UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

BENEDITO NAZARENO DE SOUSA MONTEIRO

Utilização de modelos concretos como uma alternativa para o ensino de Geometria Espacial

BELÉM-PA
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

BENEDITO NAZARENO DE SOUSA MONTEIRO

Utilização de modelos concretos como uma alternativa para o ensino de Geometria Espacial

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Pará.

Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida

BELÉM-PA
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Monteiro, Benedito Nazareno de Sousa, 1975-
Utilização de modelos concretos como uma alternativa para o ensino de geometria espacial / Benedito Nazareno de Sousa Monteiro. - 2016.

Orientador: Arthur da Costa Almeida.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Geometria espacial-Estudo e ensino. 2. Material didático-Matemática-Estudo e ensino. 3. Visualização-Matemática. 4. Geometria sólida. 5. Poliedros. I. Título.

CDD 22. ed. 516.15607

FOLHA DE APROVAÇÃO

BENEDITO NAZARENO DE SOUSA MONTEIRO

Utilização de modelos concretos como uma alternativa para o ensino de Geometria Espacial

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal do Pará, avaliado pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Arthur da Costa Almeida
PROFMAT/UFPA

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
PROFMAT/PPGME/UFPA

Prof. Dr. Ducival Carvalho Pereira
Universidade do Estado do Pará

DATA DA AVALIAÇÃO: 04 / 03 / 2016

CONCEITO: APROVADO

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho:
A meu pai (em memória) e a minha mãe*;*
A minha esposa e ao meu filho.

AGRADECIMENTOS

A Deus Pai, Deus Filho e Deus Espírito Santo por trabalharem conjuntamente em prol da minha vida.

A meu pai Raimundo Mendes (em memória) e a minha mãe Irene Monteiro, que sempre colaboraram para que eu pudesse ir mais longe.

A minha esposa Nayara e ao meu filho Pietro, por terem sido meu maior estímulo nessa grande jornada.

À Universidade Federal do Pará, pela oportunidade de realizar este curso em pós-graduação.

A meus amigos da turma PROFMAT 2014, por terem compartilhado comigo seus conhecimentos, esforços e dedicação.

Ao empenho dos professores que tive ao longo desses dois anos de mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro que me deu mediante a concessão de bolsa de estudo.

A meu orientador, professor Dr. Arthur Almeida, pela especial atenção que me deu.

A todos os professores que tive bem como aos amigos que conquistei ao longo de minha carreira estudantil.

A meus queridos irmãos e irmãs na fé, que sempre me colocaram em suas orações.

À professora Marilena Almeida e seus alunos do 2º ano J, do ensino médio, manhã, de uma escola estadual de Igarapé-Açu, pela grande contribuição dada ao meu trabalho.

A matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito.

Manoel Paiva

RESUMO

A presente dissertação visa contribuir com a melhoria do ensino-aprendizagem de Geometria Espacial. Nesse sentido, este trabalho expõe alguns fatores que dificultam o ensino dessa matéria. Além disso, faz uma reflexão sobre a importância do material didático, não apenas no estudo dessa disciplina, mas também na formação do professor de matemática. Pois, diante das muitas dificuldades encontradas no ensino da Geometria Espacial, propõe-se nesse trabalho o uso de materiais concretos como uma alternativa para melhorar o estudo dessa ciência. Como se pode constatar, mediante fundamentação teórica ou relatos de experiências de outros colegas, a utilização de tais materiais como recursos didáticos tem dado aos alunos a possibilidade de desenvolver a capacidade de visualização, que é habilidade fundamental para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Nessa concepção de aprendizagem, esse trabalho apresenta registros de atividades de sala de aula com sólidos geométricos, em especial poliedros, onde o uso de modelos concretos foi determinante para o entendimento dos alunos e para alcançar resultados satisfatórios nos temas estudados.

Palavras-chave: ensino-aprendizagem, Geometria Espacial, visualização, modelos concretos, atividades.

ABSTRACT

The present paper aims at contributing the improvement in the Space Geometry teaching-learning. By the way, this work presents some factors that make the teaching of that subject difficult. Besides, it makes some reflexion on the teaching materials importance, not only about the study of that subject, but also on math teacher education. Well, up against many difficulties found in teaching of the Space Geometry, one offers on that work the use of specific materials as an alternative to improving on the study of that science. As you can prove, by means of theoretical grounds of experiments accounts of other colleagues, the utilization of such materials as teaching resources has been giving the students a chance of developing the visualization ability, which is the fundamental skill for developing of the geometrical thought. In that learning conception, that work presents classroom record of activities with geometric solids, specially polyhedrons, where the use of specific patterns has been determining for the students understanding and to achieve satisfactory results in the subjects studied.

Key words: teaching-learning, Space Geometry, specific patterns, visualization, activities.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Certamente a geometria faz parte de nossas vidas. E isso é satisfatório, tendo em vista que os conhecimentos geométricos nos dão a possibilidade de compreendermos o mundo em que vivemos.

Diante desse fato, é de suma importância a inserção da Geometria no currículo de Matemática em todos os níveis de ensino, visto que através dela, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, o aluno “desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive”. (BRASIL, 1997, p. 39)

Em vista das orientações curriculares nacionais e do grande envolvimento que temos com elementos geométricos em nosso cotidiano, não é difícil constatarmos que a Geometria é uma das áreas da Matemática que deve ser vista como grande colaboradora na formação do aluno. Mas, infelizmente, o estudo dessa ciência tem sido em geral deixado de lado pelos professores, como veremos no desenvolvimento dessa dissertação.

> A preocupação em se resgatar o ensino da Geometria como uma das áreas fundamentais da Matemática tem levado muitos professores e pesquisadores a se dedicarem à reflexão e à elaboração, implementação e avaliação de alternativas, que busquem superar as dificuldades não raro encontradas na abordagem desse tema, na escola básica ou em níveis superiores de ensino. (FONSECA et al., 2009, p. 91)

Esse trabalho quer inserir-se no âmbito desses esforços, focalizando, de maneira particular, uma alternativa de prática educativa que possa contribuir para um rendimento satisfatório dos estudantes no estudo de temas tratados pela Geometria Espacial.

Nesse sentido, a fim de colaborar para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, fazemos uma abordagem sobre o uso de modelos concretos como recursos didáticos no estudo dessa matéria, visando ao desenvolvimento de práticas docentes inovadoras, dinâmicas e eficazes.

No primeiro capítulo apresentamos algumas causas das dificuldades existentes no ensino e aprendizagem de Geometria Espacial. E visando facilitar o estudo dessa ciência, chamamos a atenção para a importância de atividades educativas que envolvam a visualização como forma de tornar o estudo dessa matéria mais atraente e significativo, além de contribuir efetivamente para os processos de desenvolvimento do pensamento geométrico.

No segundo capítulo trazemos uma reflexão a cerca da elaboração e utilização de recursos didáticos como estratégia para tornar o ensino de matemática mais atrativo e acessível. Nesse sentido, propomos que a formação do professor de matemática possa contemplar a questão do uso de materiais manipuláveis (ou materiais concretos) como parte integrante do currículo. Em seguida, empenhamo-nos em mostrar que esses materiais funcionam como mediadores nos processos de aprendizagem e possibilitam, entre outras vantagens, a participação ativa dos alunos nas aulas de Geometria Espacial.

No terceiro capítulo fazemos um estudo sobre um sólido geométrico denominado poliedro, considerando-se que essa figura geométrica espacial foi a mais utilizada nas atividades de sala de aula apresentadas no capítulo seguinte.

No quarto capítulo apresentamos relatos e registros das experiências vividas pelo autor nas atividades de sala de aula, onde foram utilizados modelos concretos nos temas estudados em Geometria Espacial, precisamente no estudo de poliedros. Tais atividades envolveram a planificação e construção de sólidos geométricos, a aplicação da relação de Euler, a demonstração da fórmula da diagonal do paralelepípedo retângulo e exercícios.

Por fim, nas considerações finais, expomos as conclusões a que chegamos após o desenvolvimento dessa dissertação, analisando os resultados obtidos.

CAPÍTULO 1

DIFICULDADES NO ENSINO E VISUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA ESPACIAL.

Neste capítulo daremos ênfase à importância do ensino de uma ciência de tão grande presença e significado em nossas vidas: a Geometria. Também divulgaremos as principais dificuldades que infelizmente predominam no ensino-aprendizagem de Geometria Espacial. Além disso, apresentaremos a visualização como uma considerável habilidade para facilitar o entendimento do aluno e auxiliar o professor nas aulas de geometria espacial, bem como contribuir eficazmente aos processos de desenvolvimento do pensamento geométrico.

1.1 A GEOMETRIA E O MUNDO: UM BREVE HISTÓRICO.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.
Galileu Galilei

A geometria está em todo lugar. Basta para isso que contemplemos a natureza bem como os diversos elementos criados pelo homem que expressam a grandiosidade e a inerência dessa fascinante ciência matemática em nossas vidas.

É sempre possível nos depararmos com algo que nos remete a uma aplicação geométrica. Nas edificações, por exemplo, nos causam admiração as formas com que elementos geométricos são executados. As pirâmides do Egito (Figura 1), com seus mistérios e fascinações, nos revelam que desde a antiguidade a humanidade desenvolve conhecimentos de Geometria. É intrigante, mas bela, a "engenharia" usada pelas abelhas na construção de alvéolos com formato de prisma hexagonal onde depositam o mel produzido em suas colmeias (Figura 2).

Figura 1 – Pirâmides do Egito[1].

Figura 2 – Colmeia de abelhas[2].

[1] Disponível em: http: www.portalsãofrancisco.com.br/alfa/pirâmides/pirâmides-do-egito.php Acesso em 05/01/2016.

[2] Disponível em: http://danyellevanstraten.com.br/a-colmeia-em-que-vivemos/ Acesso em 05/01/2016.

A palavra Geometria é derivada do grego *geo* que significa 'terra' e *metria*, que significa 'medida'. Assim, traduzindo ao pé da letra, temos que geometria deveria significar medida da terra. Essa palavra surgiu devido à primeira utilização da geometria de que se tem conhecimento: a medida das terras próximas ao rio Nilo, no Egito Antigo, para que os homens daquela época pudessem desenvolver a agricultura nestes locais. Atualmente, podemos dizer que Geometria é o estudo das figuras geométricas, juntamente com o cálculo de medidas ligadas a elas.

Apesar de ser utilizada e estudada por muitos povos antigos, a Geometria teve seus conhecimentos organizados e sistematizados logicamente, pela primeira vez, pelo matemático grego Euclides (século III a.C.) em sua obra *Os elementos.*

Assim, por suas tantas aplicações no mundo que nos cerca, a Geometria será sempre imprescindível ao currículo escolar por contribuir consideravelmente para a formação do cidadão. Pois através de conhecimentos geométricos podemos compreender e transformar o ambiente do qual fazemos parte.

1.2 O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL E SUAS DIFICULDADES.

> *A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.*
>
> *Jacques Bernoulli*

A geometria como ciência matemática é essencialmente parte integrante de nosso cotidiano, pois nos ajuda a observar, a compreender e transformar o mundo a nossa volta. Nesse contexto, a geometria, bem como qualquer área da matemática, deve ser ministrada em sala de aula visando à formação do aluno como ser pensante e, portanto, como ser com capacidade criadora e transformadora na busca de soluções para os problemas enfrentados na vida diária. Como pregam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p. 39)

Mas, infelizmente, o que ainda podemos observar é que a geometria geralmente é deixada de lado pelos professores devido a vários fatores, sem falar das dificuldades enfrentadas pelos docentes ao ministrar aulas dessa matéria.

Fonseca et al. (2009), após ministrarem cursos de formações de professores, relatam:

> É frequente ouvir das professoras das séries iniciais que, por diversos motivos, mas principalmente por não saberem o que fazer (nem como e nem por quê), elas acabam não trabalhando nada de Geometria em suas aulas de Matemática. Mais do que a dificuldade do ensino de Geometria é a omissão desse ensino que flagramos nas experiências que acompanhamos ou nos depoimentos dos professores. (p. 14)

Diante do relato desses autores, podemos assegurar que esse fato acarretará prejuízos aos alunos em seus estudos nas modalidades subsequentes de ensino, uma vez que o ensino de geometria é deficiente já nas séries iniciais do ensino fundamental. E, em particular ao que trata este trabalho, o estudo futuro de geometria espacial seguramente estará prejudicado, tendo em vista que os Parâmetros Curriculares Nacionais já propõem a aplicação de conteúdos com conceitos que exploram a noção de espaço e forma desde os primeiros anos de vida estudantil.

Sendo assim, outro fator preponderante para contribuir com a dificuldade no ensino de geometria, especificamente a espacial, é o despreparo e a insegurança demonstrada por muitos professores no ensino dessa matéria. Tal problemática pode ser resultado de uma má formação profissional.

Um dos recursos didáticos mais utilizados pelos professores de matemática é, sem dúvida, o livro didático. Lembremos que, até pouco tempo, nos livros didáticos tradicionais, a geometria era deixada sempre para a parte final destes, o que contribuía para que o professor deixasse esse conteúdo para o final do período letivo. Com isso e por falta de tempo, normalmente os conteúdos dessa matéria não eram estudados pelos alunos causando-lhes sérios prejuízos em estudos posteriores. Outro ponto negativo a citar era que o professor dificilmente fazia a inter-relação entre os conteúdos de geometria e as outras áreas da matemática, uma vez que essa prática poderia em muito facilitar seu trabalho docente.

Felizmente essa realidade está mudando e os autores de livros didáticos de matemática estão inserindo os conteúdos de geometria entre os demais conteúdos com os quais essa matéria está correlacionada, o que torna a disciplina matemática mais consistente e significativa tanto ao professor quanto ao aluno.

Outro fator que podemos elencar como causador de dificuldades ao ensino e à aprendizagem de geometria, em particular ao de geometria espacial, ainda é a grande ocorrência de aulas expositivas como principal prática metodológica por parte dos professores. Segundo os PCN:

> Quanto às aulas expositivas, é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a ideia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante. (BRASIL, 2006, p. 53)

Para justificarmos a prática pedagógica citada acima, vários são os motivos, tais como: a vida corrida, falta de estrutura adequada que muitas vezes encontramos nas escolas públicas, bem como a desmotivação causada pela desvalorização do profissional de educação por parte de nossos governantes, entre outros.

Outro fato que dificulta a aprendizagem de Geometria Espacial é que geralmente essa matéria é trabalhada de maneira desvinculada dos conceitos de Geometria Plana, uma vez que os professores pressupõem o domínio deste conteúdo pelos alunos. Porém, é imprescindível que haja relação entre os conteúdos já estudados e aqueles a serem ministrados.

A despreocupação com a visualização nas aulas de geometria espacial por parte dos docentes é outro fator determinante para o fracasso no ensino dessa ciência. Aulas expositivas sobre sólidos geométricos baseadas apenas em desenhos feitos no quadro, por exemplo, dificultarão a aprendizagem dos alunos, aumentando nestes a falta de interesse pelos conteúdos.

A seguir, enfatizaremos as atividades de visualização como de suma importância para contribuir com o sucesso do ensino-aprendizagem de geometria espacial, além de favorecer o desenvolvimento do pensamento geométrico.

1.3 A VISUALIZAÇÃO COMO IMPORTANTE HABILIDADE NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL.

A matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito.
Manoel Paiva

Um dos motivos que tornam a Matemática uma ciência fascinante é a possibilidade de estabelecermos relações entre ela e outras áreas do conhecimento. E a geometria, como parte integrante dessa ciência, pode possibilitar essa realidade.

Nesse contexto, as aulas de geometria devem oportunizar ao aluno a exploração de elementos do mundo físico, como objetos da natureza e da criação humana, onde o mesmo possa identificar a presença de conceitos e propriedades matemáticas. Nesse processo, o papel do professor é de extrema importância ao propor atividades que permitam ao discente observar, compreender, criar e transformar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais chamam a atenção para a questão mencionada acima destacando ainda a importância de atividades que envolvam a visualização de formas geométricas presentes no mundo.

> Uma das possibilidades mais fascinantes do ensino da Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem. Isso pode ocorrer por meio de atividades em que ele possa explorar formas como as de flores, elementos marinhos, casa de abelha, teias de aranha, ou formas em obras de arte, esculturas, pinturas, arquitetura, ou ainda em desenhos feitos em tecidos, vasos, papeis decorativos, mosaicos, pisos, etc. (BRASIL, 1997, p. 128).

Para Fainguelernt (1999, p. 53), “Visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais”.

A autora, ao enfatizar a relevância da visualização na aprendizagem de Geometria, observa:

> Conseguimos constatar a importância da visualização não só pelo seu valor, mas também pelos tipos de processos mentais envolvidos que são necessários e podem ser transferidos tanto para as outras partes da Matemática como para outras áreas do conhecimento. (FAINGUELERNT, 1999, p. 53)

A preocupação com a visualização no ensino de Geometria Espacial tem mobilizado outros estudiosos em Educação Matemática, que ressaltam a importância dessa habilidade na melhoria da aprendizagem dessa disciplina. De acordo com Becker (2009, p. 27):

> Gutiérrez (1992) afirma que quando se trabalha Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias ideias.

Silva (2006), ao utilizar atividade *Webquest* no estudo de conceitos básicos de Geometria Espacial com alunos do 3º ano do ensino médio, constatou que esse recurso facilitava a visualização das figuras geométricas espaciais e de suas planificações; oportunidades essas não oferecidas em livros didáticos ou apostilas, tão comumente usados nas aulas tradicionais.

Cozzolino (2008) desenvolveu atividades com representações em perspectiva de objetos espaciais através do uso do Cabri 3D, com alunos do ensino médio de uma escola particular da cidade de São Paulo. Um de seus objetivos era ampliar a capacidade de visualização dos alunos buscando mudar ou articular diferentes pontos de vista sobre um objeto tridimensional, sua imagem real e suas representações. Os resultados obtidos pelos alunos mostraram que as variações entre o ambiente estático do papel e lápis e o ambiente de geometria dinâmica do Cabri 3D possibilitaram a eles a mobilização de seus conhecimentos e articulações entre a imagem dos objetos e suas representações.

Guedes (2013) nos apresentou resultados de sua investigação sobre quais contribuições a proposta de Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) com o uso do *software* educativo VISUALFIG3D, fundamentada principalmente na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, com base nos estudos de Moreira (2011), pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, em especial ao cálculo de área e de volume de prismas regulares, para estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Neste contexto geométrico, ela destacou a visualização como fundamental para que a apropriação dos conceitos ocorresse de modo mais significativo:

> [...] pudemos verificar que a visualização, tão necessária à construção do conhecimento geométrico, foi prontamente contemplada com a possibilidade, oferecida pelo software, de modificar tamanhos, de aproximar e rotacionar as figuras tridimensionais, permitindo uma interação, quase real com o objeto que estava sendo estudado. (GUEDES, 2013, p. 81-82).

Andrade (2014) desenvolveu atividades de Geometria Espacial com alunos do ensino médio construindo sólidos geométricos usando palitos de dente e jujubas, com o objetivo de ampliar a visão espacial dos discentes e melhorar a aprendizagem deste conteúdo. Suas aulas ainda incluíram a aplicação da relação de Euler e dedução das fórmulas das diagonais do paralelepípedo e do cubo. Ao comemorar resultados de seu trabalho, baseado na Neurociência e nos níveis de aprendizagem de Van Hiele, ela destaca:

> Ao longo deste trabalho, observamos a importância do uso de materiais concretos em Geometria Espacial. O material escolhido foram as jujubas e a técnica se mostrou aplicável, eficaz e divertida. Aplicável, pois os materiais são de baixo custo e fácil acesso; divertida, pois motivou os alunos; e eficaz, pois os alunos que assistiram à aula de jujubas obtiveram mais acertos no Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro (SAERJ) nesse conteúdo do que as turmas que tiveram aulas no quadro. (ANDRADE, 2014, p. 59)

Vieira (2010) ministrou atividades com alunos do Ensino Médio de uma escola pública, nas quais desenvolveu estratégias que envolveram o Geoplano e o Geogebra. O foco de sua pesquisa, baseada na teoria de Van Hiele, era a utilização desses recursos para a aprendizagem do cálculo de áreas de figuras planas e espaciais. A natureza de seu trabalho teve aspectos qualitativos, preponderantes sobre os aspectos quantitativos. A autora observa:

> Este trabalho justifica-se, pois diversas pesquisas vem evidenciando que o uso de materiais concretos, e de outros recursos como softwares de geometria dinâmica, é essencial para a construção do pensamento geométrico e para a elaboração dos conceitos geométricos. Apontam também que o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial tornam-se viáveis quando se amparam em representações e modelos que os estudantes podem observar, manusear, interpretar, construir. (VIEIRA, 2010, p. 8)

Ritter (2011) apresentou uma proposta com sequência didática visando ao desenvolvimento de habilidades de visualização espacial, com alunos do 3º ano do ensino médio, mediante a construção de figuras tridimensionais a partir de suas representações planas, utilizando-se do *software* Calques 3D.

> O desenvolvimento de tais atividades possibilita ao aluno compreender o significado e a utilidade da Geometria Plana e Espacial, assim como estimula a curiosidade, o domínio da imaginação e favorece a potencialização da criatividade. (SANTOS, 2009, p. 14)

1.4 A VISUALIZAÇÃO E O PENSAMENTO GEOMÉTRICO.

O desenvolvimento do pensamento geométrico está diretamente relacionado à maneira pela qual percebemos e interpretamos o ambiente espacial à nossa volta, desde os primeiros anos de vida. Nesse contexto, as figuras geométricas são reconhecidas pela totalidade de seus aspectos físicos e não por suas particularidades.

> [...] O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (BRASIL, 1997, p. 127).

Notemos, então, que a construção do pensamento geométrico tem suas raízes na visualização do espaço e de suas formas. Após visualizar objetos do espaço, é possível atribuir-lhes características que permitam a criação da imagem mental dos mesmos. Assim, o pensamento geométrico desenvolve-se pelas atividades visualmente inspiradas de percepção, de observação e de análise do espaço, tendo em vista a assimilação de conceitos tanto quanto a verificação e comprovação de propriedades geométricas.

De acordo com o conceito de visualização dado por Fainguelernt (1999) e já mencionado neste trabalho, visualização não é apenas o ato de ver, no sentido de utilizar um órgão sensorial. Sua prática vai além e está relacionada com a capacidade de analisar o que se percebe como parte do mundo real, resultando em processos mentais correspondentes aos aspectos que caracterizam os objetos explorados.

Para Fischbein (1994 apud Fainguelernt, 1999), uma imagem visual de um objeto já concretamente estudado é um fator importante na orientação do desenvolvimento analítico de uma solução.

“Neste sentido, pode-se dizer que a resolução de problemas com o auxilio de imagens visuais facilita a compreensão do problema e seduzido pela visualização, o estudante se sentirá motivado a resolvê-lo”. (GUEDES, 2013, p. 33)

Diante desse ponto de vista e considerando que os alunos sentem muita dificuldade em compreender figuras tridimensionais no ambiente plano e estático do quadro, cabe ao professor de Matemática a sensibilidade de facilitar a aprendizagem de Geometria Espacial buscando outros recursos didáticos que sejam mais atraentes e eficazes, a fim de que os estudantes possam ter uma noção mais real do que seja uma figura com comprimento, largura e altura, características básicas dos objetos em três dimensões. Como sugere Guedes (2013, p. 33):

> Desse modo, torna-se essencial trabalhar com as representações de figuras no espaço, para que o estudante perceba que as figuras espaciais podem ser formadas por figuras planas, mas possuem três dimensões: comprimento, largura, profundidade ou volume, o que as diferem das planas, constituídas de comprimento e largura.

Diante dos expostos, vemos que a visualização e seus processos mentais envolvidos são necessários ao trabalho docente na busca de uma aprendizagem mais significativa da Geometria. Como fundamenta Guedes (2013, p. 34):

> Segundo Kaleff (1998), especificamente no contexto geométrico, a habilidade de visualização assume importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o estudante passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da Geometria.

Nessa perspectiva de aprendizagem e favorecimento do pensamento geométrico, Estela Fainguelernt complementa:

> O estudo da Geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para a leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida. (FAINGUELERNT, 1999, p. 53)

Para esse fim, é necessário, então, que o professor disponibilize aos alunos materiais didáticos que possam ser usados para representar os objetos geométricos em estudo, pois é a partir das ações sobre tais objetos que o aluno tem a possibilidade de formar as imagens mentais dos mesmos, visando ao desenvolvimento do raciocínio espacial.

CAPÍTULO 2

PROPOSTA PARA MELHORAR O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL USANDO MODELOS CONCRETOS.

Neste capítulo abordaremos ações que podem contribuir essencialmente ao ensino-aprendizagem da disciplina matemática. Nesse ensejo, discutiremos a importância do uso de materiais didáticos no ensino da matemática, em especial ao referente à geometria espacial, levando-se em conta não apenas o envolvimento dos alunos, mas também a formação do professor de matemática concernente ao uso de materiais manipuláveis como recursos didáticos nas aulas dessa disciplina. Para esse fim, enfatizaremos a busca por novas metodologias por parte desse profissional bem como a utilização de novos recursos didáticos, com propostas inovadoras às práticas pedagógicas já desenvolvidas, objetivando um ensino que realmente contemple as necessidades formativas do aluno.

2.1 UMA REFLEXÃO SOBRE A PRODUÇÃO E O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA.

> *As novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, criatividade e capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno.*
> *Rômulo Marinho do Rêgo*
> *Rogéria Gaudencio do Rêgo*

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática é de grande necessidade a investigação e a busca por ações que possam contemplar a elaboração de materiais didáticos a serem aplicados ou adaptados em sala de aula, visando alcançar os objetivos educacionais propostos. Além do mais, recursos didáticos adequados à competência dos alunos em muito auxiliam a aprendizagem, possibilitando a aquisição de informações, conceitos, habilidades ou atitudes. Para tanto, cabe ao professor de matemática o interesse em produzir ou adquirir materiais que lhe permitam proporcionar atividades que possam enriquecer sua prática pedagógica, tendo a consciência do alcance e das limitações que os recursos didáticos apresentam.

Se o professor de matemática deseja desenvolver suas atividades com aulas em que seus alunos possam experimentar, “descobrir significados e processos para essas experiências ou atividades de aprendizagem”, como afirmam Grossnickle e

Brueckner (1965 apud RÊGO e RÊGO, 2010, p. 42), materiais adequados são necessários.

Bezerra (1962 apud RÊGO e RÊGO, 2010, p. 42) destaca, na sua obra *O material didático no ensino da matemática*, suas principais funções:

> i) auxiliar o professor a tornar o ensino da matemática mais atraente e acessível;
> ii) acabar com o medo da matemática que, criado por alguns professores e alimentado pelos pais e pelos que não gostam de matemática, está aumentando cada vez mais a dificuldade do ensino dessa matéria e
> iii) interessar maior número de alunos no estudo dessa ciência.

Uma relevante contribuição do uso do material didático nas aulas de matemática reside no fato de que o mesmo pode ser reutilizado ou até mesmo sofrer modificações para atender satisfatoriamente às necessidades dos alunos. Como asseguram Rêgo e Rêgo (2010, p. 42):

> Uma vez trabalhado e avaliado em sala de aula um recurso didático pode ser, caso indicado, reestruturado, compreendendo-se que a aprendizagem não reside em sua estrutura física ou na simples ação sobre ele, mas resulta do aprofundamento de reflexões sobre essa ação.

Até pouco tempo atrás, acreditava-se que os alunos aprendiam de uma mesma forma, mediante o acúmulo de informações e regras. Tal realidade não existe como asseguram os mesmos autores.

> Sabemos, entretanto, que cada aluno tem um modo próprio de pensar e que este varia em cada fase de sua vida, estando seu pensamento em constante processo de mudança. A aprendizagem pela compreensão é um processo pessoal e único que acontece no interior do indivíduo, embora relacionado a fatores externos, exigindo do raciocínio o que quase sempre é deixado apenas como tarefa para a memória. As interações do indivíduo com o mundo possibilitam-lhe relacionar fatos, estruturar ideias e organizar informações, internalizando-os. (RÊGO e RÊGO, 2010, p. 42-43)

Para esses autores, o aluno desenvolve conhecimentos orientando-se por uma ação autônoma, através de atividades que lhe proporcionem experiências pessoais bem-sucedidas, nas quais possa desenvolver o gosto pela descoberta e a coragem para enfrentar e vencer desafios. Porém, como afirmava Ignátiev (1986 apud RÊGO e RÊGO, 2010, p. 43):

> "a independência mental, a reflexão e criatividade não podem ser metidas em nenhuma cabeça", sendo seguros apenas os resultados dos casos em que a introdução no campo da matemática ocorrer de forma prazerosa, "baseando-se em objetos e exemplos do ambiente cotidiano, selecionados com a criatividade e interesse correspondentes".

Nesse enfoque, vemos que o recurso didático manipulável assume papel de destaque no ensino e aprendizagem de Matemática, uma vez que o mesmo contribui para que o aluno tenha uma visão positiva dessa ciência. Pois a experiência dos estudantes com materiais concretos nas aulas de matemática lhes dá a oportunidade de serem agentes ativos no desenvolvimento dos conhecimentos, na busca de uma melhor compreensão da utilidade dessa disciplina. Como reforçam Rêgo e Rêgo (2010, p. 43):

> Nessa concepção de aprendizagem, o material concreto tem fundamental importância, pois, a partir de sua utilização adequada, os alunos ampliam sua concepção sobre o que é, como e para que aprender matemática, vencendo os mitos e preconceitos negativos, favorecendo a aprendizagem pela formação de ideias e modelos.

2.2 A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA E OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS COMO RECURSOS DIDÁTICOS.

O momento da formação é sem dúvida privilegiado, porque apesar da desvantagem da falta de experiência há tempo para a reflexão sobre o ensino.
Patricia Sadovsky

Tendo em vista que o professor de matemática, como qualquer outro professor, carece do uso de recursos didáticos para ministrar suas aulas, ou seja, de uma forma ou de outra esse profissional se utiliza de algum material que lhe auxilie na prática didático-pedagógica, é de extrema relevância a discussão, a construção e a aplicabilidade no que diz respeito à utilização de materiais didáticos como currículo integrante nos diversos níveis da formação de professores de matemática.

Nesse contexto, faz-se necessário refletir sobre a importância de recursos didáticos na formação do professor de matemática, em especial ao que diz respeito à utilização de materiais manipuláveis também denominados materiais concretos, mesmo diante dos desafios que tal temática possa trazer. Sobre tal situação, Passos (2010, p. 77) alerta:

> Discorrer sobre questões dessa natureza é um exercício sempre arriscado, em vista das divergências que existem em torno dos caminhos metodológicos alternativos que se oferecem tanto na formação inicial quanto na formação continuada de professores.

De acordo com Reys (1971 apud PASSOS, 2010, p. 78), materiais manipuláveis são "objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que tem aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia". Para Passos (2010, p. 78), “Os materiais manipuláveis são caracterizados pelo envolvimento físico dos alunos numa situação de aprendizagem ativa”.

Serrazina (1990 apud PASSOS, 2010), ao analisar a utilização de materiais didáticos no ensino da matemática, observa que o professor desempenha um papel de fundamental importância, pois o mesmo deve ter um cuidado especial quando deseja utilizar esses recursos em suas atividades pedagógicas. Por isso, deve-se investir para que a formação de professores de matemática, tanto inicial quanto a continuada, contemple essas questões.

Quando devidamente aplicados, os recursos didáticos contribuem efetivamente para que as criações pedagógicas desenvolvidas atendam ao objetivo de facilitar o processo de aquisição de conhecimento, tendo em vista que esses recursos devem ser encarados como mediadores nas relações entre os entes envolvidos no processo de construção de saberes. Sobre tal questão, Passos (2010, p. 78) enfatiza:

> Os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, considero que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído.

Para a autora, as discussões sobre esse tema devem levar em consideração dois aspectos interligados e que são determinantes no momento da escolha adequada de um recurso didático pelo docente: a formação de professores e as suas concepções pedagógicas. Concernente a essas questões, ela traz o seguinte argumento:

> Fiorentini e Miorim (1990) destacam esse fato quando analisam essa temática, lembrando que a escolha de um material, pelo professor, nem

> sempre é realizada com a devida clareza quanto a sua fundamentação teórica. De modo geral, enfatizam os autores, sempre que um congresso ou encontro de professores promove oficinas, conferências a respeito dessa temática as salas ficam lotadas, evidenciando o grande interesse pelos materiais e jogos. Entretanto, essas discussões, muitas vezes, ficam restritas à utilização de um recurso que se mostrou favorável para a abordagem de um determinado tópico de matemática, não ocorrendo, naquele momento, reflexões de caráter epistemológico. (PASSOS, 2010, p. 78-79)

Podemos constatar, então, que a utilização de um material manipulável como recurso didático deve ser feita com responsabilidade por parte do professor que o escolhe. Ter a consciência de que atividades com materiais concretos devem alcançar objetivos pedagógicos que extrapolem o espaço da sala de aula e que realmente possam contribuir para a vivência de mundo do educando, é algo que deve nortear o trabalho do professor de matemática. Passos (2010) traz o seguinte pensamento a respeito dessa questão:

> Precisamos superar a expectativa que muitos professores tem quando justificam a opção pela utilização de materiais concretos nas aulas de matemática como um fator de motivação ou, como expressam Fiorentini e Miorim (1990), para que as aulas fiquem mais "alegres", para que os alunos passem a "gostar de matemática". Esses autores apresentam um interessante estudo sobre a diversidade de opiniões a respeito da utilização de materiais concretos nas aulas de matemática, visto que "por trás de cada material se esconde uma visão de educação, de matemática, do homem e de mundo; ou seja, existe, subjacente ao material, uma proposta pedagógica que o justifica". (p. 79)

De acordo com essa concepção, um recurso didático não deve ser escolhido pelo docente para uma atividade pedagógica só porque é atraente ou divertido.

Matos e Serrazina (1996 apud PASSOS, 2010) concordam com o fato de que a utilização de materiais concretos favorece a aprendizagem e desenvolve nos alunos atitudes mais positivas. Essas fortes evidências, segundo os autores, são reforçadas por investigações feitas em ambientes em que ocorre o uso de materiais manipuláveis nas atividades didáticas. Entretanto, eles fazem uma ressalva sobre a eficácia dos materiais concretos nas salas de aula, baseando-se também em investigações, e explicam as razões para essas conclusões:

> Se os alunos não trazem com eles os conhecimentos que o professor espera, não é fácil para os alunos relacionarem as suas interações com os materiais com as estruturas existentes. Eles não interpretam os materiais como o professor espera e o uso de materiais concretos dará

> provavelmente origem apenas a conexões ao acaso. (MATOS e SERRAZINA, 1996 apud PASSOS, 2010, p. 80)

Segundo Passos (2010, p. 80), “Mesmo quando um professor usa materiais manipuláveis, os alunos, muitas vezes, não relacionam essas experiências concretas com a matemática formal”. Para a autora, não adianta ao professor escolher um material que apresente relações que lhe sejam especialmente importantes, se não houver a garantia de que os alunos também possam ver tais relações.

No entanto, cabe ao professor de matemática escolher adequadamente o material concreto que lhe auxiliará no repasse do tema de sua aula, bem como ter a preocupação de relacionar intimamente esses recursos didáticos com as implicações matemáticas neles presentes, a fim de obter resultados satisfatórios para si e especialmente aos alunos.

Não esqueçamos ainda que os ambientes de sala de aula devem ser encarados como oportunidades de experiência de prática social, uma vez que podem propiciar condições de envolver professor e alunos num engajamento de construção e compartilhamento de saberes, a partir das relações interpessoais favorecidas pelas atividades educativas.

> Nesta perspectiva, utilizar materiais manipuláveis na sala de aula é também uma prática social, em que os sujeitos, professores e alunos, interagem uns com os outros, engajados em atividades em que os significados podem ser compartilhados. (SOUZA, 2011, p. 29)

Nessa concepção de prática educativa, Souza (2011) envolveu-se numa pesquisa cujo objetivo era compreender a participação dos alunos de uma turma do nono ano do Ensino Fundamental ao utilizar materiais manipuláveis nas aulas de Matemática. Como parte de suas considerações sobre tal pesquisa, ela relata:

> Concluímos, portanto, que os alunos podem participar da sala de aula de matemática reconhecendo, definindo e deduzindo objetos matemáticos nos manipuláveis ou com o auxílio destes. Para isso, entretanto, o contexto em que os alunos estão inseridos deve ser favorável a estes padrões de participação [...] O engajamento com o manipulável pode ser extremamente variado, dependendo do uso realizado pelo participante, seja na sala de aula ou não. (SOUZA, 2011, p. 43)

Novamente, reforçamos a responsabilidade que deve ter o professor de matemática ao selecionar um recurso manipulável (ou material concreto) nas atividades de sua prática docente, mesmo diante de relatos da eficiência desse recurso. Tal preocupação é pertinente, pois a utilização inadequada de um modelo concreto num contexto matemático certamente trará prejuízos àquele considerado o centro do processo de ensino e aprendizagem: o aluno. A respeito dessa questão, Passos (2010) adverte:

> Os resultados negativos com materiais concretos podem estar ligados à distância existente entre o material concreto e as relações matemáticas que temos a intenção que eles representem, e também à seleção dos materiais na sala de aula. (p. 80)

Portanto, diante dos aspectos de grande relevância concernente ao uso de materiais concretos nas aulas de matemática, vemos a grande necessidade da reflexão e discussão desses aspectos nas atividades de formação inicial e continuada de professores de matemática.

> Diante de tudo o que foi exposto sobre o material concreto, acredita-se que os cursos de formação de professores em Matemática deverão oferecer, por meio do laboratório didático, a instrumentalização necessária para os cursos de formação inicial e continuada de professores, possibilitando a estes aprenderem confeccionar e utilizar o material didático a ser utilizado durante a prática pedagógica. (RODRIGUES e GAZIRE, 2012, p. 195)

Dessa forma, professor e alunos (futuros professores) podem, mediante discussões em sala de aula, criar situações que lhes proporcionem a aquisição ou o desenvolvimento de materiais manipuláveis como recursos didáticos que, aliados a uma proposta pedagógica coerente, venham de fato contribuir para se alcançar resultados positivos no ensino da matemática.

2.3 O USO DE MODELOS CONCRETOS NA MELHORIA DO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL.

Nos últimos anos tem sido recorrente entre os educadores a preocupação em inserir materiais concretos no ensino de Geometria Espacial. Em vários sites da internet, principalmente, há diversos exemplos de materiais que podem ser utilizados em sala de aula com o intuito de facilitar o estudo dessa área da matemática tão presente em nosso cotidiano.

Para Santos (2009), a Geometria se constitui a partir do mundo físico, de ações sobre objetos e caminha para o domínio de operações mentais. Em se tratando de geometria espacial, o concreto refere-se ao que existe materialmente, algo palpável, claramente definido, perceptível pelos sentidos.

Sobre o uso de materiais manipuláveis, Passos (2010, p. 81), assegura que "qualquer material pode servir para apresentar situações nas quais os alunos enfrentam relações entre os objetos que poderão fazê-los refletir, conjecturar, formular soluções, fazer novas perguntas, descobrir estruturas". No entanto, a autora observa:

> Entretanto, os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente. Os conceitos serão formados pela ação interiorizada do aluno, pelo significado que dão às suas ações, às formulações que enunciam, às verificações que realizam. (PASSOS, 2010, p. 81)

Castelnuovo (1970 apud PASSOS, 2010, p. 81) enfatiza que a ideia fundamental da ação é que ela deve ser reflexiva,

> [...] que o interesse da criança não seja atraído pelo objeto material em si ou pelo ente matemático, senão pelas operações sobre o objeto e seus entes. Operações que, naturalmente, serão primeiro de caráter manipulável para depois interiorizar-se e posteriormente passar do concreto ao abstrato. Recorrer à ação, diz Piaget, não conduz de todo a um simples empirismo, ao contrário, prepara a dedução formal ulterior, desde que tenha presente que a ação, bem conduzida, pode ser operatória, e que a formalização mais adiantada o é também.

De acordo com Pais (1996 apud PASSOS, 2010), os materiais manipuláveis funcionam como uma primeira forma de representar os conceitos.

Se, no decorrer de uma aula de geometria espacial, o aluno tem a oportunidade de ter em mãos um modelo concreto de uma figura tridimensional a qual possa explorá-la matematicamente, seguramente seu aprendizado será mais eficaz relativamente à representação e interpretação de caráter geométrico. A esse respeito, Passos (2010) discorre:

> Em Passos (2010) foi apresentada uma discussão a respeito de representação e interpretação geométricas. Quando utilizamos um objeto em forma cúbica, por exemplo, temos o suporte da materialidade, permitindo a identificação de alguns de seus elementos, e essa manipulação irá auxiliar a visualização espacial, ou seja, a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto. Refiro-me aqui à percepção visual pelo sujeito, enquanto construção de processo visual, o qual sofre interferências de sua experiência prévia, associada a outras imagens mentais armazenadas em sua memória. O significado léxico atribuído à visualização, nesse contexto, é o de transformar conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis. (p. 81)

Sem dúvida, as atividades didáticas que envolvem a visualização em muito contribuem para as diferentes maneiras de representações das figuras geométricas que podem ser feitas pelos alunos no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Segundo Passos (2010, p. 82):

> [...] a representação pode ser gráfica, como um desenho em um papel ou como modelos manipuláveis, ou mesmo por meio da linguagem e de gestos, considerados instrumentos importantes para expressar conhecimentos e ideias dos indivíduos. Os diferentes tipos de visualização que o aluno necessita, tanto em contextos matemáticos quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis.

Assim, o professor de matemática pode colaborar para o desenvolvimento do raciocínio espacial dos alunos incentivando-os a construir sólidos geométricos por meio de materiais concretos. Tal ação permite ao aluno vivenciar os conceitos espaciais através de experiências significativas. Por exemplo, ao construir modelos de poliedros, o aluno tem a oportunidade de utilizar e observar diversas relações espaciais existentes nesses objetos geométricos. Mais ainda, através da manipulação dos materiais concretos, é motivado à ação e tem estimulada a sua criatividade. Além disso, o estudante desenvolverá a capacidade de formar uma imagem mental das figuras tridimensionais.

Numa aula em que os alunos deverão confeccionar sólidos geométricos, é importante que o professor apresente à turma modelos de tais sólidos juntamente com objetos do cotidiano que são produzidos com formatos semelhantes a essas figuras espaciais. Isto certamente contribuirá para a familiarização dos estudantes com essas figuras, além de dar a eles a oportunidade de verificar a aplicabilidade das figuras geométricas espaciais no cotidiano, constatando, assim, a relação efetiva da matemática com o mundo a sua volta.

A capacidade de visualização do aluno é facilitada quando este tem em mãos um material concreto com o qual possa construir uma determinada figura espacial, sem falar de sua satisfação em sentir-se agente de fato na construção do saber matemático.

Ainda nesse sentido, Andrade (2014, p. 22) sugere:

> Outro ponto essencial para se trabalhar a visualização são as planificações dos sólidos. Este material é crucial para fazer a conexão entre os elementos do plano e do espaço, além de trabalhar a ideia de superfície do sólido e a representação do próprio solido.

Ainda sobre a importância de atividades nas quais os estudantes possam verificar a íntima relação da Geometria Espacial com a Geometria Plana, através do uso de modelos concretos, Becker (2009, p. 20) afirma:

> Segundo Gutierrez (1991), é fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano. Os tipos de atividades propostas nos livros não permitem o desenvolvimento dessas habilidades por não oportunizarem aos alunos a experiência e a possibilidade da criação de suas próprias hipóteses.

Não é difícil constatarmos a grande dificuldade que os alunos em geral demonstram quando necessitam desenvolver habilidades de visualização no estudo de geometria espacial. Esse insucesso se reflete quando nos deparamos com os baixos índices de acertos dos estudantes em questões que requerem certas capacidades de visualização, sejam em testes escolares, vestibulares e outros tipos de exames.

> Ainda neste campo, podemos identificar dificuldade em diferenciar modelos do plano e do espaço. E muito comum ouvir um aluno identificar um tetraedro como um triângulo ou ate mesmo um octaedro como um losango. Além disso, outro problema é a representação gráfica em vistas diferentes, pois outro fato que ocorre bastante é a confusão da base de um prisma ser visto de uma perspectiva diferente. (ANDRADE, 2014, p. 23)

Segundo Kaleff (2008 apud ANDRADE, 2014), não devemos confundir habilidade de visualização com percepção visual. A segunda refere-se à representação concreta do que se está vendo, isto é, à apreciação do objeto através da visão, enquanto que a outra trata da imagem mental, que é construída a partir do contato e da manipulação do mesmo.

> Crianças pequenas percebem o espaço a sua volta por meio do conjunto de seus sentidos, isto é, o conhecimento dos objetos resulta de um contato direto com os mesmos. É a partir deste contato com as formas do objeto, a textura e as cores do material de que ele é composto, bem como da possibilidade de sua manipulação, que tem origem a construção de uma imagem mental, a qual permitirá evocar o objeto na sua ausência. Assim é que a criança vai formando um conjunto de imagens mentais que representam o objeto, as quais são envolvidas no raciocínio. A partir deste ponto, ela poderá vir a representar com sucesso o objeto observado, através da elaboração de um esboço gráfico ou de um modelo concreto. (KALEFF, 2008 apud ANDRADE, 2014, p. 23)

De acordo com essa concepção, cabe ao professor de matemática fornecer objetos que sirvam de estímulo visual aos alunos para que estes tenham as condições necessárias para desenvolver a visualização espacial. E que, pela ação direta sobre esses objetos, o educando possa construir as imagens mentais dos mesmos, a fim de usá-las posteriormente em situações onde tais objetos não mais estarão diante de seus olhos. Para alcançarmos resultados dessa natureza, acreditamos que o uso do material concreto nas aulas de Geometria Espacial pode em muito nos ajudar.

> A utilização de modelos concretos permite que a figura geométrica possa ser observada em varias posições e angulações, tornando o registro da imagem mental mais dinâmico e com isso o aluno poderá explorar melhor as propriedades do objeto, fazer conjecturas e tirar conclusões sobre o mesmo. (ANDRADE, 2014, p. 23)

CAPÍTULO 3

UM ESTUDO SOBRE POLIEDROS.

Neste capítulo faremos um estudo sobre um tipo de figura espacial denominada poliedro. Para isto, conceituaremos figuras planas e não planas, e também sólidos geométricos. Por fim, faremos um estudo sobre poliedros e seus tipos, com destaque para a relação de Euler. Tal estudo faz-se necessário, tendo em vista que poliedros foram as figuras espaciais mais utilizadas nas atividades de sala de aula com o uso de modelos concretos.

3.1 AS FIGURAS PLANAS E AS NÃO PLANAS.

Ao observar os objetos à nossa volta, notamos que os mesmos apresentam formas variadas. A cada um desses objetos, podemos associar diferentes figuras geométricas.

Por exemplo, a superfície do tabuleiro de um jogo de damas dá a ideia de figura geométrica **plana,** enquanto as peças desse jogo lembram figuras geométricas **não planas**.

As figuras que possuem todos os seus pontos em um mesmo plano, como o quadrado (Figura 3), são chamadas figuras planas.

As figuras em que nem todos os seus pontos estão em um mesmo plano, como o cubo (Figura 4), são chamadas figuras não planas ou figuras espaciais.

Figura 3 – Figura plana[3].

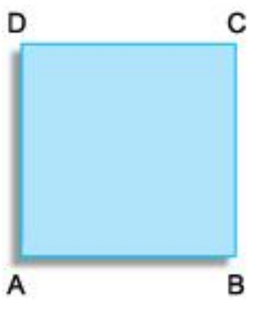
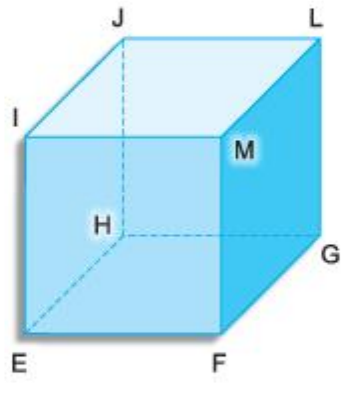


Figura 4 – Figura não plana[4].



[3] Disponível em http: www.objetivo.br/conteudoonline/imagens/conteudo1152/135.jpg. Acesso em 07/03/2016.

[4] Disponível em http: www.objetivo.br/conteudoonline/imagens/conteudo1152/136.jpg. Acesso em 07/03/2016.

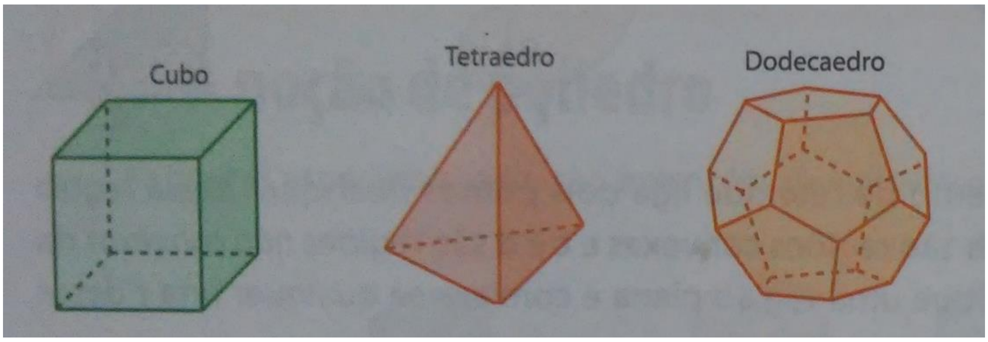
3.2 OS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.

Certas figuras geométricas não planas são chamadas de **sólidos geométricos.** Um sólido geométrico é uma região do espaço limitada por uma superfície fechada. Há dois tipos de sólidos geométricos: os poliedros e os não poliedros.

Poliedro é um sólido geométrico cuja superfície é composta por um número finito de faces, em que cada uma das faces é um polígono. Os seus elementos mais importantes são as faces, as arestas e os vértices.

São exemplos de poliedros o cubo, o tetraedro e o dodecaedro (Figura 5).

Figura 5 – Exemplos de poliedros.

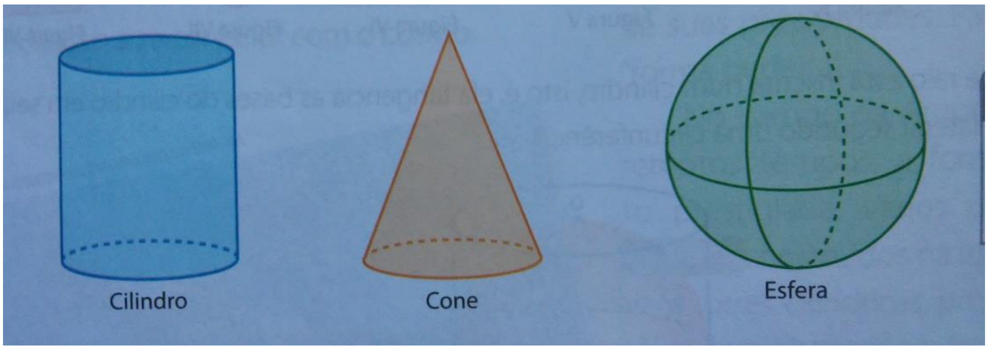


Fonte: Dante (2010, p. 208)

Não poliedros são todos os demais sólidos geométricos que não se encaixam na categoria de poliedro, ou seja, ao menos uma de suas faces não é um polígono. Assim, os não poliedros são sólidos limitados, no todo ou em parte, por superfícies curvas.

São exemplos de não poliedros o cilindro, o cone e a esfera, como vistos na Figura 6.

Figura 6 – Exemplos de não poliedros.

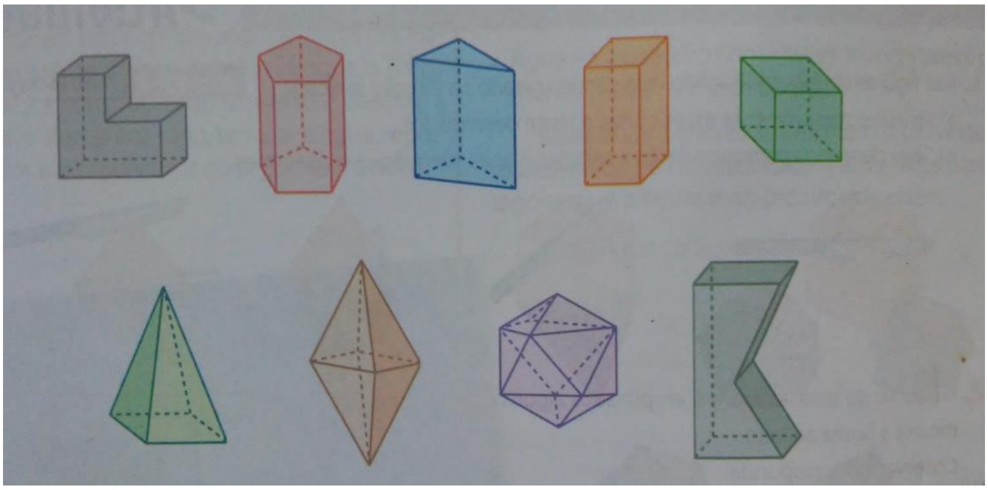


Fonte: Dante (2010, p. 246)

3.3 OS POLIEDROS.

As figuras espaciais abaixo são exemplos de poliedros (Figura 7).

Figura 7 – Exemplos de poliedros.

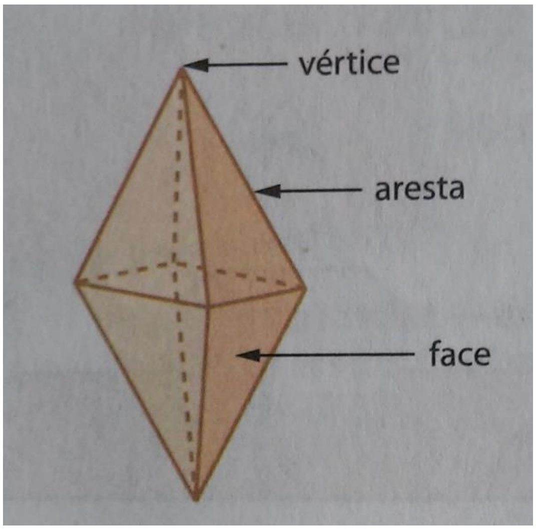


Fonte: Dante (2010, p. 206)

Cada poliedro é formado pela reunião de um número finito de regiões poligonais planas chamadas **faces** e a região do espaço limitada por elas. Cada lado de uma dessas regiões poligonais é também lado de uma outra única região poligonal. A intersecção de duas faces quaisquer é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia.

Cada lado de uma região poligonal comum a exatamente duas faces é chamado **aresta** do poliedro. E cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro.

Figura 8 – Elementos de um poliedro.



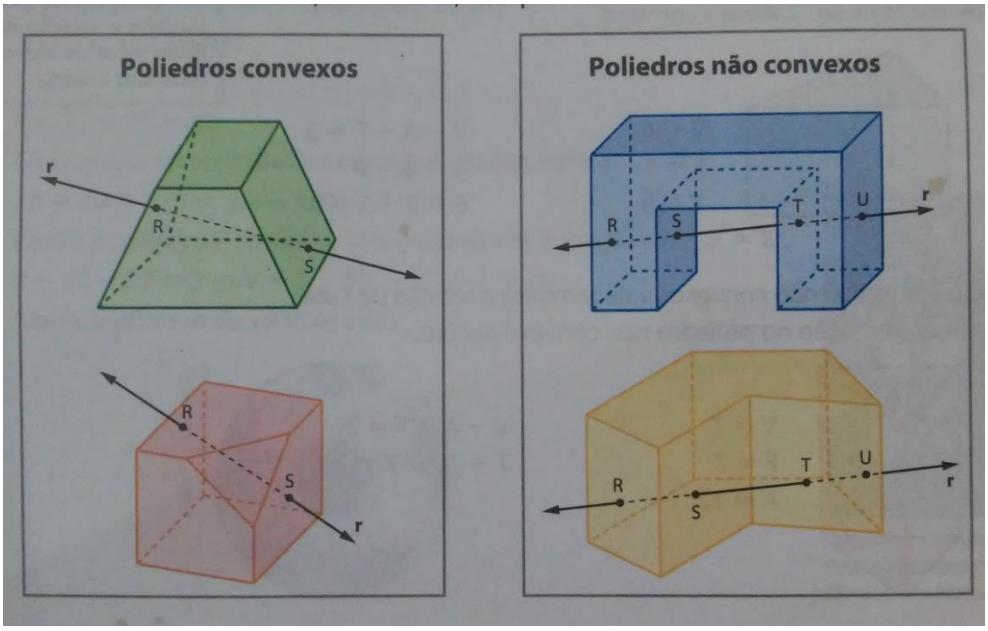
Fonte: Dante (2010, p. 206)

3.3.1 POLIEDRO CONVEXO E POLIEDRO NÃO CONVEXO.

Um poliedro é convexo quando o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido nele

De modo equivalente, podemos dizer que um poliedro é convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos.

Figura 9 – Poliedros convexos e poliedros não convexos.

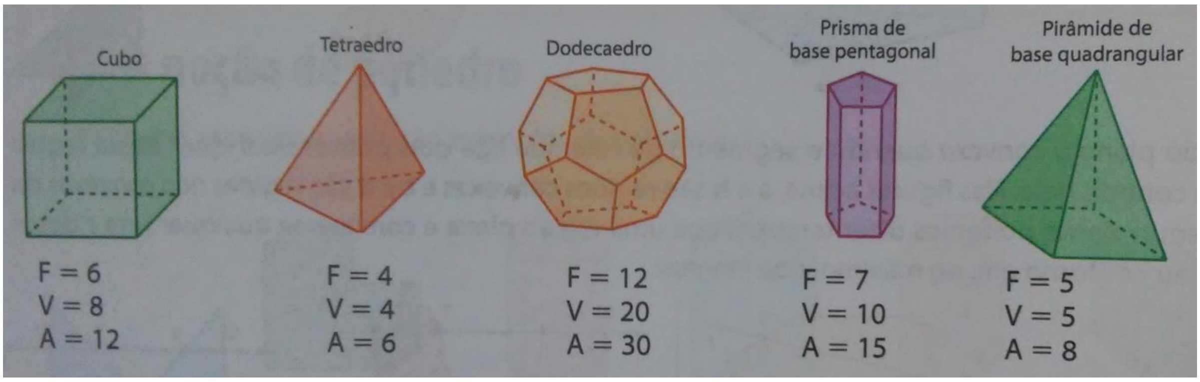


Fonte: Dante (2010, p. 207)

3.3.2 A RELAÇÃO DE EULER.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) descobriu uma importante relação entre o número de vértices (**V**), o número de arestas (**A**) e o número de faces (**F**) de um poliedro convexo. Observe estes exemplos (Figura 10):

Figura 10 – Número de Faces (F), número de Vértices (V) e número de Arestas (A) de poliedros.



Fonte: Dante (2010, p. 208)

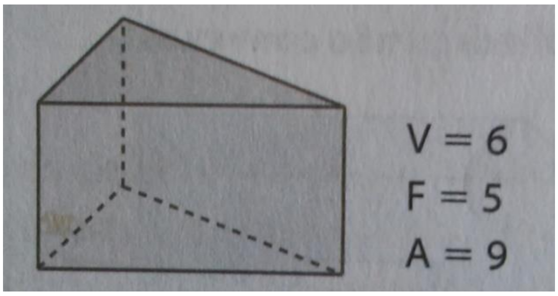
Observe que, para cada um dos poliedros, o número de arestas é exatamente 2 unidades menos do que a soma do número de faces com o número de vértices.

Essa relação pode ser escrita assim:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$ (relação de Euler)

O valor 2 dessa expressão é uma característica de todos os poliedros convexos. Note a relação de Euler em mais um poliedro (Figura 11).

Figura 11 – Poliedro.



Fonte: Dante (2010, p. 208)

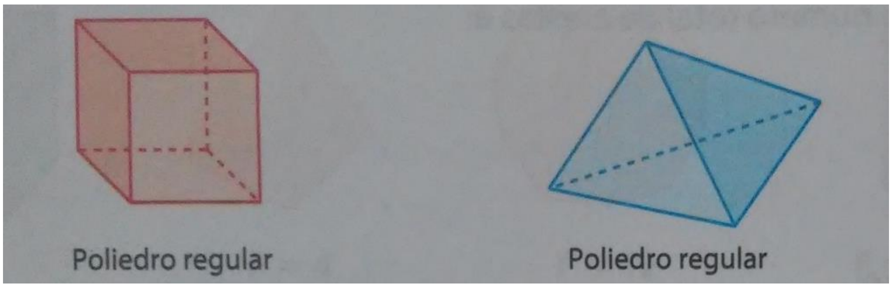
$$V - A + F = 2$$

$$6 - 9 + 5 = 2$$

3.3.3 POLIEDROS REGULARES.

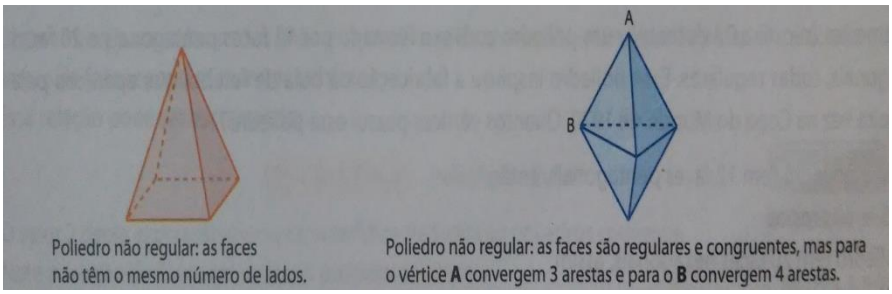
Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são regiões poligonais regulares (regiões que tem todos os lados e todos os ângulos internos congruentes) e congruentes e em todos os vértices concorre o mesmo número de arestas.

Figura 12 – Poliedros regulares.



Fonte: Dante (2010, p. 210)

Figura 13 – Poliedros não regulares.

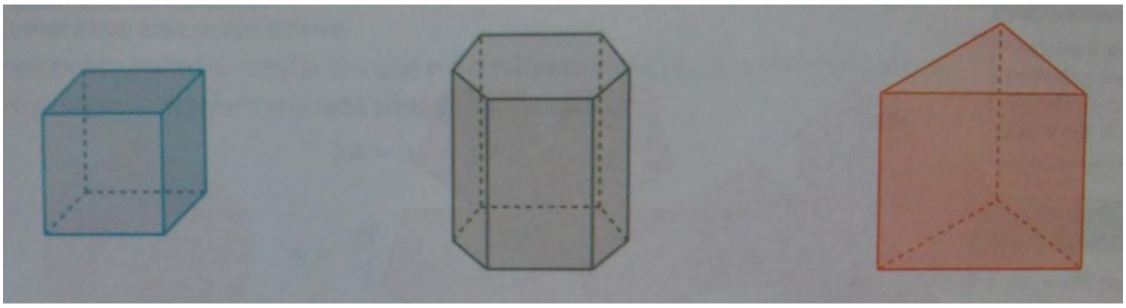


Fonte: Dante (2010, p. 210)

3.3.4 PRISMAS.

Entre os poliedros mais conhecidos, destacamos os prismas, que vamos estudar com mais detalhes. Vejamos alguns exemplos e procure perceber suas características (Figura 14).

Figura 14 – Prismas.

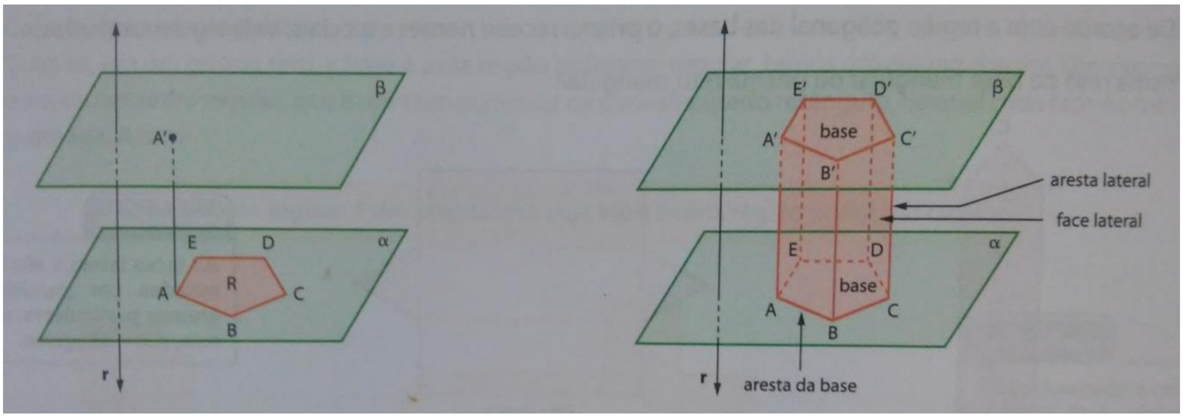


Fonte: Dante (2010, p. 212)

3.3.4.1 CONSTRUÇÃO E DEFINIÇÃO DE PRISMA.

Considere uma região poligonal, por exemplo ABCDE, contida em um plano α. Escolha um ponto **A’** qualquer, não pertencente a α. Por **A’** trace o plano β paralelo a α. Pelos demais pontos **B, C, D, E** trace retas paralelas a AA’ que cortam β nos pontos **B’, C’, D’, E’.** Essas retas são paralelas entre si.

Figura 15 – Construção do prisma.



Fonte: Dante (2010, p. 213)

Tome dois segmentos consecutivos assim determinados, por exemplo AA’ e BB’. O quadrilátero AA’B’B é plano, pois seus lados AA’ e BB’ são paralelos. Isso acarreta que os segmentos AB e A’B’ também são paralelos (pois estão contidos em retas coplanares que não se intersectam por estarem contidas em planos paralelos). Logo, o quadrilátero AA’B’B é um paralelogramo. As regiões limitadas por paralelogramos assim determinados, juntamente com as regiões poligonais ABCDE e A’B’C’D’E’, determinam um poliedro chamado **prisma** de bases ABCDE e A’B’C’D’E’.

A região do espaço ocupada por um prisma é formada pelos pontos dos segmentos nos quais cada extremidade está em uma das bases.

As arestas AA’, BB’, CC’, DD’ e EE’ são chamadas de **arestas laterais**. Todas as arestas laterais são paralelas e de mesmo comprimento.

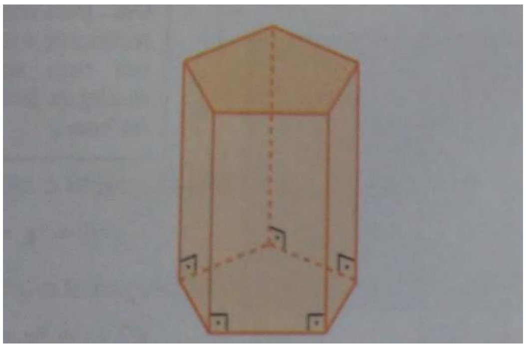
Arestas laterais consecutivas determinam regiões que tem a forma de paralelogramos e são chamadas de **faces laterais** do prisma.

As bases ABCDE e A’B’C’D’E’ são congruentes. A **altura** do prisma é a distância entre as bases.

3.4.4.2 PRISMAS RETOS.

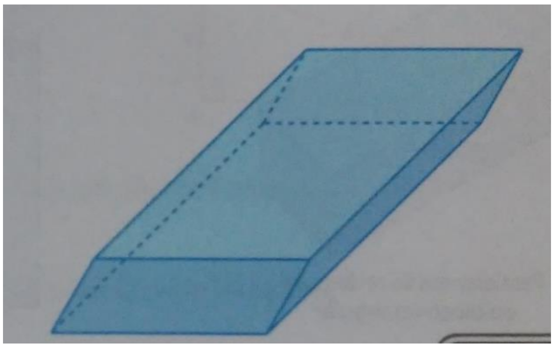
O prisma é reto (Figura 16) quando as arestas laterais são perpendiculares às bases, e é oblíquo quando não o são (Figura 17).

Figura 16 – Prisma reto.



Fonte: Dante (2010, p. 213)

Figura 17 – Prisma oblíquo.



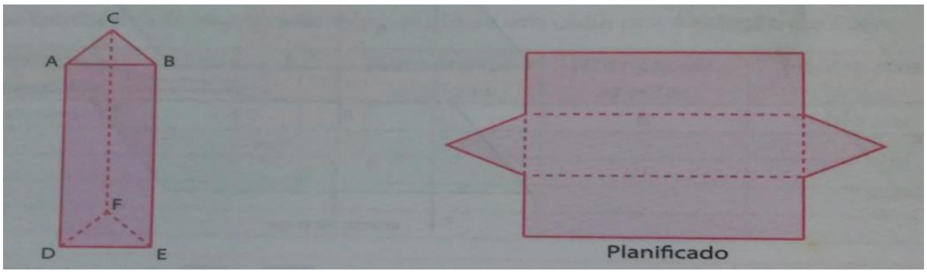
Fonte: Dante (2010, p. 213)

Assim, em um prisma reto, as faces laterais são regiões retangulares.

De acordo com a região poligonal das bases, o prisma recebe nomes especiais. Vejamos alguns exemplos:

1º) Prisma reto de base triangular ou prisma reto triangular (Figura 18).

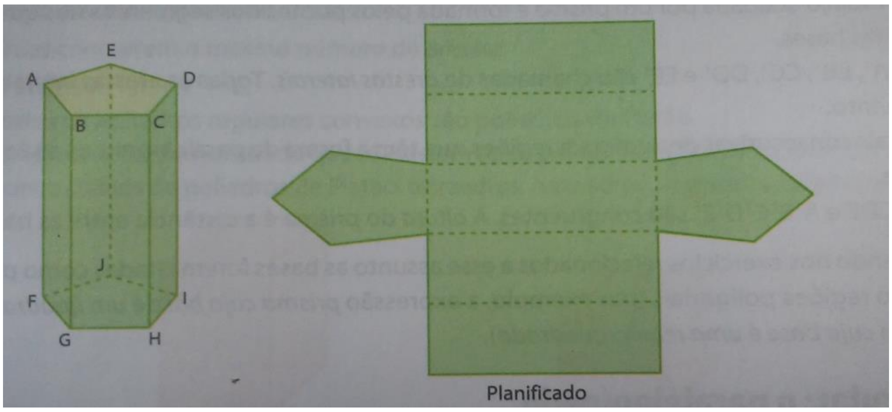
Figura 18 – Prisma reto triangular e sua planificação.



Fonte: Dante (2010, p. 214)

2º) Prisma reto de base pentagonal ou prisma reto pentagonal (Figura 19).

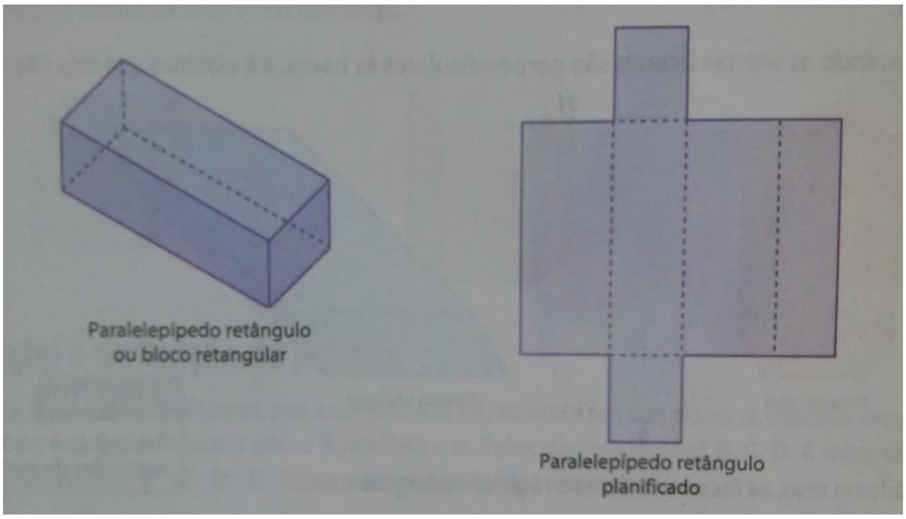
Figura 19 – Prisma reto pentagonal e sua planificação.



Fonte: Dante (2010, p. 214)

3º) Prisma reto de base retangular ou paralelepípedo retângulo (Figura 20).

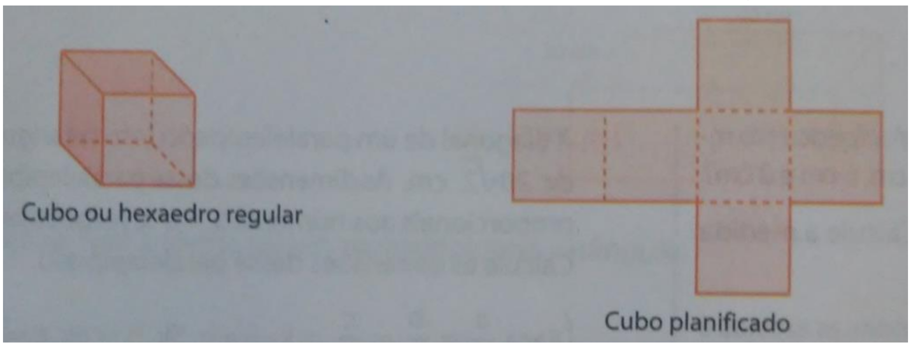
Figura 20 – Paralelepípedo retângulo e sua planificação.



Fonte: Dante (2010, p. 214)

4º) Cubo ou hexaedro regular (Figura 21).

Figura 21 – Cubo ou hexaedro regular e sua planificação.



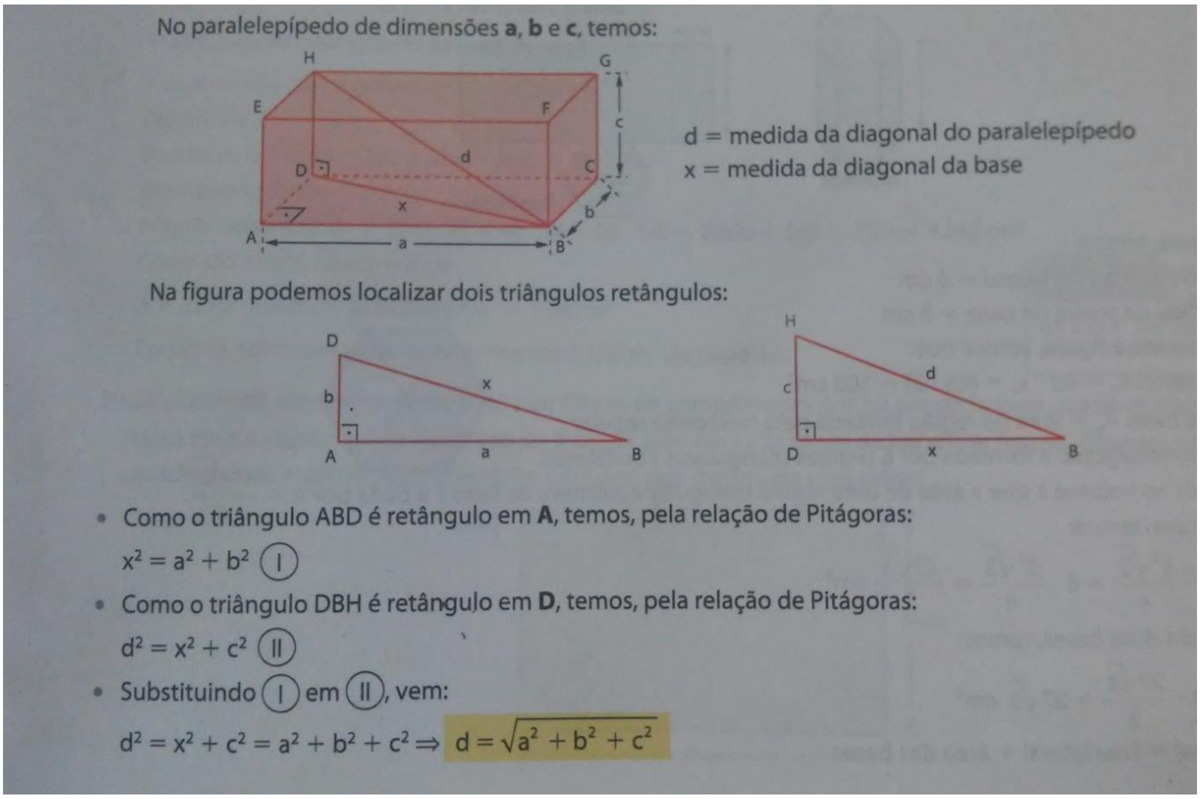
Fonte: Dante (2010, p. 215)

Quando, em um prisma reto, a base é uma região poligonal regular, temos um **prisma regular.** Um exemplo é o cubo ou hexaedro regular, que é um caso particular de paralelepípedo retângulo, no qual cada face é uma região quadrada. Assim, prisma regular é um prisma reto cuja base é uma região poligonal regular.

3.3.4.3 CÁLCULO DA DIAGONAL DE UM PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO.

Acompanhe a demonstração da fórmula da diagonal do paralelepípedo retângulo (Figura 22).

Figura 22 – Cálculo da diagonal do paralelepípedo retângulo.



No paralelepípedo de dimensões **a**, **b** e **c**, temos:

d = medida da diagonal do paralelepípedo
x = medida da diagonal da base

Na figura podemos localizar dois triângulos retângulos:

- Como o triângulo ABD é retângulo em **A**, temos, pela relação de Pitágoras:
  $x^2 = a^2 + b^2$ (I)
- Como o triângulo DBH é retângulo em **D**, temos, pela relação de Pitágoras:
  $d^2 = x^2 + c^2$ (II)
- Substituindo (I) em (II), vem:
  $d^2 = x^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

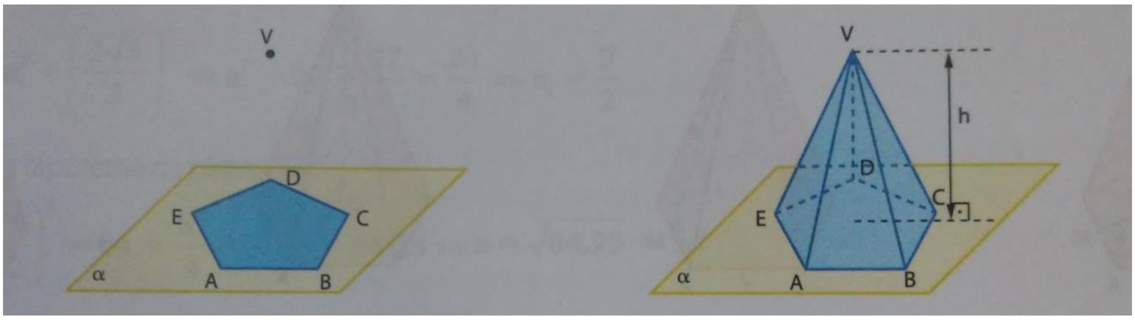
Fonte: Dante (2010, p. 215)

3.3.5 PIRÂMIDES.

3.3.5.1 CONSTRUÇÃO E DEFINIÇÃO DE PIRÂMIDE.

Considere uma região poligonal, por exemplo ABCDE, contida em um plano α e um ponto **V** exterior ao plano da região poligonal. Traçamos os segmentos VA, VB, VC, VD e VE. Cada dois vértices consecutivos de ABCDE determinam com **V** uma região triangular. Essas regiões triangulares, juntamente com a região poligonal ABCDE, determinam um poliedro chamado **pirâmide** de base ABCDE e vértice **V**.

Figura 23 – Construção da pirâmide.



Fonte: Dante (2010, p. 227)

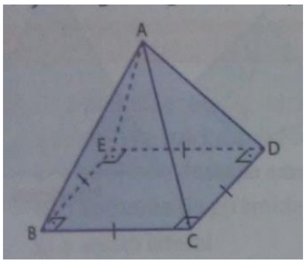
A região do espaço ocupada pela pirâmide é formada pelos pontos dos segmentos de reta que ligam o vértice **V** aos pontos da região poligonal (base).

A distância do vértice ao plano da base, que indicamos por **h**, é chamada **altura** da pirâmide.

Os segmentos VA, VB, VC, VD e VE são chamados de **arestas laterais**, e as regiões triangulares VAB, VBC, VCD, VDE e VEA são chamadas de **faces laterais** da pirâmide.

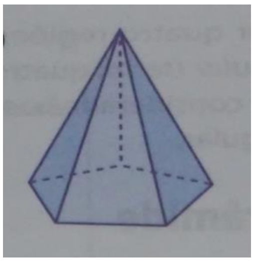
Veja a seguir alguns exemplos de pirâmides (Figuras 24, 25 e 26):

Figura 24 – Pirâmide 1



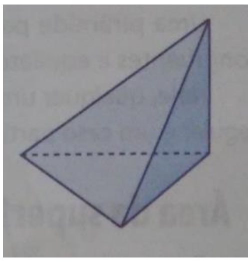
Fonte: Dante (2010, p. 227)

Figura 25 – Pirâmide 2



Fonte: Dante (2010, p. 227)

Figura 26 – Pirâmide 3



Fonte: Dante (2010, p. 227)

A pirâmide 1, ABCDE, é uma pirâmide de base quadrada (ou pirâmide quadrada); a região poligonal BCDE é sua base.

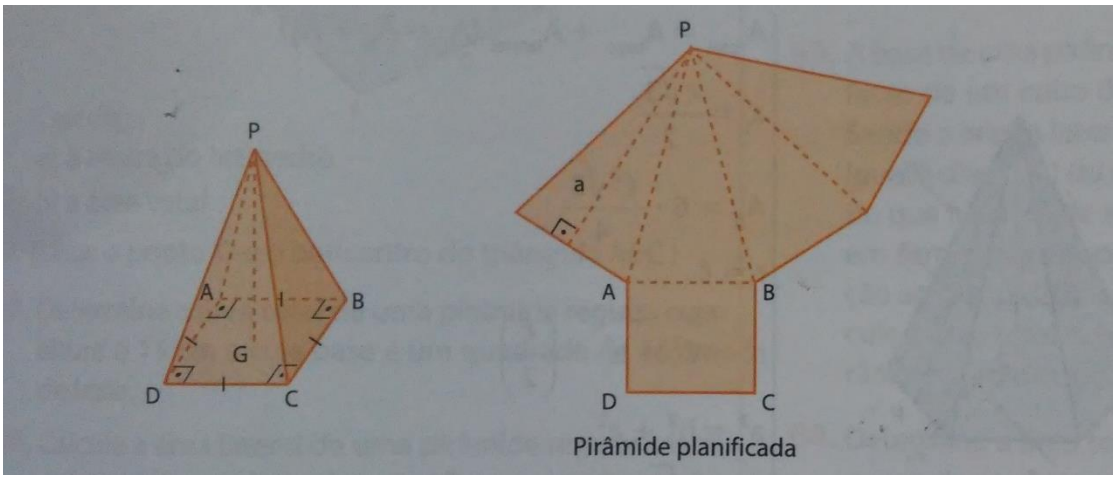
A pirâmide 2 é de base pentagonal (ou pirâmide pentagonal) e a pirâmide 3 tem base triangular (tetraedro).

Se todas as arestas laterais são congruentes, a pirâmide é **reta**; caso contrário, ela é **oblíqua**. Nos exemplos dados, as pirâmides 1 e 2 são retas e a pirâmide 3 é oblíqua.

3.3.5.2 PIRÂMIDE REGULAR.

Pirâmide regular é uma pirâmide reta cuja base é uma região poligonal limitada por um polígono regular. Vamos considerar uma pirâmide cuja base é uma região quadrada e com arestas laterais congruentes (Figura 27).

Figura 27 – Pirâmide de base quadrada.



Fonte: Dante (2010, p. 227)

Essa pirâmide é regular, pois sua base é uma região poligonal regular (quadrada) e suas arestas são congruentes (pirâmide reta).

CAPÍTULO 4

RELATOS DA PRÁTICA DO USO DE MODELOS CONCRETOS EM SALA DE AULA.

"Ninguém ama o que não conhece": este pensamento explica porque tantos alunos não gostam da matemática. Se a eles não foi dado conhecer a matemática, como podem vir a admirá-la?
Sergio Lorenzato

Neste capítulo serão apresentadas atividades de geometria espacial feitas com uma turma de alunos do 2º ano do ensino médio, de uma escola estadual em Igarapé-Açu, estado do Pará. As atividades desenvolvidas foram planificações e montagens de sólidos geométricos com aplicações de atividades avaliativas e uma demonstração.

4.1 AULA 1: PLANIFICAÇÃO E CONSTRUÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.

Esta primeira atividade aconteceu em 04/11/2015, começando às 10h40min, e esperava-se que os alunos desenvolvessem habilidades de medição e visualização, e fizessem relações entre elementos do plano e do espaço.

Inicialmente mostrei aos alunos alguns sólidos geométricos que construí e suas respectivas planificações. A seguir, a turma foi dividida em 6 grupos de 5 alunos cada um.

Foi dada a cada aluno meia folha de papel-cartão para a construção da planificação da figura espacial escolhida.

A relação dos grupos com seus respectivos sólidos a serem planificados foi esta:

Grupo 1 - Paralelepípedo Retângulo;

Grupo 2 - Prisma Triangular;

Grupo 3 - Cubo ou Hexaedro Regular;

Grupo 4 - Pirâmide Quadrangular;

Grupo 5 - Prisma Hexagonal;

Grupo 6 - Cilindro.

A cada aluno foi distribuída uma folha de papel com os desenhos das figuras espaciais planificadas para auxiliar-lhes na tarefa. Com isso, os discentes desenhariam individualmente a planificação à qual seu grupo iria produzir.

Também foram repassados aos alunos instrumentos de medição, tais como régua, compasso, esquadro, além de lápis, tesoura e cola.

Estando os grupos com seus devidos materiais para a realização da atividade, instruí cada um deles a respeito da planificação a ser feita. Além disso, desenhei no quadro as planificações dos sólidos geométricos com suas respectivas medidas.

Durante o desenvolvimento da atividade, vale enfatizar a grande ajuda dada pela professora da turma, Marilena Almeida, dando também instruções às equipes a cerca das ações a serem tomadas.

Preocupei-me em estar constantemente supervisionando e orientando os grupos. E sempre havia chamado dos alunos para auxiliá-los.

Pude notar que alguns alunos demonstravam dificuldades em usar o compasso. Alguns relataram que nunca o tinham usado antes. Daí, ensinei-lhes o manejo adequado de tal instrumento.

Algo interessante que pude observar foi que, mesmo eu tendo repassado as instruções, havia estudantes que criavam suas próprias estratégias na construção de suas planificações. Vejo tal fato como algo positivo no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que a autonomia do aluno deve ser respeitada.

Até o término da aula, muitos alunos já haviam concluído a planificação e montado seus sólidos. Mas alguns levaram seus trabalhos para terminarem em suas casas; outros devolveram suas planificações inacabadas para concluírem no próximo encontro.

Deve-se registrar a alegria dos alunos quando tinham suas figuras tridimensionais montadas. Lembro-me que tal façanha era motivo de vibração e até de aplausos na comemoração de tal feito. Muito legal!

A aula deveria terminar às 11h55min, porém alguns alunos ultrapassaram esse horário por quererem ver seus trabalhos concluídos.

No dia 09/11/2015, voltei à turma, no horário de 7h40min até 8h20min, para terminar a atividade de planificação e montagem dos sólidos geométricos com aqueles alunos que não haviam concluído no primeiro dia de atividade.

Posso garantir que essa aula poderia ser intitulada de: “Um salto do plano para o espaço”.

A seguir, imagens fotográficas (Figuras 28 a 33) dos momentos em que a classe fazia os desenhos das planificações dos sólidos geométricos.

Figura 28 – Alunos planificando o cubo.

Figura 29 – Alunos planificando o cilindro.

Figura 30 – Alunos planificando o prisma triangular.

Figura 31 – Alunos planificando o prisma hexagonal.

Figura 32 – Alunos planificando o paralelepípedo retângulo.

Figura 33 – Alunos planificando a pirâmide quadrangular.

Abaixo, os sólidos confeccionados pelos alunos (Figuras 34 a 38).

Figura 34 – Cubos.

Figura 35 – Prismas triangulares.

Figura 36 – Paralelepípedos retângulos e prismas hexagonais.

Figura 37 – Pirâmides quadrangulares.

Figura 38 – Cilindros.

Após essa primeira aula, apliquei à turma um questionário (ver anexo 2) com quatro questões para verificar a aprendizagem em relação à primeira aula e saber outras coisas referentes a esse primeiro encontro.

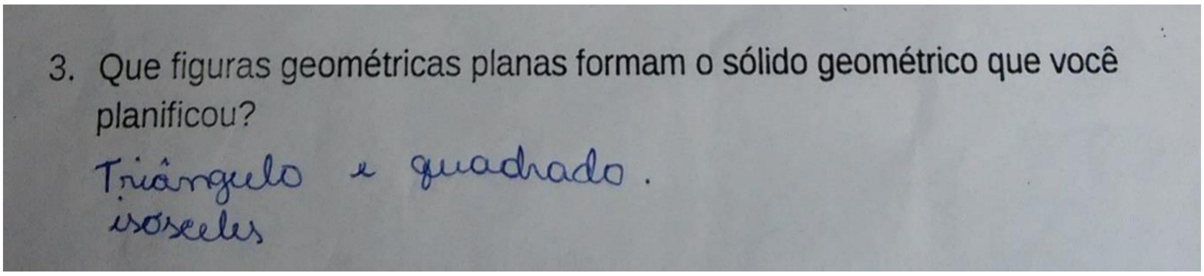
Na primeira questão, procurei saber que instrumentos de medição os alunos usaram para fazer os desenhos das planificações dos sólidos geométricos. Ao verificar suas respostas, constatei que a régua e o compasso foram os instrumentos mais utilizados nesses desenhos.

Na segunda questão, perguntei se o aluno já tinha usado antes todos os instrumentos que utilizou para fazer a planificação de seu sólido. Caso contrário, o mesmo deveria informar qual (ou quais) ainda não havia usado. De acordo com as respostas dadas, o compasso foi o instrumento mais citado entre aqueles que os alunos nunca tinham utilizado antes.

Na terceira questão os alunos deveriam informar quais figuras geométricas formavam o sólido geométrico que haviam planificado. A maioria dos alunos respondeu corretamente a cerca desse questionamento. As figuras a seguir trazem alguns registros das respostas dadas pela classe para:

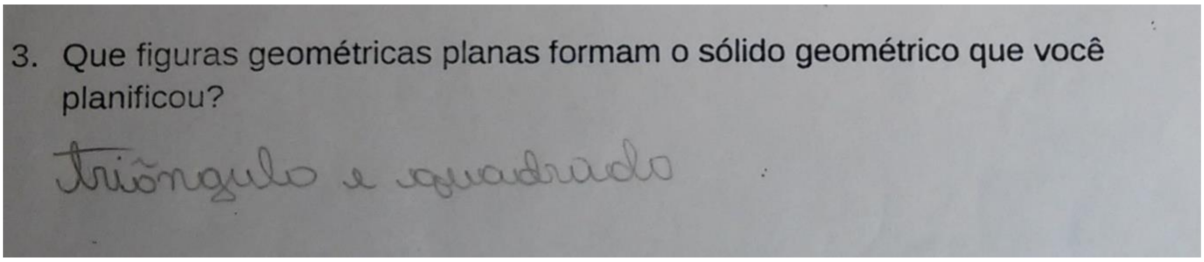
i) a pirâmide quadrangular (Figuras 39, 40 e 41);

Figura 39 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

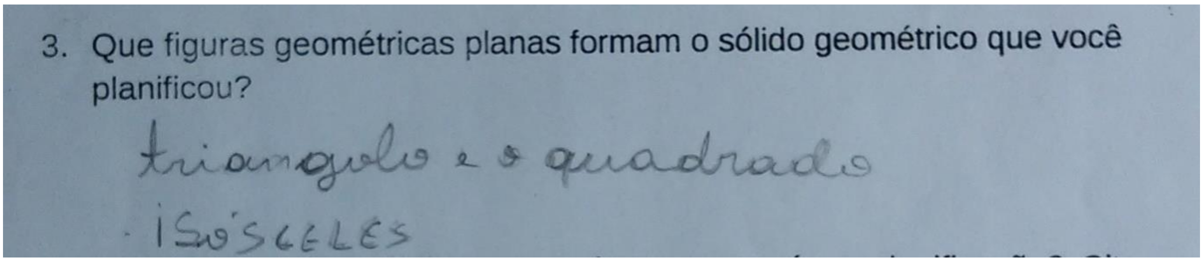
Triângulo e quadrado.
isosceles

Figura 40 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

triângulo e quadrado

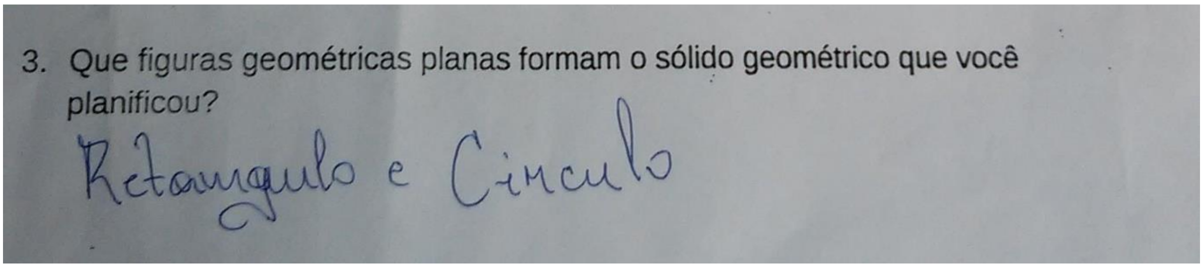
Figura 41 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

triangulo e o quadrado
· ISÓSCELES

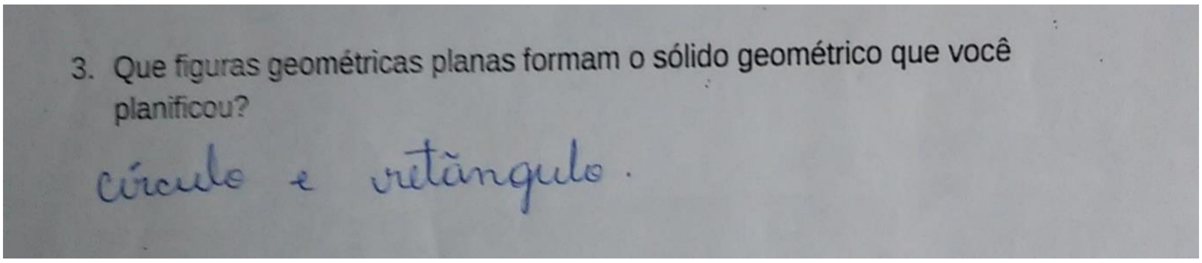
ii) o cilindro (Figuras 42 e 43);

Figura 42 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

Retangulo e Circulo

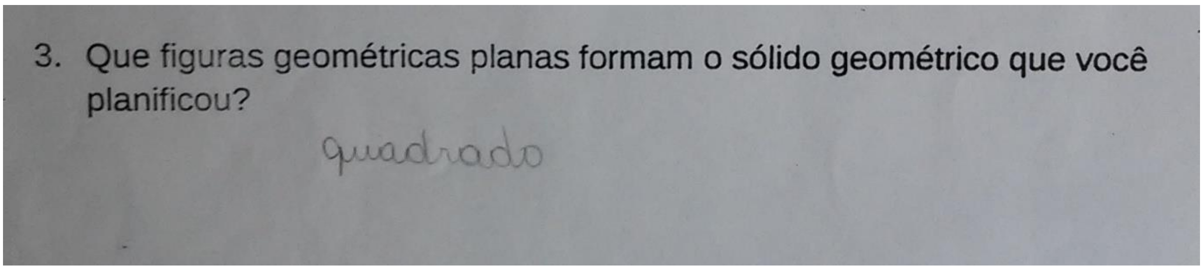
Figura 43 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

círculo e retângulo.

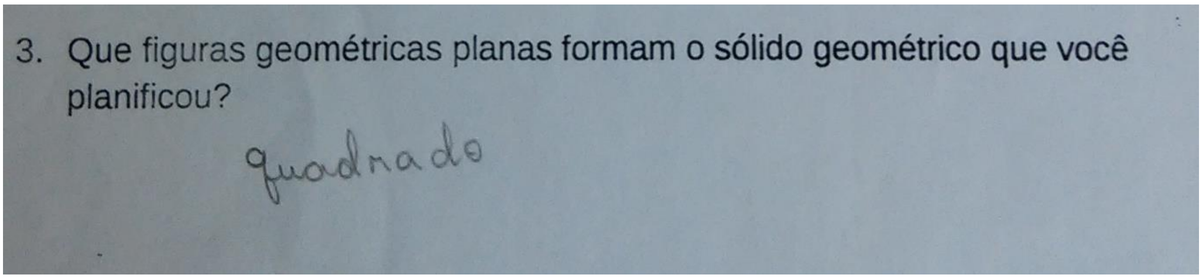
iii) o cubo (Figuras 44 e 45);

Figura 44 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

quadrado

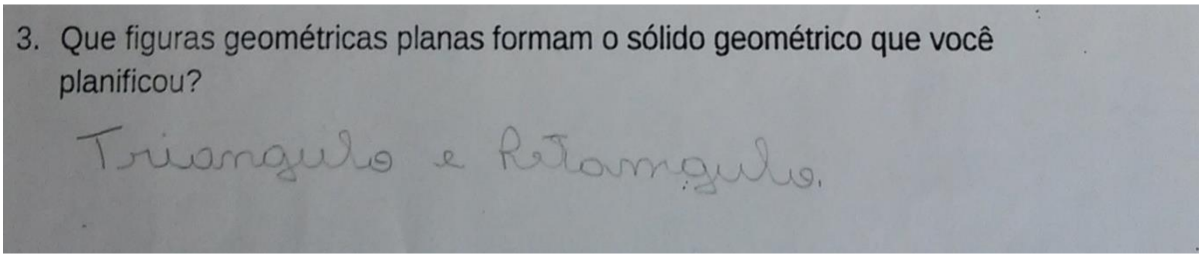
Figura 45 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

quadrado

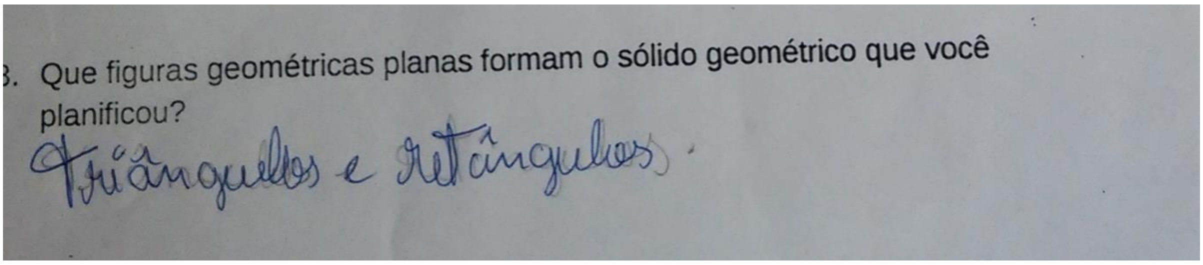
iv) o prisma triangular (Figuras 46 e 47);

Figura 46 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

Triangulo e Retangulo.

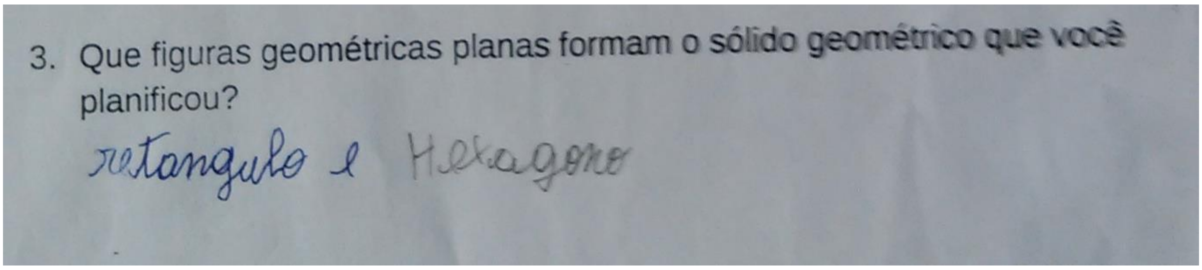
Figura 47 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

Triângulos e retângulos.

v) o prisma hexagonal (Figura 48);

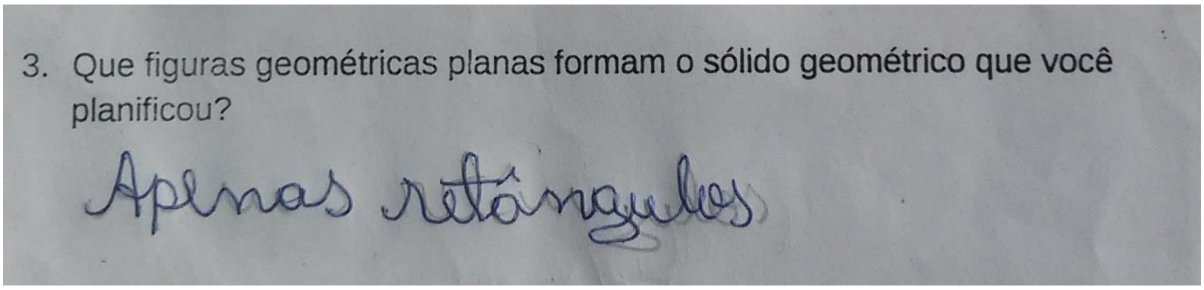
Figura 48 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

retangulo e Hexagono

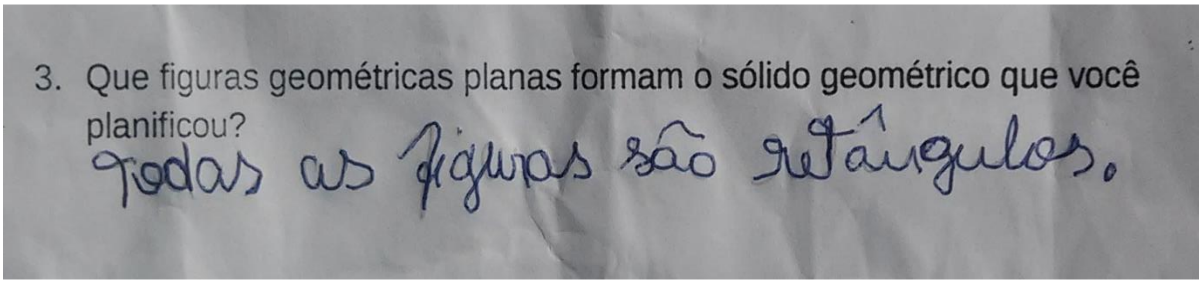
vi) o paralelepípedo retângulo (Figuras 49 e 50);

Figura 49 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

Apenas retângulos

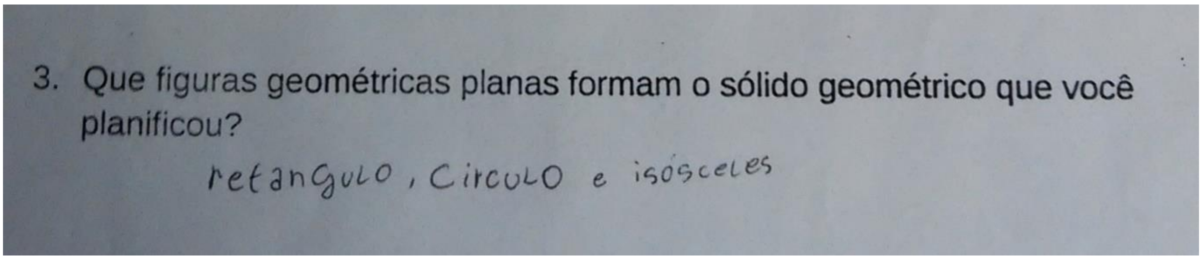
Figura 50 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

Todas as figuras são retângulos.

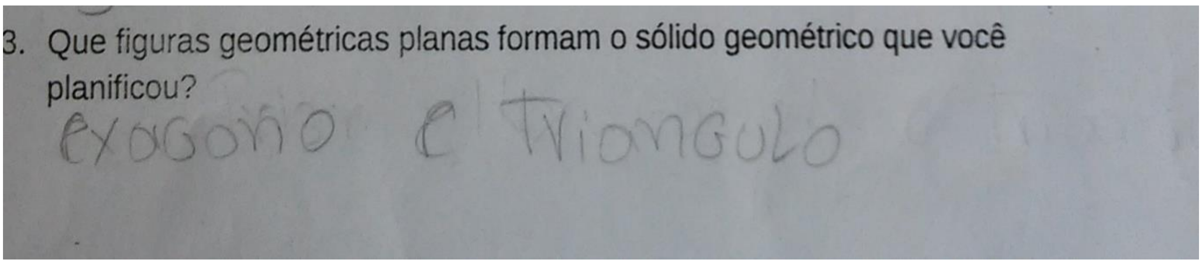
Ainda concernente à 3ª questão, há registros de equívocos cometidos por alguns alunos ao respondê-la, como, por exemplo, nos casos do cilindro (Figura 51) e do prisma hexagonal (Figura 52), anotados respectivamente a seguir.

Figura 51 – Exercício resolvido pelo aluno


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

retangulo, Circulo e isósceles

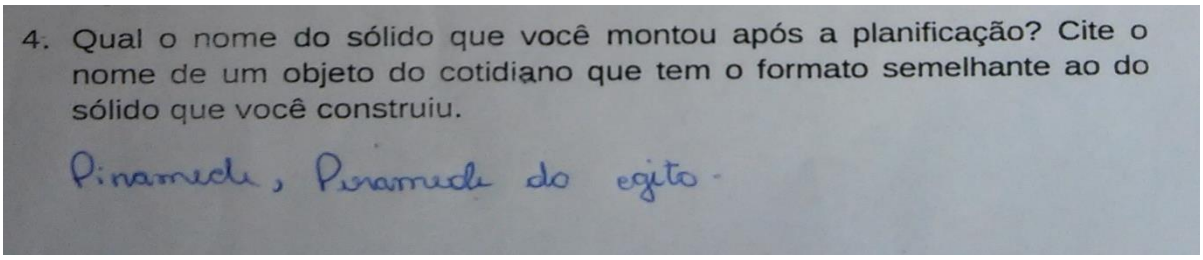
Figura 52 – Exercício resolvido pelo aluno.


3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

exogono e triangulo

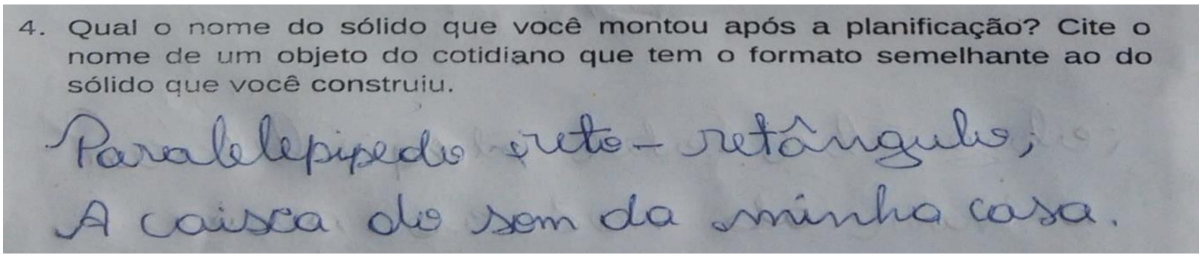
Em relação à 4ª questão do questionário, onde os alunos deveriam identificar o sólido geométrico confeccionado e relacionar sua forma com um elemento do cotidiano, temos a seguir algumas respostas (Figuras 53, 54 e 55).

Figura 53 – Exercício resolvido pelo aluno.


4. Qual o nome do sólido que você montou após a planificação? Cite o nome de um objeto do cotidiano que tem o formato semelhante ao do sólido que você construiu.

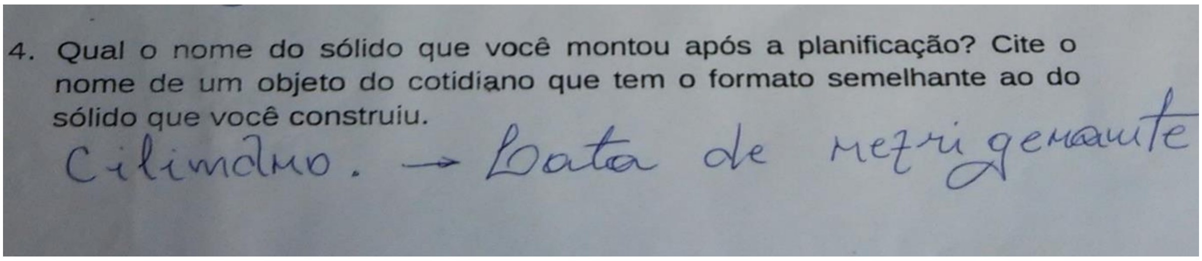
Piramide, Piramide do egito.

Figura 54 – Exercício resolvido pelo aluno.


4. Qual o nome do sólido que você montou após a planificação? Cite o nome de um objeto do cotidiano que tem o formato semelhante ao do sólido que você construiu.

Paralelepipedo reto-retângulo;
A caixa do som da minha casa.

Figura 55 – Exercício resolvido pelo aluno.


4. Qual o nome do sólido que você montou após a planificação? Cite o nome de um objeto do cotidiano que tem o formato semelhante ao do sólido que você construiu.

Cilindro. → Lata de refrigerante

4.2 AULA 2: OS POLIEDROS E A RELAÇÃO DE EULER.

No dia 11/11/2015, retornei à classe para ministrar a aula sobre poliedros, no horário de 10h30min até 11h15min. O objetivo dessa aula era que os alunos conhecessem os elementos que constituem um poliedro e verificassem uma de suas propriedades segundo a relação de Euler **(V – A + F = 2).**

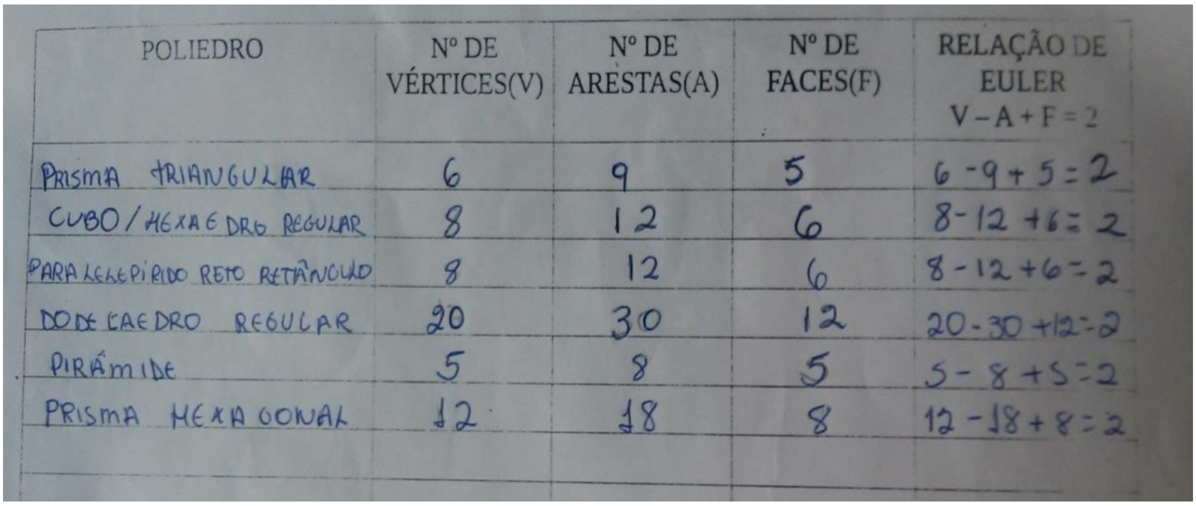
Como os poliedros (paralelepípedo, prismas triangular e hexagonal, cubo e pirâmide) já haviam sido montados e mais o dodecaedro que eu tinha construído, distribuí-os aos alunos para que os mesmos pudessem assistir à aula com esses sólidos em mãos. Dessa forma, durante a explanação do conteúdo eles podiam manipular, visualizar e verificar propriedades dessas figuras espaciais de uma maneira mais concreta, mais real.

Iniciei a aula dando a definição de poliedros, explicando suas propriedades e elementos que os constituem e que podiam ser conferidos pelos próprios discentes.

Foi bem produtiva a aula, uma vez que os alunos tinham condições de verificar ou confirmar elementos ou propriedades dos sólidos geométricos já que estes estavam ali, ao alcance de suas mãos.

Falei ainda da relação de Euler e, a seguir, distribuí à classe uma atividade com uma tabela para os alunos preencherem com o nome do poliedro, seu número de vértices (V), de arestas (A) e de faces (F). Além disso, eles confirmaram a validade da relação de Euler para os sólidos em estudo. Abaixo, temos um dos exercícios resolvidos (Figura 56).

Figura 56 – Atividade resolvida envolvendo a relação de Euler.



POLIEDRO	Nº DE VÉRTICES(V)	Nº DE ARESTAS(A)	Nº DE FACES(F)	RELAÇÃO DE EULER V – A + F = 2
PRISMA TRIANGULAR	6	9	5	6 - 9 + 5 = 2
CUBO / HEXAEDRO REGULAR	8	12	6	8 - 12 + 6 = 2
PARALELEPIPIDO RETO RETÂNGULO	8	12	6	8 - 12 + 6 = 2
DODECAEDRO REGULAR	20	30	12	20 - 30 + 12 = 2
PIRÂMIDE	5	8	5	5 - 8 + 5 = 2
PRISMA HEXAGONAL	12	18	8	12 - 18 + 8 = 2

4.3 AULA 3: MONTAGEM DE ESQUELETOS DE POLIEDROS E DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA DA DIAGONAL DO PARALELEPÍPEDO RETÂNGULO.

Para mais uma atividade, voltei à sala de aula em 18/11/2015, a partir das 11h15min. Desta vez, para montar com os alunos esqueletos de poliedros (paralelepípedo, cubo, prismas triangular e hexagonal e pirâmide quadrangular) usando palitos de dente, talas de uma espécie de palmeiras e jujubas.

Essa aula visava proporcionar aos alunos mais uma atividade em que os mesmos pudessem criar, desenvolver ainda mais a visualização e de deduzir a fórmula da diagonal do paralelepípedo retângulo.

Foram formados 4 grupos de 5 alunos cada um e um grupo com apenas 3 alunos. Cada grupo ficou responsável pela construção de um dos cinco sólidos disponíveis.

As seguintes fotos (Figuras 57 a 66) mostram os alunos montando as figuras e com seus respectivos esqueletos dos poliedros já montados.

Figura 57 – Alunos montando o cubo.

Figura 58 – Esqueletos do cubo.

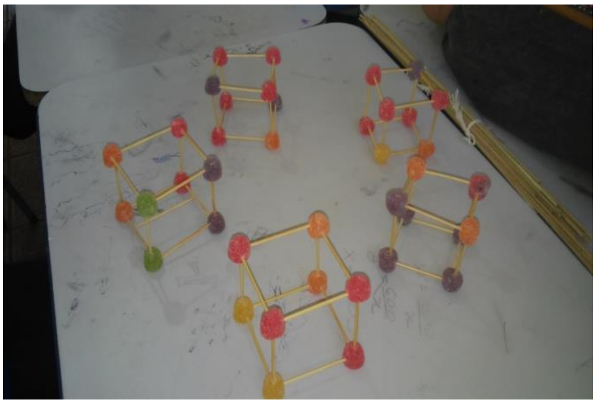


Figura 59 – Alunos montando o paralelepípedo retângulo.

Figura 60 – Esqueletos do paralelepípedo retângulo.

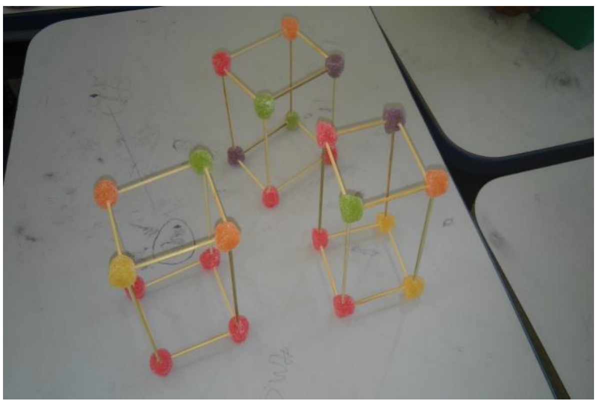


Figura 61 – Alunos montando a pirâmide quadrangular.

Figura 62 – Esqueletos da pirâmide quadrangular.

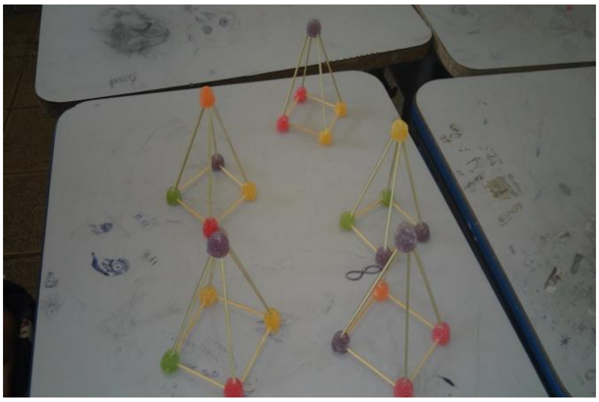


Figura 63 – Alunos montando o prisma hexagonal.

Figura 64 – Esqueletos do prisma hexagonal.

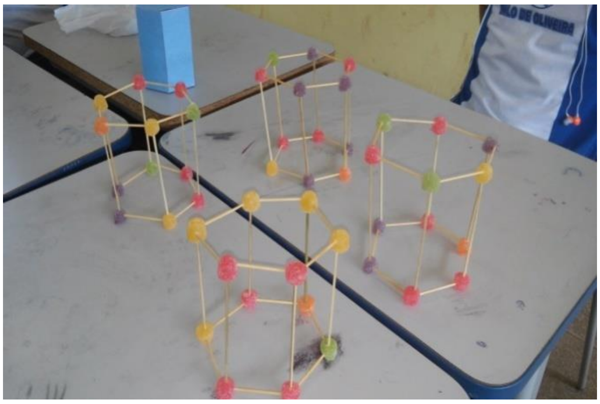
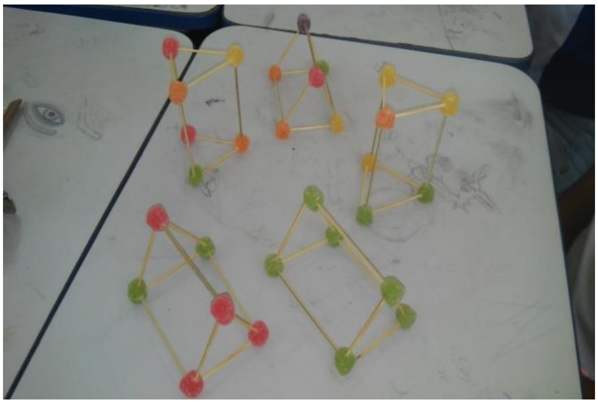


Figura 65 – Alunos montando o prisma triangular.

Figura 66 – Esqueletos do prisma triangular.



Depois que as figuras foram montadas, expliquei que os esqueletos facilitam a visualização dos vértices (jujubas) e as arestas (palitos ou talas) dos poliedros. Já em relação aos feitos com papel-cartão, a facilidade é maior em se verificar as faces.

Em parceria com os alunos, finalizei as atividades fazendo a demonstração da fórmula da diagonal do paralelepípedo retângulo. Para isso, coloquei as diagonais da base e do paralelepípedo em cinco esqueletos desse poliedro e dei um exemplar para cada grupo para que o visualizassem.

Fiz também o desenho dessa figura no quadro-branco com tais diagonais. Os discentes fizeram o mesmo em seus cadernos. A seguir, mostrei à turma os dois triângulos retângulos que seriam necessários para a demonstração da fórmula em questão.

Com a participação ativa dos alunos, chegamos à conclusão de que deveríamos usar por duas vezes o teorema de Pitágoras para obtermos a prova.

A partir disso, os alunos determinaram inicialmente a fórmula da diagonal **d** da base **($d^2 = a^2 + b^2$)** e a substituíram na equação da diagonal **D** do paralelepípedo **($D^2 = d^2 + c^2$)**, obtendo assim o resultado esperado, tal que **$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$**, onde **a**, **b** e **c** são as dimensões do sólido. A demonstração dessa fórmula foi anotada nas folhas dos cadernos dos alunos, e podemos conferi dois exemplos desse fato registrados a seguir (Figuras 67 e 68).

Figura 67 – Demonstração da fórmula da diagonal do paralelepípedo retângulo.

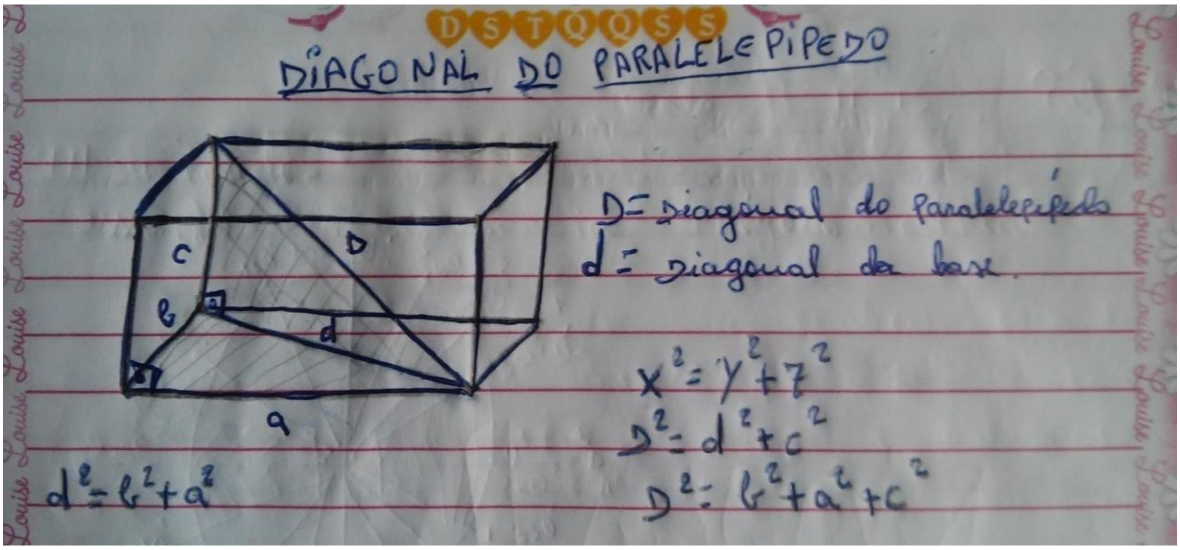
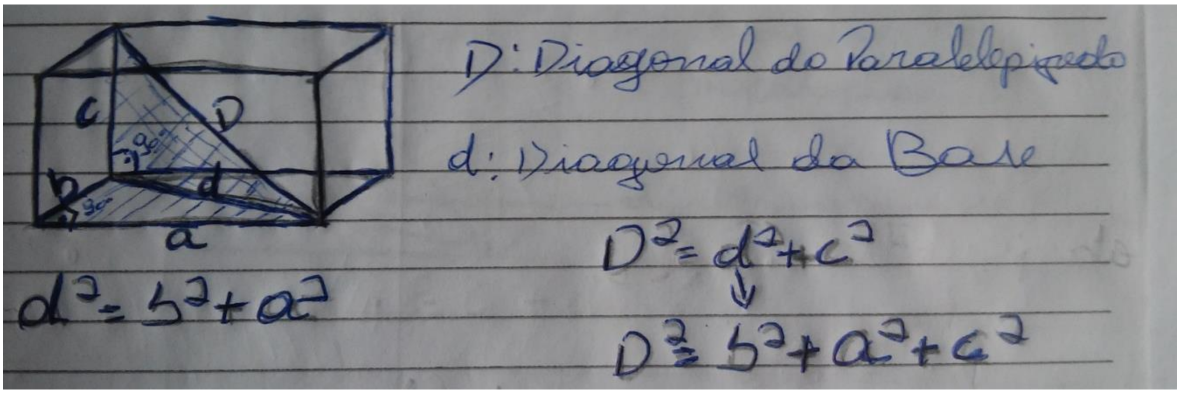


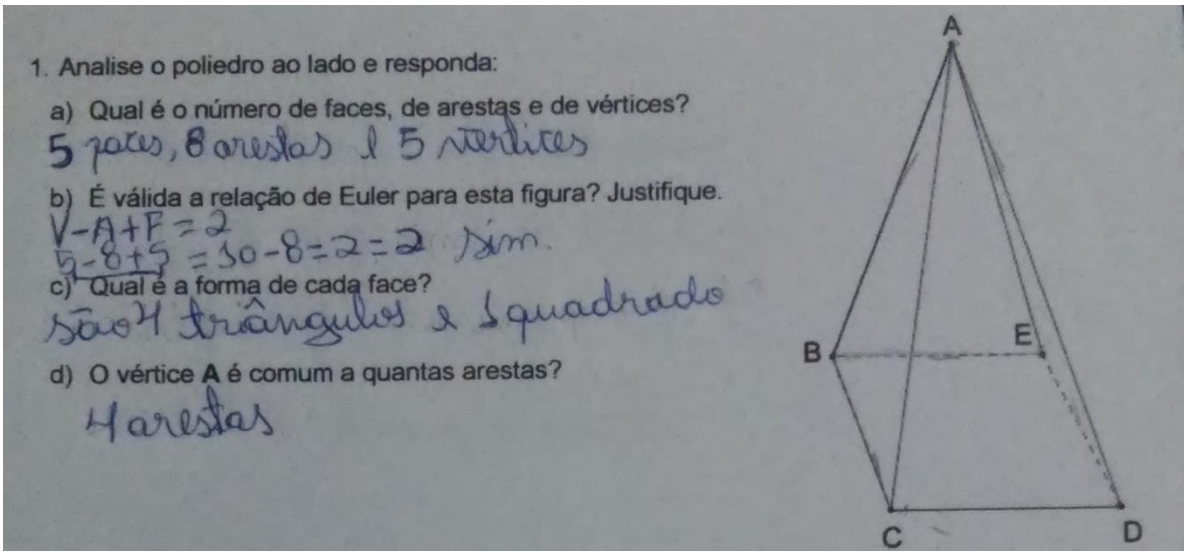
Figura 68 – Demonstração da fórmula da diagonal do paralelepípedo retângulo.



4.4 AULA 4: ATIVIDADE COM A PIRÂMIDE QUADRANGULAR E O PRISMA HEXAGONAL.

Esta atividade, realizada em 25/11/2015, teve como objetivo verificar se os alunos apresentavam imagens mentais de dois sólidos, como resultado das ações anteriormente desenvolvidas em sala de aula. Também queria dar ênfase mais uma vez à geometria plana solicitando aos estudantes o reconhecimento de figuras planas na constituição dos poliedros, além de mais uma vez conferir a aplicação da relação de Euler. Desta vez, vale ressaltar que os sólidos confeccionados pela classe não mais estavam presentes durante as atividades. Os alunos se empenharam bastante nessa atividade. Os resultados foram positivos, apesar de equívocos cometidos por alguns alunos, o que é compreensível para uma turma de cerca de 30 alunos. A seguir, alguns registros dessa atividade (Figuras 69 e 70).

Figura 69 – Atividade resolvida com a pirâmide quadrangular


1. Analise o poliedro ao lado e responda:

a) Qual é o número de faces, de arestas e de vértices?

5 faces, 8 arestas e 5 vértices

b) É válida a relação de Euler para esta figura? Justifique.

$V - A + F = 2$

$5 - 8 + 5 = 10 - 8 = 2 = 2$ Sim.

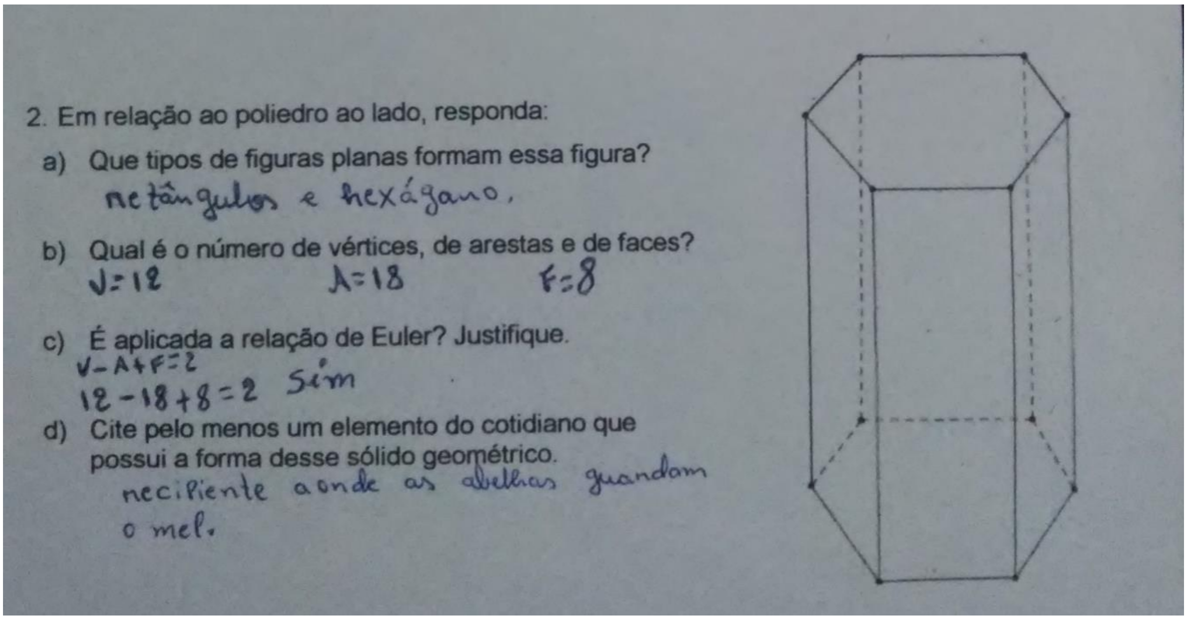
c) Qual é a forma de cada face?

São 4 triângulos e 1 quadrado

d) O vértice **A** é comum a quantas arestas?

4 arestas

Figura 70 – Atividade resolvida com o prisma hexagonal.



2. Em relação ao poliedro ao lado, responda:

a) Que tipos de figuras planas formam essa figura?

retângulos e hexágono,

b) Qual é o número de vértices, de arestas e de faces?

V=12 A=18 F=8

c) É aplicada a relação de Euler? Justifique.

V-A+F=2

12-18+8=2 Sim

d) Cite pelo menos um elemento do cotidiano que possui a forma desse sólido geométrico.

recipiente aonde as abelhas guardam o mel.

.4.5 AULA 5: ATIVIDADE FINAL.

Esta atividade foi realizada em 29/01/2016, com a aplicação de um simulado contendo duas questões (ver anexo 4). A primeira questão (do ENEM) se referia à confecção correta de três sólidos geométricos a partir dos desenhos de suas respectivas planificações. A segunda questão tratava da aplicação da relação de Euler para o hexaedro regular. Tais exercícios estavam intimamente relacionados com o que os alunos haviam estudado em aulas passadas.

O objetivo da 1ª questão era verificar se os estudantes fariam corretamente a relação entre cada planificação e sua correspondente representação tridimensional, como resultado das atividades de visualização desenvolvidas anteriormente em sala de aula nesse sentido, com modelos concretos. Os resultados foram positivos tendo em vista que, dos 28 alunos que fizeram o teste, 23 deles (82,14%) assinalaram a alternativa correta.

Já em relação à 2ª questão, esperava-se constatar se os estudantes haviam construído imagens mentais do hexaedro regular (cubo), uma vez que essa figura espacial não estava ante seus olhos. A estratégia para se chegar a esse resultado foi a aplicação da fórmula de Euler. Pois, para isso, os alunos deveriam lembrar-se dos elementos constituintes de um poliedro, algo que seria facilitado pela formação de imagens mentais oriundas da manipulação e visualização dos modelos concretos que eles construíram ao longo das atividades propostas anteriormente.

Mesmo com equívocos cometidos por alguns alunos nessa questão, até porque o nível de dificuldade era maior que na primeira, os resultados foram satisfatórios, havendo um aproveitamento de 71,4%, correspondente à aplicação correta da fórmula de Euler por um quantitativo de 20 alunos dos 28 participantes.

Vale ressaltar que alguns alunos fizeram o desenho do cubo como auxílio na resolução da 2ª questão. Isso deve ser considerado, pois a representação gráfica de um sólido geométrico nessa circunstância é também manifestação de imagens mentais.

Finalizo o relato dessa última atividade afirmando que a mesma foi desenvolvida dois meses após a penúltima atividade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento deste trabalho nos chamou à atenção a questão das causas responsáveis pelas dificuldades ocorridas no ensino de Geometria em geral. Dentre essas causas está o fato de essa matéria ser pouco ministrada aos estudantes das primeiras séries iniciais do ensino fundamental, apesar dos esforços de pesquisadores em mudar essa realidade.

> Apesar da preocupação que se tem observado com o ensino de Geometria entre os pesquisadores em Educação Matemática, especialmente a partir da década de 80, são ainda discretas as mudanças nesse quadro de quase ausência do tópico nas séries iniciais de escolarização. (FONSECA et al., 2009, p. 17)
>
> .

É óbvio que esse descaso com a Geometria acarretará, como já dissemos, prejuízos aos alunos no estudo dessa matéria em séries posteriores, além de ferir as orientações curriculares nacionais, uma vez que os PCN propõem ao Ensino Fundamental conteúdos que proporcionem às crianças atividades de exploração do espaço físico em que vivem, possibilitando-lhes a representação, interpretação e descrição desse espaço.

“Através das atividades sugeridas, pretende-se desenvolver habilidades que preparem os alunos para um estudo mais formal da Geometria futuramente”. (FONSECA et al., 2009, p. 27)

Notamos ainda, segundo proposta dos PCN, que o estudo da Geometria nos primeiros anos de escolarização deve-se iniciar pelas figuras espaciais. “Neste sentido, os sólidos geométricos comuns são objetos matemáticos mais próximos do mundo sensível e que menor esforço de abstração exige da criança”. (FONSECA e DAVID, s.d. apud FONSECA et al., 2009, p. 48).

Com isso, alegramo-nos com o fato de nosso trabalho trazer uma proposta pedagógica do uso de modelos concretos como uma alternativa para melhorar o ensino de Geometria Espacial que pode ser desenvolvida pelos professores de matemática desde as primeiras séries do Ensino Fundamental. Sem falar que os trabalhos educativos com materiais manipuláveis contribuem eficazmente para o desenvolvimento da visualização geométrica, habilidade fundamental para o desenvolvimento inicial do pensamento geométrico.

Diante do exposto nesse trabalho, é preciso que nós (professores de matemática) valorizemos mais o estudo da Geometria de um modo geral. Para isso, devemos refletir sobre nossas práticas educativas, buscando cada vez mais ações pedagógicas que venham contribuir efetivamente para o sucesso do ensino dessa ciência. Nesse contexto, faz-se necessário o uso recursos didáticos que venham nos auxiliar a tornar as aulas dessa disciplina mais interessantes e eficazes. Para tanto, é importante a reflexão e a discussão destas questões em todos os níveis de formação de professores de matemática.

Em particular ao que trata este trabalho, propomos a utilização de modelos concretos como recursos didáticos que realmente tem contribuído para a melhoria do ensino de Geometria Espacial; fato também comprovado em trabalhos desenvolvidos por outros colegas de profissão.

Para mostrarmos a eficácia do uso desses materiais, realizamos uma sequência de atividades com alunos do 2º do Ensino Médio de uma escola pública do município de Igarapé-Açu. Os resultados obtidos foram satisfatórios e podemos listá-los:

i) Grande empenho dos alunos nos desenhos das planificações dos sólidos geométricos, onde os mesmos aplicaram, aprenderam e compartilharam técnicas de medição de figuras geométricas planas;

ii) Os estudantes puderam constatar que a Geometria Espacial está intimamente ligada à Geometria Plana, mediante a montagem dos sólidos e resolução correta da maioria dos alunos nas atividades propostas nesse sentido;

iii) Os discentes desenvolveram habilidades de visualização em atividades de verificação de propriedades dos poliedros, como na atividade de aplicação da relação de Euler;

iv) A construção dos poliedros com varetas de madeira e jujubas contribuiu ainda mais para a capacidade de visualização dos alunos, pois deu a eles condições de resolverem em geral com sucesso as atividades que exigiam imagens mentais das figuras espaciais estudadas nas aulas;

v) A visualização do paralelepípedo retângulo na forma de modelo concreto (com diagonais da base e do paralelepípedo) foi importantíssima para facilitar a dedução da fórmula da diagonal dessa figura pelos alunos;

vi) Os alunos sentiram-se como criadores e compartilhadores do saber matemático. Fato esse verificado nos desenhos das planificações e nas construções dos poliedros com materiais alternativos de baixo custo;

vii) Os estudantes estabeleceram semelhanças entre os sólidos geométricos estudados com elementos da realidade, percebendo assim que a geometria espacial é parte integrante de suas vidas.

Portanto, foi de extrema valia a experiência vivida com esses estudantes, o que nos faz concluir que realmente o aluno deve ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, para que tenhamos de fato uma escola que verdadeiramente favoreça os processos formativos do educando.

Diante dessa última análise, finalizamos com um relato de um colega professor de matemática que, necessitando ensinar sobre sólidos geométricos a um aluno com perda de visão total, teve a ideia de recorrer a um esqueleto de poliedro como modelo concreto a fim de ministrar com êxito sua aula a esse estudante especial. De fato, o referido aluno compreendeu o conteúdo, uma vez que seu entendimento foi facilitado pela possibilidade de tatear tal figura espacial. E mais: o aluno tirou nota 9,5 no teste que a ele foi adequadamente aplicado.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Fabiana Chagas de. **Jujubas:** Uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio. Dissertação de Mestrado-UFRJ, Rio de Janeiro, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologia**.** Brasília: MEC, 2006.

________. Secretaria da Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

COZZOLINO, Adriana Maria. **O ensino da perspectiva usando o Cabri 3D:** uma experiência com alunos do ensino médio. Dissertação de Mestrado-PUC-SP, São Paulo, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010. Vol. 2, p. 206-246.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. **Educação Matemática:** Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FONSECA, Maria da Conceição F. R. et al. **O Ensino de Geometria na Escola Fundamental:** Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica editora, 2009.

GUEDES, Maria de Fátima dos Santos. **Estudando prismas com o auxílio de softwares educativos tridimensionais.** Dissertação de Mestrado-Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2013.

PASSOS, Cármen Lúcia B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 77-92.

RÊGO, Rômulo Marinho do; RÊGO, Rogéria Gaudencio do. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino da matemática. In: LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010. p. 39-56.

RITTER, Andréa Maria. **A visualização no ensino de geometria espacial:** possibilidades com o *software* Calques 3D. Dissertação de Mestrado-Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 187-196, 2012.

SANTOS, Cristiane de Oliveira**. A importância da visualização no ensino da geometria plana e espacial.** Monografia de Licenciatura-Universidade Estadual de Goiás, Jussara, 2009.

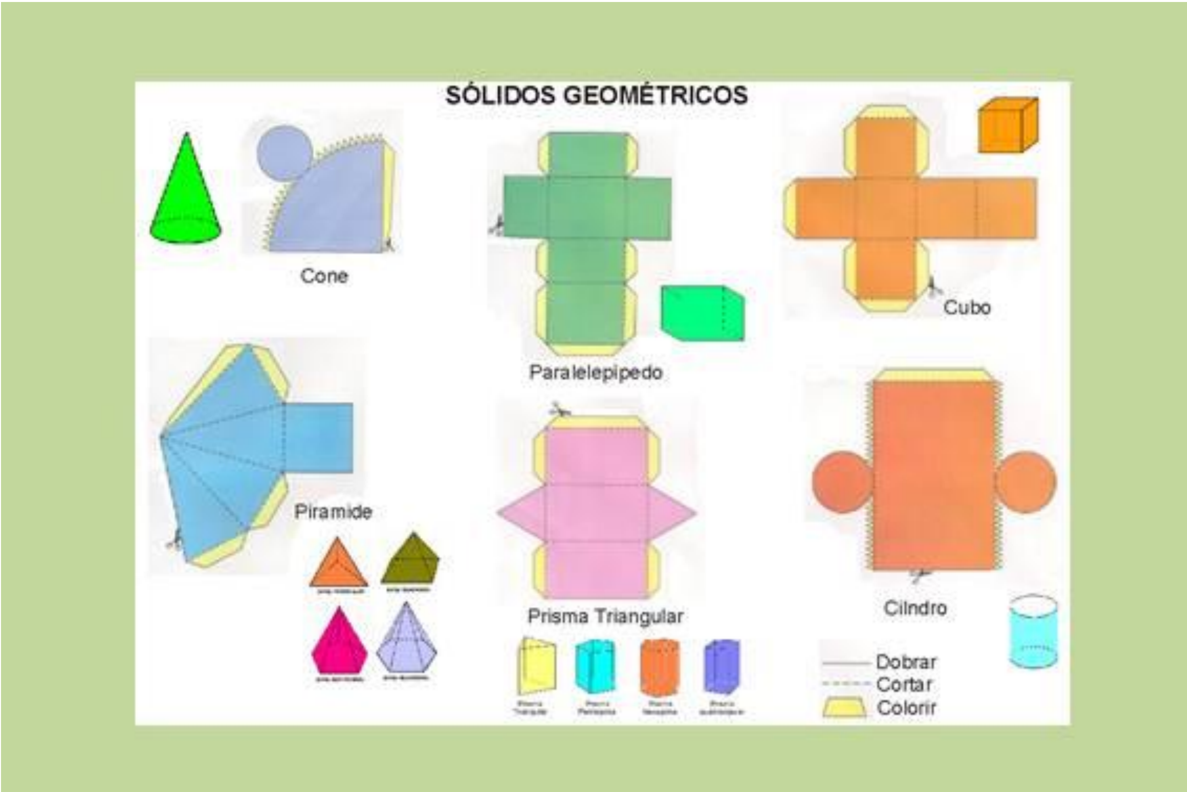
SILVA, Maurício Barbosa da. **A geometria espacial no ensino médio a partir da atividade *Webquest:*** análise de uma experiência. Dissertação de Mestrado-PUC-SP, São Paulo, 2006.

SOUZA, Jamille Vilas Boas de. **Os materiais manipuláveis e a participação dos alunos na aula de matemática.** Dissertação de Mestrado-Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2011.

VIEIRA, Carmem Rosilene. **Reinventando a geometria no ensino médio:** uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele. Dissertação de Mestrado-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ANEXOS

Anexo 1 – Planificação de sólidos geométricos



Disponível em:
http://www.google.com.br/search?q=planificação+de+sólidos+geométricos

Anexo 2 – Questionário

QUESTIONÁRIO

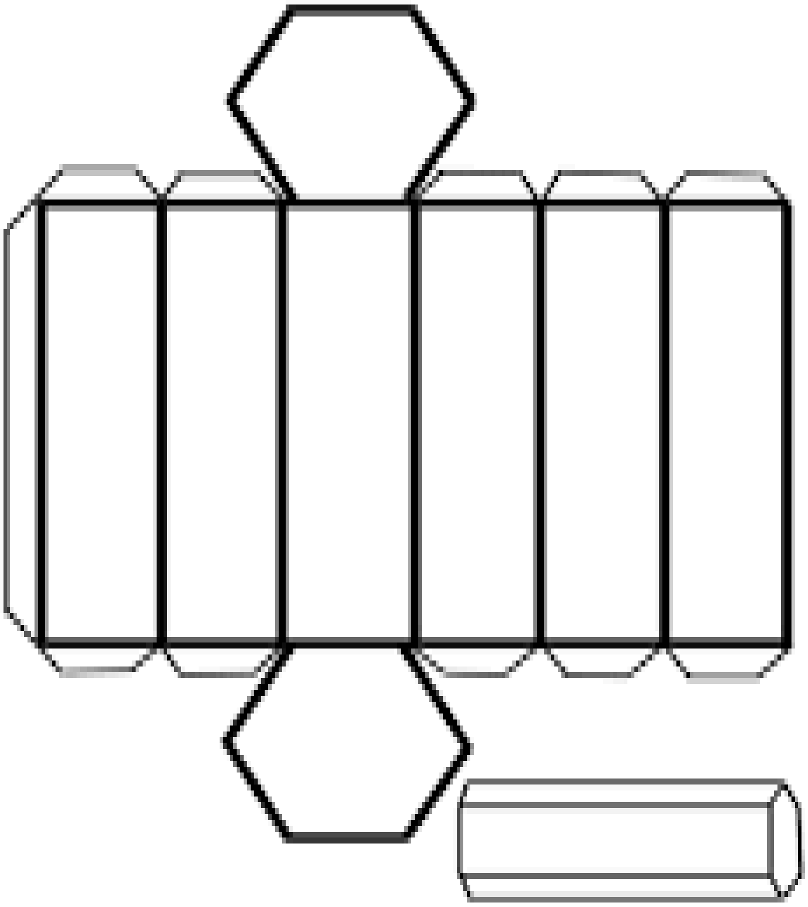
1. Que instrumentos de medição você utilizou para desenhar a planificação do seu sólido geométrico?

2. Você já tinha utilizado todos esses instrumentos antes? Se não, qual (ou quais) você ainda não tinha usado para fazer desenho geométrico?

3. Que figuras geométricas planas formam o sólido geométrico que você planificou?

4. Qual o nome do sólido que você montou após a planificação? Cite o nome de um objeto do cotidiano que tem o formato semelhante ao do sólido que você construiu.

Anexo 3 – Planificação do prisma hexagonal



Disponível em:

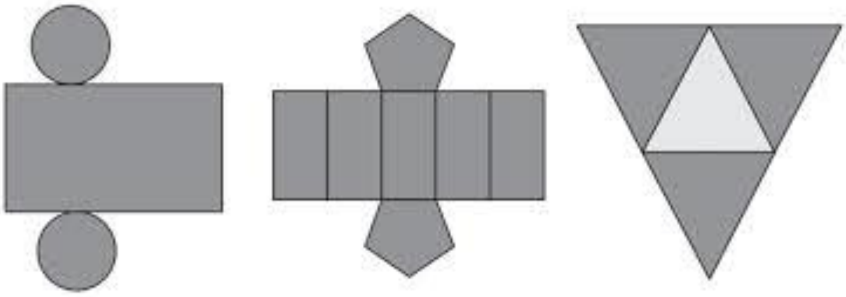
http://www.google.com.br/search?q=planificação+de+sólidos+geométricos

Anexo 4 – Atividade final

ATIVIDADE FINAL

Questão 01 (Enem)

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Questão 02

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) descobriu uma importante relação entre o número de vértices (**V**), o número de arestas (**A**) e o número de faces (**F**) de um poliedro convexo. Tal relação é definida pela equação **V – A + F = 2.**

Mostre que a relação de Euler pode ser aplicada para o **hexaedro regular**, mais conhecido como **cubo**.