. S. DOS. **O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos**. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Este trabalho é uma análise do ensino dos números fracionários, nos cursos ginasiais e de primeiro grau no Brasil, e sua relação com a matemática moderna, usando como fonte alguns livros didáticos de matemática publicados durante o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Os livros considerados são de autoria de Osvaldo Sangiorgi, Ary Quintela, Carlos Galante e Miguel Asis Name, envolvendo o período dos anos 1950, antes do MMM, ao início dos anos 1970, no qual ocorre o declínio desse movimento no Brasil. No desenvolvimento desse trabalho, observamos as alterações e manutenções na legislação, nos programas curriculares, na diagramação dos livros, nos conceitos e nas diferentes abordagens dadas aos números fracionários por cada um dos autores. Constatamos, como mudanças nos livros didáticos, a introdução da teoria dos conjuntos, das propriedades estruturais e das representações (nomenclatura, simbologia e diagramas), acompanhadas pelo aumento do número de exercícios, cores, imagens e dimensões dos livros. Observamos que as mudanças conceituais relacionadas ao MMM estão presentes, em maior grau,nos livros de Sangiorgi, mostrando que não houve homogeneidade na incorporação das ideias da matemática moderna nos livros didáticos de matemática dos anos 1960. Constatamos, ainda, que a denominação "números racionais", substituindo "frações" e "números fracionários", já está consolidada na década de 1970.

Palavras-chave: movimento da matemática moderna, história do ensino de matemática, história do livro didático, números fracionários, ilustrações.

ABSTRACT

SANTOS, J. L. S. DOS. **O movimento da matemática moderna e o ensino das operações com números fracionários: uma análise histórica de livros didáticos**. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

In this work, we analyse the teaching of fractional numbers in middle high schools classes in Brazil in relationship to Modern Mathematics, using textbooks of mathematics published during the Modern Mathematics Movement (MMM) as source. The studied authors were Osvaldo Sangiorgi, Ary Quintela, Carlos Galante and Michael Asis Name, comprising the 1950s, before beginning of the MMM, to the early 1970s, when the decline of MMM is observed. Along this work, we present the changes and continuities in legislation, curricula, the layout of the books, the concepts and different approaches given to fractional numbers by each author. The observed changes in textbooks were the introduction of set theory and the structural properties and representations (nomenclature, symbols and diagrams), accompanied by the increased number of exercises, colors, images and dimensions of books. Although these related conceptual changes are mainly presented in Sangiorgi books, we showed that there was no uniformity in the incorporation of modern mathematical ideas in textbooks of mathematics 1960s. We note also that the term “rational numbers” instead of “fractions” and “fractional numbers” was already consolidated in the 1970s.

Key-words: movement of the modern mathematics , history of mathematics education , history of the textbook , fractional numbers , illustrations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

APRESENTAÇÃO

A produção de um trabalho de conclusão do curso constitui um dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Uma das recomendações da Coordenação Nacional do programa é que esse trabalho contribua para o ensino básico de Matemática. Conhecedor de que a História das Ciências sempre atraíra a minha atenção durante a vida acadêmica e profissional, pareceu-me natural a escolha da História da Matemática como área para a produção do trabalho que nos fora exigido.

Definida a área, o primeiro semestre do curso constitui-se num período de escolha do tema e da orientação necessária ao bom desenvolvimento do trabalho. Assim, no segundo semestre do curso, procurei o professor Rogério Monteiro de Siqueira, com a intenção de investigar o processo histórico de construção dos números complexos. A partir do conhecimento do trabalho que o grupo por ele orientado estava realizando sobre os livros didáticos e o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, acolhi com satisfação a oportunidade de integrar esse grupo. O estudo do ensino das operações com números racionais escritos na forma fracionária, nas décadas de 1950, 1960 e 1970 mostrou-se a mim como opção viável para contribuir no estudo, mais amplo, desenvolvido pelo grupo. A escolha do livro didático e dos autores foram frutos das discussões e sugestões realizadas posteriormente.

A fundamentação e orientação para o trabalho que se iniciava partiu das dimensões da análise histórica de livros de Matemática apresentados por Schubring (2003), tomando os livros didáticos de Osvaldo Sangiorgi para o ensino secundário (1ª dimensão), elegendo as operações com números racionais como campo conceitual comum presente em livros de outros autores (2ª dimensão), como Carlos Galante, Miguel Asis Name e Ary Quintela, vinculando tal estudo aos programas de ensino, decretos e possíveis mudanças epistemológicas ocorridas no período em questão (3ª dimensão).

Como partes integrantes de uma metodologia de pesquisa, estabelecemos as seguintes etapas: levantamento e conhecimento da bibliografia associada ao Movimento da Matemática

Moderna; visita a bibliotecas e acervos dos autores escolhidos; registro fotográfico dos livros didáticos desses autores; elaboração de um arquivo digital desse registro; elaboração de um fichamento preliminar desses livros; análise e elaboração do trabalho escrito. As bibliotecas do Intituto de Matemática e Estatítisca (IME) e do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IF/USP), dos acervos do Banco de Livros Didáticos Brasileiros (LIVRES) da Biblioteca de Educação da USP e do Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil (GHEMAT) foram os principais fornecedores dos materiais levantados para a obtenção dos dados que alimentaram esse trabalho.

O primeiro capítulo traz uma breve síntese da história do Movimento da Matemática Moderna , muitas vezes referido como MMM no decurso do trabalho, procurando contextualizar historicamente o tema da pesquisa, bem como apresentar algumas das motivações que fomentaram as mudanças ocorridas no ensino de Matemática, a partir da década de 1960. Acrescentamos nesse capítulo três seções, vinculadas à presença do MMM no Brasil, aos livros didáticos de Matemática e à análise histórica de livros didáticos de Matemática, estabelecendo uma base para a compreensão das propostas desse trabalho. Assim, os trabalhos de Burigo (1989), Valente (2008), Matos e Valente (2010) e Schubring (2003) constituem o arcabouço dos dados e informações ali presentes.

O segundo, o terceiro e o quarto capítulo constituem o núcleo desse trabalho, ou seja, destinam-se à apresentação da análise do material levantado, a partir da metodologia referida anteriormente. Como se deu a construção de uma abordagem didática das operações com os números racionais, escritos na forma fracionária, ao longo dos anos 1960? O MMM contribuiu nesse processo de construção? Em caso positivo, como essa contribuição pode ser percebida nos livros didáticos? Existiu um consenso na adoção de ideias do MMM entre os autores de livros didáticos de Matemática na década de 1960? Essas são algumas das questões que impulsionaram o desenvolvimento desse trabalho de conclusão do curso, trabalho esse que tem na contribuição para a busca de respostas a esses questionamentos o motivo primário de sua existência.

O ensino das operações com números fracionários nos anos 1950 é analisado no segundo capítulo, onde discorremos sobre cada um dos itens desse assunto, presentes nos livros desses autores, procurando proporcionar uma comparação entre as diferentes abordagens, tomando como referência a coleção de Sangiorgi. Metodologia e análise semelhantes, focando a década seguinte e a primeira metade dos anos 1970 compõem os dois capítulos seguintes, respectivamente. Acreditamos que essa disposição comparativa horizontal (entre os livros da mesma década), e vertical (entre os livros do mesmo autor) permite o reconhecimento do processo de construção do ensino das operações com os números fracionários no Brasil. Considerando a relevância das categorias associadas à forma física do livro (capa, dimensão e ilustração), introduzimos uma seção destinada a esse fim, no quarto capítulo do trabalho.

CAPÍTULO

2

MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA

Para o ensino da Matemática, os anos 1950 e início dos anos 1960 foram marcados por iniciativas de renovação no ensino dessa disciplina, no âmbito das instituições de ensino oficiais. Tais inovações deram-se em diferentes países, geralmente pautadas na necessidade de uma adequação do ensino ao enfrentamento das novas questões geradas pelo desenvolvimento tecnológico, científico e econômico da época. O aumento do número de alunos matriculados nas universidades resultou no florescimento de iniciativas para a renovação do ensino secundário. Burigo (1989, pp.67-75) apresenta um histórico dessas iniciativas desenvolvidas durante esse período, nos Estados Unidos e na Europa, destacando duas ações americanas: os trabalhos desenvolvidos pelo School Mathematics Study Group (SMSG), assistido pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), pela Mathematical Association of America e pela American Mathematical Society; e um programa coordenado pelo professor Suppes [1], em 1958, na Universidade de Stanford:

> (...) um projeto baseado na premissa de que as crianças podiam aprender muito mais matemática do que o que (sic) se considerava possível até então, e que foi pioneiro na proposta de construir toda a aritmética a partir das operações com conjuntos. (BURIGO, 1989, p.70)

Burigo (1989) ainda aponta o auxílio financeiro às iniciativas de reformulação do ensino de matemática, fornecido por agências como a National Science Foundation (NSF), a Carnegie Corporation e o United States Office of Education.

Na Europa, com a intenção de coordenar um trabalho visando a melhoria do ensino de matemática, o grupo denominado Comission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM), constituído por diferentes profissionais de diferentes países, realizou vários seminários durante a década de 1950, resultando na publicação,

[1] Patrick Suppes (1922-1914), filósofo americano, com vasta publicação na filosofia e nas ciências sociais, principalmente na psicologia e na educação. Ver https://suppes-corpus.stanford.edu/

em 1955, do livro *L'enseignement des mathématiques*, com textos de Piaget, Dieudonné, Choquet, Lichnerowicz, Beth e Gattengo. (VALENTE, 2008, p.26). Para Burigo (1989, p.72), "O livro teve repercussão internacional e foi divulgado no Brasil no II Congresso Nacional de Ensino de Matemática, em 1957." [2]

Após uma sessão de estudos promovida pela Organização Européia de Cooperação Econômica (OECE) em Royaumont, em 1959, a comissão decidiu pela necessidade da reforma do ensino de matemática no secundário, prosseguindo seus trabalhos no ano seguinte:

> Em 1960, por recomendação do seminário, realizou-se uma Sessão de Trabalhos com especialistas, com a incumbência de elaborar um programa "moderno" de matemática, tendo como alvo fundamentalmente os estudantes "bem dotados", e que se orientavam para os estudos científicos e técnicos de nível superior. (BURIGO, 1989, p.79)

Os anos 1960 viram o aumento do número de programas direcionados à "modernização" da Matemática. A participação da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) no debate internacional incrementa o incentivo a essa "modernização", pois os documentos conclusivos das conferências organizadas desde 1945 mostram que "até a década de 1960 a UNESCO não havia abordado a questão do planejamento educacional" (GOMIDE, 2012).

2.1 A Matemática Moderna no Brasil

As iniciativas de reforma do ensino de Matemática desenvolvidas entre meados dos anos 1950 e parte dos anos 1970 adquirirem a forma de um movimento internacional, conhecido como Matemática Moderna, como afirmam Matos e Valente:

> Designa-se por Matemática Moderna uma reforma curricular que ocorre um pouco por todo o mundo entre a segunda metade dos anos 50 e a primeira metade dos anos 70 do século passado. Trata-se de um movimento procurando renovar fundamentalmente o ensino da Matemática. (MATOS; VALENTE, 2010, p.1)

Segundo esses autores, a interação entre os agentes envolvidos nessas mudanças, em diferentes países, deram origem a uma mistura dessas iniciativas. No caso dos países ibero-americanos, estes contaram com participação e incentivos de outros agentes:

[2] De acordo com o professor Ubirantan D'Ambrosio, o professor Osvaldo Sangiorgi teve acesso a esse livro, noticiando, "num desses encontros", a existência de inciativas de mudanças emergentes nos Estados Unidos e na Europa. (Cf. Burigo (1989, p.101))

> Permeando, facilitando e condicionando estas mestiçagens estão as grandes organizações internacionais, como a OCDE (nos casos espanhol e português), a UNESCO (no caso português e venezuelano), a USAID (no caso brasileiro) ou mesmo empresas (no caso venezuelano)(MATOS; VALENTE, 2010, p.6).

No Brasil, a vertente dessas mudanças ficou conhecida como Movimento da Matemática Moderna (MMM). Inicialmente, os promotores pretendiam reconfigurar o programa do ensino de Matemática no curso ginasial [3], ampliando posteriormente seu espaço de atuação para o curso primário.[4] O MMM procurava aproximar a matemática ensinada no ensino básico àquela desenvolvida pelos pesquisadores e ensinada nos cursos superiores.

Ainda na década de 1950, são organizados no Brasil alguns encontros de professores de Matemática. Dentre esses encontros, podemos destacar os Congressos Nacionais de Ensino de Matemática de 1955, 1957 e 1959.[5]

O 1º Congresso Nacional de Ensino de Matemática, ocorrido em Salvador (1955), não mostra "evidências da introdução de tópicos da matemática moderna. Entretanto, muitas das discussões tratam do programa secundário e da necessidade de reorganizá-lo para uma aprendizagem mais eficiente neste nível" (D'AMBROSIO, 1987 apud SILVA, 2006, p.52). Todavia, é em Porto Alegre/RS, durante a segunda edição desse congresso, onde os primeiros indícios da Matemática Moderna estão presentes em algumas propostas, como nos programas sugeridos por Odila Barros, focando os professores primários de Matemática, e D'Ambrosio, voltado ao secundário (SILVA, 2006). O 3º Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado em 1959, no Rio de Janeiro, marca definitivamente a adoção da Matemática Moderna como possibilidade concreta de ser implementada no sistema educacional brasileiro.

Em 1960, Osvaldo Sangiorgi realizou um estágio na Universidade de Kansas, EUA. A influência desse período sobre suas posições parece evidente:

> De volta ao Brasil, Sangiorgi logo promoveu articulações entre professores, a mídia e a Secretaria de Educação do estado de São Paulo, com vistas às modificações dos programas de matemática, à semelhança do que viu nos Estados Unidos (VALENTE, 2008, p.27).

No ano seguinte, Sangiorgi organiza um curso para professores sobre a Matemática Moderna e a criação do Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), que viria a ser um dos principais divulgadores do emergente MMM.

[3] O DECRETO-LEI de 9 de abril de 1942 estabeleceu o ensino secundário em dois ciclos: o primeiro constituído pelo **curso ginasial**, com duração de quatro anos; o segundo, composto por dois cursos paralelos (curso clássico e curso científico), cada qual com três anos de duração.

[4] O DECRETO-LEI Nº 8.529, de 2 de janeiro de 1946 regulamentou o ensino primário fundamental destinado a crianças de 7 a 12 anos e ministrado em dois cursos sucessivos: o elementar, com quatro anos de estudo, e o complementar, com 1 ano de duração.

[5] Em seu artigo *Movimento da Matemática Moderna: possíveis leituras de uma cronologia*, Maria Celia Leme da Silva apresenta uma síntese desses congressos, destacando alguns dos principais participantes dos mesmos.

A “Introdução da Matemática Moderna na Escola Secundária” aparece como tema no IV congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado em Belém, em 1962. Segundo Burigo(1989), outros dois temas presentes na pauta do congresso também estavam diretamente associados ao MMM: “Experiências realizadas em curso regulares ou experimentais” e “Reestruturação do ensino da matemática ante as Leis de Diretrizes e Bases”.

A coleção “Matemática - curso moderno”, de Osvaldo Sangiorgi, editada em 1963, para uso em 1964, e os trabalhos de GEEM divulgaram intensamente as ideias da Matemática Moderna no estado de São Paulo e nos demais estados brasileiros. Os anos seguintes foram de intensa promoção do MMM, que pode ser observada nos temas dos congressos, nas publicações de livros didáticos e nos cursos para professores.

Dentre os personagens em destaque nesse processo, podemos citar Sangiorgi, Castrucci, Jacy Monteiro, Barbosa, Caroli e D’Ambrosio, nomes associados diretamente ao GEEM. Nota-se, portanto, que São Paulo foi o principal polo divulgador do MMM no Brasil. Todavia, outros grupos foram criados pelo país, exercendo importante papel na divulgação das “ideias modernas”. Segundo Wielewski (2008), podemos destacar: o Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática (NEDEM) , criado em 1962, no Paraná, e coordenado pelo professor Osny Antônio Dacól; o Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática em Porto Alegre (GEEMPA), criado em 1970, sob presidência da professora Esther Grossi, tendo influências e colaboração de Lucienne Felix, George Pappy e Zoltan Dienes; equipe de professores do Centro de Estudos de Ciências da Bahia (CECIBA), dentre eles Omar Catunda e Martha Dantas, elaborando textos e livros didáticos, que foram aplicados a partir de 1966; criação do Instituto de Matemática do Rio Grande do Norte (IMURN), em 1966, cujos objetivos indicam a inserção do MMM na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

A partir do início dos anos 1970, as críticas à Matemática Moderna se intensificam globalmente. O matemático René Thom publicou um artigo, em 1970, no qual:

> (...)criticava a contraposição feita nos programas de matemática moderna entre a álgebra e a geometria euclidiana, e a expectativa de que problemas de compreensão da matemática pudessem ser resolvidos através da introdução da linguagem ou da teoria dos conjuntos (BURIGO, 1989, p.211)

Posteriormente, em 1972, Thom apresentou uma crítica ao formalismo e excesso de rigor presentes na Matemática Moderna.

O livro “Why Johnny Can’t Add: The Failure of the New Mathematics”, de Morris Kline, publicado em 1973 nos EUA e no Brasil em 1976, com o título de “O fracasso da Matemática Moderna”, apresentou ao mundo sérias críticas às reformas curriculares advindas da Matemática Moderna.

As críticas de Thom e Kleine tiveram grande repercussão no Brasil, ganhando destaque nos colóquios, encontros e congressos. Em 1973, de forma independente, os matemáticos Elon

Lages Lima [6] e Manfredo Perdigão do Carmo [7] apresentaram suas críticas ao Movimento da Matemática Moderna.

Para o MMM, o ano de 1976 ficou marcado pelo lançamento brasileiro do livro de Kleine, pelo último curso do GEEM para professores, pelo silêncio sobre a matemática moderna nas resoluções do seminário [8] de preparação do III Congresso Internacional de Matemática, realizado no Rio de Janeiro, no qual surgiram "críticas tremendas" à matemática moderna (BURIGO, 1989, p.226). Para Lima e Passos (2008, p.114), tudo leva a crer que a preparação dos professores para o concurso de ingresso ao Magistério Oficial do Estado de São Paulo, em 1976, tenha sido a última atividade do GEEM.

2.2 O livro didático de Matemática no MMM

De um lado, uma das caraterísticas importantes do período inicial do MMM no Brasil, ou seja, na década de 1960, foi a formação de grupos de professores, como o GEEM [9], o NEDEM e o GEEMPA , atuando de forma marcante por meio da coordenação de cursos de formação de professores, produção de material escrito e influência no governo, visando mudanças nos programas de ensino de Matemática (FISCHER, 2008).

Do outro lado, a influência dos governos no MMM, via investimentos, promoção e/ou financiamento dos encontros e cursos diversos, também constitui um dos pilares da divulgação dos ideais modernizadores do ensino da Matemática. Todavia, cumpre-nos ressaltar que muitos desses investimentos têm sua origem em grandes organizações não governamentais, como resultado de uma certa mistura entre as iniciativas desenvolvidas em diferentes países:

> Permeando, facilitando e condicionando estas mestiçagens estão as grandes organizações internacionais, como a OCDE (nos casos espanhol e português), a UNESCO (no caso português e venezuelano), a USAID (no caso brasileiro) ou mesmo empresas (no caso venezuelano) (MATOS; VALENTE, 2010, p.6).

Quando analisamos o processo de divulgação da matemática moderna no Brasil, nos deparamos com um de seus mais influentes agentes: a mídia. Nos diversos meios de atuação, a imprensa (jornais, revistas, livros, rádio) produziu uma extensa lista de materiais que documentam a importância de sua atuação nesse processo. Tomando como foco a imprensa escrita:

[6] Segundo Burigo (1989, p.216), Elon Lages Lima criticava o fato do ensino brasileiro estar seguindo modelos estrangeiros desaprovados em seus locais de origem, distanciamento da realidade e ser "excessivamente moderno".

[7] O professor Manfredo Perdigão do Carmo dirigiu suas críticas à enfase dada às estruturas matemáticas, à axiomatização e ao aspecto formalista da matemática moderna, como atesta Burigo (1989, p.216)

[8] Esse seminário foi realizado no Rio de Janeiro e organizado pelo recém criado Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM).

[9] "GEEM - Grupo de Estudos do Ensino de Matemática e a Formação de Professores durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil", trabalho de Flainer Rosa de Lima e Laurizete Ferragut Passos. (VALENTE, 2008)

> O período onde mais foi intensificada a divulgação pelos jornais cobre os anos de 1963-1968. Em 1963, por exemplo, foram 50 reportagens tratando das ações de Sangiorgi e o MMM. Em 1964, 59; 65, 53; 66, 70; 67, 66; 68, 48. A partir de 1969, o tema do MMM deixa de ser interessante aos jornais. Isso ficou revelado na queda das reportagens: 1969, 4, 70, 2; 71, 2; 73, 1; 74, 1; 75, 1 (VALENTE, 2008, p.28).

O livro didático foi um poderoso recurso de divulgação das propostas do MMM. Silva(2011) destaca a importância do "acordo MEC/USAID (Ministério da Educação e Cultura e United States Agency for International Development) , que financiou grande parte das ações da Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático (COLTED)", no processo de avaliação, compra e distribuição dos livros didáticos indicados nos estabelecimentos de ensino do Brasil.

A Tabela 1, apresentada por (SILVA, 2011), nos dá pistas da importância de alguns desses autores, coautores e editoras que participaram desse período. Nesta tabela, chama-nos a atenção o número de edições e reedições das publicações da Editora do Brasil (Name, Galante e Santos), da Nacional (Sangiorgi) e da Saraiva (Di Pierro Neto).

Tabela 1 – Autores de livros didáticos de matemática mais significativos(1950-1979)

Nome	Década de maior publicação	Total de edições e reedições	Editora em que mais publicou
Bechara, Lucília	1970	6	Nacional
Bóscolo, Alcides	1970	7	FTD
Castrucci, Benedito	1970	22	FTD
Di Pierro Netto, Scipione	1970	40	Saraiva
Franchi, Anna	1970	5	Nacional
Galante, Carlos	1960	66	Ed. do Brasil
Giovanni, José Ruy	1970	13	FTD
Ikiezaki, Iracema	1970	12	Saraiva
Liberman, Manhúcia P.	1970	6	Nacional
Maeder, Algacyr M.	1950	6	Melhoramentos
Munhoz, Aida F. S.	1970	12	Saraiva
Name, Miguel Asis	1970	346	Ed. Do Brasil
Nano, Wanda	1970	12	Saraiva
Peretti, Ronaldo G	1970	5	FTD
Sangiorgi, Osvaldo	1960	169	Nacional
Santos, Oswaldo M. dos	1960	41	Ed. Do Brasil
Zambuzzi, Orlando A.	1970	11	Ática

Fonte: Bibilioteca do Livro Didático e Banco de Dados de Livros Escolares Brasileiros (FE/USP)

O estudo da evolução de algumas dessas publicações, ao longo dos anos 1950,1960 e 1970, nos proporciona um caminho para a compreensão da homogeneidade/heterogeneidade do MMM, sua articulação enquanto movimento organizado e as mudanças no ensino de matemática do curso ginasial advindas desse movimento.

2.3 Análise de livros de Matemática

O interesse pelo estudo de livros-textos passa a tomar relevância em pesquisa a partir da publicação de "A estrutura das revoluções científicas", de Thomas Khun, em 1962:

> Khun vê os textbooks como introduções ao paradigma da ciência normal em questão, apresentando os princípios e os elementos – seus fundamentos e seu principal corpo de conhecimento. Atribui aos textbooks a separação entre “conhecimento escolar” e “conhecimento científico”, que surge da pesquisa e é essencial para ela (SCHUBRING, 2003, p.1).

Após estabelecer a diferença entre dois grupos de escritos, livro-texto [10] e artigo de pesquisa, Khun apresenta certa restrição ao primeiro grupo. Apesar dessa restrição aos livros-texto, o trabalho de Khun “abriu caminho para aceitá-los como um tema de estudo compensador na história das ciências” (SCHUBRING, 2003, p.10).

Ampliando a perspectiva de Wolf(1759-1824) [11], para quem a hermenêutica deve englobar o conhecimento da língua, da situação moral da época do autor, de história e de literatura para saber-se a “situação mental, o *esprit*” (WOLF, 1839 apud SCHUBRING, 2003, p.15), a análise hermenêutica aplicada por Schubring (2003) leva em consideração:

1. História social das ideais: análise do livro-texto em relação ao corpo da matemática escolar, como “parte de um contexto social mais amplo, como o da produção de conhecimento pela comunidade científica em geral” (SCHUBRING, 2003, p.16);

2. A instituição como “coautor”: o conteúdo e a estrutura do livro são influenciados por livros já existentes na instituição, assimilando “empréstimos” ou até cópias completas de livros anteriores (SCHUBRING, 2003, p.17);;

3. Propriedade comum: as alterações presentes em muitos livros são resultado do discernimento do autor oficial e, sobretudo, de pressões sociais, o que justifica a importância de uma investigação sobre os autores (SCHUBRING, 2003, p.17);.

Prosseguindo nessa linha de argumentação, Schubring (2003) afirma que a análise de livros didáticos deve considerar três dimensões (ou etapas) , onde:

> - a primeira dimensão consiste em analisar as mudanças nas várias edições de um livro-texto escolhido como ponto de partida, por exemplo um livro didático de álgebra ou de aritmética;
> - a dimensão seguinte consiste em encontrar mudanças correspondentes em outros livros-texto integrantes da mesma *oeuvre*, por meio do estudo das partes que lidam com campos conceituais relacionados, como por exemplo geometria algébrica, trigonometria etc.;
> - a terceira dimensão relaciona as mudanças no contexto: mudanças nos programas de ensino, decretos ministeriais, debates didáticos, evolução da matemática, mudanças na epistemologia etc. (SCHUBRING, 2003, p.126)

Tomando as três dimensões, elencadas por (SCHUBRING, 2003), como referências para a análise do Movimento da Matemática Moderna, estudaremos os livros didáticos de Osvaldo

[10] Adotando a tradução de Maria Laura Magalhães Gomes, tomaremos o termo “textbook” como “livro-texto” e “livro didático”.

[11] **Friedrich Augst Wolf**, filólogo alemão, considerado o “pai da filologia alemã” e um dos fundadores da moderna hermenêutica alemã.

Sangiorgi para o ensino secundário (1ª dimensão), elegendo as operações com números racionais como campo conceitual comum presente em livros de outros autores (2ª dimensão), como Carlos Galante, Miguel Asis Name e Ary Quintela, vinculando tal estudo aos programas de ensino, decretos e possíveis mudanças epistemológicas ocorridas no período em questão (3ª dimensão).

A via ora escolhida para essa investigação, ou seja, a partir da hermenêutica crítica e das dimensões da análise de Schubring, do levantamento de autores representantes do MMM (SILVA, 2011) e dos documentos oficiais (decretos, programas, resoluções, etc...) possibilitará o estudo da evolução do tratamento dado ao ensino de Matemática durante os anos da Matemática Moderna, identificando características que desapareceram, foram modificadas, surgiram ou foram incorporadas ao ensino dessa disciplina, durante e após esse período.

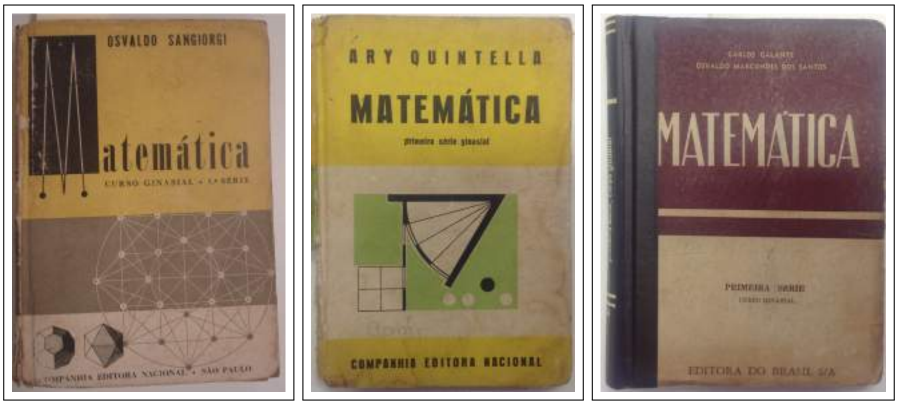
CAPÍTULO

3

O ENSINO DE FRAÇÕES NOS ANOS 1950

A partir do que foi até aqui exposto, torna-se necessário estabelecer uma comparação entre as coleções de Galante e Santos (1954) e Quintela (1959), a partir de Sangiorgi (1955) (ver Figura 1) e do ensino das operações com os números fracionários, como foi antes justificado. Nesta seção, visando essa comparação, optamos por eleger alguns dos tópicos desse conteúdo e mostrar como estes são apresentados pelos autores, nas diferentes coleções. Sempre que achamos conveniente, apresentamos comentários relativos a essa comparação, resultante da análise de tais coleções.

Figura 1 – Capas das coleções de Sangiorgi, Quintela e Galante, respectivamente, publicadas nos anos 1950.

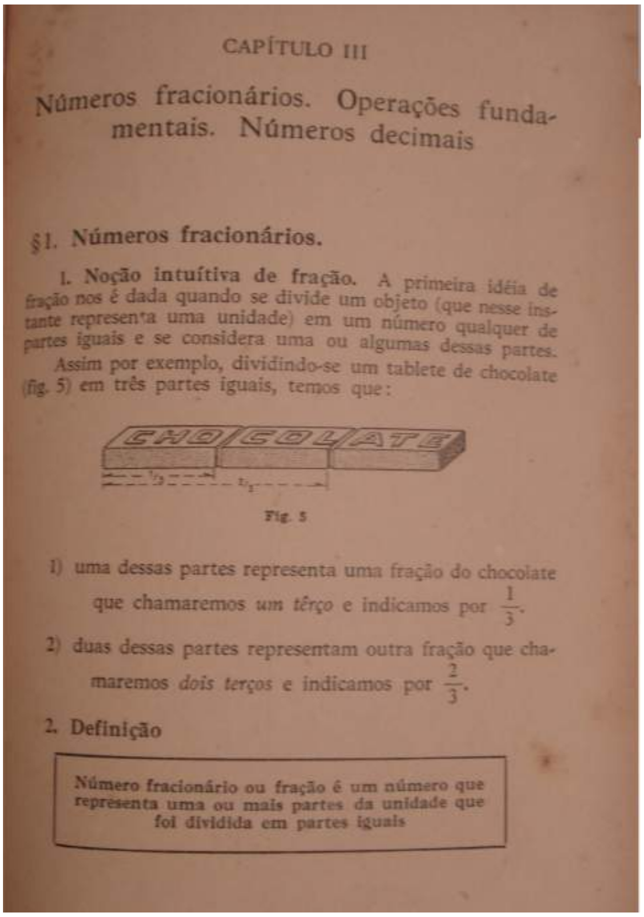


Fonte: Sangiorgi (1955), (GALANTE; SANTOS, 1954) e (QUINTELA, 1959).

3.1 Noção de fração

Sangiorgi introduz a ideia de fração como uma parte de um objeto (unidade), como pode ser visto na Figura 2. Desse modo, o autor associa *fração* à representação da parte (ou partes) de um todo que possa ser igualmente dividido.

Figura 2 – Ideia inicial de fração em Sangiorgi (1955)



CAPÍTULO III

Números fracionários. Operações fundamentais. Números decimais

§1. **Números fracionários.**

1. **Noção intuítiva de fração.** A primeira idéia de fração nos é dada quando se divide um objeto (que nesse instante representa uma unidade) em um número qualquer de partes iguais e se considera uma ou algumas dessas partes.

Assim por exemplo, dividindo-se um tablete de chocolate (fig. 5) em três partes iguais, temos que:

Fig. 5

1) uma dessas partes representa uma fração do chocolate que chamaremos *um têrço* e indicamos por $\frac{1}{3}$.

2) duas dessas partes representam outra fração que chamaremos *dois terços* e indicamos por $\frac{2}{3}$.

2. **Definição**

Número fracionário ou fração é um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais

Fonte: Sangiorgi (1955, p.97).

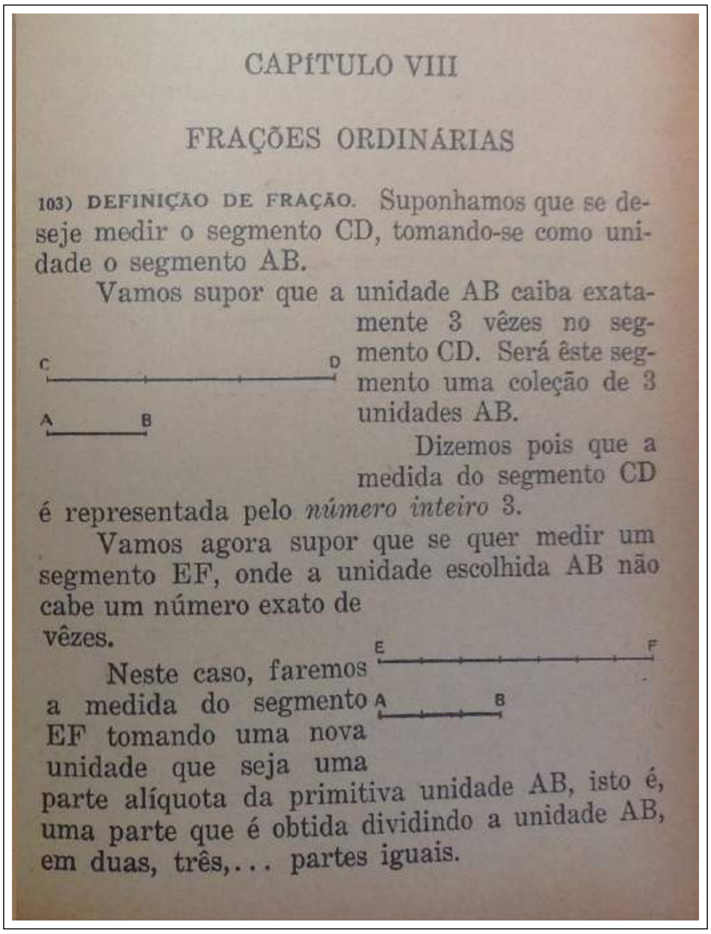
A partir da ideia de fração, Sangiorgi define número fracionário ou fração como "um número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais" (SANGIORGI, 1955, p.97). Nessa representação, são usados dois inteiros sobrepostos, numa certa ordem, "sendo o segundo diferente de zero"e separados por um "traço horizontal", chamados *numerador* e *denominador*, respectivamente. "O *numerador* indica em quantas partes foi dividida a unidade e o *numerador* quantas dessas partes foram tomadas" (SANGIORGI, 1955, p.98). Sangiorgi não justifica a exigência do numerador ser diferente de zero.

Enquanto (SANGIORGI, 1955, p.97) introduz a fração como parte de um objeto físico (barra de chocolate), Galante e Santos (1954) partem de um objeto geométrico (segmento de reta) para a construção da ideia de fração (figura 3). A divisão de uma unidade (segmento) em partes iguais (segmentos congruentes) dá origem à *unidade fracionária*, representada por símbolos, conforme seja dividida em 2, 3, 4 ... partes iguais. Dá-se o nome de *parte alíquota* a cada uma dessas partes[1] Têm-se então: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ..., respectivamente. A representação de 7 unidades fracionárias iguais a $\frac{1}{3}$ é dada pelo símbolo $\frac{7}{3}$. Os símbolos $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ denominam-se *frações* ou *números fracionários*. Logo, Galante define fração como "todo símbolo ou expressão

[1] Os conceito de *unidade fracioária* e de *parte alíquota* não estão presentes nas coleções de Sangiorgi.

que represente uma ou mais unidades fracionárias.”

Figura 3 – Introdução da ideia de fração em Galante e Santos (1954).



CAPÍTULO VIII

FRAÇÕES ORDINÁRIAS

103) DEFINIÇÃO DE FRAÇÃO. Suponhamos que se deseje medir o segmento CD, tomando-se como unidade o segmento AB.

Vamos supor que a unidade AB caiba exatamente 3 vêzes no segmento CD. Será êste segmento uma coleção de 3 unidades AB.

Dizemos pois que a medida do segmento CD é representada pelo *número inteiro* 3.

Vamos agora supor que se quer medir um segmento EF, onde a unidade escolhida AB não cabe um número exato de vêzes.

Neste caso, faremos a medida do segmento EF tomando uma nova unidade que seja uma parte alíquota da primitiva unidade AB, isto é, uma parte que é obtida dividindo a unidade AB, em duas, três,... partes iguais.

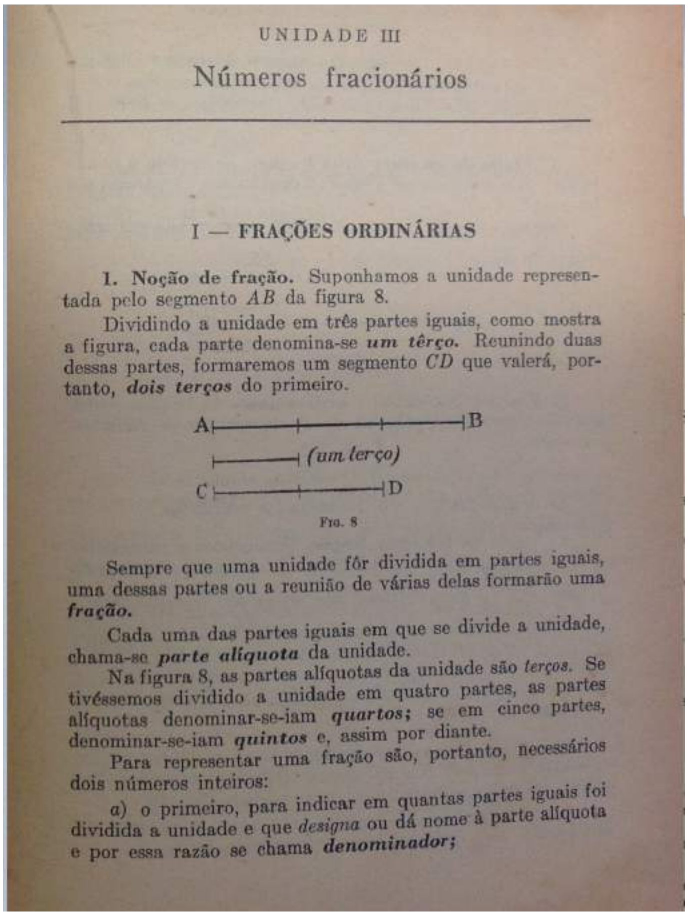
Fonte: Galante e Santos (1954, p.121).

Galante e Santos (1954) nomeiam os termos da fração (numerador e denominador), indicando a fração por $\frac{m}{n}$, onde “n indica o número de partes em que dividimos a unidade e m quantas as partes que foram tomadas.” Nota-se que, ainda que de passagem, o texto apresenta a linguagem algébrica para generalizar o conceito, o que não aparece em momento algum nos textos de Sangiorgi desse período, referentes a esse assunto, bem como a observação dada por Galante em relação aos denominadores das frações:

> A definição de fração exclui o caso em que o denominador seja *0* ou *1*, pois não tem sentido a divisão de uma grandeza em *0* partes iguais, assim como igualmente não tem significado a divisão por *1*, pois não se obtém *partes* do todo.
> Ao símbolo $\frac{m}{0}$ não daremos significado algum, enquanto ao símbolo $\frac{m}{1}$ atribuiremos, or definição, o próprio número *m* (GALANTE; SANTOS, 1954, p.129).

Para introduzir a ideia de fração, Quintela (1959) usam o mesmo objeto geométrico que Galante e Santos (1954), como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Introdução da ideia de fração, em Quintela (1959).



UNIDADE III

Números fracionários

I — FRAÇÕES ORDINÁRIAS

1. Noção de fração. Suponhamos a unidade representada pelo segmento *AB* da figura 8.

Dividindo a unidade em três partes iguais, como mostra a figura, cada parte denomina-se ***um têrço.*** Reunindo duas dessas partes, formaremos um segmento *CD* que valerá, portanto, ***dois terços*** do primeiro.

FIG. 8

Sempre que uma unidade fôr dividida em partes iguais, uma dessas partes ou a reunião de várias delas formarão uma ***fração.***

Cada uma das partes iguais em que se divide a unidade, chama-se ***parte alíquota*** da unidade.

Na figura 8, as partes alíquotas da unidade são *terços.* Se tivéssemos dividido a unidade em quatro partes, as partes alíquotas denominar-se-iam ***quartos;*** se em cinco partes, denominar-se-iam ***quintos*** e, assim por diante.

Para representar uma fração são, portanto, necessários dois números inteiros:

a) o primeiro, para indicar em quantas partes iguais foi dividida a unidade e que *designa* ou dá nome à parte alíquota e por essa razão se chama ***denominador;***

Fonte: Quintela (1959, p.117).

Tomando um segmento (unidade) e sua divisão igualitária (partes alíquotas), Quintela apresenta a leitura de cada uma dessas partes e define os termos da fração (numerador e denominador) (QUINTELA, 1959, p.117). Para Quintela, deve-se escrever "o numerador e à sua direita ou abaixo, o denominador, separado por um traço" (QUINTELA, 1959, p.118). Como exemplo, ele traz $\frac{2}{5}$ ou $2/5$.

Somente após a apresentação das ideias e dos conceitos iniciais de fração, Quintela (1959) apresenta sua definição: "Fração é o número formado por uma ou mais partes alíquotas da unidade." Ressalva, para essa definição, que o "denominador dever ser pelo menos igual a 2". Para o caso de denominador igual a 1 seu valor é, "por definição, igual ao numerador" (QUINTELA, 1959, p.120).

Quintela também toma a fração como quociente, ou seja, esta é introduzida como resultado de uma operação com números inteiros e mostra, como exemplo, a seguinte situação:

> Se tivermos de dividir uma maçã entre três meninos, efetuamos uma divisão

> em que o dividendo é 1 (uma maçã) e o divisor é 3 (três meninos). Ora, para dividirmos a maçã, temos que parti-la em três partes iguais, para darmos uma parte ou um terço a cada menino.Assim: $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (QUINTELA, 1959, p.120)

A partir dessa apresentação inicial, podemos notar que:

1. os três autores utilizam a ideia da divisão igualitária de uma unidade. Para Sangiorgi(1955) a unidade é um tablete de chocolate, enquanto Galante e Quintela usam um segmento como unidade;

2. Quintela e Galante usam o conceito de *parte alíquota*, o que não é feito por Sangiorgi, mas somente Quintela introduz o conceito de *unidade fracionária*;

3. os termos da fração (numerador e denominador) estão presentes nas três coleções;

4. Sangiorgi, Galante e Quintela consideram a fração como número fracionário. Todavia, somente Quintela deixa evidente essa relação na definição adotada. Assim, a fração é tomada como quociente de dois inteiros, ideia que é destacada no texto de Quintela, conforme visto acima.

5. nenhum dos autores utiliza a denominação de *números racionais* em seus textos.

3.2 Classificação de frações

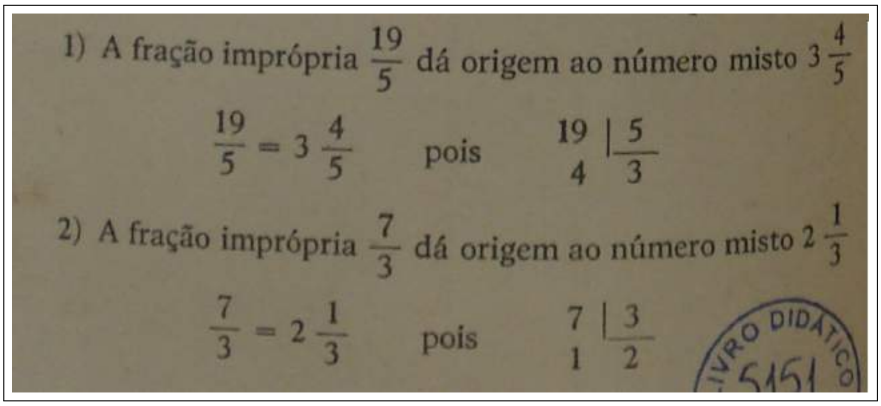
Além das definições de numerador e denominador, Sangiorgi introduz os seguintes conceitos e classificações para as frações:

- **Frações decimais** e **frações ordinárias**, conforme seus denominadores sejam potências de dez ou outros inteiros, respectivamente. (SANGIORGI, 1955, p.99);

- **Fração própria**, na qual o "numerador se apresenta menor que o denominador", ou seja, a fração "é menor que a unidade"; **fração imprópria**, cujo denominador é igual ou maior que o numerador sendo, portanto, "igual ou maior que a unidade", respectivamente; **fração aparente**, as quais têm o numerador divisível pelo denominador, sendo iguais aos números inteiros que se obtém dividindo o numerador pelo denominador (SANGIORGI, 1955, p.100). O autor ainda apresenta três exemplos de cada tipo de fração, dentre os quais podemos citar:

$$\frac{122}{453} < 1 \qquad \frac{217}{12} > 1 \qquad \frac{196}{28} = 7$$

Figura 5 – Números mistos e extração de inteiros de frações impróprias, em livro de Sangiorgi, nos anos 1950.



1) A fração imprópria $\frac{19}{5}$ dá origem ao número misto $3\frac{4}{5}$

$$\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5} \qquad \text{pois} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

2) A fração imprópria $\frac{7}{3}$ dá origem ao número misto $2\frac{1}{3}$

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \qquad \text{pois} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

Fonte: Sangiorgi (1955, p.97).

- **Número misto**, segundo Sangiorgi (1955, p.100), equivale a uma fração imprópria, mas é "composto de um número inteiro e de uma fração própria", como mostram os exemplos da Figura 5.

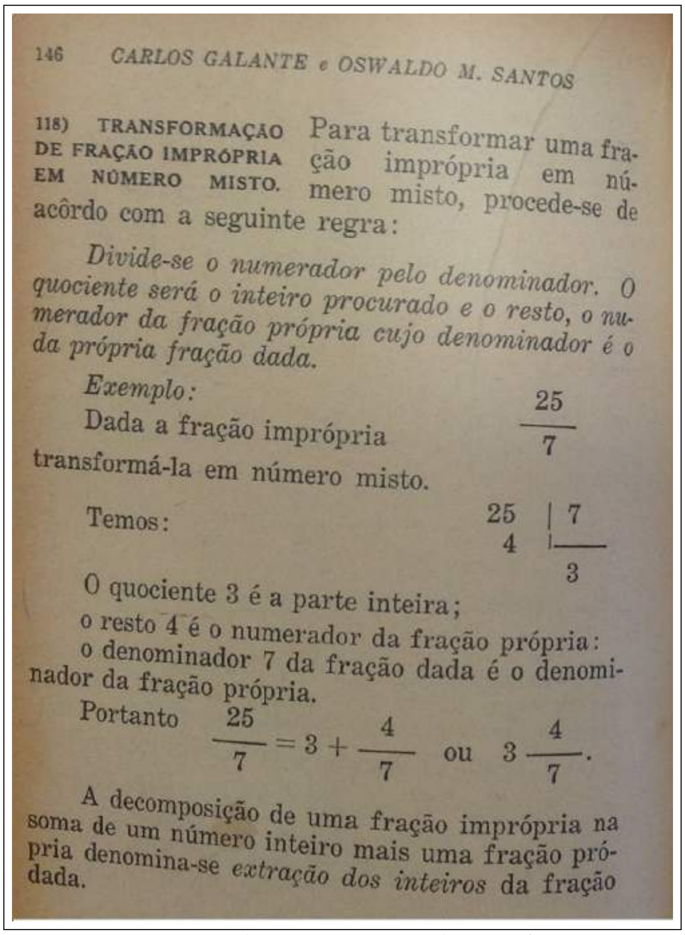
  Para a conversão de um número misto em fração imprópria, Sangiorgi mostra a seguinte regra:

> (···) pode-se transformar um *número misto* numa *fração imprópria*, construindo-se para isso uma fração de mesmo denominador e de numerador igual ao produto do inteiro pelo denominador somado com o numerador. Exemplo:
>
> $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ numerador: $3 \times 4 + 2 = 14$ denominador: 3
>
> (SANGIORGI, 1955, p.101)

Galante e Santos (1954) apresentam a mesma classificação dada por Sangiorgi (1955). No entanto, a definição de número misto e sua equivalência com a fração imprópria são apresentadas mais adiante, ao tratar das operações com frações. Para Galante e Santos (1954, p.144) o número misto é a "soma de um número inteiro com uma fração própria". Assim, $4 + \frac{5}{7}$ é um número misto, podendo ser escrito como $4\frac{5}{7}$. A conversão de fração imprópria em número misto (e vice-versa) é apresentada por meio de regra, não diferindo essencialmente do processo mostrado por Sangiorgi (1955), como podemos ver na Figura 6.

A partir da definição de fração, Quintela (1959) define a unidade como uma fração com numerador e denominador iguais, a *fração própria*, cujo numerador é menor que o denominador, e a *fração imprópria*, na qual o numerador é maior que o denominador. Note que esta classificação não difere daquela adota por Sangiorgi (1955) e por Galante e Santos (1954). Todavia, ele não trata da fração aparente.

Figura 6 – Números mistos e frações impróprias, em Galante e Santos (1954).



146 CARLOS GALANTE e OSWALDO M. SANTOS

118) TRANSFORMAÇÃO DE FRAÇÃO IMPRÓPRIA EM NÚMERO MISTO. Para transformar uma fração imprópria em número misto, procede-se de acôrdo com a seguinte regra:

Divide-se o numerador pelo denominador. O quociente será o inteiro procurado e o resto, o numerador da fração própria cujo denominador é o da própria fração dada.

Exemplo:

Dada a fração imprópria $\frac{25}{7}$ transformá-la em número misto.

Temos: $\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$

O quociente 3 é a parte inteira;
o resto 4 é o numerador da fração própria:
o denominador 7 da fração dada é o denominador da fração própria.

Portanto $\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}$ ou $3\,\frac{4}{7}$.

A decomposição de uma fração imprópria na soma de um número inteiro mais uma fração própria denomina-se *extração dos inteiros* da fração dada.

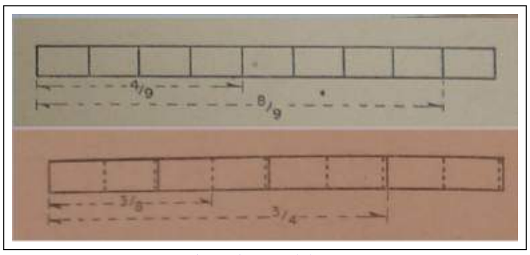
Fonte: Galante e Santos (1954, p.146).

3.3 Propriedades

São apresentadas por Sangiorgi (1955) as seguintes propriedades:

1. Numerador: *multiplicando-se* (ou dividindo-se) o numerador de uma fração por um certo número, diferente de zero, o valor da fração fica *multiplicado* (ou dividido) por esse número.

Figura 7 – Ilustrações das propriedades das frações, em Sangiorgi (1955).



Fonte: Sangiorgi (1955, pp.101-102).

2. Denominador: *multiplicando-se* (ou dividindo-se) o numerador de uma fração por um certo número, diferente de zero, o valor da fração fica *dividido* (ou multiplicado) por esse número, como mostra a Figura 7.

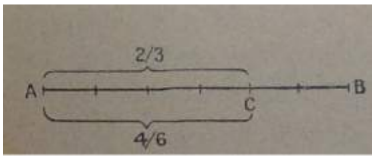
3. *Multiplicando-se* (ou dividindo-se) *ambos os termos* de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, o valor da fração *não se altera*. Essa propriedade é justificada pelas duas propriedades anteriores.

   Em seu texto, Sangiorgi (1955) não associa a *multiplicação* e a *divisão* dos termos de uma fração por um mesmo número com a multiplicação desta fração pelo elemento neutro da multiplicação (1), isto é, $\frac{10}{6} = \frac{10 \div 2}{6 \div 2} = \frac{10}{6} \times \frac{2}{2} = \frac{10}{6} \times 1$, certamente por não estar ainda definida a multiplicação de frações. Todavia, essa relação também não é estabelecida no decorrer do texto.

   A partir dessas propriedades, Sangiorgi (1955) define as *frações equivalentes* como sendo aquelas de *igual valor*. Assim, $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ são equivalentes, pois $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$ (SANGIORGI, 1955, p.103).

   Como propriedade fundamental das frações, Galante e Santos (1954, p.128) apresentam a equivalência de frações: *Multiplicando-se ou dividindo-se ambos os termos de uma fração pelo mesmo número, diferente de zero, obtém-se uma fração igual à fração dada.* Note que esta corresponde à 3ª propriedade apresentada por Sangiorgi. Galante e Santos (1954) apresentam uma figura para ilustrar a equivalência de frações (vide Figura 8), o que não é feito por Sangiorgi.

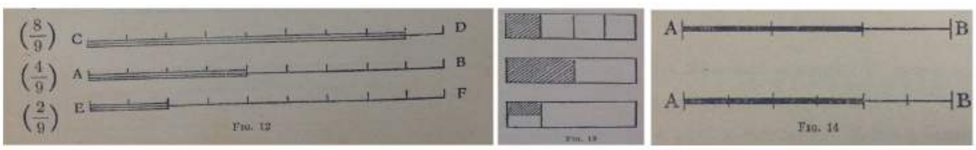
Figura 8 – Ilustrações usadas por Galante e Santos (1954, pp.128-129) na apresentação das propriedades e de frações equivalentes.



Fonte: Galante e Santos (1954, pp.128-129).

Quintela, por sua vez, apresenta as mesma propriedades que Sangiorgi (1955), em igual sequência e fazendo uso de ilustrações, como podemos ver na Figura 9.

Figura 9 – Ilustrações usadas por Quintela (1959) na apresentação de frações equivalentes.



Fonte: Quintela (1959, pp.125-127).

3.4 Simplificação

Para Sangiorgi, "Simplificar uma fração significa dividir ambos os termos por um divisor comum", dando como exemplo:

$$\frac{48}{56} = \frac{24}{28} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7} \tag{3.1}$$

Assim, as "frações $\frac{24}{28}$, $\frac{12}{14}$ e $\frac{6}{7}$ são equivalentes à fração $\frac{48}{56}$ e evidentemente mais simples." (SANGIORGI, 1955, p.103).

Para Galante e Santos (1954, p.130) "simplificar uma fração é obter outra fração, igual à primeira, porém de termos menores". Assim como em Sangiorgi (1955), a simplificação de uma fração pode ser feita "dividindo-se ambos os termos por um divisor comum, diferente da unidade."(GALANTE; SANTOS, 1954, p.130). Logo, para simplificar a fração $\frac{30}{42}$, na qual os dois termos admitem os divisores comuns 3 e 6, pode-se fazer:

$$\frac{30:3}{42:3} = \frac{10}{14} \quad \text{ou} \quad \frac{30:6}{42:6} = \frac{5}{7} \tag{3.2}$$

Ou seja:

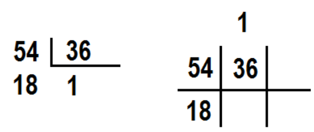
$$\frac{30}{42} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \tag{3.3}$$

Sangiorgi (1955) e Quintela (1959) consideram a simplificação de uma fração como a divisão de seus termos por um mesmo número, obtendo uma fração igual à dada. Logo, como os termos da fração $\frac{12}{18}$ são divisíveis por 2,3 e 6, temos $\frac{12}{18} = \frac{6}{9}$, $\frac{12}{18} = \frac{4}{6}$ e $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

"Caso uma fração não possa ser mais simplificada, diz-se que ela é *irredutível* ou reduzida à sua *forma mais simples possível*."(SANGIORGI, 1955, p.104). Como técnica operatória, pode-se dividir os termos por seu máximo divisor comum (m.d.c.) (tópico abordado no capítulo II do livro). Sangiorgi apresenta um exemplo (vide figura 10), onde mostra um algoritmo para a determinação do m.d.c. (máximo divisor comum).

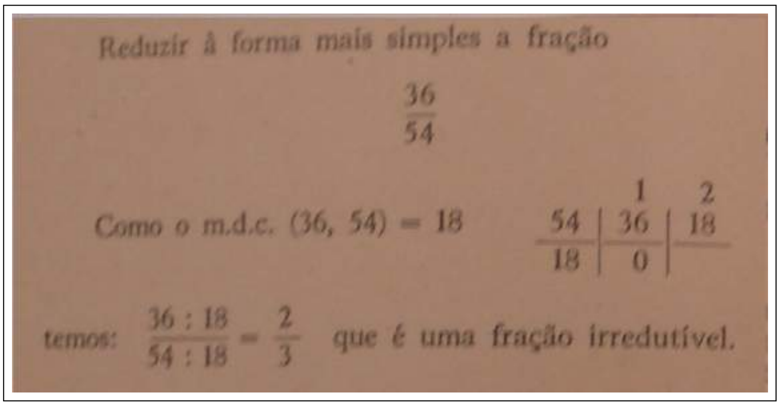
Observe que Sangiorgi (1955) determina o m.d.c. (54,36) efetuando divisões euclidianas sucessivas. Essa disposição pode ser assim descrita:

- Inicialmente, divide-se 54 por 36, obtendo 1 como quociente e 18 como resto:



- Em seguida, dividir 36 por 18, resto da divisão anterior, obtendo o quociente 2 e 0 como resto.

Figura 10 – Obtenção da fração irredutível, em livro de Sangiorgi, nos anos 1950.



Reduzir à forma mais simples a fração

$$\frac{36}{54}$$

Como o m.d.c. (36, 54) = 18

$$\begin{array}{r|r|r} & 1 & 2 \\ 54 & 36 & 18 \\ \hline 18 & 0 & \end{array}$$

temos: $\frac{36:18}{54:18} = \frac{2}{3}$ que é uma fração irredutível.

Fonte: Sangiorgi (1955, p.104).

$$\begin{array}{r|l} 36 & 18 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|r} & 1 & 2 \\ 54 & 36 & 18 \\ \hline 18 & 0 & \end{array}$$

- Como esta última divisão tem resto igual a zero, o quociente 18 é o máximo divisor comum procurado.

Galante e Santos (1954) também empregam as expressões "forma mais simples" e "fração irredutível", propondo os seguintes métodos de redução:

1. *Dividir ambos os termos pelo m.d.c. deles*. Como exemplo, faz a redução da fração $\frac{56}{64}$. Como o m.d.c. de 56 e 64 é 8, temos:

$$\frac{56}{64} = \frac{56:8}{64:8} = \frac{7}{8} \tag{3.4}$$

2. *Transformar ambos os termos no produto dos seus fatores primos, suprimindo-se, depois, todos os fatores primos comuns do numerador e do denominador* (GALANTE; SANTOS, 1954, p.132). Portanto, a fração $\frac{210}{154}$ pode ser assim reduzida:

$$\frac{210}{154} = \frac{2\times3\times5\times7}{2\times7\times11} = \frac{3\times5}{11} = \frac{15}{11} \tag{3.5}$$

Esse processo não aparece nas demais coleções analisadas neste trabalho.

3. *Dividir, sucessivamente, os dois termos da fração pelos seus divisores comuns.* Como exemplo, temos:

$$\frac{126}{294} = \frac{63}{147} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7} \tag{3.6}$$

De forma semelhante a Sangiorgi e Galante, Quintela propõe as simplificações sucessivas e a divisão pelo m.d.c. dos termos da fração, visando a obtenção da “expressão mais simples” ou “fração irredutível”. Todavia, justifica a segunda maneira pela propriedade: *Os quocientes das divisões de dois números pelo m.d.c. são primos entre si* (QUINTELA, 1959, p.128).

Para a *redução de frações ao mínimo denominador comum* Sangiorgi (1955, p.105) sugere três etapas, enquanto (QUINTELA, 1959) sugere apenas duas. Observe a semelhança entre esses procedimentos no Quadro 1.

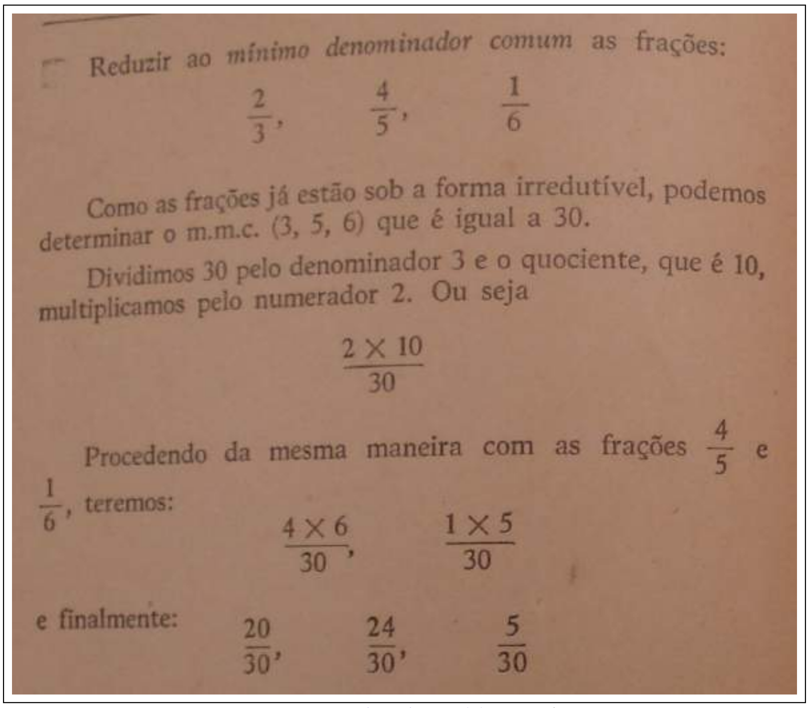
Quadro 1 – Etapas da redução de frações ao mínimo denominador comum, em livros da década de 1950, de Sangiorgi e Quintela.

SANGIORGI (1955)	QUINTELA (1959)
1. Reduzem-se as frações à forma irredutível; 2. Determina-se o m.m.c. dos denominadores dessas frações; 3. Multiplica-se cada numerador pelo quociente da divisão do m.m.c. pelo denominador e dá-se para denominador o m.m.c.	1. Reduzem-se as frações à expressão mais simples; 2. Multiplicam-se os dois termos de cada uma pelo quociente da divisão do m.m.c. dos denominadores pelo denominador correspondente.

Fonte: Sangiorgi (1955, p.105) e Quintela (1959, p.129).

Sangiorgi apresenta um exemplo, seguindo cada uma destas etapas, com seus devidos comentários.(Figura 11).

Figura 11 – Redução de frações ao mínimo denominador comum em Sangiorgi (1955).



Reduzir ao *mínimo denominador comum* as frações:

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{6}$$

Como as frações já estão sob a forma irredutível, podemos determinar o m.m.c. (3, 5, 6) que é igual a 30.

Dividimos 30 pelo denominador 3 e o quociente, que é 10, multiplicamos pelo numerador 2. Ou seja

$$\frac{2 \times 10}{30}$$

Procedendo da mesma maneira com as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{6}$, teremos:

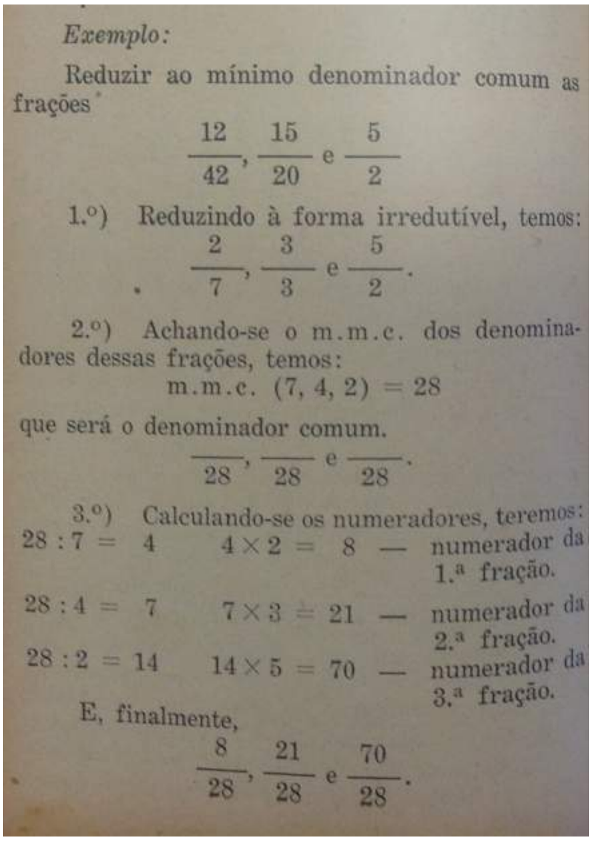
$$\frac{4 \times 6}{30}, \quad \frac{1 \times 5}{30}$$

e finalmente: $\frac{20}{30}, \quad \frac{24}{30}, \quad \frac{5}{30}$

Fonte: Sangiorgi (1955, p.106).

Essas etapas também são propostas por Galante e Santos (1954, p.135), que mostram um exemplo, seguindo cada uma dessas etapas,como pode ser visto na Figura 12.

Figura 12 – Redução de frações ao mínimo denominador comum nos anos 1950.



Exemplo:

Reduzir ao mínimo denominador comum as frações

$$\frac{12}{42}, \frac{15}{20} \text{ e } \frac{5}{2}$$

1.º) Reduzindo à forma irredutível, temos:

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{3} \text{ e } \frac{5}{2}.$$

2.º) Achando-se o m.m.c. dos denominadores dessas frações, temos:

m.m.c. (7, 4, 2) = 28

que será o denominador comum.

$$\frac{\quad}{28}, \frac{\quad}{28} \text{ e } \frac{\quad}{28}.$$

3.º) Calculando-se os numeradores, teremos:

$28 : 7 = 4 \quad 4 \times 2 = 8$ — numerador da 1.ª fração.

$28 : 4 = 7 \quad 7 \times 3 = 21$ — numerador da 2.ª fração.

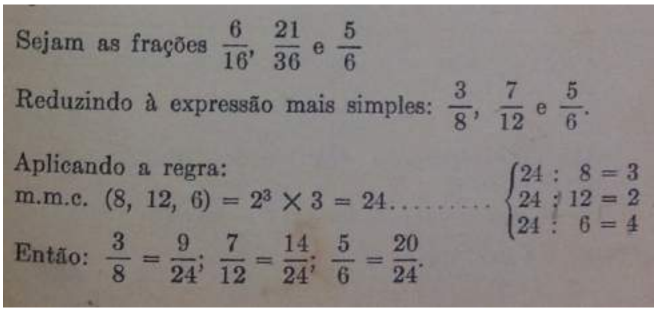
$28 : 2 = 14 \quad 14 \times 5 = 70$ — numerador da 3.ª fração.

E, finalmente,

$$\frac{8}{28}, \frac{21}{28} \text{ e } \frac{70}{28}.$$

Fonte: Galante e Santos (1954, p.136).

Figura 13 – Redução de frações ao mínimo denominador comum em livro dos anos 1950.



Sejam as frações $\frac{6}{16}, \frac{21}{36}$ e $\frac{5}{6}$

Reduzindo à expressão mais simples: $\frac{3}{8}, \frac{7}{12}$ e $\frac{5}{6}$.

Aplicando a regra:

m.m.c. (8, 12, 6) = $2^3 \times 3 = 24$ .... $\begin{cases} 24 : 8 = 3 \\ 24 : 12 = 2 \\ 24 : 6 = 4 \end{cases}$

Então: $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}; \frac{7}{12} = \frac{14}{24}; \frac{5}{6} = \frac{20}{24}.$

Fonte: Quintela (1959, p.129).

Inicialmente, Quintela (1959) apresenta a redução das frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ ao mesmo denominador, multiplicando o termos de cada fração pelo denominador da outra:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12} \qquad \text{e} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \tag{3.7}$$

Para o caso de várias frações, propõe como denominador comum o m.m.c. dos denominadores, multiplicando cada denominador por um fator apropriado. Como exemplo, reduz as frações $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{2}$ ao denominador 12, m.d.c. de 4, 6 e 2.

Por fim, Quintela (1959) apresenta uma regra geral (Quadro 1) e um exemplo de sua aplicação, que pode ser visto na Figura 13.

Observe que a forma irredutível da fração $\frac{15}{20}$ não é $\frac{3}{3}$, como foi erroneamente impresso, e sim $\frac{3}{4}$. Trata-se evidentemente de uma falha na impressão, pois o denominador 4 é usado na determinação do mínimo múltiplo comum.

Portanto, pode-se notar que Quintela (1959) e Sangiorgi (1955) apresentam regras semelhantes para a redução de frações ao mínimo denominador comum.

3.5 Comparação

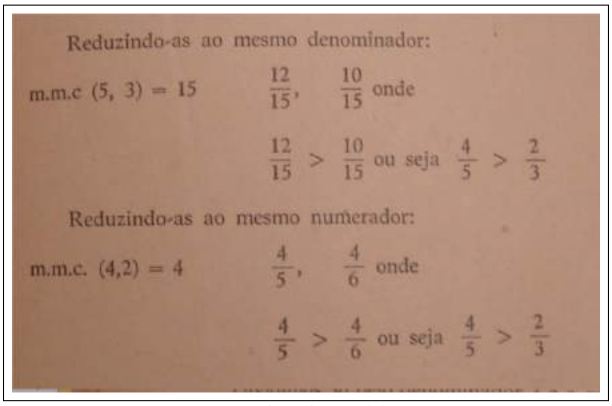
Para comparar frações, Sangiorgi (1955) apresenta as seguintes situações:

1. denominadores iguais: "a *maior* é a que tem *maior numerador*" (SANGIORGI, 1955, p.106). Exemplo: $\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$.

2. numeradores iguais:"a *maior* é a que tem *menor numerador*". Exemplo: $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$.

3. numerador e denominador diferentes: "a comparação é feita *reduzindo-as ao mesmo denominador* (ou ao mesmo numerador)" (SANGIORGI, 1955, p.107). A figura 14 apresenta o exemplo de Sangiorgi para as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$.

Figura 14 – Comparação entre frações com denominadores e numeradores diferentes em livros didáticos dos anos 1950.



Reduzindo-as ao mesmo denominador:

m.m.c (5, 3) = 15 $\frac{12}{15}$, $\frac{10}{15}$ onde

$\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$ ou seja $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

Reduzindo-as ao mesmo numerador:

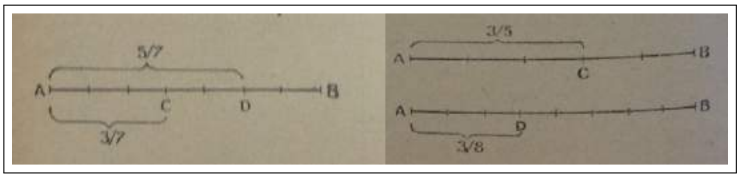
m.m.c. (4,2) = 4 $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$ onde

$\frac{4}{5} > \frac{4}{6}$ ou seja $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

Fonte: Sangiorgi (1955, p.107).

Galante e Santos (1954, p.137) utiliza as mesmas situações e procedimentos que Sangiorgi (1955). Todavia, emprega ilustrações para os dois primeiros casos, como pode ser visto na Figura 15 , o que não é feito por Sangiorgi.

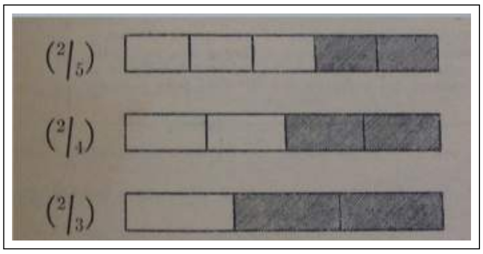
Figura 15 – Comparação entre frações com numeradores e denominadores diferentes, respectivamente, nos anos 1950.



Fonte: Galante e Santos (1954, pp.138-139).

Para os casos de comparação de frações com denominadores (ou numeradores) iguais, (QUINTELA, 1959) apresenta as mesmas regras de (SANGIORGI, 1955), fazendo ainda o uso de ilustrações, como podemos ver na Figura 16. Note que a figura apresentada pode provocar certa confusão, ao não identificar as frações referentes às partes coloridas (ou não) da figura.

Figura 16 – Comparação de frações em livros didáticos dos anos 1950.



Fonte: Quintela (1959, p.121).

Ao tratar de frações com denominadores diferentes, no entanto, o autor propõe a redução das frações a serem comparadas ao denominador (ou numerador) comum, sugerindo a comparação "por intermédio da unidade ou da fração $\frac{1}{2}$ ou de outra fração simples" (QUINTELA, 1959, p.122). Veja os exemplos:

> 1º) Comparar as frações $\frac{7}{5}$ e $\frac{3}{4}$.
> A fração $\frac{7}{5}$ é maior que a unidade e a fração $\frac{3}{4}$ é menor, logo, $\frac{7}{5} > \frac{3}{4}$.
> 2º) Comparar as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{7}$.
> Temos: $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$ e $\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$, logo, $\frac{4}{5} > \frac{2}{7}$ (QUINTELA, 1959, p.122)

Observe que Quintela não apresenta exemplos dos casos onde as frações são ambas menores que $\dfrac{1}{2}$ ou maiores que a unidade.

Como observação, Quintela (1959, p.130) também apresenta a comparação de frações, a partir da redução a denominadores (ou numeradores) comuns. Veja os exemplos exemplos:

1. Comparar $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{7}$.

   Como $\dfrac{3}{4} = \dfrac{21}{28}$ e $\dfrac{5}{7} = \dfrac{20}{28}$, então $\dfrac{3}{4} > \dfrac{5}{7}$.

2. Comparar $\frac{2}{375}$ e $\frac{3}{453}$.

   Como $\frac{2}{375} = \frac{6}{1125}$ e $\frac{3}{453} = \frac{6}{906}$, então $\frac{3}{453} > \frac{2}{375}$.

O segundo exemplo dado por Quintela (1959) evidencia a vantagem da opção pela redução dos **numeradores** na comparação entre $\frac{2}{375}$ e$\frac{3}{453}$, uma vez que determinar o m.m.c.(2,3) é menos trabalhoso que o m.m.c.(375, 453), bem como a determinação dos novos numeradores.

Vale a pena destacar que Sangiorgi (1955) faz pouco uso de figuras para ilustrar ou reforçar as definições, regras e procedimentos apresentados. No entanto, essa constituirá uma das mudanças em seu texto na coleção dos anos 1960 e 1970, como veremos mais adiante.

Após esses tópicos iniciais, Sangiorgi (1955) apresenta uma seção de exercícios, com 20 questões, algumas destas com vários itens, sendo as respostas apresentadas, em forma de listas, logo depois da seção.

3.6 Operações com números fracionários

Nesta etapa, analisaremos como cada um dos autores apresenta as operações com os números fracionários. Para tanto, trataremos de cada uma das operações, separadamente, mostrando como esta é tratada em cada uma das coleções.

1. **Adição**

   Sangiorgi (1955) considera os seguintes casos:

   - Frações com mesmo denominador: "Somam-se os denominadores e conserva-se o denominador comum". Exemplo:

$$\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{3}{9}=\frac{4+1+3}{9}=\frac{8}{9} \tag{3.8}$$

   - Frações com denominadores diferentes: "Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do primeiro caso". Exemplo:

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{24}{30}+\frac{20}{30}+\frac{5}{30}=\frac{24+20+5}{30}=\frac{49}{30}=1\frac{19}{30} \tag{3.9}$$

   - Números mistos ou números inteiros: nesse caso deve-se transformar "os números mistos em fração imprópria e os inteiros em frações aparentes de denominador 1" (SANGIORGI, 1955, p.113). Como exemplo o texto traz:

$$\frac{3}{4}+2\frac{1}{5}+6=\frac{3}{4}+\frac{11}{5}+\frac{6}{1}=\frac{15+44+120}{20}=\frac{179}{20}=8\frac{19}{20} \tag{3.10}$$

Outro modo, apresentado em Sangiorgi (1955, p.114), consiste em “reduzir as frações ao mesmo denominador sem transformar os números mistos em frações impróprias”. Assim:

$$\frac{3}{4}+2\frac{1}{5}+6=\frac{15}{20}+2\frac{4}{20}+6=8\frac{19}{20} \tag{3.11}$$

Galante e Santos (1954) apresentam os mesmos casos e procedimentos que Sangiorgi (1955), o que pode ser percebido por alguns de seus exemplos:

$$\text{(a)}\quad \frac{5}{17}+\frac{3}{17}+\frac{7}{17} = \frac{5+3+7}{17}=\frac{15}{17} \tag{3.12}$$

$$\text{(b)}\quad \frac{2}{15}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6} = \frac{4}{30}+\frac{20}{30}+\frac{5}{30}=\frac{4+20+5}{30}=\frac{29}{30} \tag{3.13}$$

$$\text{(c)}\quad 4+\frac{4}{7}=2+\frac{3}{5} = \frac{4}{1}+47+\frac{2}{1}=\frac{3}{5}=\frac{140}{35}+\frac{20}{35}+\frac{70}{35}+\frac{21}{35}=\frac{251}{35} \tag{3.14}$$

$$\text{(d)}\quad 3\frac{2}{3}=\frac{4}{5}+7\frac{5}{6} = \frac{11}{3}+\frac{4}{5}=\frac{47}{6}=\frac{110}{30}+\frac{24}{3}+\frac{235}{30}=\frac{369}{3} \tag{3.15}$$

Logo após a presentação dessa operação, Galante traz um lista de exercícios, com 25 itens.

Quintela considera os seguintes casos:

a) **Adições de frações que tem o mesmo denominador**. Exemplo:

$$\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+2+3}{7}=\frac{6}{7} \tag{3.16}$$

REGRA: *Adicionam-se os numeradores e dá-se ao resultado o denominador comum.*

b) **Adição de frações quaisquer.** Exemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{8+9+10}{12}=\frac{27}{12}=2\frac{1}{4} \tag{3.17}$$

REGRA: *Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do caso anterior.*

c) **Adição de inteiros e frações ou números fracionários.** Como exemplo, é proposta a adição $2+\frac{3}{4}+1+\frac{2}{3}+3+\frac{1}{2}$, resolvida em duas etapas:

- Soma das frações:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{9+8+6}{12}=\frac{23}{12}=1\frac{11}{12} \tag{3.18}$$

- Soma do resultado com os inteiros:

$$1\frac{11}{12}+2+1+3=7\frac{11}{12} \tag{3.19}$$

Nenhuma regra é aqui enunciada.

2. **Subtração**

Nas três coleções estudadas, percebe-se que a subtração de frações é efetuada a partir dos mesmos procedimentos aplicados na adição de frações. Para melhor percepção das semelhanças entre as abordagens presentes em cada uma das obras, observemos como cada autor apresenta as regras e exemplos para cada um dos seguintes casos ou situações que envolvem a subtração de frações, ou seja:

a) As frações possuem denominadores iguais.
b) As frações possuem denominadores diferentes.
c) Números inteiros e mistos.

Os exemplos aqui apresentados constam nas referidas obras, bem como as regras relacionadas a cada caso analisado.

a) **As frações possuem denominadores iguais.**

O Quadro 2 mostra como cada autor apresenta a regra referente a esse caso, acompanhada de um exemplo ilustrativo. Apesar da semelhança das apresentações, ressaltamos que, em Sangiorgi (1955), a regra antecede o exemplo, o que não ocorre em Galante e Santos (1954) e Quintela (1959).

Quadro 2 – Subtração de frações com denominadores iguais.

Autor	Regra	Exemplos
Sangiorgi	"Subtraem-se os numeradores e conserva-se o denominador comum" (SANGIORGI, 1955, p.114).	$\frac{13}{21} - \frac{5}{21} = \frac{13-5}{21} = \frac{8}{21}$
Galante	"Para subtrair frações que têm o mesmo denominador, subtraem-se os numeradores, dando-se-lhes, por denominador o denominador comum" (GALANTE; SANTOS, 1954, p.149)	$\frac{11}{15} - \frac{4}{15} = \frac{11-4}{15} = \frac{7}{15}$
Quintela	"Subtraem-se os numeradores e dá-se ao denominador o denominador comum" (QUINTELA, 1959, p.135).	$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5-2}{7} = \frac{3}{7}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

b) **As frações possuem denominadores diferentes**

Quando os denominadores são diferentes, as frações devem ser reduzidas a um denominador comum, seguindo-se a aplicação da regra anterior. Esse procedimento é apresentado como regra por cada um dos autores, como pode ser visto no Quadro 3.

Quadro 3 – Subtração de frações com denominadores diferentes.

Autor	Regra	Exemplos
Sangiorgi	“Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra do primeiro caso” (SANGIORGI, 1955, p.114).	$\frac{6}{7}-\frac{3}{4}=\frac{24}{28}-\frac{21}{28}=\frac{3}{28}$
Galante	“Para subtrair frações que têm denominadores, reduzem-se primeiramente ao mesmo denominador, aplicando-se depois a regra precedente” (GALANTE; SANTOS, 1954, p.149)	$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16}{20}-\frac{15}{20}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}$
Quintela	“Reduzem-se as frações ao mesmo denominador e aplica-se a regra anterior” (QUINTELA, 1959, p.135).	$\frac{5}{8}-\frac{2}{5}=\frac{25-16}{40}=\frac{9}{40}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

c) **Frações e números mistos**

Para Sangiorgi (1955, p.114), “caso a subtração contenha números mistos ou números inteiros, valem as mesmas observações feitas para a adição”.

Desse modo, apresenta os seguintes exemplos:

$$\text{a)}\quad 3\frac{2}{5}-\frac{3}{10} = \frac{17}{5}-\frac{3}{10}=\frac{34}{10}-\frac{3}{10}=\frac{31}{10}=3\frac{1}{10} \tag{3.20}$$

$$\text{b)}\quad 1-\frac{3}{4} = \frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \tag{3.21}$$

$$\text{c)}\quad \frac{11}{3}-2 = \frac{11}{3}-\frac{6}{3}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3} \tag{3.22}$$

$$\text{d)}\quad 5\frac{3}{4}-2\frac{1}{8} = \frac{23}{4}-\frac{17}{8}=\frac{46}{8}-\frac{17}{8}=\frac{29}{8}=3\frac{5}{8}\quad \text{ou} \tag{3.23}$$

$$5\frac{3}{4}-2\frac{1}{8} = 5\frac{6}{8}-2\frac{1}{8}=3\frac{5}{8} \tag{3.24}$$

Galante enuncia uma regra relacionada a esse caso, mas não apresenta exemplos. Todavia, tal situação consta em sua lista de exercícios, como pode ser visto na Figura 17 .

Quintela (1959) não trata do caso envolvendo números mistos. No entanto, apresenta dois casos com números inteiros:

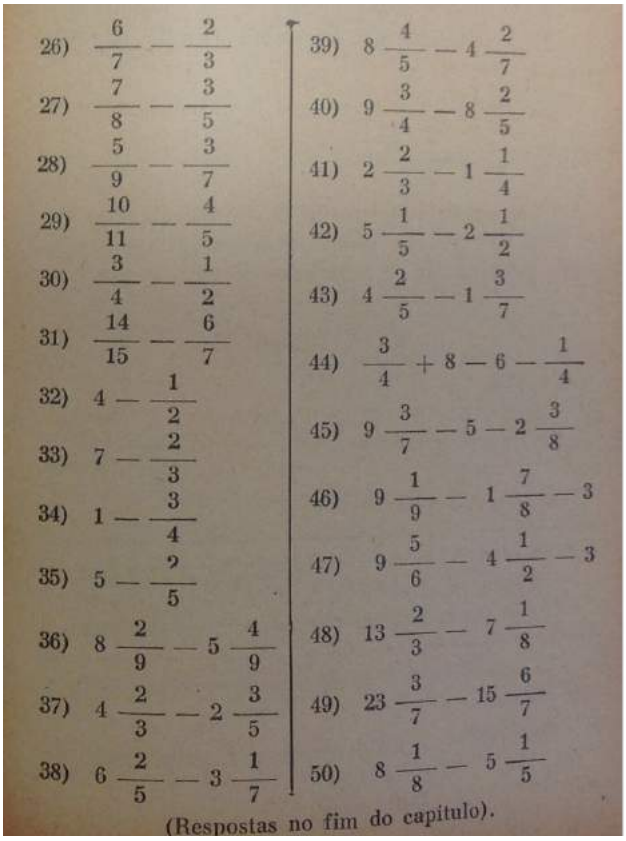
i. Subtrair uma fração de um inteiro

$$4-\frac{3}{5}=\frac{4\times 3}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4\times 5-3}{5}=\frac{17}{5} \tag{3.25}$$

ii. Subtrair um inteiro de uma fração imprópria

$$\frac{8}{3}-2=\frac{8}{3}-\frac{2\times 3}{3}=\frac{8-2\times 3}{3} \tag{3.26}$$

Figura 17 – Lista de exercícios, em livro de Galante dos anos 1950



26) $\frac{6}{7} - \frac{2}{3}$

27) $\frac{7}{8} - \frac{3}{5}$

28) $\frac{5}{9} - \frac{3}{7}$

29) $\frac{10}{11} - \frac{4}{5}$

30) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

31) $\frac{14}{15} - \frac{6}{7}$

32) $4 - \frac{1}{2}$

33) $7 - \frac{2}{3}$

34) $1 - \frac{3}{4}$

35) $5 - \frac{2}{5}$

36) $8\frac{2}{9} - 5\frac{4}{9}$

37) $4\frac{2}{3} - 2\frac{3}{5}$

38) $6\frac{2}{5} - 3\frac{1}{7}$

39) $8\frac{4}{5} - 4\frac{2}{7}$

40) $9\frac{3}{4} - 8\frac{2}{5}$

41) $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4}$

42) $5\frac{1}{5} - 2\frac{1}{2}$

43) $4\frac{2}{5} - 1\frac{3}{7}$

44) $\frac{3}{4} + 8 - 6 - \frac{1}{4}$

45) $9\frac{3}{7} - 5 - 2\frac{3}{8}$

46) $9\frac{1}{9} - 1\frac{7}{8} - 3$

47) $9\frac{5}{6} - 4\frac{1}{2} - 3$

48) $13\frac{2}{3} - 7\frac{1}{8}$

49) $23\frac{3}{7} - 15\frac{6}{7}$

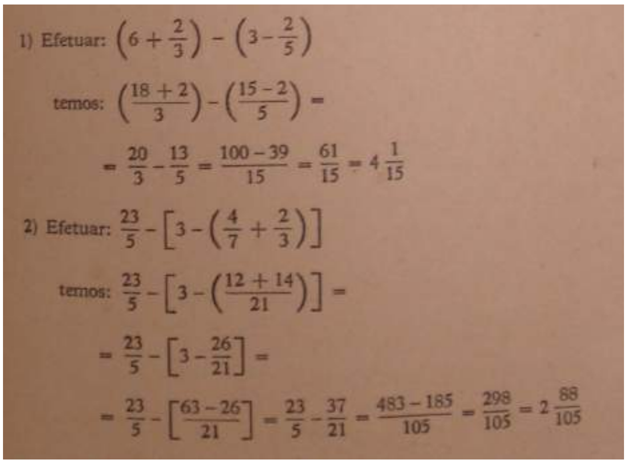
50) $8\frac{1}{8} - 5\frac{1}{5}$

(Respostas no fim do capítulo).

Fonte: Galante e Santos (1954, p.151).

Sangiorgi(1955) observa que, tratando-se de um conjunto de adições e subtrações, "deve-se efetuar primeiramente as operações indicadas entre os parênteses, a partir dos mais internos". Logo a seguir, apresenta dois exemplos, que podem ser vistos na Figura 18.

Figura 18 – Adição e subtração de frações, em livro de Sangiorgi dos anos 1950.



1) Efetuar: $\left(6 + \frac{2}{3}\right) - \left(3 - \frac{2}{5}\right)$

temos: $\left(\frac{18+2}{3}\right) - \left(\frac{15-2}{5}\right) =$

$= \frac{20}{3} - \frac{13}{5} = \frac{100-39}{15} = \frac{61}{15} = 4\frac{1}{15}$

2) Efetuar: $\frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right)\right]$

temos: $\frac{23}{5} - \left[3 - \left(\frac{12+14}{21}\right)\right] =$

$= \frac{23}{5} - \left[3 - \frac{26}{21}\right] =$

$= \frac{23}{5} - \left[\frac{63-26}{21}\right] = \frac{23}{5} - \frac{37}{21} = \frac{483-185}{105} = \frac{298}{105} = 2\frac{88}{105}$

Fonte: Sangiorgi (1953, p.115).

O Quadro 4 sintetiza a apresentação dos autores.

Quadro 4 – Subtração de frações e números mistos em Sangiorgi (1955), Quintela (1959) e Galante e Santos (1954).

Autor	Regra	Exemplos
Sangiorgi	Mesmo procedimento usado na adição.	$3\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\frac{17}{5}-\frac{3}{10}=\frac{34}{10}-\frac{3}{10}=\frac{31}{10}=3\frac{1}{10}$
Galante	“Se um ou mais termos forem números inteiros ou números mistos, dar-lhes-emos a forma de fração.” (GALANTE; SANTOS, 1954, p.150)	Não há exemplo.
Quintela	Reduzem-se os inteiros a frações.	$4-\frac{3}{5}=\frac{4\times 3}{5}-\frac{3}{5}=\frac{4\times 5-3}{5}=\frac{17}{5}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

3. **Multiplicação**

“Multiplicam-se os numeradores das frações entre si, assim como seus denominadores” (SANGIORGI, 1953, p.116). Com essa regra, Sangiorgi mostra como a multiplicação de frações deve ser efetuada. Seus exemplos complementam a regra:

$$a)\quad \frac{3}{4}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{28}=\frac{3}{14} \tag{3.27}$$
$$b)\quad \frac{4}{5}\times\frac{6}{8}\times 10=\frac{120}{40}=3 \tag{3.28}$$

Apesar da evidente simplificação da fração $\frac{120}{40}$, Sangiorgi (1955) não explicita o procedimento. No entanto, o autor prossegue o texto com algumas observações relacionadas à:

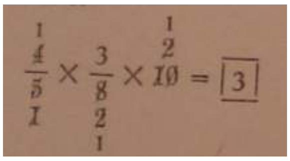
a) simplificação preliminar dos fatores, como mostra a Figura 19. Observe que o exemplo pode não ser compreendido pelo aluno, pois o autor não explica os passos das simplificações.

b) da multiplicação com números mistos, como mostra a Figura 20.

c) diferença entre um número misto e o produto de um inteiro e uma fração própria:

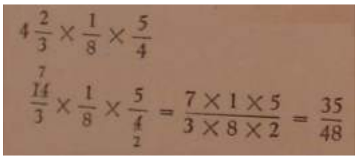
$$8\frac{3}{7}=\frac{59}{7} \quad \text{e} \quad 8\times\frac{3}{7}=\frac{24}{7} \tag{3.29}$$

Figura 19 – Simplificação preliminar de um produto em livro de Sangiorgi dos anos 1950.



Fonte: Sangiorgi (1955, p.116)

Figura 20 – Multiplicação de números mistos em livros de Sangiorgi da década de 1950.



Fonte: Sangiorgi (1955, p.116).

d) *fração de fração* como um produto de frações, sem detalhes ou ilustrações que auxiliem na compreensão do significado dessa expressão:

$$\frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} \quad = \quad \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \tag{3.30}$$

Galante apresenta a multiplicação de frações, distribuindo as situações em casos:

a) ***Multiplicação de uma fração por um número inteiro***

Aplicando sua definição de multiplicação, na qual deve-se "somar tantas frações iguais à proposta quantas são as unidades do multiplicador", Galante efetua a multiplicação de $\frac{3}{7}$ por 4 :

$$\frac{3}{7} \times 4 = \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{3+3+3+3}{7} = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7} \tag{3.31}$$

Desse modo, propõe a seguinte regra: "Para se multiplicar uma fração por um número inteiro, multiplica-se o numerador pelo inteiro, conservando-se o denominador" (GALANTE; SANTOS, 1954, p.152).

b) ***Multiplicação de um número inteiro por uma fração***

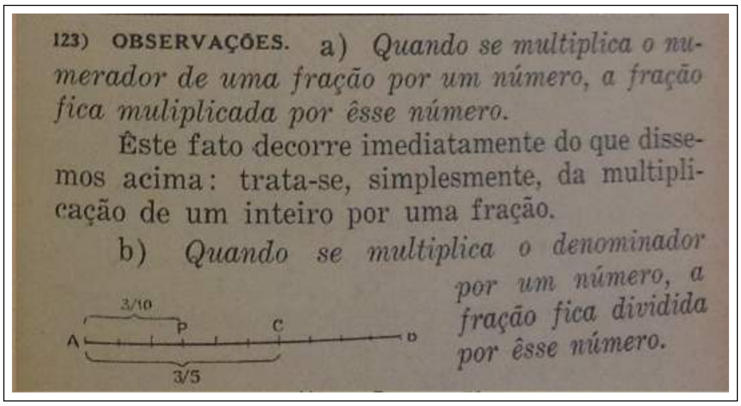
"Já tivemos oportunidade de referir, no início deste capítulo, ao fato de que as frações gozam das mesmas propriedades dos números inteiros" (GALANTE; SANTOS, 1954, p.153). Partindo dessa afirmação efetua a multiplicação de $3 \times \frac{4}{7}$, empregando a propriedade comutativa:

$$3 \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times 3 = \frac{4 \times 3}{7} = \frac{12}{7} \tag{3.32}$$

Após essa constatação, é proposta a seguinte regra: "Para se multiplicar um número inteiro por uma fração, multiplica-se o inteiro pelo numerador, conservando-se o denominador" (GALANTE; SANTOS, 1954, p.153).

Galante introduz duas observações (ver Figura 21), relacionadas à multiplicação dos termos de uma fração por números inteiros. Tais observações são empregadas nos casos que apresenta como exemplos. Nota-se que Galante procura associar as resoluções às definições e propriedades para, somente ao final, enunciar a regra. Nesse aspecto, sua abordagem difere daquela escolhida por Sangiorgi (1955), como vimos anteriormente.

Figura 21 – Multiplicação dos termos de uma fração por inteiros, em livros de Galante dos anos 1950.



123) OBSERVAÇÕES. a) *Quando se multiplica o numerador de uma fração por um número, a fração fica muliplicada por êsse número.*

Êste fato decorre imediatamente do que dissemos acima: trata-se, simplesmente, da multiplicação de um inteiro por uma fração.

b) *Quando se multiplica o denominador por um número, a fração fica dividida por êsse número.*

Fonte: Galante e Santos (1954, p.153).

c) ***Multiplicação de duas frações***

Observe como Galante procede para encontrar o produto $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$:

> O multiplicador é $\dfrac{3}{4}$ da unidade, isto é, a unidade foi dividida em 4 partes iguais e tomamos 3 dessas partes. Portanto, multiplicar $\dfrac{2}{5}$ por $\dfrac{3}{4}$ devemos dividir $\dfrac{2}{5}$ por 4, ou seja, $\dfrac{2}{5 \times 4}$ e tomar 3 dessas partes, isto é: $\dfrac{2 \times 3}{5 \times 4}$ (GALANTE; SANTOS, 1954, p.153).

A regra é então apresentada: "O produto de duas frações é a fração que tem por numerador o produto dos numeradores e por denominador o produto dos denominadores" (GALANTE; SANTOS, 1954, p.155). Exemplo:

$$\frac{7}{3} \times \frac{11}{5} = \frac{7 \times 11}{3 \times 5} = \frac{77}{15} \tag{3.33}$$

Essa regra é estendida para o produto de vária frações:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{7} \times \frac{11}{5} = \frac{2 \times 4 \times 1 \times 11}{3 \times 5 \times 7 \times 5} = \frac{88}{525} \tag{3.34}$$

d) ***Multiplicação de números mistos***

Nesse caso, reduzem-se os números mistos a frações impróprias e aplica a regra anterior. Exemplo:

$$3\frac{1}{2} \times 5\frac{3}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{23}{4} = \frac{161}{8} \tag{3.35}$$

Galante e Santos (1954) também introduzem o significado da expressão "fração de fração" como sendo um produto de frações. Assim $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$ corresponde a $\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$. (GALANTE; SANTOS, 1954, p.156). Assim como Sangiorgi (1955), os autores não trazem detalhes do significado dessa expressão.

Quintela introduz a multiplicação através de um problema: *Quanto se deve pagar por 2/3 do metro de uma fazenda que custa 13 cruzeiros o metro?* Quintela apresenta a seguinte resolução:

> A quantia a pagar obter-se-á multiplicando o preço do metro pela quantidade comprada; assim, a mesma será dada pelo produto:
>
> $$13 \times \frac{2}{3}$$
>
> Ora, se o metro custa 13 cruzeiros, um terço do metro custará três vezes menos, isto é, $\frac{13}{3}$; logo, dois terços custarão $\frac{13}{3} + \frac{13}{3}$. (QUINTELA, 1959, p.136)

A multiplicação é assim definida:

> A multiplicação é uma operação , cujo fim é determinar um número, chamado produto, que se forma do multiplicando como o multiplicador se formou da unidade. (QUINTELA, 1959, p.136)

Tal definição não é apresentada por Sangiorgi e Galante, como foi visto anteriormente.

Segue-se o estudo de dois casos de multiplicações:

a) **Multiplicação de um inteiro por uma fração.**

Para efetuar a multiplicação de 6 por $\frac{3}{5}$, Quintela segue a definição:

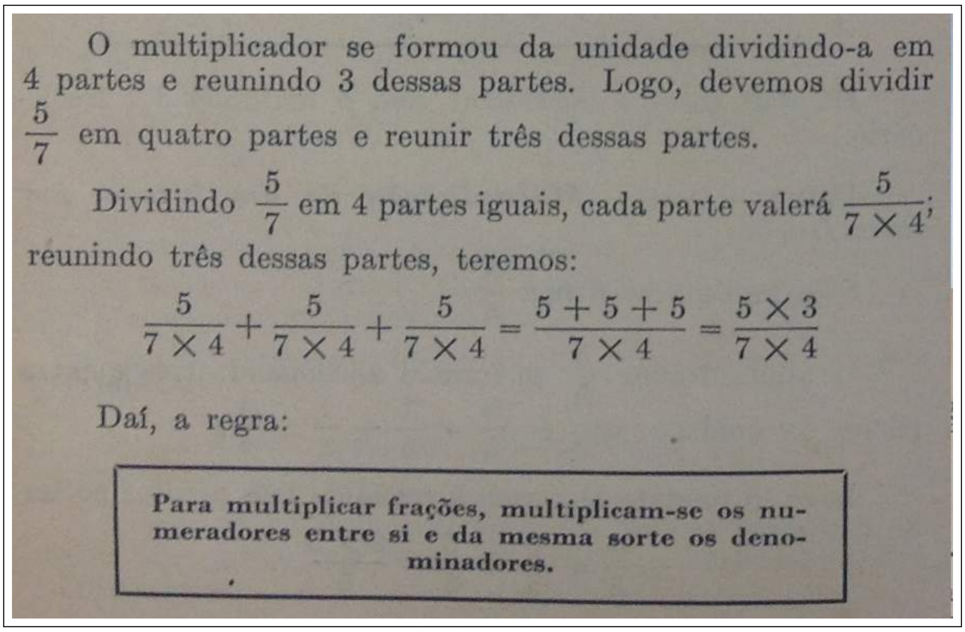
> O multiplicador $\frac{3}{5}$ se forma adicionando-se três quintas partes da unidade, isto é: $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$.
> Logo, o produto se formará somando três quintas partes de 6 e será: $\frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} = \frac{6 \times 3}{5}$. (QUINTELA, 1959, p.136)

Apresenta assim a seguinte regra: *Para multiplicar um inteiro por uma fração multiplica-se o inteiro pelo numerador e conserva-se o denominador.* Seguem-se dois exemplos de aplicação da regra:

$$5 \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3} \tag{3.36}$$

$$4 \times \frac{5}{7} = \frac{4 \times 5}{7} = \frac{20}{7} \tag{3.37}$$

Figura 22 – Multiplicação de frações em livro de Quintela (1959), nos anos 1950.



O multiplicador se formou da unidade dividindo-a em 4 partes e reunindo 3 dessas partes. Logo, devemos dividir $\frac{5}{7}$ em quatro partes e reunir três dessas partes.

Dividindo $\frac{5}{7}$ em 4 partes iguais, cada parte valerá $\frac{5}{7 \times 4}$; reunindo três dessas partes, teremos:

$$\frac{5}{7 \times 4} + \frac{5}{7 \times 4} + \frac{5}{7 \times 4} = \frac{5+5+5}{7 \times 4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4}$$

Daí, a regra:

Para multiplicar frações, multiplicam-se os numeradores entre si e da mesma sorte os denominadores.

.

Fonte: Quintela (1959, p.119).

b) **Multiplicação de uma fração por outra.**

A Figura 22 mostra como Quintela efetua a multiplicação de $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$, a partir da definição, bem como a regra a ser empregada nesse caso.

Fazendo uso dessa regra, os seguintes exemplos são apresentados:

$$1^{\underline{o}}) \qquad \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21} \tag{3.38}$$

$$2^{\underline{o}}) \qquad \frac{7}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{7 \times 3}{10 \times 5} = \frac{21}{50} \tag{3.39}$$

Como observação, Quintela sugere a simplificação prévia na multiplicação.

> Seja a multiplicação $\frac{7}{4} \times \frac{6}{5}$. O denominador 4 e o numerador 6 têm o fator comum 2; logo, o resultado admitirá a simplificação do fator 2, que pode ser efetuada previamente.
>
> $$\frac{7}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{7}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$$
>
> (QUINTELA, 1959, p.136)

A simplificação prévia, também presente em Sangiorgi (1955), não consta em Galante e Santos (1954), como foi visto.

4. **Potenciação**

Sangiorgi traz a seguinte regra para a potenciação: *"Para se elevar uma fração a uma potência elevam-se os seus dois termos a essa potência."* Acrescenta que, tratando-se de um número misto como base, este deve ser reduzido a uma fração imprópria (SANGIORGI, 1955, p.117). São dados os seguintes exemplos:

$$1)\quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16} \tag{3.40}$$

$$2)\quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} \tag{3.41}$$

$$3)\quad \left(1\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \tag{3.42}$$

$$4)\quad \left(4\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{21}{5}\right)^3 = \frac{9261}{125} \tag{3.43}$$

Quintela (1959), assim como Sangiorgi (1955), apresenta a potenciação de frações de forma sucinta, partindo da definição de potência aplicada aos números inteiros. Traz, como exemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} \tag{3.44}$$

ou

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125} \tag{3.45}$$

A regra apresentada é igual àquela dada por Sangiorgi: *"Para elevar uma fração a uma potência, eleva-se cada um dos termos a essa potência"*.

Ressaltamos que, enquanto Sangiorgi apresenta a potenciação imediatamente após a multiplicação, Quintela(1959) o faz após a divisão de frações. Galante, no entanto, não aborda a potenciação de frações.

5. **Divisão**

Sangiorgi inicia sua abordagem com o conceito de *inversa* ou *recíproca* de uma fração:

> Inicialmente, diz-se que uma fração é *inversa* ou *recíproca* de outra fração, quando os seus termos figuram trocados em relação aos termos dessa outra, isto é, o numerador de uma é o denominador de da outra e vice-versa. Assim:
>
> $\frac{3}{4}$ é a fração inversa de $\frac{4}{3}$
>
> $\frac{1}{5}$ é a fração inversa de $\frac{5}{1}$ ou 5 (SANGIORGI, 1955, p.117)

Esse conceito é empregado no enunciado da *regra* da divisão: *"Multiplica-se a primeira fração pela inversa da segunda."* São dados os seguintes exemplos:

$$1)\quad \frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{10} \tag{3.46}$$

$$2)\quad 8 : \frac{3}{4} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \tag{3.47}$$

$$3)\quad \frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{21} \tag{3.48}$$

Sangiorgi (1955, p.118) também faz observações sobre a divisão com números mistos e a divisão com termos fracionários:

$$1^{\text{a}})\quad 3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{7} = \frac{19}{5} : \frac{15}{7} = \frac{19}{5} \times \frac{7}{15} = \frac{133}{75} \tag{3.49}$$

$$2^{\text{a}})\quad \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{4}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{14}{20} \tag{3.50}$$

O autor não justifica nem apresenta qualquer tipo de ilustração ou contextualização da divisão de frações. Assim, a regra é apresentada sem qualquer forma de argumentação indutiva ou dedutiva que a fundamente. Percebe-se que Sangiorgi enfatiza o procedimento, ou seja, a prática operatória, como fez nas demais operações.

Quintela, assim como fez Sangiorgi, também utiliza-se da ideia de fração inversa, mas estabelece uma definição para o que chama de **números inversos**: “Quando o produto de dois números é 1, cada um deles chama-se *recíproco* ou *inverso* do outro”. Assim:

$$\frac{1}{5} \text{ é o inverso de } 5 \quad \text{, pois} \quad \frac{1}{5} \times 5 = 1 \tag{3.51}$$

e

$$\frac{3}{4} \text{ é o inverso de } \frac{4}{3} \quad \text{, pois} \quad \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1 \tag{3.52}$$

Note que essa definição, aplicada aos números, é mais abrangente que aquela apresentada por Sangiorgi (1955, p.117), que considerava apenas a inversão da ordem dos termos de duas frações para caracterizá-las como inversas uma da outra. Logo, os números 4 e 0.25, que são tratados posteriormente pelos autores, são claramente inversos um do outro, segundo a definição de Quintela, mas essa percepção não é tão imediata a partir da definição de Sangiorgi, por não se apresentarem com representação fracionária.

Galante também utiliza a ideia de fração inversa apoiada na permutação dos termos da fração. Todavia, ressalva que o "produto de dois números inversos um do outro é igual à unidade” (GALANTE; SANTOS, 1954, p.160).

Enquanto Sangiorgi(1955) enuncia a regra para, logo em seguida, apresentar exemplos, Quintela(1959) toma o caminho contrário. Como a divisão de uma fração por um inteiro já foi estabelecida (QUINTELA, 1959, pp.122-124), o texto nos apresenta dois casos, resolvidos a partir da definição:

1^o) **Divisão de um inteiro por uma fração** – Veja como Quintela resolve a divisão de 11 por $\frac{2}{3}$:

> Por definição de divisão a questão consiste em determinar o número (quociente) que multiplicado por $\frac{2}{3}$, dá o produto 11, isto é, o número, cujos $\frac{2}{3}$ valem 11. Assim: $\frac{2}{3}$ do número procurado valem 11, logo, $\frac{1}{3}$ do número será 2 vezes menor, isto é, $\frac{1}{3}$ do número vale $\frac{11}{2}$. Se $\frac{1}{3}$ do número vale $\frac{11}{2}$, os $\frac{3}{3}$, isto é, o próprio número, será 3 vezes maior, e portanto, o número procurado é $\frac{11}{2} \times 3$, ou, $\frac{11 \times 3}{2}$. Conclui-se: $11 : \frac{2}{3} = \frac{11 \times 3}{2} = 11 \times \frac{3}{2}$ (QUINTELA, 1959, p.136)

Assim:

$$11 : \frac{2}{3} = 11 \times \frac{3}{2} \tag{3.53}$$

2^o) **Divisão de uma fração por outra** – Para dividir $\frac{5}{8}$ por $\frac{3}{7}$ procede-se da mesma maneira:

- $\frac{3}{7}$ do quociente procurado valem $\frac{5}{8}$.
- $\frac{1}{7}$ do quociente valerá $\frac{5}{8} : 3 = \frac{5}{8 \times 3}$.
- $\frac{7}{7}$ do quociente valerão $\frac{5}{8 \times 3} \times 7 = \frac{5 \times 7}{8 \times 3}$.

O quociente procurado é $\frac{5 \times 7}{8 \times 3}$, ou seja:

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{7} = \frac{5 \times 7}{8 \times 3} = \frac{5}{8} \times \frac{7}{3} \tag{3.54}$$

A partir dos resultados obtidos nesses dois casos, a regra para a divisão é então enunciada: "Para dividir um número (inteiro ou fracionário) por uma fração, multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor" (QUINTELA, 1959, p.141). Após apresentar dois exemplos do uso dessa regra, Quintela mostra a notação de uma fração com numeradores e denominadores fracionários e sua equivalente, com numeradores e denominadores inteiros:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9} \tag{3.55}$$

Essa notação também é usada por Sangiorgi, como vimos anteriormente. Percebe-se que, ao contrário de Sangiorgi, Quintela opta por uma abordagem indutiva, partindo de algumas situações e exemplos, para estabelecer a regra a ser aplicada a cada caso.

Para Galante e Santos (1954, p.160), chamam-se "quociente de uma primeira fração por uma segunda, a fração que multiplicada pela segunda resulta a primeira". E prossegue:

> Assim, o quociente de $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{7}$ e que se indica por $\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$ é $\frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{20}$ pois
>
> $$\left(\frac{3}{5} \times \frac{7}{4}\right) \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7 \times 4}{5 \times 4 \times 7} = \frac{3}{5}$$
>
> Donde a regra:
> *O quociente de duas frações dadas em uma determinada ordem,é o produto da primeira pela inversa da segunda* (GALANTE; SANTOS, 1954, p.161)

São também considerados os seguintes casos particulares:

a) *Divisão de um número inteiro por uma fração*

$$5 : \frac{4}{3} = \frac{5}{1} : \frac{4}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \tag{3.56}$$

b) *Divisão de uma fração por um número inteiro*

$$\frac{6}{7} : 5 = \frac{6}{7} : \frac{5}{1} = \frac{6}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{35} \tag{3.57}$$

A divisão de números mistos é efetuada reduzindo-se esses a frações impróprias (GALANTE; SANTOS, 1954, p.162), mesmo procedimento apresentado por Sangiorgi (1955). Como exemplo, temos:

$$2\frac{3}{5} : 4\frac{1}{2} = \frac{13}{5} : \frac{9}{2} = \frac{13}{5} \times \frac{2}{9} = \frac{26}{45} \tag{3.58}$$

Para Galante, as escritas $\frac{7}{8}$ e $7 : 8$ se equivalem. Portanto, por analogia, a expressão

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}} \quad \text{tem significado de} \quad \frac{4}{5} : \frac{3}{7} \tag{3.59}$$

Chama-se **fração composta** a fração formada por numeradores e denominadores fracionários, sendo esta "igual ao quociente de seus dois termos" (GALANTE; SANTOS, 1954, p.162). Assim:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15} \tag{3.60}$$

Como foi visto anteriormente, Sangiorgi (1955, p.118) e Quintela (1959, p.141) apresentam expressões semelhantes a essas, com o mesmo significado que Galante, mas não utilizam a denominação *fração composta*.

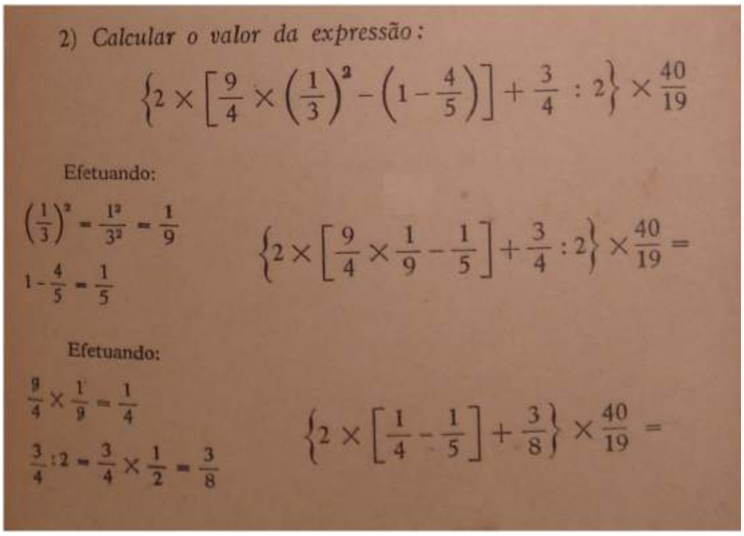
6. **Expressões aritméticas fracionárias** – Para Sangiorgi (1955, p.118), o "cálculo de expressões aritméticas fracionárias, que são conjuntos de frações ligadas por sinais de operações", deve ser feito na seguinte ordem:

   a) as potências;

   b) as multiplicações e as divisões;

   c) as adições e as subtrações respeitadas as ordens dos parênteses, colchetes e chaves.

Figura 23 – Expressões aritméticas fracionárias nos anos 1950, em livro de Sangiorgi.



2) *Calcular o valor da expressão:*

$$\left\{2\times\left[\frac{9}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(1-\frac{4}{5}\right)\right]+\frac{3}{4}:2\right\}\times\frac{40}{19}$$

Efetuando:

$\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1^2}{3^2}=\frac{1}{9}$

$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$$\left\{2\times\left[\frac{9}{4}\times\frac{1}{9}-\frac{1}{5}\right]+\frac{3}{4}:2\right\}\times\frac{40}{19}=$$

Efetuando:

$\frac{9}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4}:2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

$$\left\{2\times\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]+\frac{3}{8}\right\}\times\frac{40}{19}=$$

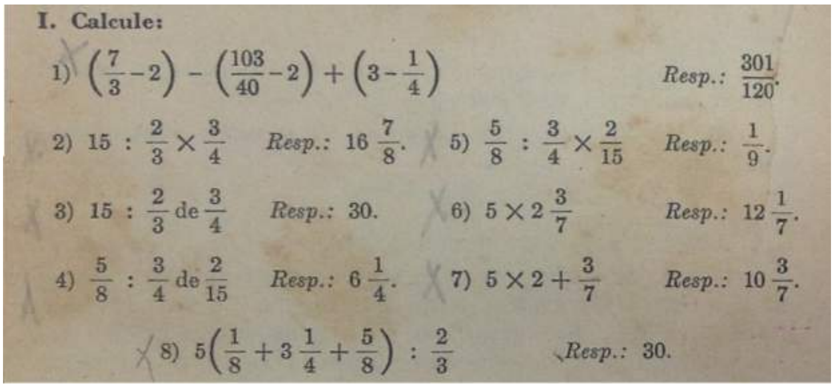
.

Fonte: Sangiorgi (1955, p.119).

Seguindo essas regras, Sangiorgi apresenta algumas páginas de resoluções detalhadas de expressões. A Figura 23 mostra um desses exemplos.

Quintela não trata da resolução de expressões aritméticas fracionárias, como o faz Sangiorgi, mas as apresenta como exercícios, o que pode ser observado na figura Figura 24.

Figura 24 – Exercícios sobre operações com frações, propostos por Quintela, nos anos 1950.



I. Calcule:

1) $\left(\frac{7}{3}-2\right)-\left(\frac{103}{40}-2\right)+\left(3-\frac{1}{4}\right)$ *Resp.:* $\frac{301}{120}$.

2) $15:\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$ *Resp.:* $16\frac{7}{8}$. 5) $\frac{5}{8}:\frac{3}{4}\times\frac{2}{15}$ *Resp.:* $\frac{1}{9}$.

3) $15:\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ *Resp.:* 30. 6) $5\times2\frac{3}{7}$ *Resp.:* $12\frac{1}{7}$.

4) $\frac{5}{8}:\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{15}$ *Resp.:* $6\frac{1}{4}$. 7) $5\times2+\frac{3}{7}$ *Resp.:* $10\frac{3}{7}$.

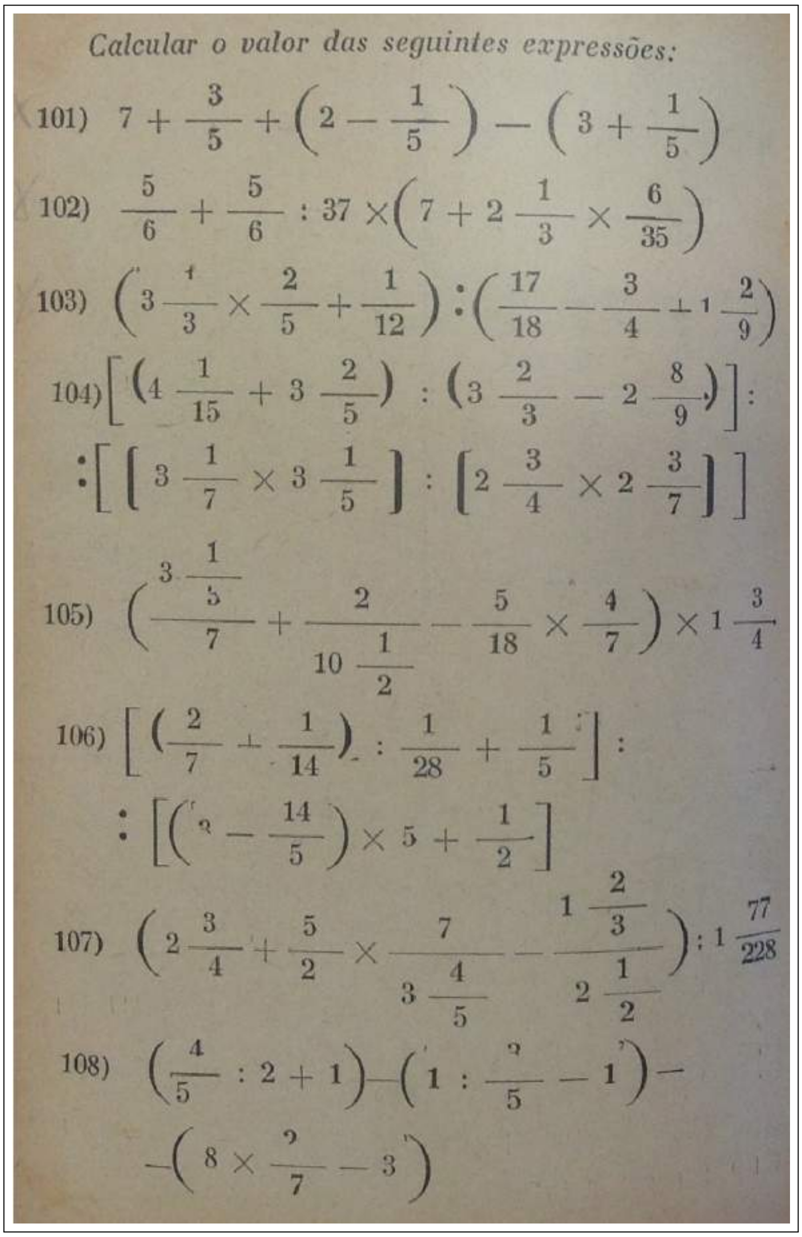
8) $5\left(\frac{1}{8}+3\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\right):\frac{2}{3}$ *Resp.:* 30.

.

Fonte: Quintela (1959, p.144)

Galante apresenta uma lista de exercícios imediatamente após cada operação, onde as expressões são inseridas gradativamente, segundo as operações estudadas, mas sem exemplos de resolução. Assim, a lista proposta após a última operação contém um maior número de expressões. A Figura 25 mostra parte dessa lista.

Figura 25 – Exercícios sobre operações com frações, propostos por Galante, nos anos 1950.



Calcular o valor das seguintes expressões:

101) $7+\frac{3}{5}+\left(2-\frac{1}{5}\right)-\left(3+\frac{1}{5}\right)$

102) $\frac{5}{6}+\frac{5}{6}:37\times\left(7+2\frac{1}{3}\times\frac{6}{35}\right)$

103) $\left(3\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{12}\right):\left(\frac{17}{18}-\frac{3}{4}+1\frac{2}{9}\right)$

104) $\left[\left(4\frac{1}{15}+3\frac{2}{5}\right):\left(3\frac{2}{3}-2\frac{8}{9}\right)\right]:$

$:\left[\left[3\frac{1}{7}\times3\frac{1}{5}\right]:\left[2\frac{3}{4}\times2\frac{3}{7}\right]\right]$

105) $\left(\frac{3\frac{1}{5}}{7}+\frac{2}{10\frac{1}{2}}-\frac{5}{18}\times\frac{4}{7}\right)\times1\frac{3}{4}$

106) $\left[\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{14}\right):\frac{1}{28}+\frac{1}{5}\right]:$

$:\left[\left(2-\frac{14}{5}\right)\times5+\frac{1}{2}\right]$

107) $\left(2\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\times\frac{7}{3\frac{4}{5}}-\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}\right):1\frac{77}{228}$

108) $\left(\frac{4}{5}:2+1\right)-\left(1:\frac{2}{5}-1\right)-$

$-\left(8\times\frac{2}{7}-3\right)$

.

Fonte: Galante e Santos (1954, p.164).

CAPÍTULO

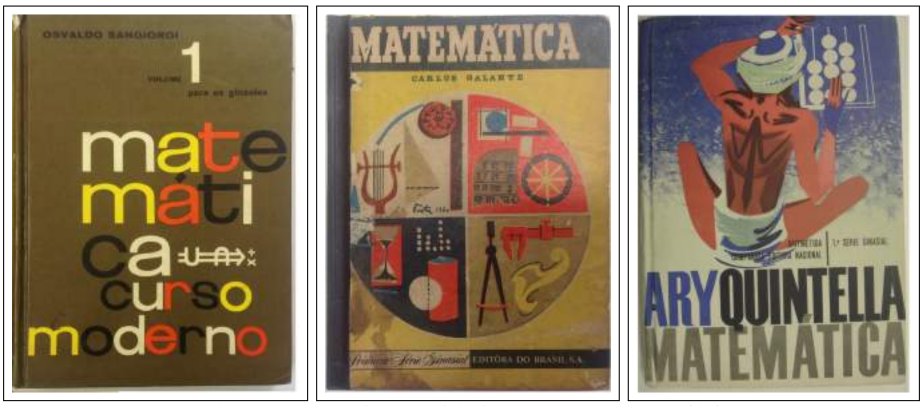
4

OS LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA NOS ANOS 1960

Como foi visto anteriormente, os anos 1960 marcam o início do Movimento da Matemática Moderna no Brasil. Nessa década, Quintela e Galante reeditam suas coleções, apresentando algumas alterações em relação às edições anteriores, como veremos adiante. Sangiorgi, no entanto, publica uma nova coleção, mantendo os conteúdos, mas alterando significativamente a abordagem e apresentação dos mesmos, promovendo uma aparente ruptura com o modelo de ensino que adotara na década anterior e incorporando novos elementos gráficos e conceituais, como podemos perceber a partir da análise dos livros didáticos desse período. Para tanto, tomaremos os livros desses autores, a partir dos volumes das coleções voltados à primeira série dos cursos ginasiais, ou seja:

a) Sangiorgi: "Matemática 1: curso moderno para cursos ginasiais" - 1966;
b) Galante: "Matemática: curso ginasial – primeira série" – 1965;
c) Quintela: "Matemática para a primeira série ginasial" – 1966

Figura 26 – Capas de livros de Matemática de Osvaldo Sangiorgi, Carlos Galante e Ary Quintela, respectivamente, publicados nos anos 1960.



Fonte: Banco de Dados de Livros Didáticos Escolares Brasileiros (LIVRES)

Logo na apresentação de "Matemática – curso moderno", editada em 1963 para uso em 1964, Sangiorgi traz a público um *Programa para um Curso Moderno de Matemática (para os cursos ginasiais)*, distribuindo os conteúdos em seis itens: (ver Quadro 5).

Sobre os conteúdos apresentados no Volume 1, Sangiorgi justifica a escolha:

> (...) fazem parte dos *vinte e quatro ítens que compõem os Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, com as respectivas *sugestões* para seu desenvolvimento, apresentadas pelo Grupo de Estudos do Ensino de Matemática (GEEM), de São Paulo, em trabalho aprovado unanimemente pelo *IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática* (Belém, Pará, julho de 1962), e readaptados no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários (Diretoria do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Cultura), realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963 (SANGIORGI, 1966, p.9).

Note que, ao contrário das edições anteriores e dos livros e coleções editados nas décadas de 1940 e 1950, o programa apresentado não tem sua publicação referendada por uma portaria ministerial.

Na 51ª edição de sua coleção, publicada em 1965 pela Editora do Brasil, Galante não apresenta alterações significativas na sequência de exposição dos números fracionários, assim como no texto e na metodologia de ensino. Há um pequeno aumento no uso de imagens, passando a apresentar figuras bidimensionais, mas sem a mesma intensidade e homogeneidade de Sangiorgi Todavia, apesar do tópico analisado (números fracionários) não conter muitas figuras, a obra apresenta um considerável número de imagens coloridas, constituindo assim um diferencial em relação às edições anteriores dessa coleção.

Ary Quintela, em 1966, publica a 120ª edição de sua coleção voltada ao curso ginasial, pela Companhia Editora Nacional. No prefácio dessa edição, Quintela justificou as alterações ali introduzidas apoiando-se no atendimento às resoluções do **IV Congresso Brasileiro Para o Ensino de Matemática**[1], ponderando sobre a influência da Matemática Moderna [2] na obra:

> (...) procuramos atender, também, às reiteradas indicações propostas a partir do II Congresso, realizado em Porto Alegre, recomendando a conveniência de serem introduzidos os conceitos fundamentais da Matemática chamada Moderna bem como os símbolos correspondentes, no ensino dos cursos de grau médio, o que fizemos com a devida cautela (QUINTELA, 1966, p.9).

Quintela(1966) procurou apresentar um novo texto, substituindo os segmentos de reta por exemplos concretos (torta, maçã etc.). Certos tópicos, no entanto, são apresentados exatamente como fora feito nas edições anteriores.

1 Realizado em 1962, em Belém, no Pará, no qual foi aprovado um Programa Mínimo para o Ginásio.
2 Quintela refere-se ao II Congresso Nacional de Ensino de Matemática, realizado em 1957, no qual, segundo Búrigo(1989), "surge a primeira argumentação brasileira em favor da Matemática Moderna".

Para a abordagem de alguns itens desse assunto, Quintela (1966) preserva a maior parte do texto escrito, inserindo nova diagramação e figuras, o que pode ser visto na Figura 28.

O Quadro 5 mostra a distribuição dos conteúdos nos livros analisados.

Quadro 5 – Conteúdo por autor, nos livros didáticos de Matemática para a primeira série ginasial, nos anos 1960.

Sangiorgi(1966)	Quintela(1966)	Galante(1965)
1. Número e numeral – sistemas de numeração – bases; 2. Operações (operações inversas) com números inteiros – propriedades estruturais; 3. Divisibilidade – múltiplos e divisores; números primos; fatoração completa; 4. Números fracionários – operações (operações inversas), propriedades estruturais. 5. Estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais; 6. Sistemas de medidas; sistema decimal e sistemas não-decimais.	1. Números inteiros 2. Divisibilidade; números primos. 3. Números fracionários 4. Sistema métrico.	1. Números inteiros: operações fundamentais; números relativos. 2. Divisibilidade aritmética; números primos. 3. Números fracionários 4. Sistema legal de unidades de medir; unidades de medidas usuais.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como fizemos para a década de 1950, tomaremos um exemplar de 1966 da coleção de Sangiorgi como referência, analisando o tratamento dado aos números fracionários, relacionando ao mesmo assunto presente em Galante (1965) e Quintela (1966).

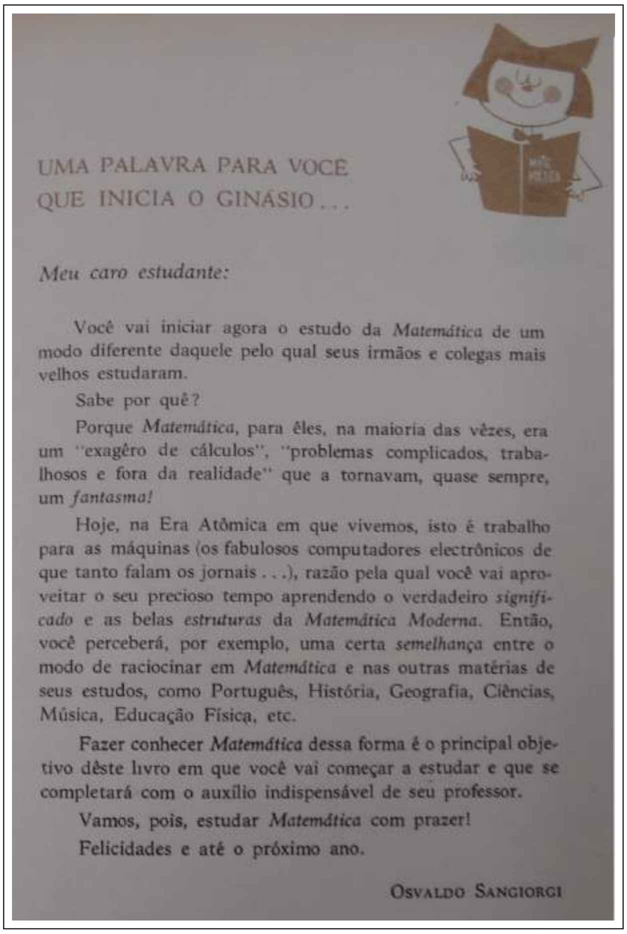
4.1 Os números fracionários e as frações

Em suas palavras iniciais (ver Figura 27), dirigidas aos alunos, Sangiorgi assim expõe suas impressões:

> *Meu caro estudante*:
> Você vai agora iniciar o estudo da *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.
> Sabe por quê?
> Porque *Matemática*, para eles, na maioria das vezes, era um "exagero de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que a tornavam, quase sempre, um *Fantasma!* (SANGIORGI, 1966, p.13)

O "Índice da Matéria", na edição de 1966, evidencia uma mudança na diagramação, na escolha e na apresentação dos conteúdos, em relação à coleção anterior. Destacando desses índices o capítulo inicial nota-se que Sangiorgi introduz a "Noção de conjunto" como assunto preliminar, o que constitui uma importante diferença entre "Matemática 1: curso moderno para cursos ginasiais" e sua coleção dos anos 1950.

Figura 27 – Texto de Sangiorgi,dirigido ao aluno, na edição de 1966.



UMA PALAVRA PARA VOCE
QUE INICIA O GINÁSIO . . .

Meu caro estudante:

Você vai iniciar agora o estudo da *Matemática* de um modo diferente daquele pelo qual seus irmãos e colegas mais velhos estudaram.

Sabe por quê?

Porque *Matemática*, para êles, na maioria das vêzes, era um "exagêro de cálculos", "problemas complicados, trabalhosos e fora da realidade" que a tornavam, quase sempre, um *fantasma!*

Hoje, na Era Atômica em que vivemos, isto é trabalho para as máquinas (os fabulosos computadores electrônicos de que tanto falam os jornais . . .), razão pela qual você vai aproveitar o seu precioso tempo aprendendo o verdadeiro *significado* e as belas *estruturas* da *Matemática Moderna*. Então, você perceberá, por exemplo, uma certa *semelhança* entre o modo de raciocinar em *Matemática* e nas outras matérias de seus estudos, como Português, História, Geografia, Ciências, Música, Educação Física, etc.

Fazer conhecer *Matemática* dessa forma é o principal objetivo dêste livro em que você vai começar a estudar e que se completará com o auxílio indispensável de seu professor.

Vamos, pois, estudar *Matemática* com prazer!

Felicidades e até o próximo ano.

OSVALDO SANGIORGI

Fonte: Matemática: curso moderno, v.1, 1966.

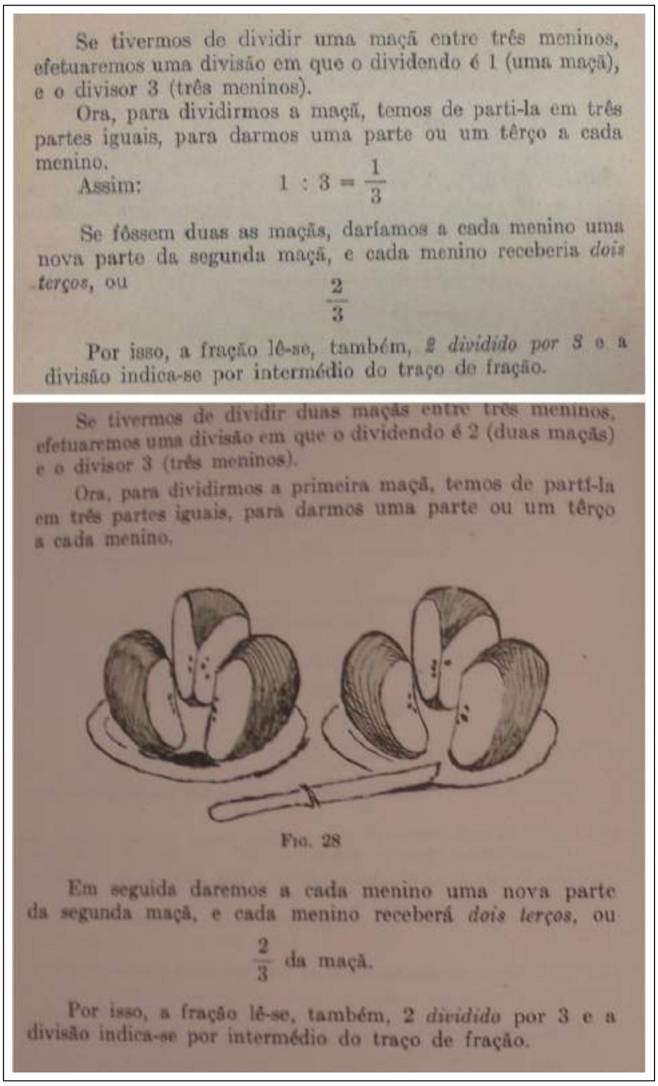
No primeiro capítulo do livro, o autor procura apresentar a noção de conjunto, sua representação, elementos, diagramas, comparação, correspondência biunívoca, ideia de número etc. Essa apresentação inicial serve de base para a exposição dos conteúdos ao longo da obra.

O terceiro capítulo da nova coleção é tomado por Sangiorgi para o tratamento dos "Números fracionários", estando os conteúdos assim distribuídos:

1. Números fracionários.
2. Classes de equivalência entre frações.
3. Estrutura de ordem no números fracionários.
4. Operações; propriedades estruturais.
5. Problemas de aplicação; estruturas.

Prosseguindo na análise dos livros considerados, tomaremos a sequência proposta por Sangiorgi, associando a cada conteúdo as correspondentes abordagens presentes nas coleções de Galante e Quintela desse período.

Figura 28 – Páginas 120 e 156 dos livros de Ary Quintela de 1959 e 1966, respectivamente.



Se tivermos de dividir uma maçã entre três meninos, efetuaremos uma divisão em que o dividendo é 1 (uma maçã), e o divisor 3 (três meninos).

Ora, para dividirmos a maçã, temos de parti-la em três partes iguais, para darmos uma parte ou um têrço a cada menino.

Assim: $1 : 3 = \frac{1}{3}$

Se fôssem duas as maçãs, daríamos a cada menino uma nova parte da segunda maçã, e cada menino receberia *dois terços*, ou

$$\frac{2}{3}$$

Por isso, a fração lê-se, também, *2 dividido por 3* e a divisão indica-se por intermédio do traço de fração.

Se tivermos de dividir duas maçãs entre três meninos, efetuaremos uma divisão em que o dividendo é 2 (duas maçãs) e o divisor 3 (três meninos).

Ora, para dividirmos a primeira maçã, temos de partí-la em três partes iguais, para darmos uma parte ou um têrço a cada menino.

FIG. 28

Em seguida daremos a cada menino uma nova parte da segunda maçã, e cada menino receberá *dois terços*, ou

$\frac{2}{3}$ da maçã.

Por isso, a fração lê-se, também, 2 *dividido* por 3 e a divisão indica-se por intermédio do traço de fração.

Fonte: Matemática: curso ginasial, v.1, Companhia Editora Nacional

Como vimos anteriormente, Sangiorgi (1955) trouxe os números fracionários distribuídos nos seguintes tópicos:

1. Noção intuitiva de fração
2. Definição
3. Leitura de um número fracionário
4. Frações próprias, impróprias e aparentes
5. Extração de números inteiros. Números mistos.
6. Propriedades das frações
7. Simplificação de frações
8. Frações irredutíveis
9. Redução de frações ao mesmo denominador
10. Redução de frações ao mínimo denominador comum
11. Comparação de frações
12. Exercícios sobre frações

No "curso moderno", Sangiorgi (1966) traz a seguinte distribuição:

1. Noção intuitiva de número fracionário
2. Leitura de um número fracionário. Frações decimais.
3. Interpretação do número fracionário através de desenhos geométricos
4. Frações próprias, frações impróprias e frações aparentes: definição "geral" de número fracionário
5. Relações entre números inteiros e números fracionários
6. Extração de inteiros de frações impróprias: números mistos. Exercícios.
7. Frações equivalentes; frações iguais. Aplicações
8. Técnica de cálculo
9. Simplificação de frações: frações irredutíveis. Exercícios.
10. Redução de frações ao mesmo denominador e ao menor denominador comum
11. Comparação de frações de mesmo denominador.
12. Comparação de frações de mesmo numerador.
13. Comparação de frações quaisquer
14. Frações diferentes; reconhecimento.
15. Variações do valor de uma fração (propriedades). Exercícios.

As sequências acima podem sugerir que não ocorreram mudanças significativas na abordagem dos conteúdos na coleção de Sangiorgi dos anos 1960, em relação à anterior. De fato, o conteúdo considerado por Sangiorgi não sofre alterações, pois continua a cumprir os "assuntos mínimos" previstos pela portaria ministerial 1045/51. No entanto, considerando as estratégias de apresentação desses conteúdos nas diferentes obras, podemos perceber diferenças que podem ser consideradas significativas, dada a sua permanência ou influência nas edições ou coleções publicadas posteriormente. Destacaremos alguns pontos da abordagem de Sangiorgi que consideramos relevantes para essa análise.

Como fez em sua coleção anterior, Sangiorgi introduz os números fracionários a partir da divisão de uma barra de chocolate, em partes iguais. Todavia, como pode-se perceber pelo título desse tópico, a substituição de *fração* por *números fracionários* determina uma das importantes mudanças de propostas por Sangiorgi, implicando em novas definições e conceitos, como veremos adiante.

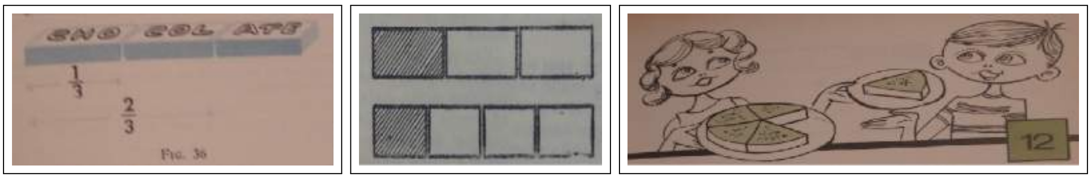
Para Sangiorgi, o número fracionário é um novo número:

> Nasce, portanto, uma nova *espécie* de número (lembre-se que até agora você só "trabalhou" com números naturais e números inteiros), denominado *número fracionário*, cujo numeral — agora chamado *fração* — compõe-se de *dois números inteiros*, tomados numa certa ordem, com o segundo deles diferente de zero, sendo ambos separados por um traço horizontal (SANGIORGI, 1966, p.161).

Portanto, a fração é uma representação gráfica do número fracionário, sendo composta por dois números inteiros (numerador e denominador), chamados *termos da fração*, separados por uma barra horizontal (SANGIORGI, 1966, p.161) ou inclinada (QUINTELA, 1966, p.154). Exemplo: $\frac{2}{5}$ ou $2/5$. Essa distinção, entre *fração* e *número fracionário* não é feita por Galante e Quintela, certamente por abordarem o assunto como “frações ordinárias”, de modo semelhante ao adotado nas edições anteriores. Logo, em seus textos, Galante e Quintela sempre se referem diretamente às frações, não utilizando a denominação *números fracionários*, como são abordados por Sangiorgi. Como fez nas edições anteriores, Quintela (1966, p.156) relaciona a fração à medida de uma grandeza e ao quociente de uma divisão, o que parece associar a fração à ideia de número, ainda que essa relação configure no texto somente como denominação do capítulo considerado. Galante, no entanto, não se refere a *números fracionários* nem mesmo na denominação dos capítulos, apesar de apresentar o programa estabelecido pela portaria 1045/61, no qual essa denominação é usada.

Todavia, para introduzir as ideias iniciais, os três autores utilizam-se de objetos concretos como unidades (figura 29): barra de chocolate (Sangiorgi), tira de cartolina (Galante) e torta de maçã (Quintela).

Figura 29 – Imagens relacionadas à ideia de número fracionário, usadas por Sangiorgi, Galante e Quintela, respectivamente.



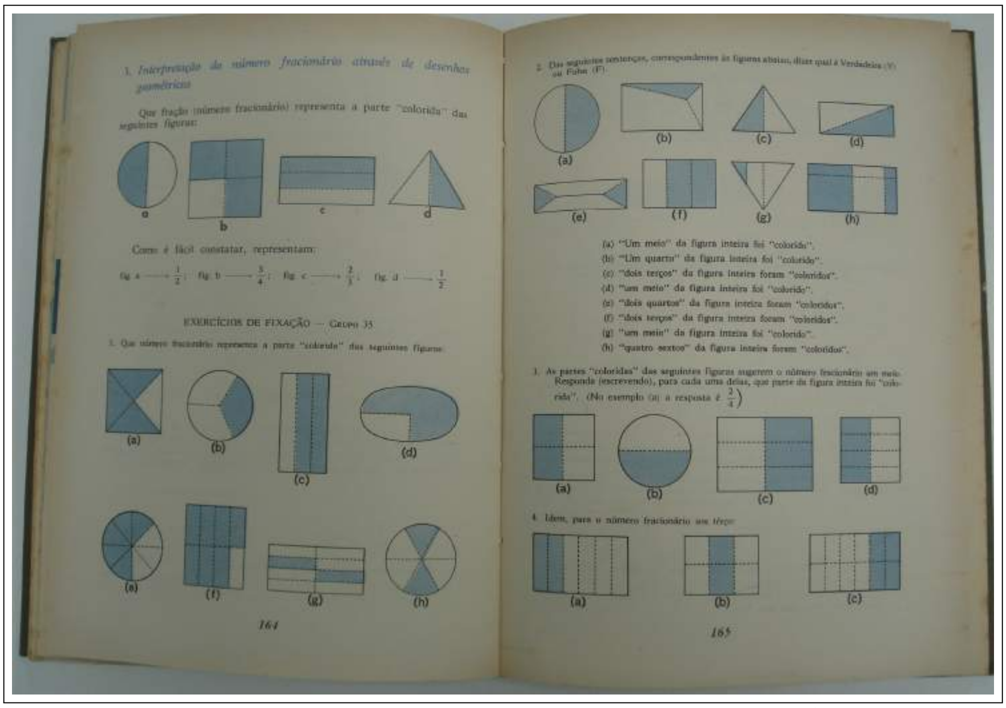
Fonte: Sangiorgi(1966), Galante(1965) e Quintela(1966)

Para Sangiorgi (1966, p.162) e Galante (1965, p.110) denomina-se *unidade fracionária* cada uma das partes obtidas pela divisão da unidade em partes iguais. Assim, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ são exemplos de unidades fracionárias, conforme a unidade seja dividade em 2, 3 ou 5 partes iguais, respectivamente.

Usando figuras e uma breve nota histórica sobre os registro de frações no *Papiro de Rhind*, Sangiorgi procura associar o assunto à história da Matemática. Essa associação também é feita por Galante, por meio da adaptação de um texto, inserido após a seção de exercícios, no qual destaca o embate histórico entre abacistas e algoristas. Vale ressaltar que essa associação histórica não estava presente na coleção anterior de Galante.

Sangiorgi também apresenta três páginas bem ilustradas, com figuras representativas de números fracionários (Figura 30), que também não integravam a obra anterior. Esse tópico é destacado exclusivamente por Sangiorgi(1966) e, associado ao grande número de figuras e formas apresentados, constitui uma das principais inovações em seu "curso moderno".

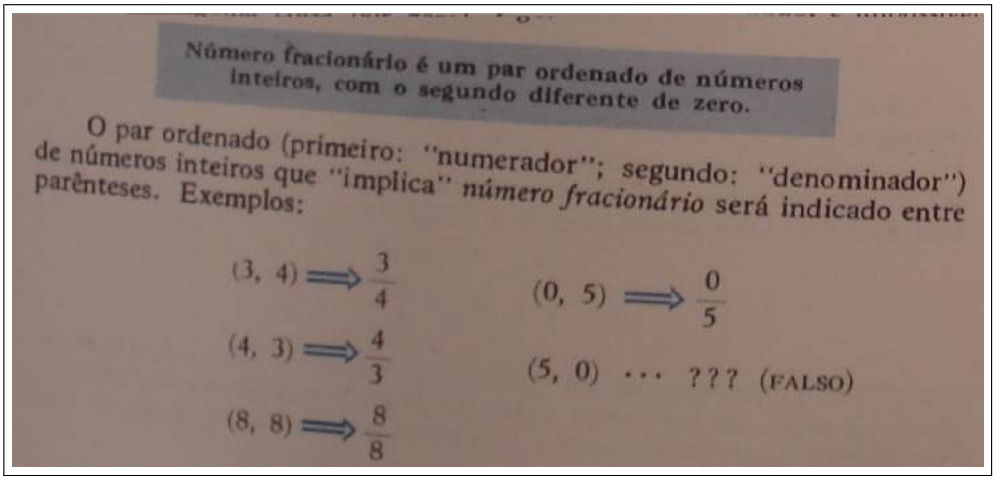
Figura 30 – Representação do número fracionário através de desenhos geométricos (SANGIORGI, 1966).



Fonte: Matemática Curso Moderno, v.1, 1966, pp.164-165

Os conceitos de *fração própria*, *fração imprópria* e *fração aparente* são apresentados por Sangiorgi (1966, p.167), Galante (1965, p.112) e Quintela (1966, p.155). No entanto, Sangiorgi (1966, p.168) define o *número fracionário* como “um par ordenado de números inteiros, com o segundo diferente de zero”: o primeiro desses números é o numerador e o segundo, o denominador. A Figura 31 mostra como Sangiorgi fez essa abordagem.

Figura 31 – Par ordenado e número fracionário, usado por Sangiorgi em sua coleção moderna dos anos 1960.



Número fracionário é um par ordenado de números inteiros, com o segundo diferente de zero.

O par ordenado (primeiro: "numerador"; segundo: "denominador") de números inteiros que "implica" *número fracionário* será indicado entre parênteses. Exemplos:

$(3, 4) \Longrightarrow \frac{3}{4}$ $(0, 5) \Longrightarrow \frac{0}{5}$

$(4, 3) \Longrightarrow \frac{4}{3}$ $(5, 0)$ ... ??? (FALSO)

$(8, 8) \Longrightarrow \frac{8}{8}$

Fonte: Matemática: curso moderno, v.1, 1966, p.168)

Mesmo não definindo o número fracionário, Galante e Quintela adotam as seguintes definições:

- “Fração é o número formado por uma ou mais partes alíquotas da unidade” (GALANTE, 1965, p.120).
- “Quando um todo ou uma unidade é dividida em partes iguais, uma dessas partes ou a união de várias formam uma **fração** do todo.” (QUINTELA, 1966, p.153).

Para Sangiorgi, $8:2$, $\frac{8}{2}$ e 4 são numerais diferentes de um mesmo número inteiro, pois:

$$8:2=\frac{8}{2}=4.$$

Portanto, $8:3$ e $\frac{8}{3}$ “são agora NUMERAIS diferentes de um mesmo número” (SANGIORGI, 1966, p.169). O texto prossegue com uma seção “exercícios exploratórios”, explorando a relação entre números inteiros e números fracionários. A inclusão desta seção, imediatamente após o tópico abordado, configura uma das mudanças em relação à sua coleção anterior.

Referindo-se ainda aos números fracionários, Sangiorgi (1966, p.169) tece as seguintes considerações:

1. Todo número inteiro pode ser considerado uma fração de denominador igual a 1. Exemplos: $5=\frac{5}{1}$ e $1=\frac{1}{1}$.
2. Um número fracionário indica a divisão entre o numerador e o denominador. Exemplos: $8:2=\frac{8}{2}=4$ e $8:3=\frac{8}{3}$.

A primeira dessas considerações também é feita por Galante(1965,p.123), ao abordar a soma de frações, “lembrando que um inteiro qualquer, como exemplo 3, pode ser escrito na forma $\frac{3}{1}$ ”. A segunda, como já foi aqui mencionado, é tomada por Quintela (1966, p.156).

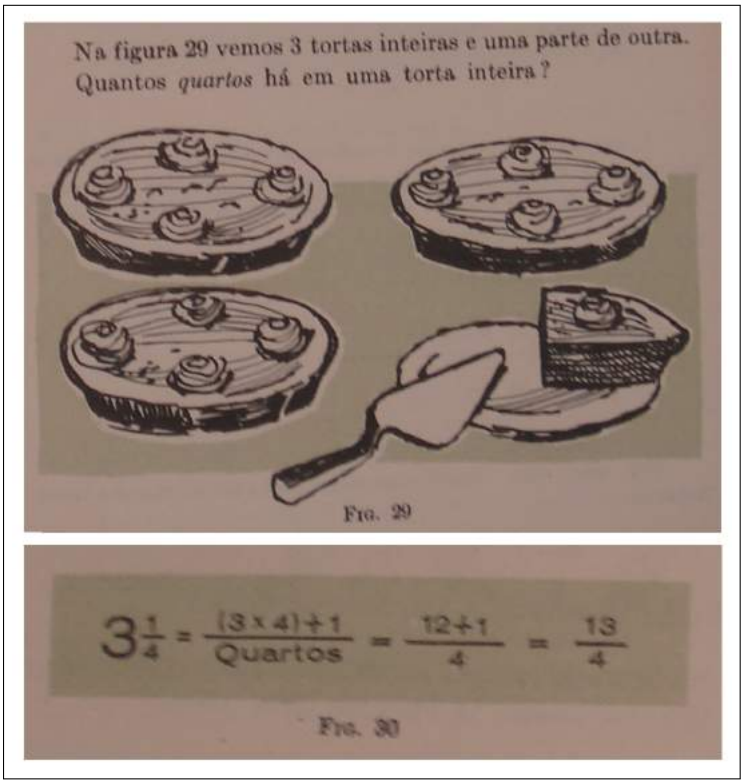
O **número misto** tem sua representação composta por um número inteiro e uma fração própria, tendo como equivalente uma fração imprópria (SANGIORGI, 1966, p.171). Assim:

$$\frac{19}{5}=3\frac{4}{5} \qquad \text{e} \qquad \frac{7}{3}=2\frac{1}{3} \tag{4.1}$$

Os textos de Sangiorgi, das edições de 1955 e de 1966, são praticamente idênticos, tendo como diferenças apenas a diagramação e a utilização da expressão “número fracionário impróprio” na edição mais recente.

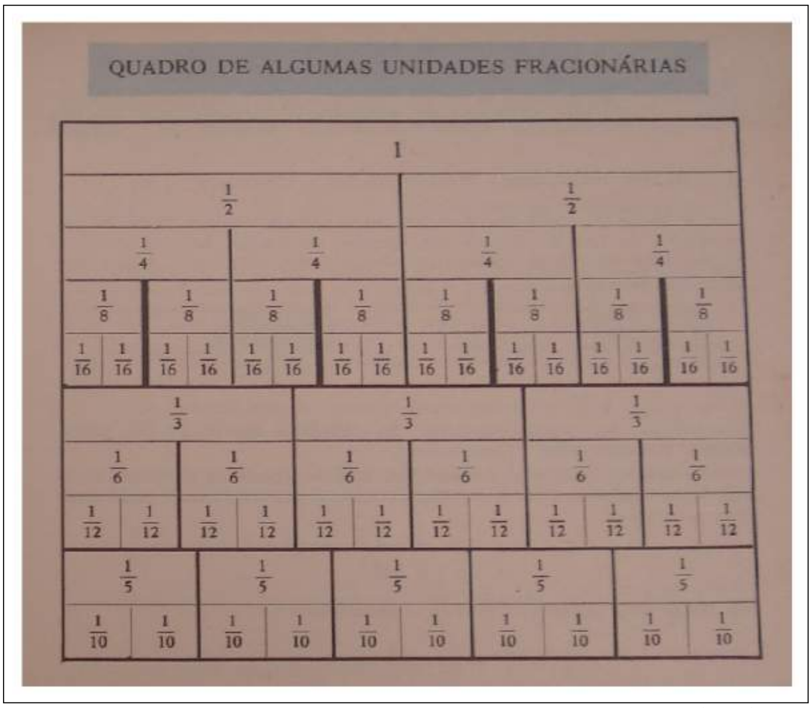
Para Galante (1965, p.124) a “soma de um número inteiro com uma fração própria é denominada *número misto*”, ou seja $5+\dfrac{2}{3}$ é um número misto, podendo ser escrito como $5\dfrac{2}{3}$. Quintela, por outro lado, não define o número misto, mas introduz o conceito por meio de um problema, acompanhado de uma ilustração, como pode ser visto na Figura 32.

Figura 32 – Ilustrações de "extração de inteiros e números mistos", em livro de Quintela(1966).



Fonte: Matemática para a primeira série ginasial, 1966, pp.157-158

Figura 33 – Quadro de algumas unidades fracionárias, em livro didático de Sangiorgi.



Fonte: Matemática para a primeira série ginasial, 1966, pp.157-158

Sangiorgi (1966) acrescenta uma seção de "Exercícios de fixação", contendo quarenta questões, envolvendo problemas, exercícios das técnicas operatórios e de aplicação das propriedades. Apresenta um *quadro de algumas unidades fracionárias* (Figura 33), acompanhado por exercícios que exploram a ideia de *fração de um número*. A presença dessa imagem parece constituir uma inovação, não somente nos livros de Sangiorgi, mas nas coleções analisadas, pois não encontramos quadro ou figura similar nos livros de Galante e Quintela, dos anos 1960.

Outra alteração apresentada por Sangiorgi (1966), em relação à coleção **Matemática – curso ginasial** foi a inclusão das classes de equivalência entre frações como uma seção do capítulo destinado aos números fracionários Dessa seção, destacamos os seguintes tópicos:

1. *Frações (os números fracionários) equivalentes* e *frações iguais* são conceitos distintos, pois as frações equivalentes são aquelas que representam o mesmo valor, ou seja, são numerais diferentes de um mesmo número, enquanto duas frações são iguais quando possuem os mesmos termos (numerador e denominador) (SANGIORGI, 1966, pp.174-175). Assim, são equivalentes as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$, enquanto a fração $\frac{2}{3}$ é igual à fração $\frac{2}{3}$. Para a equivalência, Sangiorgi usa a seguinte notação:

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{2}{4} \equiv \frac{3}{6} \equiv \frac{4}{8} \equiv \dots$$

   Essa distinção não é feita por Galante, ao enunciar a propriedade fundamental: "Multiplicando-se ou dividindo-se os termos de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtém-se uma fração igual à fração dada." (GALANTE, 1965, p.114). Essa regra é enunciada por Quintela (1966, p.161), mas esse não menciona a igualdade de frações e considera equivalentes as frações que têm o mesmo valor. Para Quintela, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, pois essas duas frações são equivalentes. Ao enunciar essa regra, Sangiorgi (1966, p.176) faz algumas alterações: 'Multiplicando-se (ou dividindo-se) os dois termos de uma fração por um mesmo número natural, obtém-se uma fração equivalente à fração dada."

   Dos três autores analisados, somente Sangiorgi (1966, p.174) define e representa a **classe de equivalência**: "O conjunto das frações equivalentes a uma dada fração constitui uma **classe de equivalência**". Essa definição é acompanhada do exemplo relativo ao número fracionário $\frac{1}{2}$, destacando, em nota de rodapé:

   > Essa é a maneira empregada pela Prof^{a} Lucília Bechara que, em 1962, iniciou a introdução da *Matemática Moderna na 1^{a} Série* do Colégio Vocacional de São Paulo (Brooklin). Usa-se, também, representar a *classe de equivalência* da fração $\frac{1}{2}$ por $\frac{\bar{1}}{2}$ (SANGIORGI, 1966, 174).

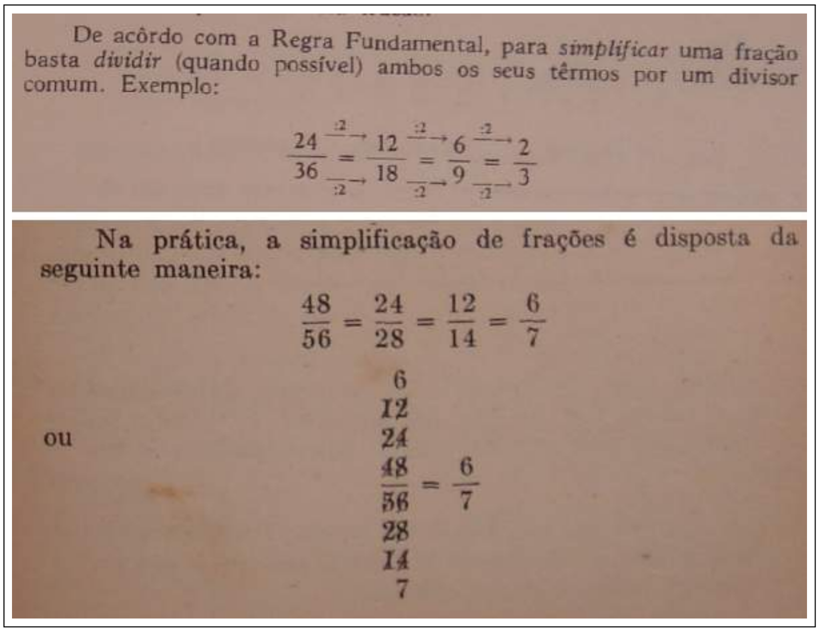
2. A notação para a equivalência de frações é observada por Sangiorgi:

   > Na prática costuma-se, para facilitar os cálculos entre frações equivalentes, usar o sinal $=$ ao invés do $\equiv$. Contudo, é preciso destacar, desde já, o conceito de equivalência do conceito de *igualdade*. A equivalência é mais "ampla" que a *igualdade*, como você poderá concluir com a seguinte interpretação:
   > Será que, dividindo uma certa fita em 30 pedações iguais e tomando 20

> desses pedaços, você faria o *mesmo laço* caso dividisse essa mesma fita em 3 pedações iguais e tomasse 2 deles?
> Como você está notando, apesar de frações *equivalentes*: $\frac{2}{3}$ e $\frac{20}{30}$ (pois, pertencem à mesma *classe de equivalência*) a igualdade entre os laços é discutível .... (SANGIORGI, 1966, p.175)

3. A simplificação de frações está presente nas três coleções aqui analisadas, sem diferenças significativas entre suas abordagens. Todavia, Sangiorgi incorpora uma diagramação diferente das demais, como podemos ver na Figura 34.

Figura 34 – Simplificação de frações nas coleções de Osvaldo Sangiorgi.



De acôrdo com a Regra Fundamental, para *simplificar* uma fração basta *dividir* (quando possível) ambos os seus têrmos por um divisor comum. Exemplo:

$$\frac{24}{36} \xrightarrow{:2} \frac{12}{18} \xrightarrow{:2} \frac{6}{9} \xrightarrow{:2} \frac{2}{3}$$

Na prática, a simplificação de frações é disposta da seguinte maneira:

$$\frac{48}{56} = \frac{24}{28} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

ou

$$\begin{array}{c} 6 \\ 12 \\ 24 \\ \frac{48}{56} = \frac{6}{7} \\ 28 \\ 14 \\ 7 \end{array}$$

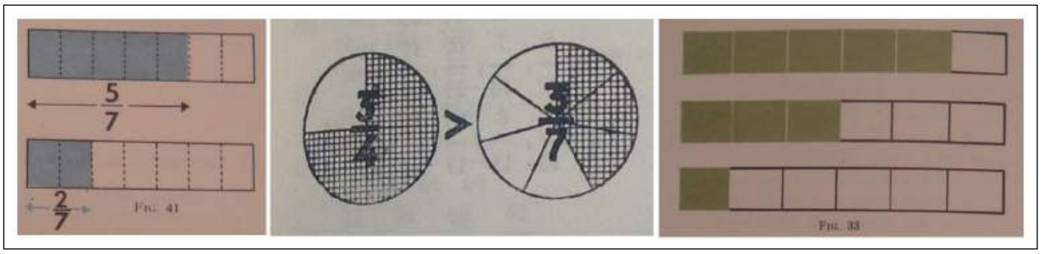
Fonte: Matemática: curso moderno, 1966, v.1, p.177 e Matemática: curso ginasial, 1962, v.1, p.123

4. Conceitos como *expressão (ou forma) mais simples* e *fração (forma) irredutível*, *redução ao mesmo denominador e ao menor denominador comum* são tratados pelos três autores, sem mudanças significativas em relação às suas edições anteriores. Todavia, Sangiorgi (1966) e Galante (1965) inserem *exercícios de fixação* entre os tópicos estudados.

A **comparação entre números fracionários** está presente na coleção de Sangiorgi, dentro da seção "Estrutura de ordem dos números fracionários". A sequência de apresentação é mantida, assim como os exemplos, mas o texto sofre algumas alterações, incluindo a representação geométrica das frações a serem comparadas. Contudo, os três autores apresentam a redução das frações ao mesmo denominador como regra a ser adotada na comparação das frações, prática já adotada em suas edições nos anos 1950. O livro de Quintela ainda apresenta exemplos de comparação reduzindo-se as frações ao mesmo numerador, como fez nas edições anteriores.

Quando comparamos as coleções de Sangiorgi, podemos notar as mudanças relacionadas à diagramação e, sobretudo, no emprego de figuras, como já foi mencionado. A Figura 35 nos possibilita o cuidado com a qualidade de impressão, o uso de cores e as informações numéricas como pontos salientes nos livros de Sangiorgi, publicados nos anos 1960.

Figura 35 – Uso de figuras na comparação de frações, em livros de Sangiorgi, Galante e Quintela.



Fonte: Matemática: curso moderno, 1966, v.1, p.181, Matemática: curso ginasial, 1965, v.1, 51ª ed.,p.119 e Matemática para a primeira série ginasial, 1966, 121ª ed., p.166, respectivamente.

Para Sangiorgi (1966, p.183), duas "frações frações *não equivalentes* dizem-se DIFERENTES". Essa definição não é utilizada por Galante e Quintela, bem como o emprego de letras como simbologia, que é retomado para a generalização de uma regra:

> Reconhece-se , facilmente, que duas frações são *diferentes* verificando se os produtos: *numerador da primeira* $\times$ *numerador da segunda* e *denominador da primeira*$\times$ *numerador da segunda* são diferentes. Exemplo:
>
> $$\frac{4}{5} \neq \frac{2}{3} \text{ pois: } 4 \times 3 \neq 5 \times 2$$
>
> De um modo geral:
>
> $$\boxed{\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d} \quad \text{se} \quad a \times d \neq b \times c}$$
>
> (SANGIORGI, 1966, p.183).

Sangiorgi (1966) acrescenta que o valor de uma fração pode ser alterado, obedecendo as seguintes regras:

1. Multiplicando-se (ou dividindo-se) o numerador de uma fração por um número natural, o valor da fração fica multiplicado (ou dividido) por esse número. Exemplo:$\frac{8}{9}$ é 2 vezes maior que $\frac{4}{9}$, pois $\frac{8}{9} = \frac{2 \times 4}{9}$.
2. Multiplicando-se (ou dividindo-se) o denominador de uma fração por um número natural, o valor da fração fica dividido (ou multiplicado) por esse número. Exemplo:$\frac{3}{8}$ é 2 vezes menor que $\frac{3}{4}$, pois $\frac{3}{8} = \frac{3}{2 \times 4}$

Como vimos anteriormente, essas regras estavam presentes em (QUINTELA, 1959, pp.122-123), logo após a comparação de frações. Curiosamente, o autor não apresentou tais regras na edição de 1966.

4.2 Operações com números fracionários

Após a apresentação das ideias, conceitos, propriedades e técnicas operatórias relacionadas aos números fracionários, Sangiorgi(1966) aborda as **operações** com esses números, reforçando o enfoque às propriedades estruturais:

> A técnica de cálculo das quatro primeiras operações no conjunto dos números fracionários, já é bem conhecida desde a Escola Primária. Também, agora, o que será mais ressaltado, ao lado do *conceito* de cada operação, são as *propriedades estruturais* existentes para essas operações no conjunto dos números fracionários. (SANGIORGI, 1966, p.188)

As "primeiras quatro operações" são a "ADIÇÂO e sua inversa SUBTRAÇÃO" e a "MULTIPLICAÇÃO e sua inversa DIVISÃO". A inversibilidade de uma operação constitui uma novidade nas coleções de Sangiorgi e dos outros autores aqui analisados.

Sangiorgi coloca os números fracionários como elementos de um conjunto, o **Conjunto dos Números Fracionários**, justificando, assim, as operações e propriedades operatórias desses números. Logo, as propriedades estruturais das operações com os números fracionários, assim consideradas por Sangiorgi, são: fechamento, comutativa, associativa, elemento neutro, distributiva e existência de elemento inverso. Essa última propriedade aparece como novidade nesse conjunto, enquanto as demais foram abordadas no Conjunto dos Números Inteiros, no mesmo livro.

Vejamos como Sangiorgi aborda essas operações, associando-as às abordagens apresentadas em sua coleção anterior e naquelas de Quintela e Galante, na década de 1960.

I – Adição: Sangiorgi mantém a mesma estrutura do texto da coleção anterior, ou seja, divide a adição em dois casos, iniciando cada um desses por uma regra e, logo em seguida, um exemplo de sua aplicação. Nesse novo texto, no entanto, a adição de duas frações é definida como a "operação que permite determinar a soma dessas frações" (SANGIORGI, 1966, p.188), onde a soma é compreendida como a "reunião" de unidades que, nesse caso, são unidades fracionárias (SANGIORGI, 1966, p.189). [3] A definição da adição de números fracionários não é tratada por Galante e Quintela em suas coleções desse período. No entanto, esses autores utilizam a abordagem por casos, como constava nas edições anteriores de suas coleções.

Ao tratar de cada caso da adição de números fracionários, os autores utilizam diferentes sequências de apresentação, podendo se observadas as seguintes ordens:

- Sangiorgi: definição; regra; exemplo.

[3] A definição da adição para números inteiros está na 1ª parte do capítulo 2 do livro aqui considerado. Sangiorgi parte das operações com conjuntos (capítulo 1), introduzindo os conceitos usando a linguagem apresentada nas noções de Teoria dos Conjuntos, iniciada nessa nova edição. O uso do termo "reunião" se insere nesse contexto.

- Galante: problema (ou exemplos); regra (ou generalização).
- Quintela: problema (ou exemplos); regra (ou generalização).

Os casos considerados, de acordo com cada autor, podem ser assim agrupados:

1. Frações com denominadores iguais.
2. Frações com denominadores diferentes.
3. Adição de frações com números inteiros.
4. Adição com números mistos.

Sangiorgi (1966) apresenta separadamente os dois primeiros casos, mostrando os dois últimos como casos particulares do segundo. Galante (1965) aborda separadamente cada um dos casos, enquanto Quintela o faz somente para os casos 1, 2 e 4. Nota-se também que o uso de figuras geométricas, para representar a comparação de frações, é feito somente por Sangiorgi.

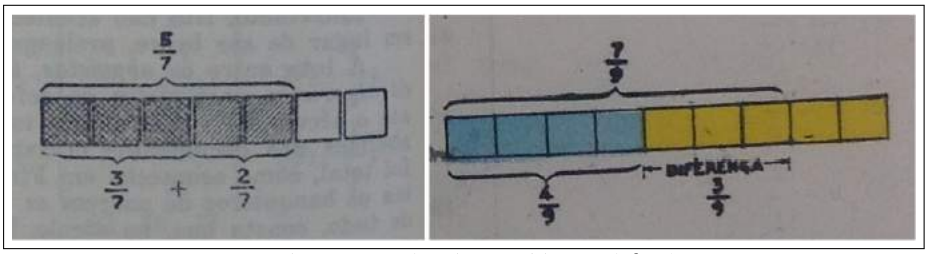
As técnicas operatórias apresentadas por cada autor são essencialmente idênticas, sem mudanças em relação àquelas presentes em suas coleções (ou edições) anteriores. Todavia, Sangiorgi incorpora ao seu texto as propriedades da adição: *fechamento, comutativa, associativa* e *elemento neutro*, acompanhadas de exemplos.

II – Subtração: Sangiorgi inicia a abordagem da subtração tomando esta como operação inversa da adição:

> Dadas duas frações, numa certa *ordem*, chama-se *diferença*, entre a primeira fração e a segunda, a *fração*, se existir, que *somada* à segunda produz a primeira. Assim, por exemplo, se $\square$ representa a *diferença* entre as frações : $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, temos a seguinte sentença matemática:
>
> $$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \square, \quad \text{o que acarreta:} \quad \square + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$
>
> A operação que permite determinar a *diferença* $\square$ entre duas frações é denominada *subtração*. (SANGIORGI, 1966, p.191)

Esta introdução não consta na coleção anterior de Sangiorgi e nas coleções de Galante e Quintela. Os três autores consideram os mesmos casos e técnicas operatórias da adição de números fracionários, mas somente em Galante (1965) encontramos uma ilustração, na qual o autor procura apresentar uma ideia da adição e da subtração (Figura 36). Sangiorgi, por outro lado, retoma as propriedades estruturais, observando que a subtração é "uma operação *não-comutativa*, pelo fato de a *ordem influir* no resultado da operação" (SANGIORGI, 1966, p.192).

Figura 36 – Uso de figuras nas operações com números fracionários, em Galante (1965).



Fonte: Matemática: curso ginasial, 1965, v.1, 51ª ed.,pp.122-127.

II – Multiplicação: Ao tratar da multiplicação de frações, Sangiorgi a define como “ a operação que permite determinar o *produto* de duas frações”[4].

Os três autores mantêm as técnicas operatórias apresentadas nas edições e coleções dos anos 1950, já descritas nesse trabalho. No entanto, para a multiplicação de frações, as estratégia usadas apresentam algumas diferenças. Quintela, por exemplo, parte de um problema para introduzir a multiplicação de inteiro por fração: *Quanto se deve pagar por 2/3 do metro de uma fazenda que custa 120 cruzeiros por metro?* Essa estratégia não é adotada por Sangiorgi e Galante. Note como os três autores optaram por apresentar a multiplicação de duas frações:

1. Galante enuncia a regra, acompanhada por um exemplo:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

.

2. Sangiorgi enuncia a regra, seguida de exemplo e argumentação:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}$$

> De fato, se ao invés de multiplicarmos $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{7}$, multiplicássemos $\frac{3}{4}$ por 5, teríamos: $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4}$, que representa um valor 7 vezes maior que se tivéssemos multiplicado por $\frac{5}{7}$. Portanto, o verdadeiro valor será obtido se dividirmos $\frac{3 \times 5}{4}$ por 7, o que equivale, de acordo com o estudado (nº 15), a multiplicar o denominador por 7, isto é: $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$. (SANGIORGI, 1966, p.195)

3. Quintela introduz a multiplicação de frações através da área de um retângulo, efetua a multiplicação, enuncia a regra e mostra um exemplo. A figura Figura 37 ilustra a abordagem de Quintela.

[4] O conceito de produto consta no capítulo destinado às operações com números inteiros, do mesmo livro aqui considerado.

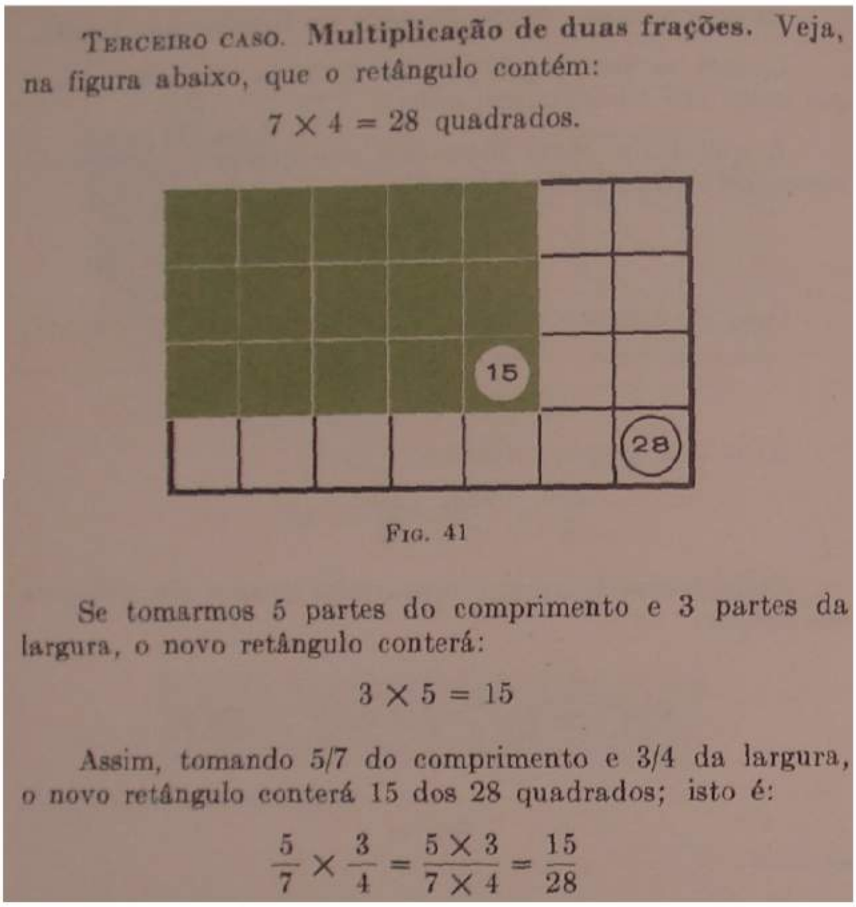
Sangiorgi ressalta que são válidas as seguintes propriedades da multiplicação de números fracionários: *fechamento*, *comutativa*, *elemento neutro* e *elemento inverso*. Observe o que nos diz o autor sobre essa última propriedade:

> (...) há mais uma importante *propriedade* a figurar no *conjunto dos números fracionários*, com relação à operação *multiplicação*: a que dá "vida" ao *elemento inverso* de um dado elemento. Logo:

Toda fração, não nula, admite um elemento inverso, que é a fração inversa da fração considerada; o produto dessas frações é igual ao elemento neutro (1) da multiplicação.

> Observe, com atenção, que o INVERSO de um *número natural n* é o *número fracionário* $\frac{1}{n}$. (SANGIORGI, 1966, p.196)

Figura 37 – Uso de figuras na multiplicação de frações, em livro de Quintela.


TERCEIRO CASO. **Multiplicação de duas frações.** Veja, na figura abaixo, que o retângulo contém:

$7 \times 4 = 28$ quadrados.

FIG. 41

Se tomarmos 5 partes do comprimento e 3 partes da largura, o novo retângulo conterá:

$3 \times 5 = 15$

Assim, tomando 5/7 do comprimento e 3/4 da largura, o novo retângulo conterá 15 dos 28 quadrados; isto é:

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$$

Fonte: Matemática para a primeira série ginasial, 1966, 121ª ed., p.176.

IV – Divisão: A divisão é apresentada por Sangiorgi(1966) como a operação inversa da multiplicação, ou seja, a operação que permite determinar o*quociente* entre duas frações. Logo:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \square \quad , \qquad \text{o que acarreta} \qquad \square \times \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$$

A regra apresentada como técnica operatória é assim enunciada: "Para dividir uma fração por outra basta multiplicar a primeira fração pela fração inversa da segunda". Os seguintes exemplos acompanham esse enunciado:

$1^{\underline{o}}$) $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3\times5}{4\times2} = \frac{15}{8}$

$2^{\underline{o}}$) $\frac{7}{9} : 4 = \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{7\times1}{9\times4} = \frac{7}{36}$

$3^{\underline{o}}$) $5 : \frac{2}{9} = \frac{5}{1} \times \frac{9}{2} = \frac{5\times9}{1\times2} = \frac{45}{2} = 22\frac{1}{2}$

A partir dessa regra, o autor apresenta o número fracionário como o *quociente exato* de dois números inteiros. Por exemplo: $53 : 6 = \frac{53}{6}$, pois:

$$53 : 6 = \frac{53}{1} \times \frac{1}{6} = \frac{53\times1}{1\times6} = \frac{53}{6}$$

Quintela opta por introduzir a divisão por meio de um problema: *Suely recebeu 6 peças de couro a fim de fazer cinturões para o grupo de escoteiros de seu irmão. Para cada cinto são utilizados* $\frac{2}{3}$ *de peça. Quantos cintos Suely fará com as sei peças?*

Quintela resume o problema à divisão de 6 por $\frac{2}{3}$, apresentando uma figura retangular, dividida em três partes iguais, acompanhada da seguinte argumentação:

> Com dois terços da peça faz um cinto e sobra *um terço* que dará para meio cinto, como se vê na figura 45. Assim, cada peça dá um *cinto e meio* ou $1\frac{1}{2}$.
>
> As seis peças darão:
>
> $6 : \frac{2}{3} = 6 \times \frac{3}{2} = 9$ cintos (QUINTELA, 1966, p.180)

Constata-se, observando o tópico seguinte dos livros, que Sangiorgi e Galante empregam as figuras como recurso argumentativo na resolução de problemas.

Como regra prática da divisão de frações, Quintela retoma aquela presente nas edições anteriores: *Multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor*.

Galante (1965) mantém a estrutura que vinha adotando: problema, enuncia a regra geral, apresenta exemplo(s), casos particulares (divisões de inteiro por fração, de fração por inteiro e de números mistos).

Na seção "Lembrete amigo", Sangiorgi diz que o conjuntos dos números fracionários é "mais amplo" que o conjunto dos números inteiros, acrescentando que o "conjunto de todos os números inteiros e fracionários recebe o nome de CONJUNTOS DOS NÚMEROS RACIONAIS, que você estudará mais tarde." (SANGIORGI, 1966, p.199).

Sangiorgi destina uma página ao tratamento das expressões numéricas com frações (p.200), onde apresenta dois exemplos de resolução, usando as expressões:

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times 10 \tag{4.2}$$

$$\left[\left(2+\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{6}:3\right]\times\frac{4}{5}+2 \tag{4.3}$$

V – Potenciação: Essa operação é tratada por Sangiorgi de forma diferente daquela apresentada na coleção anterior, onde a regra era apresentada e acompanhada por quatro exemplos. Em sua nova coleção, Sangiorgi acrescenta:

- uma definição de potência: "*Potência* de uma fração é um produto de *fatores iguais* a essa fração"(p.203).
- uma definição de potenciação: "a *potenciação* é a *operação* que permite determinar a potência"(p.203).
- casos especiais: "toda fração elevada ao expoente zero é igual a 1" e "toda fração elevada ao expoente 1 é igual à própria fração" (p.204);
- observações: a potência de um número misto, o uso de *parênteses* e a validade das "propriedades operatórias estudadas na *potenciação com números inteiros*", presente na parte inicial do livro.
- nota: "No caso da *potenciação* com *expoentes fracionários*, como por exemplo: $5^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$ é preciso ampliar o conjunto dos números já conhecidos, estudo que será feito em outras séries."(p.204).

Quintela (1966, pp.181-182) também inclui essa operação em sua coleção. Galante (1965), no entanto, continuou sem apresentar esse tópico.

VI – Radiciação: Sangiorgi e Quintela incluem a operação de radiciação em suas coleções pois, como vimos anteriormente, esse assunto não era contemplado nas coleção ou edições anteriores, respectivamente. Assim Sangiorgi aborda essa operação:

> Conhecida a *potência* de uma fração, bem como o *expoente*, a que essa fração está elevada, pode-se determinar a *base* (que é a fração de que se está falando) pela *operação inversa* da potenciação, que é a *radiciação*. Assim, por exemplo:
>
> $$\text{de } \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \text{ temos } \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$
>
> ou também:
>
> $$\boxed{\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}\Longleftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}}$$
>
> Outros exemplos:
>
> $$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$
> $$\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}\Longleftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$$

(SANGIORGI, 1966, p.205)

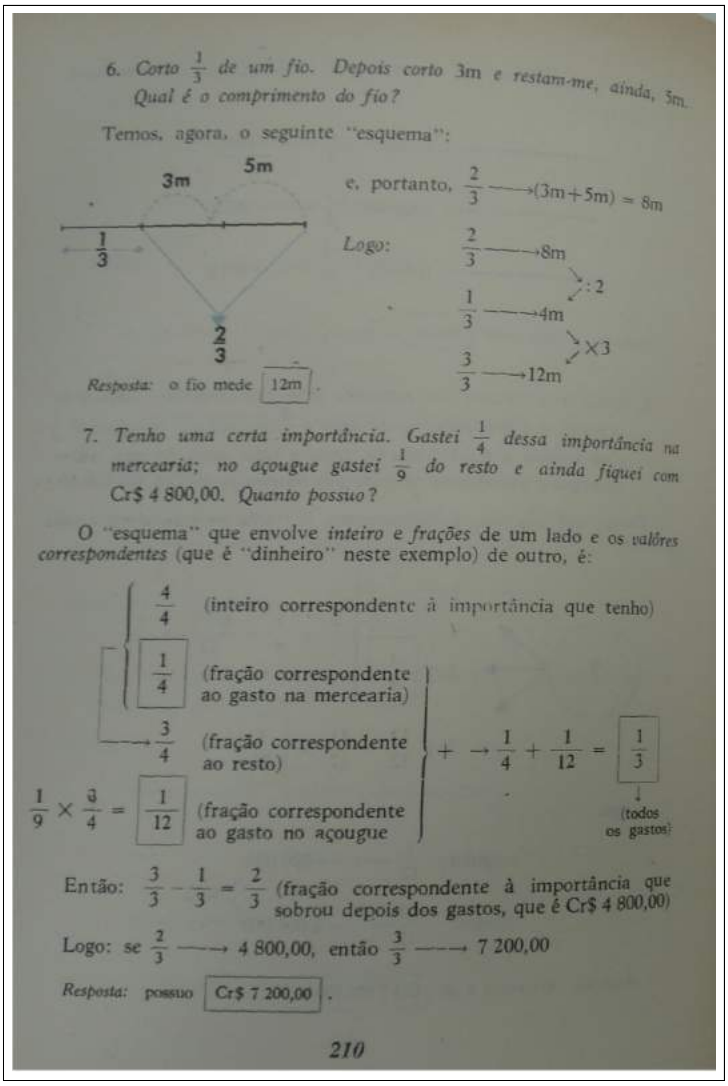
A abordagem de Quintela para a operação de radiciação com números fracionários não difere substancialmente da apresentada por Sangiorgi. No entanto, enfatiza que “só existe a raiz de uma fração no conjunto dos números fracionários se ela for **potência** de outra fração (QUINTELA, 1966, p.182), acrescentando observações referentes aos seguintes casos:

$$\sqrt{\frac{18}{32}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad \sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

As *expressões numéricas envolvendo potenciação e radiciação de frações* são abordadas por Sangiorgi, que apresenta as resoluções das expressões $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 8$ e $9 + \sqrt{\frac{4}{25}} : \frac{2}{5}$. Os dois autores trazem exercícios referentes a essas operações imediatamente após a apresentação das mesmas.

Sangiorgi traz uma seção de “Problemas de aplicação", mostrando uma técnica na qual as figuras e os esquemas são incorporados às estratégias de resolução (Figura 38). Essa alteração também é feita por Galante, que inclui figuras tridimensionais (Figura 39). Quintela, ao contrário desses, não utiliza figuras nessa seção.

Figura 38 – Problemas de aplicação, propostos por Sangiorgi.



6. *Corto $\frac{1}{3}$ de um fio. Depois corto 3m e restam-me, ainda, 5m. Qual é o comprimento do fio?*

Temos, agora, o seguinte "esquema":

3m 5m

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$

e, portanto, $\frac{2}{3} \longrightarrow (3m+5m) = 8m$

Logo: $\frac{2}{3} \longrightarrow 8m$ $\quad :2$

$\frac{1}{3} \longrightarrow 4m$ $\quad \times 3$

$\frac{3}{3} \longrightarrow 12m$

Resposta: o fio mede $\boxed{12m}$.

7. *Tenho uma certa importância. Gastei $\frac{1}{4}$ dessa importância na mercearia; no açougue gastei $\frac{1}{9}$ do resto e ainda fiquei com Cr$ 4 800,00. Quanto possuo?*

O "esquema" que envolve *inteiro e frações* de um lado e os *valôres correspondentes* (que é "dinheiro" neste exemplo) de outro, é:

$\frac{4}{4}$ (inteiro correspondente à importância que tenho)

$\boxed{\frac{1}{4}}$ (fração correspondente ao gasto na mercearia)

$\frac{3}{4}$ (fração correspondente ao resto)

$\frac{1}{9} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{12}}$ (fração correspondente ao gasto no açougue

$+ \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{3}}$ (todos os gastos)

Então: $\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (fração correspondente à importância que sobrou depois dos gastos, que é Cr$ 4 800,00)

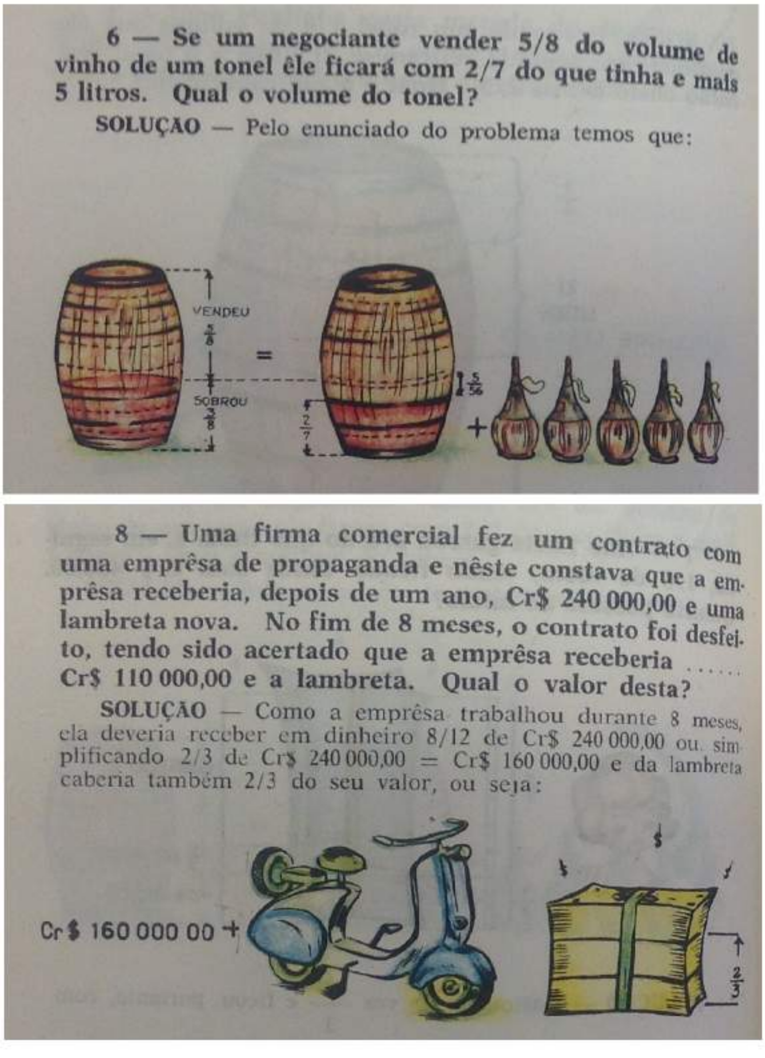
Logo: se $\frac{2}{3} \longrightarrow 4\,800{,}00$, então $\frac{3}{3} \longrightarrow 7\,200{,}00$

Resposta: possuo $\boxed{\text{Cr\\$ 7 200,00}}$.

210

Fonte: Matemática: curso moderno, 1966, v.1, p.207

Figura 39 – "Problemas visualizados sobre frações ordinárias", propostos por Galante(1965).



6 — Se um negociante vender 5/8 do volume de vinho de um tonel êle ficará com 2/7 do que tinha e mais 5 litros. Qual o volume do tonel?

SOLUÇAO — Pelo enunciado do problema temos que:

8 — Uma firma comercial fez um contrato com uma emprêsa de propaganda e nêste constava que a emprêsa receberia, depois de um ano, Cr$ 240 000,00 e uma lambreta nova. No fim de 8 meses, o contrato foi desfeito, tendo sido acertado que a emprêsa receberia …… Cr$ 110 000,00 e a lambreta. Qual o valor desta?

SOLUÇÃO — Como a emprêsa trabalhou durante 8 meses, ela deveria receber em dinheiro 8/12 de Cr$ 240 000,00 ou, simplificando 2/3 de Cr$ 240 000,00 = Cr$ 160 000,00 e da lambreta caberia também 2/3 do seu valor, ou seja:

Fonte: Matemática: curso ginasial, 1965, v.1, 51ª ed.,p.137

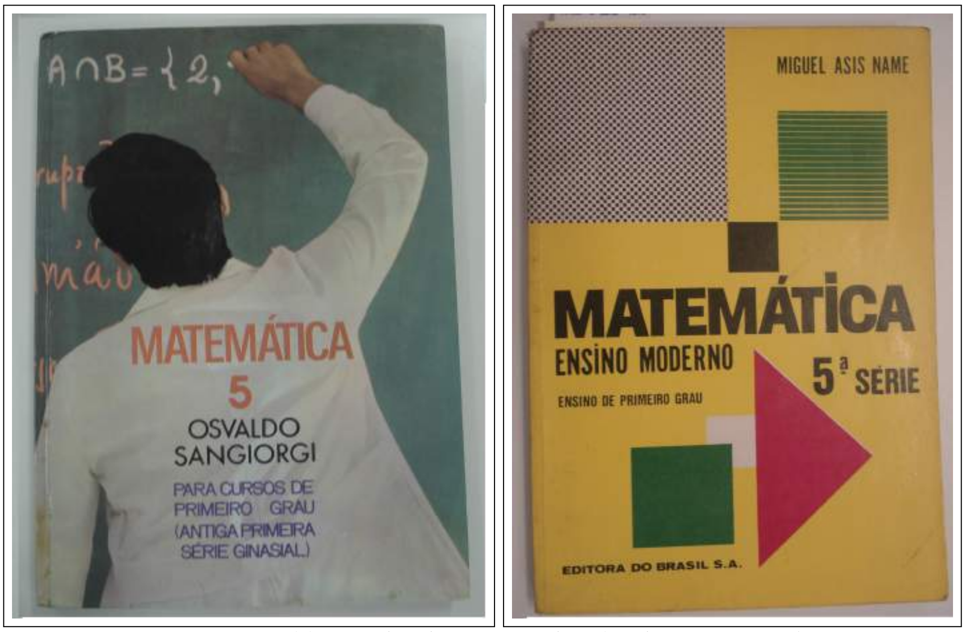
CAPÍTULO

5

SANGIORGI E NAME: A MATEMÁTICA MODERNA NO INÍCIO DOS ANOS 1970

No início dos anos 1970, Osvaldo Sangiorgi publica a coleção "Matemática para curso de primeiro grau", pela Companhia Editora Nacional, enquanto Miguel Asis Name publica "Matemática ensino moderno: ensino de primeiro grau", pela Editora do Brasil. O **primeiro grau** era o equivalente ao **curso ginasial** dos anos anteriores. Assim, tomaremos para análise os livros direcionados à 5ª série, correspondente ao antigo primeiro ano do curso ginasial, analisando um exemplar de 1972 da coleção de Sangiorgi e um exemplar de 1975 (86ª ed.) da coleção de Name. A Figura 40 mostra as capas desses livros. No âmbito desse capítulo, toda citação de Sangiorgi e Name está relacionada às coleções acima citadas.

Figura 40 – Capas de livros de Matemática destinados ao ensino de primeiro grau, na década de 1970.



Fonte: Osvaldo Sangiorgi(1972) e Miguel Asis Name (1975)

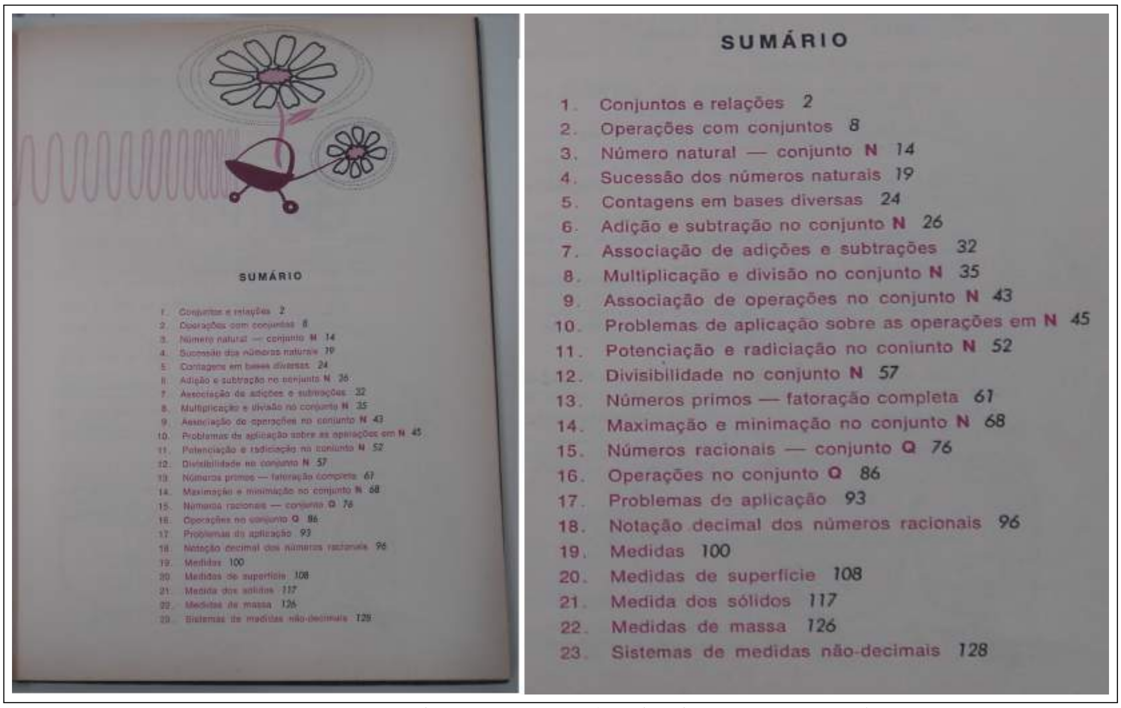
Os novos livros de Sangiorgi têm dimensões maiores que aquelas adotadas na coleção anterior. A Figura 41 permite fazer visualmente essa comparação.

Figura 41 – Capas de livros das décadas de 1970 e 1960, respectivamente

Fonte: Sangiorgi (1972) e Sangiorgi (1966), respectivamente.

Observando o índice do livro (Figura 42), notamos que Sangiorgi (1972) mantém os conteúdos e sua ordem de apresentação, em relação à coleção anterior. A abordagem a partir da teoria dos conjuntos continua sendo empregada, o que pode ser notado no emprego de simbologia ($\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$), consolidando uma mudança iniciada na coleção dos anos 1960.

Figura 42 – Índice do livro de Osvaldo Sangiorgi, de 1972, direcionado 5ª série.

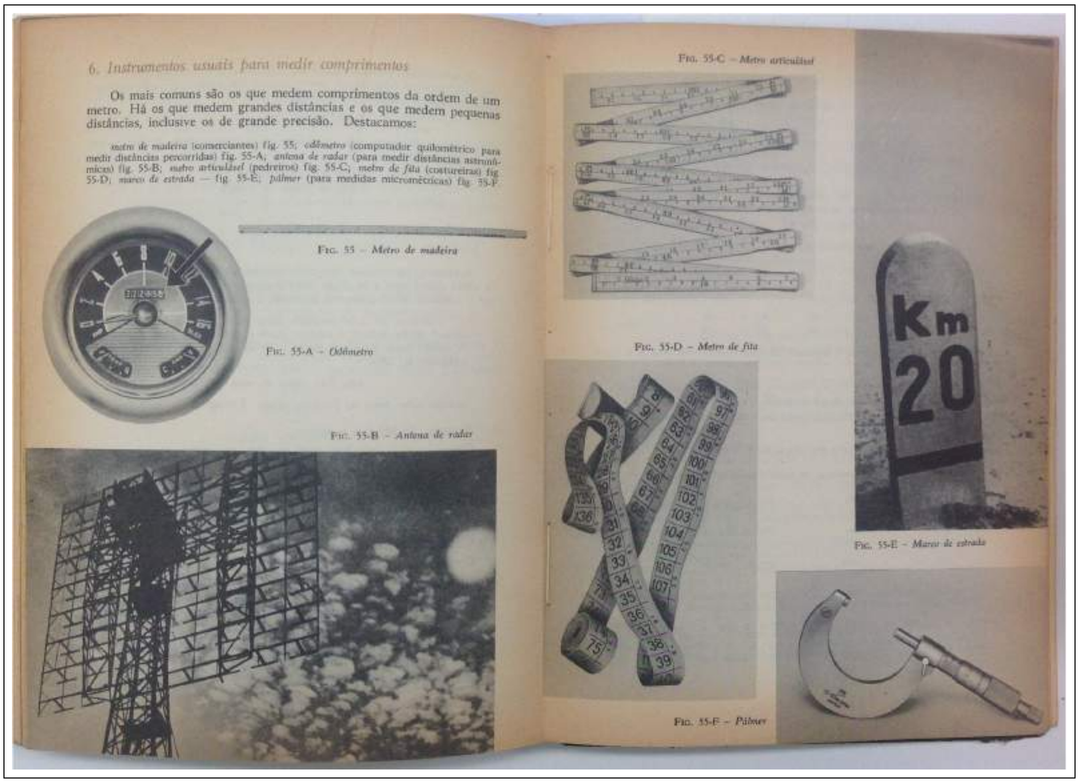


SUMÁRIO

Fonte: Matemática para cursos de primeiro grau,1972, v.5.

A foto colorida, estampada na capa, constitui uma novidade nas coleções aqui analisadas, mas Sangiorgi já havia incluído imagem fotográfica (não colorida) na coleção anterior, o que pode ser verificado na Figura 43.

Figura 43 – Fotografias presentes em livro de Osvaldo Sangiorgi.



Fonte: Matemática curso moderno,1966.

Nos capítulos 15 e 16, que recebem os títulos de "Números Racionais – conjunto $\mathbb{Q}$" e "Operações no conjunto $\mathbb{Q}$", respectivamente, Sangiorgi adota a denominação *número racional*, abandonando aquela empregada nas coleções dos anos 1960, ou seja, *número fracionário*. Essa ruptura não é apenas semântica, pois vem acompanhada de algumas outras que, simultaneamente, convivem com partes pertencentes à coleção anterior.

Nota-se que Sangiorgi mescla *inovação* e *conservação* neste seu novo texto, o que nos permite perceber a influência do Movimento da Matemática Moderna nas concepções curriculares e didáticas ocorridas nos anos 1960. Reconhecer e identificar alguns aspectos dessa influência é a tarefa que passamos a realizar.

Inicialmente, analisaremos o livro de Sangiorgi a partir da sequência por ele estabelecida, procurando estabelecer uma análise comparativa entre este e sua coleção "Matemática curso moderno" e a coleção "Matemática ensino moderno: ensino de primeiro grau", de Miguel Asis Name.

5.1 Frações e números racionais

Sangiorgi divide os capítulos (ou unidades) do livro em seções, numeradas sequencialmente, prática esta que já constava nas coleções anteriores. No entanto, nessa nova coleção, o autor passa a codificá-la com o capítulo. Desse modo, a sequência adotada fica assim estabelecida:

15 Números racionais – conjunto $\mathbb{Q}$
15.1 Conceito de número racional absoluto
15.2 Classe de equivalência: número racional
15.3 Igualdade de números racionais; representações diferentes: frações equivalentes
15.4 Aplicações práticas
15.5 Novo conjunto numérico: $\mathbb{Q}$
15.6 Recordando o estudo de frações
15.7 Aplicações práticas
15.8 Identificação entre números naturais e números racionais
15.9 Frações equivalentes; simplificação
15.10 Aplicações práticas
15.11 Redução de frações ao mesmo denominador
15.12 Estrutura de ordem em $\mathbb{Q}$
15.13 Reta numerada em $\mathbb{Q}$
15.14 Aplicações práticas

16 Operações no conjunto $\mathbb{Q}$
16.1 Introdução
16.2 Operação: adição; resultado: soma
16.3 Propriedades estruturais
16.4 Operação: subtração; resultado: diferença
16.5 Associação de adições e subtrações; técnica de cálculo
16.6 Operação: multiplicação; resultado: produto
16.7 Propriedades estruturais
16.8 Operação: divisão; resultado: quociente
16.9 expressões numéricas com números racionais
16.10 Operação: potenciação; resultado: potência
16.11 Operação: radiciação; resultado: raiz

17 Problemas de aplicação
18 Notação decimal dos números racionais

Na década de 1970, pela Editora do Brasil, Miguel Asis Name publicou a coleção "Matemática Ensino Moderno: ensino de primeiro grau". No livro destinado à 5 ª série, o autor distribui o conteúdo em cinco capítulos:

I - Conjuntos
II - Conjunto dos números naturais
III - Operações com números naturais
IV - Múltiplos e divisores
V - Conjunto dos números racionais

No tratamento dado aos números racionais, Name(1975) faz a seguinte distribuição:

1	Conceito de fração	9	Subtração
2	Frações próprias e frações impróprias	10	Multiplicação
		11	Divisão
3	Frações equivalentes	12	Potenciação
4	Classes de equivalência	13	Expressões com números racionais
5	Simplificação de frações		
6	Redução de frações ao mesmo denominador	14	Representação decimal de números racionais
7	Comparação de frações	15	Operações com decimais
8	Adição	16	Exercícios de revisão

Observe que as sequências adotadas pelos autores mostram-se diferentes quanto:

- à ordem dos conteúdos da primeira metade (conceitos);
- aos conteúdos: ausência da *reta numerada* e da operação *potenciação*, em Name (1975).

Quanto à abordagem dos conteúdos, encontramos algumas peculiaridades na obra de Sangiorgi que a diferenciam, em muitos casos, de suas coleções anteriores e, sobretudo, da coleção de Name desse período.

A divisão de uma barra de chocolate em duas partes iguais e a tomada de três dessas partes continua sendo o mote para a introdução do conceito desse novo número (vide Figura 44).

Nessa nova abordagem, Sangiorgi representa essa situação pelo par ordenado (2,3), enunciando as seguintes ideias referentes aos pares ordenados:

- equivalência;
- propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva;
- classe de equivalência.

Para a classe de equivalência do par (2,3), Sangiorgi emprega a seguinte notação:

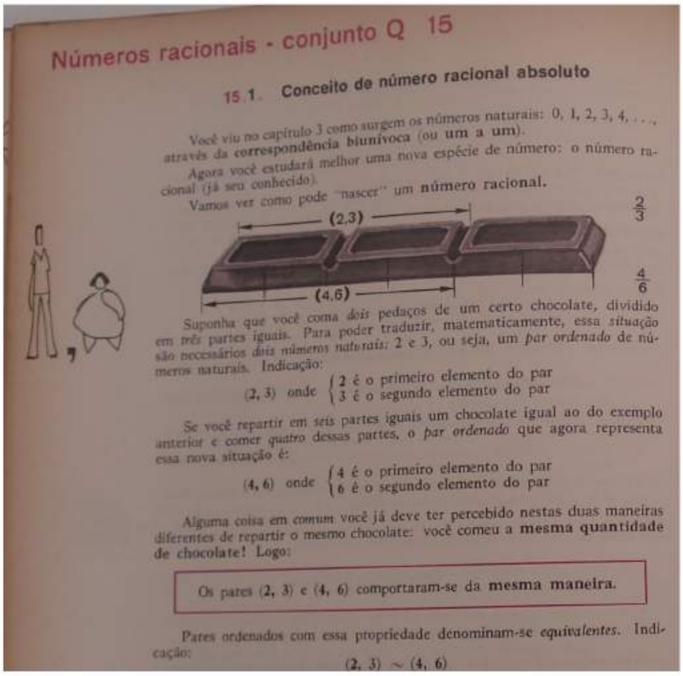
$$\overline{(2,3)} = \{(2,3),(4,6),(6,9),(8,12),\ldots\}$$

O número racional é então definido: "Toda classe de equivalência de pares ordenados de números naturais define um número racional" (SANGIORGI, 1972, p.77). Logo,

$$\overline{(2,3)} = \{(2,3),(4,6),(6,9),(8,12),\ldots\} = \frac{2}{3}$$

são representações do mesmo número racional.

Figura 44 – Ideia inicial de número racional, em livro de Osvaldo Sangiorgi, nos anos 1970.



Números racionais - conjunto Q 15

15.1. Conceito de número racional absoluto

Você viu no capítulo 3 como surgem os números naturais: 0, 1, 2, 3, 4, . . ., através da **correspondência biunívoca** (ou **um a um**).

Agora você estudará melhor uma nova espécie de número: o número racional (já seu conhecido).

Vamos ver como pode "nascer" um **número racional.**

Suponha que você coma *dois* pedaços de um certo chocolate, dividido em *três* partes iguais. Para poder traduzir, matematicamente, essa *situação* são necessários *dois números naturais*: 2 e 3, ou seja, um *par ordenado* de números naturais. Indicação:

$$(2,3) \text{ onde } \begin{cases} 2 \text{ é o primeiro elemento do par} \\ 3 \text{ é o segundo elemento do par} \end{cases}$$

Se você repartir em *seis* partes iguais um chocolate igual ao do exemplo anterior e comer *quatro* dessas partes, o *par ordenado* que agora representa essa nova situação é:

$$(4,6) \text{ onde } \begin{cases} 4 \text{ é o primeiro elemento do par} \\ 6 \text{ é o segundo elemento do par} \end{cases}$$

Alguma coisa em *comum* você já deve ter percebido nestas duas maneiras diferentes de repartir o mesmo chocolate: você comeu a **mesma quantidade de chocolate!** Logo:

Os pares (2, 3) e (4, 6) comportaram-se da **mesma maneira.**

Pares ordenados com essa propriedade denominam-se *equivalentes*. Indicação:

$$(2,3) \sim (4,6)$$

Fonte: Matemática para cursos de primeiro grau,1972, v.5, p.76

.

Do mesmo modo, o número racional $\overline{(4,6)}$ pode ser assim representado:

$$\overline{(4,6)} = \{(2,3),(4,6),(6,9),(8,12),\dots\} = \frac{4}{6}$$

Como as classes $\overline{(2,3)}$ e $\overline{(4,6)}$ são iguais, pois possuem os mesmos pares ordenados, $\overline{(2,3)}$ e $\overline{(4,6)}$ definem o mesmo número racional, ou seja, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. As frações que definem o mesmo número racional são chamadas *frações equivalentes*. De um modo geral, para representar um número racional, escolhe-se a fração correspondente ao par *mais simples* (SANGIORGI, 1972, p.78).

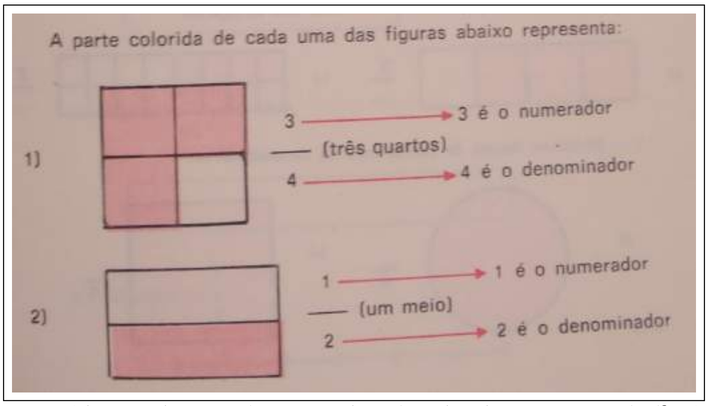
Apesar da relação entre numero fracionário e par ordenado estar presente na coleção anterior (vide Figura 31), essa abordagem inicial de Sangiorgi constitui uma novidade, em relação às suas coleções e às obras de Quintela, Galante e Name aqui analisadas.

Assim como Sangiorgi, Name também adota o exemplo da barra de chocolate, dividida em cinco partes iguais, das quais duas são tomadas, conduzindo à representação $\frac{2}{5}$ e ao conceito de fração:

> (...) este é um exemplo de número fracionário ou, simplesmente, **fração**. Geralmente, as frações são representadas por um par de números naturais, um superior e outro inferior, sendo separados por um traço horizontal, assim: $\frac{2}{5}$ ((NAME, 1975, p.135).

Percebe-se que Name não faz distinção entre *fração* e *número fracionário*. Denomina os termos da fração (numerador e denominador), apresentando figuras que ilustram a associação entre o número fracionário e a partição da unidade (vide Figura 45).

Figura 45 – Ideia inicial de número racional em Name (1975).

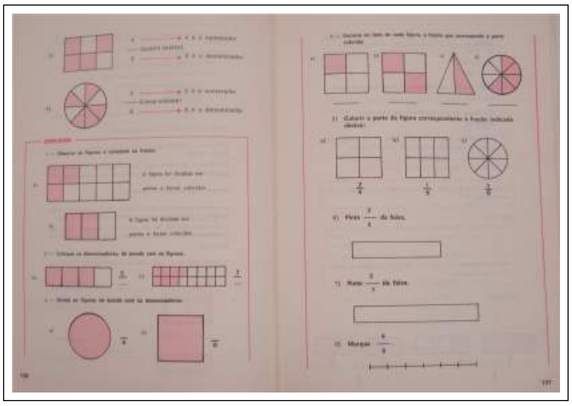


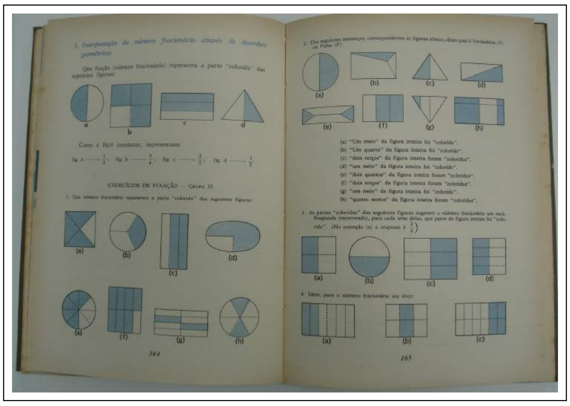
Fonte: Matemática Ensino Moderno: ensino de primeiro grau, 1975, 5ª série, p.135

.

Nota-se a semelhança visual entre as figuras apresentadas nos livros de Name (1975, pp.136-137) e Sangiorgi (1966, pp.204-205), como mostra a Figura 46. Por serem autores de editoras diferentes, pode-se inferir que essa forma de representação já estava consolidada, assim como o estabelecimento da ideia dos diagramas de setores como estratégia de ensino nos livros.

Figura 46 – Ilustrações em livros de Name(1975) e Sangiorgi(1966)



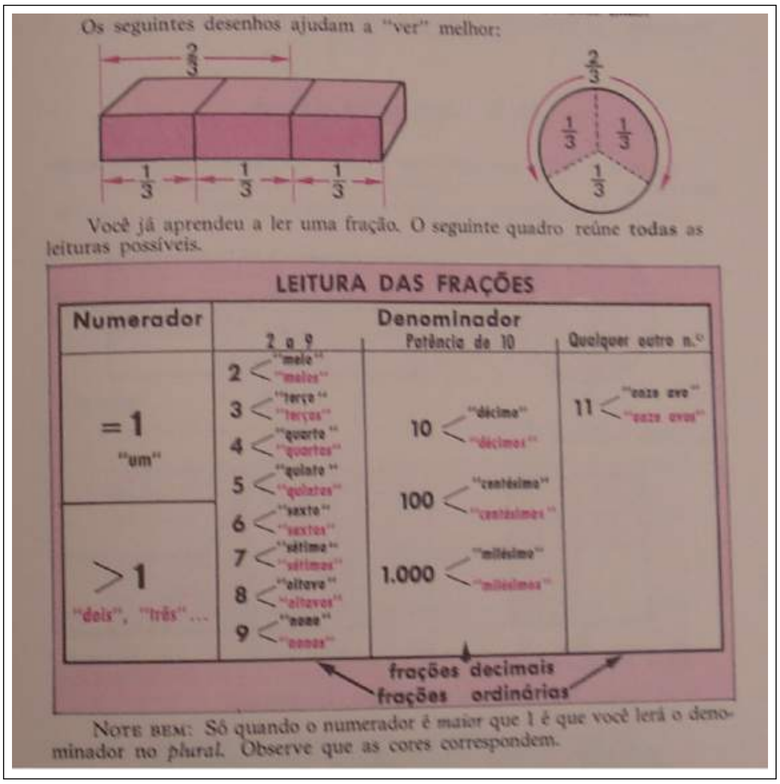


Fonte: Matemática Ensino Moderno: ensino de primeiro grau,1972, v.5, pp.136-137 e Matemática curso moderno, 1966, v1, pp.204-205

.

Notemos que Name (1975), na maioria das vezes, dirige-se aos números estudados como *frações* , empregando *número racional* ao afirmar que todo "número natural é um número racional"(p.139) e ao tratar das operações. Sangiorgi, em contrapartida, retoma as ideias de fração, fração ordinária, fração decimal e leitura de uma fração, incluindo novas ilustrações (vide Figura 47), mas desenvolve todo o texto considerando os *números racionais*.

Figura 47 – Leitura de frações, em livro de Sangiorgi(1972)



Fonte: Matemática para cursos de primeiro grau,1972, v.5, p.79

.

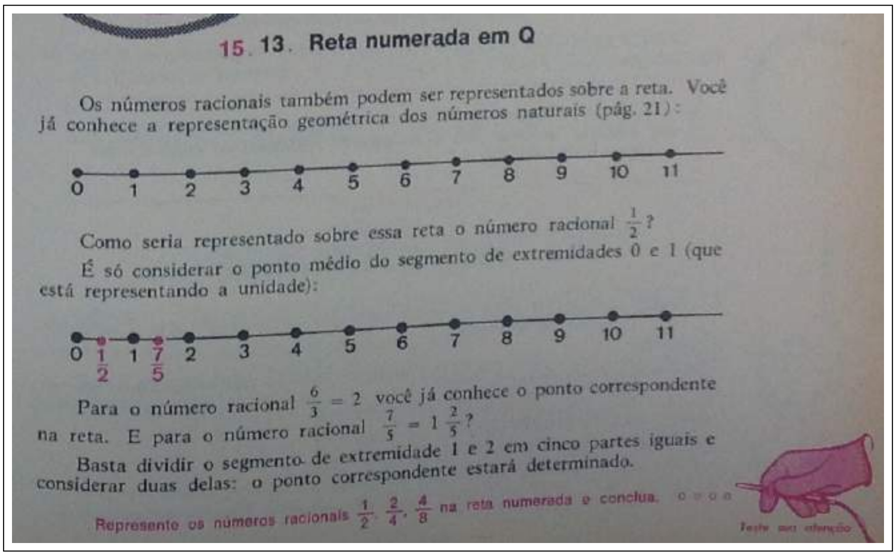
O novo conjunto é assim apresentado por Sangiorgi:

> O conjunto de todos os números racionais constiui um novo conjunto numérico, denominado *conjunto dos números racionais*. Indicação: $\mathbb{Q}$.
>
> Representando um número racional qualquer pela *fração*: $\frac{a}{b}$, onde **a** e **b** representam números naturais, sendo $b \neq 0$, o conjunto $\mathbb{Q}$ poderá ser representado da seguinte maneira:
>
> $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid \text{a e b são números naturais, com} \quad b \neq 0 \right\}$$
>
> (SANGIORGI, 1972, p.78).

Notemos que o emprego das simbologias advindas da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra estão presentes nas coleções de Sangiorgi e Name aqui estudadas, mostrando certa consolidação dessa prática, o que é reforçado por Sangiorgi (1972, p.78): "Todo **número natural** é um **número racional**, ou seja: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$. Portanto, o número racional $\dfrac{a}{b}$ é um *número natural* quando **a** é *múltiplo de* ***b***".

A **reta numerada em** $\mathbb{Q}$ constitui outra novidade dessa nova coleção de Sangiorgi, que não se encontra no livro de Name aqui analisado. A Figura 48 mostra como Sangiorgi introduziu esse assunto.

Figura 48 – Reta numerada no conjunto dos números racionais, presente em livro de Sangiorgi, de 1972



15. 13. **Reta numerada em Q**

Os números racionais também podem ser representados sobre a reta. Você já conhece a representação geométrica dos números naturais (pág. 21):

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Como seria representado sobre essa reta o número racional $\frac{1}{2}$?

É só considerar o ponto médio do segmento de extremidades 0 e 1 (que está representando a unidade):

0 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{7}{5}$ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Para o número racional $\frac{6}{3} = 2$ você já conhece o ponto correspondente na reta. E para o número racional $\frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$?

Basta dividir o segmento de extremidade 1 e 2 em cinco partes iguais e considerar duas delas: o ponto correspondente estará determinado.

Represente os números racionais $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ na reta numerada e conclua.

Fonte: Matemática para cursos de primeiro grau,1972, v.5, p.79

.

5.2 As operações com números racionais

O tratamento dado por Sangiorgi às **operações com números racionais** nessa nova coleção não difere substancialmente da anterior. São mantidas:

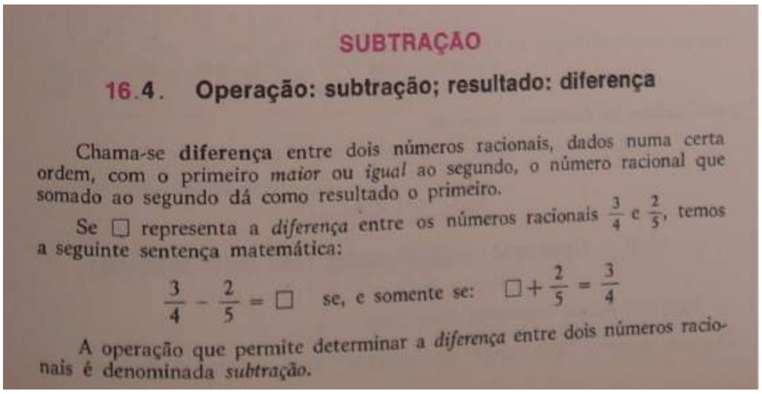
- a ordem de apresentação das operações;
- a consideração de pares de operações inversas: adição/subtração, multiplicação/divisão e potenciação/radiciação;
- a ênfase às propriedades estruturais (comutativa, elemento neutro, associativa e elemento inverso);
- as técnicas de cálculo e de resolução de expressões numéricas.

Na maior parte desse capítulo, Sangiorgi mantém o texto anterior, imprimindo-lhe pequenas modificações e acrescentando nova diagramação, como podemos observar nas figuras 49, referentes ao tratamento dado à subtração.

A multiplicação, no entanto, é apresentada de maneira diferente da anterior. Sangiorgi inicia por um problema: determinar quanto é *um terço* da *metade* de *uma barra de chocolate*. Usando a figura de uma tira retangular dividida em seis partes iguais, o autor procura mostrar que o resultado $\frac{1}{6}$ corresponde ao produto entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \tag{5.1}$$

Figura 49 – Subtração com números fracionários em livros de Sangiorgi, de 1972 e 1966, respectivamente.



SUBTRAÇÃO

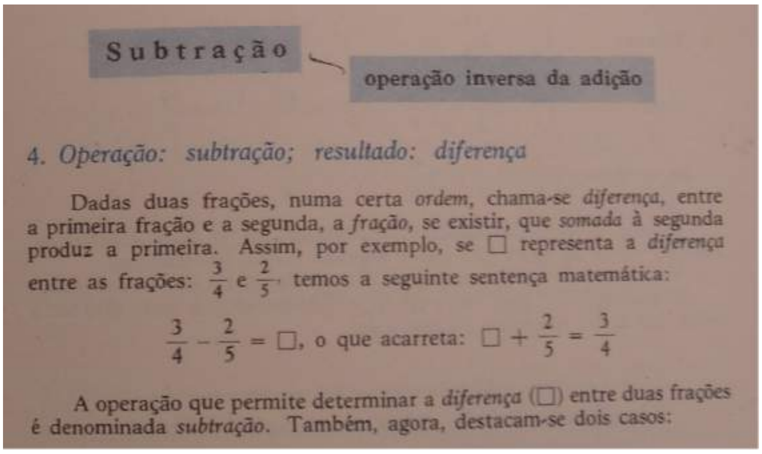
16.4. Operação: subtração; resultado: diferença

Chama-se **diferença** entre dois números racionais, dados numa certa ordem, com o primeiro *maior* ou *igual* ao segundo, o número racional que somado ao segundo dá como resultado o primeiro.

Se $\square$ representa a *diferença* entre os números racionais $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, temos a seguinte sentença matemática:

$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \square$ se, e somente se: $\square + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$

A operação que permite determinar a *diferença* entre dois números racionais é denominada *subtração*.



Subtração — operação inversa da adição

4. *Operação: subtração; resultado: diferença*

Dadas duas frações, numa certa *ordem*, chama-se *diferença*, entre a primeira fração e a segunda, a *fração*, se existir, que *somada* à segunda produz a primeira. Assim, por exemplo, se $\square$ representa a *diferença* entre as frações: $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, temos a seguinte sentença matemática:

$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \square$, o que acarreta: $\square + \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$

A operação que permite determinar a *diferença* ($\square$) entre duas frações é denominada *subtração*. Também, agora, destacam-se dois casos:

Fonte: Matemática para cursos de primeiro grau,1972, v.5, p.87 e Matemática curso moderno,1966, v.1, p.191

.

Da mesma forma,“ $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ de um certo objeto é o mesmo que: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12}$ do objeto” (SANGIORGI, 1972, p.89). Essa multiplicação é assim indicada:

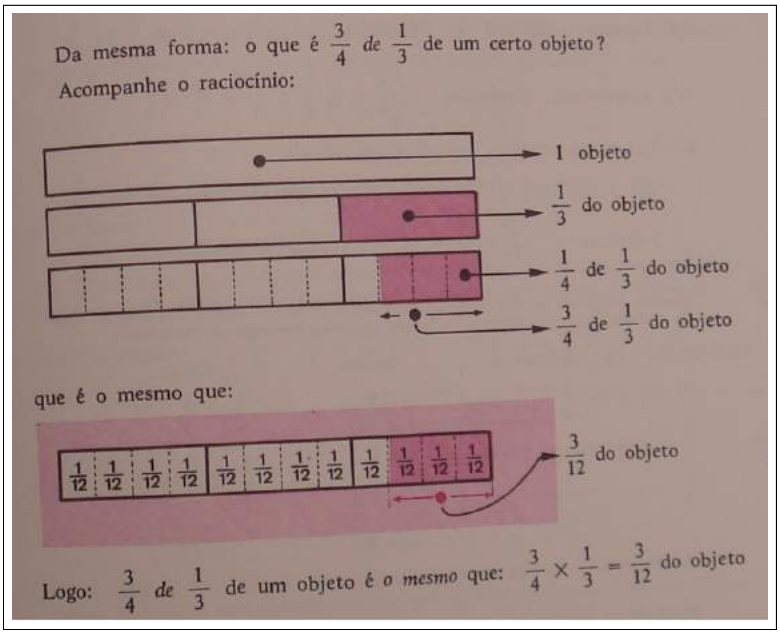
$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{4 \times 3} = \frac{3}{12} \tag{5.2}$$

Sangiorgi (1972) apresenta outros dois exemplos, mas não enuncia uma regra dessa operação, como fez na coleção anterior. Tal regra fica subentendida, reforçada por figuras que não constavam anteriormente em suas coleções (ver Figura 50). As propriedades estruturais da multiplicação (comutativa, associativa, elemento neutro, elemento inverso e distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração) são retomadas de forma praticamente igual à adota na coleção anterior.

Sangiorgi (1972) também apresenta as operações de**divisão, potenciação e radiciação** mantendo basicamente a mesma forma anteriormente adotada, optando por um texto mais resumido e objetivo. Lembremos que essa coleção contém um “caderno de exercícios”, fazendo com que o livro texto tenha um número muito menor de exercícios que aqueles presentes na coleção anterior.

Name (1975) adota a mesma sequência de apresentação que Sangiorgi (1972), para as operações no conjunto dos números racionais e suas propriedades estruturais. Contudo, enfatiza as práticas operatórias, usa poucas figuras e apresenta um grande número de exercícios.

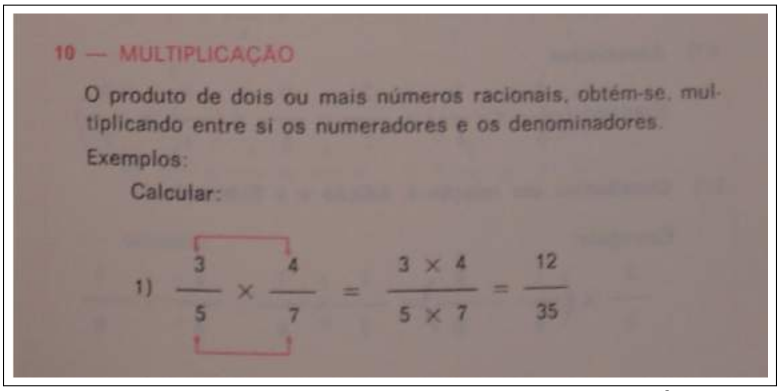
Figura 50 – Multiplicação com números fracionários em livros de Sangiorgi de 1972.



Fonte: Matemática para cursos de primeiro grau,1972, v.5, p.89.

Ao abordar a multiplicação, o autor apresenta a regra, acompanhada de exemplo (Figura 51), seguindo essa mesma forma de apresentação para as demais operações, o que lembra a prática já adotada nos livros dos anos 1950 e 1960, como vimos anteriormente. Em relação à coleção de Sangiorgi dos anos 1970, Name (1975) apresenta textos mais breves, objetividade na apresentação do assunto, ênfase na prática operatória e o maior número de exercícios no livro texto. Lembremos que a coleção de Sangiorgi apresenta, além do livro texto, um caderno de exercícios e um manual para o professor.

Figura 51 – Multiplicação com números fracionários em livros de 1975, de Miguel Asis Name.



10 — MULTIPLICAÇÃO

O produto de dois ou mais números racionais, obtém-se, multiplicando entre si os numeradores e os denominadores.

Exemplos:

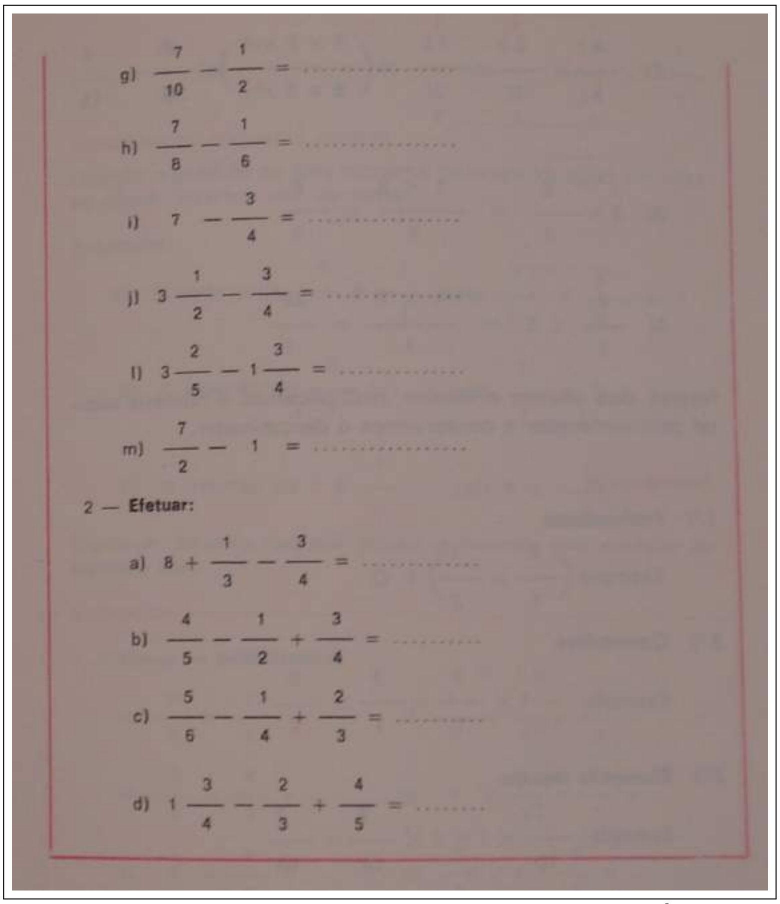
Calcular:

1) $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$

Fonte: Matemática Ensino Moderno: ensino de primeiro grau, 5ª série, 1975.

Percebemos como singular na coleção de Name, em relação às coleções dos autores dos anos 1960 aqui analisados, o uso de espaços nas páginas de exercícios, destinado à resolução das questões, como pode ser visto na Figura 52.

Figura 52 – Lista de exercícios com números fracionários em livros de 1975, de Miguel Asis Name.



g) $\frac{7}{10} - \frac{1}{2} =$ ....

h) $\frac{7}{8} - \frac{1}{6} =$ ....

i) $7 - \frac{3}{4} =$ ....

j) $3\frac{1}{2} - \frac{3}{4} =$ ....

l) $3\frac{2}{5} - 1\frac{3}{4} =$ ....

m) $\frac{7}{2} - 1 =$ ....

2 — **Efetuar:**

a) $8 + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} =$ ....

b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$ ....

c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} =$ ....

d) $1\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$ ....

Fonte: Matemática Ensino Moderno: ensino de primeiro grau, 5ª série, 1975.

5.3 As ilustrações nos livros didáticos de Sangiorgi, Quintela e Galante

A análise dos livros didáticos de Matemática de Osvaldo Sangiorgi, até aqui apresentada, permitem a percepção de algumas das mudanças incorporadas ao livro didático dessa disciplina, advindas do Movimento da Matemática Moderna, do qual Sangiorgi foi um dos principais representantes brasileiros. Complementaremos essas análise por meio da comparação física dos livros estudados, tomando como categorias (e subcategorias):

1. dimensões das páginas;
2. dimensões da área de texto;
3. aproveitamento da página: razão entre os valores das áreas de texto e da página;
4. número de páginas destinadas (como texto) aos números racionais, na forma fracionária;
5. número total de páginas do livro;
6. número de exemplos apresentados no texto analisado;

7. número de exercícios presentes nos capítulos analisados;

8. número de figuras nos capítulos analisados;

9. número de ícones nos capítulos analisados.;

10. número de quadros ou tabelas nos capítulos analisados.;

11. número total de imagens (figuras, ícones, quadros e tabelas) presentes nos capítulos analisados.

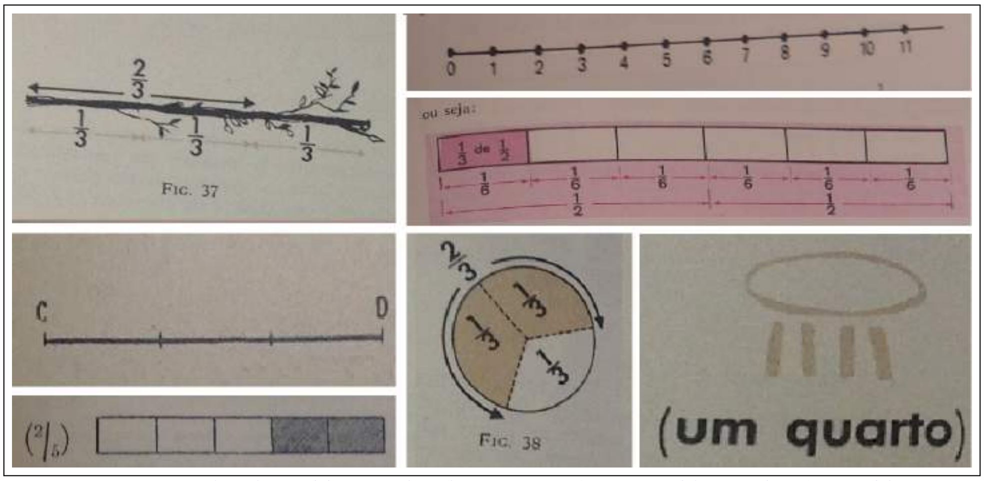
Visando reduzir a subjetividade da classificação de exemplos, exercícios e imagens, nesse trabalho, convencionamos adotar os seguintes critérios:

1. São considerados exemplos as questões, problemas, expressões ou exercícios apresentados e resolvidos pelo autor, como parte do texto de exposição do assunto ou na lista de exercícios, geralmente (mas nem sempre) recendo essa denominação da parte do próprio autor.

2. são exercícios as questões assim caracterizadas pelo autor, sem resposta ou solução imediata, adotando cada item de uma dada questão como um exercício e, portanto, um objeto de contagem. Assim, uma questão com quatro itens (a, b, c e d) é contada como quatro execícios.

3. são figuras as imagens usadas para complementar a informação escrita, mesclando desenhos (ou fotos) e valores numéricos, referenciadas ou não pelo autor (Figura 53).

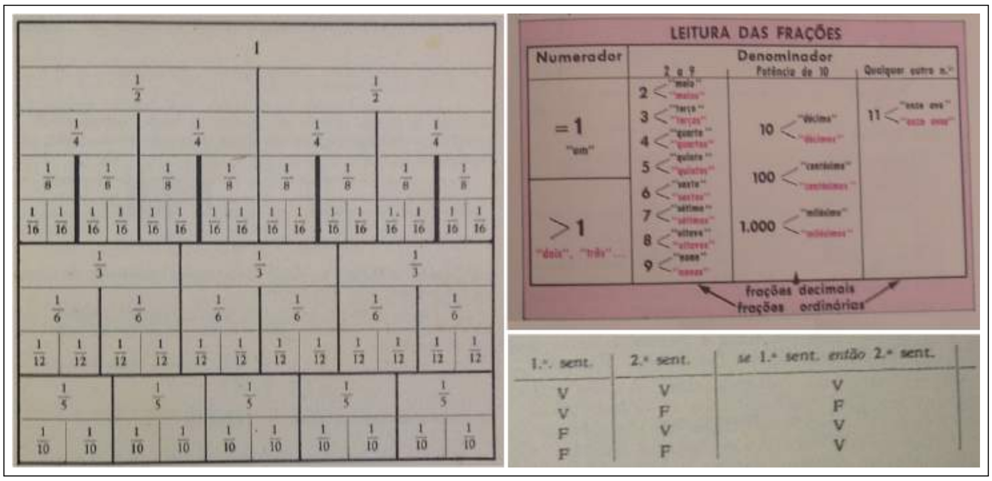
Figura 53 – Exemplos de figuras em livros de Sangiorgi, Galante e Quintela.



Fonte: Sangiorgi (1966), Sangiorgi (1972), Galante (1965) e Quintela (1966).

4. a disposição de dados em linhas e colunas foram considerados quadros (sem valores numéricos) ou tabelas (contendo valores numéricos), como mostra a 54.

Figura 54 – Exemplos de tabelas e quadros em livros de Sangiorgi, nas décadas de 1960 e 1970.



Fonte: Sangiorgi (1966) e Sangiorgi (1972).

5. são considerados ícones as imagens que não sejam figuras, quadros ou tabelas, geralmente destinadas a chamar a atenção do leitor para uma determinada parte do texto que mereça destaque ou atrair seu interesse por sua leitura (55).

Figura 55 – Exemplos de ícones em livros de Sangiorgi, Galante e Quintela.

Fonte: Sangiorgi (1972), Galante (1965) e Quintela (1966).

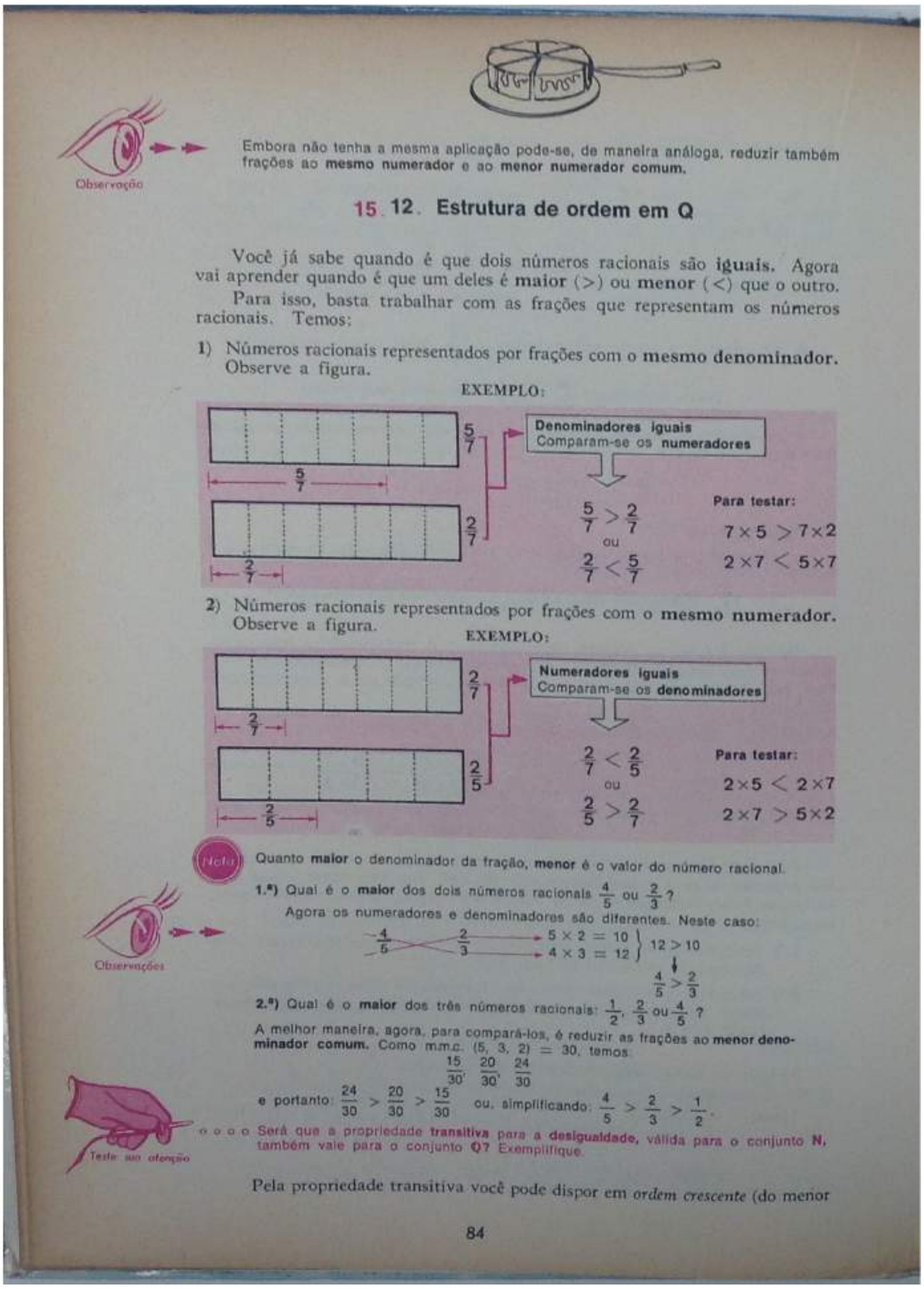
Tabela 2 – Dados de paginação dos livros de Sangiorgi, Galante e Quintela.

AUTOR	ANO	EDIÇÃO	Dimensões da página(mm)			Número de páginas		
			Texto	Total	Texto / Total	Assunto	Total	Assunto / Total
SANGIORGI	1955	11ª	100x145	130x190	59%	40	236	17%
SANGIORGI	1966	5ª	118x173	154x210	63%	52	327	16%
SANGIORGI	1972		128x217	182x257	59%	21	132	16%
QUINTELA	1959	68ª	100x145	130x190	59%	36	220	16%
QUINTELA	1965		100x145	130x190	59%	36	276	13%
GALANTE	1954	13ª	100x145	130x180	62%	57	315	18%
GALANTE	1965	51ª	100x145	130x180	62%	59	280	21%
NAME	1975	86ª	115x190	165x237	56%	37	201	18%

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Tabela 2 mostra os dados referentes aos livros de Sangiorgi, Galante e Quintela, aqui analisados. Note que os livros de Sangiorgi e Quintela, publicados nos anos 1950, apresentam páginas com as mesmas dimensões (130mm x 190mm), enquanto o livro de Galante desse período é menor (130mm x 180mm). No entanto, a área destinada ao texto é igual nas três coleções. Na década seguinte, enquanto Galante e Quintela mantêm as dimensões de seus livros, Sangiorgi adota dimensões maiores, tanto para as páginas (154mm x 210mm) como para a área de texto (118mm x 173mm). Essas dimensões recebem novo aumento na década de 1970, passando para 182mm x 257mm (página) e 128mm x 217mm (texto). Nessa edição, os espaços das margens são usados para ilustração, como mostra a Figura 56.

Figura 56 – Exemplo de diagramação de página em livro de Sangiorgi, na década de 1970.



Observação

Embora não tenha a mesma aplicação pode-se, de maneira análoga, reduzir também frações ao **mesmo numerador** e ao **menor numerador comum.**

15.12. Estrutura de ordem em Q

Você já sabe quando é que dois números racionais são **iguais.** Agora vai aprender quando é que um deles é **maior** (>) ou **menor** (<) que o outro.

Para isso, basta trabalhar com as frações que representam os números racionais. Temos:

1) Números racionais representados por frações com o **mesmo denominador.** Observe a figura.

EXEMPLO:

Denominadores iguais
Comparam-se os **numeradores**

$\frac{5}{7} > \frac{2}{7}$ ou $\frac{2}{7} < \frac{5}{7}$

Para testar:

$7 \times 5 > 7 \times 2$

$2 \times 7 < 5 \times 7$

2) Números racionais representados por frações com o **mesmo numerador.** Observe a figura.

EXEMPLO:

Numeradores iguais
Comparam-se os **denominadores**

$\frac{2}{7} < \frac{2}{5}$ ou $\frac{2}{5} > \frac{2}{7}$

Para testar:

$2 \times 5 < 2 \times 7$

$2 \times 7 > 5 \times 2$

Nota

Quanto **maior** o denominador da fração, **menor** é o valor do número racional.

Observações

1.ª) Qual é o **maior** dos dois números racionais $\frac{4}{5}$ ou $\frac{2}{3}$?

Agora os numeradores e denominadores são diferentes. Neste caso:

$$\left.\begin{array}{l} 5 \times 2 = 10 \\ 4 \times 3 = 12 \end{array}\right\} 12 > 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5} > \frac{2}{3}$$

2.ª) Qual é o **maior** dos três números racionais: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{5}$?

A melhor maneira, agora, para compará-los, é reduzir as frações ao **menor denominador comum.** Como m.m.c. (5, 3, 2) = 30, temos

$$\frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{24}{30}$$

e portanto: $\frac{24}{30} > \frac{20}{30} > \frac{15}{30}$ ou, simplificando: $\frac{4}{5} > \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.

Teste sua atenção

Será que a propriedade **transitiva** para a **desigualdade,** válida para o conjunto **N,** também vale para o conjunto **Q?** Exemplifique.

Pela propriedade transitiva você pode dispor em *ordem crescente* (do menor

84

Fonte: Sangiorgi (1972).

Nas décadas de 1950 e 1960, apesar da variação no número total de páginas, a quantidade destinada aos números fracionários (racionais) permanece praticamente inalterada nos livros de Quintela e Galante. Todavia, nos livros de Sangiorgi, há um aumento de 30% no número de páginas destinadas ao assunto e de 38% no total de páginas.

Nos anos 1960. a quantidade de exercícios aumentam em 23% e 11% nos livros de Sangiorgi e Galante, respectivamente, em relação à década anterior, enquanto esse número diminui em quase 70% na coleção de Quintela. Por outro lado, nesse mesmo período, há um aumento de 70%, 14% e 101% no número de exercícios nos livros de Sangiorgi, Galante e Quintela, respectivamente. Esse aumento no número de exercícios, certamente, foi uma motivação para que Sangiorgi publicasse um caderno de exercícios na coleção dos anos 1970, reduzindo em 95% o número de exercícios no livro texto desse período em relação à coleção da década anterior. A Tabela 3 mostra alguns dados desses livros didáticos. Observe o aumento na quantidade total de imagens nos livros de Sangiorgi, Quintela e Galante (1700%, 58% e 542%, respectivamente). Todavia, nos anos 1970, a coleção de Sangiorgi tem uma redução no número de figuras (72%) e acréscimo de 46 ícones, que constituem novidade em livros do autor. No entanto, o número de cores internas dos livros de manteve-se constante, na década de 1960 e início dos anos 1970.

Tabela 3 – Dados de ilustração dos livros de Sangiorgi, Galante e Quintela.

AUTOR	ANO	EDIÇÃO	Número de exemplos	Número de exercícios	Número de imagens			
					Figuras	Ícones	Tabelas e quadros	Total
SANGIORGI	1955	11ª	75	184	4	0	0	4
SANGIORGI	1966	5ª	92	311	72	0	2	74
SANGIORGI	1972		100	17	21	46	1	68
QUINTELA	1959	68ª	232	62	19	0	0	19
QUINTELA	1965		77	125	25	5	0	30
GALANTE	1954	13ª	61	226	12	0	0	12
GALANTE	1965	51ª	68	257	75	20	0	95
NAME	1975	86ª	76	262	52	2	1	52

Fonte: Elaborada pelo autor.

CAPÍTULO

6

CONCLUSÃO

A análise dos livros didáticos de Matemática, a partir das dimensões propostas por Schubring(2003), mostrou-se adequada aos objetivos inicialmente propostos, respondendo às questões que provocaram essa pesquisa e, para além do esperado, fornecendo material que pode ser útil à pesquisa nessa área.

Nos anos 1950, as coleções de Sangiorgi, Galante e Quintela seguiram rigorosamente as orientações da Portaria 1045/51, mantendo o ensino dos números fracionários, tomando como base o estudo das frações (ordinárias e decimais), das técnicas operatórias e resolução de problemas. Nesse conteúdo específico, o uso de ilustrações deu-se timidamente, sendo adotada a estratégia de apresentação sequencial de regras, exemplos e exercícios, com pequenas variações nessa ordem e, em pouquíssimos casos, a utilização de problemas como introdução do conteúdo a ser abordado. A pequena dissonância nos discursos dos autores em seus livros didáticos e, de modo especial, entre as editoras, é evidenciada pelas proximidades nos conteúdos, sequências, diagramação e dimensões das páginas dessas coleções.

Por um lado, as coleções da década de 1960 também procuram apresentar os "assuntos mínimos" propostos pela portaria citada, estruturando-se inicialmente pelos textos consagrados nas coleções da década anterior. Por outro lado, as mudanças nas novas coleções são evidentes: uso de ilustrações como recurso textual e visual e aumento do número de cores internas, de exercícios e exemplos. No caso específico de Sangiorgi e, de forma mais contida, de Quintela, a introdução da Teoria de Conjuntos resulta em mudanças estruturais das coleções. Assim, a prática operatória continua tendo lugar de destaque nos livros, mas o modo enfático como os conceitos, definições e propriedades estruturais do números fracionários são tratados, bem como as palavras, da parte desses autores, dirigidas aos leitores, evidenciam a presença de elementos do Movimento da Matemática Moderna em tais coleções. Todavia, apesar de renovar a diagramação de sua coleção, a coleção de Galante, desse período, não apresenta influência clara desse movimento. Como essas coleções tiveram grande difusão no meio discente nessa década, o que indica certo nível de concordância com suas concepções e as de seus leitores, temos razões para acreditar que não houve homogeneidade na adoção das ideias do MMM entre os professores de matemática dos cursos ginasiais.

A análise das coleções da primeira metade dos anos 1970, de Sangiorgi e Name, mostra que já estava consolidada a influência do MMM, marcada sobretudo pela Teoria dos Conjuntos, propriedades estruturais, conceitos, definições e inversibilidade das operações. O uso das ilustrações passam a ser parte integrante dos textos e, no caso de Sangiorgi e da Companhia Editora Nacional, instrumento para a atração do interesse do leitor pela obra. Curiosamente, o uso de cores internas não sofre aumento e o uso de fotografias não é adotado, o que poderia ser esperado como consequência do aumento no número de imagens e no avanço na tecnologia de impressão gráfica alcançado até essa década.

Mesmo não estando diretamente associada ao M.M.M, a evolução nas dimensões dos livros analisados, culminado em exemplares maiores na década de 1970, sugerem uma tendência da industria gráfica que influenciaram as publicações didáticas das décadas seguintes. Todavia, essa observação não constitui objeto de estudo na pesquisa ora realizada.

Por fim, esperamos que esse trabalho apresente-se aos professores como um dos recursos disponíveis para o conhecimento da evolução do ensino de Matemática no Brasil e, particularmente, dos números racionais no Ensino Fundamental, além de contribuir para o conhecimento do Movimento da Matemática Moderna no Brasil e dos autores a ele relacionados.

REFERÊNCIAS

BURIGO, E. Z. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989. Citado 5 vezes nas páginas 26, 27, 28, 30 e 31.

FISCHER, M. C. B. Formação de professores em tempos de matemática moderna: uma proposta de investigação histórica. **Revista Diálogo Educacional**, v. 8, n. 25, p. 663–674, 2008. Citado na página 31.

GALANTE, C. **Matemática Curso Ginasial**. 51ª. ed. [S.l.]: Editora do Brasil, 1965. Citado 13 vezes nas páginas 16, 67, 71, 72, 73, 75, 76, 79, 80, 82, 83, 99 e 100.

GALANTE, C.; SANTOS, O. M. dos. **Matemática Curso Ginasial**. 13ª. ed. [S.l.]: Editora do Brasil, 1954. Citado 27 vezes nas páginas 15, 19, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62 e 64.

GOMIDE, A. G. V. **Formação de Professores, Educação e Planejamento Educacional: concepções da UNESCO para a década de 1960**. João Pessoa: [s.n.], 2012. Acesso em: 05 mai. 2015. Citado na página 28.

LIMA, F. R. de; PASSOS, L. F. G.e.e.m. - grupo de estudos do ensino de matemática e o movimento da matemática moderna no brasil. In: ____. **Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno**. São Paulo: Annablume, 2008. cap. 4, p. 95–118. Citado na página 31.

MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. **A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos**. 2010. Acesso em: 05 mai. 2015. Citado 4 vezes nas páginas 26, 28, 29 e 31.

NAME, M. A. **Matemática Ensino Moderno**. 86ª. ed. [S.l.]: Editora do Brasil, 1975. (5ª série). Citado 6 vezes nas páginas 16, 91, 92, 93, 96 e 97.

QUINTELA, A. **Matemática para a primeira série ginasial**. 68ª. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959. Citado 23 vezes nas páginas 15, 19, 35, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 57, 58, 59, 61, 62, 63 e 77.

____. **Matematica: para o primeiro ano colegial**. 121ª. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1966. Citado 10 vezes nas páginas 66, 67, 71, 72, 73, 75, 83, 84, 99 e 100.

SANGIORGI, O. **Matemática para a primeira série ginasial**. [S.l.]: Companhia Editora Nacional, 1953. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

____. ____. 11ª. ed. [S.l.]: Companhia Editora Nacional, 1955. Citado 27 vezes nas páginas 15, 19, 35, 36, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63 e 69.

____. **Matemática Curso Moderno**. 8ª. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1966. Citado 21 vezes nas páginas 16, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 88, 93, 99 e 100.

____. **Matemática para cursos de primeiro grau**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1972. (5ª série). Citado 8 vezes nas páginas 88, 91, 92, 94, 96, 99, 100 e 101.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática: notas de aula**. [S.l.]: Editores Associados, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 33.

SILVA, L. V. S. **Mercado Editorial do Livro Didático de Matemática: As Editoras e os Autores Mais Significativos de 1950 a 1978**. Aracaju, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 34.

SILVA, M. C. L. da. Movimento da matemática moderna: possíveis leituras de uma cronologia. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 18, p. 49–63, 2006. Citado na página 29.

VALENTE, W. R. **Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno**. São Paulo: Annablume, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 26, 28, 29 e 32.

WIELEWSKI, G. D. **O Movimento da Matemática Moderna e a formação de grupos de professores de Matemática no Brasil**. 2008. Acesso em: 05 fev. 2015. Citado na página 30.